

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE - MECANIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Logiciel de Calcul  
des Données d'une Chaîne  
de Transmission  
d'un Vehicule Industriel

Proposé Par :

Mr. BOUKABACHE Mohamed

Etudié par :

Mr. IKHEFOULMA Morad

Dirigé par :

Mr. BOUKABACHE Mohamed

PROMOTION : Juin 88



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وما توفيقي إلا بالله عليه توكلت

وإليه أنيب

## DEDICACES

Je dedie ce modeste travail à :



mes parents pour les sacrifices et toute la patience qu'ils n'ont jamais cessé de témoigner à mon égard.

ma tante Mina et mon frère Mohamed Rafik qui n'ont cessé de me conseiller et m'encourager.

mes frères Djamel, M. Kamaal, Zaher

mes soeurs Nacera, Dalila

mon épouse Fatima et toute sa famille pour leur soutien

mes amis et frères Khouali M, Ait. Ali. yahia. Dj pour leurs conseils et leur encouragement.

tous ceux qui se devouent dans la sincérité et la modestie à l'édification de notre pays et à la concrétisation d'une société saine et prospère.

tous ceux qui ne tolèrent vivre que dans l'intégrité et le respect de leur personnalité musulmane et algérienne.

## REMERCIEMENT

Je tiens à remercier ici, tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail, et plus particulièrement mon promoteur Mr BOUKABACHE qui a suivi cette étude m'éclairant sur maints détails et surtout sur l'esprit de recherche et la méthode de travail propre à tout véritable ingénieur.

Merci, enfin, aux enseignants qui, d'années en années m'ont fait don de leur savoir précieux, en sachant gagné ma sympathie et ma profonde reconnaissance.

-----

Departement : Genie Mecanique

Promoteur : BOUKABACHE Mohamed

Elève Ingenieur : IKHEFOULMA Morad



الموضوع : برنامج معلوماتي لحساب موطيات منظومة نقل الحركة  
الملخص :

يستهدف عملنا هذا إعداد برنامج معلوماتي لحساب  
المطالات الناتجة عن عزم التورك المتولد عن قوى العطالة ،  
ضغط الغاز داخل الرسدطوانات بالإضافة إلى الوسائط  
منظومة نقل الحركة .

Sujet : Logiciel de calcul des données d'une chaine de transmission

Resumé :

L'objet de notre travail consiste à établir un programme informatique permettant le calcul des amplitudes du couple moteur dû aux forces d'inertie et à la pression des gaz dans les cylindres , ainsi que les différents paramètres de la chaine de transmission

Subject : Program for Data transmission chain calculation

Abstract :

The object of this study consists in establishing a computer program that calculates some amplitudes caused by the enging torque caused by inertie forces to the gaz pressur in the cylinders , and the different parameters of the transmission chain.

# TABLE DES MATIERES

## Introduction

chapitre	I	Amplitude relative à l'harmonique du couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres	1
	I.1	Moteur	1
	I.2	cycles	1
	I.3	Transvasement	3
	I.4	couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres	5
	I.5	Determination de l'équation caractéristique de $C_k$ et $\gamma_k$	9
	I.6	Organigramme de corrélation	11
chapitre	II	Amplitude relative à l'harmonique du couple moteur dû au forces d'inertie	14
	II.1	Forces d'inertie	14
	II.2	Organigramme calculant les amplitudes $b_{2p}$	19
chapitre	III	Transmission	21
	III.1	Amortisseur de torsion	22
	III.2	Moteur	22
	III.3	Volant moteur	25
	III.4	Embrayage	25
	III.5	Boite de vitesses	27
	III.6	Arbres et Joints de transmission	28
	III.7	Essieu moteur	28

chapitre

IV	Methode de calcul des differents paramètres de la chaine de transmission	31
IV.1	Poulie	31
IV.2	Amortisseur torsionnel	32
IV.3	Vilebrequin et equipage mobile	34
IV.4	Volant moteur - Embrayage	47
IV.5	Boite de Vitesses	48
IV.6	Arbre de cardan	59
IV.7	Amortisseur torsionnel (Damper)	67
IV.8	Pont moteur - Roues motrices charge equivalente du vehicule.	67
IV.9	Coefficients d'amortissements	71
IV.10	Modèle equivalent de la chaine de transmission	76
IV.11	Organigramme P.F.E 3	78
-	conclusion	87
-	Annexe	

## Introduction

L'étude des problèmes de vibration a acquis une importance de plus en plus grande dans la conception des véhicules, car la théorie des vibrations permet de comprendre et résoudre un grand nombre de problèmes, dont l'importance pratique est considérable (diagnostic des machines, équilibrage des arbres de turbines...).

La transmission dans les véhicules industriels est considérée comme source de vibration dont les principaux générateurs sont : le moteur (couple dû aux inerties et à la pression des gaz dans les cylindres), le ventilateur de refroidissement, l'engrènement dans les boîtes, le déséquilibre de l'arbre de transmission, l'angle de joint (excitation torsionnelle dû aux inerties et à l'effet du couple secondaire), les chocs dûs aux profils de la route.

Le fonctionnement du moteur alternatif entraîne des forces cycliques qui sont dûes à la pression des gaz dans les cylindres et à l'inertie des différents éléments. Ces forces alternatives se repercutent aussi bien sur le vilebrequin que sur le bloc moteur.

Le vilebrequin constitue un système susceptible de vibrer naturellement en torsion du fait de son élasticité et des masses qui lui sont liées directement ou indirectement. Comme le couple moteur est une grandeur périodique, décomposable en harmoniques au cours d'un cycle, la coïncidence de l'une des harmoniques excitatrices avec l'une des fréquences naturelles du vilebrequin peut provoquer des résonances.

Notre étude consiste à établir un programme informatique pour calculer les amplitudes relatives à l'harmonique du couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres d'une part et les amplitudes relatives à l'harmonique du couple moteur dû aux forces d'inerties d'autre part. Il permettra également le calcul des coefficients harmoniques et des phases initiales.

de même que la détermination des coefficients, d'amortissements, rigidité torsionnelle, ainsi que le moment d'inertie de tous les éléments de la chaîne de transmission (Moteur, embrayage, Boîte de vitesses, arbres et joints de transmission, pont-moteur), relatif au camion TB 130.

# I Amplitude relative à l'harmonique du couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres

## I.1 Moteur

On sait que le moteur à combustion interne (à piston) est très ancien au moins dans ces principes, il occupe dans l'industrie des moyens de transport et de traction d'automobile, une place de choix. C'est lui qui a contribué le plus aux progrès rapides accomplis dans le développement des moyens de transport modernes. Sa popularité est due principalement au fait qu'il se présente sous la forme d'un bloc moteur autonome pouvant fonctionner pendant une longue période de temps, en consommant relativement peu de carburant.

## I.2 les cycles

On appelle cycle l'évolution en pression et en température de la masse gazeuse à l'intérieur d'un cylindre de moteur thermique. Le renouvellement de la masse gazeuse s'effectue tous les deux tours du vilebrequin dans le cas d'un cycle à quatre temps et chaque tour dans le cycle à deux temps.

Nous avons principalement deux cycles théoriques :

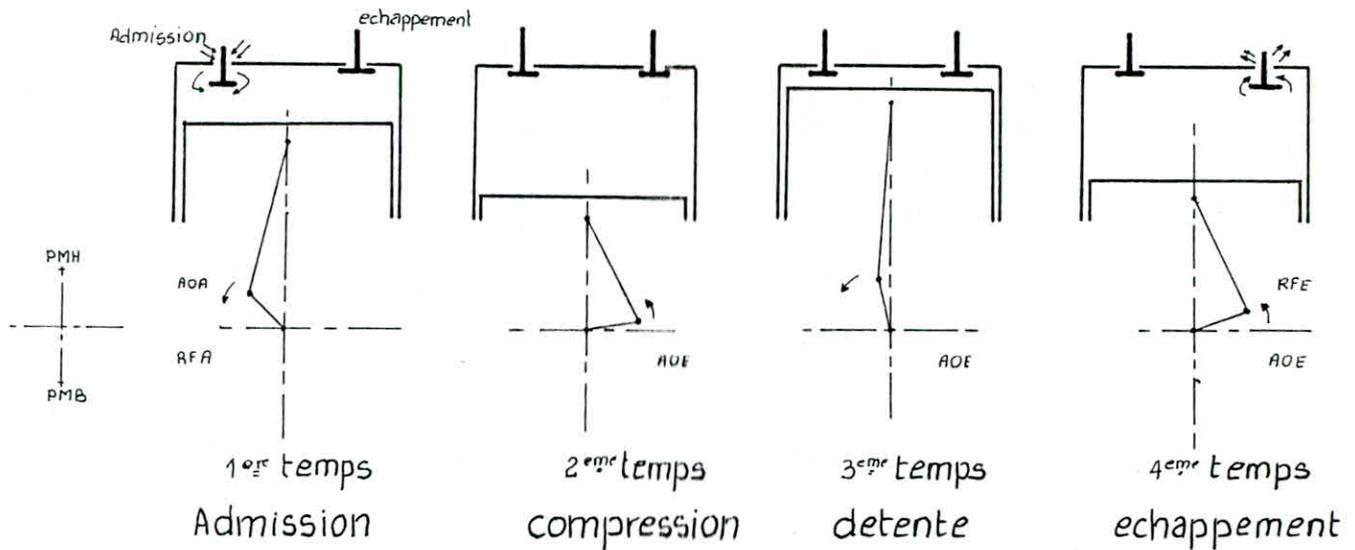
- Cycle avec apport de chaleur à volume constant (cycle Beau de Rochas).

- Cycle avec apport de chaleur à pression constante (cycle Diesel).

Les cycles réels s'éloignent assez sensiblement des cycles théoriques à causes des remarques suivantes :

L'apport de chaleur n'est jamais complètement isochore ou isobare.

## I.2.1 Cycle à quatre temps



### Premier temps

Admission de la masse gazeuse pendant la course descendante du piston (Soupape d'échappement fermée).

### Deuxième temps

Dans sa course ascendante le piston comprime la masse gazeuse après fermeture de l'orifice d'admission.

### Troisième temps

Les gaz sont portés à une température élevée par l'effet de la combustion et la pression augmente dans le cylindre. Durant la course descendante, le piston reçoit l'effort correspondant à la détente des gaz.

### Quatrième temps

L'orifice d'échappement est ouvert ; dans sa course ascendante le piston refoule les gaz brûlés à l'extérieur du cylindre.

## I.3 Le transvasement

Bien que le cycle soit traditionnellement divisé en quatre temps en pratique il convient de distinguer les six phases distinctes suivantes : admission - compression - combustion - détente - échappement et balayage.

les phases d'admission, d'échappement et de balayage constituent le transvasement et correspondent à l'évolution d'une masse de gaz variable dans le cylindre.

### I.3.1 Admission

La phase d'admission conditionne la masse gazeuse admise à chaque cycle dans le cylindre et par conséquent la pression moyenne indiquée.

Sur le plan physique le phénomène d'admission est le résultat des mouvements conjugués du piston et de la soupape d'admission. En raison du mouvement périodique du piston et de la soupape l'écoulement des gaz est a stationnaire et la conduite d'admission est le siège d'ondes de pressions progressives et stationnaires, la conduite d'admission constitue sur le plan acoustique un oscillateur à air et à ondes stationnaires et périodiquement excitées par le mouvement du piston et de la soupape.

### I.3.2 Echappement

la phase d'échappement débute à l'ouverture de l'orifice de celle-ci et se termine avec l'ouverture de l'orifice d'admission. Au moment de la combustion, la pression atteint  $5 \cdot 10^6$  à  $10^7$  pascals ( $50$  à  $100 \text{ kg/cm}^2$ ), la température est alors de l'ordre de  $1800$  à  $1000^\circ\text{C}$ . la soupape d'échappement s'ouvre, la chute de pression n'est pas instantanée ; les gaz sous pression appuient sur le piston, donc continue sa poussée en quittant le cylindre, la pression interne du cylindre expulse

### I.3.3 Balayage

L'effet de balayage au voisinage du P.M.H du piston ne peut être obtenu sur un moteur atmosphérique que par l'action simultanée du croisement de soupape et des effets pulsatoires dans les conduites d'admission et d'échappement. Il faut considérer différentes possibilités en fonction des niveaux de pression  $P_a$  à l'admission,  $P$  dans le cylindre et  $P_e$  à l'échappement.

a)  $P_a > P > P_e$  : l'écoulement se fait dans le sens admission-échappement et les gaz brûlés restant dans le cylindre sont balayés par les gaz frais de l'admission. Notons qu'un balayage efficace permet d'augmenter le taux de remplissage.

b)  $P_a < P < P_e$  : l'écoulement se fait dans le sens échappement-admission. Il y a contrebalayage. Il s'agit d'un cas très défavorable en raison du défaut de vidange de l'espace mort et de la reaspiration de gaz brûlés en début d'admission.

c)  $P_a < P$  et  $P > P_e$  : condition d'un contrebalayage partiel. Ce cas est presque aussi défavorable que le précédent.

d)  $P_a > P$  et  $P < P_e$  : défaut de balayage de l'espace mort.

## I.4 Couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres

les variation du couple est obtenue dans le moteur Diesel en modifiant la quantité de combustible injectée par cycle. Cela est rendu possible par l'aptitude du moteur à fonctionner avec un excès d'air. le remplissage étant indépendant du couple développé. le couple moteur est une grandeur periodique décomposable en serie de FOURIER, mis sous cette forme il a pour expression :

$$C_g = |C_m| + |a_1| \sin(\omega t + \gamma_1) + |a_2| \sin(2\omega t + \gamma_2) + \dots$$
$$C_g = |C_m| + \sum_1^n |a_k| \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (1.1)$$

les termes  $a_1, a_2, \dots, a_k$  designent les constantes de cette serie, le premier terme  $C_m$  represente la valeur moyenne du couple au cours d'un cycle. Les termes suivants constituent, les amplitudes des harmoniques  $a_1, a_2, \dots$

La pulsation est égale à :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

avec

$T$  : Periode fondamentale du phenomène.

comme

$$t = \frac{\theta}{\omega}$$

Nous pouvons ecrire :

$$\omega t = \frac{2\pi\theta}{\omega T}$$

Pour un moteur à quatre temps :

$$T = \frac{120}{N}, \quad \omega = \frac{\pi N}{30}$$

d'où

$$\omega t = \frac{\theta}{2}$$

Cela signifie qu'au terme de rang 1 correspond l'harmonique  $1/2$ , qu'au terme de rang 2 correspond l'harmonique 1 et ainsi de suite.

La figure (1.1) donne une image des premiers termes du développement harmonique du couple moteur  $C_g$  correspondant au cycle à quatre temps.

L'irrégularité du couple-moteur entraîne évidemment des variations de la vitesse de rotation instantanée auxquelles on remédie généralement grâce à l'artifice du volant d'inertie.

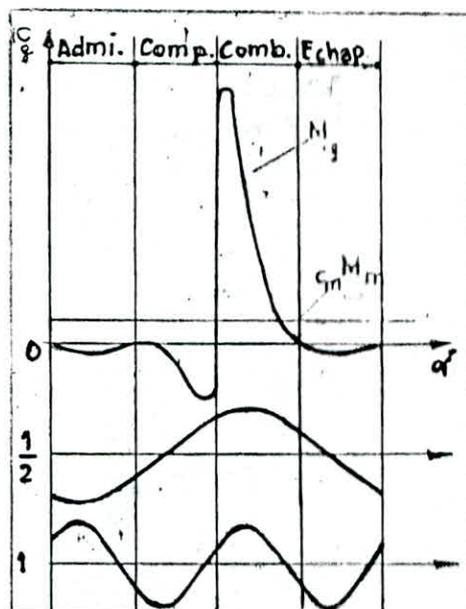


Fig: (1.1)

Couple  $C_g$  dû à la pression des gaz dans les cylindres

Les amplitudes relatives à l'harmonique du couple-moteur  $C_g$ ,  $a_k$  sont données par l'expression suivante: [dan.cm]. (02)

$$a_k = C_k \cdot S \cdot r \quad (1.2)$$

avec

$C_k$ : [dan/cm<sup>2</sup>] les coefficients harmoniques déterminés à l'aide des graphes de la figure (1.2.a)

$S$ : [cm<sup>2</sup>] section du piston

$r$  : [cm] rayon du coude du vilebrequin

Les phases initiales  $\delta_k$  sont également déterminées à l'aide des graphes de la figure (1.2.b)

Remarque :

les phases initiales sont en degré sur les graphes de la figure (1.2.b), on doit les convertir en radian, avant de les utiliser dans l'expression du couple moteur  $C_g$  (1.1)

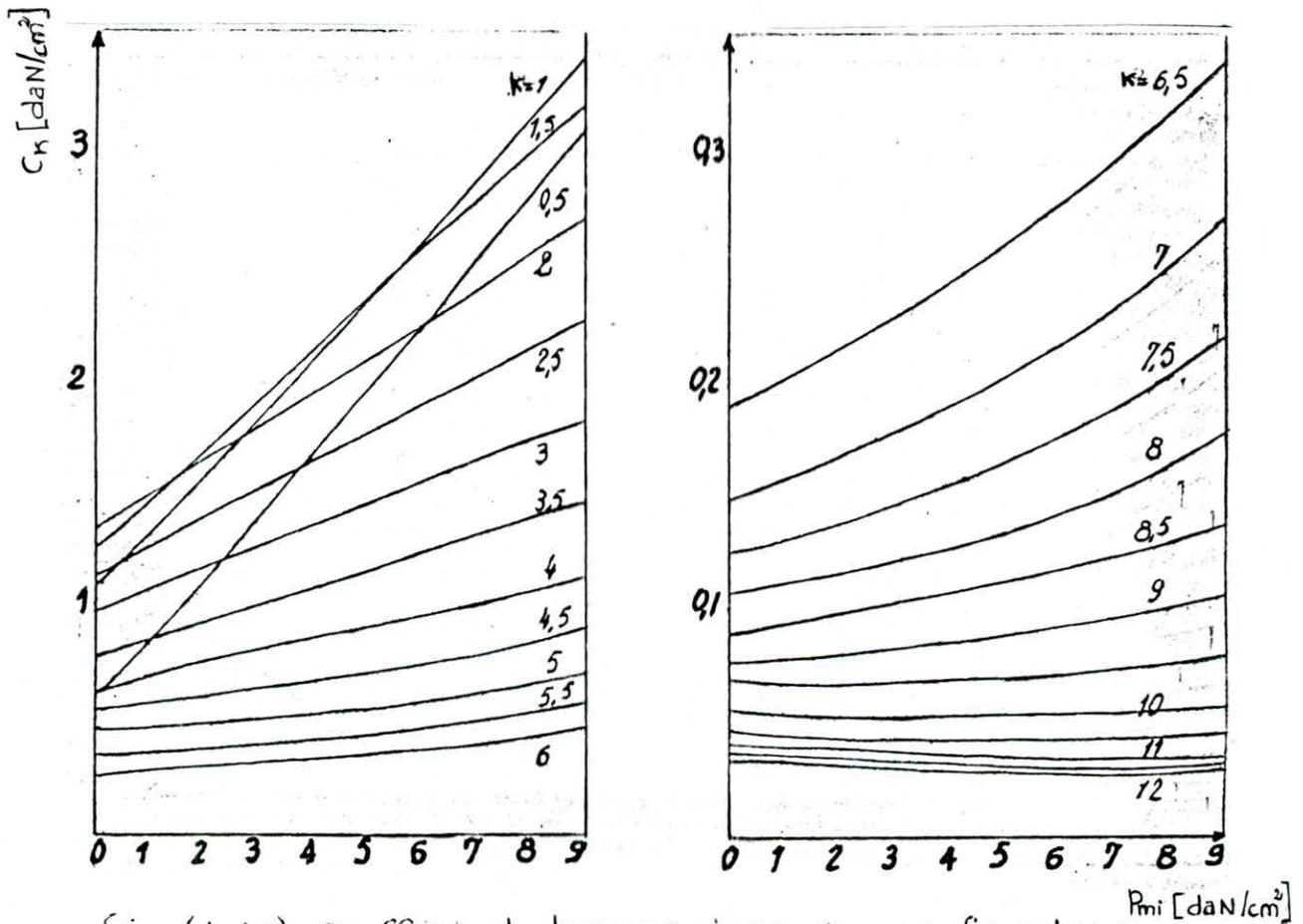


Fig (1.2.a): Coefficient harmonique  $C_k$  en fonction de la pression moyenne indiquée d'un moteur Diesel à quatre temps.

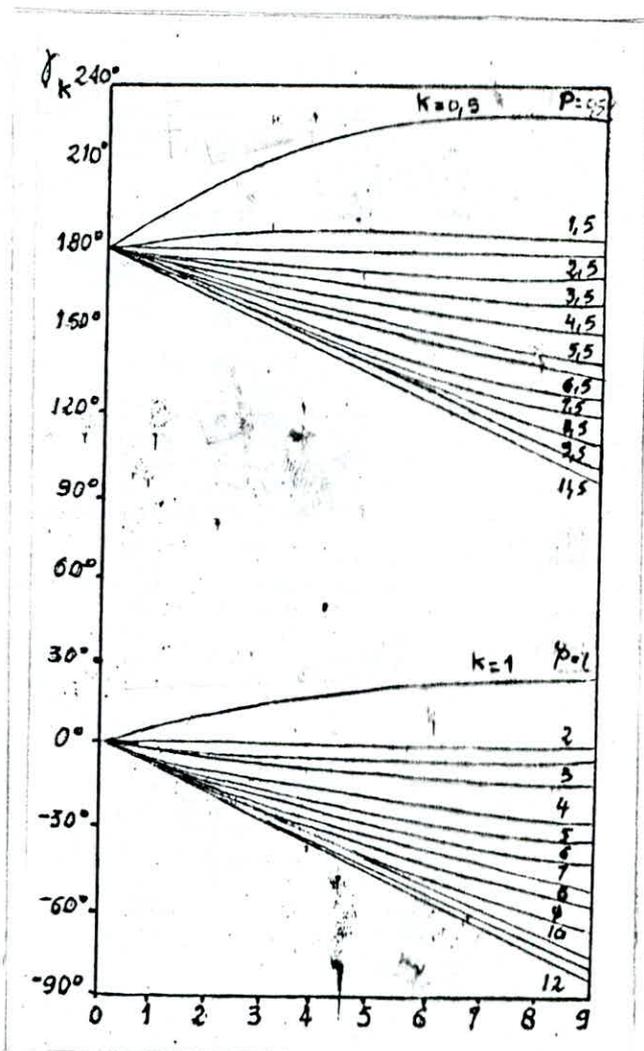


Fig : (1.2.b)  $P_{mi}$  [dan/cm<sup>2</sup>]

Phase initiale  $\gamma_k$  des harmoniques d'un moteur Diesel à quatre temps, en fonction de la pression moyenne indiquée

La pression moyenne indiquée devient, en bout d'arbre, (compte-tenu du rendement mécanique  $\eta_m$ , qui comprend : les frottements de tous les organes, l'énergie d'entraînement des organes auxiliaires du moteur, l'énergie nécessaire pour arriver à la vitesse de fonctionnement) la pression moyenne effective ( $P_{me}$ ), qui est donnée par :

$$P_{me} = P_{mi} \cdot \eta_m$$

avec

$\eta_m$  : variant de 0,75 à 0,85

## I.5 Determination de l'équation caractéristique de $C_k$ et $\delta_k$

Pour obtenir l'équation des courbes  $C_k = f(P_{mi})$  et  $\delta_k = g(P_{mi})$ , on utilise la méthode des moindres carrés exprimée par les cinq corrélations suivantes :

1) Régression linéaire RL :  $y(x) = Ax + B$

2) Allure exponentielle AE :  $y(x) = A \cdot \exp(B \cdot x)$

3) Allure logarithmique AL :  $y(x) = A + B \cdot \ln(x)$

4) Courbe-puissance cp :  $y(x) = A \cdot x^B$

5) Binôme BN :  $y(x) = C_2 \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_0$

Pour les quatre premiers types de corrélation on aura :

$$A = \frac{\sum (a_i \cdot b_i) \cdot \sum a_i - (\sum b_i \cdot \sum a_i^2)}{(\sum a_i^3) - (N \cdot \sum a_i^2)} \quad (1.3)$$

$$B = \frac{(\sum b_i - N \cdot A)}{\sum a_i} \quad (1.4)$$

le carré du coefficient de corrélation R est tel que si :

$$R1 = A \cdot \sum b_i + B \cdot \sum (a_i \cdot b_i) - \sum b_i^2 / N \quad (1.5)$$

$$R2 = \sum b_i^2 - \sum b_i^2 / N \quad (1.6)$$

Alors :

$$R^2 = R1 / R2 \quad (1.7)$$

En sachant que :

type de corrélation	$a_i$	$b_i$
RL	$x_i$	$y_i$
AE	$x_i$	$\ln y_i$
AL	$\ln x_i$	$y_i$
cp	$\ln x_i$	$\ln y_i$

Pour la corrélation par une binomiale, on démontre que d'une façon générale si :

$$y_p(x) = C_p x^p + C_{p-1} x^{p-1} + \dots + C_1 x + C_0$$

On a pour une série de N couples  $(y_i, x_i)$

$$\begin{pmatrix} N & \sum x_i & \dots & \sum x_i^p \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \\ \sum x_i^2 & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ \sum x_i^p & \dots & \dots & \sum x_i^{2p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^p y_i \end{pmatrix}$$

Soit un système matriciel :  $AC = D$  (1.8)

on obtient donc le vecteur C de dimension 1. (P+1) par :

$$C = A^{-1} D \quad (1.9)$$

avec

$$A^{-1} = \frac{C^t \cdot A}{|D \cdot A|} \quad (1.10)$$

t : transposée de la matrice

CA : comatrice de la matrice A

|DA| : Determinant de la matrice A

Dans notre cas on s'est contenté d'utiliser l'application ou  $p=2$  (binôme) c.à.d. dire :

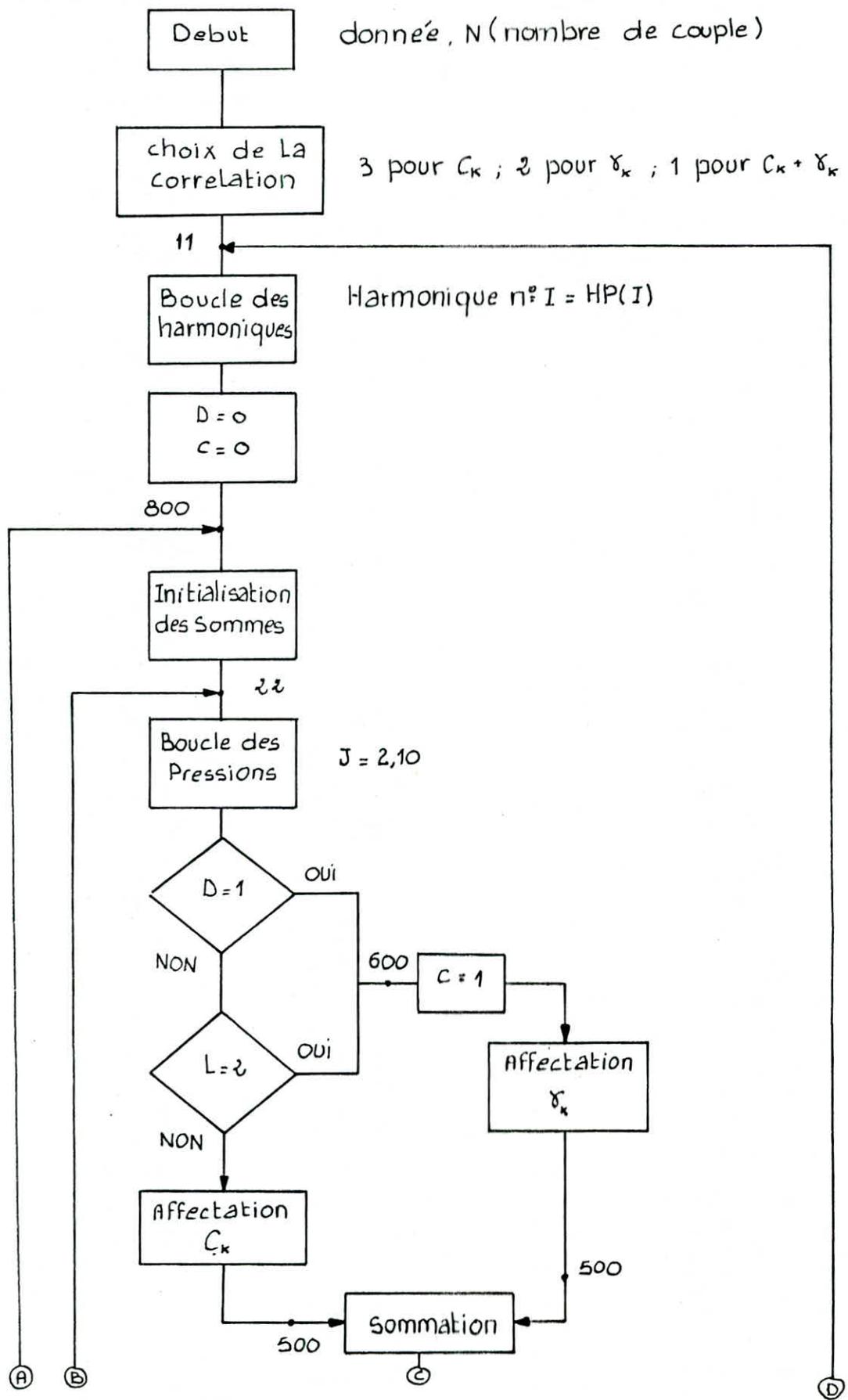
$$y(x) = C_2 x^2 + C_1 x + C_0$$

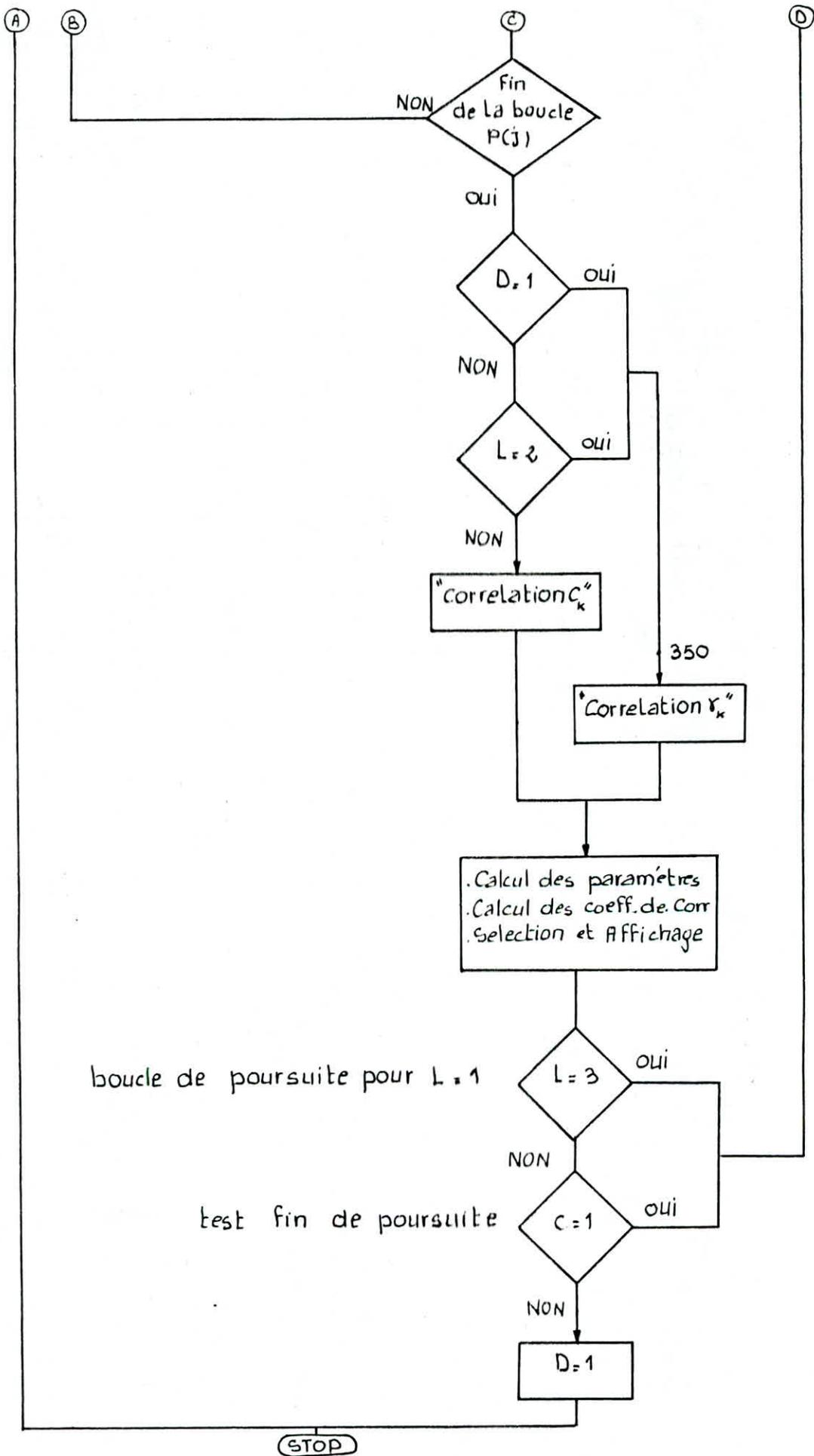
le coefficient de corrélation est donné par :

$$R = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1.11)$$

avec :  $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N}$  ;  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$  (1.12)

# 1.6 Organigramme de corrélation (1<sup>ère</sup> partie du programme) P.F.E1





## Déroulement de l'organigramme de corrélation et calcul d'amplifi

- Lecture du nombre de couple donné  $N$
- Lecture du choix de la corrélation : pour le coefficient harmonique  $c_k$  on attribue à la variable  $L$  la valeur (3), pour la phase initiale  $\gamma_k$  c'est (2), dans le cas où c'est les deux en même on affecte à  $L$  la valeur (1).
- La boucle 11 permet de changer l'ordre de l'harmonique.
- Initialisation des variables  $C$  et  $D$  qui seront utilisées pour les tests d'affectation ( $\gamma_k$  ou  $c_k$  et  $\delta_k$ )
- La boucle 800 permet le retour aux différents calculs dans le cas où la corrélation s'effectue sur les deux coefficients ( $c_k$  et  $\gamma_k$ ).
- Initialisation de toutes les variables qui sont utilisées pour les différentes sommations.
- La boucle 22 permet d'affecter à la variable  $Y(J)$  (voir programme), selon la pression moyenne indiqué  $P(J)$ , soit la valeur du coefficient harmonique correspondant  $C_k(J)$  ou la phase initiale correspondante  $\gamma_k(J)$  et d'effectuer l'ensemble des premiers calculs.
- La variable  $C$  permet d'effectuer l'ensemble des calculs sur la phase initiale  $\gamma_k$  uniquement, par contre la variable  $D$  assure la corrélation de  $C_k$  et  $\delta_k$  simultanément.
- Une fois que l'ensemble des premiers calculs sont exécutés (y compris l'affectation de la corrélation choisie) on passe aux calculs des coefficients caractéristiques des différentes équations (Allure Binomiale - Allure exponentielle - Allure logarithmique - fonction puissance - Regression linéaire) qui sont suivis de deux tests qui permettent soit le retour aux calculs initiaux ou le passage à l'harmonique suivante.
- Arrêt du programme.

## II Amplitudes relatives à l'harmonique du couple moteur dû aux forces d'inerties

### II.1 Forces d'inerties

Pour le calcul des forces d'inerties et des quantités de mouvement de la bielle, on décompose la masse de celle-ci en deux parties :

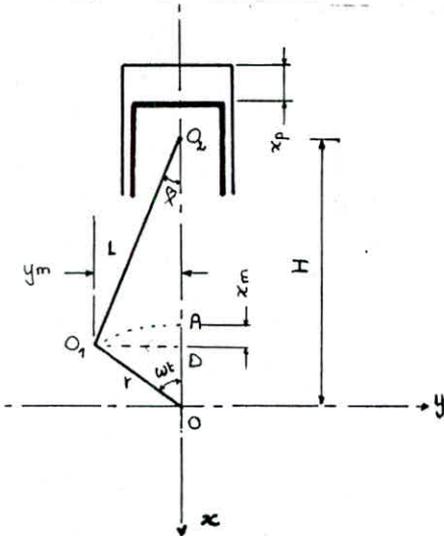


Fig: (2.1.a)

Mécanisme bielle manivelle

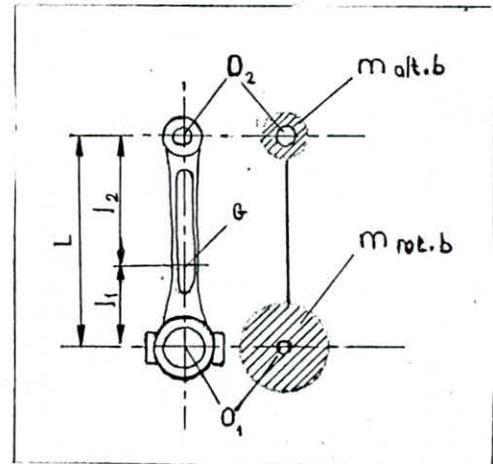


Fig: (2.1.b)

Décomposition de la bielle en deux masses

L'une concentrée au point  $O_2$ , soumise à un mouvement alternatif vertical l'autre concentrée au point  $O_1$  de la manivelle et subit un mouvement de rotation.

Posons :

$m_{alt}$  : l'ensemble des masses alternatives (Piston + une partie de la bielle).

$m_{rot}$  : l'ensemble des masses relatives (manivelle + une partie de la bielle).

la force d'inertie d'un élément donné en un point  $i$  est égale à la masse de cet élément que multiplie son accélération en ce point.

comme  $\sin \beta = r \sin \omega t / L$  et  $AD = r(1 - \cos \omega t)$

$$\text{donc } \cos \beta = (1 - \sin^2 \beta)^{1/2}$$

$$\cos \beta = (1 - r^2 \sin^2 \omega t / L^2)^{1/2}$$

donc on aura :

$$X_p = r(1 - \cos \omega t) + L(1 - (1 - r^2 \sin^2 \omega t / L^2)^{1/2})$$

le second terme  $r^2 \sin^2 \omega t / L^2$ , étant très petit par rapport à 1, nous pouvons le développer en série de Fourier et conserver seulement les deux premiers termes du développement.

C'est à dire :

$$(1 - r^2 \sin^2 \omega t / L^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \omega t / L^2$$

cela entraîne une erreur inférieure à 1/2000 pour :

$$r^2 \sin^2 \omega t / L^2 = 1/16$$

Finalement :

$$X_p = r(1 - \cos \omega t) + \frac{r^2}{2L} \sin^2 \omega t$$

$$X_p = \left(r + \frac{r^2}{4L}\right) - r \left(\cos \omega t + \frac{r}{4L} \cos 2\omega t\right)$$

les composantes verticales de la vitesse et de l'accélération de  $O_2$  sont :

$$\frac{dX_p}{dt} = r\omega \left(\sin \omega t + \frac{r}{2L} \sin 2\omega t\right)$$

$$\frac{d^2 X_p}{dt^2} = r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t\right)$$

les composantes horizontales sont nulles, car le point  $O_2$  n'a pas de déplacement horizontal.

Si  $X_m$  et  $Y_m$  sont les déplacements vertical et horizontal du point  $O_1$ , tel que :

$$X_m = r(1 - \cos \omega t) \text{ et } Y_m = -r \sin \omega t$$

Nous aurons pour composantes verticales et horizontales de la vitesse et de l'accélération de  $O_1$ ,

$$\frac{dx_m}{dt} = r\omega \sin \omega t$$

$$\frac{dy_m}{dt} = -r\omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x_m}{dt^2} = r\omega^2 \cos \omega t$$

$$\frac{d^2y_m}{dt^2} = r\omega^2 \sin \omega t$$

les composantes de la force d'inertie totale des parties mobiles sont :

Force verticale :

$$F_{ix} = m_{alt} \cdot \frac{d^2x_p}{dt^2} + m_{rot} \cdot \frac{d^2x_m}{dt^2}$$

$$F_{ix} = (m_{alt} + m_{rot}) \cdot r\omega^2 \cos \omega t + m_{alt} \cdot \frac{r^2}{L} \cdot \omega^2 \cos 2\omega t$$

Force horizontale :

$$F_{iy} = m_{alt} \cdot \frac{d^2y_p}{dt^2} + m_{rot} \cdot \frac{d^2y_m}{dt^2}$$

$$F_{iy} = m_{rot} \cdot r\omega^2 \sin \omega t$$

Couple des forces d'inerties par rapport à l'axe longitudinal.

le couple d'inertie  $C_i$  est dû entièrement à la masse alternative.

$$C_i = -F_{ix alt} \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot H$$

avec

$$F_{ix alt} = m_{alt} \cdot r\omega^2 \left( \cos \omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sin \beta / (1 - \sin^2 \beta)^{1/2} = \sin \beta \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \right)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{L} \sin \omega t \left( 1 + \frac{r^2}{2L^2} \sin^2 \omega t \right)$$

ou

$$H = (\sin(\omega t + \beta) / \sin \beta) \cdot r$$

$$H = L \cos \beta + r \cos \omega t = \left(L - \frac{r^2}{4L}\right) + r \cos \omega t + \frac{r^2}{4L} \cos 2\omega t$$

Finalement, le couple d'excitation dû à l'inertie des pièces en mouvement alternatives est :

$$C_i = -m_{alt} \cdot r \omega^2 \left( \cos \omega t + \frac{r}{L} \cos 2\omega t \right) \cdot \frac{r}{L} \sin \omega t \left( 1 + \frac{r^2}{2L^2} \sin^2 \omega t \right) \cdot \left( \left( L - \frac{r^2}{4L} \right) + r \cos \omega t + \frac{r^2}{4L} \cos 2\omega t \right) \quad (2.1)$$

En négligeant tous les termes proportionnels à une puissance supérieure à deux de  $r/L$  on aura :

$$C_i = \frac{1}{2} m_{alt} r^2 \omega^2 \left( \frac{r}{2L} \sin \omega t - \sin 2\omega t - \frac{3r}{2L} \sin 3\omega t - \frac{r^2}{L^2} \sin 4\omega t \right)$$

On remarque bien que pour le calcul de  $C_i$  nous nous sommes contentés uniquement des quatre premiers termes du développement de l'équation (2.1), car pour les termes suivants la variation du couple moteur  $C_i$  est pratiquement négligeable ainsi  $C_i$  peut se mettre sous la forme suivante

$$C_i = b_2 \sin \omega t - b_4 \sin 2\omega t - b_6 \sin 3\omega t - b_8 \sin 4\omega t - \dots - b_{2p} \sin p\omega t \quad (2.2)$$

ou :

$$C_i = b_2 \sin(\omega t + \psi_1) + b_4 \sin(2\omega t + \psi_2) + b_6 \sin(3\omega t + \psi_3) + b_8 \sin(4\omega t + \psi_4) + \dots + b_{2p} \sin(p\omega t + \psi_p) \quad (2.3)$$

avec

$$b_2 = \frac{1}{2} m_{alt} r^2 \omega^2 \frac{r}{2L}$$

$$b_4 = \frac{1}{2} m_{alt} \cdot r^2 \omega^2$$

$$b_6 = \frac{1}{2} m_{alt} \cdot r^2 \omega^2 \frac{3r}{2L}$$

$$b_8 = \frac{1}{2} m_{alt} \cdot r^2 \omega^2 \frac{r^2}{L^2}$$

$b_{2p}$  : amplitude relative à l'harmonique du couple d'inertie

$$\Psi_1 = 0, \Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \dots = \Psi_p = \pi$$

$\Psi_p$  : déphasage permettant le changement de signe entre l'équation (2.2) et (2.3)

la figure (2.2) nous donne une image sur la variation du couple moteur  $C_c$  en fonction de la rotation du vilebrequin pendant un certain temps  $t$ .

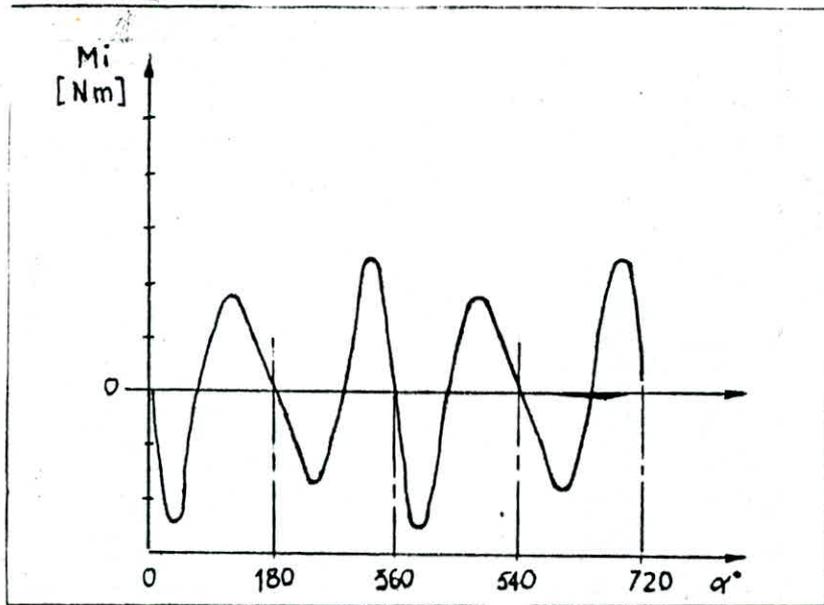
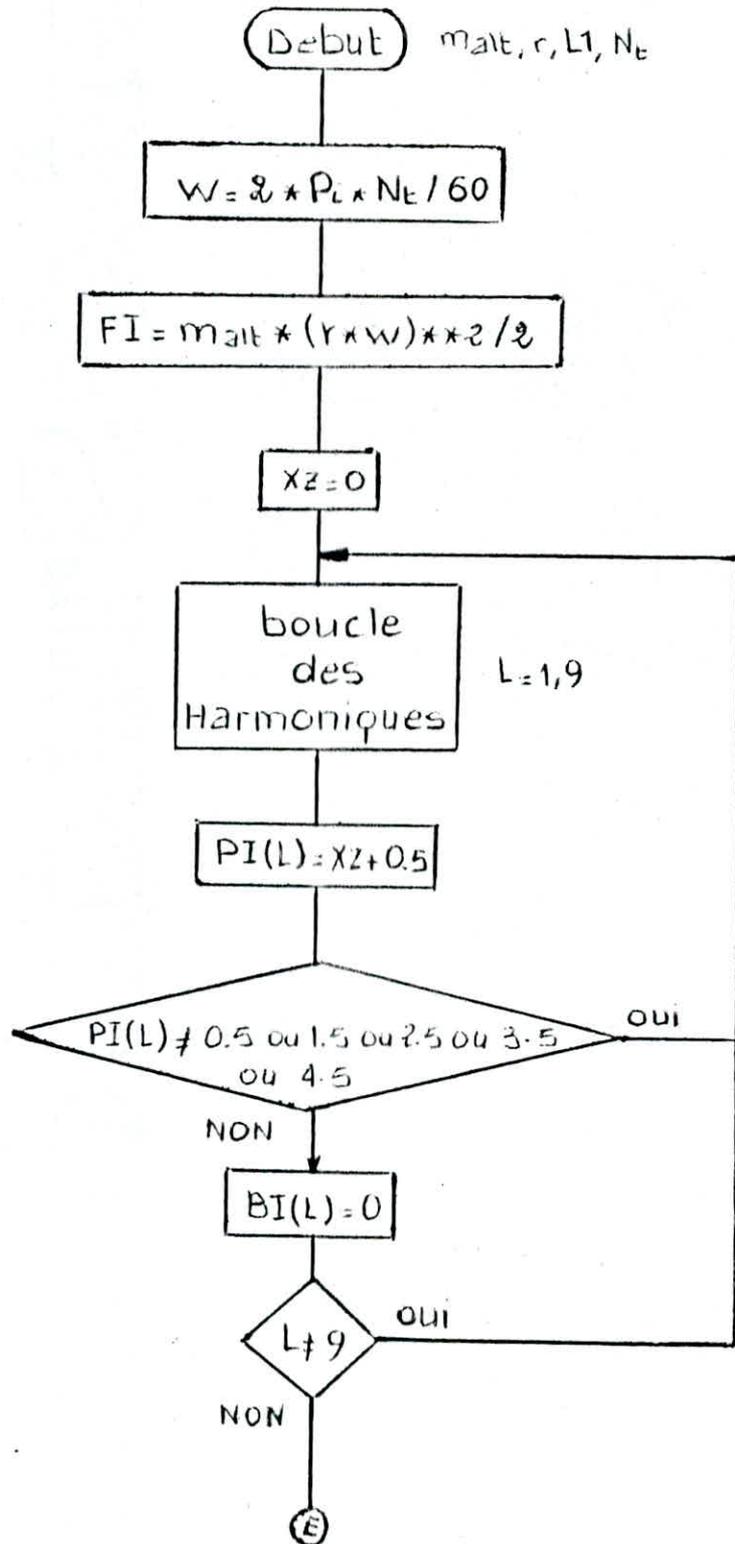
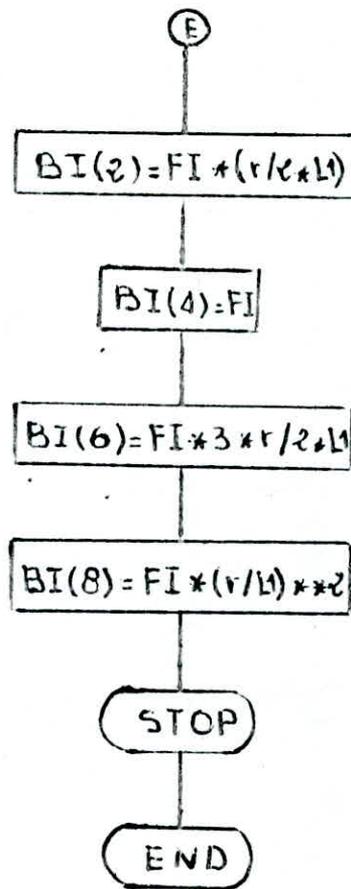


Fig.(2.2) couple dû à l'inertie des pièces en mouvement d'un cylindre (Moteur Diesel à quatre temps).

Dans un moteur quelconque (essence - Diesel), le couple moteur total est la somme du couple dû à la pression des gaz dans les cylindres (chapitre I) et celui dû aux forces d'inerties des pièces en mouvement alternatives (chapitre II).

II.2 Organigramme calculant les amplitudes b2p PFE2  
(Deuxieme partie du programme)





## Déroulement de l'organigramme

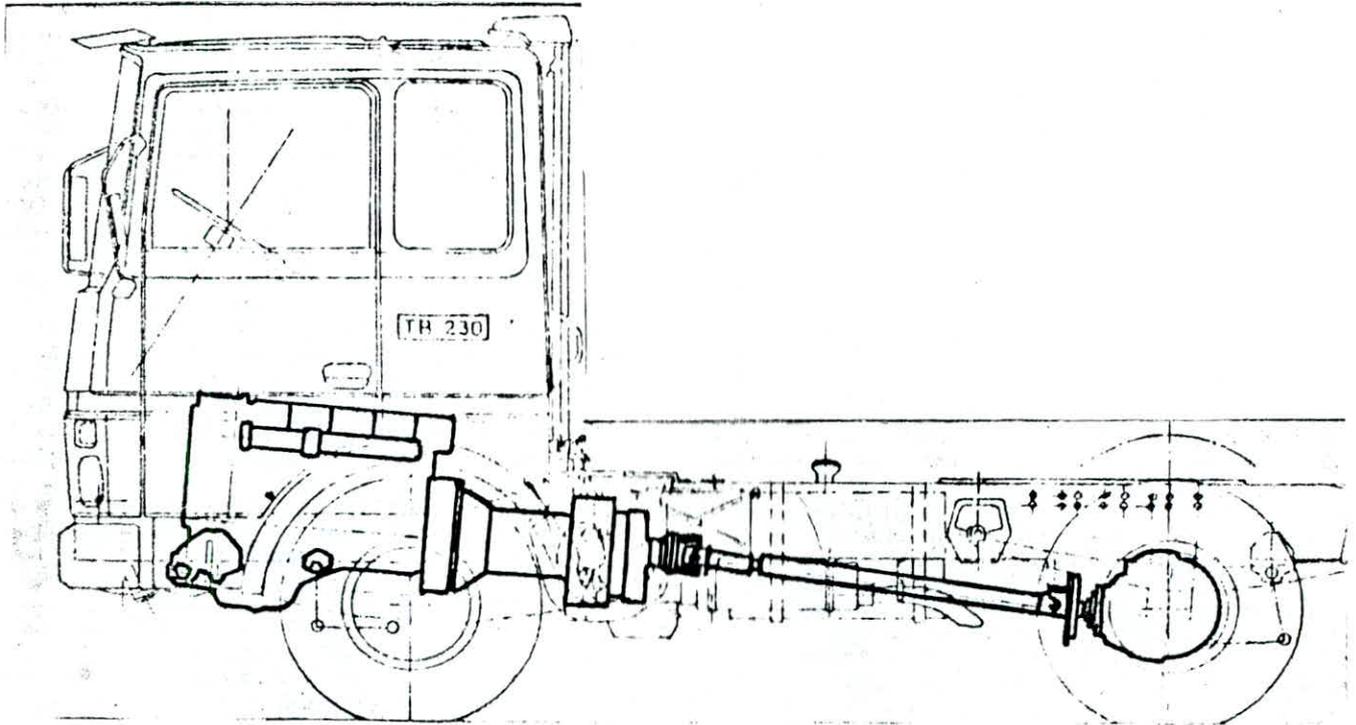
Lecture de la vitesse de rotation du moteur  $N_t$ , le rayon de la manivelle  $r$ , longueur de la bielle  $L$ , la masse alternative  $m_{alt}$

- Calcul de la vitesse angulaire ainsi que l'expression  $FI$  pour éviter sa répétition dans les calculs suivants
- Initialisation de la variable  $xz$
- Boucle des harmoniques
- l'expression  $PI(L)$  permet d'inscrire et d'incrémenter l'ordre des harmoniques.
- Test annullant toutes les harmoniques d'ordre 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5
- l'ensemble des opérations a exécutées.
- Arrêt du programme.

### III La transmission

La transmission est l'ensemble des organes entreposés entre le moteur et les roues motrices.

les organes composant la chaîne de transmission sont :  
Moteur , l'embrayage , boîte de vitesses , pont avec différentiel .



Schema du groupe motopropulseur du camion

TB 230

### III.1 Amortisseur de torsion (damper)

Les explosions dans les différents cylindres provoquent des vibrations torsionnelles du vilebrequin. Ces vibrations sont d'autant plus importantes que le nombre de cylindres est petit. A certaines fréquences de rotation (régime critique), elles peuvent s'accroître au point d'entraîner la rupture du vilebrequin. Le montage d'un amortisseur de vibrations à l'extrémité de l'arbre élimine un tel risque.

Le couple de disques de friction de l'amortisseur de vibrations est fixé de façon mobile sur l'extrémité du vilebrequin et pressé à l'aide de ressorts contre les surfaces solidaires du vilebrequin. L'inertie résultant de la masse des disques sur la surface de friction atténue les vibrations torsionnelles du vilebrequin lorsque celles-ci apparaissent.

### III.2 Moteur

#### III.2.1 Piston

Le piston remplit quatre fonctions essentielles :

Tout en étant mobile, il doit contribuer à l'étanchéité entre la chambre de combustion et le carter.

Il doit supporter la pression des gaz créés par la combustion et la transmettre par l'intermédiaire de la bielle au vilebrequin.

Il doit résister aux forces latérales qu'il exerce sur la paroi du cylindre.

Il doit conduire la chaleur aussi rapidement que possible à la paroi du cylindre.

Sur les moteurs Diesel suralimentés, on emploie aussi des pistons à canaux de refroidissement incorporés au moment du montage :

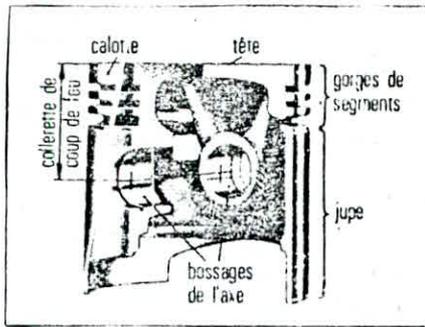


fig: (3.1.a) structure du piston

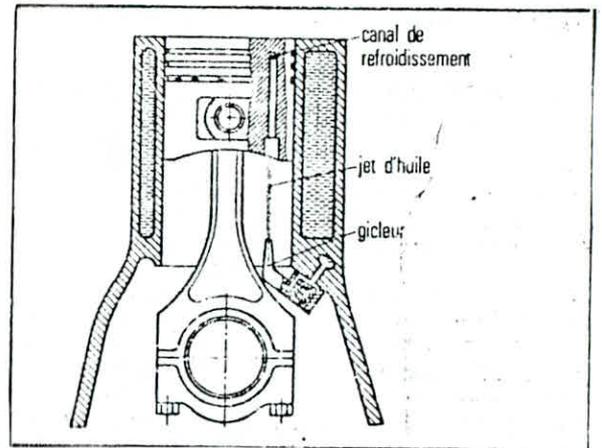


fig: (3.1.b) piston avec canal de refroidissement et gicleur d'huile pour moteur Diesel suralimenté

### III.2.2 la bielle

la bielle relie le piston au vilebrequin. Elle transmet la force du piston au vilebrequin.

la bielle est soumise à des efforts importants: la pression des gaz sur la tête du piston produit d'énormes poussées dans le sens longitudinal de la bielle. les grandes vitesses alternatives du piston engendrent des effets d'inertie qui agissent dans le sens longitudinal de la bielle comme forces de traction et de poussée. le mouvement pendulaire de la bielle sur l'axe du piston provoque d'importantes forces de flexion. Elle subit également des efforts de flambage du fait de sa longueur.

les bielles des moteurs Diesel ont des coussinets de gros diamètre, car les manetons du vilebrequin sont exécutés avec des sections plus importantes pour pouvoir résister aux contraintes élevées. la tête de la bielle est coupée en biais, afin qu'elle puisse être montée par le haut, en passant par le cylindre. les plans de joint sont souvent pourvus d'une denture à 90°.

### III-2-3 Le vilebrequin

Le vilebrequin a pour fonction de transformer la force du piston transmise par la bielle en force circulaire et de produire un moment de rotation qu'il transmet au volant moteur et à l'embrayage de même, il entraîne la distribution, la pompe à l'huile, les dispositifs d'alimentation en carburant, d'allumage et de refroidissement du moteur, ainsi que la dynamo ou l'alternateur.

Le vilebrequin subit des efforts considérables. Les bielles et pistons doivent être accélérés, puis freinés à chaque course du vilebrequin, il en résulte d'énormes effets d'inertie. De plus, le vilebrequin subit d'importants effets centrifuges. Ces forces sollicitent le vilebrequin de manière importante (torsion, flexion, vibration torsionnelle). Les surfaces d'appuis sont par ailleurs exposées à une forte usure.

Le vilebrequin comporte généralement un palier (tourillon) après chaque maneton, afin d'éviter la flexion que les forces élevées du piston pourraient provoquer.

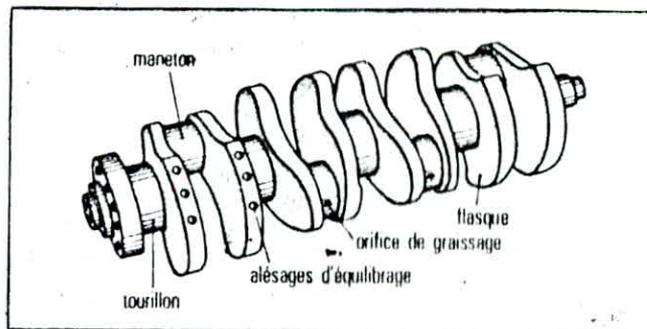


fig:(3.2) les différentes parties du vilebrequin

### III.3 Volant moteur

Le volant moteur emmagasine de l'énergie durant le temps moteur (explosion) qu'il restitue durant les temps morts, c'est à dire temps non moteurs.

Le volant moteur est une masse d'inertie qui régularise et équilibre la rotation du vilebrequin. Pour une même cylindrée, la masse du volant est d'autant plus grande que le moteur comporte moins de cylindres.

L'embrayage est généralement fixé sur le volant moteur. Sur sa circonférence est disposée la couronne de démarreur. Le volant est fixé sur l'embase du vilebrequin par des boulons en acier allié dont le couple de serrage doit être respecté. Le volant est en acier ou en fonte. Le vilebrequin et le volant doivent être correctement équilibrés pour qu'il n'y ait pas de balourd dynamique important à régime élevé, ce qui solliciterait considérablement le vilebrequin et les paliers.

### III.4 Embrayage

L'embrayage permet de relier progressivement et sans à coup le moteur à la transmission, il doit transmettre intégralement le couple moteur.

Il existe des embrayages à friction et des embrayages hydrauliques. Sur les véhicules comportant une boîte de vitesses mécanique, on emploie un embrayage à friction, tandis qu'il est hydraulique lorsque la boîte de vitesses est automatique. En actionnant l'embrayage, on interrompt la transmission : l'embrayage est « embrayé », quand on n'exerce aucune traction sur lui ; il est « débrayé » dans le cas contraire.

Pour fournir au démarrage le couple nécessaire à la traction, il faut que le moteur atteigne un certain régime. On y parvient en le libérant de la transmission. Lorsqu'on embraye,

Le couple du moteur est transmis, d'abord par frottement de glissement à la boîte de vitesses (le frottement de l'embrayage produit un effet de freinage sur le moteur et un effet d'entraînement sur le véhicule), après le démarrage, l'embrayage transmet intégralement le couple du moteur à la boîte de vitesses par frottement statique (adhérence).

Fig: (3.3.a) Embrayage mono. disque

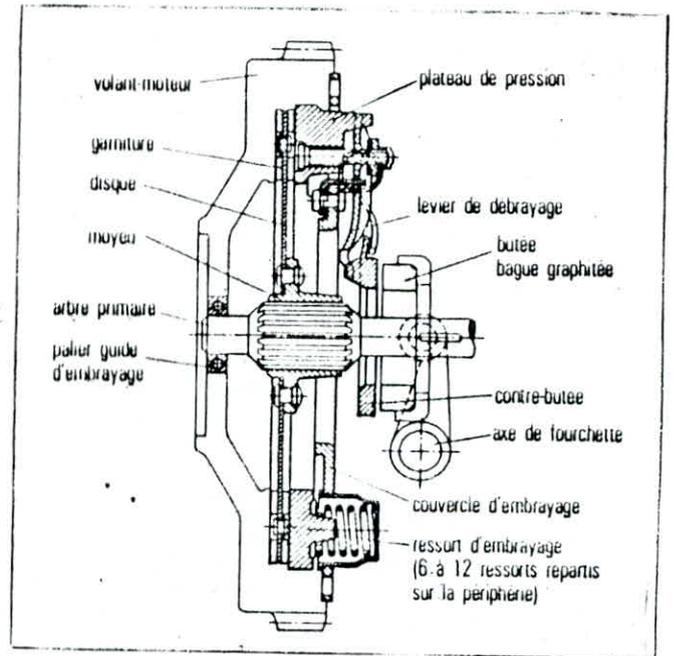
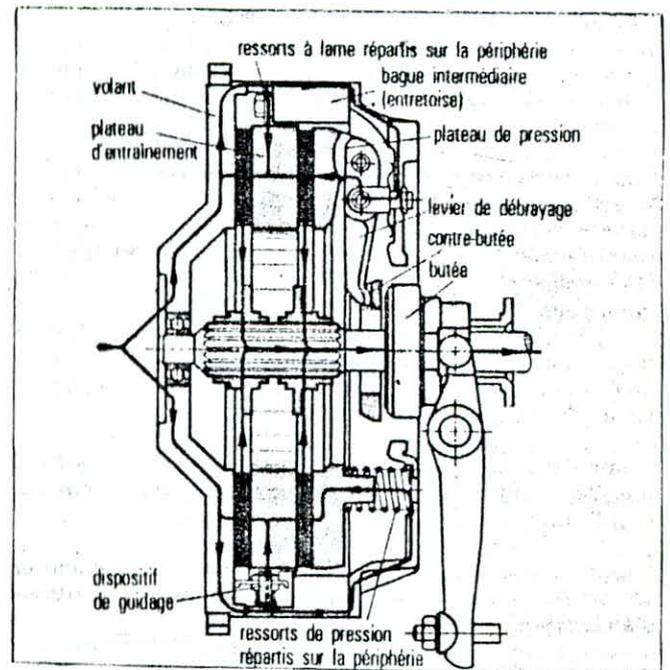


Fig: (3.3.b) Embrayage bi-disque



### III.5 boîte de vitesses

Elle est essentiellement formée d'engrenages dont le nombre de dents varie pour chacun des rapports de vitesse de la boîte. Le rôle principal de la boîte de vitesses est de multiplier le couple moteur afin d'obtenir l'effort de traction nécessaire au déplacement et à l'accélération du véhicule.

La multiplication du couple s'obtient en demultipliant le mouvement, c'est à dire la fréquence de rotation des organes de transmission. Les différents rapports de vitesse permettent également d'adapter le régime du moteur et la vitesse du véhicule aux conditions de circulation.

La boîte de vitesses est indispensable en raison des caractéristiques du moteur à combustion interne, qui présente une fréquence de rotation minimum et maximum. La zone favorable d'utilisation du moteur se situe entre ces deux limites. Le véhicule doit toujours pouvoir être entraîné, malgré les variations de charges et des conditions de la circulation, avec le régime moteur le plus favorable. On y parvient grâce aux différents rapports (ou vitesses) de la boîte.

La synchronisation dans les boîtes de vitesses, facilite le changement de vitesses et ménage la boîte. On retrouve sur les poids lourds un doubleur de gamme accouplés aux boîtes de vitesses, en montant celui-ci en amont de la boîte de vitesses, on obtient par un étagement préalable, une surmultiplication de la transmission sur le pignon d'entrée, ce qui permet de rouler en route, en plaine à la même allure, mais avec un régime du moteur plus faible, qu'en prise directe.

### III.6 Les arbres et les joints de transmission

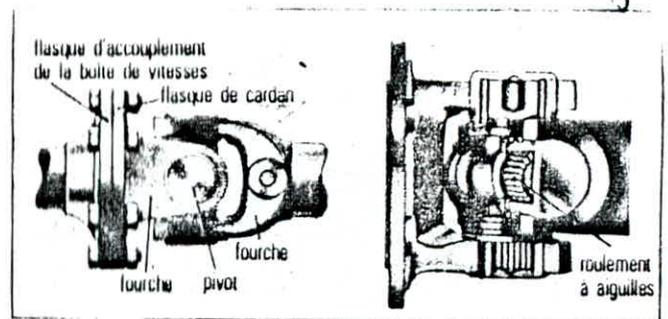
L'arbre de transmission, transmet le couple de la boîte de vitesses au pignon d'attaque de l'essieu moteur. Des joints de transmission permettent à l'arbre de suivre les débattements de la suspension (de l'essieu) sans les transmettre à la boîte de vitesses. Les arbres de transmission sont généralement en acier de haute qualité, ils présentent souvent une section tubulaire (les arbres creux étant plus légers). Les joints utilisés sont à croisillon (cardan) ou élastiques.

#### - Joints de cardan

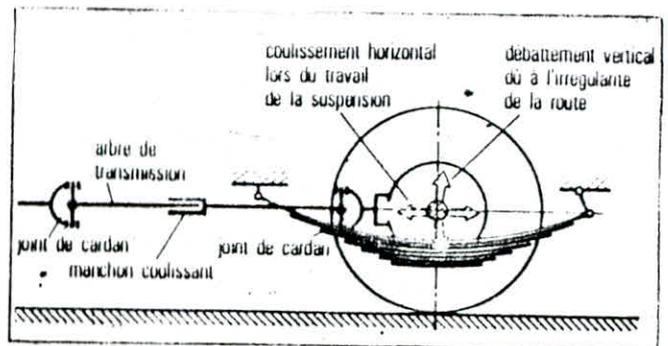
Les fourches du joint sont reliées par le croisillon, le frottement entre les pièces est assuré par des roulements à aiguilles entièrement fermés, ce qui ne nécessite pas d'entretien. Les joints de cardan courant permettent des angles d'inclinaison pouvant aller jusqu'à  $15^\circ$ , et sur des constructions spéciales jusqu'à  $25^\circ$ .

On emploie les joints de cardan sur les arbres de transmission qui doivent suivre avec l'essieu des débattements importants de la suspension, c'est le cas des essieux rigides

Fig(3.4.a) Joint de cardan



Fig(3.4.b) Arbre de transmission et joint de cardan.



## - Joint d'articulation sur les arbres de roues

Si le pont est fixé à la carrosserie, il faut équiper les arbres de roues de joints d'articulation, afin qu'ils puissent suivre les débattements de la suspension

Souvent sur les arbres des roues arrière, on emploie des joints de cardan équipés de roulements à aiguilles. L'arbre des roues arrière doit être équipé d'une pièce coulissante qui permet de compenser les différences de longueur l'ors du débattement de la suspension. La pièce coulissante peut se trouver dans l'un des deux joints

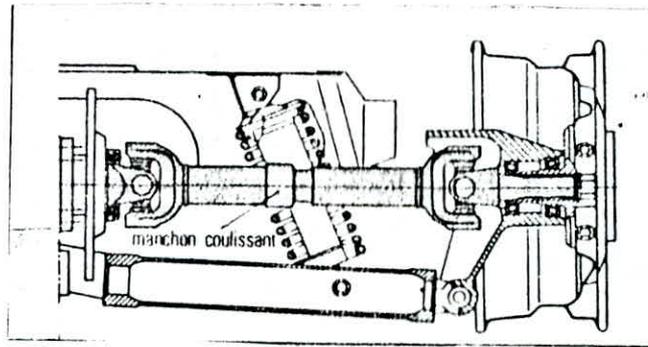


fig:(3.5) Arbre de roues  
avec joints de cardan

## III-7 L'essieu moteur

L'essieu moteur comprend trois éléments essentiels : le couple conique, le différentiel et l'essieu avec les arbres de roues. Lorsque le moteur est placé transversalement dans le véhicule, le couple conique est remplacé généralement par une transmission à engrenages cylindriques à dentures hélicoïdales.

### - Couple conique

Il se compose d'un pignon d'attaque et d'une couronne, il transforme le mouvement longitudinal de l'arbre de transmi..

ssion en mouvement transversal des arbres de roue ; il réalise toujours une demultiplication du mouvement .

## - Le différentiel

Les roues situées du côté extérieur du virage parcourent un trajet plus grand que les roues situées à l'intérieur, elles tournent également à des fréquences différentes l'orsque la surface de la route est irrégulière par conséquent, une liaison rigide des deux roues motrices forcerait l'une des deux à patiner c'est à dire à riper.

Le différentiel permet aux deux roues motrices de tourner à des fréquences différentes tout en exerçant leur force de traction.

Dans les différentiels, la compensation peut être obtenue au moyen de pignons coniques ou droits (on utilise généralement des pignons coniques).

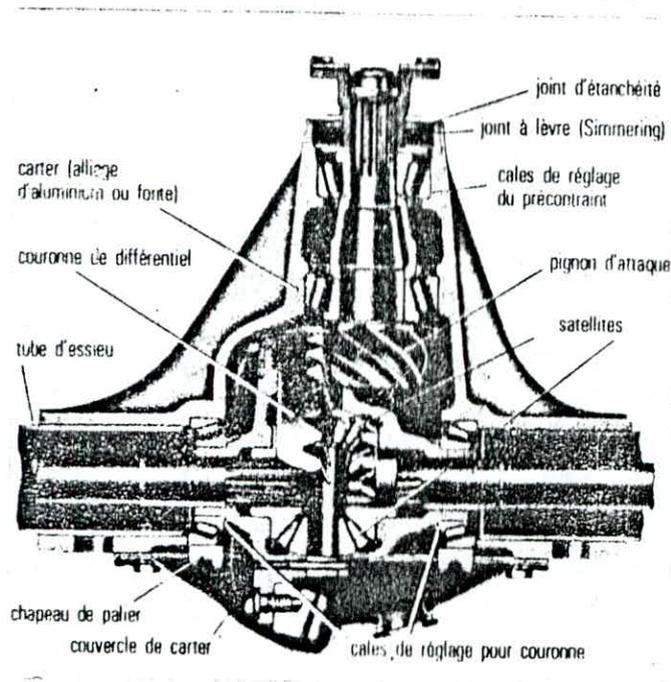


fig: (3.6) Différentiel à pignons coniques

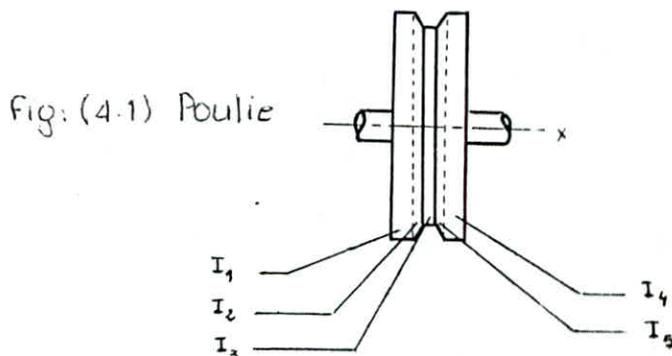
## IV Methode de calcul des differents parametres de la chaine de transmission

La modelisation la plus correcte de la chaine de transmission des vehicules, consisterait en une étude aux niveaux des milieux continus de la propagation des sollicitations transitaires de flexion et de torsion. Une telle étude paraît pour le moment inaplicable en pratique. En effet cette étude ne pourrait être menée que par la methode des éléments finis. la complexité de la chaine de transmission (moteur - boîte de vitesses - arbre de transmission - ponts) necessiterait un nombre très élevé de degré de liberté, ce qui entrainerait un coût de calculs excessif. Ce qui par contre nous paraît faisable est de calculer en utilisant le modèle "Masse-Ressort" le modèle le plus couramment utilisé pour les transmission de mouvement de rotation qui est représenté par un ensemble de solides de revolution, supposés infiniment rigides, réunis entre eux par des ressorts de torsion.

Dans ce chapitre nous établirons la methode utilisée pour le calcul des paramètres (moment d'inertie - rigidité torsionnelle - coefficient d'amortissement) des différents éléments de la chaine de transmission, ainsi que leurs schéma equivalent retenu.

### IV.1 Poulie

#### IV.1.1 Moment d'inertie



On décompose notre poulie en cinq disques, le moment d'inertie de la poulie sera la somme des moments d'inertie des disques, tel que :

$$\text{Pour un disque : } I_i = \frac{\rho \pi}{32} \cdot e_i (d_{e_i}^4 - d_{i_i}^4)$$

avec

$e_i$  : [m] épaisseur du disque.

$d_{e_i}$  : [m] diamètre extérieur du disque.

$d_{i_i}$  : [m] diamètre intérieur du disque.

Le moment d'inertie de la poulie sera : [kg.m<sup>2</sup>]

$$I_p = \sum \frac{\rho \pi}{32} \cdot e_i (d_{e_i}^4 - d_{i_i}^4) \quad (4.1)$$

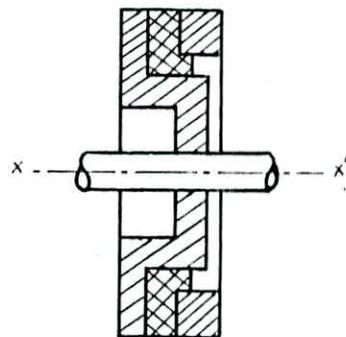
#### IV.1.2 Rigidité torsionnelle

La liaison poulie vilebrequin se fait à travers l'âme de l'amortisseur. Cette liaison est supposée d'une rigidité infinie ( $I/k = 0$ ).

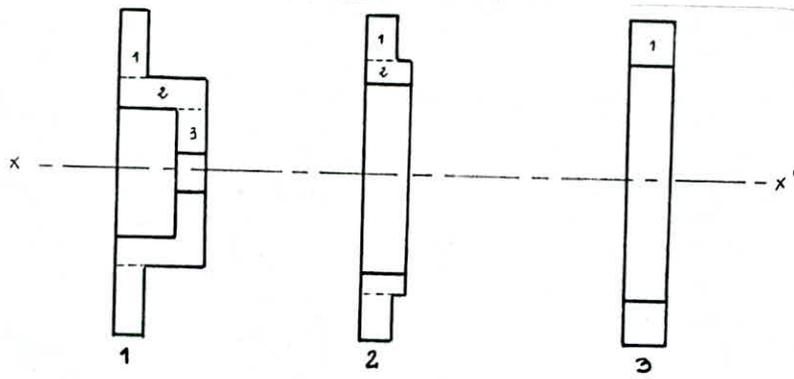
#### IV.2 Amortisseur torsionnel

##### IV.2.1 Moment d'inertie

Fig:(4.2) Amortisseur torsionnel



L'amortisseur torsionnel étant composé de trois pièces, on décompose chaque pièce en un certain nombre d'éléments, dont le calcul du moment d'inertie est connu, tel qu'on aura :



$$I_1 = \frac{S_1 \pi}{32} [e_{11} (D_{11}^4 - d_{11}^4) + e_{12} (D_{12}^4 - d_{12}^4) + e_{13} (D_{13}^4 - d_{13}^4)]$$

$$I_2 = \frac{S_2 \pi}{32} [e_{21} (D_{21}^4 - d_{21}^4) + e_{22} (D_{22}^4 - d_{22}^4)]$$

$$I_3 = \frac{S_3 \pi}{32} [e_{31} (D_{31}^4 - d_{31}^4)]$$

Le moment d'inertie de l'amortisseur torsionnel sera:  $[kg \cdot m^4]$

$$I_{am} = I_1 + I_2 + I_3 \quad (4.2)$$

#### IV.2.2 Rigidité torsionnelle

L'angle de déformation  $\theta$  d'une longueur  $l$  donnée, produit par un couple de torsion  $M_t$  est :

$$\theta = \frac{M_t \cdot l}{G I_0}$$

avec

$G$  :  $[N/m^2]$  module d'élasticité transversal

$I_0$  :  $[m^4]$  moment quadratique polaire.

Sachant que la flexibilité (inverse de la rigidité)

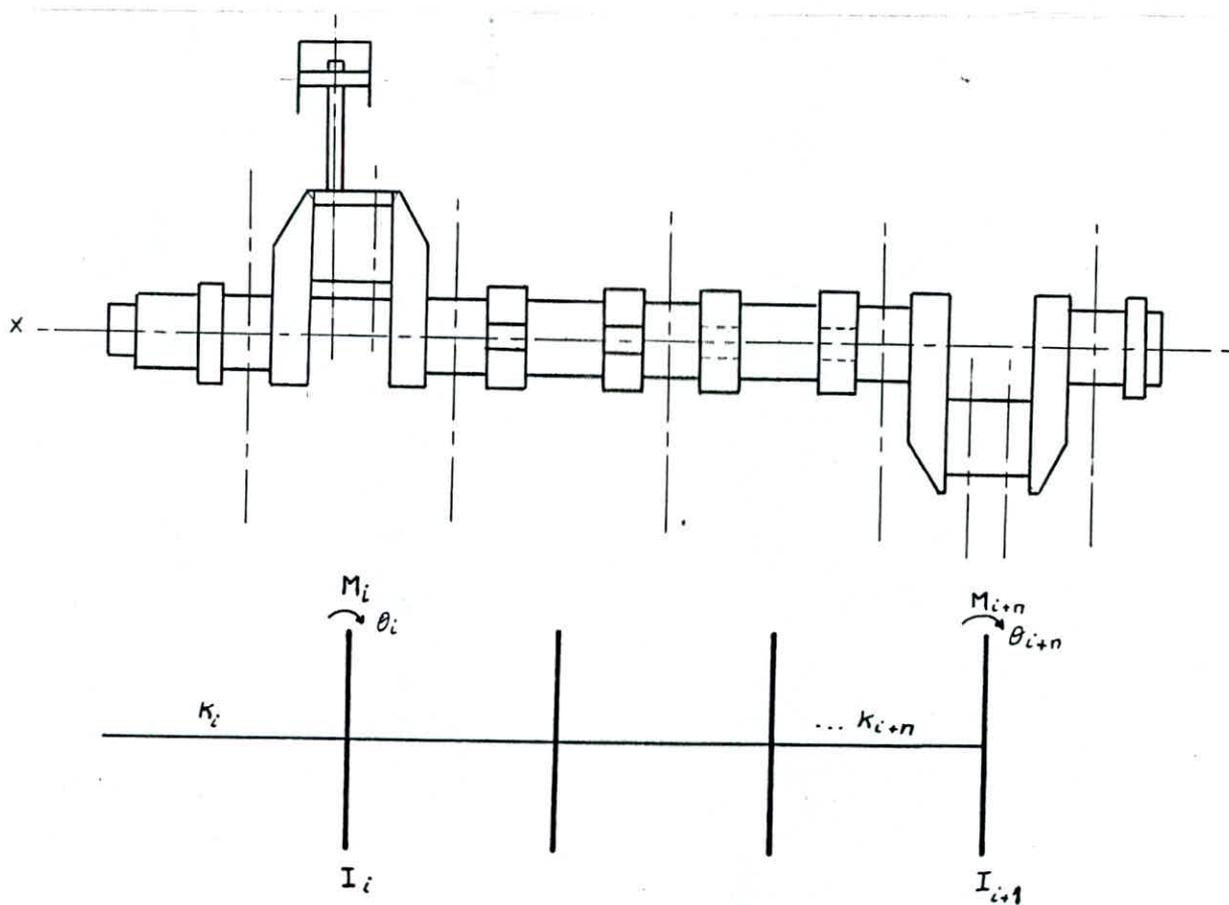
$$\frac{\theta}{M_t} = \frac{l}{G I_0} = \frac{1}{k} \quad \text{donc} \quad k = \frac{G I_0}{l} \quad (4.3)$$

Dans l'amortisseur torsionnel c'est la pièce n°2 qui joue le rôle d'amortisseur

### IV.3 Vilebrequin et L'équipage mobile

#### IV.3.1 Moment d'inertie

##### IV.3.1.1 Vilebrequin



fig(4-3) Schema equivalent du vilebrequin

Dans le calcul du moment d'inertie, les vilebrequins sont à considérés en fonction du type du moteur (moteur en ligne ou en V).

chaque volant du modèle equivalent represente : L'équipage mobile (bielles, pistons, axes de pistons).

Les différents volants de moment d'inertie  $I_i$  sont reliés entre eux par des ressorts sans masse et de rigidité  $k_i$

et soumis à des couples d'excitation  $C_e$ .  
 Le moment d'inertie des masses en rotation résulte de la somme des moments d'inerties des différentes parties constitutives de l'arbre (bras - maneton - tourillon - contrepoids) et des masses liées au vilebrequin.

### A - Coude du vilebrequin

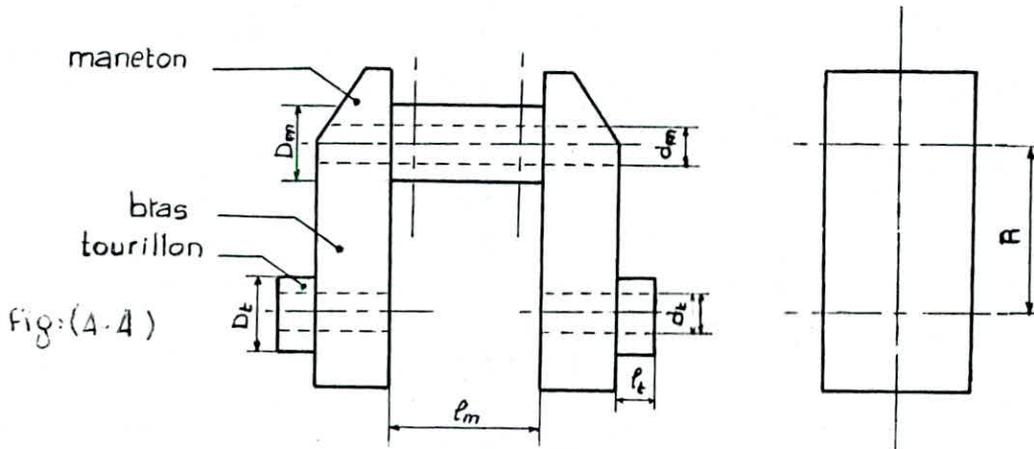


Fig: (4.4)

$D_t, D_m$  : [m] diamètre extérieur respectivement du tourillon et du maneton.

$d_t, d_m$  : [m] diamètre intérieur respectivement du tourillon et du maneton.

$l_t, l_m$  : [m] longueur d'un demi tourillon et du maneton.

le moment d'inertie d'un demi tourillon est : [kg.m<sup>2</sup>]

$$\frac{I_t}{2} = \frac{\rho l_t \pi}{64} (D_t^4 - d_t^4) \quad (4.4)$$

Le moment d'inertie du maneton ramené à l'axe du vilebrequin est : [kg.m<sup>2</sup>]

$$I_m = \frac{\rho l_m \pi}{4} \left[ \frac{D_m^4 - d_m^4}{8} + R^2 (D_m^2 - d_m^2) \right] \quad (4.5)$$

avec

$\rho$  : [kg/m<sup>3</sup>] masse volumique du matériau

Pour la détermination du moment d'inertie des deux bras, on décomposera chacun d'eux en couches rectangulaires, on calculera le moment d'inertie de chacune d'elles par rapport à l'axe du vilebrequin en utilisant le théorème de HYGENS.

Le moment d'inertie du bras sera la somme de tous les  $I_i$  ( $i$ : nombre de tranches).

### - Premier bras

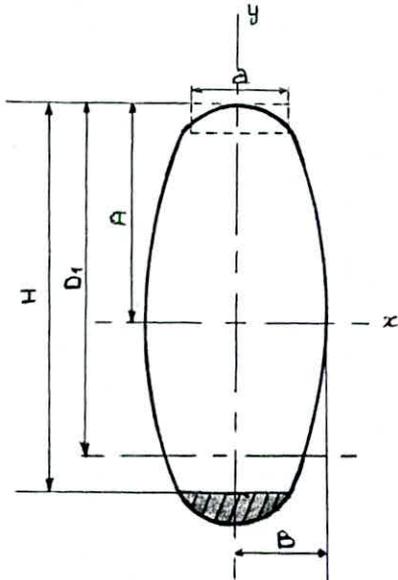


Fig: (4.5.a)

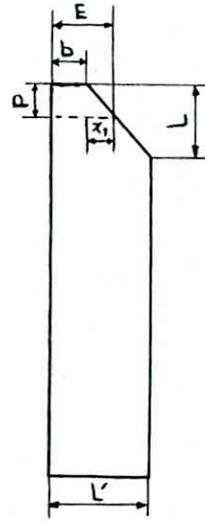


Fig: (4.5.b)

On remarque que la géométrie de ce bras a la forme d'une ellipsoïde coupée à l'une des extrémités qu'on a représenté par la partie hachurée fig: ( ) en vue de gauche ou une forme trapézoïdale suivie d'un rectangle.

La méthode de calcul consiste en premier lieu à déterminer les différents paramètres géométriques de chaque couche rectangulaire (la longueur:  $a$ , la largeur:  $P$ , l'épaisseur:  $E$ ), pour cela on procède de la manière suivante:

- La largeur ( $P$ ), qui est maintenue constante durant le calcul est donnée par:  $[m]$ .

$$P = \frac{A}{n}$$

avec

$n$  : nombre de subdivision

$A$  : [m] : grand demi-axe

La longueur ( $a$ ) est déterminée en calculant d'abord l'ordonnée  $y$  d'un point appartenant à la face inférieure du rectangle, ensuite en utilisant l'équation de l'ellipse on en déduit son abscisse  $x$

$$y = A - P \cdot j$$

Sachant que

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

$$x = \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{A^2}\right)} \cdot B$$

ainsi la longueur ( $a$ ) sera égale à : [m]

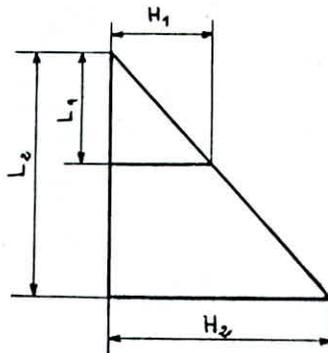
$$a = 2 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{A^2}\right)} \cdot B$$

avec

$j$  : l'ordre de la subdivision ( $j = 1, \dots, 2n$ )

$B$  : [m] petit demi-axe

L'épaisseur  $E$  est calculée en utilisant la règle des triangles semblables



$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

Par analogie à la figure (4.5.b) on en déduit l'inconnue  $x_1$

$$\frac{x_1}{(L' - b)} = \frac{P \cdot J}{L}$$

$$x_1 = \frac{P \cdot J}{L} \cdot (L' - b)$$

En résultat l'épaisseur  $E$  sera donnée par : [m]

$$E = \frac{P \cdot J}{L} \cdot (L' - b) + b$$

Pour les longueurs  $L, L', b$  voir figure : (4.5.b)

Sachant que la distance séparant l'axe du rectangle à l'axe du vilebrequin est donnée par : [m]

$$D = D_1 - \frac{A}{2n} (2j - 1)$$

le moment d'inertie du rectangle sera : [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]

$$I_{\text{rec}} = P \cdot a \cdot E^3 [(a^2 + P^2) + 12 D^2] / 12$$

Finalement le moment d'inertie du premier bras est égal à : [ $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ]

$$I_{b1} = \sum_{i=1}^{2n} I_{\text{rec}_i} \quad (4-6)$$

Remarque :

Dans le calcul de  $I_{b1}$  la valeur de  $P \cdot J$  est limitée à  $H$

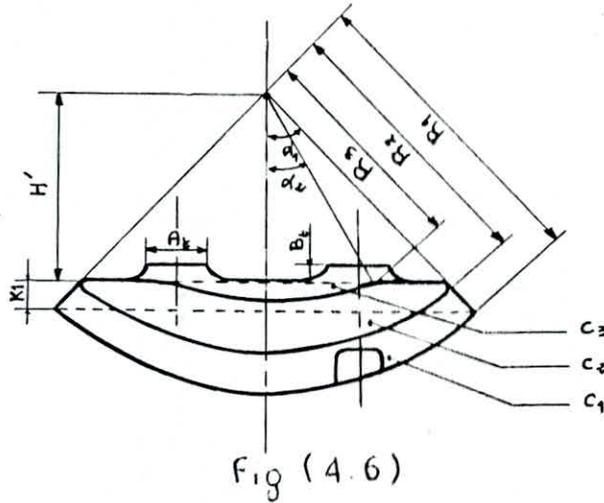
### - Deuxième bras

Le calcul du moment d'inertie de ce bras est identique à celui du premier bras, la différence entre eux, c'est que dans ce cas  $P \cdot J$  est limité à  $2 \cdot A$  et le calcul de l'épaisseur selon la règle des

des triangles semblables se fait pour les deux extrémités du bras

$$I_{bz} = \sum_{i=1}^{2n} I_{rec_i} \quad (4.7)$$

### Contre-poids



Pour déterminer le moment d'inertie du contre-poids, on décompose celui-ci en cinq éléments :

Trois demi-cercles de rayon  $R_1, R_2, R_3$  et d'épaisseur  $e_1, e_2, e_3$ , un trapèze d'épaisseur  $k_1$  et deux rectangles semblables de longueur  $A_t$  et largeur  $B_t$  figure : (4.6)

Le moment d'inertie du contre-poids sera égale à la somme de tous les  $I_i$  ( $i$  : nombre d'éléments).

### les demi-cercles

chaque demi-cercle du contre-poids est découpé en  $N$  subdivisions dont on détermine leurs paramètres géométriques (longueur  $a_j$ , largeur  $b_j$ , demi-angle au sommet  $\theta_j$  et le rayon  $r_j$ ).

En posant :

$$H_i = R_i (1 - \cos \alpha_i) \quad i = 1, \dots, 3$$

on a :

la longueur  $a_j$  [m]

$$a_j = \frac{H_i}{N}$$

la largeur  $b_j$  [m]

$$b_j = 2 \cdot r_j \cdot \sin \theta_j$$

le demi-angle au sommet  $\theta_j$  [rad]

$$\theta_j = \frac{\alpha_i \cdot J}{N}$$

le rayon  $r_j$  [m]

$$r_j = R_i - a_j (J-1)$$

Distance entre les deux axes  $D_j$  [m]

$$D_j = R_i - H_i (2J-1) / 2N$$

avec

$J$ : l'ordre de la subdivision.

Le moment d'inertie du demi-cercle sera: [kg.m<sup>2</sup>]

$$I_{C_i} = \sum_{j=1}^N a_j \cdot b_j \cdot e_i \cdot s \left[ (a_j^2 + b_j^2) / 12 + D_j^2 \right] \quad (4.8)$$

le trapéze

On décompose le trapéze en  $N$  subdivisions qui auront pour longueur  $L_j$ , largeur  $l_j$  et épaisseur  $e_i$ .

longueur  $L_j$  [m]

$$L_j = \frac{R_1 - H_1 - H'}{N}$$

largeur  $l_j$  [m]

En posant:

$$x = R_1 - H_1 - L_j \cdot J$$

on aura

$$l_j = 2(\operatorname{tg} \alpha_i) x$$

Sachant que  $D_j$  est donnée par: [m]

$$D_j = R_1 - H_1 - \frac{K_1 (2J-1)}{2 \cdot N}$$

avec

$$K1 = R1 - H1 - H'$$

Le moment d'inertie du trapèze sera :  $[kg.m^2]$

$$I_{tr} = \sum_{j=1}^N L_j \cdot p_j \cdot e_1 \cdot s \left[ (L_j^2 + p_j^2) / 12 + D_j^2 \right] \quad (4.9)$$

les rectangles

Le moment d'inertie des deux rectangles est identique et a pour expression :  $[kg.m^2]$

$$I_{rec} = B_E \cdot A_E \cdot e_1 \cdot s \left[ (A_E^2 + B_E^2) / 12 + ((H' - A_E) / 2)^2 \right] \quad (4.10)$$

En resultat le moment d'inertie du contre-poids est :  $[kg.m^2]$

$$I_{cp} = I_{C1} + I_{C2} - I_{C3} + I_{tr} + 2 I_{rec} \quad (4.11)$$

Finalement le moment d'inertie du coude du vilebrequin sera :  $[kg.m^2]$

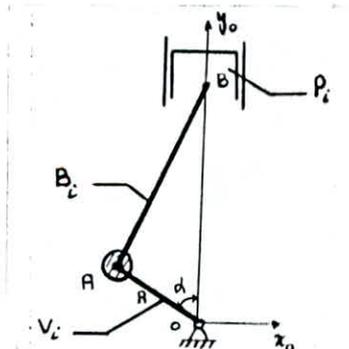
$$I_C = I_t + I_m + I_{b1} + I_{b2} + I_{cp} \quad (4.12)$$

#### IV.3 - 1.2 l'équipage mobile

Pour déterminer le moment d'inertie equivalent de l'équipage mobile, on calculera en premier lieu les masses equivalentes.

- Masse equivalente du piston et de son axe.

Fig. (4.7)



L'énergie cinétique  $T_p$  du piston à tout instant, au cours de son déplacement, doit être égale à l'énergie cinétique de la masse équivalente attachée au mouvement du maneton.

$$T_p = \frac{1}{2} m_p [\vec{v}(B)]^2$$

avec

$m_p$  : [kg] masse du piston avec son axe.

$\vec{v}_B$  : Vecteur vitesse du point B par rapport au repère fixe.

L'énergie équivalente du piston attachée au maneton.

$$T_e = \frac{1}{2} m_{ep}(\alpha) R^2 \omega^2$$

avec

$m_{ep}(\alpha)$  [kg] : masse équivalente du piston, fonction de l'angle de rotation  $\alpha$  [rad] de la manivelle.

$R$  :  $OA$  [m] rayon de la manivelle.

$\omega$  :  $\frac{d\alpha}{dt}$  [rad/s] vitesse de rotation constante de la manivelle.

$$m_{ep}(\alpha) = \frac{m_p [\vec{v}(B)]^2}{R^2 \omega^2}$$

La masse équivalente cherchée en moyenne sera obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction  $m_{ep}(\alpha)$ , pour  $\alpha$  variant de 0 à  $\pi$ .

$$M_{ep} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} m_{ep}(\alpha) d\alpha$$

Remarque:

Pour un système bielle-manivelle classique, dont le rapport  $R/L$  est compris entre 0.25 et 0.30 ( $L$ : longueur de la bielle [m]), la valeur de la masse équivalente du piston et de

son axe est : [kg]

$$M_{ep} = \frac{1}{2} m_p$$

### - Masse equivalente de la bielle.

En se rapportant à la fig. ( ) et en posant:  $m_b$

$m_b$  [kg]: masse de la bielle.

$\alpha$  [rd]: angle de rotation de la manivelle.

$\omega$  [rd/s]: vitesse de rotation.

$\vec{\Omega}_b$ : Vecteur rotation de la bielle par rapport au repère fixe.

$\bar{I}(b/G)$ : tenseur d'inertie de la bielle par rapport à un repère lié à la bielle et d'origine G, centre de gravité.

$\vec{V}(G)$ : Vecteur vitesse du centre de gravité par rapport au repère fixe

L'énergie cinétique de la bielle est:

$$T_b = \frac{1}{2} m_b [\vec{V}(G)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_b \cdot \bar{I}(b/G) \cdot \vec{\Omega}_b$$

L'énergie cinétique de la masse equivalente de la bielle  $m_{eb}$  [kg] attachée au maneton est:

$$T_{eb} = \frac{1}{2} m_{eb}(\alpha) R^2 \omega^2$$

$m_{eb}(\alpha)$ : masse equivalente de la bielle, en fonction de l'angle de rotation  $\alpha$  [rd].

$$m_{eb}(\alpha) = \frac{m_b [\vec{V}(G)]^2 + \vec{\Omega}_b \cdot \bar{I}(b/G) \cdot \vec{\Omega}_b}{R^2 \omega^2}$$

La masse equivalente moyenne cherchée sera obtenue en calculant la moyenne arithmétique de la fonction  $m_{eb}(\alpha)$ , pour  $\alpha$  variant de 0 à  $\pi$ .

$$M_{eb} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} m_{eb}(\alpha) d\alpha$$

Remarque:

Pour une bielle admettant deux plans de symétrie et dont la repartition des masses est telle que le centre de gravité est situé à un tiers de la longueur de la bielle à partir de l'axe de la tête, la masse équivalente de la bielle est:

$$M_{eb} = \frac{3}{4} \cdot m_b + \frac{I}{2L^2}$$

avec

$I$  [N.m.s<sup>2</sup>]: moment d'inertie de la bielle par rapport à un axe parallèle à l'axe du vilebrequin.

$L$  [m]: longueur de la bielle.

Le moment d'inertie de l'équipage mobile est donc donné par: [Kg.m<sup>2</sup>]

$$I_{eq} = (M_{ep} + M_{eb}) \cdot R^2 \quad (4.13)$$

où

$$I_{eq} = \left[ \frac{1}{2} m_p + \frac{3}{4} m_b + \frac{I}{2L^2} \right] \cdot R^2 \quad (4.14)$$

Pour une repartition de masse identique, certains auteurs proposent la formule suivante (c'est la plus utilisée)

$$I_{eq} = \left[ \frac{1}{2} m_p + \frac{5}{6} m_p \right] \cdot R^2 \quad (4.15)$$

Selon le type de moteur (en ligne ou en V), on aura dans la composition du moment d'inertie du vilebrequin, soit un équipage mobile ( $I_{eq_1}$ ) soit deux équipages mobile ( $I_{eq_1} + I_{eq_2}$ ), donc d'une façon générale, le moment d'inertie du volant sera donné par: [Kg.m<sup>2</sup>]

$$I_{V_i} = I_{C_i} + I_{eq_1} + I_{eq_2} \quad (4.16)$$

avec

$I_{v_i}$  : [kg.m<sup>2</sup>] moment d'inertie du volant  $i$ .

$I_{c_i}$  : [kg.m<sup>2</sup>] moment d'inertie du coude  $c_i$ .

$I_{eq_1}, I_{eq_2}$  : [kg.m<sup>2</sup>] moment d'inertie de l'équipage mobile 1 et 2 du volant  $v_i$ .

Finalement le moment d'inertie du vilebrequin sera la somme des  $I_{v_i}$

$$I_{vile} = \sum_{i=1}^n I_{v_i} \quad n: \text{nombre de volant} \quad (4-17)$$

### IV - 3 - 2 Rigidité torsionnelle

Si l'on considère un coude soumis à deux couples opposés,  $M_t$  portés par l'axe des tourillons et appliqués à chaque extrémité, la déformation globale en torsion est la somme des déformations

- En torsion des deux demi-tourillons et du maneton.
- En flexion des deux bras :

Cela se traduit par la rotation relative des deux sections extrêmes du coude d'un angle  $\theta$  exprimé en radian.

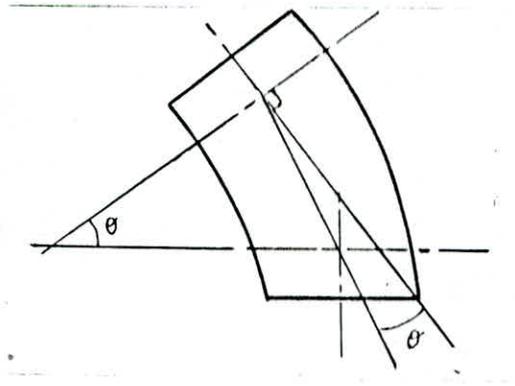


Fig: (4-8)

La rigidité torsionnelle du coude est : [ N.m/rad ]

$$k = \frac{M_t}{\theta}$$

ou encore

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_{b1}} + \frac{1}{K_{b2}} + \frac{1}{K_t} \cdot 2 \quad (4.18)$$

avec

$K_m$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle du maneton.

$K_t$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle d'un demi-tourillon.

$k_{b1}, k_{b2}$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle respectivement du premier et deuxième bras.

Si dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse que les formules simples de résistance des matériaux sont applicables aux coudes du vilebrequin, nous pouvons calculer la rigidité  $k$  en fonction des dimensions.

$$K_t = \frac{2GJ_t}{l_t}, \quad K_m = \frac{GJ_m}{l_m}, \quad K_{b1} = \frac{EJ_{b1}}{R}, \quad K_{b2} = \frac{EJ_{b2}}{R} \quad (4.19)$$

avec

$E$  [N/m<sup>2</sup>] : module d'élasticité longitudinale.

$G$  [N/m<sup>2</sup>] : module d'élasticité transversale.

$J_t, J_m, J_{b1}, J_{b2}$  [m<sup>4</sup>] : moments quadratiques des sections, égaux à :

$$J_t = \frac{\pi}{32} (D_t^4 - d_t^4)$$

$$J_m = \frac{\pi}{32} (D_m^4 - d_m^4)$$

(4.20)

(4.20)

$$J_{b1} = \frac{H^3 \cdot L'}{12}$$

$$J_{b2} = \frac{L' \cdot (2A)^3}{12}$$

ou

$d_t, d_m$  [m] : diamètres des alésages dans les

tourillons et les manétons s'ils existent.

$D_t, D_m$  [m]: diamètres respectifs des tourillons et des manétons.

$L', H, 2A$  [m]: dimension de la section du bras.

d'où

$$(4.21) \quad \frac{1}{K} = \frac{32 \ell_t}{\pi G (D_t^4 - d_t^4)} + \frac{32 \ell_m}{\pi G (D_m^4 - d_m^4)} + \frac{12 R}{E L' H^3} + \frac{12 R}{E L' (2A)^3}$$

La longueur équivalente  $\ell_e$  [m] de l'arbre rectiligne de section uniforme correspondant au diamètre du tourillon est:

$$\ell_e = \frac{G \pi D_e^4}{32 K} \quad (4.22)$$

avec  $D_e$ : diamètre équivalent en torsion.

#### IV.4 Volant moteur - Embrayage

##### IV.4.1 Moment d'inertie

L'ensemble volant moteur - embrayage au cours de la transmission est assimilé à une seule pièce qu'on décompose en un certain nombre d'éléments dont le moment d'inertie est tel que:

$$I_{V.E} = \sum_{k=1}^n I_k \quad n: \text{nombre d'éléments}$$

avec

$I_{V.E}$  [kg.m<sup>2</sup>]: moment d'inertie de l'ensemble volant moteur - embrayage.

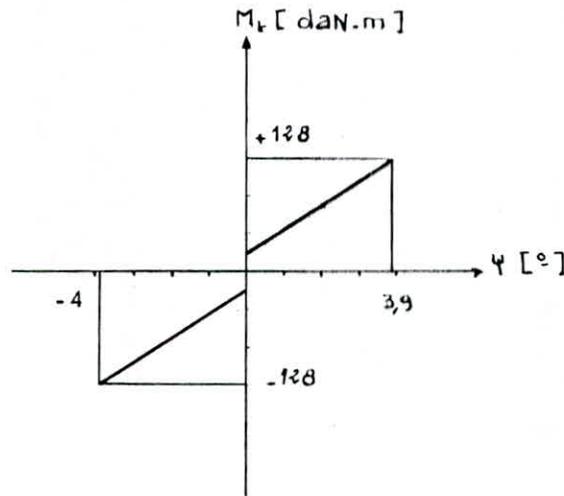
$I_k$  [kg.m<sup>2</sup>]: moment d'inertie de l'élément  $k$ .

Remarque:

le moment d'inertie du volant moteur et de la couronne sont généralement donnés par le constructeur de même que le moment d'inertie de l'embrayage.

#### IV-4.2 Rigidité torsionnelle.

La rigidité torsionnelle de l'embrayage est d'habitude donnée par le constructeur à travers la courbe théorique de l'amortisseur d'embrayage.



La rigidité torsionnelle du volant, est considérée infinie (disque d'épaisseur négligeable par rapport à son diamètre).

Remarque:

L'ensemble des méthodes de calcul du moment d'inertie et de la rigidité torsionnelle de la partie moteur n'offrent que des valeurs approximatives, généralement ils sont donnés par le constructeur.

#### IV.5 Boite de vitesses

Sur le schéma retenu par la boîte de vitesses figure (4.8), nous avons concentrés les masses recevant un mouvement de l'arbre primaire (arbre de commande) ou secondaire sans le transmettre à l'arbre principal directement, sur le pignon entrée boîte de vitesses.

Les masses transmettants ou recevants directement un mouvement respectivement de l'arbre principal ou de sortie, sur le plateau sortie boîte de vitesses. Ainsi le calcul du

moment d'inertie de la boîte de vitesses reviendra à calculer celui du premier volant entrée boîte et celui du deuxième volant sortie boîte (selon la vitesse en prise)

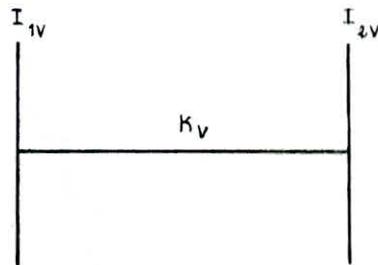
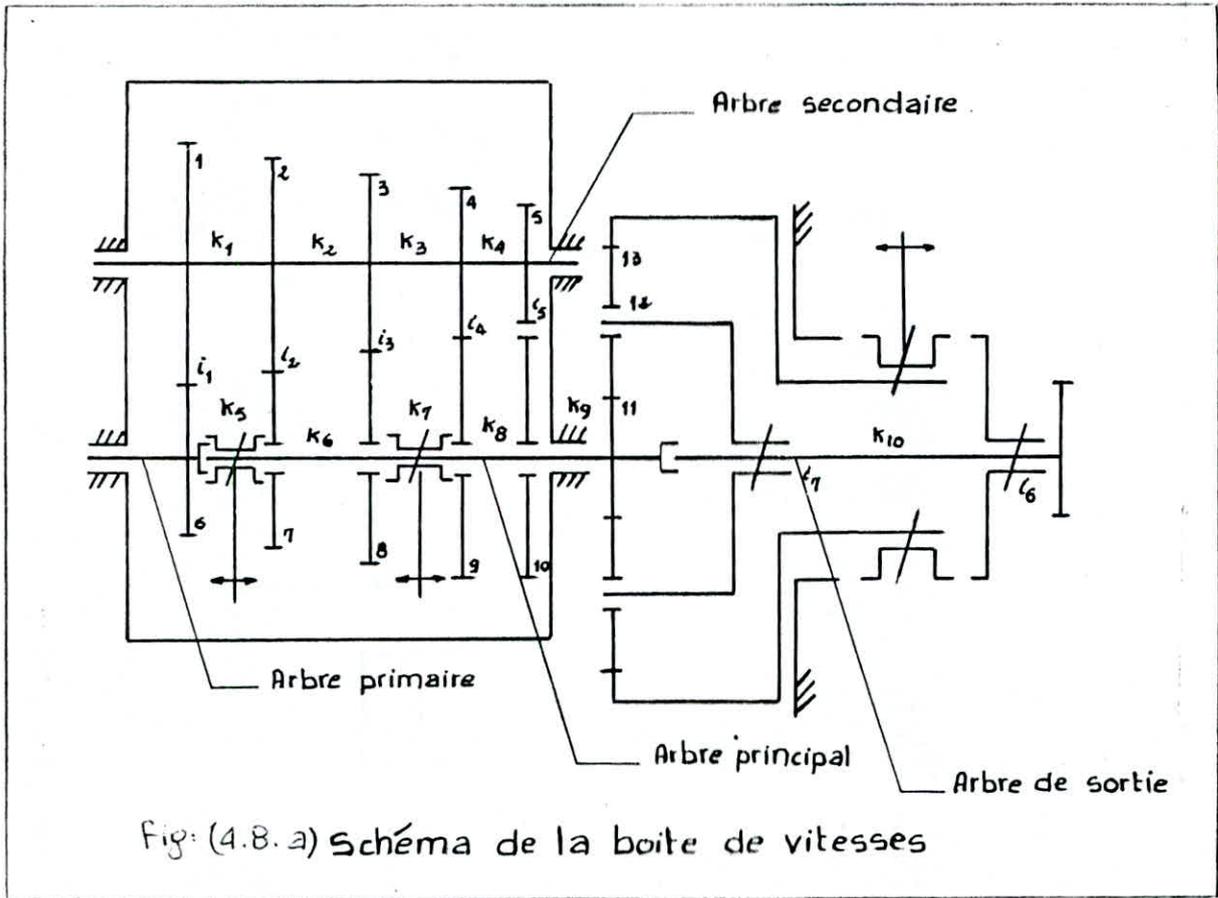


Fig: (4.8.b) Modèle équivalent

Pour le modèle équivalent on a :

- $I_{1v}$  : [kg.m<sup>2</sup>] moment d'inertie du 1<sup>er</sup> volant entrée boîte selon la vitesse  $v$  considérée.
- $I_{2v}$  : [kg.m<sup>2</sup>] moment d'inertie du 2<sup>eme</sup> volant sortie boîte selon la vitesse  $v$  considérée.

$K_v$  : [N.m/rad] rigidité torsionnelle selon la vitesse  $v$  considérée.

## - Etablissement des vitesses

---

### - Première vitesse

Arbre primaire → pignons (6.1) → Arbre secondaire → pignons (4.9)  
Arbre principal → pignons (11.12) → porte Satellite → Arbre de sortie

### - Deuxième vitesse

Arbre primaire → pignons (6.1) → Arbre Secondaire → pignons (3.8)  
Arbre principal → pignons (11.12) → porte Satellite → Arbre de Sortie

### - Troisième vitesse

Prise directe

Arbre primaire → Arbre principal → pignons (11.12) → porte Sate-  
llite → Arbre de sortie

### - Quatrième vitesse

Arbre primaire → pignons (6.1) → Arbre secondaire → pignons  
(2.7) → Arbre principal → pignons (11.12) → porte Sate-  
llite → Arbre de sortie

### - Cinquième vitesse

Arbre primaire → pignons (6.1) → Arbre secondaire → pignons (4.9)  
Arbre principal → pignons (11.13) → couronne → Arbre de Sortie

---

### - Sixième vitesse

Arbre primaire → pignons (6-1) → Arbre Secondaire → pignons (3-8)  
Arbre principal → pignons (11-13) → couronne → Arbre de sortie

---

### - Septième vitesse

Prise directe

Arbre primaire → Arbre principal → pignons (11-13)  
couronne → Arbre de sortie

### - Huitième vitesse

Arbre primaire → pignons (6-1) → Arbre Secondaire → pignons (2-7)  
Arbre principal → pignons (11-13) → couronne → Arbre de sortie

### - Neuvième vitesse (Marche arrière)

Arbre primaire → pignons (6-1) → Arbre Secondaire → pignons (5-10)  
Arbre principal → pignons (11-12) → Arbre de sortie

---

## IV - 5.1 Moment d'inertie

### a) Détermination du moment d'inertie du 1<sup>er</sup> volant entrée boîte

L'arbre de commande reçoit un couple  $C_{eq}$ , qui est nécessaire pour sa rotation et à celle des autres masses qu'il entraîne avec lui d'une manière directe ou indirecte, selon la vitesse en prise. D'après le modèle équivalent retenu, la masse du premier volant entrée boîte (en prenant comme exemple la première vitesse), sera constituée par les masses suivantes :

- Arbre primaire, pignon 6
- Arbre secondaire avec toutes les masses qui lui sont solidaires.

- les pignons (7-8), car le mouvement leur est transmis.

Le couple nécessaire à la rotation de l'arbre de commande seul est  $C_{ar.cd} = I_{ar.cd} \cdot d\omega_1/dt$  et celui de l'arbre secondaire est

$C_{ar.sec} = I_{ar.sec} \cdot d\omega_2/dt$  qui nécessiterait à l'arbre de commande

un couple réduit  $C_1 = C_{ar.sec} \cdot i_1$ , sachant que  $i_1 = \omega_2/\omega_1$  donc

$$C_1 = I_{ar.sec} \cdot i_1^2 \cdot d\omega_1/dt.$$

Le couple nécessaire à la rotation du pignon 7 est  $C_7 = I_{p7} \cdot d\omega_3/dt$  cela nécessiterait d'une part à l'arbre secondaire un couple

$C_2 = I_{p7} \cdot i_2^2 \cdot d\omega_3/dt$  sachant que  $i_2 = \omega_3/\omega_2$  on aura  $C_2 = I_{p7} \cdot i_2^2 \cdot d\omega_2/dt$

et d'autre part à l'arbre de commande un couple réduit  $C'_2 = i_1 \cdot C_2$

$= I_{p7} \cdot i_1 \cdot i_2^2 \cdot d\omega_2/dt$  puisque  $\omega_2 = i_1 \cdot \omega_1$  donc  $C'_2 = i_1^3 \cdot i_2^2 \cdot I_{p7} \cdot d\omega_1/dt$ ,

de la même manière pour assurer la rotation du pignon 8, cela

nécessiterait à l'arbre de commande un couple  $C'_3 = i_1^2 \cdot i_3^2 \cdot I_{p8} \cdot d\omega_1/dt$

sachant que  $i_3 = \omega_4/\omega_2$ .

Finalement le couple équivalent  $C_{eq1}$ , nécessaire à la rotation de l'ensemble est :

$$C_{eq1} = I_{eq1} \cdot d\omega_1/dt = (I_{ar.cd} + I_{ar.sec} \cdot i_1^2 + I_{p7} \cdot i_1^3 \cdot i_2^2 + I_{p8} \cdot i_1^2 \cdot i_3^2) \cdot d\omega_1/dt$$

D'où on en déduit le moment d'inertie du premier volant entrée boîte selon la première vitesse

$$I_{11} = I_{ar.cd} + I_{ar.sec} \cdot i_1^2 + I_{p7} \cdot i_1^3 \cdot i_2^2 + I_{p8} \cdot i_1^2 \cdot i_3^2 \quad (4.23)$$

En suivant la même démarche établie pour le calcul de  $I_{11}$ , on détermine le moment d'inertie du premier volant pour les autres vitesses.

On récapitule l'ensemble des résultats dans le tableau qui suit

## Moments d'inertie du 1<sup>er</sup> volant selon les différentes vitesses

1 <sup>er</sup> vitesse	$I_{11} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2$
2 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{12} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$
3 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{13} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$
4 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{14} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$
5 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{15} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2$
6 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{16} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$
7 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{17} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$
8 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{18} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$
9 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{19} = I_{ar.cd} + I_{ar.scd} \cdot \zeta_1^2 + I_{p7} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_2^2 + I_{p8} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_3^2 + I_{p9} \cdot \zeta_1^2 \cdot \zeta_4^2$

avec

$I_{ar.cd}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie de l'arbre de commande composé de l'arbre primaire et du pignon 6.

$I_{ar.scd}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie de l'arbre secondaire avec toutes ses masses.

$I_{pk}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie du pignon k.

$\zeta_p$  : Rapport de réduction.

### b) Détermination du moment d'inertie du 2<sup>eme</sup> volant sortie boîte

Comme pour le couple  $C_{eq1}$ , l'arbre de commande reçoit également un couple  $C_{eq2}$  qui assurera la rotation des masses qui constitu-

ent le volant sortie boîte selon la vitesse en prise.

D'après le modèle retenu, le volant sortie boîte est (en prenant comme exemple la première vitesse) composé de la masse du coulisseau B, pignon 9, arbre principal, pignons (11-12) ainsi que les satellites et leur porte satellite et l'arbre de sortie.

Dans nos calculs on introduira le moment d'inertie des axes des trois satellites  $I_1, I_2, I_3$ .

Au cours de la transmission du mouvement le pignon 9 entraîne l'arbre principal ainsi que le pignon 11 par l'intermédiaire du coulisseau B et l'ensemble tourne à la même vitesse de rotation  $\omega_5$ . Selon le raisonnement établi pour le calcul  $I_{11}$ , ceci nécessiterait à l'arbre secondaire un couple supplémentaire

$C_4 = i_4 I_{p'} \cdot d\omega_5/dt = i_4^2 \cdot d\omega_2/dt I_{p'}$  et cela nécessiterait d'une part à l'arbre de commande un couple  $C_4' = i_1 C_4 = i_1 \cdot i_4^2 I_{p'} \cdot d\omega_2/dt$  donc

$$C_4' = i_1^2 \cdot i_4^2 \cdot I_{p'} \cdot d\omega_1/dt$$

avec

$$I_{p'} = I_{p9} + I_{cou.B} + I_{ar.pr} + I_{p11}$$

D'autre part lorsque le pignon 11 transmet le mouvement aux trois satellites, dont les axes sont logés dans le porte satellite, lui-même muni d'un arbre creux dans lequel est logé l'arbre de sortie, l'ensemble tournera à la même vitesse de rotation  $\omega_6$  (liaison solidaire), ainsi pour assurer sa rotation, cela nécessiterait au pignon 11 un

couple  $C_5 = i_7 I_t \cdot d\omega_6/dt = i_7^2 I_t \cdot d\omega_5/dt$  et à l'arbre secondaire un couple  $C_5' = i_4 C_5 = i_4 \cdot i_7^2 \cdot I_t \cdot d\omega_5/dt = i_4^2 \cdot i_7^2 I_t \cdot d\omega_2/dt$  et finalement

à l'arbre de commande un couple  $C_5'' = i_1 \cdot C_5' = i_1 \cdot i_4^2 \cdot i_7^2 I_t \cdot d\omega_2/dt$  en remplaçant  $\omega_2$  par  $i_1 \omega_1$ , on aura  $C_5'' = i_1^2 \cdot i_4^2 \cdot i_7^2 I_t \cdot d\omega_1/dt$

avec

$$I_t = I_{pr.sat} + I_{ar.sor} + 3I_{sat} + I_1 + I_2 + I_3$$

Donc le couple équivalent  $C_{eq_2}$  nécessaire à la rotation l'ensemble sera :

$$C_{eq_2} = [(I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{p9} + I_{p11}) i_1^2 \cdot i_4^2 + (I_{pr.sat} + I_{ar.sor} + 3I_{sat} + I_1 + I_2 + I_3) i_1^2 \cdot i_4^2 \cdot i_7^2] \frac{d\omega_1}{dt}$$

Dou on en deduit le moment d'inertie du deuxieme volant sortie boite selon la premiere vitesse.

$$(4.24) \quad I_{21} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{Pg} + I_{P11}) i_1^2 i_4^2 + (I_{pr.sat} + I_{ar.sor} + 3I_{sat} + I_1 + I_2 + I_3) i_1^2 i_4^2 i_7^2 \quad (4.24)$$

En suivant le même raisonnement, on determinera le moment d'inertie du deuxieme volant selon les autres vitesses.

on recapitule l'ensemble des resultats dans le tableau qui suit.

Moments d'inertie du 2 <sup>eme</sup> volant selon les differentes vitesses	
1 <sup>er</sup> vitesse	$I_{21} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{Pg} + I_{P11}) i_1^2 i_4^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor}) i_1^2 i_4^2 i_7^2$
2 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{22} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{PB} + I_{P11}) i_1^2 i_3^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor}) i_1^2 i_3^2 i_7^2$
3 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{23} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{P11}) + (I_5 + I_t + I_{ar.sor}) i_7^2$
4 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{24} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{Pg} + I_{P11}) i_1^2 i_2^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor} + I_c) i_1^2 i_2^2 i_7^2$
5 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{25} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{Pg} + I_{P11}) i_1^2 i_4^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor} + I_c + I_{cou.c}) i_1^2 i_4^2 i_6^2$
6 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{26} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{PB} + I_{P11}) i_1^2 i_3^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor} + I_c + I_{cou.c}) i_1^2 i_3^2 i_6^2$
7 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{27} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{P11}) + (I_5 + I_t + I_{ar.sor} + I_c + I_{cou.c}) i_6^2$
8 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{28} = (I_{ar.pr} + I_{cou.B} + I_{Pg} + I_{P11}) i_1^2 i_2^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor} + I_c + I_{cou.c}) i_1^2 i_2^2 i_6^2$
9 <sup>eme</sup> vitesse	$I_{29} = (I_{ar.pr} + I_{P10} + I_{P11}) i_1^2 i_5^2 i_5^2 + I_{P5} i_1^2 i_5^2 + (I_5 + I_t + I_{ar.sor} + I_c + I_{cou.c}) i_1^2 i_5^2 i_7^2$

avec

$$I_5 = 3I_{sat} + I_{pr.sat} \quad , \quad I_t = I_1 + I_2 + I_3 \quad , \quad I_c = I_{cou} + I_{pr.cou}$$

$I_{sat} : [kg.m^2]$ : moment d'inertie d'un satellite.

- $I_{Pr.sat}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie du porte satellite.
- $I_{cou A,B,C}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moments d'inertie du coulisseau A, B, C
- $I_{Pr.cour}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie du porte-couronne
- $I_{cour}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie de la couronne.
- $I_{ar.pr}$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moment d'inertie de l'arbre principal
- $I_1, I_2, I_3$  : [kg.m<sup>2</sup>] : moments d'inertie des axes des trois satellites.

#### IV.5.2 Rigidité torsionnelle

La rigidité dans la boîte de vitesses, selon le modèle équivalent retenu dépend de la vitesse en prise. En prenant comme exemple la première vitesse, d'après son enchaînement  $k_{11}$  sera fonction de  $k_1, k_2, k_3, k_8, k_9, k_{10}$

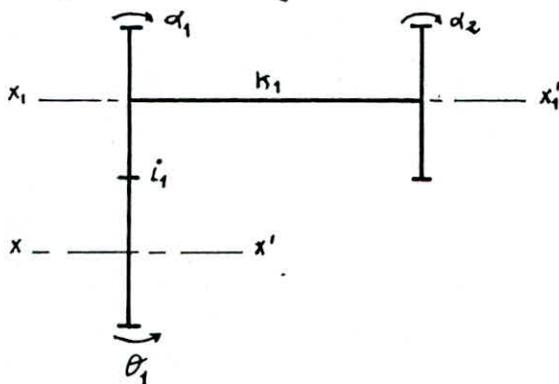
- Rigidité torsionnelle de l'arbre secondaire

$$\frac{1}{k_{ar.sec}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \quad (4.25)$$

Etant donné qu'on travaille par rapport à l'axe du vilebrequin, on réduit  $k_{ar.sec}$  par rapport à celui-ci

La méthode de réduction consiste dans un premier lieu, à diviser notre système en deux parties.

1<sup>ère</sup> partie du système



En l'absence de la torsion, on a l'égalité entre les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Vu que dans notre cas, elle existe donc  $d_1$  est différent de  $d_2$  tel que :

$$\alpha_1 = i_1 \cdot \theta_1 \text{ et en supposant qu'il existe un autre angle } \theta_2 \text{ on aura } i_1 \cdot \theta_2 = \alpha_2$$

L'énergie potentielle pour cette 1<sup>ère</sup> partie du système est :

$$U = -\frac{1}{2} k_1 (d_1 - d_2)^2$$

$$U = -\frac{1}{2} k_1 l_1^2 (\theta_1 - \theta_2)$$

2<sup>ème</sup> partie du système

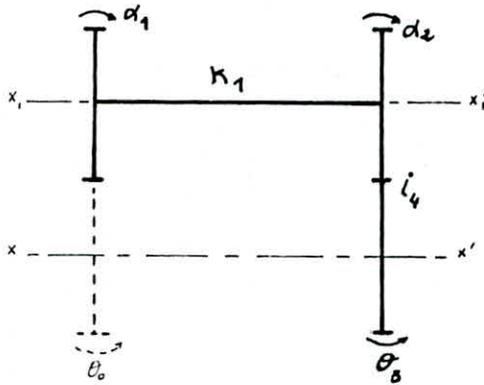
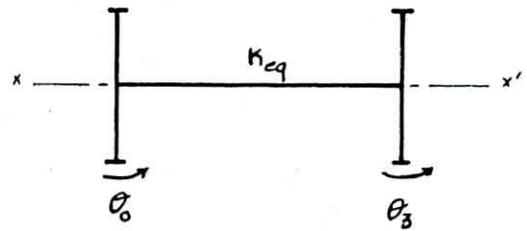


schéma équivalent du système



Selon le schéma équivalent retenu, on a  $\theta_3 = l_4 d_2$  et en supposant qu'il existe un angle  $\theta_0$  telque  $\theta_0 = l_4 d_1$ .

L'énergie potentielle du système équivalent est :

$$U_{eq} = -\frac{1}{2} K_{eq} (\theta_0 - \theta_3)^2$$

$$U_{eq} = -\frac{1}{2} k_1 l_1^2 l_4^2 (\theta_2 - \theta_1)^2$$

Donc la rigidité torsionnelle du système équivalent sera :

$$K_{eq} = k_1 \cdot l_1^2 \cdot l_4^2 \quad (4.26)$$

Ce qui nous permet d'écrire que la rigidité torsionnelle de l'arbre secondaire réduite à l'axe du vilebrequin est :

$$K_{ar.sed.red} = K_{ar.sed} \cdot l_1^2 \cdot l_4^2$$

$$K_{ar.sed.red} = \frac{K_1 K_2 K_3}{K_1 K_2 + K_2 K_3 + K_3 K_1} \cdot l_1^2 \cdot l_4^2$$

Finalement la rigidité torsionnelle dans la boîte de vitesses,

selon le schéma équivalent retenu

$$\frac{1}{K_{e1}} = \frac{1}{K_{ar.sed.red}} + \frac{1}{K_{ar.pr}} \quad (4.27)$$

$$\frac{1}{K_{e1}} = \frac{1}{K_{ar.sed.red}} + \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}} \quad (4.28)$$

avec

$K_{ar.sed.red}$  [N.m/rad]: rigidité torsionnelle de l'arbre secondaire réduite à l'axe du vilebrequin

$K_{ar.pr}$  [N.m/rad]: rigidité torsionnelle de l'arbre principal.

$K_i$  [N.m/rad]: rigidités torsionnelles des portions d'arbres reliant les différents pignons de la boîte de vitesses.

En suivant le même raisonnement, on déterminera la rigidité torsionnelle de la boîte de vitesses, selon les autres vitesses

Remarque :

les rigidités torsionnelles des portions d'arbres reliant les différents pignons peuvent être calculées à l'aide de l'expression suivante :

$$K_i = \frac{G \cdot I_{o_i}}{l_i} \quad (4.29)$$

avec

$G$  [N/m<sup>2</sup>]: module d'élasticité transversal

$I_{o_i}$  [m<sup>4</sup>]: moment quadratique polaire de la section considérée.

$l_i$  [m]: longueur de l'arbre.

Habituellement ces rigidités sont données par le constructeur

On récapitule l'ensemble des rigidités de la boîte selon les différentes vitesses en prises dans le tableau qui suit

## Rigidités torsionnelles de la boîte selon les différentes vitesses

1 <sup>ère</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e1}} = \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}} + \frac{K_1 K_2 + K_2 K_3 + K_3 K_1}{K_1 K_2 K_3 i_1^2 i_4^2}$
2 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e2}} = \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}} + \frac{1}{K_{12}} + \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2 i_1^2 i_3^2}$
3 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e3}} = \frac{1}{K_5} + \frac{1}{K_6} + \frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}}$
4 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e4}} = \frac{1}{K_6} + \frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}} + \frac{1}{K_1 i_1^2 i_2^2}$
5 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e5}} = \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}'} + \frac{K_1 K_2 + K_2 K_3 + K_3 K_1}{K_1 K_2 K_3 i_1^2 i_4^2}$
6 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e6}} = \frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}'} + \frac{1}{K_{11}'} + \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2 i_3^2 i_1^2}$
7 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e7}} = \frac{1}{K_5} + \frac{1}{K_6} + \frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}'} + \frac{1}{K_{11}'}$
8 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e8}} = \frac{1}{K_6} + \frac{1}{K_7} + \frac{1}{K_8} + \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}'} + \frac{1}{K_{11}'}$
9 <sup>ème</sup> vitesse	$\frac{1}{K_{e9}} = \frac{1}{K_9} + \frac{1}{K_{10}} + \frac{1}{K_{11}} + \frac{K_1 K_2 K_3 + K_2 K_3 K_4 + K_3 K_4 K_1 + K_4 K_1 K_2}{K_1 K_2 K_3 K_4 i_1^2 i_3^2}$

NB :

Les rapports de réduction ainsi que le calcul du moment d'inertie des différents éléments de la boîte de vitesses voir Annexe.

## IV.6 Arbre de cardan

### IV.6.1 Moment d'inertie

Le moment d'inertie de l'arbre de cardan se calcul par la méthode classique qui consiste en une décomposition de la pièce en éléments simples, dont le moment d'inertie est connu.

L'arbre de cardan est constitué de quatre fourches reliées entre elles par des croisillons, d'un arbre canelé et d'un tube coulissant dans lequel vient se loger l'arbre.

### - Les fourches

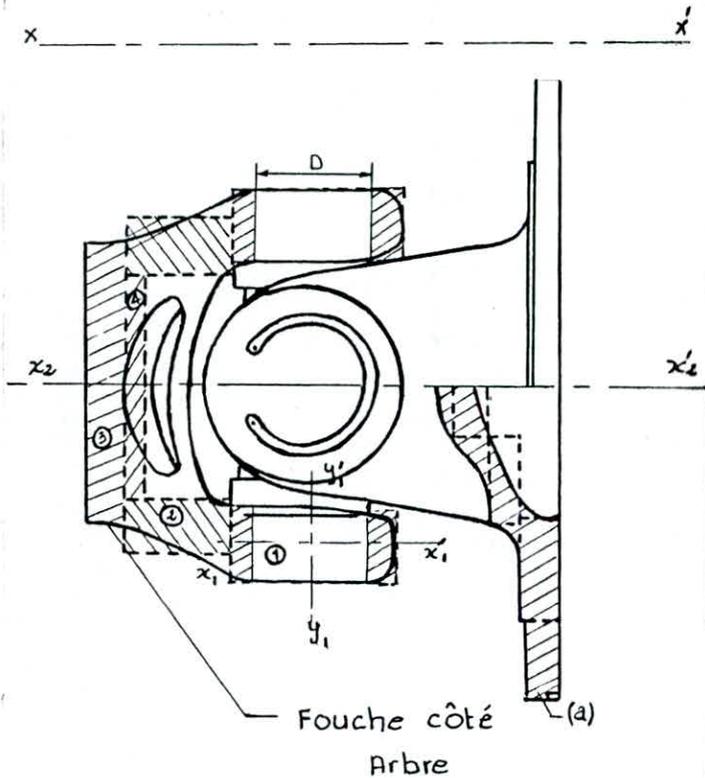


fig:(4.9.a)

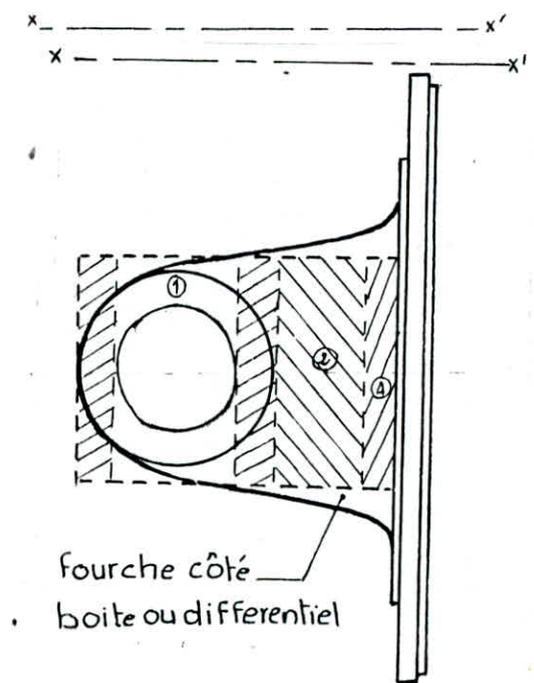


Fig:(4.9.b)

Les fourches sont découpées de façon à obtenir une géométrie simple (rectangulaire ou cylindrique)

La fourche côté arbre est constituée des éléments 1,2,3,4 figure(4.9.a)

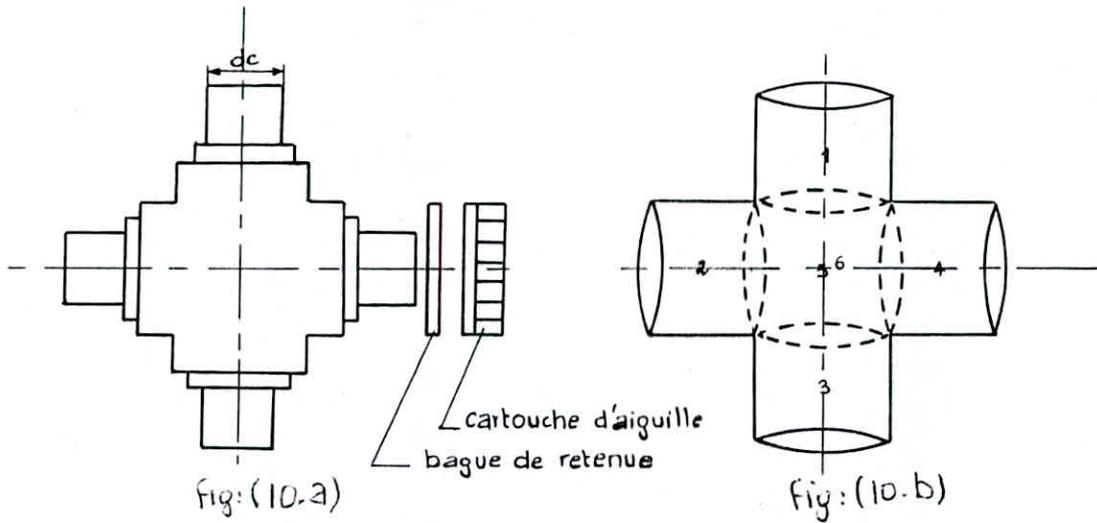
La fourche côté boîte de vitesses ou différentiel est constituée des éléments 1,2,4 et de la pièce(a) figure(4.9.b)

### - Les croisillons

L'ensemble bague de retenue, cartouche d'aiguille et croisillon seront assimilés à deux cylindres entrecroisés.

On décompose de plus ces deux cylindres, en quatre petits cylindres

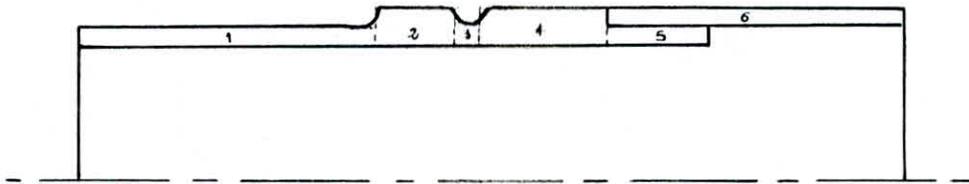
de diamètre extérieur correspondant à celui de l'alésage des fourches et pour diamètre intérieur  $d_c$  (voir figure (4.10.a)).



Les éléments 5 et 6 sont assimilés à des plaques rectangulaire d'épaisseur égale à la différence des deux diamètres (voir figure (4.10.b)).

- Tube coulissant

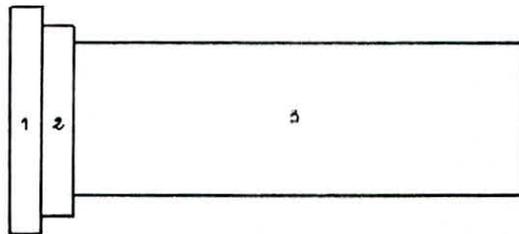
Fig (4.11)



Le tube coulissant est décomposé en éléments cylindriques de diamètre extérieur et intérieur  $D_e$  et  $D_i$  (voir figure: (4.11)).

- Arbre canelé

Fig: (4.12)



L'arbre canelé est également décomposé en éléments cylindriques de diamètre  $D_e$  (disque: voir figure (4.12)).

# Principe de calcul

## - Les Fourches

Pour la fourche côté arbre on a : (voir figure: (4.9.a)).

élément 1 :

Cet élément est constitué d'un rectangle alésé à un diamètre  $D$ , donc le moment d'inertie de l'ensemble sera égale au moment d'inertie du corps rectangulaire auquel on lui retranche celui du cylindre de diamètre extérieur  $D$ .

En posant :

$I_{rec1}$  [ $\text{kg.m}^2$ ] : moment d'inertie du rectangle .

$I_{cyl}$  [ $\text{kg.m}^2$ ] : moment d'inertie du cylindre .

$P_1$  [ $\text{m}$ ] : largeur du rectangle ( hauteur du cylindre ) .

$a_1$  [ $\text{m}$ ] : longueur du rectangle .

$e_1$  [ $\text{m}$ ] : épaisseur du rectangle .

$S_1$  [ $\text{kg/m}^3$ ] : masse volumique du matériau

$d_1$  [ $\text{m}$ ] : distance séparant l'axe de l'élément à l'axe du vilebrequin

$\theta_1$  [ $\text{rad}$ ] : l'angle d'inclinaison de l'élément par-rapport à l'horizontale .

On aura :

$$I_{rec1/xx'} = I_{rec1/x_1x_1'} + m_{rec1} d_1^2 = \frac{S_1 e_1}{12} [ P_1 a_1^3 + P_1^3 a_1 + P_1 a_1 12 d_1^2 ]$$

$$I_{cyl/xx'} = I_{cyl/x_1x_1'} + m_{cyl} d_1^2 = \frac{S_1 \pi D_1^2 P_1}{4} [ \frac{D_1^2}{16} + \frac{P_1^2}{12} + d_1^2 ]$$

$$I_{rec1/y_1y_1'} = \frac{S_1 e_1}{12} [ P_1 a_1^3 + a_1 P_1^3 ]$$

$$I_{cyl/y_1y_1'} = \frac{S_1 \pi D_1^4 e_1}{32}$$

Etant donné que l'axe de l'arbre de cardan est incliné par-rapport

à l'horizontale donc on aura :

$$(4.30) \quad I_1 = (I_{rec1/xx'} - I_{cy1/xx'}) \cos^2 \theta + (I_{rec1/y_1 y_1'} - I_{cy1/y_1 y_1'}) \sin^2 \theta$$

élément 2 :

La forme géométrique de cet élément est rectangulaire donc on aura :

$$I_{rec2/xx'} = \frac{\rho_2 e_2}{12} [ P_2^3 a_2 + a_2^3 P_2 + P_2 a_2 12 d_2^2 ] \quad (4.31)$$

$$I_{rec2/y_2 y_2'} = \frac{\rho_2 e_2'}{12} [ P_2'^3 a_2' + a_2'^3 P_2' ] \quad (4.32)$$

$$I_2 = I_{rec2/xx'} \cos^2 \theta + I_{rec2/y_2 y_2'} \sin^2 \theta \quad (4.31)$$

élément 3 :

Cet élément est un disque de diamètre  $D_3$ , en posant  $I_{d3}$  moment d'inertie du disque correspondant à l'élément 3 on aura :

$$I_{d3/xx'} = \frac{\rho_3 \pi D_3^4 e_3}{32}$$

$$I_{d3/y_3 y_3'} = \frac{\rho_3 \pi D_3^2 P_3}{4} \left[ \frac{D_3^2}{16} + \frac{P_3^2}{12} \right]$$

$$I_3 = I_{d3/xx'} \cos^2 \theta + I_{d3/y_3 y_3'} \sin^2 \theta \quad (4.32)$$

élément 4 :

On assimile cet élément à une barre rectangulaire

$$I_{rec4/xx'} = \frac{\rho_4 e_4}{12} [ a_4 P_4^3 + P_4 a_4^3 + 12 P_4 a_4 \tilde{d}_4^2 ]$$

$$I_{rec4/y_4 y_4'} = \frac{\rho_4 e_4'}{12} [ a_4' P_4'^3 + P_4' a_4'^3 ]$$

$$I_4 = I_{rec4/xx'} \cos^2 \theta + I_{rec4/y_4 y_4'} \sin^2 \theta \quad (4.33)$$

Pour la fourche côté-boîte de vitesses ou côté différentiel, on considèrera uniquement les éléments 1, 2, 4 (voir figure (4.9.b)) en ajoutant la base (pièce (a)) voir figure (4.9.a) qui permet de relier

la fourche à la boîte de vitesses ou au différentiel dont le moment d'inertie est égale à :

$$\begin{aligned}
 I_{ba/xx'} &= \sum_{i=1}^3 \frac{S_b \pi P_i}{32} (D_{e_i}^4 - D_{i_i}^4) \\
 I_{ba/y_b y_b'} &= \sum_{i=1}^3 \frac{S_b \pi}{4} (D_{e_i}^2 - D_{i_i}^2) \left[ \frac{D_{e_i}^2 - D_{i_i}^2}{16} + \frac{P_i^2}{12} \right] \\
 I_{ba} &= I_{ba/xx'} \cos^2 \theta + I_{ba/y_b y_b'} \sin^2 \theta \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

### - Les croisillons

Les croisillons sont composés chacun de quatre cylindres et de deux plaques rectangulaires.

Pour les cylindres on aura :

$$\begin{aligned}
 I_{cy/xx'} &= \sum_{i=1}^4 \frac{S_{cy} \pi P_{cy}}{32} (D_{e_i}^4 - D_{i_i}^4) \\
 I_{cy/y_c y_c'} &= \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{(D_{e_i}^2 - D_{i_i}^2)}{16} + \frac{P_{cy}^2}{12} (D_{e_i}^2 - D_{i_i}^2) + (D_{e_i}^2 - D_{i_i}^2) d_{cy}^2 \right] \frac{S_{cy} \pi P}{4} \\
 I_c &= I_{cy/xx'} \cos^2 \theta + I_{cy/y_c y_c'} \sin^2 \theta \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Pour les plaques rectangulaires on aura :

En posant :

$$CH_i = \frac{D_{e_i} - D_{i_i}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 I_{p/xx'} &= \sum_{i=1}^2 \frac{S_p D_{e_i}}{12} \left[ D_{e_i}^3 \cdot CH_i + CH_i^3 \cdot D_{e_i} + D_{e_i} CH_i d_p^2 \cdot 12 \right] \\
 I_{p/y_p y_p'} &= I_{p/xx'} \\
 I_p &= I_{p/xx'} = I_{p/y_p y_p'} \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

### - Arbre canelé

L'arbre canelé a été décomposé en quatre cylindres pleins tel qu'on aura :

$$I_{a.c} = \sum_{i=1}^4 \left[ \frac{S_a \pi D_{i_i}^4 P_i}{32} \cos^2 \theta + \frac{S_a \pi D_{i_i}^2 P_i}{4} \left( \frac{D_{i_i}^2}{16} + \frac{P_i^2}{12} \right) \sin^2 \theta \right] \quad (4.37)$$

## - Tube coulissant

Le tube coulissant a été décomposé en six cylindres de diamètre intérieur et extérieur respectivement  $D_i, D_e$ , tel qu'on aura :

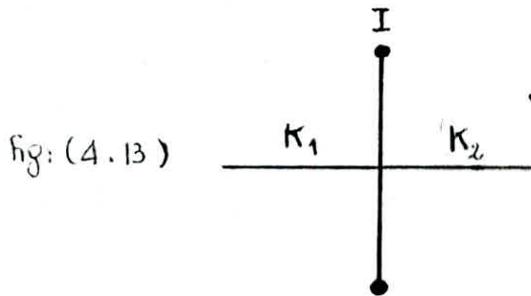
En posant :

$$BH_i = D_e^2 - D_i^2$$

$$(4.38) \quad I = \sum_{i=1}^6 \left[ \frac{5}{8} \pi P_i (D_e^4 - D_i^4) \cos^2 \theta + \frac{5}{4} \pi P_i BH_i \left( \frac{BH_i}{16} + \frac{P_i^2}{12} \right) \sin^2 \theta \right]$$

## IV - 6.2 Rigidité torsionnelle

Sur le modèle équivalent retenu pour l'arbre de cardan, nous avons concentré la masse de l'arbre, des fourches, des croisillons et des brides au milieu de l'arbre par un disque de moment d'inertie  $I$  calculé auparavant, et de deux rigidités, côté boîte de vitesses et côté pont respectivement  $K_1, K_2$ .



Etant donné que la variation de la longueur de l'arbre est faible (causée accidentellement, selon les perturbations de la transmission), on se permet de prendre les valeurs extrême de  $K_1$  et  $K_2$ .

La rigidité torsionnelle de l'arbre de cardan dépend de la rigidité de l'arbre (tube), des fourches et des croisillons.

En partant du fait que la rigidité est l'inverse de la flexibilité on aura :

$$\frac{1}{K_{tb}} = \frac{l_1}{G I_{o1}} \quad : \text{Flexibilité à la torsion du tube (côté boîte)}$$

$$\frac{1}{K_{tP}} = \frac{l_2}{G I_{o2}} \quad : \text{Flexibilité à la torsion du tube (côté pont)}$$

$$\frac{1}{K_{Fo}} = \frac{2}{3} \frac{\ell_1'^2}{h_1 E I_1} : \text{Flexibilité à la flexion d'une fourche}$$

$$\frac{1}{K_{Cr}} = \frac{2}{3} \frac{\ell_2'^2}{h_2 E I_2} : \text{Flexibilité à la flexion d'un croisillon}$$

Car l'angle de torsion produit par un couple  $C_e$  se compose en : la torsion de l'arbre, de la flexion des fourches et de la flexion des croisillons.

avec :

$K_{\ell b}$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle de l'arbre côté boîte

$K_{\ell p}$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle de l'arbre côté pont

$K_{Fo}$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle des fourches.

$K_{Cr}$  [N.m/rad] : rigidité torsionnelle des croisillons.

$\ell_{1,2}$  [m] : longueur de l'arbre considéré (côté boîte ou ponts)

$I_{o1,2}$  [m<sup>4</sup>] : moment quadratique polaire de l'arbre considéré

$\ell_1'$  [m] : Diamètre extérieur du croisillon (ou alesage de la fourche)

$h_1$  [m] : longueur de la fourche

$h_2$  [m] : longueur d'un croisillon.

Etant donnée que chaque joint de cardan est constitué par deux fourches et un croisillon donc on aura :

$$\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K_{\ell b}} + \frac{2}{K_{Fo}} + \frac{1}{K_{Cr}} \quad (4.39)$$

$$K_1 = \frac{K_{\ell b} + K_{Fo} + K_{Cr}}{K_{Fo} K_{Cr} + 2 K_{\ell b} K_{Cr} + K_{\ell b} K_{Fo}} \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{K_2} = \frac{1}{K_{\ell p}} + \frac{2}{K_{Fo}} + \frac{1}{K_{Cr}}$$

$$K_2 = \frac{K_{\ell p} K_{Fo} K_{Cr}}{K_{Fo} K_{Cr} + 2 K_{\ell p} K_{Cr} + K_{\ell p} K_{Fo}} \quad (4.40)$$

Les rigidités torsionnelles  $K_{1,v}$  et  $K_{2,v}$  selon les différentes vitesses  $v$  sont obtenues en fonction des différents rapports de réduction sortie boîte correspondant.

(Pour les rapports de réduction sortie boîte voir Annexe)

## IV.7 Amortisseur torsionnel (Damper)

### IV.7.1 Moment d'inertie

Le moment d'inertie de l'amortisseur torsionnel est donné par le constructeur

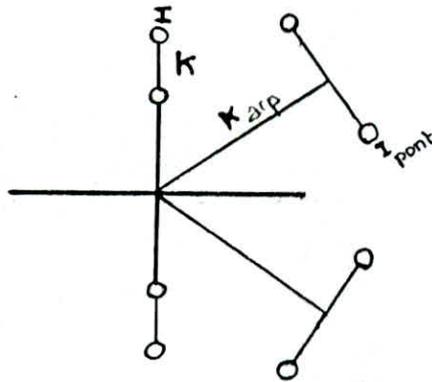
Le modèle équivalent retenu est un disque de moment d'inertie  $I$

### IV.7.2 Rigidité torsionnelle

La rigidité torsionnelle de l'amortisseur torsionnel est donnée par le constructeur

Selon le modèle équivalent retenu, la liaison entre l'amortisseur et le réducteur central est assurée par l'élément en caoutchouc de l'amortisseur.

fig. (4.14)



Remarque :

La réduction du moment d'inertie et de la rigidité torsionnelle se fait à l'aide des rapports de réduction sortie boîte (voir Annexe).

## IV.8. Pont moteur - Roues motrices - charge équivalente du véhicule

## IV-8.1 Moment d'inertie

### - Pont moteur

Au niveau du pont moteur, les parties intervenant dans la transmission du mouvement sont : le reducteur centrale, les deux demi-arbres (côté droit et gauche) et les reducteurs des roues.

#### Reducteur centrale

Etant donné que le reducteur centrale est constitué d'un ensemble de pignons de diamètre extérieur et intérieur respectivement  $D_e, D_i$ , le moment d'inertie de l'ensemble aura pour expression:  $[kg.m^2]$

$$I_{redc} = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \pi e_i}{32} (D_e^4 - D_i^4) \quad (4.41)$$

avec

$n$  : nombre de pignons

$\rho_i$   $[kg/m^3]$  : masse volumique du matériau

$e_i$   $[m]$  : épaisseur du pignon considéré.

#### Demi-arbres

Le moment d'inertie de chacun des demi-arbres est donné par :  $[kg.m^2]$

$$I_{ar-b} = \frac{\rho_a \pi l_a}{32} [D_e^4] \quad (4.42)$$

avec

$l_a$   $[m]$  : longueur du demi-arbre.

#### Reducteurs des roues

Le moment d'inertie de chaque reducteur des roues aura pour expression:  $[kg.m^2]$

$$I_{redr} = \sum_{i=1}^k \frac{\rho_i \pi e_i}{32} (D_e^4 - D_i^4) \quad (4.43)$$

## - Roues motrices

Pour le calcul du moment d'inertie de la roue, nous considérons le rayon moyen (étant donné que  $R-r$  n'est pas très important) donc on aura:  $[\text{kg.m}^2]$

$$I_{\text{roue}} = m r_m^2 \quad (4.44)$$

avec

$$r_m = \frac{R+r}{2} \quad [\text{m}] : \text{rayon moyen.}$$

## - Charge équivalente du véhicule

Le moment d'inertie fictif de la masse du véhicule réduit à l'axe du vilebrequin est donné par:  $[\text{kg.m}^2]$  (voir figure: (4.14))

$$I_{\text{cheq}} = m r^2 i^2 \quad (4.45)$$

sachant que:

$$i = \frac{\omega'}{\omega}$$

avec

$\omega$  [rad/s]: vitesse angulaire du moteur

$\omega'$  [rad/s]: vitesse angulaire des roues

$r$  [m]: rayon dynamique des roues

$m$  [kg]: masse du véhicule.

## IV-8-2 Rigidité torsionnelle

Selon le modèle équivalent retenu, nous avons concentrés la masse de l'ensemble pont moteur et roues motrice en deux disques de moment d'inertie  $I$  et chaque disque est relié au différentiel par une portion d'arbre de rigidité torsionnelle  $K_{arp}$  tenant compte de la rigidité torsionnelle du demi-arbre et des pneus, tel qu'on aura: (voir figure: (4.14)).

$$\frac{1}{K_{arp}} = \frac{1}{K_a} + \frac{1}{K_p} \quad (4.46)$$

Remarque :

Pour la réduction des moments d'inertie  $I$  et des rigidités torsionnelles  $k$ , en plus des rapports de réduction sortie boîte, nous tenons compte des réductions du pont (réducteur central et réducteur des roues) tel qu'on aura :

Pour le moment d'inertie (Pont moteur - roues motrices - charge équivalente)

$$I_{\text{pont}} = I_{da} P_i^2 + (I_{\text{redr}} + I_{\text{cheq}}) r_i^2 \quad (4.47)$$

avec

$I_{da}$  [ $\text{kg.m}^2$ ] : moment d'inertie du demi-arbre (côté droit ou gauche)

$I_{\text{redr}}$  [ $\text{kg.m}^2$ ] : moment d'inertie du réducteur des roues (côté droit ou gauche)

$I_{\text{cheq}}$  [ $\text{kg.m}^2$ ] : moment d'inertie fictif de la masse du véhicule (camion vide - camion chargé)

$P_i$  : rapport de réduction sortie pont

$r_i$  : rapport de réduction sortie roues

Pour la rigidité torsionnelle on aura :

$$\frac{1}{K_{\text{arp}}} = \frac{1}{K_d P_i^2} + \frac{1}{K_p r_i^2} \quad (4.48)$$

avec

$K_d$  [ $\text{N.m/rad}$ ] : rigidité torsionnelle du demi-arbre (côté droit ou gauche)

$K_p$  [ $\text{N.m/rad}$ ] : rigidité des pneus

NB :

Les rapports de réduction sortie pont et sortie roues dépendent de la vitesse en prise (voir Annexe)

## IV.9 coefficients d'amortissement

Le frottement dans le moteur, ainsi que dans chaîne cinématique, correspondant à la vitesse moyenne de rotation, n'a pas d'influence sensible sur les vibrations de torsion. Ce frottement est équilibré par une partie du couple moyen du moteur. Les pertes supplémentaires provoquées par les vibrations de torsion dans les paliers et dans les différentes liaisons, ont une faible valeur (20% à 35%) par rapport aux forces d'amortissement principales (hystérésie dans les arbres) (démontrer par les résultats des travaux effectués par C. SERENSEN [03]), pour cela dans notre modèle on ne tiendra compte que de l'amortissement interne causé par l'hystérésie.

L'hystérésie interne dans les arbres agit comme une résistance (amortisseur), il apparaît dans la plus part des matériaux soumis à des mouvements alternatifs.

### -Linearisation de l'amortissement par hystérésie dans les arbres

On sait que la présence d'un amortissement introduit des effets non linéaire dans le système vibratoire et les exprimant la variation du couple résistant posent de sérieuses difficultés dans la détermination du coefficient d'amortissement, ce qui nous amène à linéariser notre système.

Dans les cas pratiques, la résistance par hystérésie étant généralement faible, le mouvement du système se rapproche suffisamment d'une sinusoïde, cela nous donne une solution approchée au problème.

La méthode la plus générale consiste à remplacer le couple résistant  $f(d\psi/dt)$  par une valeur équivalente  $\eta d\psi/dt$  et à déterminer un coefficient  $\eta_e$  de façon qu'avec le mouvement sinusoïdal, le vrai couple résistant effectu le même travail par cycle que le couple équivalent  $\eta d\psi/dt$ . Donc si on calcul

l'énergie dissipée par hystérésis pendant un cycle, et en l'égalisant au travail effectué en un cycle par le couple résistant équivalent, on obtient un résultat approximatif suffisant. En se basant sur les essais effectués par ROVETTA [04] l'énergie de dissipation due à l'hystérésis pour une contrainte  $\tau = 550 \text{ daN/cm}^2$ , peut être exprimée par :  $[\text{kgf.cm/cm}^3]$

$$E_0 = 43,2 \cdot 10^{-10} \tau_{\max}^{4,3}$$

avec

$E_0$  : travail d'hystérésis pour un cycle et par unité de volume

$\tau_{\max}$  : l'amplitude de la contrainte à la torsion durant le cycle.

En modifiant les dimensions nous obtenons :

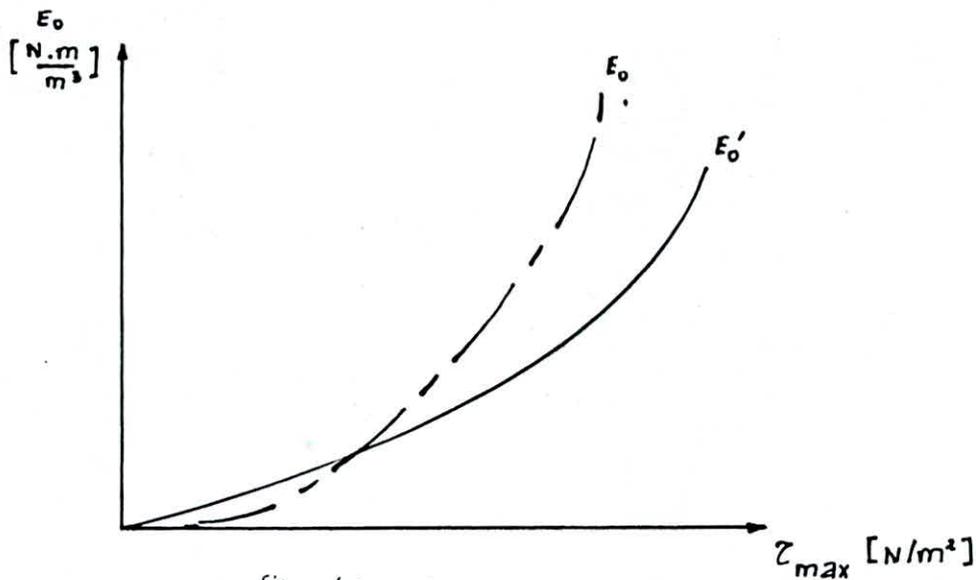


fig: (4.15)

Travail d'hystérésis en fonction de la contrainte à la torsion

Une approximation d'ordre carré, nous permet d'exprimer l'hystérésis sous forme :

$$E_0' = C \tau_{\max}^2$$

La constante  $C$  est déterminée pour  $\tau_{\max} = 3 \cdot 10^{-7} [\text{N/m}^2]$

En posant :

$$E_0 = E_0'$$

on se retrouve avec :

$$E_0' = 28.9.10^{-14} \tau_{\max}^2$$

Si nous considérons un arbre creux de rayon intérieur  $r_0$  et extérieur  $r$ , le travail d'hystérésis  $E$  sera :

$$E = E' dV$$

$$E = 28.9.10^{-14} \left[ \frac{r_x}{r} \tau_{\max} \right]^2 \cdot 2\pi \cdot r_x \cdot L \cdot dr_x$$

avec

$r_x$  [m] : rayon variable de  $r_0$  à  $r$

$L$  [m] : longueur de l'arbre.

en intégrant

$$E = \frac{28.9.10^{-14} L \cdot \tau_{\max}^2}{r^2} \frac{r^4 - r_0^4}{4}$$

La contrainte  $\tau_{\max}$  est donnée par :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I/r} = \frac{\theta \cdot G}{L} \cdot r$$

$$\theta = \frac{M_t L}{I_0 G} \quad \text{donc} \quad L = \frac{\theta}{M_t} I_0 G = \frac{1}{K} I_0 G$$

ce qui donne

$$\tau_{\max} = \frac{K \theta r}{I_0} = \frac{2 K \theta r}{\pi (r^4 - r_0^4)}$$

finalement

$$E = 2\pi \cdot 28.9.10^{-14} L (r^4 - r_0^4) \frac{4 \cdot K^2 \theta^2 r^2}{A r^2 \pi^2 (r^4 - r_0^4)^2}$$

comme

$$K = \frac{I_0 G}{L} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G}{L} (r^4 - r_0^4)$$

En résultat

$$E = 28.9.10^{-14} G K \theta^2$$

Le travail effectué en un cycle, par le couple équivalent est

$$W = \pi \tau_a \omega \cdot \theta^2$$

En égalisant les deux énergies on aura :

$$\eta_a = \frac{28.9 \cdot 10^{-14}}{\pi} \cdot G \cdot \frac{\kappa}{\omega}$$

Pour

$G = 0.85 \cdot 10^{11}$  [N/m<sup>2</sup>] module d'élasticité transversal

on se retrouve avec :

$$\eta_a = 9.2 \cdot 10^{-3} \frac{\kappa}{\omega} \quad (4.49)$$

Le coefficient d'amortissement équivalent de l'arbre dépend à la fois de la rigidité torsionnelle  $\kappa$  et de la vitesse angulaire  $\omega$ .

Dans le cas d'un amortissement en caoutchouc et du type visqueux [04], on définit le taux d'amortissement par :

$$\varepsilon = \frac{R}{R_c}$$

avec

$R$  : la viscosité ( $R_c$  : viscosité critique)

Sachant que :

$\varepsilon_0$  : taux d'amortissement à la pulsation de résonance  $\omega_0$  (dans le cas des élastomères en caoutchouc, on a :  $\varepsilon \omega = \varepsilon_0 \omega_0$ )

Dans les caoutchoucs couramment utilisés le taux d'amortissement caractéristique  $\varepsilon_0$  est compris entre 0.02 et 0.1

En se basant sur les expressions donnant le coefficient de transmission en fonction du coefficient de dissipation et du taux d'amortissement caractéristique  $\varepsilon_0$  [05], [06]

$$\eta(\psi) = \frac{(1 + \psi^2/4\pi^2)^{1/2}}{((1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + \psi^2/4\pi^2)^{1/2}}$$

$$\eta(\varepsilon_0) = \frac{(1 + 4\varepsilon_0^2)^{1/2}}{((1 - \omega^2/\omega_0^2) + 4\varepsilon_0^2)^{1/2}}$$

et en égalisant entre les deux expressions on se retrouve avec :

$$4\varepsilon_0^2 = \frac{\psi^2}{4\pi^2}$$

donc

$$\varepsilon_0 = \frac{\psi}{4\pi}$$

sachant que

$$\psi = \frac{2\pi}{k} \eta_c \omega$$

on aura

$$\varepsilon_0 = \frac{\eta_c \omega}{2k}$$

d'où on en déduit l'expression du coefficient d'amortissement relative au caoutchouc (dans nos calculs nous prendrons une valeur moyenne de  $\varepsilon_0$ , tel que  $\varepsilon_0 = 0.05$  on se retrouve donc avec :

$$\eta_c = 0.1 \frac{k}{\omega} \quad (4.50)$$

### Cas particulier

Pour les pièces constituées d'éléments en caoutchouc et d'arbres en acier, le coefficient d'amortissement de l'ensemble dépendra à la fois de la rigidité torsionnelle et du coefficient d'amortissement de chaque élément.

Pour démontrer cette dépendance on travaillera à l'aide des équations aux dimensions des deux paramètres

$$\eta : [N.m.s/rad]$$

$$k : [N.m/rad]$$

En établissant le rapport

$$\frac{\eta}{k} = \frac{[N.m.s/rad]}{[N.m/rad]} = [s]$$

qu'on interprète comme étant le temps nécessaire au matériau pour amortir la vibration.

donc le temps nécessaire qu'il faudra à la pièce pour amortir la vibration sera :

$$t = \frac{J_c}{K_c} + \frac{J_a}{K_a}$$

En posant que :

$$t = \frac{J_{eq}}{K_{eq}}$$

avec

$J_{eq}$  : coefficient d'amortissement equivalent

$K_{eq}$  : rigidite torsionnelle equivalente

Sachant que

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_c} + \frac{1}{K_a} = \frac{K_c + K_a}{K_c K_a} \quad (4.51)$$

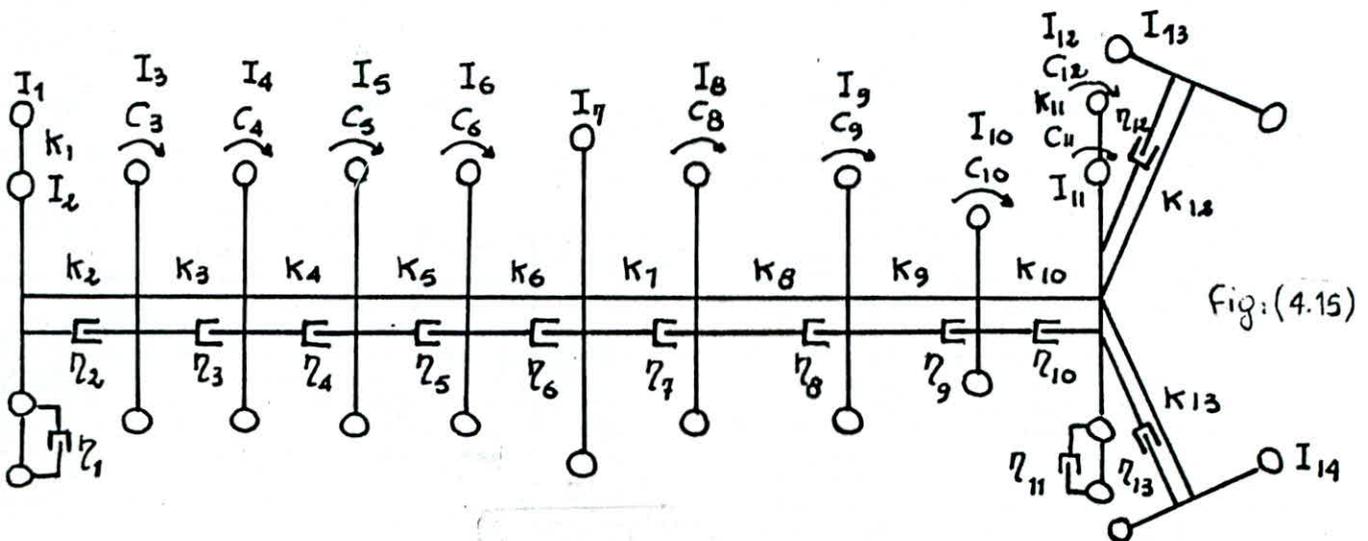
$$t = \frac{J_c K_a + J_a K_c}{K_c K_a}$$

On en deduit

$$J_{eq} = \frac{J_c K_a + J_a K_c}{K_a + K_c} \quad (4.52)$$

On retrouve ce cas, dans le calcul du coefficient d'amortissement de l'embrayage et du pont moteur.

#### IV-10 Modèle equivalent de la chaine de transmission (relatif au camion TB230)



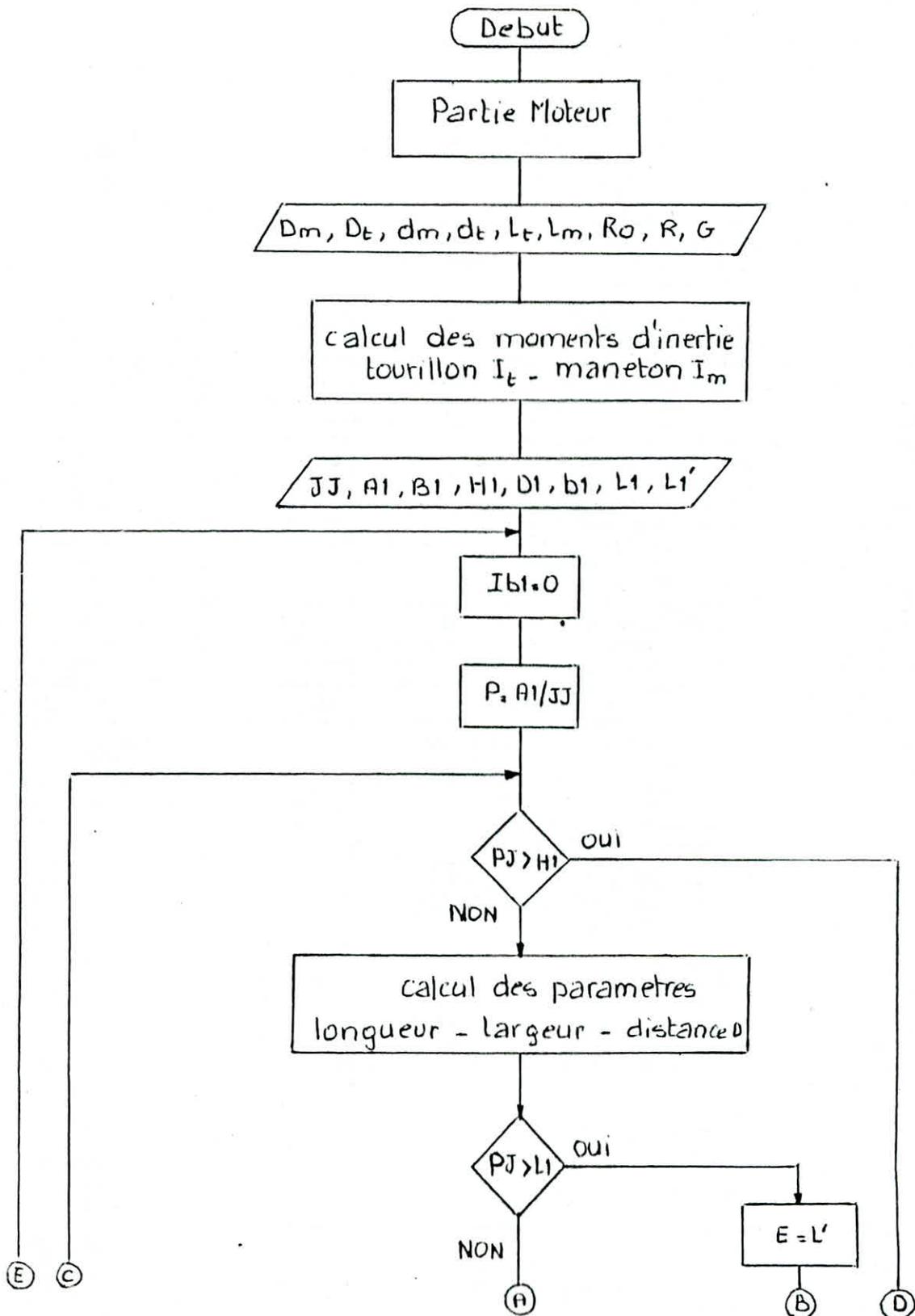
Considérons la figure (3.7) le modèle constitué par une ligne d'arbres comportant 14 volants de moment d'inertie  $I_1, \dots, I_{14}$  ou sont supposées concentrées toutes les masses, reliés entre eux par 13 portions d'arbres présentant des rigidités torsionnelles  $k_1, k_2, \dots, k_{13}$  et des amortissements  $\eta_1, \dots, \eta_{13}$ . Au niveau du moteur, nous avons des couples perturbateurs de forme périodiques.

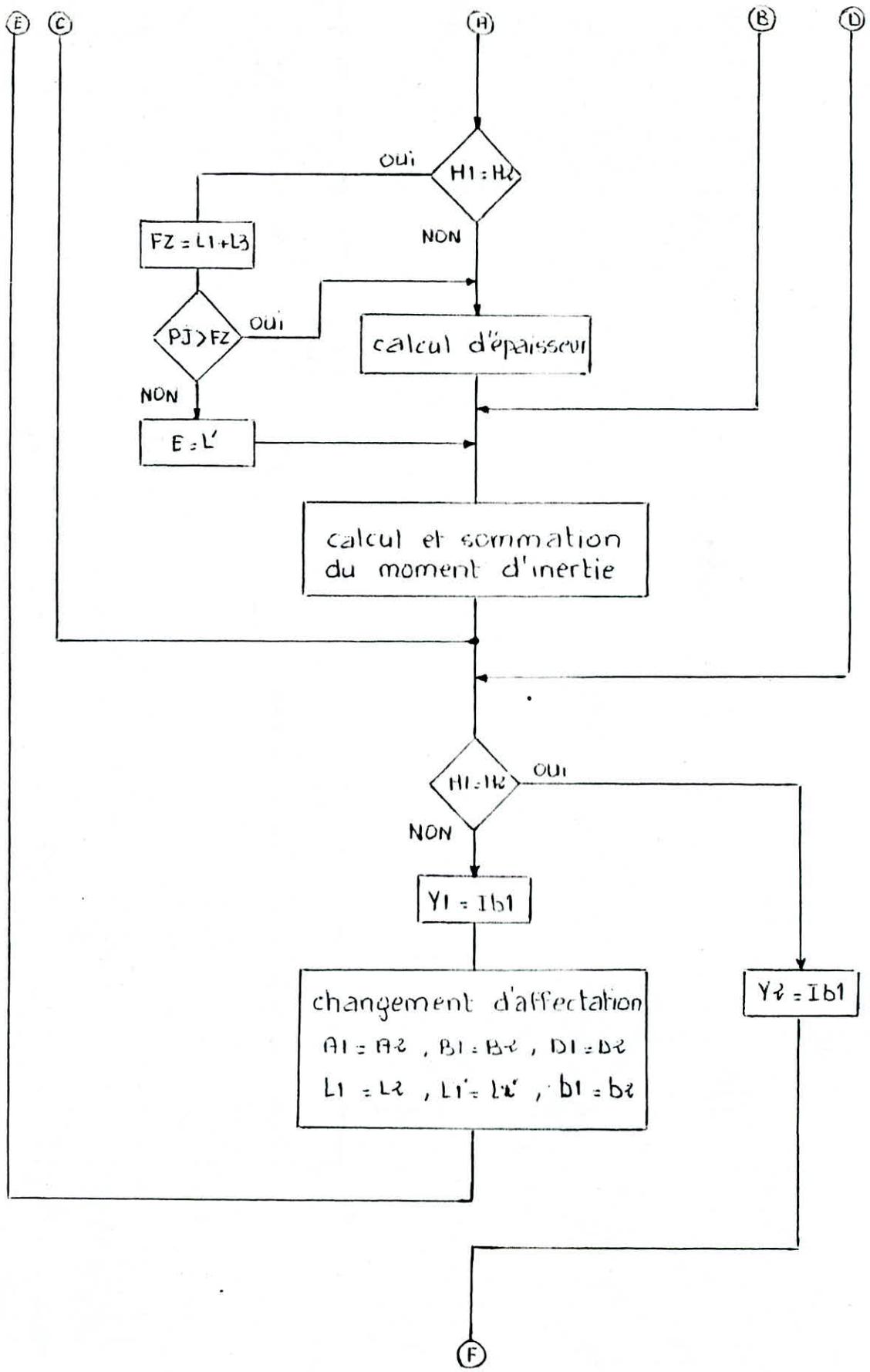
L'excitation due à l'hétérocinétie des cardans, est remplacée par des couples d'inertie extérieurs  $C_i$  agissant sur la masse du cardan et les masses voisines côté moteur jusqu'à la boîte de vitesses et côté pont jusqu'au réducteur central.

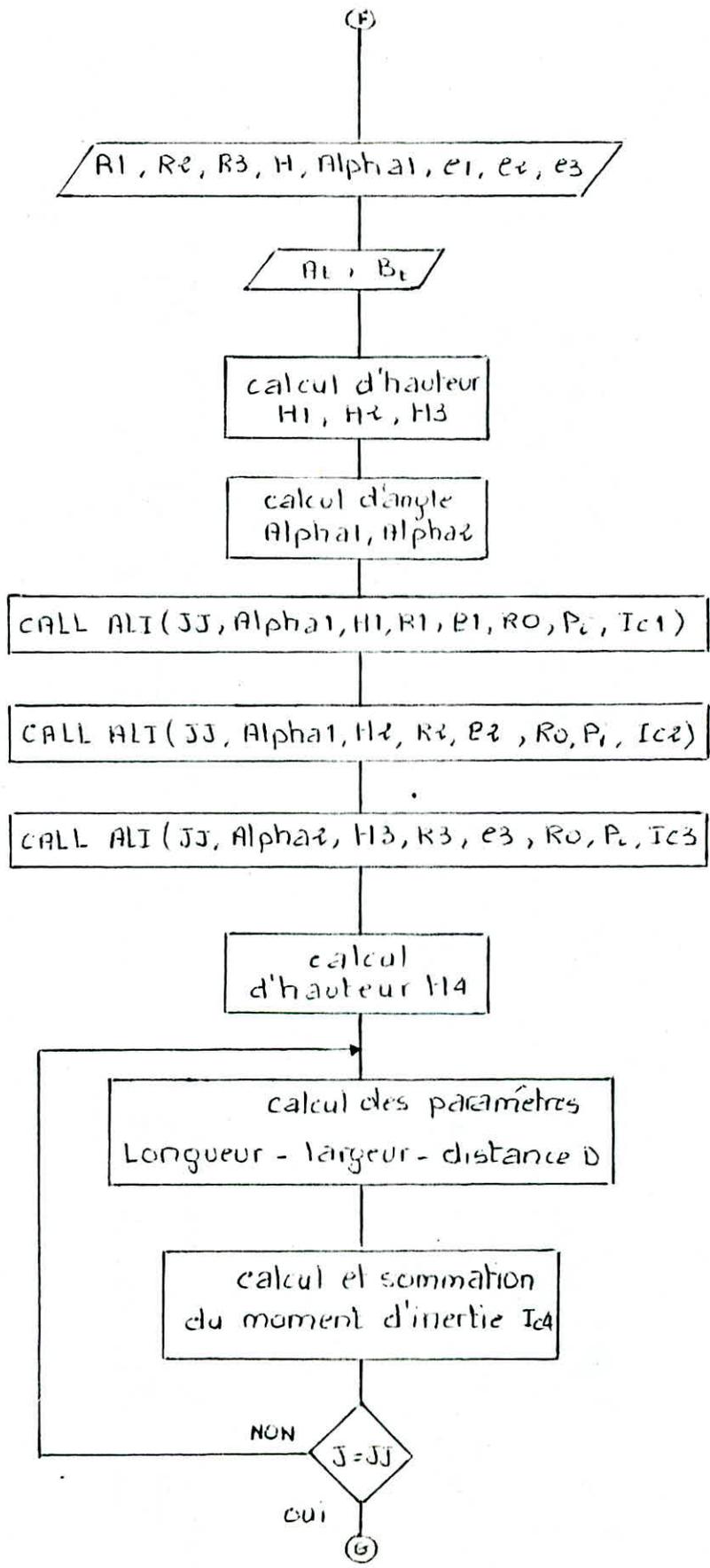
Le programme P.F.E permet le calcul des différents paramètres de la chaîne de transmission conformément au modèle équivalent retenu.

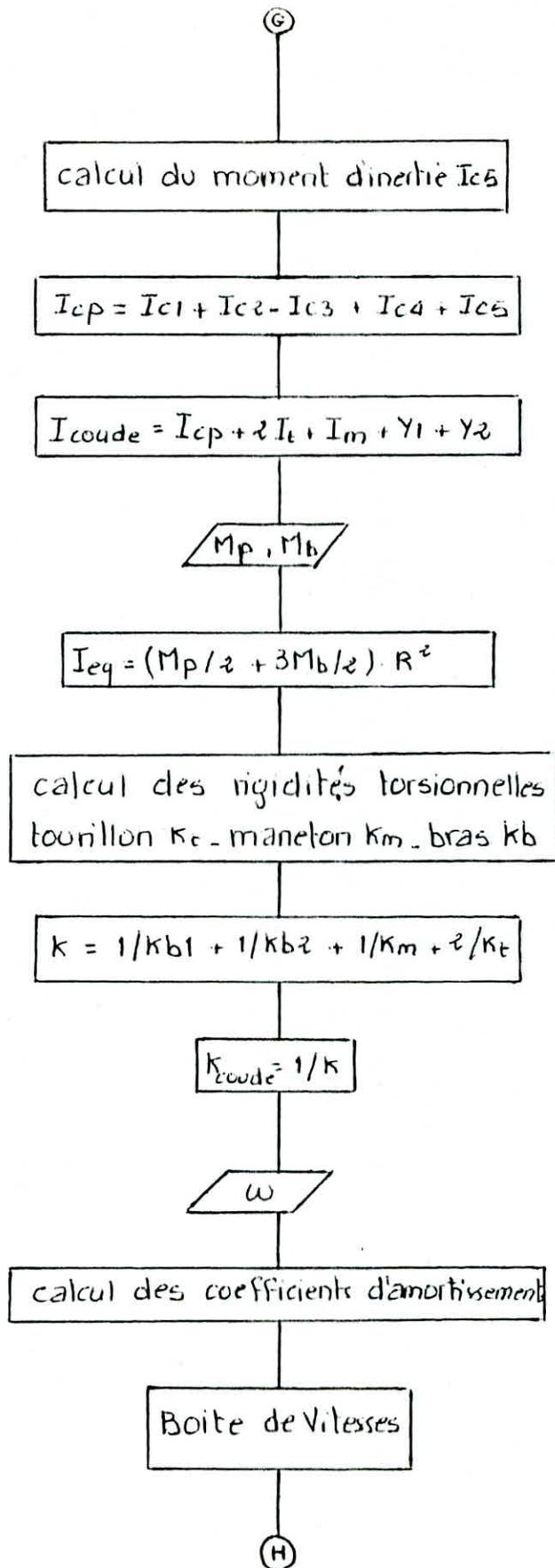
L'organigramme P.F.E3 étant très long, nous nous contenterons de présenter ici un résumé qui tracera les étapes intermédiaires de calcul. Le programme complet avec ses variantes se trouve sur les listings, le fichier des résultats également est imprimé sur le listing.

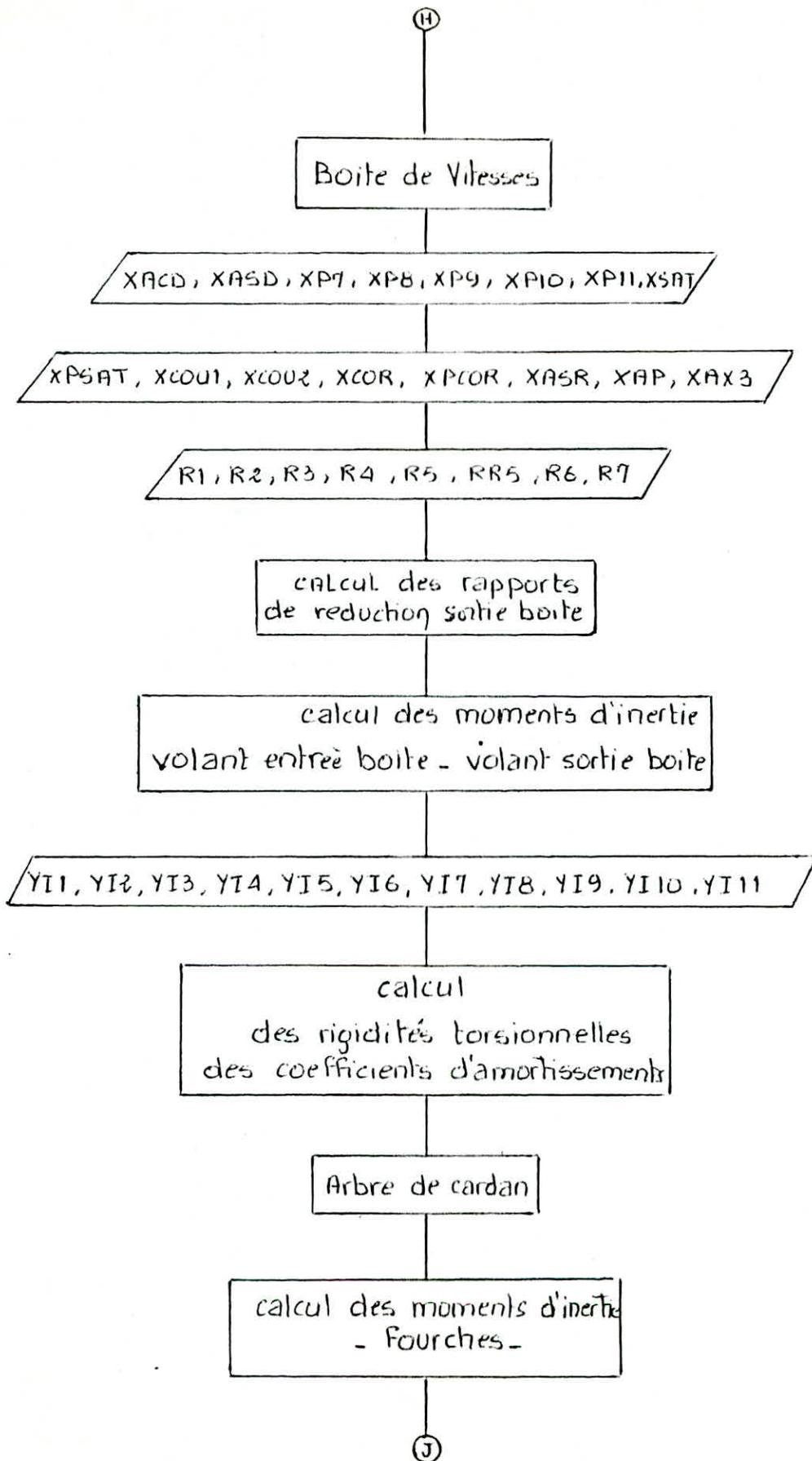
IV.11 Organigramme P.F.E 3 (Troisième partie du programme)

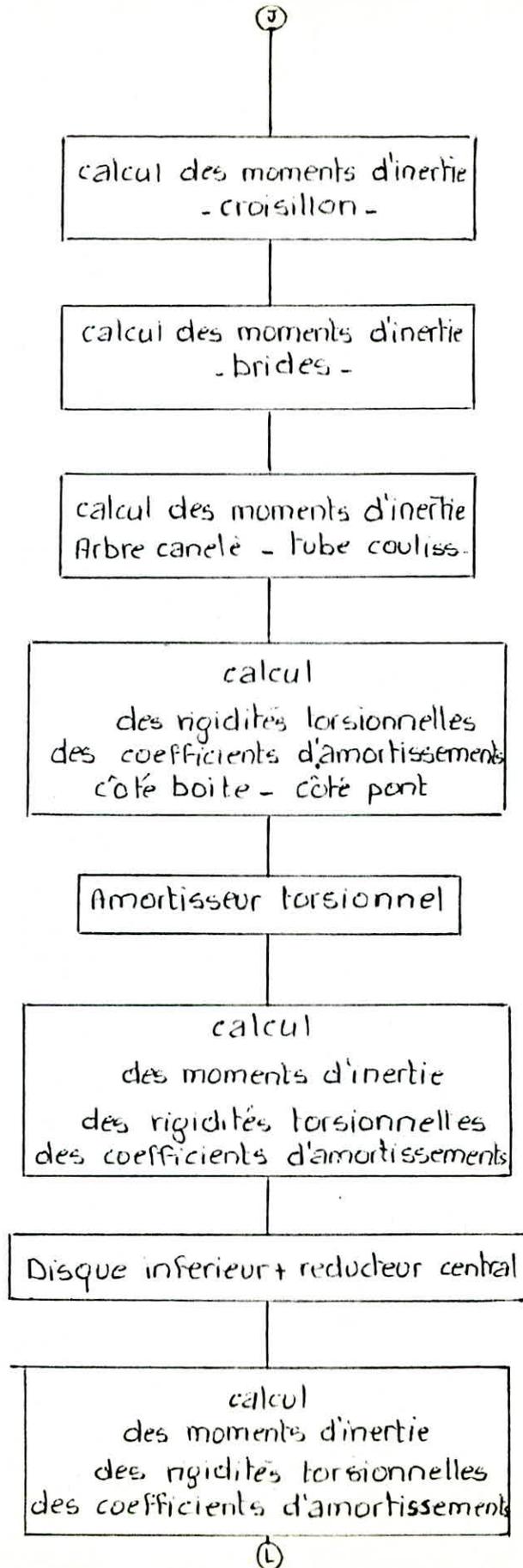


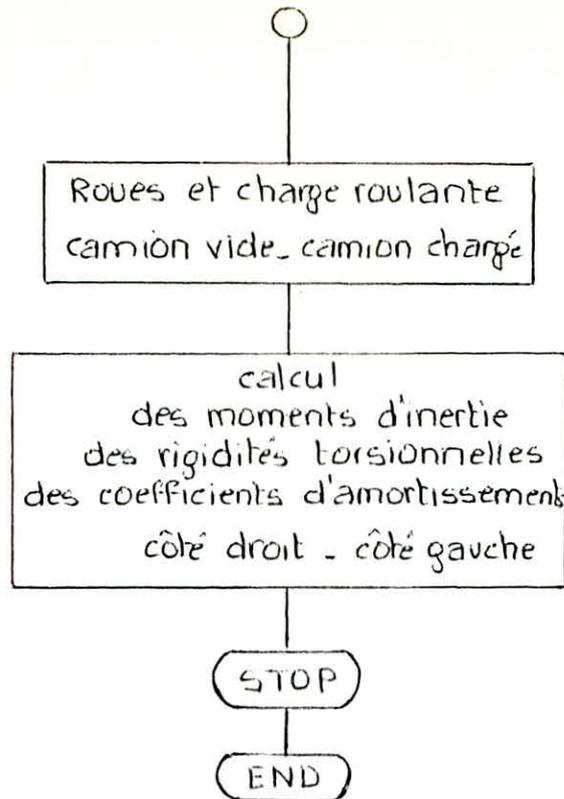












### Deroulement de l'organigramme PFE3

- Lecture des dimensions du tourillon et du maneton (diamètre extérieur et intérieur, longueur), distance entre leur axes ( $R$ ) et les caractéristiques du matériau : masse volumique  $R_0$ , module d'élasticité transversal  $G$ .
- Calcul de  $I_t$ ,  $I_m$
- Lecture des dimensions du bras (selon la figure : (4.5.a) et (4.5.b)) ainsi que le nombre de subdivision choisi.
- Test qui assure un calcul sur toute la longueur du bras.
- Calcul des dimensions de chaque subdivision.
- Test permettant de limiter les calculs de  $E$  à  $L_1$ . Dépasser la valeur  $L_1$  l'épaisseur est maintenue constante dans les calculs suivants (uniquement pour le premier bras).
- Test assurant le retour au calcul de l'épaisseur  $E$  pour la deuxième extrémité du deuxième bras
- Calcul et sommation du moment d'inertie de chaque subdivision
- Test permettant la différenciation entre le moment d'inertie du

- premier bras et celui du deuxième bras, respectivement par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .
- A ce niveau on affecte aux variables du premier bras, les valeurs de celles du deuxième bras pour éviter la répétition des opérations.
  - Lecture des dimensions du contre poids, calcul des différents paramètres pour chaque cercle (Hauteur  $H_1, H_2, H_3$  - Angle  $\alpha_1, \alpha_2$ ).
  - Le sous-programme ALI permet de calculer le moment d'inertie de chaque demi-cercle ( $I_{c1}, I_{c2}, I_{c3}$ )
  - Calcul et sommation du moment d'inertie de chaque subdivision constituant le trapèze de hauteur  $H_4$ . Le Test sur  $J$  assure la continuité des calculs.
  - Après avoir calculer le moment d'inertie des formes rectangulaires  $I_{cs}$ , on passe à la détermination du moment d'inertie de l'ensemble coude.
  - Lecture des masses (bielle et piston) et calcul du moment d'inertie de l'équipage mobile.
  - Après avoir calculer la rigidité torsionnelle de chaque partie du coude, on en déduit celle de l'ensemble.
  - Lecture de la vitesse angulaire du moteur et calcul des coefficients d'amortissements selon chaque équipage mobile.
- Pour la boîte de vitesses, on a en premier lieu la lecture des moments d'inertie des différents éléments de la boîte de vitesses: arbre de commande  $X_{ACD}$ , arbre principal  $X_{AP}$ , arbre secondaire  $X_{ASD}$ , arbre de sortie  $X_{ASR}$ , pignons 7, 8, 9, 10, 11  $X_{P7}, X_{P8}, X_{P9}, X_{P10}, X_{P11}$ , satellite  $X_{SAT}$ , porte satellite  $X_{PSAT}$ , coulisseau 1, 2  $X_{COU1}, X_{COU2}$ , couronne et porte couronne  $X_{COR}, X_{PCOR}$ , axes des trois satellites  $X_{AX3}$ .
- Lecture des rapports de réductions, pour calculer les rapports de réduction sortie boîte, ensuite on détermine le moment d'inertie de chaque volant (entrée et sortie boîte)
  - Lecture des rigidités torsionnelles de la boîte de vitesses, qui nous permettrons par la suite le calcul de la rigidité torsionnelle de la portion d'arbre reliant les deux volants (entrée et sortie boîte), ainsi que le coefficient d'amortissement correspondant et ceci selon chaque vitesse en prise.
- Pour les autres éléments de la chaîne de transmission chaque cad-

ran représentera un ensemble d'opérations constituées d'expressions simples. La réduction des paramètres (moment d'inertie - rigidité torsionnelle - coefficient d'amortissement) se fait à l'aide des rapports de réduction sortie boîte.

Il est à noter que dans le programme principal concernant la troisième partie les moments d'inertie commencent par X, les rigidités torsionnelles par Y et les coefficients d'amortissements par Z.

## . Resultats .

Tableau des Moments d'inertie des volants relatif au Modèle equivalent (TB230)

element N° volant	Designation	Moment d'inertie I en Kg.m <sup>2</sup> des differents volants Pour les 9 vitesses								
		1 <sup>ere</sup> vitesse	2 <sup>eme</sup> vitesse	3 <sup>eme</sup> vitesse	4 <sup>eme</sup> vitesse	5 <sup>eme</sup> vitesse	6 <sup>eme</sup> vitesse	7 <sup>eme</sup> vitesse	8 <sup>eme</sup> vitesse	9 <sup>eme</sup> vitesse
1	volant de l'amortisseur torsionnel	0,0930								
2	Poulie plus bague interieur de l'amortisseur	0,0450								
3	manivelle du 4 <sup>eme</sup> et 8 <sup>eme</sup> cylindre	0,1430								
4	Manivelle du 3 <sup>eme</sup> et 7 <sup>eme</sup> cylindre	0,0990								
5	Manivelle du 2 <sup>eme</sup> et 6 <sup>eme</sup> cylindre	0,0990								
6	Manivelle du 1 <sup>er</sup> et 5 <sup>eme</sup> cylindre	0,1450								
7	volant moteur plus embrayage	2,5570								
8	entrée Boite de vitesses	0,0449	0,0447	0,0492	0,0436	0,0449	0,0447	0,0492	0,0436	0,0492
9	sortie Boite de vitesses	0,0146	0,0266	0,0430	0,0781	0,204	0,435	0,837	1,420	0,0092
10	Arbre de cardan	0,00178	0,0038	0,00744	0,0125	0,0229	0,0492	0,0956	0,1630	0,00116
11	Bisque inferieur de l'amortisseur plus reducteur central	0,0024	0,00517	0,0101	0,01691	0,0309	0,0664	0,129	0,2180	0,00157
12	Amortisseur torsionnel	0,00084	0,00181	0,00352	0,00594	0,01080	0,0233	0,0453	0,0763	0,000551
13	roue + charge camion roulante côté droit : vide	0,1691	0,3640	0,7071	1,1901	2,1700	4,6801	9,0901	15,3021	0,1110
	roue + charge camion roulante côté droit : chargé	0,9800	2,1102	4,1010	6,9110	12,6001	27,1002	52,7001	88,8000	0,6410
14	roue + charge camion roulante côté gauche : vide	0,1691	0,3640	0,7071	1,1901	2,1700	4,6801	9,0901	15,3021	0,1110
	roue + charge camion roulante côté gauche : chargé	0,9800	2,1102	4,1010	6,9110	12,6001	27,1002	52,7001	88,8000	0,6410

- Resultats -

Tableau des rigidités torsionnelles des arbres relatif au modèle equivalent (TB23)

elements de liaison	Designation	rigidité torsionnelle K en N.m/rad des différents elements reliant les différents volant pour les 9 vitesses								
		1 <sup>er</sup> vitesse	2 <sup>em</sup> e vitesse	3 <sup>em</sup> e vitesse	4 <sup>em</sup> e vitesse	5 <sup>em</sup> e vitesse	6 <sup>em</sup> e vitesse	7 <sup>em</sup> e vitesse	8 <sup>em</sup> e vitesse	9 <sup>em</sup> e vitesse
1	element en caoutchouc reliant les volants 1 et 2	38039								
2	Portion d'arbre reliant les volants 2 et 3	1282051								
3	Portion d'arbre reliant les volants 3 et 4	1400560								
4	Portion d'arbre reliant les volants 4 et 5	1400560								
5	Portion d'arbre reliant les volants 5 et 6	1400560								
6	Portion d'arbre reliant les volants 6 et 7	2252252								
7	Portion d'arbre reliant les volants 7 et 8	18053								
8	Portion d'arbre reliant les volants 8 et 9	91088,83	158212,75	147099,94	140685,59	96364,08	174836,4	161365,4	153679,4	59720,19
9	Portion d'arbre reliant les volants 9 et 10	2983,632	6418,232	12476,26	21034,78	38329,81	82453,09	160278,80	270227,51	1951,913
10	Portion d'arbre reliant les volants 10 et 11	1860,43	4002,06	7779,52	13116,16	23900,41	51413,32	99941,21	168499,37	1217,11
11	Portion d'arbre reliant les volants 11 et 12	674,022	1449,920	2818,467	4751,893	8658,912	18626,681	36028,000	61046,11	440,950
12	Portion d'arbre reliant les volant 12 et 13	0,845	1,818	3,535	5,959	10,859	23,359	45,408	76,556	0,553
13	Portion d'arbre reliant les volants 11 et 14	0,845	1,818	3,535	5,959	10,859	23,359	45,408	76,556	0,553

## \_ Resultats \_

Tableau des coefficients d'amortissements relatif au modèle équivalent (TB230)

éléments de liaison	Designation	coefficient d'amortissement en N.m.s/rad des différents éléments reliant les différents volants pour les 9 vitesses								
		1 <sup>er</sup> vitesse	2 <sup>ème</sup> vitesse	3 <sup>ème</sup> vitesse	4 <sup>ème</sup> vitesse	5 <sup>ème</sup> vitesse	6 <sup>ème</sup> vitesse	7 <sup>ème</sup> vitesse	8 <sup>ème</sup> vitesse	9 <sup>ème</sup> vitesse
1	élément en caoutchouc reliant les volants 1 et 2	98,039								
2	Portion d'arbre reliant les volant 2 et 3	117,9486								
3	Portion d'arbre reliant les volant 3 et 4	128,8515								
4	Portion d'arbre reliant les volant 4 et 5	128,8515								
5	Portion d'arbre reliant les volants 5 et 6	128,8515								
6	Portion d'arbre reliant les volants 6 et 7	207,2071								
7	Portion d'arbre reliant les volants 7 et 8	19,713								
8	Portion d'arbre reliant les volants 8 et 9	8,380	14,556	13,533	12,943	8,865	16,085	14,846	14,138	5,494
9	Portion d'arbre reliant les volants 9 et 10	0,274	0,590	1,148	1,935	3,526	7,586	14,746	24,861	0,180
10	Portion d'arbre reliant les volants 10 et 11	0,171	0,368	0,716	1,207	2,199	4,730	9,195	15,502	0,112
11	élément en caoutchouc reliant les volants 11 et 12	0,674	1,450	2,818	4,752	8,659	18,627	36,208	61,046	0,441
12	Portion d'arbre reliant les volant 11 et 13	0,001	0,001	0,001	0,001	0,01	0,03	0,001	0,08	0,0006
13	Portion d'arbre reliant les volants 11 et 14	0,001	0,001	0,001	0,001	0,01	0,03	0,001	0,08	0,0006

- Resultats -

Amplitude relative a l'harmonique du couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres

Amplitude \ Harmonique	1/2	1	3/2	2	5/2	3
Ap [N.m]	233,5968	257,1856	243,494	208,276	174,811	141,856

Amplitude \ Harmonique	7/2	4	9/2	5	11/2	6
Ap [N.m]	112,527	87,421	68,102	53,974	43,764	34,939

Amplitude \ Harmonique	13/2	7	15/2	8	17/2	9
Ap [N.m]	261,888	206,952	166,146	138,063	105,618	82,715

Amplitude \ Harmonique	19/2	10	21/2	11	23/2	12
Ap [N.m]	59,640	43,927	35,795	28,523	24,119	21,085

Amplitude relative à l'harmonique du couple moteur dû aux forces d'inertie

Amplitude \ Harmonique	1/2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
bp [N.m]	0,000	3,729	0,000	26,148	0,000	11,187	0,000	2,127	0,000	-

NB : - les amplitudes Ap ont été calculées à l'aide de l'équation avec

$$S = 78,51 \text{ cm}^2$$

$$P_{mi} = 8,46 \text{ bar}$$

$$r = 1 \text{ cm}$$

les amplitudes  $b_p$  ont été calculées à l'aide de l'expression

avec

$$m_{alt} = 1,4575 \text{ [kg]}$$

$$r = 0,060 \text{ [m]}$$

$$L = 0,21 \text{ [m]}$$

$$\omega = 100 \text{ [rd/s]}$$

## CONCLUSION

Cette étude a permis de déterminer 3 choses

Premièrement : L'approximation de l'allure des coefficients harmonique  $C_k$  et les phases initiales  $\delta_k$  qui sont des paramètres caractéristiques pour la détermination des différentes harmoniques du couple moteur dû à la pression des gaz dans les cylindres avec leurs amplitudes correspondantes. La première partie du programme qui exécute l'ajustement, nous donne des résultats satisfaisant du point de vu de la précision.

Deuxièmement : L'évaluation de la variation du couple moteur dû aux forces d'inertie et la détermination des amplitudes causées par l'inertie des masses en mouvement alternatives.

Troisièmement : la détermination des différents paramètres (moment d'inertie - rigidité torsionnelle - coefficient d'amortissement) de la chaîne cinématique, qui pourront être utilisés dans l'étude théorique des vibrations de torsions de la chaîne de transmission conformément au modèle équivalent établi.

Après un bref aperçu des problèmes posés par la fabrication des véhicules industriels et vu les incidents enregistrés lors de leur exploitation, il serait souhaitable de prévoir une suite au sujet, qui se basera sur l'étude des résonances qui indique les fréquences d'excitations générants les charges dynamiques les plus importantes et l'étude des modes de vibration qui révélerons la position des masses les plus sensibles aux perturbations rencontrées au cours de la transmission.

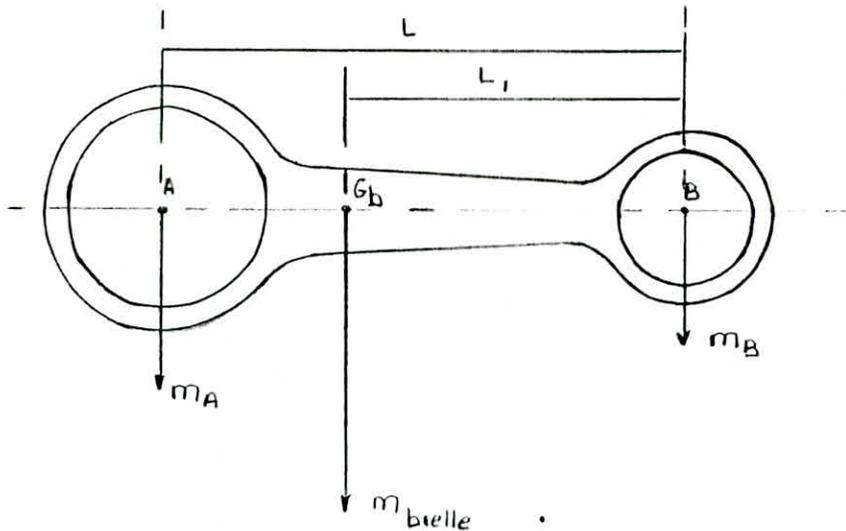
ANNEXE

# I. calcul de la masse alternative

## - Methode numerique

On determine par pesée la masse de pied de bielle qui correspond à la masse alternative  $m_B$

On verifie que  $m_A + m_B = m_{\text{bielle}}$ , puis par calcul on determine la position du centre de gravité de la bielle.



$$m_A \cdot L = m_{\text{bielle}} \cdot L_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = L \frac{m_A}{m_{\text{bielle}}}$$

## - Methode theorique

Pour decomposer la bielle en deux parties

- Une partie en mouvement alternatif attachée au point  $B$  de masse  $m_B$
- Une partie en mouvement rotatif au point  $A$  de masse  $m_A$

Il faut respecter trois conditions :

1) La masse doit être conservée :

$$m_{\text{bielle}} = m_A + m_B$$

2) La position du centre de gravité doit être conservé

$$m_A(L-L_1) = m_B L_1$$

3) Le moment d'inertie par rapport au centre de gravité doit être conservé.

$$C = m_A(L-L_1)^2 + m_B L_1^2$$

## II - Calcul des différents rapports de réduction

Boite de vitesses

les rapports de réduction de la boîte de vitesses sont calculés en fonction du nombre de dents

$$i^2 = \left(\frac{z}{z'}\right)^2$$

tel qu'on aura :

$$i_1^2 = \left(\frac{26}{29}\right)^2 = 0.8038049$$

$$i_2^2 = \left(\frac{42}{29}\right)^2 = 2.0975047$$

$$i_3^2 = \left(\frac{24}{30}\right)^2 = 0.64$$

$$i_4^2 = \left(\frac{18}{33}\right)^2 = 0.2975206$$

$$i_5^2 = \left(\frac{15}{21}\right)^2 \left(\frac{21}{34}\right)^2 = (0.510204)(0.3814818)$$

$$i_6^2 = \text{---} = 1^2 = 1 \text{ (coulisseau D - arbre de sortie)}$$

$$i_7^2 = \text{---} = (0.27)^2 = 0.0729 \text{ (porte satellite - arbre de sortie)}$$

Pour les rapports de réduction sortie boîte de vitesse on aura

Première vitesse  $J_1 = i_1^2 \cdot i_4^2 \cdot i_7^2 = 0,01743$

Deuxième vitesse  $J_2 = i_1^2 \cdot i_3^2 \cdot i_7^2 = 0,03750$

Troisième vitesse  $J_3 = i_7^2 = 0,07290$

Quatrième vitesse  $J_4 = i_1^2 \cdot i_2^2 \cdot i_7^2 = 0,1229$

Cinquième vitesse  $J_5 = i_1^2 \cdot i_4^2 \cdot i_6^2 = 0,2391$

sixième vitesse  $J_6 = i_1^2 \cdot i_3^2 \cdot i_6^2 = 0,5144$

septième vitesse  $J_7 = i_6^2 = 1$

Huitième vitesse  $J_8 = i_1^2 \cdot i_4^2 \cdot i_6^2 = 1,6858$

Nouvième vitesse  $J_9 = i_1^2 \cdot i_5^2 \cdot i_7^2 = 0,0114$

### - Pont central

La réduction du pont central est constante  $\eta_p = 9/41$ , elle est due au couple : pignon d'attaque - couronne

#### Rapports de réduction sortie pont

Première vitesse  $P_1^2 = J_1 \cdot \eta_p = 0,843 \cdot 10^{-3}$

Deuxième vitesse  $P_2^2 = J_2 \cdot \eta_p = 1,807 \cdot 10^{-3}$

Troisième vitesse  $P_3^2 = J_3 \cdot \eta_p = 3,512 \cdot 10^{-3}$

Quatrième vitesse  $P_4^2 = J_4 \cdot \eta_p = 5,922 \cdot 10^{-3}$

Cinquième vitesse  $P_5^2 = J_5 \cdot \eta_p = 11,522 \cdot 10^{-3}$

Sixième vitesse  $P_6^2 = J_6 \cdot \eta_p = 24,788 \cdot 10^{-3}$

Septième vitesse  $P_7^2 = J_7 \cdot \eta_p = 48,105 \cdot 10^{-3}$

Huitième vitesse  $P_8^2 = J_8 \cdot \eta_p = 81,236 \cdot 10^{-3}$

Nouvième vitesse  $P_9^2 = J_9 \cdot \eta_p = 0,549 \cdot 10^{-3}$

### - Roues motrices

La réduction du reducteur roues est constante  $n_r = 1/2$ , donc la réduction totale à la sortie des roues est le produit de la réduction sortie pont par la réduction au carré du reducteur roues.

#### Rapports de réduction sortie roues

Première vitesse  $r_1 = P_1^2 \cdot n_r = 0,210 \cdot 10^{-3}$

Deuxième vitesse  $r_2 = P_2^2 \cdot n_r = 0,451 \cdot 10^{-3}$

Troisième vitesse  $r_3 = P_3^2 \cdot n_r = 0,878 \cdot 10^{-3}$

### III Moments d'inertie des différents éléments de la boîte de vitesses.

Pour la détermination du moment d'inertie des différents éléments de la boîte de vitesses, on utilise la méthode classique qui consiste en une décomposition de l'élément en géométries simples.

Les différents pignons et coulisseaux sont décomposés en petits éléments cylindriques de diamètre intérieur et extérieur respectivement  $D_i$ ,  $D_e$ , ainsi pour chaque élément (pignon ou coulisseau) on aura :  $[kg.m^4]$

avec

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \pi e_i}{32} (D_e^4 - D_i^4)$$

$n$  : nombre des petits éléments.

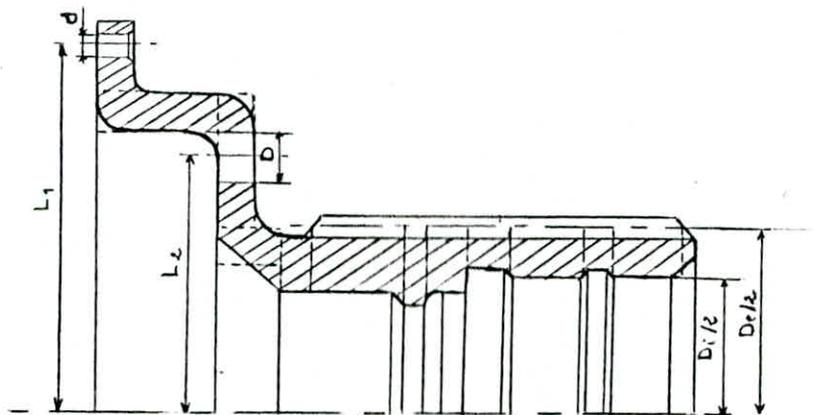
Les arbres (secondaire - de commande - principal - de sortie) sont assimilés à des éléments cylindriques de diamètre  $D$ , tel que le moment d'inertie de chacun d'eux aura comme expression :  $[kg.m^4]$

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i \pi e_i}{32} D^4$$

Le porte satellite et le porte couronne ont une forme assez complexe pour cela on expliquera la décomposition à travers un schéma.

Porte couronne  
(demi-coupe)

Fig: (3.1)



selon la décomposition faite le moment d'inertie du porte couronne sera égale à la somme de tous les moments d'inertie des cylindres de diamètre intérieur et extérieur respectivement  $D_e$ ,  $D_i$  retranchée

de la somme des moments d'inertie des cylindres de diamètres  $D$  et  $d$  correspondants aux différents trous (figure: (3.1)).

D'où on en déduit l'expression du moment d'inertie du porte couronne [kg.m<sup>2</sup>]

$$I = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\rho_i \pi e_i}{32} (D_{e_i}^4 - D_{i_i}^4) - \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\rho_i \pi e_i}{4} d_i^2 \left( \frac{d_i^2}{8} + L_i^2 \right) - \sum_{i=1}^{n_3} \frac{\rho_i \pi e_i}{4} D_i^2 \left( \frac{D_i^2}{8} + L_i^2 \right)$$

Porte satellite

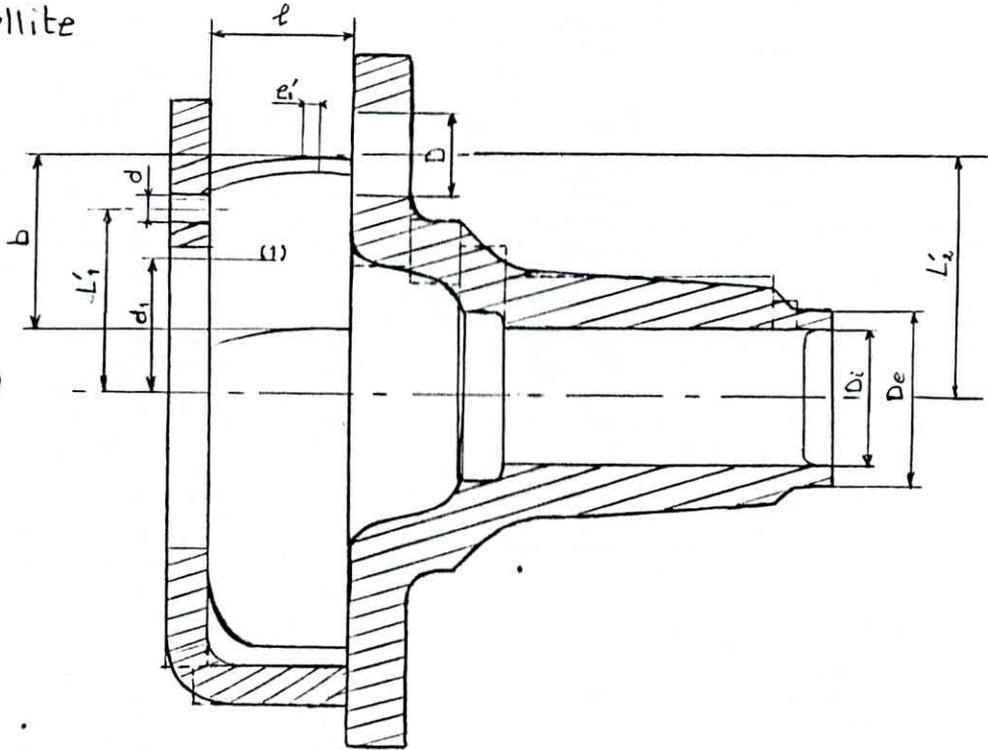


Fig: (3.2)

Selon la décomposition faite, le moment d'inertie du porte satellite sera égale à la somme de tous les moments d'inertie des cylindres de diamètres intérieur et extérieur respectivement  $D_i, D_e$  à laquelle on lui retranche la somme des moments d'inertie des cylindres de diamètres  $D$  et  $d$  correspondants aux différents trous. A l'ensemble de ces calculs vient s'ajouter la somme des moments d'inertie des différentes plaques rectangulaires (1) (voir figure: (3.2)).

D'où on en déduit l'expression du moment d'inertie du porte satellite [kg.m<sup>2</sup>]

$$I = \sum_{i=1}^{J_1} \frac{\rho_i \pi e_i}{32} (D_{e_i}^4 - D_{i_i}^4) + \sum_{i=1}^{J_2} \frac{\rho_i e_i'}{12} [e_i^3 b_i + b_i^3 e_i + e_i b_i \cdot 12 d_i^2] - \sum_{i=1}^{J_3} \frac{\rho_i \pi e_i}{4} d_i^2 \left( \frac{d_i^2}{8} + L_i^2 \right) - \sum_{i=1}^{J_4} \frac{\rho_i \pi e_i}{4} D_i^2 \left( \frac{D_i^2}{8} + L_i^2 \right)$$

avec

$e$ : [m]: l'épaisseur du cylindre considéré.

$\rho$ : [kg/m<sup>3</sup>]: masse volumique du matériau

$n, n_1, n_2, n_3, J_1, J_2, J_3, J_4$ : nombre d'éléments à sommés

$L_1, L_2, L'_1, L'_2$  [m]: distances séparants les différents axes par rapport à l'axe du vilebrequin.

$l, b$  [m]: respectivement longueur et largeur de la plaque rectangulaire

On récapitule l'ensemble des valeurs dans les tableaux suivants :

Tableau 1

Moment d'inertie et rigidité torsionnelle des différents éléments de la boîte de vitesses		
Designation	Moment d'inertie I en kg.m <sup>2</sup>	rigidité torsionnelle c en N.m / rad
I ar. cd / C1	1085.10 <sup>-5</sup>	1788154
I ar. sed / C2	3016.10 <sup>-5</sup>	1943582
I ar. sor / C3	290.10 <sup>-5</sup>	1716149
I ar. pr / C4	3419.10 <sup>-5</sup>	2511238
I cou A,B / C5	490.10 <sup>-5</sup>	1579991
I cou D / C6	52946.10 <sup>-5</sup>	517647
I sat / C7	84,66.10 <sup>-5</sup>	5505759
I pr-sat / C8	3783.10 <sup>-5</sup>	2272851
I cour / C9	15533.10 <sup>-5</sup>	523818
I pr-cour / C10	7337.10 <sup>-5</sup>	17570987
I axe / C11	2115.10 <sup>-5</sup>	607615

Moments d'inertie des differents pignons intervenant dans les calculs [ $\text{kg.m}^2$ ]

Pignons	Moment d'inertie
$P_7$	$3316.10^{-6}$
$P_8$	$8739.10^{-6}$
$P_9$	$17877.10^{-6}$
$P_{10}$	$18267.10^{-6}$
$P_{11}$	$1923.10^{-6}$

# BIBLIOGRAPHIE

- 01 Vibrations Mecaniques  
J. P. DEN HARTOG  
Dund Paris 1960
- 02 Etude des Vibrations de Torsion  
du Groupe Motopropulseur des camions  
SNVI - Sonacome.  
Memoir de Magister  
Présenté en option construction  
Mecanique par: Mohamed  
BOUKABACHE
- 03 Livre de référence dans la construction  
mecanique tome 3  
Macheghiz - Moscou 1969
- 04 kroutilnie kolebania v dizelnikh  
oustanovkakh  
Voenmorizdat - Moscou 1940.
- 05 Théory of vibration with applications  
Englewood cliffs  
New - Jersey 1972  
WILLIAM . T
- 06 Presmiatane ikinstrouirane  
na machinni elementi  
Sofia - 1972  
HRISTOV. D

