

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE DES VIBRATIONS
DE FLEXION
DES ROTORS

Proposé Par :

Etudié par :

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

D. AIT-ALI Yahia

M. KSIAZEK

PROMOTION :

JUIN 1988

Ministère de l'enseignement supérieur

Ecole nationale polytechnique

Département : Mécanique

Promoteur : Ksiazek . M

Élève ingénieur : AIT ALI YAHIA DJAFFER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
فرع : الهندسة الميكانيكية
الموجه : كسيك
الطالب : أيت علي يحي جعفر

الموضوع : دراسة إهتزازات إنشاء الأعمدة

الملخص : يستهدف هذا العمل دراسة إهتزازات إنشاء الأعمدة، وعلى وجه الخصوص حساب السرعات للرجة لهذه الأعمدة. ومن ضمن الطرق المتعملة في هذا المضمار، اخترنا طريقة مصغرة التحويل، وأتمنا هذه الدراسة بإعداد برنامج معلوماتي للحساب وتطبيق ذلك على العمود المرفقي لمحرك من طراز (F4L912).

Sujet: Etude des Vibrations de flexion des rotors

Resume: L'objet de ce travail est l'étude des vibrations de flexion des rotors et plus exactement le calcul des vitesses critiques de flexion des rotors. Parmi les divers méthodes existantes de calcul, nous avons choisi la méthode des matrices de transfert. Cette étude est complétée par l'élaboration d'un logiciel de calcul ainsi qu'une application sur le vilebrequin du moteur F4L912.

Subjects: Study of the flexion vibrations of shafts

Abstract: The purpose of this work is to study the flexion vibrations of shafts. Particularly, we tried to determine the critical velocity of this shafts. Different methods have been proposed, In our case, we have applied the transfert matrixs method. we have completed our present study by of programme calcul and applyed it to a crankshaft engine F4L912.

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION	
1.1. Objectifs et methodologie	1
2. MODELISATION DES LIGNES D'ARBRES	2
2.1. Généralités	4
2.2. Modélisation des arbres non couvés	4
2.3. Modèle d'un tronçon d'arbre	6
2.2.1. Modèle d'un tronçon d'arbre	6
2.2.2. Modèle d'un arbre épaulé	7
2.2.3. Modèle d'un palier	8
3. DETERMINATION DES VITESSES CRITIQUES	9
3.1. Généralités	9
3.2. Hypothèses de l'étude	10
3.3. Différents types de lignes d'arbres étudiés	10
3.4. NOTations utilisées	11
3.5. Etude dynamique du disque j de la travée i	12
3.6. Matrice de passage du vecteur état à droite du palier i vers le vecteur état à gauche du premier disque de la travée i	16
3.6.1. Cas de l'appui simple	16
3.6.2. Cas de l'appui élastique	18
3.7. Matrice de raideur du tronçon séparant les disques j et $j+1$	20

3.8 - Matrice de passage du vecteur état à gauche du disque j vers le vecteur état à gauche du disque $j+1$	22
3.9 - Matrice de transfert relative à la travée $n^o i$	23
3.10 - Application à un arbre sur appuis rigides	25
3.11 - Application à un arbre sur appuis élastiques	27
4. LOGICIEL DE CALCUL DES VITESSES CRITIQUES	29
4.1 - Programmes " Puls "	29
4.2 - Données Numeriques	29
4.3 - Algorithme de recherche des vitesses critiques	30
4.4 - Noms des variables utilisées	31
4.5 - Calculs Préliminaires	33
4.5.1 - Arbres pleins	33
4.5.2 - Arbres portants des alésages	34
4.6 - Structure du programme " Puls "	34
4.7 - Organigrammes	36
5. EXEMPLE DE CALCUL DES VITESSES CRITIQUES DE LIGNES D'ARBRES	42
5.1 - Généralités	42
5.2 - Modélisation des arbres coudés	43
5.3 - Recherche du diamètre équivalent	46
5.3.1 - Diamètre équivalent d'une manivelle non symétrique	46
5.3.1.1 - Energie de déformation	46
5.3.1.2 - Energie de déformation du modèle	51
5.3.1.3 - Application numérique	52
5.3.2 - Diamètre équivalent d'une manivelle symétrique	54

5.3.2.1 - Energie de déformation de la manivelle.....	54
5.3.2.2 - Energie de déformation du modèle.....	54
5.3.2.3 - Application numérique.....	55
5.4 - Calcul des vitesses critiques du vilebrequin F4L 9-12.....	56
6 - EXPLOITATION DES RESULTATS.....	63
6.1 - Manifestation des vibrations.....	63
6.2 - Processus de sélection des vitesses critiques dangereuses.....	64
7 - CONCLUSION.....	65

DEDICASSE

Je dédis ce modeste travail à :

- Mes parents
- Mes frères et mes sœurs.
- Toute la famille
- Tous ceux qui témoignent qu'il n'y a
de dieux qu'allah et que Mohamed
est son prophète

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à M^r KSIZEK, pour ses précieux conseils, son éminent suivi, qui m'ont beaucoup aidé dans la réalisation de ce modeste ouvrage

Mes remerciements pour M^r BOUKABACHE, Directeur du département Genie Mécanique pour son aide et ses conseils

Je remercie, également, mon frère AZEDDINE pour ses conseils et son aide dans la mise au propre de ce présent ouvrage.

Que tous ceux qui ont contribué à ma formation, et à tous ceux qui par leurs soutiens moraux m'ont encouragé, trouvent ici l'expression de ma sincère reconnaissance

NOTATIONS UTILISEES

- E : Module d'élasticité longitudinal
 F : Section
 G : Module d'élasticité transversal
 J : Moment quadratique
 l : Longueur
 M_f : Moment fléchissant
 M_t : Couple
 m : Masse
 m_e : Moment d'encastrement
 N : Effort de compression
 P : Force
 Q : Effort tranchant
 R : Réaction des appuis
 U : Énergie de déformation
 α : coefficient numérique
 ω : vitesse de rotation
 ρ : masse volumique
 φ : Angle de déformation.

INTRODUCTION

Aussi loin qu'on puisse remonter dans l'histoire de l'homme et de la construction, la poutre a toujours été l'une des préoccupations majeures des constructeurs.

Dans une certaine continuité, l'ingénieur mécanicien exploita la poutre pour ses constructions. Il en fit même un rotor, et s'inquiéta de ses comportements.

A l'origine, il construisa des machines possédant des dimensions exagérées, avec des rotors massifs et fonctionnant à basse vitesse de rotation. Mais avec le développement de la technologie, il commença à alléger continuellement ces rotors et à accroître leurs vitesses de travail, sachant pertinemment que cet accroissement n'est pas indéfini et qu'il s'approche d'une vitesse limite marquant un domaine interdit. Il pensait à ce moment là, en terme de vitesse critique et de stabilité.

De plus en plus, l'ingénieur exigea beaucoup de la poutre et du rotor, et pour mieux les exploiter, il fallait mieux les connaître. Passer de la poutre au rotor c'était évidemment pénétrer plus profondément dans la dynamique "...et on n'a pas encore fini de s'étonner des comportements qui résultent de cette rotation imposée; ainsi l'amortissement bénéfique pour la poutre peut créer pour le rotor une instabilité destructrice." [1]

Afin de lever ces interrogations et répondre aux exigences d'une technologie moderne, en continuelle évolution, l'étude des problèmes de vibration acquerra une importance de plus en plus grande dans

les calculs des pièces machines et en particulier des rotors. c'est un fait bien connu, que seule la théorie des vibrations permet de comprendre entièrement nombre de problèmes dont l'importance pratique est considérable, tels que les vibrations de flexion et de torsion des arbres, des trains d'engrenages, vibrations des disques, des aubes de turbines et équilibrage des machines ... etc.

Ce n'est qu'en faisant usage de cette théorie que l'on pourra, dans un projet, assigner aux divers organes les dimensions qui permettront de maintenir les conditions de travail aussi éloignées que possible des conditions critiques dans lesquelles risqueraient de se produire de fortes vibrations.

Mais il est reconnu, aujourd'hui, que même tenues loin de la résonance, les vibrations altèrent la structure des matériaux, et par suite leur endurance.

Afin de diminuer cet effet, souvent il est fait recours, dans notre système, à des organes spéciaux pour étouffer les vibrations (les amortisseurs de vibration).

OBJECTIFS ET METHODOLOGIE

Dans ce projet ; nous nous sommes proposé d'étudier les vibrations de flexion par la détermination de leurs différentes vitesses critiques de rotations en se servant d'un logiciel approprié.

Tout d'abord, nous commençons ce projet par une illustration de quelques méthodes de modélisation des lignes d'arbres en flexion. Ces méthodes se résument en une transformation de la ligne d'arbre en un nombre fini de disques massiques sans épaisseurs, reliés

entre eux, par des tronçons déformables sans masses, le tous reposant ponctuellement sur des appuis simples rigides, et munis de ressorts dans le cas des paliers élastiques.

Par la suite, nous passons à la détermination des vitesses critiques de flexion, par l'application de la méthode des matrices de transfert sur le modèle représentant le système réel à étudier. Ceci nous donnera un système d'équations linéaires dont le second membre sera nul. Les valeurs de la vitesse de rotation, annulant le déterminant de ce système d'équation, représenteront les différentes vitesses critiques de flexion de la ligne d'arbre.

Mais, vue la complexité de ce calcul, nous nous sommes proposés d'élaborer un logiciel, permettant le calcul rapide de vitesses critiques pour les quatre (04) types de ligne d'arbres suivantes:

- ligne d'arbre simplement appuyée à ses 2 extrémités.
- ligne d'arbre comportant un porte à faux à gauche.
- ligne d'arbre comportant un porte à faux à droite.
- ligne d'arbre comportant deux porte à faux.

Nous cloterons, ce projet, par l'illustration d'une application de cette méthode de calcul des vitesses critiques de flexion sur le vilebrequin du moteur F4L 912.

MODELISATION DES LIGNES D'ARBRES

2.1 - GENERALITÉS

La complexité de l'étude d'un phénomène relatif à un système donné, suggère à substituer ce dernier par "esquisses" simplifiées ou modèles aux quels s'appliquent facilement les lois de la physique.

Nous désignerons par modélisation la démarche qui, partant d'une réalité objet, permet, par une intention, la formation d'un ensemble d'éléments appelés modèle. Le modèle exprime, donc, une des manifestations possibles d'un système.

Meadows définit le modèle, dans son rapport, comme étant un ensemble ordonné d'hypothèses à propos d'un système complexe. C'est une tentative pour comprendre un aspect donné d'un ensemble de phénomènes diversifiés. Cette tentative, précédé d'un choix d'observations et d'enseignements, a pour but d'établir un ensemble d'études générales applicables au sujet à traiter." [2]

Ainsi, il est nécessaire de créer pour une ligne d'arbre, différents modèles, suivant la nature de l'étude à effectuer. Par exemple:

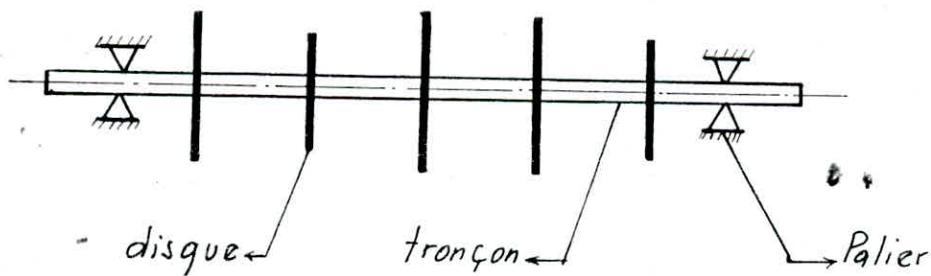
- Réalisation de l'équilibrage d'un système.
- Détermination des fréquences propres des vibrations à la flexion.
- Détermination des amplitudes.
- Détermination des fréquences propres des vibrations de torsion.

Chaque tentative de modélisation doit être précédée par une série d'observations sur le système simulé à reproduire le phénomène,

dont l'étude fait l'objet. La simulation permettra, ainsi, de mesurer les paramètres inconnus et de dresser une série d'informations sur le comportement de ce système.

Afin d'approcher fidèlement la réalité, les éléments de ces modèles doivent satisfaire à des critères généraux tels que : Proportionnalité entre efforts et déformations ; Conservation des moments quadratiques ; Conservation des masses, Conservation des moments d'inertie ; Conservation des différentes énergies ; ... etc.

Une modélisation des lignes d'arbres est pratiquée afin de déterminer leurs vitesses critiques de flexion. Cette modélisation conduit à la représentation du rotor par une suite de disques massifs sans épaisseur, liés par des tronçons déformables de masse nulle, et de diamètre constant. L'ensemble, disques et tronçons, est en contact ponctuel avec les paliers, et assistés par des ressorts dans le cas des paliers élastiques.



(fig 2.1) MODELE D'UNE LIGNE D'ARBRE

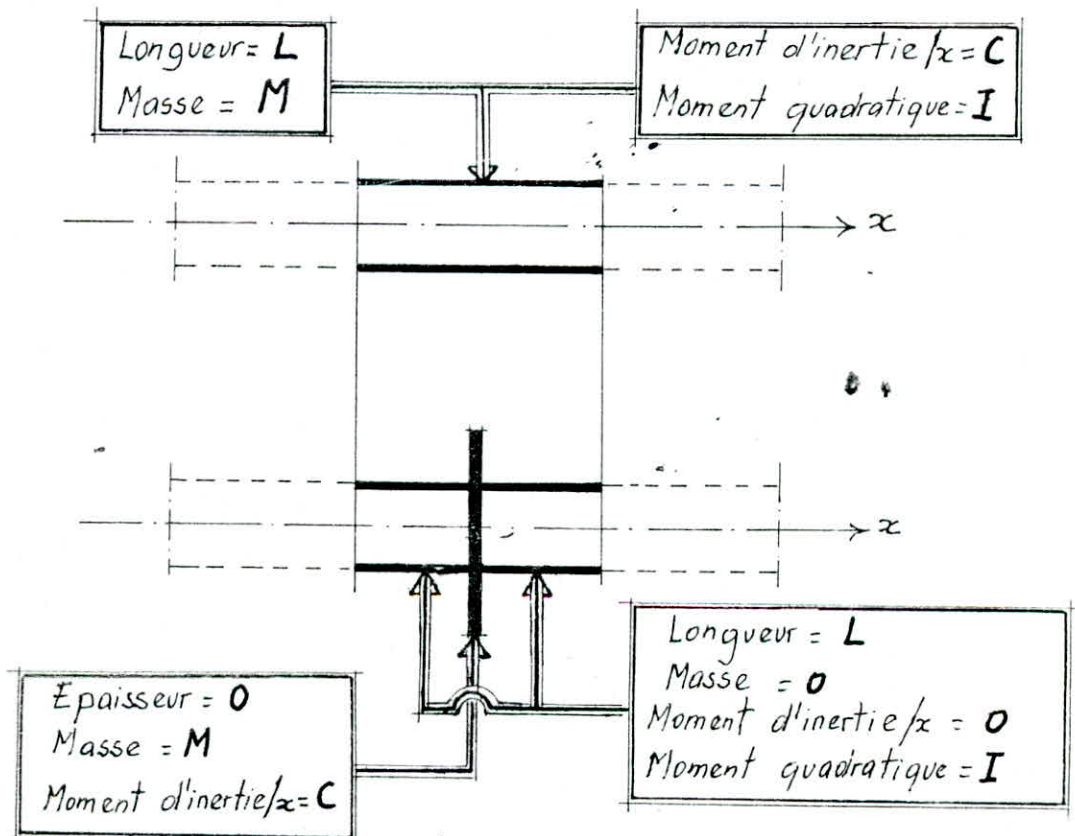
2.2 - MODELISATION DES ARBRES NON COUDES

2.2.1 MODELE D'UN TRONÇON D'ARBRE

Considérant un tronçon homogène de la ligne d'arbre de longueur L , et de diamètre constant. Cet élément est caractérisé par :

- sa longueur L
- sa masse M .
- son moment d'inertie par rapport à l'axe x , C .
- son moment quadratique I .

Cet élément est modélisé par un tronçon sans masse de longueur L , et de moment quadratique I , portant à son milieu un disque de masse M , de moment d'inertie C par rapport à l'axe x , et d'épaisseur nulle.



(fig 2.2)

2.2.2 MODELE D'UN ARBRE EPAULE

La modélisation d'un arbre épaulé revient à appliquer, plusieurs fois, le processus de modélisation d'un tronçon d'arbre, de diamètre constant, sur une série de tronçons, issus du découpage de l'arbre épaulé en plusieurs tronçons de diamètres constants et de longueur L .

Afin que le modèle de l'arbre épaulé ne s'éloigne pas trop de la réalité, il est préférable de prendre une longueur de tronçon h à l'endroit de la variation du diamètre relativement faible.

Pour illustrer cette méthode de modélisation, nous proposons l'exemple représenté ci-dessus :

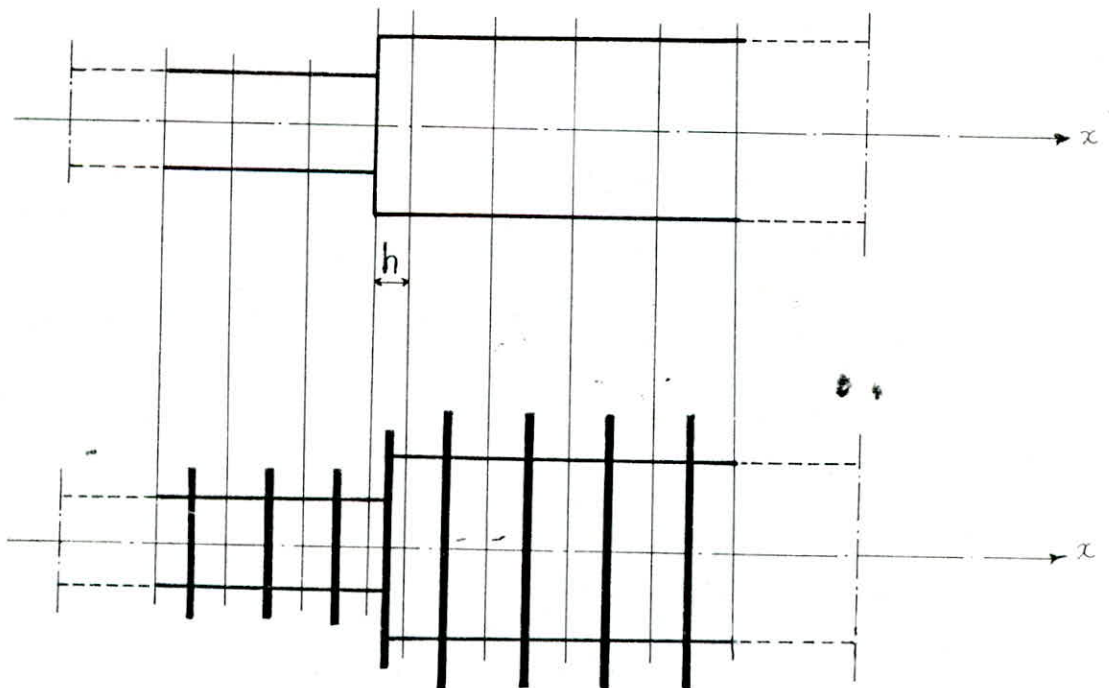


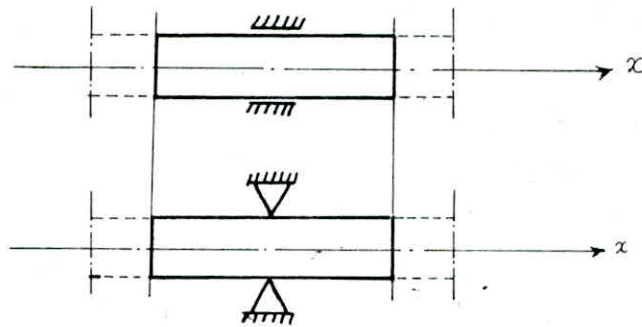
fig 2.3

2.2.3 - MODELES D'UN PALIER

Le palier pourra être modeliser de deux façons suivant sa rigidité

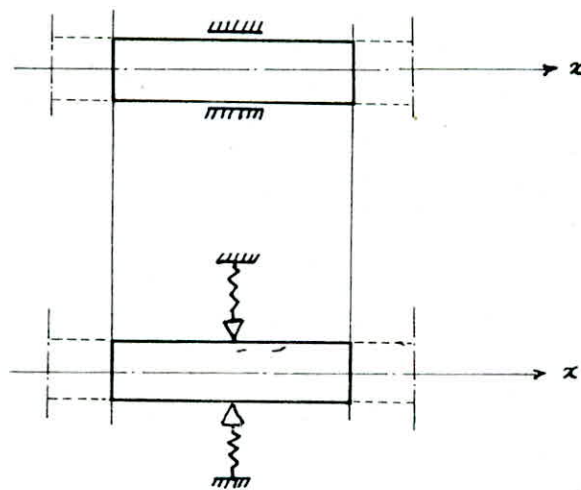
1^{er} MODELE

Si le palier est infiniment rigide, nous modelisons le palier par le modèle représenté ci-dessus



2^e MODELE

Si par contre le palier est élastique, nous substituons le palier par un ressort de raideur k équivalente à celle du film d'huile



Des fois, un amortisseur est ajouté au ressort pour traduire les pertes qui se produisent dans les paliers.

DETERMINATION DES VITESSES CRITIQUES

METHODE DES MATRICES DE TRANSFERT

3.1 GENERALITÉS

De nombreuses méthodes ont été utilisées pour la recherche des vitesses critiques de flexion des lignes d'arbres ; et grâce au développement des moyens de calcul, et au progrès réalisés dans le domaine de l'analyse numérique, ce nombre ne fait qu'augmenter afin d'approcher le plus fidèlement possible le système réel.

Parmi ces méthodes, nous citons les suivantes :

- Méthodes analytiques
 - * Systèmes discrets
 - * Systèmes continus
- Méthodes énergétiques
 - * Méthode de RAYLEIGH
 - * Méthode de RITZ
- Méthodes matricielles
 - * Méthode des matrices de transfert
 - * Méthode des éléments finis
- Méthode de STODOLA
- Méthode de BORDWICZ
- Méthode de DUNKERLEY

Parmi cet ensemble de méthodes, nous choisissons la méthode des matrices de transfert, car elle permet de calculer toutes les vitesses critiques de flexion d'un système conservatif avec une grande précision et rapidité.

à l'aide d'un logiciel appropriée. Comme elle permet aussi de calculer les déformations (déplacements angulaire et déplacement latéral) ainsi que les efforts de déformations (effort tranchant et moment fléchissant) au droit de chaque section du rotor.

3.2 - HYPOTHESES DE L'ETUDE

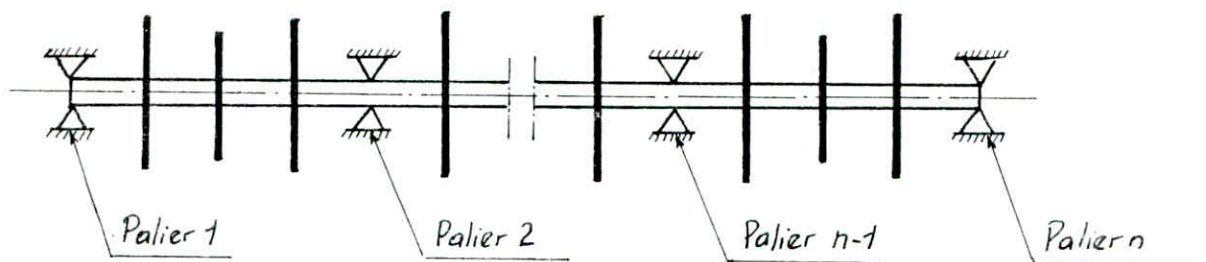
Avant d'appliquer la méthodes des matrices de transfert, citons quelques hypothèses relatives à cette méthode:

- Le système obéit à la loi de HODKE
- Le système est conservatif
- Seules les déformations de flexion sont prises en compte
- Les centres de gravités des disques appartiennent à l'axe de rotation
- Le rotor tourne avec une vitesse de rotation constante
- Les paliers seront considérés comme liaisons de types rotoïde parfait
- La largeur des paliers est nulle
- La raideur du film d'huile est constante.

3.3 - DIFFERENTS TYPES DE LIGNES D'ARBRES ETUDIEES

Dans ce projet, nous limitons notre étude aux lignes d'arbres non ramifiées, parmi les quelles nous citons:

- Lignes d'arbres dont les deux extrémités sont simplement appuyées (voir fig 3.1)



(fig 3.1)

- Lignes d'arbres simplement appuyées à une extrémité, libre à l'autre (voir - fig 3.2)

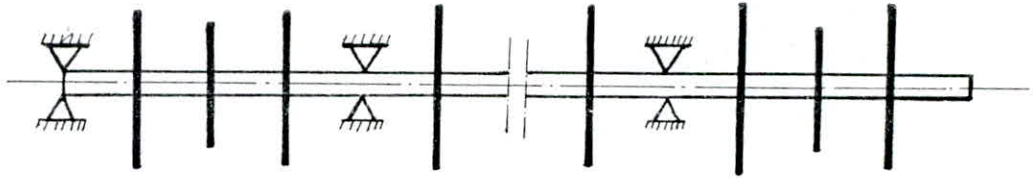


fig 3.2

- Lignes d'arbres dont les deux extrémités sont libres (voir - fig 3.3)

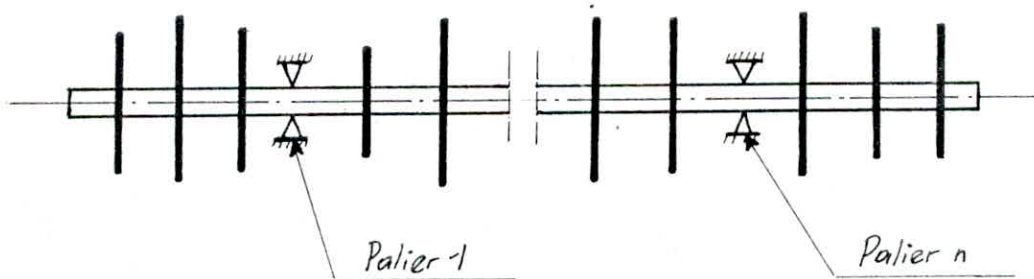
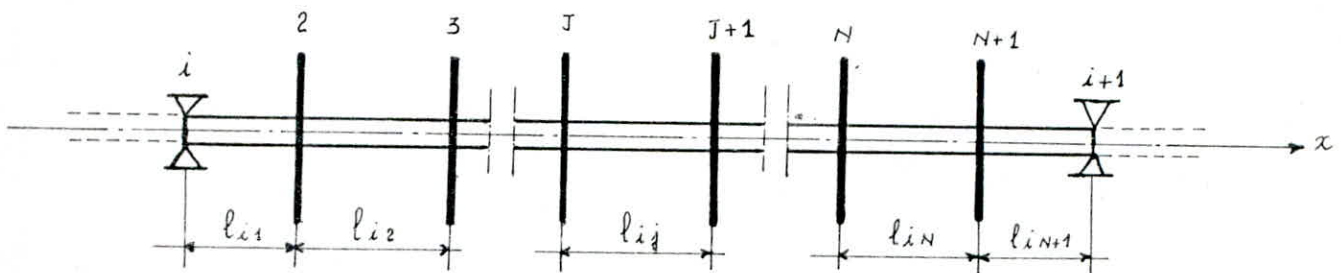


fig 3.3

3.4 - NOTATIONS UTILISEES

Afin de faciliter l'étude théorique de notre système, et vue la similitude de cette étude pour chaque travée, nous avons considéré le cas général qui se traduit par l'étude analytique des vibrations à la flexion de la i^{eme} travée.



Considérons la travée i du rotor ; cette travée comporte N disques.

Le premier disque a pour indice 2, le dernier $N+1$

m_{ij} : Masse du disque j de la travée i .

I_{ij} : Moment d'inertie du disque j de la travée i par rapport à l'axe x

l_{ij} : Longueur du tronçon compris entre j et $j+1$

I_{ij} : Moment quadratique du tronçon compris entre le disque j et $j+1$

B_{ij} : Raideur en flexion du tronçon compris entre le disque j et $j+1$,

tel que : $B_{ij} = E I_{ij}$

Les efforts et déformations au niveau du disque j seront représentées par les vecteurs suivants :

$$(\psi_j)' = \begin{pmatrix} Q_j' \\ M_j' \\ \varphi_j' \\ U_j' \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur état à droite du disque } j$$

$$(\psi_j) = \begin{pmatrix} Q_j \\ M_j \\ \varphi_j \\ -U_j \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur état à gauche du disque } j$$

Nous distinguons les efforts et déformations au niveau de l'appui à l'aide du symbole (*).

$$(\Psi_i^*)' = \begin{pmatrix} Q_i^{*'} \\ M_i^{*'} \\ \varphi_i^{*'} \\ u_i^{*'} \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur état à droite de l'appui } i$$

$$(\Psi_i^*) = \begin{pmatrix} Q_i^* \\ M_i^* \\ \varphi_i^* \\ u_i^* \end{pmatrix} \quad \text{le vecteur état à gauche de l'appui } i$$

3.5 - ETUDE DYNAMIQUE DU DISQUE j DE LA TRAVÉE i

Repères utilisés :

$OX_0 Y_0 Z_0$ = repère fixe tel que OX_0 confondu avec l'axe des paliers

$OX_1 Y_1 Z_1$ = repère mobile lié au rotor tel que

$$\bar{X}_1 = \bar{X}_0 \\ \text{et } (\bar{Y}_0, \bar{Y}_1) = \omega t$$

$OX_2 Y_2 Z_2$ = repère mobile lié au disque tel que :

$$(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \varphi_j$$

A La vitesse ω le mobile flexible est déformé . On suppose que cette déformée se situe dans le plan (X_1, Y_1) . La déformation au droit du disque (i, j) est caractérisée par :

φ_j : rotation du disque j autour de $Z_1 = Z_2$

u_j : flèche de l'arbre au droit du disque j

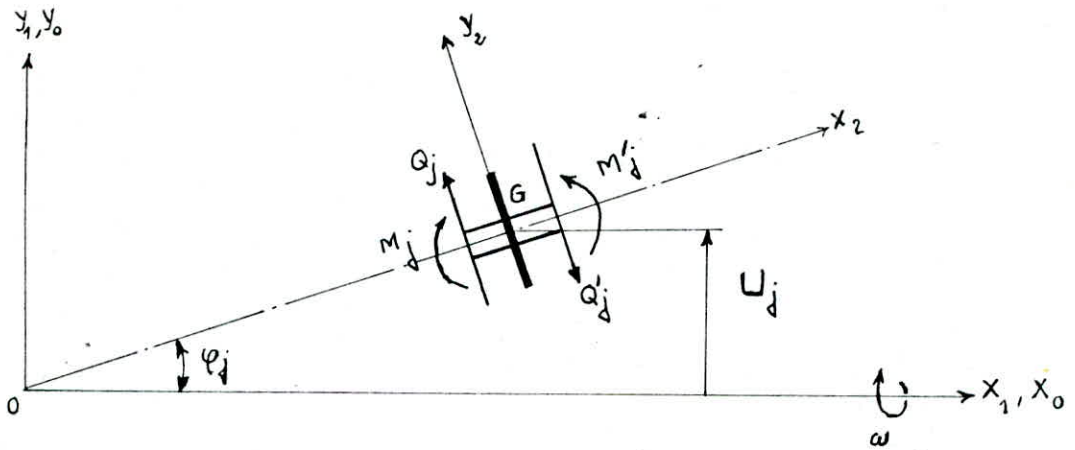


fig 3.5

Les actions mécaniques exercées par les tronçons situés à gauche et à droite sur le disque sont :

- un effort $Q_j \vec{Y}_2$
- et un moment $M_j \vec{Z}_2$ à gauche
- un effort $-Q'_j \vec{Y}_2$
- et un moment $-M'_j \vec{Z}_2$ à droite

En appliquant les théorèmes généraux de la dynamique au disque et en considérant l'angle φ_j faible ($\varphi_j = \text{tg } \varphi_j$) ; on obtient les relations suivantes :

$$m_{ij} \vec{a}_2^o(G) = (Q_j - Q'_j) \vec{Y}_2 \quad (1)$$

$$(C_{ij} - A_{ij}) \vec{\varphi}^o(G) = (M_j - M'_j) \vec{Z}_2 \quad (2)$$

avec A_{ij} : le moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{Z}_2

L'équation (2) traduit l'effet gyroscopique du disque.

En supposant que le centre de gravité du disque (G) vibre avec des oscillations harmoniques, on obtient les équations suivantes :

$$a_2^o(G) = -\omega^2 U_j \quad (3)$$

$$\ddot{\varphi}(G) = -\omega^2 \varphi_j \quad (4)$$

Pour un tronçon cylindrique, le moment d'inertie par rapport à l'axe x_2 (voir-fig 3.6) est donné par la formule suivante :

$$C_{ij} = \frac{m_{ij} D_{ij}^2}{8} \quad (5)$$

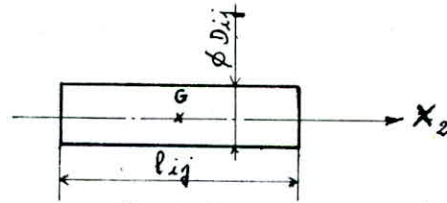


fig 3.6

Pour le même tronçon cylindrique, le moment par rapport à l'axe Z_2 (voir fig 3.7) est donné par la formule suivante :

$$A_{ij} = \frac{m_{ij} D_{ij}^2}{16} + \frac{m_{ij} l_{ij}^2}{12} \quad (6)$$

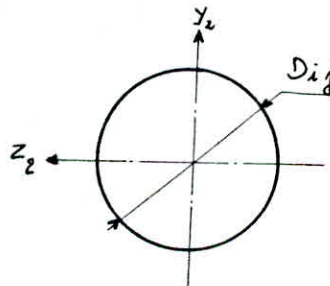


fig 3.7

Mais vu que dans le cas d'une modélisation en flexion, la longueur d'un tronçon est relativement faible, nous négligerons alors le terme $\frac{m_{ij} l_{ij}^2}{12}$ devant le terme $\frac{m_{ij} D_{ij}^2}{16}$, de ce fait, l'équation (6) devient :

$$A_{ij} = \frac{m_{ij} D_{ij}^2}{16} \quad (7)$$

En comparant les équations (6) et (7), nous trouvons :

$$A_{ij} = \frac{C_{ij}}{2} \quad (8)$$

En substituant les équations (3), (4) et (8) dans les équations (1) et (2),
 Nous obtenons les deux équations suivantes :

$$-m_{ij} \omega^2 U_j = Q_j - Q'_j \quad (9)$$

$$-\frac{C_{ij}}{2} \omega^2 \varphi_j = M_j - M'_j \quad (10)$$

3.6 - MATRICE DE PASSAGE DU VECTEUR ETAT A DROITE DU PALIER i VERS LE VECTEUR ETAT A GAUCHE DU PREMIER DISQUE DE LA TRAVÉE i

3.6.1 - CAS DE L'APPUI SIMPLE

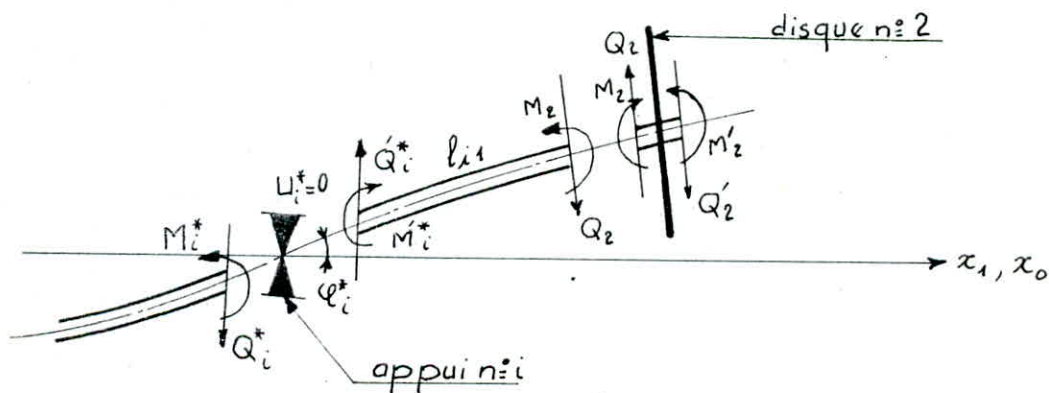


fig 3.8

Le premier tronçon de la travée i de longueur l_{i1} est sans masse. L'appui-n° i étant infiniment rigide, le déplacement de l'arbre à ce niveau sera nul $U_i^* = 0$.

L'élément étant en équilibre, nous avons les relations suivantes :

$$Q_2 = Q_i^* \quad (11)$$

$$M_2 = M_i^* + Q_i^* l_{i1} \quad (12)$$

Mais vu l'égalité des moments fléchissants à gauche et à droite de l'appui i ; l'équation devient :

$$M_2 = M_i^* + Q_i^* l_{i+1} \quad (13)$$

Le moment fléchissant au droit de la section se trouvant à une abscisse x_2 de l'appui gauche est égal à :

$$M_f(x_2) = - Q_i^* x_2 - M_i^* \quad (14)$$

En substituant l'équation ci-dessus dans l'équation différentielle de la ligne élastique, ceci donne :

$$EI_{ij} U_2'' = \frac{Q_i^* x_2 + M_i^*}{B_{i1}} \quad (15)$$

Après deux intégrations, nous obtenons le déplacement

$$U_2(x_2) = \frac{1}{B_{i1}} \left(Q_i^* \frac{x_2^3}{6} + M_i^* \frac{x_2^2}{2} \right) + Ax_2 + B \quad (17)$$

ou A et B sont les constantes d'intégration que nous choisissons de manière à satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$\text{pour } x_2 = 0 \quad \varphi_2(0) = \varphi_i^* \quad \text{et} \quad U_2(0) = 0$$

Afin de vérifier ces deux conditions cités ci-haut, les deux constantes A et B doivent prendre les valeurs suivantes :

$$A = \varphi_i^* \quad \text{et} \quad B = 0$$

Pour l'abscisse x_2 égal à l_{i1} , la rotation et le déplacement sont donnés par les relations suivantes :

$$\Psi_2 = \frac{1}{B_{i1}} \left(Q_i'^* \frac{l_{i1}^2}{2} + M_i'^* l_{i1} \right) + \Psi_i'^* \quad (18)$$

$$U_2 = \frac{1}{B_{i1}} \left(Q_i'^* \frac{l_{i1}^3}{6} + M_i'^* \frac{l_{i1}^2}{2} \right) + \Psi_i'^* l_{i1} \quad (19)$$

La matrice de passage $[V_i]$ est définie par la relation suivante

$$\Psi_2 = [V_i] (\Psi_i^*)' \quad (20)$$

$$(\Psi_2) = \begin{pmatrix} Q_i'^* \\ l_{i1} Q_i'^* + M_i'^* \\ \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} Q_i'^* + \frac{l_{i1}}{B_{i1}} M_i'^* + \Psi_i'^* \\ \frac{l_{i1}^3}{6B_{i1}} Q_i'^* + \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} M_i'^* + l_{i1} \Psi_i'^* \end{pmatrix} ; \quad (\Psi_i^*)' = \begin{pmatrix} Q_i'^* \\ M_i'^* \\ \Psi_i'^* \\ U_i'^* \end{pmatrix}$$

Par identification, nous trouvons que :

$$[V_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{i1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} & \frac{l_{i1}}{B_{i1}} & 1 & 0 \\ \frac{l_{i1}^3}{6B_{i1}} & \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} & l_{i1} & 1 \end{bmatrix}$$

3.6.2 - CAS DE L'APPUI ELASTIQUE

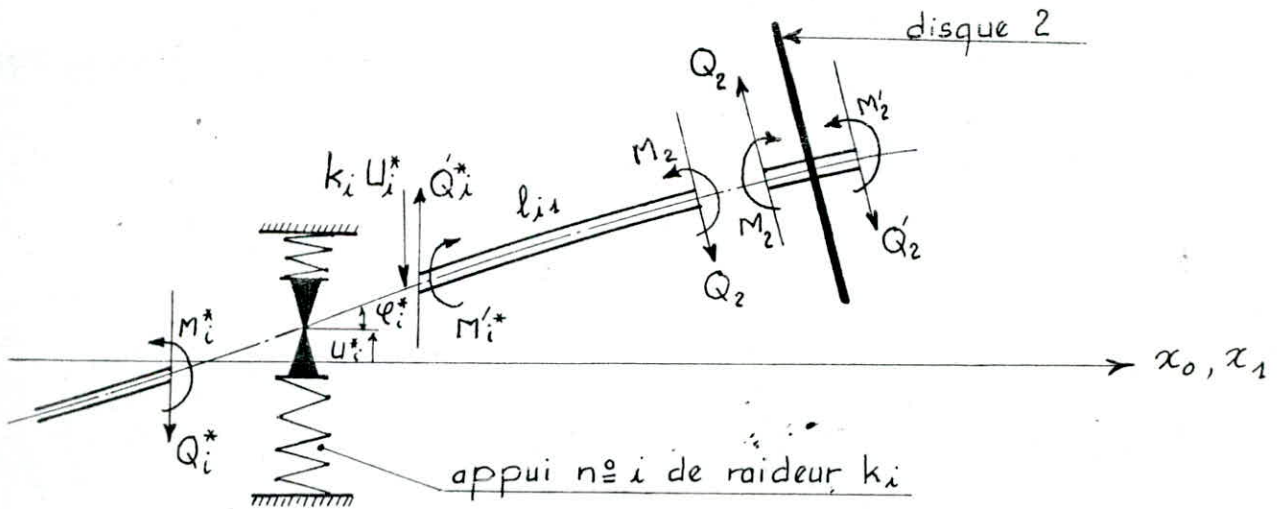


fig 3.9

L'effort Q_i^* à droite du palier n° i élastique peut être déduit du cas précédent en considérant le déplacement U_i^* au niveau du palier. Le déplacement induit un effort $-K_i U_i^*$ si K_i est la raideur de l'appui. L'effort Q_i^* devient alors $Q_i^* - K_i U_i^*$.

Les relations efforts déformations sont les suivantes pour ce cas

$$Q_2 = Q_i^* - K_i U_i^* \quad (21)$$

$$M_2 = M_i^* + (Q_i^* - K_i U_i^*) l_{i1} \quad (22)$$

$$\varphi_2 = \varphi_i^* + \frac{M_i^*}{B_{i1}} l_{i1} + (Q_i^* - K_i U_i^*) \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} \quad (23)$$

$$U_2 = U_i^* + M_i^* \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} + (Q_i^* - K_i U_i^*) \frac{l_{i1}^3}{6B_{i1}} + \varphi_i^* l_{i1} \quad (24)$$

REMARQUE

- Si U_i^* et Q_i^* sont les déformations de l'arbre à gauche du

palier n° i, nous avons les relations :

$$U_i^* = U_i'^* \quad (25)$$

$$\varphi_i^* = \varphi_i'^* \quad (26)$$

Si M_i^* et Q_i^* sont les actions mécaniques appliquées à l'arbre à gauche du palier n° i, nous avons les relations :

$$M_i^* = M_i'^* \quad (27)$$

$$Q_i^* = Q_i'^* + K_i U_i^* \quad (28)$$

La matrice de passage $[V_i]$ est définie par la relation :

$$(\Psi_2) = [V_i] (\Psi_1)^* \quad (29)$$

Par analogie avec le cas précédent, nous trouvons :

$$[V_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -K_i \\ l_{i1} & 1 & 0 & -K_i l_{i1} \\ \frac{l_{i1}}{2B_{i1}} & \frac{l_{i1}}{B_{i1}} & 1 & -K_i \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} \\ \frac{l_{i1}^3}{6B_{i1}} & \frac{l_{i1}^2}{2B_{i1}} & l_{i1} & 1 - K_i \frac{l_{i1}^3}{6B_{i1}} \end{bmatrix}$$

3.7 - MATRICE DE RAIDEUR DU TRONÇON SEPARANT LES DISQUES j ET j+1

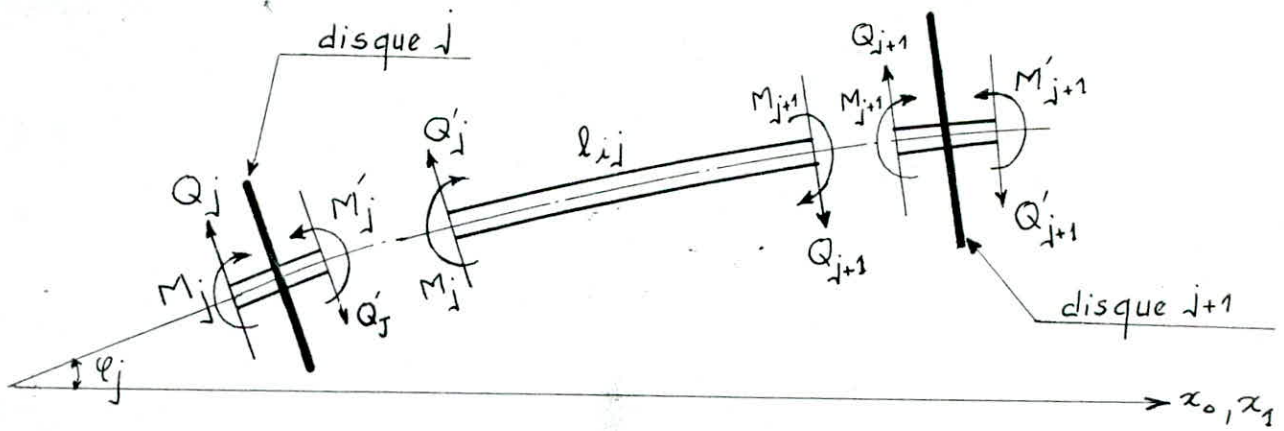


fig 3.10

L'élément séparant les disques j et $j+1$ est seulement fléchi dans le plan (x_1, y_1) . Nous supposons qu'il n'y a pas de torsion.

L'élément l_{ij} de masse nulle étant en équilibre, nous avons les relations suivantes :

$$Q_{j+1} = Q'_j \quad (30)$$

$$M_{j+1} = l_{ij} Q'_j + M'_j \quad (31)$$

En appliquant les relations de la Résistance des Matériaux ; Ceci nous donne les déformations du disque $j+1$:

$$\psi_{j+1} = \frac{l_{ij}^2}{2B_{ij}} Q'_j + \frac{l_{ij}}{B_{ij}} M'_j + \psi'_j \quad (32)$$

$$U_{j+1} = \frac{l_{ij}^3}{6B_{ij}} Q'_j + \frac{l_{ij}^2}{2B_{ij}} M'_j + l_{ij} \psi'_j + U'_j \quad (33)$$

La théorie des poutres définit la matrice de raideur $[v]$ telle que :

$$(\psi_{j+1}) = [v] \cdot (\psi_j)'$$

D'après les équations (30), (31), (32) et (33) ; nous obtenons

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{ij} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\ell_{ij}^2}{2B_{ij}} & \frac{\ell_{ij}}{B_{ij}} & 1 & 0 \\ \frac{\ell_{ij}^3}{6B_{ij}} & \frac{\ell_{ij}^2}{2B_{ij}} & \ell_{ij} & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $[V]$ permet donc, connaissant l'état effort de déformation à droite du disque j , de déterminer les éléments du vecteur état à gauche du disque $j+1$

3.8 - MATRICE DE PASSAGE DU VECTEUR ETAT A GAUCHE DU DISQUE j VERS LE VECTEUR ETAT A GAUCHE DU DISQUE $j+1$

En tenant compte des relations (9) et (10), nous pouvons définir une matrice $[N_j]$ permettant à partir du vecteur état à gauche du disque j de déterminer le vecteur état à gauche du disque $j+1$

En substituant les équations (9) et 10 dans les équations (30), (31) (32) et (33), ceci donne :

$$Q_{j+1} = \frac{\ell_{ij}^2}{2B_{ij}} Q_j + \frac{\ell_{ij}}{B_{ij}} M_j + \left(\frac{\ell_{ij}}{2B_{ij}} C_{ij} \omega^2 + 1 \right) \varphi_j + \frac{\ell_{ij}^2}{2B_{ij}} m_{ij} \omega^2 U_j \quad (34)$$

$$U_{j+1} = \frac{\ell_{ij}^3}{6B_{ij}} Q_j + \frac{\ell_{ij}^2}{2B_{ij}} M_j + \left(\frac{\ell_{ij}^2}{4B_{ij}} C_{ij} \omega^2 + \frac{\ell_{ij}}{2} \right) \varphi_j + \left(\frac{\ell_{ij}^3}{6B_{ij}} m_{ij} \omega^2 + 1 \right) U_j \quad (35)$$

$$Q_{j+1} = Q_j + m_{ij} \omega^2 U_j \quad (36)$$

$$M_{j+1} = \ell_{ij} Q_j + M_j + \frac{C_{ij}}{2} \omega^2 \varphi_j + \ell_{ij} m_{ij} \omega^2 U_j \quad (37)$$

Par définition de la matrice $[N_j]$, nous posons :

$$(\Psi_{j+1}) = [N_j] (\Psi_j)$$

En tenant compte des équations (34), (35), (36) et (37), nous obtenons :

$$[N_j] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_{ij} \omega^2 \\ l_{ij} & 1 & \frac{C_{ij}}{2} \omega^2 & m_{ij} l_{ij} \omega^2 \\ \frac{l_{ij}^2}{2 B_{ij}} & l_{ij} & 1 + \frac{C_{ij} l_{ij}}{2 B_{ij}} \omega^2 & m_{ij} \frac{l_{ij}^2}{2 B_{ij}} \omega^2 \\ \frac{l_{ij}^3}{6 B_{ij}} & \frac{l_{ij}^2}{2 B_{ij}} & l_{ij} + \frac{C_{ij} l_{ij}^2}{4 B_{ij}} \omega^2 & 1 + m_{ij} \frac{l_{ij}^3}{6 B_{ij}} \omega^2 \end{bmatrix}$$

3.9. MATRICE DE TRANSFERT RELATIVE A LA TRAVÉE N° i

Considérons la travée n° i comportant n disques. le premier disque a pour indice 2, le dernier n+1

Nous pouvons écrire les équations matricielles suivantes :

$$(\Psi_2) = [V_i] (\Psi_i^*)'$$

$$(\Psi_3) = [N_2] (\Psi_2)$$

$$(\Psi_4) = [N_3] (\Psi_3)$$

⋮

⋮

⋮

$$(\Psi_{n+1}) = [N_n] (\Psi_n)$$

$$(\Psi_{i+1}^*) = [N_{n+1}] (\Psi_{n+1})$$

A l'aide de ces relations matricielles, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{aligned}(\Psi_3) &= [N_2][V_i](\Psi_i^*) \\ (\Psi_4) &= [N_3][N_2][V_i](\Psi_i^*)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\Psi_{n+1}) &= [N_n][N_{n-1}] \dots [N_3][N_2][V_i](\Psi_i^*)' \\ (\Psi_{i+1}^*) &= [N_{n+1}][N_n] \dots [N_3][N_2][V_i](\Psi_i^*)'\end{aligned}$$

Passons que :

$$[\alpha_i] = [N_{n+1}][N_n] \dots [N_3][N_2][V_i]$$

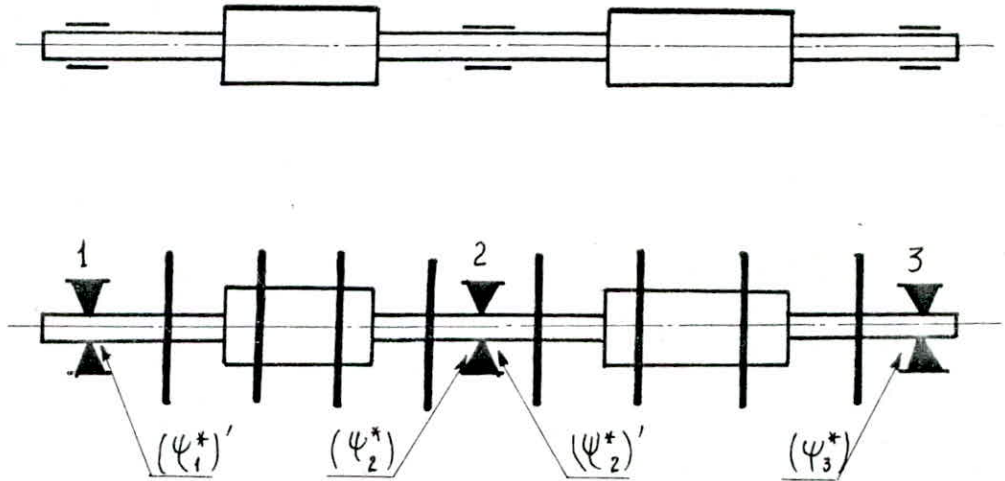
d'où

$$(\Psi_{i+1}^*) = [\alpha^i](\Psi_i^*)'$$

$[\alpha^i]$ est la matrice de transfert relative à la travée i .

3.10. APPLICATION A UN ARBRE SUR APPUIS RIGIDES

Soit un arbre reposant sur 3 appuis rigides et possédant 2 traverses



(fig. 3.11) MODELE DE LA LIGNE D'ARBRE

Compte tenu des conditions limites du système ci-haut, les vecteurs états aux appuis ont pour composantes :

- à l'appui 1

$$(\psi_1^*)' = \begin{pmatrix} Q_1'^* \\ M_1'^* = 0 \\ \varphi_1'^* \\ U_1'^* \end{pmatrix}$$

- à l'appui 3

$$(\psi_3^*) = \begin{pmatrix} Q_3^* \\ M_3^* = 0 \\ \varphi_3^* \\ U_3^* \end{pmatrix}$$

- à l'appui 2

$$(\psi_2^*) = \begin{pmatrix} Q_2^* \\ M_2^* \\ \varphi_2^* \\ U_2^* = 0 \end{pmatrix}$$

$$(\psi_2^*)' = \begin{pmatrix} Q_2'^* \\ M_2'^* = M_2^* \\ \varphi_2'^* = \varphi_2^* \\ U_2'^* = 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons pour cette ligne d'arbre 2 relations matricielles :

$$(\Psi_2^*)' = [\alpha^1] (\Psi_1^*)'$$

$$(\Psi_3^*) = [\alpha^2] (\Psi_2^*)'$$

En développant ces deux équations matricielles, nous trouvons :

$$\alpha_{11}^1 Q_1'^* + 0 + \alpha_{13}^1 \Psi_1'^* - Q_2^* = 0$$

$$\alpha_{21}^1 Q_1'^* + 0 + \alpha_{23}^1 \Psi_1'^* - M_2^* = 0$$

$$\alpha_{31}^1 Q_1'^* + 0 + \alpha_{33}^1 \Psi_1'^* - \Psi_2^* = 0$$

$$\alpha_{41}^1 Q_1'^* + 0 + \alpha_{43}^1 \Psi_1'^* - 0 = 0$$

$$\alpha_{11}^2 Q_2'^* + \alpha_{12}^2 M_2^* + \alpha_{13}^2 \Psi_2'^* - Q_3^* = 0$$

$$\alpha_{21}^2 Q_2'^* + \alpha_{22}^2 M_2^* + \alpha_{23}^2 \Psi_2'^* - 0 = 0$$

$$\alpha_{31}^2 Q_2'^* + \alpha_{32}^2 M_2^* + \alpha_{33}^2 \Psi_2'^* - \Psi_3^* = 0$$

$$\alpha_{41}^2 Q_2'^* + \alpha_{42}^2 M_2^* + \alpha_{43}^2 \Psi_2'^* - 0 = 0$$

Nous obtenons ainsi un système de 8 équations à 8 inconnues :

$$Q_1'^*, \Psi_1'^*, Q_2^*, M_2^*, \Psi_2^*, Q_3^*, Q_2'^* \text{ et } \Psi_3^*$$

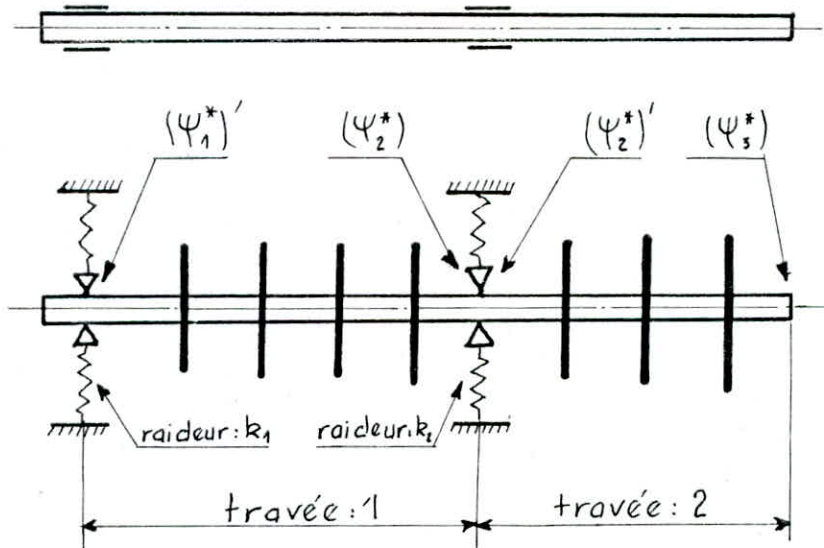
Le système linéaire homogène admet une solution non banale pour les valeurs de w qui annulent le déterminant. Ces valeurs de w représentent les vitesses critiques.

Le déterminant de notre système sera comme suit :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{13}^1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{23}^1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{31}^1 & \alpha_{33}^1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \alpha_{41}^1 & \alpha_{43}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{12}^2 & \alpha_{13}^2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{22}^2 & \alpha_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{32}^2 & \alpha_{33}^2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{42}^2 & \alpha_{43}^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3.11 - APPLICATION A UN ARBRE SUR APPUIS ELASTIQUES

Considérons un arbre sur 2 appuis élastiques avec un porte à faux



(fig 3.12) MODÈLE DE LA LIGNE D'ARBRE

Les vecteurs états aux appuis et à l'extrémité libre ont pour composantes :

- à l'appui 1

$$(\psi_1^*)' = \begin{pmatrix} Q_1'^* \\ M_1'^* = 0 \\ \psi_1'^* \\ U_1'^* \end{pmatrix}$$

- à l'extrémité libre

$$(\psi_3^*) = \begin{pmatrix} Q_3^* = 0 \\ M_3^* = 0 \\ \psi_3^* \\ U_3^* \end{pmatrix}$$

- à l'appui 2

$$(\psi_2^*) = \begin{pmatrix} Q_2^* \\ M_2^* \\ \psi_2^* \\ U_2^* \end{pmatrix}$$

$$(\psi_2^*)' = \begin{pmatrix} Q_2'^* \\ M_2'^* = M_2^* \\ \psi_2'^* = \psi_2^* \\ U_2'^* = U_2^* \end{pmatrix}$$

Soient $[\alpha^1]$ et $[\alpha^2]$ les matrices de transfert relatives aux travées 1 et 2. D'où les deux équations matricielles :

$$\begin{pmatrix} \Psi_2^* \end{pmatrix} = [\alpha^1] \begin{pmatrix} \Psi_1^* \end{pmatrix}'$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_3^* \end{pmatrix} = [\alpha^2] \begin{pmatrix} \Psi_2^* \end{pmatrix}'$$

En développant les deux équations matricielles, nous trouvons :

$$\alpha_{11}^1 Q_1^* + 0 + \alpha_{13}^1 \Psi_1^{*'} + \alpha_{14}^1 U_1^{*'} - Q_2^* = 0$$

$$\alpha_{21}^1 Q_1^* + 0 + \alpha_{23}^1 \Psi_1^{*'} + \alpha_{24}^1 U_1^{*'} - M_2^* = 0$$

$$\alpha_{31}^1 Q_1^* + 0 + \alpha_{33}^1 \Psi_1^{*'} + \alpha_{34}^1 U_1^{*'} - \Psi_2^* = 0$$

$$\alpha_{41}^1 Q_1^* + 0 + \alpha_{43}^1 \Psi_1^{*'} + \alpha_{44}^1 U_1^{*'} - U_2^* = 0$$

$$\alpha_{11}^2 Q_2^* + \alpha_{12}^2 M_2^* + \alpha_{13}^2 \Psi_2^{*'} + \alpha_{14}^2 U_2^{*'} - 0 = 0$$

$$\alpha_{21}^2 Q_2^* + \alpha_{22}^2 M_2^* + \alpha_{23}^2 \Psi_2^{*'} + \alpha_{24}^2 U_2^{*'} - 0 = 0$$

$$\alpha_{31}^2 Q_2^* + \alpha_{32}^2 M_2^* + \alpha_{33}^2 \Psi_2^{*'} + \alpha_{34}^2 U_2^{*'} - \Psi_3^* = 0$$

$$\alpha_{41}^2 Q_2^* + \alpha_{42}^2 M_2^* + \alpha_{43}^2 \Psi_2^{*'} + \alpha_{44}^2 U_2^{*'} - U_3^* = 0$$

De plus, si k_1 et k_2 sont les raideurs des piliers 1 et 2, nous avons les relations suivantes au niveau des 2 appuis :

$$Q_1^{*'} + k_1 U_1^{*'} = 0$$

$$Q_2^* - Q_2^{*'} - k_2 U_2^* = 0$$

Nous obtenons ainsi 10 équations scalaires pour 10 inconnues :

$$Q_1^{*'}, \Psi_1^{*'}, U_1^{*'}, Q_2^*, M_2^*, \Psi_2^*, U_2^*, Q_2^{*'}, U_3^* \text{ et } \Psi_3^*$$

Le système linéaire homogène admet une solution non banale pour les valeurs de w qui annulent le déterminant, ces valeurs de w sont les vitesses critiques.

LOGICIEL DE CALCUL DES VITESSES CRITIQUES

4.1 - PROGRAMME "PULS"

Ce programme permet de calculer les vitesses critiques de flexion des lignes d'arbres, pouvant être rigidement ou élastiquement appuyées

Ce logiciel traite les différentes lignes d'arbre suivant leurs conditions aux extrémités :

- Libre à gauche et simplement appuyée à droite
- Libre à droite et simplement appuyée à gauche
- Libre aux deux extrémités
- Simplement appuyées aux deux extrémités

Les limites de ce programme sont :

10 travée

11 Palier

100 Disques par travée

4.2 - DONNEES NUMERIQUES

A partir du plan de la ligne d'arbre, on détermine :

- le nombre de travée NT
- le nombre de palier NP
- le module d'élasticité E
- la masse volumique ρ_0

La discrétisation de la ligne d'arbre fournit :

- Le nombre de disques par travée $ND(I)$ avec $I = 1 - NT$
- La longueur des tronçons $L\phi(I, J)$ avec $I = 1 - NT$
et $J = 1 - ND(I)$

- La raideur des paliers RAID (I) avec $I = 1 - NT$

REMARQUE

La longueur et le diamètre extérieure de chaque tronçon ne peuvent représenter tous les cas rencontrés. Si, par exemple, un alésage, de diamètre constant, traverse toute la ligne d'arbres, on peut en tenir compte dans les données numériques, et, par conséquent, dans les calculs préliminaire.

Mais, si, par contre, le diamètre de l'alésage n'est pas constant, alors, il faudra faire usage d'un sous programme par exemple.

4.3 - ALGORITHME DE RECHERCHE DES VITESSES CRITIQUES

Dans le but de déterminer les vitesses critiques, nous suivons étape par étape la démarche suivante:

a) On choisit une valeur ω , vitesse de rotation inférieure à la première vitesse critique.

b) A partir de cette valeur de ω , nous calculons les éléments α_{jk}^i des matrices de transfert

$$[\alpha^i] = \left[\prod_{k=ND(I)+1}^{k=2} [N_k] \right] [V_i]$$

Pour effectuer les différents produits matricielle, nous faisons appel au sous programme "PRO".

c) Compte tenu du nombre des travées, du nombre de porte à faux et son emplacement, de la nature des appuis (élastiques ou rigides), Nous pouvons remplir le tableau du déterminant.

Suivant le type de la ligne d'arbre et de la nature des appuis, Nous

faisons appel aux deux sous-programmes "MATDEL" et "RIG".

d) La valeur du déterminant est calculée à l'aide d'un sous-programme appelé "DET" qui utilise la méthode de triangulation de GAUSS, soit $\Delta(w)$ cette valeur.

Si $\Delta(w) = 0$, la valeur de w prise au départ est une vitesse critique.

Si non, nous recommençons de l'étape (b) en prenant pour valeur de la vitesse de rotation $w = w + P$ (P : le pas de calcul choisi), nous obtenons, alors, une nouvelle valeur du déterminant $\Delta(w + P)$.

Si $\Delta(w) \times \Delta(w + P) > 0$ le déterminant n'a pas changé de signe (Si le pas P est suffisamment faible), donc le déterminant ne s'annule pas pour des valeurs w comprises entre w et $w + P$. Nous recommençons en (b) en incrementant de P la dernière valeur de w .

Si par contre le produit $\Delta(w) \times \Delta(w + P) < 0$, alors il existe une vitesse critique w_c comprise entre w et $w + P$.

e) Nous incrementons de P la dernière valeur de w nous suivons la même démarche pour déterminer d'autres vitesses critiques de flexion.

f) Nous arrêtons le calcul lorsque w atteint une valeur w_1 , choisie comme terme à l'exploration.

4.4 - NOMS DES VARIABLES UTILISEES

NT: nombre de travée

NP: nombre de palier

DMR, DM: dimension du tableau du déterminant [DELTA]

$ND(I)$: nombre de disques dans la travée I

$L\phi(I, J)$: longueurs des tronçons

$D(I, J)$: diamètres des tronçons

DIC : diamètre de l'alesage ..

$R\phi$: masse volumique

E : module d'élasticité longitudinale

$M(I, J)$: masses des tronçons

$C(I, J)$: moments d'inerties des tronçons

$B(I, J)$: raideurs en flexion

$L(I, J)$: longueurs entre les disques

$RAID(I)$: Rigidités des paliers

$MASSE 1$: masse du volant fixé à l'extrémité gauche du porte à faux

$MASSE 2$: masse du volant fixé à l'extrémité droite du porte à faux

$OMEGA I$: vitesse de début d'exploration

$OMEGA F$: vitesse de fin d'exploration

PAS : le pas d'incrementation de la vitesse

$OMEGA (II)$: valeurs des vitesses de rotation

$DELTA (I, J)$: éléments du tableau du déterminant

$VAL (II)$: valeurs des déterminants relatives aux vitesses $OMEGA(II)$

$REPON 1$: caractérise la nature des appuis

- $REPON 1 = 0$ les appuis sont élastiques

$REPON 1 = 1$ les appuis sont rigides

$REPON 5$: caractérise le type de la ligne d'arbre

$REPON 5 = 1$ les 2 extrémités sont simplement appuyées.

$REPON 5 = 2$ Porte à faux à droite et simplement appuyé à gauche.

$REPON 5 = 3$ Porte à faux à gauche et simplement appuyé à droite.

$REPON 5 = 4$ les 2 extrémités sont libres.

Repon 1: Caractérisant la nature des paliers

Repon 1 = 1 Les paliers sont rigides

Repon 1 = 0 Les paliers sont élastiques

$N(J, K)$: élément de la matrice $[N]$

$V(J, K)$: élément de la matrice $[V]$

$ALP(I, J, K)$: élément de la matrice $[\alpha^T]$ relative à la travée I

4.5 - CALCULS PRELIMINAIRES

4.5.1 - ARBRES PLEINS

- Calcul de la masse M_{ij} de chaque tronçon à partir de son diamètre, sa longueur et sa masse volumique avec

$$i = 1, NT$$

$$j = 2, ND(i) + 1$$

Vu que le tronçon est un cylindre de longueur $L_{0_{ij-1}}$ et de diamètre D_{ij-1} , sa masse sera donné par l'équation

suivante :

$$M_{ij} = \frac{\pi}{4} \rho L_{0_{ij-1}} D_{ij-1}^2$$

- Calcul du moment d'inertie de chaque tronçon par rapport à l'axe de rotation : C_{ij} avec $i = 1, NT$

$$j = 2, ND(i) + 1$$

Vu que le tronçon est un cylindre de masse M_{ij} et de diamètre D_{ij-1} , son moment d'inertie est égal à :

$$C_{ij} = \frac{M_{ij} D_{ij-1}^2}{8}$$

- Calcul de la raideur en flexion de chaque tronçon : B_{ij}

avec $i = 1, NT$

$j = 1, ND(i)$

la raideur en flexion est définie par la relation suivante

$$B_{ij} = \frac{\pi}{64} E D_{ij}^4$$

4.5.2 - ARBRES PORTANTS DES ALESAGES

La masse d'un tronçon de diamètre extérieur D_{ij-1} , diamètre intérieur DI_{ij-1} et de longueur L_{ij} est donnée par l'équation suivante :

$$M_{ij} = \frac{\pi}{4} \rho (D_{ij-1}^2 - DI_{ij-1}^2) L_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, NT \\ j = 2, ND(i) + 1 \end{array}$$

Le moment d'inertie d'un tronçon de masse M_{ij} , diamètre intérieur DI_{ij-1} et de diamètre extérieur D_{ij-1} est donné par la relation suivante :

$$C_{ij} = \frac{M_{ij}}{8} (D_{ij-1}^2 - DI_{ij-1}^2) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} i = 1, NT \\ j = 2, ND(i) + 1 \end{array}$$

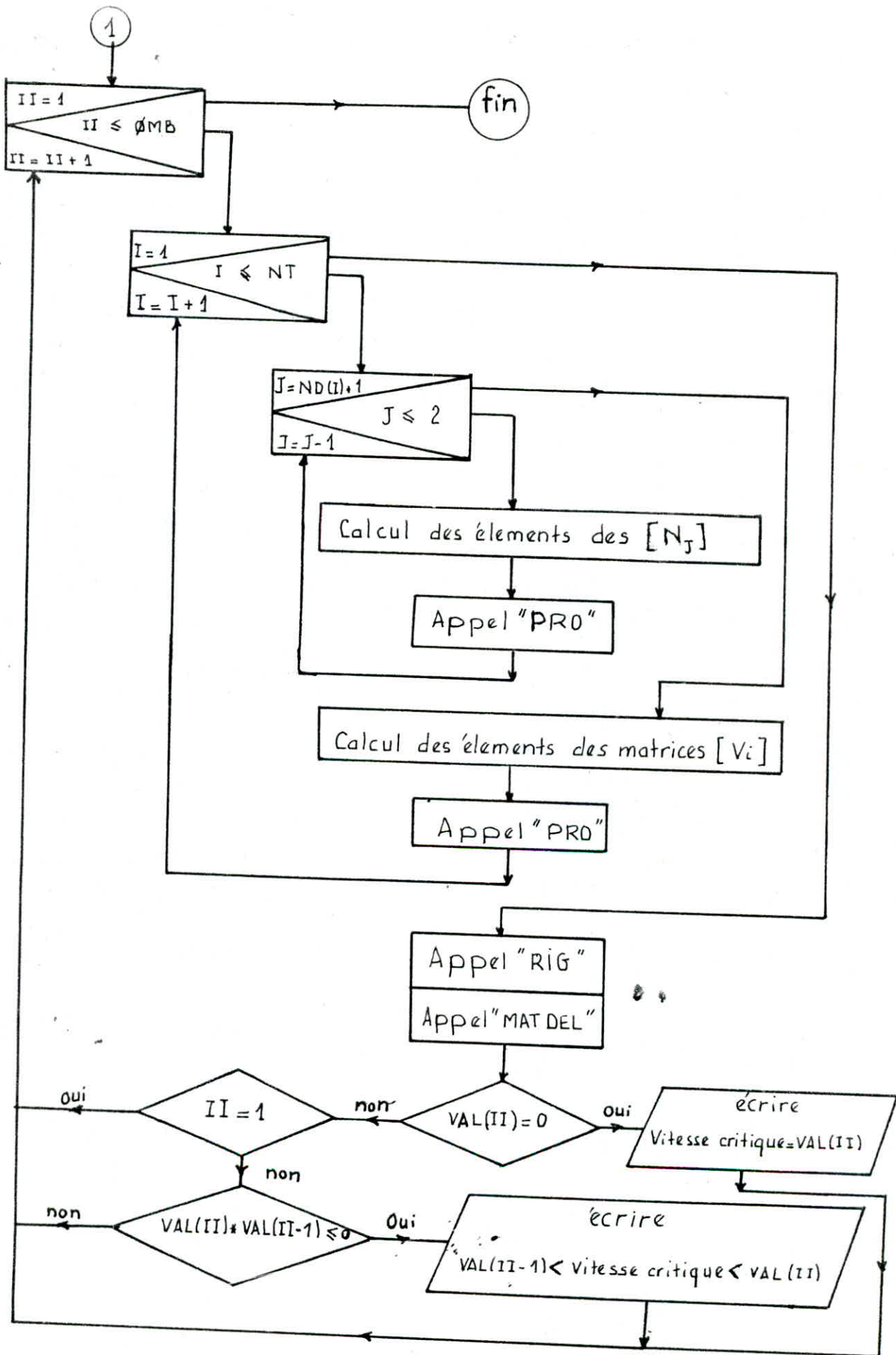
- La raideur en flexion est définie par l'équation suivante

$$B_{ij} = \frac{\pi}{64} E (D_{ij}^4 - DI_{ij}^4) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} i = 1, NT \\ j = 1, ND(i) \end{array}$$

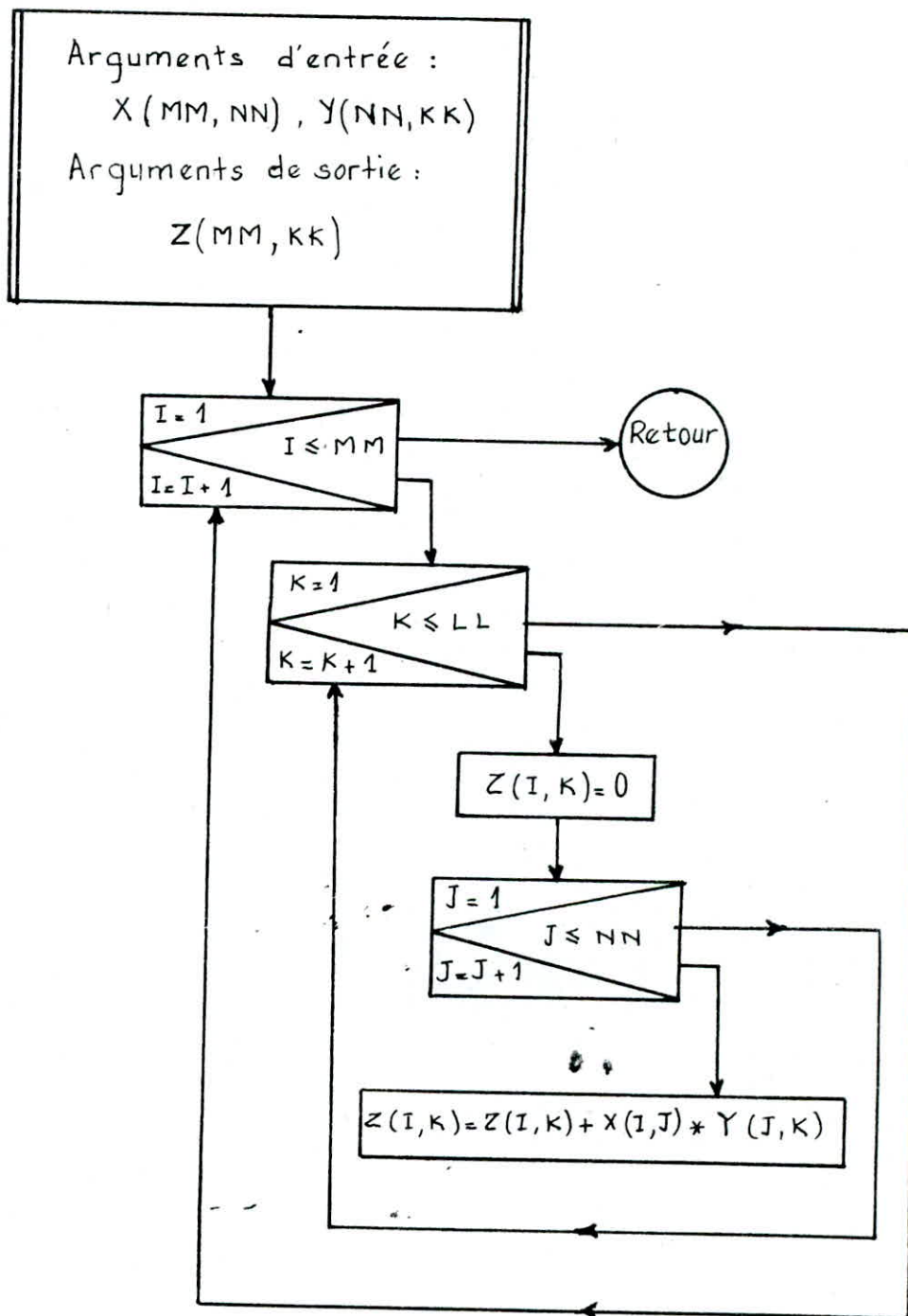
4.6 - STRUCTURE DU PROGRAMME "PULS"

Le programme "Puls", servant à déterminer les différentes vitesses critiques de flexion, se compose d'un programme principale qui fait appel à 5 sous-programmes :

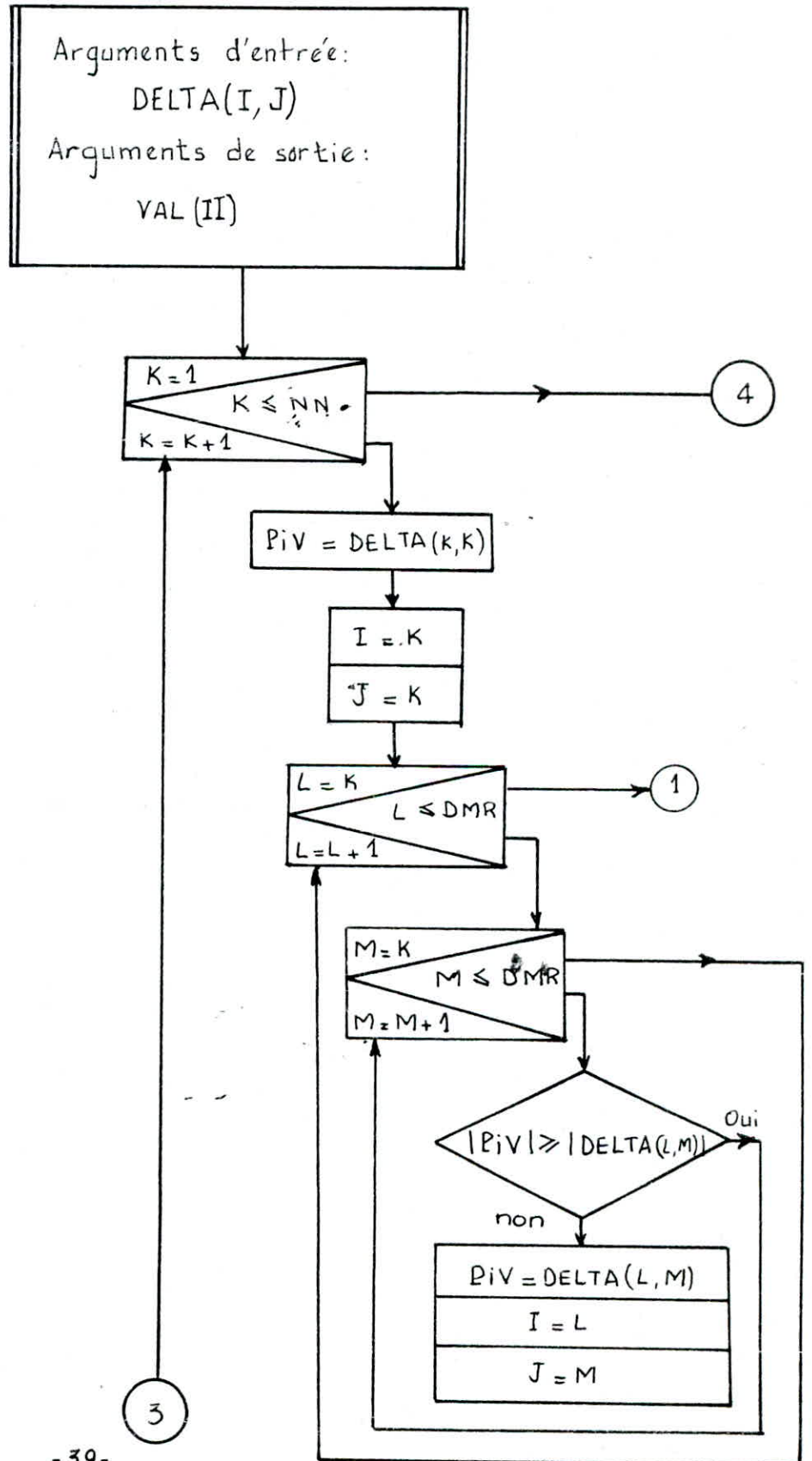
- le sous-programme "PRO", servant à effectuer le produit matricielle.
- le sous-programme "DET", servant à calculer le déterminant de la matrice [DELTA] à l'aide de la méthode de GAUSS.
- le sous-programme "MATDEL", servant au remplissage du tableau du déterminant [DELTA] dans le cas des appuis rigides.
- le sous-programme "RIG", servant au remplissage du tableau du déterminant [DELTA] dans le cas des appuis élastiques.

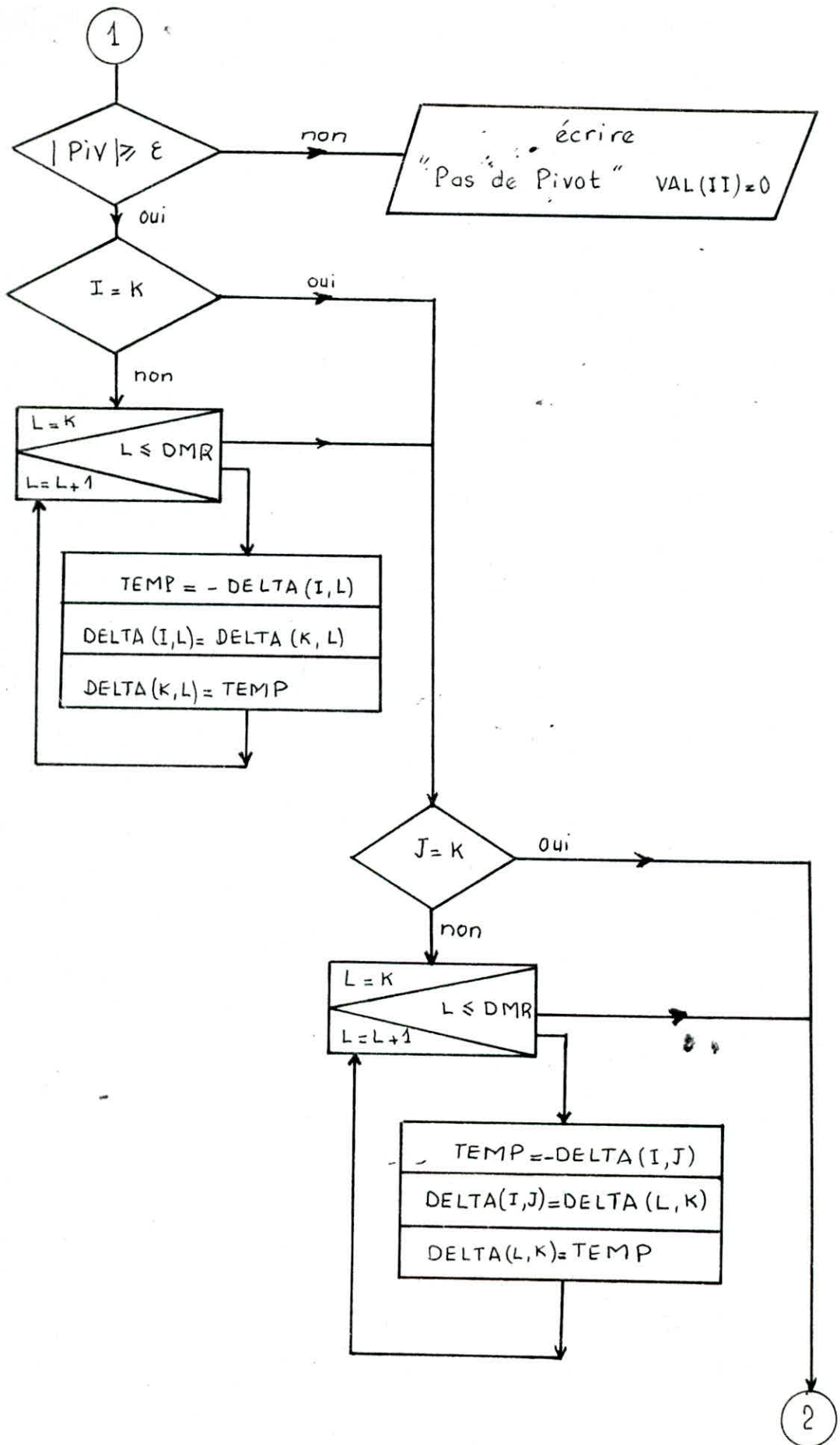


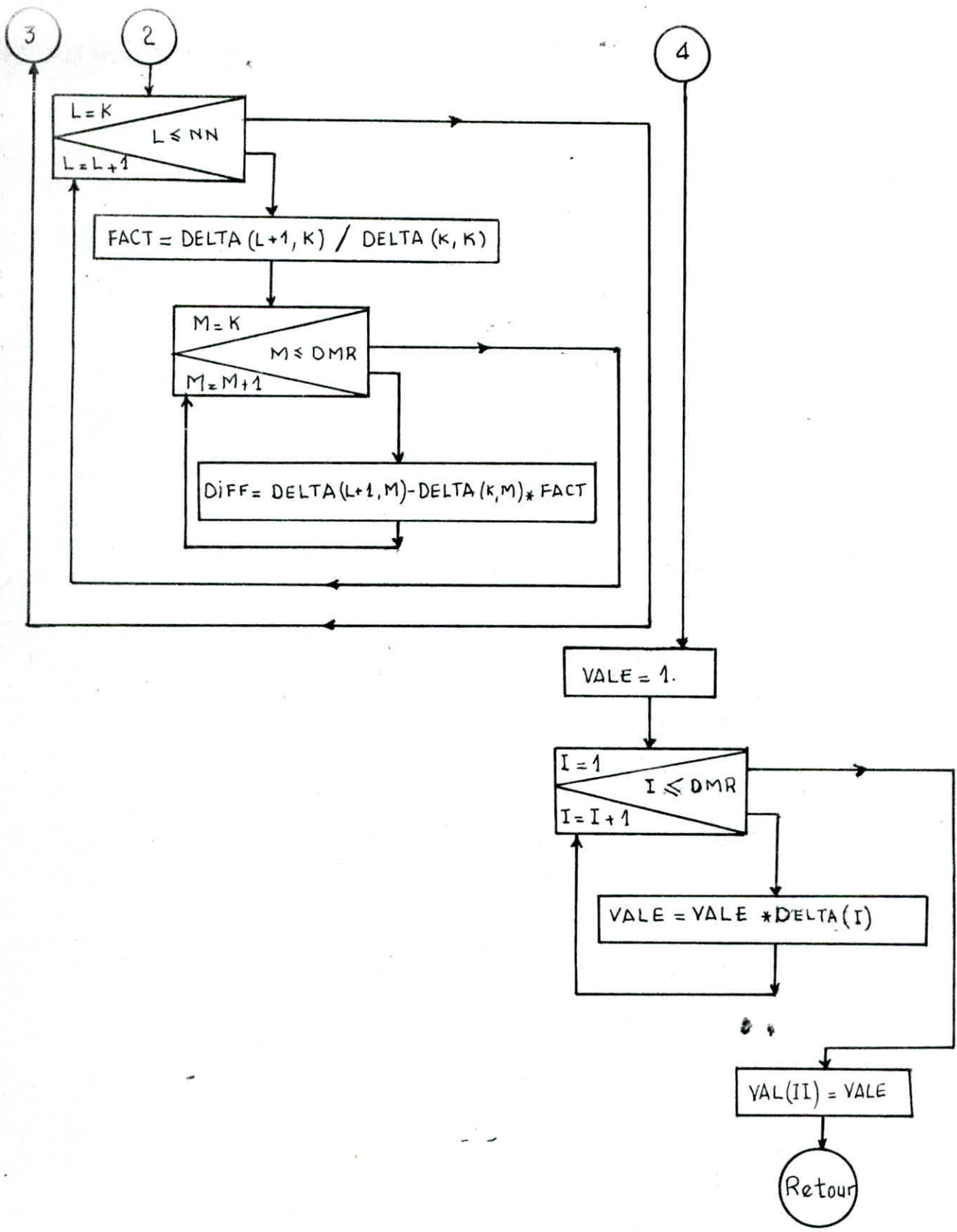
ORGANIGRAMME DU SOUS-PROGRAMME "PRO"



ORGANIGRAMME DU SOUS-PROGRAMME "DET"







EXEMPLE DE CALCUL DES VITESSES CRITIQUES DE LIGNES D'ARBRES

5.1 - GENERALITES

La constitution des machines tournantes est en générales la même, malgré les différences entre leurs principes de fonctionnement et les formes d'énergie mises en jeu. ELLES sont constituées d'une partie fixe dite stator et d'une autre en rotation dite rotor.

Le vilebrequin est l'un de ces rotors utilisés dans les machines tournantes pour achever la transformation de l'effort moteur alternatif en un mouvement relatif fournissant un couple utile.

Le vilebrequin d'un moteur Diesel à n cylindres est essentiellement :

- Une poutre droite continue dont les travées, reposant sur $(n+1)$ appuis équidistants et alignés, travaillant sous flexions ondulées, à fréquences de l'ordre de 10 Hertz, déphasées dans le temps et dans l'espace les unes par rapport aux autres.
- Un arbre coudé, succession de manivelles :
 - a) Angulairement décalées les unes par rapport aux autres
 - b) Soumises à des flexions et torsions cycliques et déphasées
 - c) tournant dans des paliers limitant les déplacements

angulaires subis par les axes des tourillons. ces paliers sont confondus avec les appuis.

5.2 - MODELISATION DES ARBRES COUDES

La modélisation d'un arbre coudé conduit à un rotor représenté par une suite de disques d'épaisseur nulle, séparés par des tronçons de masse nulle et de diamètre constant. Les paliers sont considérés comme des appuis rigides ou élastiques.

Pour effectuer le passage de l'arbre coudé vers le modèle, il est nécessaire de conserver les paramètres suivant du coude:

- Masse
- Moment d'inertie
- Longueur
- Energie de déformation du coude sous l'effet d'une force centrale P .

Vue la complexité de la géométrie de la manivelle, et la difficulté d'approcher théoriquement les deux paliers d'appuis, nous nous proposons de modéliser quatre variantes de manivelle.

- Manivelle symétriques par rapport au plan central
 - * Manivelle symétrique simplement appuyée

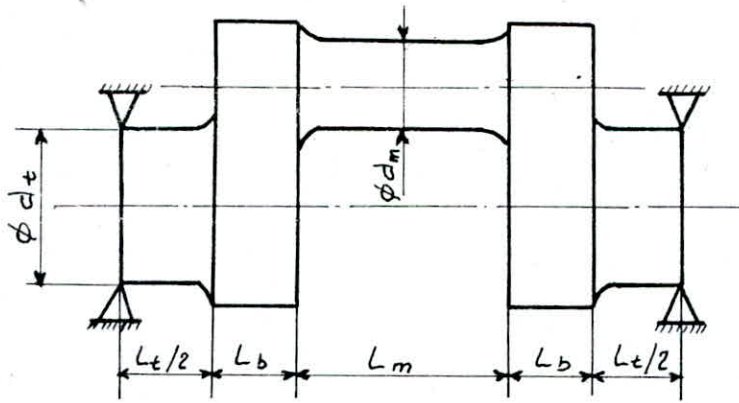


fig 5.1

* Manivelle symétrique encastrée à ses 2 extrémités

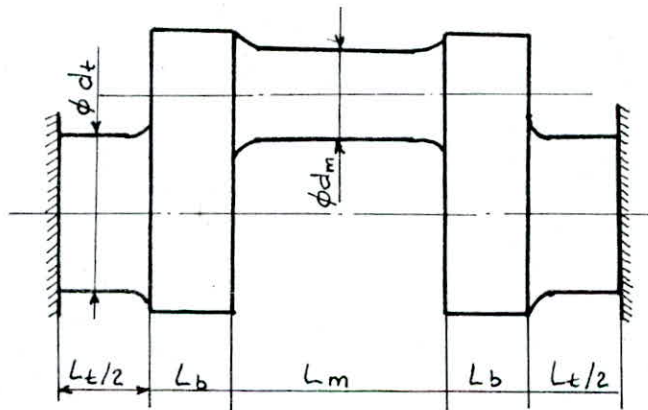


fig 5.2

- Manivelles non symétriques

* Manivelle non symétrique simplement appuyée

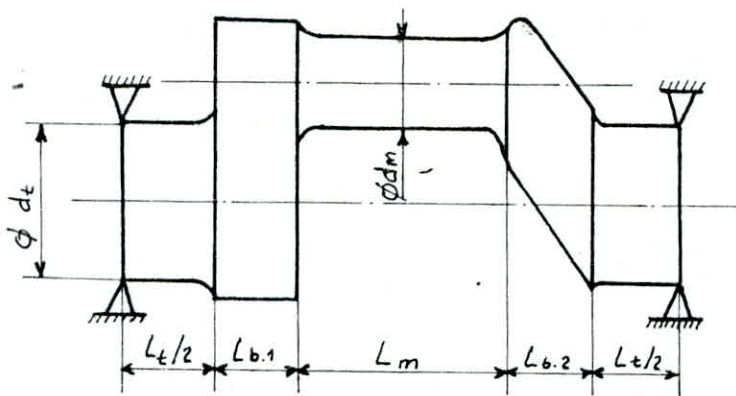


fig 5.3

* Manivelle non symétrique encastrée à ses 2 extrémités

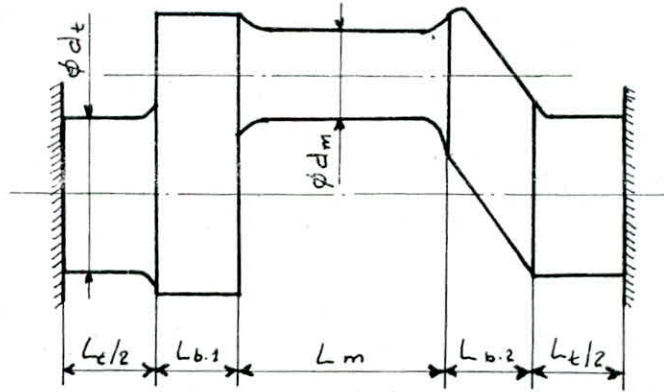


fig 5.4

- Modèle de la manivelle symétrique

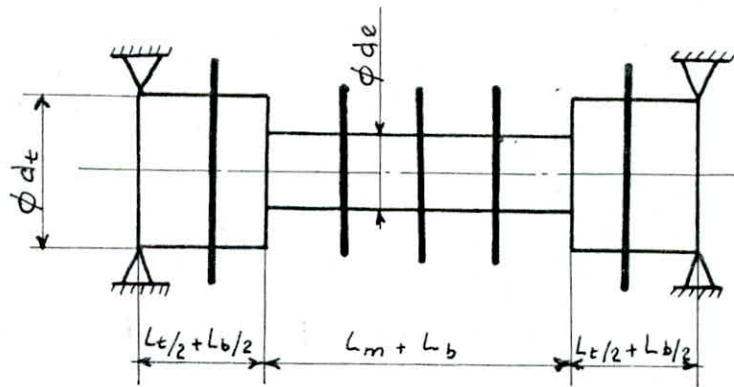


fig 5.5

- Modèle de la manivelle non symétrique.

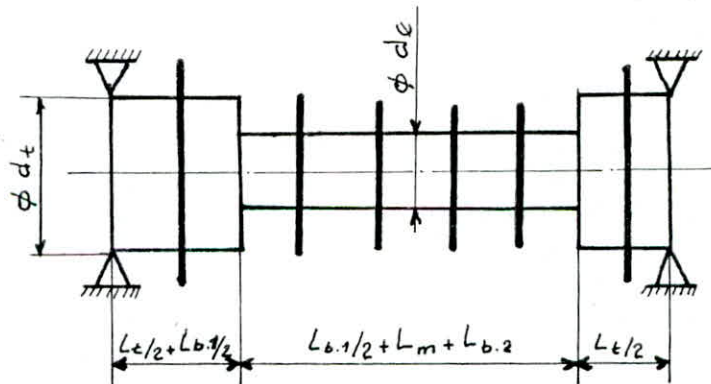


fig 5.6

5.3 - RECHERCHE DU DIAMETRE EQUIVALENT

D'après les modèles choisis, nous remarquons que la modélisation d'une manivelle revient à déterminer le diamètre équivalent du tronçon central.

L'égalisation de l'énergie de déformation de la manivelle avec celle du modèle, sous l'effet d'une force concentrée P , donne une équation de quatrième degré que nous résolvons, en suite, pour déterminer finalement le diamètre équivalent d_e .

Dans ce qui suit ; Nous traiterons seulement le calcul de l'énergie de déformation d'une manivelle non symétrique, encastree à ses deux extrémités, car cette étude englobe toutes les études des autres types de manivelles.

5.3.1 - DIAMETRE EQUIVALENT D'UNE MANIVELLE NON SYMETRIQUE

5.3.1.1 - ENERGIE DE DEFORMATION

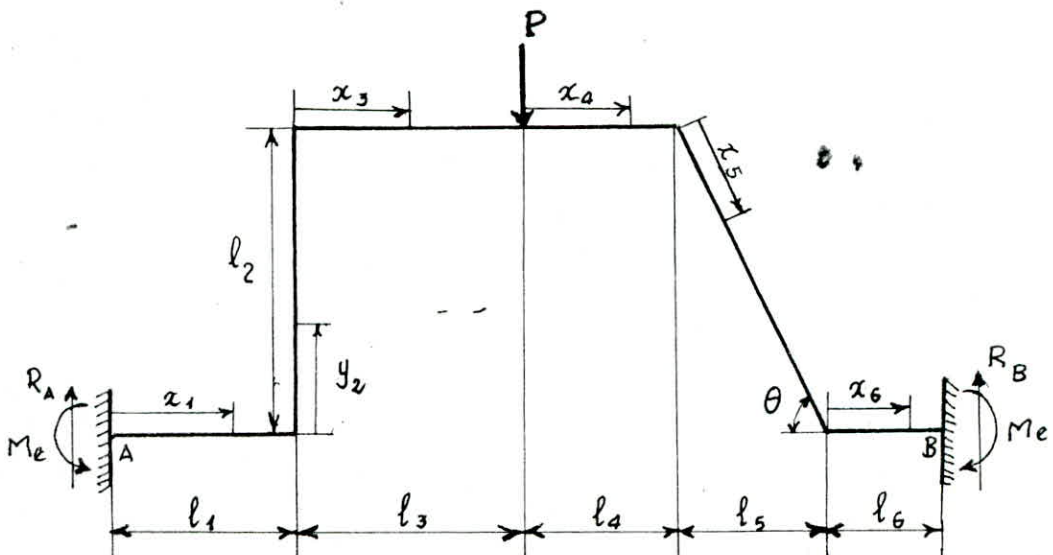


fig 5.7

Vu que la force P passe par le plan médian de la manivelle, les deux réactions aux points A et B seront égaux, tel que :

$$R_A = R_B = \frac{P}{2} \quad (1)$$

Le déplacement de la manivelle au point A est nul, ceci se traduit par la relation de MENBRIA, tel que :

$$\delta_A = \frac{\partial U_c}{\partial R_A} = 0 \quad (2)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial U_c}{\partial R_A} = \frac{\partial U_{c1}}{\partial R_A} + \frac{\partial U_{c2}}{\partial R_A} + \frac{\partial U_{c3}}{\partial R_A} + \frac{\partial U_{c4}}{\partial R_A} + \frac{\partial U_{c5}}{\partial R_A} + \frac{\partial U_{c6}}{\partial R_A} \quad (3)$$

où la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à la réaction R_A est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ci}}{\partial R_A} = & \frac{1}{E J_i} \int_0^{l_i} M_{fi} \frac{\partial M_{fi}}{\partial R_A} dx_i + \frac{1}{G J_p} \int_0^{l_i} M_{ti} \frac{\partial M_{ti}}{\partial R_A} dx_i \\ & + \frac{1}{E F_i} \int_0^{l_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial R_A} dx_i + \frac{\alpha_i}{G F_i} \int_0^{l_i} T_i \frac{\partial T_i}{\partial R_A} dx_i \quad (4) \end{aligned}$$

L'énergie de déformation de la manivelle est donnée par l'équation suivante :

$$U_c = U_{c1} + U_{c2} + U_{c3} + U_{c4} + U_{c5} + U_{c6} \quad (5)$$

où l'énergie de déformation U_{ci} pour le tronçon i est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} U_{ci} = & \frac{1}{2 E J_i} \int_0^{l_i} M_{fi}^2 dx_i + \frac{1}{2 G J_p} \int_0^{l_i} M_{ti}^2 dx_i \\ & + \frac{1}{2 E F_i} \int_0^{l_i} N_i^2 dx_i + \frac{\alpha_i}{2 G F_i} \int_0^{l_i} T_i^2 dx_i \quad (6) \end{aligned}$$

Tronçon N° 1

$$M_{f1} = -M_e + R_A x_1$$

$$\frac{\partial M_{f1}}{\partial R_A} = x_1$$

$$T_1 = R_A$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial R_A} = 1$$

$$M_{t1} = 0$$

$$N_1 = 0$$

$$\frac{\partial U_{c1}}{\partial R_A} = -\frac{l_1^2}{2EJ_1} M_e + \left(\frac{l_1^3}{6EJ_1} + \frac{\alpha_1 l_1}{2GF_1} \right) P \quad (7)$$

$$U_{c1} = \frac{P^2 l_1^3 + 12 M_e^2 l_1 - 6 P M_e l_1^2}{24 E J_1} + \frac{\alpha_1 P^2 l_1}{8 G F_1} \quad (8)$$

Tronçon N° 2

$$M_{f2} = -M_e + R_A l_1$$

$$\frac{\partial M_{f2}}{\partial R_A} = l_1$$

$$N_2 = -R_A$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial R_A} = -1$$

$$M_{t2} = 0$$

$$T_2 = 0$$

$$\frac{\partial U_{c2}}{\partial R_A} = -\frac{l_1 l_2}{E J_2} M_e + \left(\frac{l_1^2 l_2}{2EJ_2} + \frac{l_2}{2EF_2} \right) P \quad (9)$$

$$U_{c2} = \frac{l_2 (Pl_1 - 2M_e)^2}{8EJ_2} + \frac{P^2 l_2}{8EF_2} \quad (10)$$

Tronçon n° 3

$$M_{f3} = -M_e + R_A (l_1 + x_3)$$

$$\frac{\partial M_{f3}}{\partial R_A} = l_1 + x_3$$

$$T_3 = R_A$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial R_A} = 1$$

$$M_{t3} = 0$$

$$N_3 = 0$$

$$\frac{\partial U_{c3}}{\partial R_A} = \frac{2l_1 l_3 + l_3^2}{2EJ_3} M_e + \left(\frac{3l_1^2 l_3 + l_1 l_3^2 + l_3^3}{6EJ_3} + \frac{\alpha_3 l_3}{2GF_3} \right) P \quad (11)$$

$$U_{c3} = \frac{P^2 (3l_1^2 l_3 + 3l_1 l_3^2 + l_3^3) + 12 M_e^2 l_3 - 6 M_e P (2l_1 l_3 + l_3^2)}{24 E J_3} + \frac{\alpha_3 P^2 l_3}{8 G F_3} \quad (12)$$

Tronçon N° 4

$$M_{f4} = -M_e + R_A (l_1 + l_3 + x_4) - P x_4 \quad \frac{\partial M_{f4}}{\partial R_A} = l_1 + l_3 + R_A$$

$$T_A = R_A - P \quad \frac{\partial T_A}{\partial R_A} = 1$$

$$M_{t4} = 0 \quad N_4 = 0$$

$$\frac{\partial U_{c4}}{\partial R_A} = -\frac{2(l_1 + l_3)l_4 + l_4^2}{2EJ_4} M_e + \left(\frac{3(l_1 + l_3)^2 l_4 - l_4^3}{6EJ_4} + \frac{\alpha_4 l_4}{2GF_4} \right) P \quad (13)$$

$$U_{c4} = \frac{12 M_e^2 l_4 - 12 P M_e (l_1 + l_3) l_4 + 6 P M_e l_4^2 + P^2 [3(l_1 + l_3)^2 l_4 - 3(l_1 + l_3) l_4^2 - l_4^3]}{24 E J_4}$$

$$+ \frac{\alpha_4 P^2 l_4}{8 G F_4} \quad (14)$$

Tronçon n° 5

$$M_{f5} = -M_e + R_A (l_1 + l_3 + l_4 + x_5 \cos \theta) - P (l_4 + x_5 \cos \theta) \quad T_5 = (R_A - P) \cos \theta$$

$$\frac{\partial M_{f5}}{\partial R_A} = l_1 + l_2 + l_4 + x_5 \cos \theta \quad \frac{\partial T_5}{\partial R_A} = \cos \theta$$

$$N_5 = (R_A - P) \sin \theta \quad \frac{\partial N_5}{\partial R_A} = \sin \theta$$

$$M_{t5} = 0$$

$$\frac{\partial U_{C5}}{\partial R_A} = - \frac{2(l_1 + l_3 + l_4)l_5 + l_5^2}{2EJ_5} M_e + \left(\frac{3(l_1 + l_3)^2 l_5 - 3l_4^2 l_5 - 3l_4 l_5^2 - l_5^3}{6EJ_5 \cos \theta} \right) P$$

$$+ \left(\frac{\alpha_5 \cos \theta l_5}{2GF_5} + \frac{l_5 \operatorname{tg} \theta \sin \theta}{2EF_5} \right) P \quad (15)$$

$$U_{C5} = \frac{12 M_e^2 l_5 - 12 P M_e (l_1 + l_3 - l_4) + 6 P M_e l_5^2 + 3 P^2 (l_1 + l_3 - l_4)^2 l_5}{24 EJ_5 \cos \theta}$$

$$+ \frac{l_5^3 - 3(l_1 + l_3 - l_4) l_5^2}{24 EJ_5 \cos \theta} P^2 + \frac{l_5 P^2 \sin^2 \theta}{8EF_5} - \frac{\alpha_5 l_5 \cos^2 \theta}{8GF_5} \quad (16)$$

Tronçon N°6

$$M_{f6} = - M_e + R_A (l_1 + l_3 + l_4 + l_5 + x_6) - P (l_4 + l_5 + x_6)$$

$$\frac{\partial M_{f6}}{\partial R_A} = l_1 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6$$

$$T_6 = R_A - P$$

$$\frac{\partial T_6}{\partial R_A} = 1$$

$$M_{t6} = 0$$

$$N_6 = 0$$

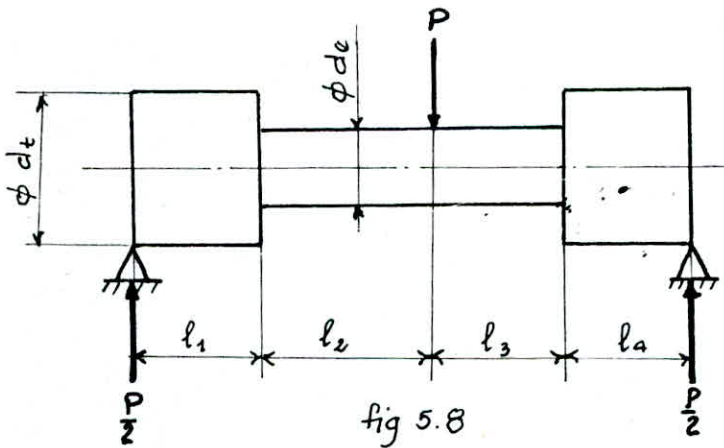
$$\frac{\partial U_{C6}}{\partial R_A} = - \frac{2(l_1 + l_3 + l_4 + l_5) l_6 + l_6^2}{2EJ_6} M_e + \frac{\alpha_6 l_6 P}{2GF_6}$$

$$+ \frac{(l_1 + l_3)^2 l_6 - (l_4 + l_5)^2 l_6 - (l_4 + l_5) l_6^2 - l_6^3}{6EJ_6} P \quad (17)$$

$$U_{C6} = \frac{2 M_e^2 l_6 - 2 P M_e (l_1 + l_3 - l_4 - l_5) l_6 + P M_e l_6^2 + \alpha_6 l_6 P^2}{4EJ_6} + \frac{\alpha_6 l_6 P^2}{8GF_6}$$

$$+ \frac{3(l_1 + l_3 - l_4 - l_5)^2 l_6 - 3(l_1 + l_3 - l_4 - l_5) l_6^2 + l_6^3}{24EJ_6} P^2 \quad (18)$$

5.3.1.2 - ENERGIE DE DEFORMATION DU MODELE



L'énergie de déformation de la poutre est donnée par l'équation suivante :

$$U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} + U_{m4} \quad (14)$$

Tronçon N° 1

$$M_{f1} = \frac{P}{2} x_1$$

$$T_1 = \frac{P}{2}$$

$$M_{t1} = 0$$

$$N_1 = 0$$

$$U_{m1} = \frac{P^2 l_1^3}{24 E J_1} + \frac{\alpha_1 P^2 l_1}{8 G F_1} \quad (15)$$

Tronçon N° 2

$$M_{f2} = \frac{P}{2} (l_1 + x_2)$$

$$T_2 = \frac{P}{2}$$

$$M_{t2} = 0$$

$$N_2 = 0$$

$$U_{m2} = \frac{(3l_1^2 l_2 + 3l_1 l_2^2 + l_2^3) P^2}{24 E J_2} + \frac{\alpha_2 P^2 l_2}{8 G F_2} \quad (16)$$

Tronçon N° 3

$$M_{f3} = \frac{P}{2} (l_1 + l_2 + x_3) \quad T_3 = \frac{P}{2}$$

$$M_{t3} = 0 \quad N_3 = 0$$

$$U_{m3} = \frac{P^2 [3(l_1 + l_2)^2 l_3 + 3(l_1 + l_2) l_3^2 + l_3^3]}{24 E J_3} + \frac{\alpha_3 P^2 l_3}{8 G F_3} \quad (17)$$

Tronçon N°4

$$M_{f4} = \frac{P}{2} (l_1 + l_2 + l_3 + x_4) \quad T_4 = -\frac{P}{2}$$

$$M_{t4} = 0 \quad N_4 = 0$$

$$U_{m4} = \frac{3(l_1 + l_2 + l_3)^2 l_4 + 3(l_1 + l_2 + l_3) l_4^2 + l_4^3}{24 E J_4} + \frac{\alpha_4 P^2 l_4}{8 G F_4} \quad (18)$$

En faisant la sommation de ces quatre énergies données par les équations (15), (16), (17) et (18), nous obtenons l'énergie de déformation totale du modèle.

5.3.1.3_ APPLICATION NUMERIQUE

Les paramètres caractérisant la manivelle non symétrique sont résumés dans le tableau ci-dessous

Tronçons	l [mm]	J [m ⁴]	F [m ²]
1	33	$1,1786 \cdot 10^{-6}$	$3,8485 \cdot 10^{-3}$
2	60	$1,2200 \cdot 10^{-7}$	$2,1530 \cdot 10^{-3}$
3	32	$6,1813 \cdot 10^{-7}$	$2,787 \cdot 10^{-3}$
4	17	$6,1813 \cdot 10^{-7}$	$2,787 \cdot 10^{-3}$
5	66	$1,1416 \cdot 10^{-8}$	$2,7740 \cdot 10^{-4}$
6	18,5	$1,1786 \cdot 10^{-6}$	$3,8485 \cdot 10^{-3}$

Tableau n°1

- L'angle d'inclinaison du bras à deux chenfreins $\theta = 63^\circ$
- le module d'élasticité longitudinale $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$
- Le module d'élasticité transversale $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$
- Pour un tronçon circulaire $\alpha = 4/3$
- Pour un tronçon rectangulaire $\alpha = 3/2$

Les paramètres caractérisant le modèle de la manivelle non symétrique sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Tronçons	l [mm]	J [m ⁴]	F [m ²]
1	33	$1,1786 \cdot 10^{-6}$	$3,8485 \cdot 10^{-3}$
2	32	$0,04909 d_e^4$	$0,7854 d_e^2$
3	46,5	$0,04909 d_e^4$	$0,7854 d_e^2$
4	18,5	$1,1786 \cdot 10^{-6}$	$3,8485 \cdot 10^{-3}$

tableau n°2

L'énergie de déformation du modèle :

$$U_m = \left[1,77553 \cdot 10^{-10} + \frac{5,33080 \cdot 10^{-15}}{d_e^4} + \frac{2,082277 \cdot 10^{-13}}{d_e^2} \right] P^2$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	M_e [N.m]	U (J)	d_e (mm)
Manivelle encastree	$0,0138929 P$	$5,64847 \cdot 10^{-10} P^2$	63
Manivelle non encastree	0	$1,21763 \cdot 10^{-8} P^2$	28

5.3.2 - DIAMÈTRE EQUIVALENT D'UNE MANIVELLE SYMÉTRIQUE

5.3.2.1 - ENERGIE DE DEFORMATION DE LA MANIVELLE

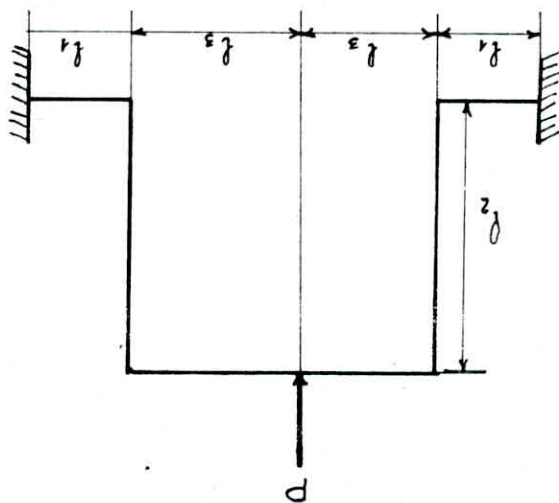


fig.5.9

Suite à la symétrie de la manivelle par rapport au plan médian, l'énergie de déformation de cette manivelle se réduit à l'expression suivante :

$$U_c = 2 (U_{c1} + U_{c2} + U_{c3})$$

5.3.2.2 - ENERGIE DE DEFORMATION DU MODELE

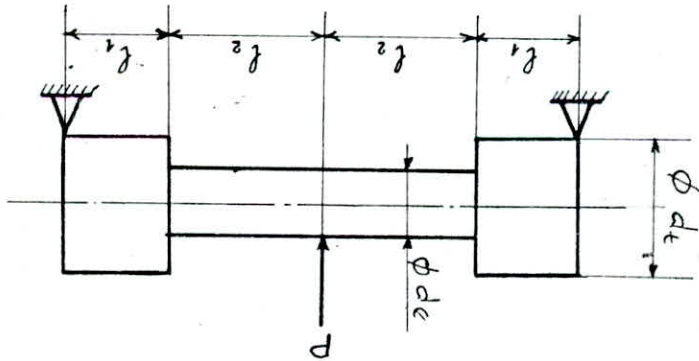


fig.5.10

Vue la symétrie du modèle par rapport au plan médian,

l'énergie de déformation de ce modèle se simplifie à l'expression suivante :

$$U_m = 2 (U_{m1} + U_{m2})$$

5.3.2.3 - APPLICATION NUMERIQUE

Les paramètres caractérisant la manivelle symétrique sont résumés dans le tableau ci-dessous

Tronçons	l [mm]	J [m ⁴]	F [m ²]
1	33	$1,1786 \cdot 10^{-6}$	$3,8485 \cdot 10^{-3}$
2	60	$1,2200 \cdot 10^{-7}$	$2,1530 \cdot 10^{-3}$
3	32	$6,1813 \cdot 10^{-7}$	$2,7870 \cdot 10^{-3}$

Tableau n°3

Les paramètres caractérisant le modèle de la manivelle symétrique sont résumés dans le tableau ci-dessous

Tronçons	l [mm]	J [m ⁴]	F [m ²]
1	33	$1,1786 \cdot 10^{-6}$	$3,8485 \cdot 10^{-3}$
2	24	$\frac{\pi}{64} d_e^4$	$\frac{\pi}{4} d_e^2$

Tableau n°5

L'énergie de déformation du modèle

$$U_m = \left[4,84330 \cdot 10^{-11} + \frac{1,27324 \cdot 10^{-13}}{d_e^2} + \frac{1,26509 \cdot 10^{-15}}{d_e^4} \right] P^2$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous

	M_e (N.m)	U (J)	d_e (mm)
Manivelle encastree	$0,01929 P$	$1,50152 \cdot 10^{-10} P^2$	65
Manivelle non encastree	0	$8,89197 \cdot 10^{-10} P^2$	36

Tableau n° 6

5.4. CALCUL DES VITESSES CRITIQUES DU VILBREQUIN F4L 912

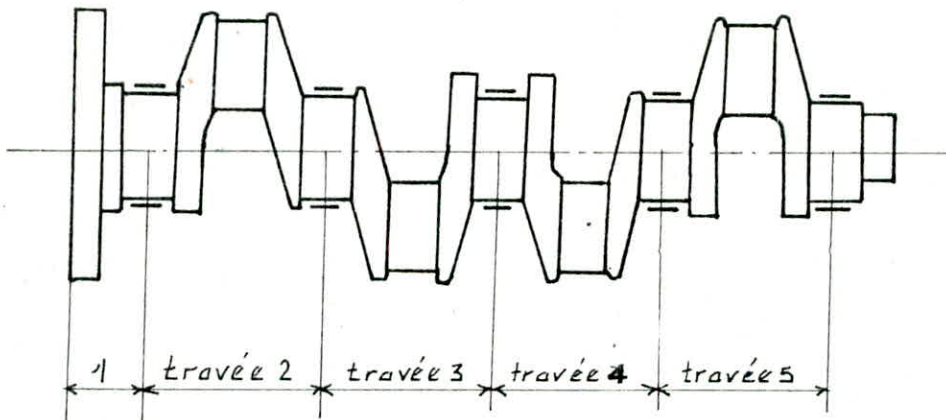


Fig 5.11

Les longueurs, masses et moments d'inerties des éléments du vilbrequin sont consignés dans le tableau ci-dessous

Elements du vilbrequin	Longueur (mm)	Masse (Kg)	Moment d'inertie (Kg.m ²)
Tourillon	37,0	1,111	$0,680 \cdot 10^{-3}$
Bras extrême	29,5	2,270	$0,856 \cdot 10^{-2}$
Bras à deux chenfreins	29,5	2,820	$0,494 \cdot 10^{-2}$
Maneton	34,0	0,750	$0,338 \cdot 10^{-3}$
Volant	/	27,0	2,42

Les travées 1-2-3-4 et 5 sont discrétisées par un pas de l'ordre de 5 mm. Le pas est relativement faible par rapport aux grands diamètres. C'est pour cette raison que dans le cas du volant, nous sommes passés à des pas de 10 mm. Le programme autorisant 100 tronçons par travée, nous aurions pu encore diminuer le pas de découpage. La précision souhaitée sur les vitesses critiques d'une part, et la limitation du temps de calcul d'autre part, dépendent du nombre de disques par travée. L'expérience montre que des pas de découpage inférieurs ou égaux au rayon du tronçon pour les petits diamètres donnent des résultats suffisamment précis.

Lorsque la discrétisation est finie, nous obtenons, ainsi, le nombre de disques par travée. Pour l'exemple traité il y a 12, 32, 32, 32, 32 disques par travées 1-2-3-4 et 5.

Sur les tableaux qui suivent, nous reportons pour chaque disque (donc chaque tronçon) la longueur, le diamètre, la masse, et le moment d'inertie du tronçon.

Nous limiterons notre discrétisation aux travées 1 et 2, car les travées 3-4-5 sont similaires à la travée 2 pour les quatre modèles étudiés.

Pour identifier facilement les 4 modèles traités, nous utilisons la notation suivante :

1. Modèle de la manivelle symétrique simplement appuyée
2. Modèle de la manivelle symétrique encastree à ses 2 extrémités
3. Modèle de la manivelle non symétrique simplement appuyée
4. Modèle de la manivelle non symétrique encastree à ses deux extrémités

DISCRETISATION DU PORTE A FAUX

DISQUE	LONGUEUR	DIAMETRE	MASSE	MOMENT D'INERTIE
n	(m)	(m)	(kg)	(kg.m ²)
2	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
3	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
4	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
5	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
6	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
7	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
8	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
9	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
10	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
11	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
12	0.00413	0.1150	0.334	0.000552
13	0.00413	0.1150	0.334	0.000552

DISCRETISATION D'UNE TRAVEE

cas n : 1

DISQUE n	LONGUEUR (m)	DIAMETRE (m)	MASSE (kg)	MOMENT D'INERTIE (kg.m ²)
2	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
3	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
4	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
5	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
6	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
7	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
8	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
9	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
10	0.00369	0.0360	0.284	0.001069
11	0.00369	0.0360	0.284	0.001069
12	0.00369	0.0360	0.284	0.001069
13	0.00369	0.0360	0.284	0.001069
14	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
15	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
16	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
17	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
18	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
19	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
20	0.00425	0.0360	0.094	0.000422
21	0.00425	0.0360	0.094	0.000422

22	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
23	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
24	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
25	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
26	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
27	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
28	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
29	0.00369	0.0360	0.356	0.000617
30	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
31	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
32	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
33	0.00463	0.0700	0.139	0.000085

DISCRETISATION D'UNE TRAVEE

cas n : 2

DISQUE	LONGUEUR	DIAMETRE	MASSE	MOMENT D'INERTIE
n	(m)	(m)	(kg)	(kg.m ²)
2	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
3	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
4	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
5	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
6	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
7	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
8	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
9	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
10	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
11	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
12	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
13	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
14	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
15	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
16	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
17	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
18	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
19	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
20	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
21	0.00425	0.0630	0.094	0.000422

! 22	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 23	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 24	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 25	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 26	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 27	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 28	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 29	! 0.00369	! 0.0630	! 0.356	! 0.000617	!
! 30	! 0.00463	! 0.0700	! 0.139	! 0.000085	!
! 31	! 0.00463	! 0.0700	! 0.139	! 0.000085	!
! 32	! 0.00463	! 0.0700	! 0.139	! 0.000085	!
! 33	! 0.00463	! 0.0700	! 0.139	! 0.000085	!

DISCRETISATION D'UNE TRAVEE

cas n :3

DISQUE	LONGUEUR	DIAMETRE	MASSE	MOMENT D'INERTIE
n	(m)	(m)	(kg)	(kg.m ²)
2	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
3	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
4	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
5	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
6	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
7	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
8	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
9	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
10	0.00369	0.0280	0.284	0.001069
11	0.00369	0.0280	0.284	0.001069
12	0.00369	0.0280	0.284	0.001069
13	0.00369	0.0280	0.284	0.001069
14	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
15	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
16	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
17	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
18	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
19	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
20	0.00425	0.0280	0.094	0.000422
21	0.00425	0.0280	0.094	0.000422

22	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
23	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
24	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
25	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
26	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
27	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
28	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
29	0.00369	0.0280	0.356	0.000617
30	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
31	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
32	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
33	0.00463	0.0700	0.139	0.000085

DISCRETISATION D'UNE TRAVEE

cas n : 4

DISQUE n	LONGUEUR (m)	DIAMETRE (m)	MASSE (kg)	MOMENT D'INERTIE (kg.m ²)
2	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
3	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
4	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
5	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
6	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
7	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
8	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
9	0.00369	0.0700	0.284	0.001069
10	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
11	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
12	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
13	0.00369	0.0630	0.284	0.001069
14	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
15	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
16	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
17	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
18	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
19	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
20	0.00425	0.0630	0.094	0.000422
21	0.00425	0.0630	0.094	0.000422

22	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
23	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
24	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
25	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
26	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
27	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
28	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
29	0.00369	0.0630	0.356	0.000617
30	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
31	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
32	0.00463	0.0700	0.139	0.000085
33	0.00463	0.0700	0.139	0.000085

RESULTATS

les vitesses critiques [tr/min]

	cas rigide		cas elastique	
Wc	Wc1	Wc2	Wc1	Wc2
cas 1	9874	153696	5987	230114
cas 2	20646	220171	8021	230377
cas 3	6422	101127	4841	110175
cas 4	19824	194600	7305	150688

REMARQUE

- La discretisation des travées 3, 4 et 5 du vibrequin est similaire à celle de la travée 2 pour les quatres cas étudiée

- Dans le cas des paliers élastiques, les raideurs des cinq paliers sont égales, tel que: $K_i = 10^8 \text{ N/m}$.

EXPLOITATION DES RESULTATS

Pour assurer un fonctionnement tranquille et fiable des rotors, il est important de respecter les normes utilisées dans les spécifications techniques qui fixent la valeur limite des amplitudes du rotor et/ou du stator.

C'est pour respecter ces normes qu'il est nécessaire de connaître les vitesses critiques, car des amplitudes convenables à la mise en service peuvent devenir intolérables après une longue durée d'exploitation de la machine.

Vu que le calcul des vitesses critiques (w_i) a été établi sous réserve de la vérification des hypothèses de la méthode des matrices de transfert, il est important de choisir une vitesse de fonctionnement éloignée de la vitesse critique $\pm 20\%$ ($w_i \pm 20\% w_i$).

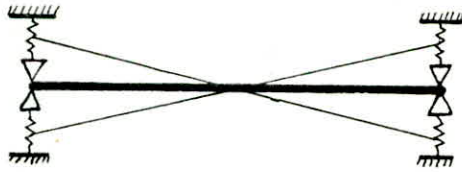
6.1 - MANIFESTATION DES VIBRATIONS

Parmi les vitesses critiques calculées à l'aide de la méthode des matrices de transfert, nous distinguons 2 groupes de vitesses critiques :

a) vitesses critiques non dangereuses :

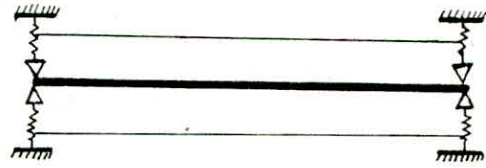
Lorsque le rotor tourne avec ces vitesses critiques, il ne subit aucune déformation, donc ces vitesses critiques ne sont pas dangereuses pour le rotor.

Parmi les modes de vibrations avec des vitesses critiques non dangereuses, nous pouvons citer les deux cas suivants :



Mode de basculement

fig 6.1



Mode de rebondissement

fig 6.2

b) vitesses critiques dangereuses.

En tournant avec ces vitesses critiques dangereuses, l'arbre subit des déformations suivant le mode de flexion.

- le rotor au repos
- le 1^{er} mode de flexion
- le 2^e mode de flexion

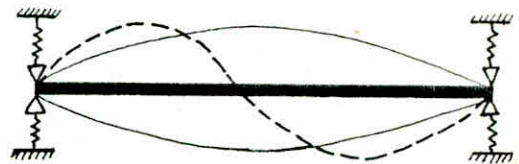


fig 6.3

6.2 - PROCESSUS DE SECTION DES VITESSES CRITIQUES DANGEREUSES

Dans le but de déterminer les vitesses critiques dangereuses, nous suivons étape par étape le processus suivant :

- a) Avec les caractéristiques géométriques et physiques (l_{ij} , m_{ij} , C_{ij} , K_i , E) de notre rotor, nous calculerons ces différentes vitesses critiques (w_{c1} , w_{c2} , ..., w_{cn}) à l'aide de la méthode des matrices de transfert.
- b) Nous repetons le calcul des vitesses critiques en utilisant les mêmes données du rotor (l_{ij} , m_{ij} , C_{ij} , K_i), sauf que cette fois ci, nous multiplions la valeur du module d'élasticité longitudinal (E) par le facteur 10, soient (w'_{c1} , w'_{c2} , w'_{c3} , ..., w'_{cn}).

ces différentes vitesses critiques.

Si $W_{ci} \cong W'_{ci}$, la vitesse critique W_{ci} est une vitesse critique non dangereuse. car la vitesse critique non dangereuse ne dépend pas du module d'élasticité E , Mais dans le cas contraire ($W_{ci} \neq W'_{ci}$), la vitesse critique W_{ci} est une vitesse critique dangereuse.

c) Nous répétons une autre fois le calcul des vitesses critiques en utilisant les mêmes données du rotor ($l_{ij}, m_{ij}, c_{ij}, E$), sauf que cette fois ci, nous multiplierons les valeurs des rigidités des paliers (K_i) par le facteur 10, Soient $(W''_{c1}, W''_{c2}, W''_{c3} \dots W''_{cn})$ ces différentes vitesses critiques. Si $W_{ci} \neq W''_{ci}$, la vitesse critique W_{ci} est une vitesse non dangereuse, car la vitesse critique non dangereuse dépend des rigidités des paliers.

CONCLUSION

La détermination des vitesses critiques de flexion d'un rotor est conditionnée par le choix judicieux du modèle décrivant fidèlement ce rotor en vibration de flexion. Mais vu la complexité de modéliser convenablement un vilebrequin en flexion, nous nous sommes proposé de modéliser la manivelle par quatre modèles différents suivant son profil et ses conditions aux limites.

Parmi les méthodes théoriques qui permettent la détermination des vitesses critiques d'un rotor, nous avons utilisé la méthode des matrices de transfert qui se révèle être la plus élaborée des méthodes mise à la disposition des constructeurs et la mieux adaptée à une exploitation par ordinateur et par conséquent accessible à tout "bureau d'étude".

Pour illustrer l'étude théorique entreprise dans ce projet, nous avons jugé intéressant de la mettre en application par le calcul des différentes vitesses critiques du vilebrequin du moteur F4L 912.

Esperons que ce modeste travail puisse enrichir le domaine de l'étude dynamique des rotors, et plus particulièrement dans le domaine des vibrations en flexion des rotors et ainsi contribuer à la compréhension de l'étude dynamique du moteur.

— BIBLIOGRAPHIE —

1. "Vibrations des machines tournantes et des structures"
R. BIGRET
2. "Halte à la croissance"
D.K. MEADOWS
3. "Théorie des vibrations à l'usage des ingénieurs"
S. R. TIMOSHENKO Ed: DUNOD, Paris, 1954
4. "Vibrations mécaniques"
HARTOG Ed: DUNOD, Paris, 1960
5. "Vitesse critique de flexion des rotors-poutres"
B. GIRONNET
6. "Résistance des matériaux"
S. P. TIMOSHENKO Ed: DUNOD, Paris
7. "Science et technique du moteur Diesel industriel"
R. BRUN Ed: technip, 1984.

