

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique



Département d'Automatique
Laboratoire de Recherche en Automatique

Mémoire pour l'obtention du diplôme de
Master en Automatique

Intitulé

Modélisation et commande d'un robot mobile à 4 roues

Présenté par
Abdelhakim DEBIB

Sous la direction de **Mr L.ABDELOUEL**
Soutenu publiquement le 26 juin 2016

Membres du Jury

Président : **Mr M.Berkouk**, Professeur à l'ENP
Rapporteurs : **Mr L.ABDELOUEL**, Enseignant chercheur à l'ENP
Examineur : **Mr R.Illoul**, Maître de conférence classe A à l'ENP

ENP 2016

Laboratoire de Commande de Processus (LCP) - Ecole Nationale Polytechnique (ENP)
10, Avenue des Frères Oudek, Hassen Badi, BP. 182, 16200 El Harrach, Alger, Algérie

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Ecole Nationale Polytechnique



Département d'Automatique
Laboratoire de Recherche en Automatique

Mémoire pour l'obtention du diplôme de
Master en Automatique

Intitulé

Modélisation et commande d'un robot mobile à 4 roues

Présenté par
Abdelhakim DEBIB

Sous la direction de **Mr L.ABDELOUEL**
Soutenu publiquement le 26 juin 2016

Membres du Jury

Président : **Mr M.Berkouk**, Professeur à l'ENP
Rapporteurs : **Mr L.ABDELOUEL**, Enseignant chercheur à l'ENP
Examineur : **Mr R.Illoul**, Maître de conférence classe A à l'ENP

ENP 2016

Laboratoire de Commande de Processus (LCP) - Ecole Nationale Polytechnique (ENP)
10, Avenue des Frères Oudek, Hassen Badi, BP. 182, 16200 El Harrach, Alger, Algérie

ملخص

يتمثل هذا العمل في النمذجة والتحكم لروبوت متحرك ذو 4 عجلات من نوع تفاضلي. بعد الصياغة الرياضية لنموذج يجسد ديناميكية هذا الروبوت، تم تنفيذ استراتيجية التحكم PID وكذلك بالنسبة لاستراتيجية التحكم الانزلاقي وذلك باستعمال بيئة ماتلاب.

كلمات مفتاحية: الروبوت المتحرك، ماتلاب، نمذجة، تحكم PID، التحكم الانزلاقي، الروبوت بعجلات، التفاضلية

Abstract

This work consists of the modeling and control of a mobile robot with differential types wheels. After developing a mathematical model governing the behavior, two control strategies robot was synthesized, one based on a PID controller and another control by sliding mode, after simulation test Matlab were realized in order to found the behavior of the system to synthesized control laws.

Keywords: mobile robot, MATLAB, modeling, PID control, sliding control, wheeled robot, differential

Résumé

Ce travail consiste à la modélisation et la commande d'un robot mobile à 4 roues types différentiel. Après avoir fait le développement mathématique d'un model régissant le comportement du robot deux stratégies de commande ont été synthétisé une première basé sur un régulateur PID et une autre commande par mode de glissement, après des tests de simulation sous l'environnement Matlab ont été réalisé pour pouvoir jugé le comportement du système face aux lois de commande synthétisé.

Mots clés: robot mobile, MATLAB, modélisation, commande PID, commande par mode de glissement, robot à roues, différentiel.

Dédicace

Je dédie ce travail à mes très chers parents. Que الله vous protège et vous garde pour moi et pour la famille.

Ma mère, qui a œuvré pour ma réussite, de par son amour, son soutien, tous les sacrifices consentis et ses précieux conseils, pour toute son assistance et sa présence dans ma vie, reçois à travers ce travail aussi modeste soit-il, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon père, qui peut être fier et trouver ici le résultat de longues années de sacrifices et de privations pour m'aider à avancer dans la vie. Puisse Dieu faire en sorte que ce travail porte son fruit ; Merci pour les valeurs nobles, l'éducation et le soutien permanent venu de toi.

À mes très chères sœurs Hakima et Naila,

À mon très cher petit frère Dinel,

À toute la famille DEBIB et KHEL FAT,

À mes amis et frères Mohammed, Abderrahmane, Djamel, Oussama, Boka, Anes, Amine, Oussama, Ahmed, Ziyad, Hakkou et tous mes amis de Jijel et de l'ENP,

À tous ceux que j'aime et qui m'aiment,

Abdelhakim,

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions الله, le tout puissant de nous avoir accordé le savoir, le droit chemin, l'opportunité de poursuivre nos études et la force pour réaliser ce travail.

Nous remercions nos parents, qui nous ont soutenus tout au long de nos études.

Nos remerciements les plus vifs s'adressent particulièrement à Monsieur L.ABDELOUEL enseignant à l'école nationale polytechnique pour nous avoir encadrés dans ce travail et éclairés par ses précieux conseils.

Nous remercions aussi, les membres du jury qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Notre sincère remerciement et notre profonde gratitude vont également à toute l'équipe de l'Ecole Nationale Polytechnique et de l'école préparatoire au sciences et techniques Annaba pour les connaissances et le savoir-faire qu'ils nous ont transmis pendant les cinq années de notre formation.

Enfin, nous remercions chaleureusement nos amies pour leurs soutiens et leurs encouragements et tous les gens ayant participé de près ou de loin pour l'aboutissement de ce mémoire.

Liste des matières

RESUME	
DEDICACE	
REMERCIEMENTS	
LISTE DES MATIERES	
LISTE DES FIGURES	
INTRODUCTION GENERALE	7
CHAPITRE 1	9
1.1. INTRODUCTION	9
1.2. MODELISATION DU ROBOT MOBILE	10
1.2.1. MODELE CINEMATIQUE	11
1.2.2. LES DEFERENTES FORCES QUI AGISSENT SUR LE SYSTEME	13
1.2.3. LE MODELE DYNAMIQUE	15
1.3. CONCLUSION	23
CHAPITRE 2	24
2.1. INTRODUCTION	24
2.2. SYNTHESE DE LOIS DE COMMANDE	25
2.2.1. COMMANDE PID	25
2.2.1.1. <i>P, Proportionnel</i>	25
2.2.1.2. <i>I, intégral</i>	26
2.2.1.3. <i>D, Dérivé</i>	27
2.2.1.4. <i>Synthèse de la loi commande PID</i>	28
2.2.1.5. <i>Les simulations de la commande PID</i>	29
2.2.1.6. <i>Commentaire</i>	31
2.2.2. COMMANDE PAR MODE GLISSANT	31
2.2.2.1. <i>Synthèse de la loi de commande par mode de glissant</i>	34
2.2.2.2. <i>Simulation de la commande par mode de glissant</i>	35
2.2.2.3. <i>Commentaire</i>	37
2.3. CONCLUSION	38
CONCLUSION GENERALE	39
BIBLIOGRAPHIES	40

Liste des figures

FIGURE 1 : ROBOT MOBILE A 4 ROUES TYPE DIFFERENTIEL	7
FIGURE 2 : POSITIONNEMENT DU ROBOT MOBILE PAR RAPPORT AU REPERE FIXE	10
FIGURE 3 : VITESSE DU ROBOT MOBILE PAR RAPPORT AU REPERE FIXE	11
FIGURE 4 : REPRESENTATION DU CENTRE INSTANTANE DE ROTATION DU ROBOT MOBILE	12
FIGURE 5 : REPRESENTATION DES VITESSES DE CHAQUE ROUE ET CELLE DU ROBOT.....	13
FIGURE 6 : REPRESENTATION DES DIFFERENTES FORCES QUI AGISSENT SUR UNE DES ROUES DU ROBOT MOBILE.	14
FIGURE 7 : REPRESENTATION DES DIFFERENTES FORCES QUI AGISSENT SUR LE SYSTEME.....	16
FIGURE 8 : COMMANDE PAR REGULATEUR PID.....	25
FIGURE 9 : EFFET DE L’ACTION PROPORTIONNEL SUR LA REPONSE DU SYSTEME	26
FIGURE 10 : EFFET DE L’ACTION INTEGRALE SUR LA REPONSE DU SYSTEME	27
FIGURE 11 : EFFET DE L’ACTION DERIVE SUR LA REPONSE DU SYSTEME	28
FIGURE 12 : LA TRAJECTOIRE REELLE (ROUGE) ET LA TRAJECTOIRE DESIRE (BLEU), LA POSITION Y EN FONCTION DE X.....	29
FIGURE 13 : A GAUCHE : LA TRAJECTOIRE SELON L’AXE X, A DROITE ERREUR DE SUIVI SELON X.....	30
FIGURE 15 : A GAUCHE : LA TRAJECTOIRE SELON L’AXE Y, A DROITE ERREUR DE SUIVI SELON Y.....	30
FIGURE 14 : L’ANGLE D’ORIENTATION θ DU ROBOT PAR RAPPORT AU REPERE FIXE.....	30
FIGURE 16 : LES DEUX COUPLES MOTEUR CELUI DE GAUCHE ET CELUI DE DROITE.	31
FIGURE 17 : TRAJECTOIRE REELLE (ROUGE) DU ROBOT ET TRAJECTOIRE DE REFERENCE (BLEU), Z2 EN FONCTION DE Z1	36
FIGURE 18 A GAUCHE : LA TRAJECTOIRE SELON L’AXE Z1, A DROITE ERREUR DE SUIVI SELON Z1.....	36
FIGURE 19 : A GAUCHE : LA TRAJECTOIRE SELON L’AXE Z2, A DROITE ERREUR DE SUIVI SELON Z2	37
FIGURE 20 : LES DEUX COMMANDE R1ET R2	37

Introduction générale

De manière générale, on regroupe sous l'appellation robots mobiles l'ensemble des robots à base mobile, par opposition notamment aux robots manipulateurs. L'usage veut néanmoins que l'on désigne le plus souvent par ce terme les robots mobiles à roues. Les autres robots mobiles sont en effet le plus souvent désignés par leur type de locomotion, qu'ils soient marcheurs, sous-marins ou aériens. On peut estimer que les robots mobiles à roues constituent le gros des robots mobiles. Historiquement, leur étude est venue assez tôt, suivant celle des robots manipulateurs, au milieu des années 70. Leur faible complexité en a fait de bons premiers sujets d'étude pour les roboticiens intéressés par les systèmes autonomes. Cependant, malgré leur simplicité apparente (mécanismes plans, à actionneurs linéaires), ces systèmes ont soulevé un grand nombre de problèmes difficiles. Nombre de ceux-ci ne sont d'ailleurs toujours pas résolus.

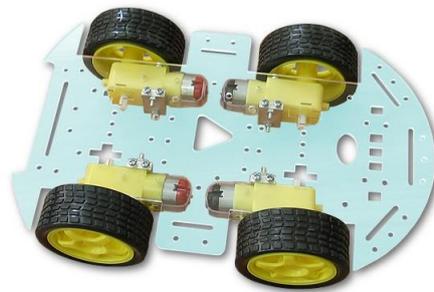


Figure 1 : robot mobile à 4 roues type différentiel

En général, les robots mobiles à roues ont des structures à locomotion différentielle. La figure montre une structure type de robot mobile à commande différentielle où le déplacement est assuré par le biais de 4 moteurs d'entraînement indépendants, chacun d'eux est lié à une roue motrice.

En ce qui concerne la commande des moteurs, cette indépendance permet au robot mobile de changer de direction en jouant uniquement sur les vitesses des deux coté (gauche et droite).

Introduction générale

Dans ce travail nous intéressent en premier lieu (chapitre1) à la modélisation d'un robot mobile à 4 roues types différentiel, en présentant tous le développement mathématique ainsi que la représentation des différentes forces qui régissent la dynamique de ce système et en deuxième lieu (chapitre 2) nous ferons la synthèse de deux lois de commande un première type PID et la deuxième type commande par mode glissant afin de paramètre au robot mobile de faire un suivi de trajectoire bien déterminée.

Chapitre 1

Modélisation d'un robot mobile à 4 roues

1.1. Introduction

Dans ce chapitre nous allons faire le développement d'un modèle mathématique d'un robot mobile à quatre roues type différentiel nous représenterons les différentes forces qui agissent sur le système et le système sera présenté d'une manière systématique. Le robot est considéré comme un sous-système constitué par deux niveaux un niveau cinématique et un autre dynamique, cette modélisation sera utilisée pour faire une synthèse de plusieurs lois de commande par la suite.

1.2. Modélisation du robot mobile

La synthèse de commande d'un système robotique donné, nécessite généralement le modèle du système. La méthodologie de modélisation doit s'effectuer d'une manière rigoureuse, afin d'obtenir le modèle le plus proche du système réel tout cela pour garantir les performances voulus en termes de précision, de rapidité et de robustesse et en particulier le suivi de trajectoire.

D'abord nous définissons un repère fixe $R(O, X, Y)$ et un autre repère $R(o, x, y)$ mobile attaché au robot, l'origine de ce dernier et le centre de masse G du système se confondent.

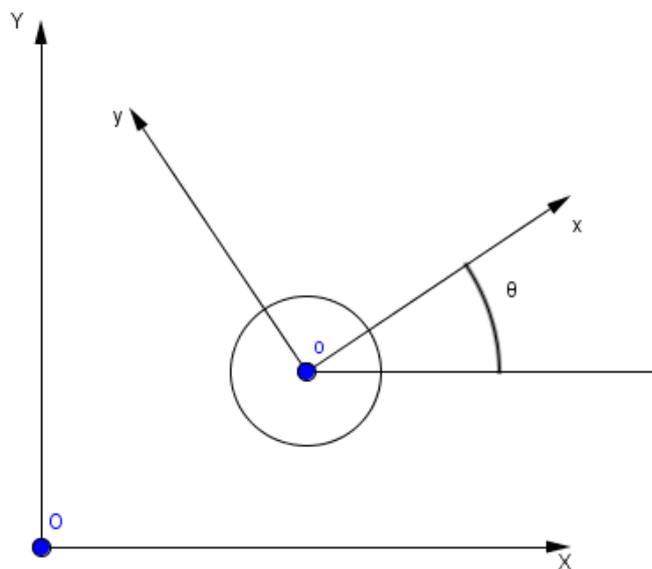


Figure 2 : positionnement du robot mobile par rapport au repère fixe

La configuration d'un système mécanique est connue quand la position de tous ses points dans un repère donné est connue, dans notre cas, la configuration du robot mobile est définie par le vecteur de position :

$$q = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \theta \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Tel que :

X : représente l'abscisse du centre de masse du robot dans le repère fixe $R(O, X, Y)$.

Y : représente l'ordonnée du centre de masse du robot dans le repère fixe $R(O, X, Y)$.

θ : représente l'angle d'orientation du robot par rapport au repère fixe $R(O, X, Y)$.

1.2.1. Modèle cinématique

Ensuite nous définissons le modèle cinématique directe qui lie les vitesses du robot dans le repère fixe avec ceux du repère fixe :

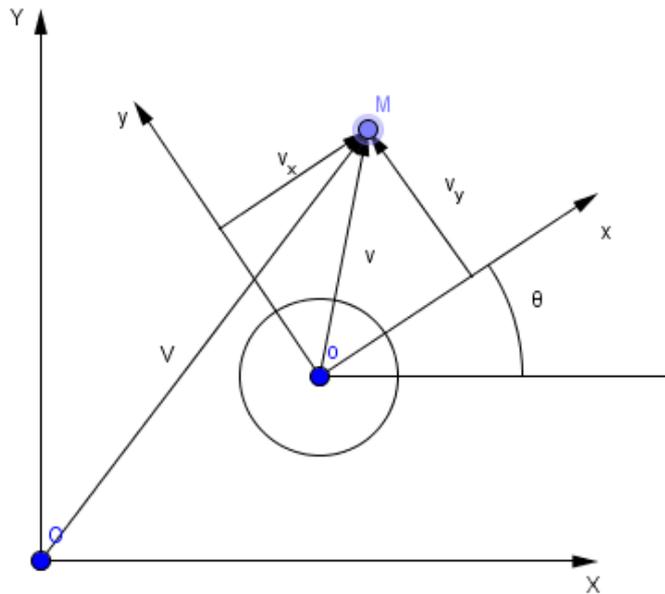


Figure 3 : vitesse du robot mobile par rapport au repère fixe

$$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \cos\theta - v_y \sin\theta \\ v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \cos\theta - \dot{y} \sin\theta \\ \dot{x} \sin\theta + \dot{y} \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = R(\theta) \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Tel que :

\dot{X}, V_X : vitesse selon l'axe X du robot mobile par rapport au repère fixe $R(O, X, Y)$.

\dot{Y}, V_Y : vitesse selon l'axe Y du robot mobile par rapport au repère fixe $R(O, X, Y)$.

\dot{x}, v_x : vitesse selon l'axe x du robot mobile par rapport au repère mobile $R(o, x, y)$.

\dot{y}, v_y : vitesse selon l'axe y du robot mobile par rapport au repère mobile $R(o, x, y)$

Soit le point I qui représente le centre instantané de rotation du robot mobile et dont les coordonnées sont reliées aux vitesses dans le repère mobile comme suit :

$$\begin{bmatrix} x_I \\ y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{y}/\dot{\theta} \\ -\dot{x}/\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

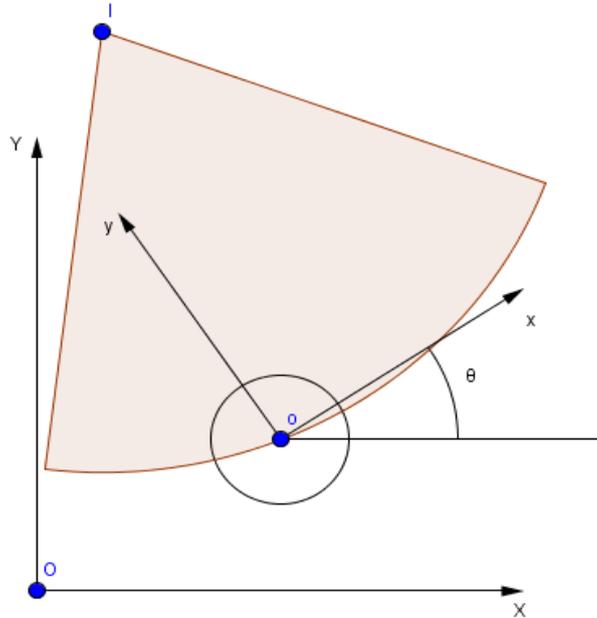


Figure 4 : représentation du centre instantané de rotation du robot mobile

De plus il faut noter que la vitesse longitudinal \dot{x}_i et la vitesse latérale \dot{y}_i de chaque roue est lié aux vitesses du robot dans le repère mobile par les relations suivant :

Ou bien sous forme dérivation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_4 = \dot{x} - c \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x} + c \dot{\theta} \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y} + a \dot{\theta} \\ \dot{y}_3 = \dot{y}_4 = \dot{y} - b \dot{\theta} \end{cases} \quad (1.6)$$

De plus il faut noter que Les virages que notre robot peut effectuer autour du contre instantané de rotation I afin de ne pas perdre le control et dérapier sont limités par l'inégalité suivante :

$$\left| -\frac{\dot{y}}{\dot{\theta}} \right| < a \quad (1.7)$$

1.2.2. Les différentes forces qui agissent sur le système

Dans cette partie nous définirons et représenterons les différentes forces qui agissent sur le robot mobile à quatre roue type différentiels, ces principales forces et leurs effets sur le système sont représentés sur la figure 1.4.

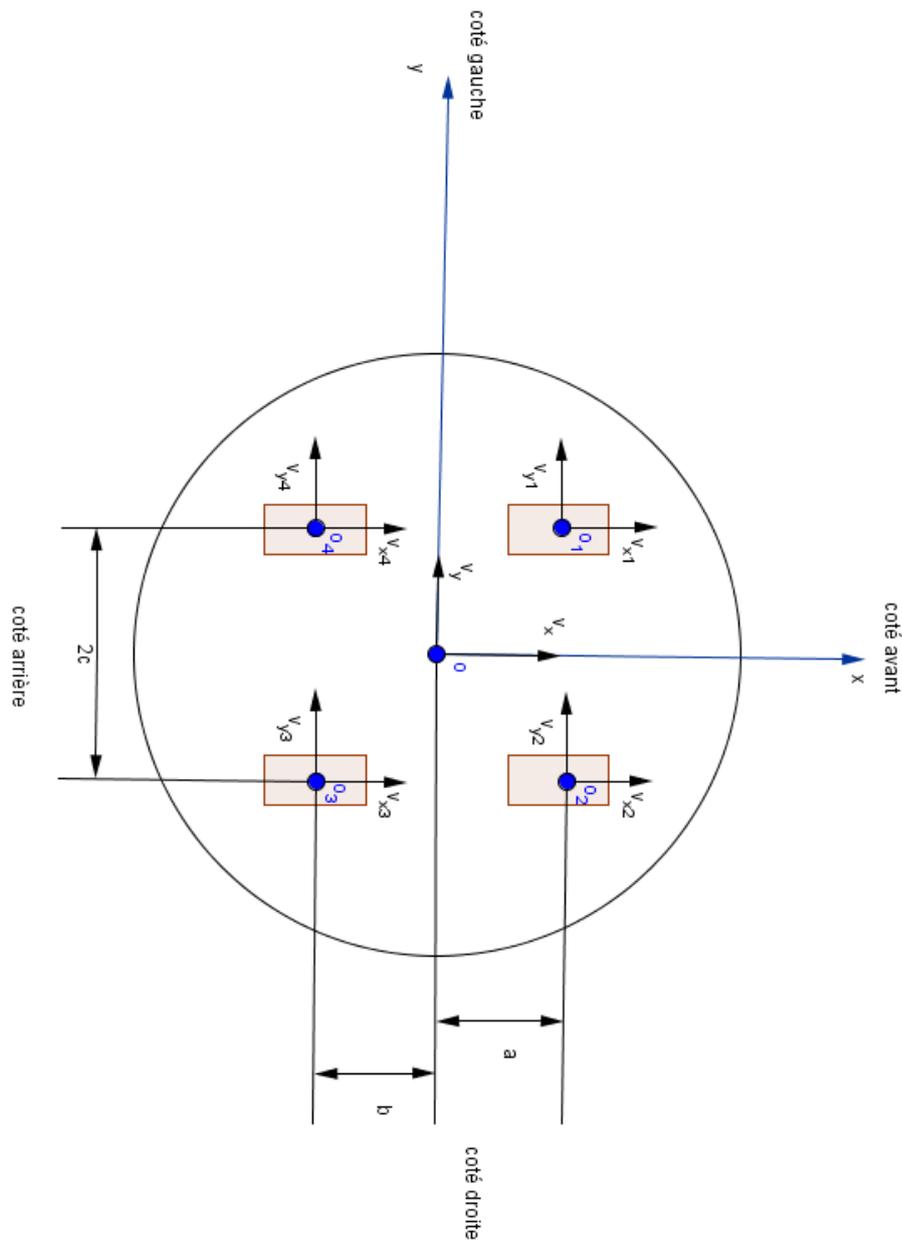


Figure 5 : représentation des vitesses de chaque roue et celle du robot.

Chapitre 1

Nous donnerons par la suite les différentes forces qui régissent le comportement dynamique de notre système :

Tout d'abord nous définissons toutes les forces qui agissent sur chaque roue, ensuite au robot.

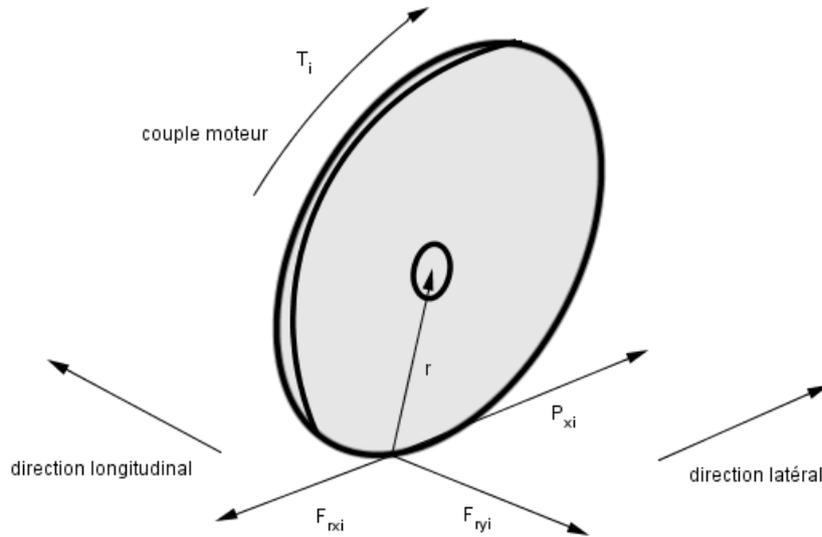


Figure 6 : représentation des différentes forces qui agissent sur une des roues du robot mobile.

Tel que :

τ_i : est le couple moteur de chaque roue.

P_{x_i} : est la force générée par le couple moteur de chaque roue.

F_{rx_i} : est la force de frottement latéral de la roue avec le sol.

F_{ry_i} : est la force de frottement longitudinal de la roue avec le sol.

r : le rayon de la roue.

La force P_{x_i} qui permet de pousser chaque roue et qui est générée par le couple moteur τ_i est défini par :

$$P_{x_i} = \frac{\tau_i}{r} \quad (1.8)$$

Dans le cas des petites vitesses, on peut négliger les frottements due aux parties curvilignes, de plus dans notre cas où le sol est plat et dur on peut considérer que la surface de contact de la

roue avec le sol est rectangulaire donc les expressions de la force de frottement latéral F_{rxi} et la force de frottement longitudinal F_{ryi} est données par :

$$F_{rxi} = f_{rx} F_{ci} \operatorname{sgn}(\dot{x}_i) \quad (1.9)$$

$$F_{ryi} = f_{ry} F_{ci} \operatorname{sgn}(\dot{y}_i) \quad (1.10)$$

Tel que :

F_{ci} est la friction de coulomb et a pour expression :

Pour les roues avant :

$$F_{ci} = \frac{1}{2} \frac{mgb}{a+b} \quad (1.11)$$

Et pour les roues arrière :

$$F_{ci} = \frac{1}{2} \frac{mga}{a+b} \quad (1.12)$$

1.2.3. Le modèle dynamique

Après avoir vu les forces qui agissent sur une roue on peut maintenant pouvoir faire un modèle de notre système représenté par la figure 1.6.

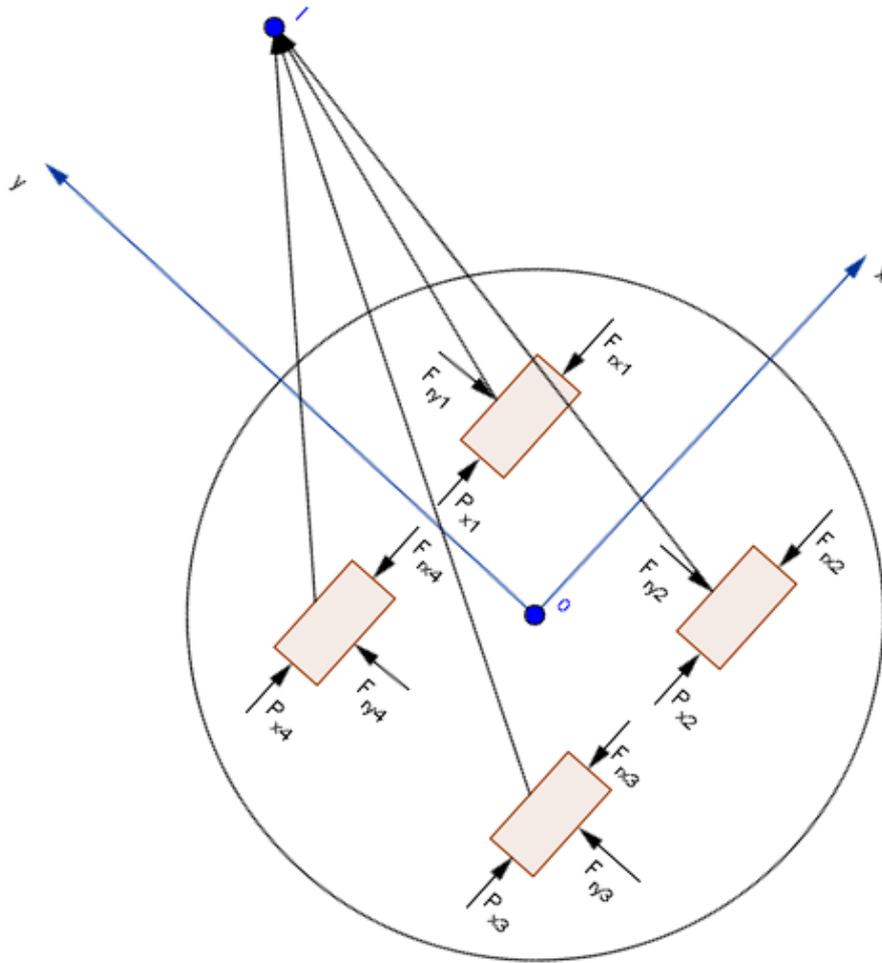


Figure 7 : représentation des différentes forces qui agissent sur le système.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique de translation :

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \quad (1.13)$$

Et celui de la dynamique de translation :

$$I\vec{\alpha} = \sum_i \vec{M}_i \quad (1.14)$$

Selon l'axe x du repère mobile :

$$m\vec{a}_x = \vec{P}_{x1} + \vec{P}_{x2} + \vec{P}_{x3} + \vec{P}_{x4} + \vec{F}_{rx1} + \vec{F}_{rx2} + \vec{F}_{rx3} + \vec{F}_{rx4} \quad (1.15)$$

Nous avons :

$$\vec{P}_{x1} = \vec{P}_{x4} \quad (1.16)$$

$$\vec{P}_{x2} = \vec{P}_{x3} \quad (1.17)$$

Donc après projection :

$$ma_x = 2(P_{x1} + P_{x2}) - (F_{rx1} + F_{rx2} + F_{rx3} + F_{rx4}) \quad (1.18)$$

Selon l'axe y du repère mobile :

$$m\vec{a}_y = \vec{F}_{ry1} + \vec{F}_{ry2} + \vec{F}_{ry3} + \vec{F}_{ry4} \quad (1.19)$$

$$ma_y = -(F_{ry1} + F_{rx2} + F_{rx3} + F_{rx4}) \quad (1.20)$$

Et nous avons pour l'accélération angulaire :

$$I\ddot{\theta} = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 - M_r \quad (1.21)$$

M_r : est le moment de toute les forces de frottement.

M_i : est le moment de la force générée par le couple moteur de chaque roue.

$$I\ddot{\theta} = c(P_{x1} + P_{x2} + P_{x3} + P_{x4}) + c(F_{rx2} + F_{rx3} - F_{rx1} - F_{rx4}) + a(F_{ry1} + F_{ry2}) - b(F_{ry3} + F_{ry4}) \quad (1.22)$$

D'après les équations précédentes on aura :

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r}(\tau_G + \tau_D) - f_{rx}(F_{c1} \text{ sng}(\dot{x}_1) + F_{c2} \text{ sng}(\dot{x}_2) + F_{c3} \text{ sng}(\dot{x}_3) + F_{c4} \text{ sng}(\dot{x}_4)) \quad (1.23)$$

$$m\dot{y} = -f_{ry}(F_{c1} \text{ sng}(\dot{y}_1) + F_{c2} \text{ sng}(\dot{y}_2) + F_{c3} \text{ sng}(\dot{y}_3) + F_{c4} \text{ sng}(\dot{y}_4)) \quad (1.24)$$

$$m\ddot{\theta} = \frac{c}{r}(\tau_G + \tau_D) + cf_{rx}(F_{c2} \text{ sng}(\dot{x}_2) + F_{c3} \text{ sng}(\dot{x}_3) - F_{c1} \text{ sng}(\dot{x}_1) - F_{c4} \text{ sng}(\dot{x}_4)) + f_{ry}(a(F_{c1} \text{ sng}(\dot{y}_1) + F_{c2} \text{ sng}(\dot{y}_2)) - b(F_{c3} \text{ sng}(\dot{y}_3) + F_{c4} \text{ sng}(\dot{y}_4))) \quad (1.25)$$

Tel que :

τ_G : est le couple du côté gauche du robot mobile :

$$\tau_G = 2r(P_{x1}) \quad (1.26)$$

τ_D : est le couple du côté droite du robot mobile :

$$\tau_D = 2r(P_{x2}) \quad (1.27)$$

En remplaçant F_{ci} par sa valeur dans chaque équation :

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r}(\tau_G + \tau_D) - f_{rx}\left(\frac{1}{2}\frac{mgb}{a+b}(sng(\dot{x}_1) + sng(\dot{x}_2)) + \frac{1}{2}\frac{mga}{a+b}(sng(\dot{x}_3) + sng(\dot{x}_4))\right) \quad (1.28)$$

$$m\ddot{y} = -f_{ry}\left(\frac{1}{2}\frac{mgb}{a+b}((sng(\dot{y}_1) + sng(\dot{y}_2)) + \frac{1}{2}\frac{mga}{a+b}((sng(\dot{y}_3) + sng(\dot{y}_4)))\right) \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\theta} = & \frac{c}{r}(\tau_G + \tau_D) \\ & + \frac{cf_{rx}}{2}\left(\frac{mgb}{a+b}(sng(\dot{x}_2) - sng(\dot{x}_1))\right. \\ & \left. + \frac{mga}{a+b}(sng(\dot{x}_3) - sng(\dot{x}_4))\right) \\ & + \frac{f_{ry}}{2}\left(\frac{mgab}{a+b}(sng(\dot{y}_1) + sng(\dot{y}_2))\right. \\ & \left. - \frac{mgab}{a+b}(sng(\dot{y}_3) + sng(\dot{y}_4))\right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

Puisque nous avons :

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_4$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_3$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_2$$

$$\dot{y}_3 = \dot{y}_4$$

Donc :

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r}(\tau_G + \tau_D) - \frac{f_{rx}mg}{2}(sng(\dot{x}_1) + sng(\dot{x}_2)) \quad (1.31)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{f_{ry}mga}{a+b} (b \operatorname{sng}(\dot{y}_1) + a \operatorname{sng}(\dot{y}_3)) \quad (1.32)$$

$$m\ddot{\theta} = \frac{c}{r}(\tau_G + \tau_D) + \frac{cf_{rx}mg}{2} (\operatorname{sng}(\dot{x}_2) - \operatorname{sng}(\dot{x}_1)) + \frac{f_{ry}mgab}{2} \frac{1}{a+b} (\operatorname{sng}(\dot{y}_1) - \operatorname{sng}(\dot{y}_3)) \quad (1.33)$$

En remplaçant les vitesses \dot{x}_i et \dot{y}_i avec leur expression suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_4 = \dot{x} - c \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = \dot{x} + c \dot{\theta} \\ \dot{y}_1 = \dot{y}_2 = \dot{y} + a \dot{\theta} \\ \dot{y}_3 = \dot{y}_4 = \dot{y} - b \dot{\theta} \end{cases}$$

Alors nous aurons la dynamique du robot dans le repère mobile :

$$m\ddot{x} = \frac{1}{r}(\tau_G + \tau_D) - \frac{f_{rx}mg}{2} (\operatorname{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) + \operatorname{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta})) \quad (1.34)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{f_{ry}mg}{a+b} (b \operatorname{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) + a \operatorname{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta})) \quad (1.35)$$

$$I\ddot{\theta} = \frac{c}{r}(\tau_G - \tau_D) + \frac{cf_{rx}mg}{2} (\operatorname{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta}) - \operatorname{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta})) + \frac{f_{ry}mgab}{2} \frac{1}{a+b} (\operatorname{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) - \operatorname{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta})) \quad (1.36)$$

De plus nous avons la relation entre le repère mobile et fixe :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix}$$

Donc le système devient :

$$m\ddot{X} = \frac{1}{r} \cos(\theta)(\tau_G + \tau_D) - \frac{f_{rx}mg}{2} \cos(\theta) (\operatorname{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) + \operatorname{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta})) + \frac{f_{ry}mg}{a+b} \sin(\theta) (b \operatorname{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) + a \operatorname{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta})) \quad (1.37)$$

$$m\dot{Y} = \frac{1}{r} \sin(\theta)(\tau_G + \tau_D) - \frac{f_{rx}mg}{2} \sin(\theta) \left(\text{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) + \text{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta}) \right) - \frac{f_{ry}mg}{a+b} \cos(\theta) \left(b \text{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) + a \text{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta}) \right) \quad (1.38)$$

$$I\ddot{\theta} = \frac{c}{r}(\tau_G - \tau_D) + \frac{cf_{rx}mg}{2} \left(\text{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta}) - \text{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) \right) + \frac{f_{ry}mgab}{2(a+b)} \left(\text{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) - \text{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta}) \right) \quad (1.39)$$

Nous pouvant mettre notre système sous forme matricielle comme suite

$$M \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = F + G \begin{bmatrix} \tau_G \\ \tau_D \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Tel que :

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{f_{rx}mg}{2} \cos(\theta) \left(\text{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) + \text{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta}) \right) + \frac{f_{ry}mg}{a+b} \sin(\theta) \left(b \text{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) + a \text{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta}) \right) \\ -\frac{f_{rx}mg}{2} \sin(\theta) \left(\text{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) + \text{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta}) \right) - \frac{f_{ry}mg}{a+b} \cos(\theta) \left(b \text{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) + a \text{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta}) \right) \\ \frac{cf_{rx}mg}{2} \left(\text{sng}(\dot{x} + c \dot{\theta}) - \text{sng}(\dot{x} - c \dot{\theta}) \right) + \frac{f_{ry}mgab}{2(a+b)} \left(\text{sng}(\dot{y} + a \dot{\theta}) - \text{sng}(\dot{y} - b \dot{\theta}) \right) \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Et :

$$G = \begin{bmatrix} \cos(\theta)/r & \cos(\theta)/r \\ \sin(\theta)/r & \sin(\theta)/r \\ c/r & -c/r \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

De plus nous avons la contrainte qui lie la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à la vitesse \dot{y}

$$\left| -\frac{\dot{y}}{\dot{\theta}} \right| < a$$

Quand le mettre sous forme égalité :

$$\dot{y} + d\dot{\theta} = 0 \quad (1.44)$$

Avec cette contrainte la relation entre le repère fixe et mobile devient :

$$\dot{q} = A v \quad (1.45)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\frac{1}{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

Donc la contrainte peut être exprimé en fonction des coordonnées du repère fixe :

$$-\dot{X} \sin(\theta) + \dot{Y} \cos(\theta) + d\dot{\theta} = 0 \quad (1.47)$$

d : est une constante tel que $0 < d < a$

On introduit cette dernière contrainte dans la modélisation de la dynamique précédente par la méthode de Lagrange et la dynamique de notre système devient :

$$M\ddot{q} = F + G \tau + L^T \lambda \quad (1.48)$$

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

$$L = [-\sin(\theta) \quad \cos(\theta) \quad -d] \quad (1.50)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_G \\ \tau_D \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

λ : est le vecteur multiplicateur de Lagrange.

Pour des raisons de synthèse de lois de commande il plus judicieux d'exprimer l'équation précédente comme suite :

$$\dot{q} = A v \quad (1.52)$$

Après dérivation on aura :

$$\ddot{q} = \dot{A} v + A \dot{v} \quad (1.53)$$

En multipliant l'équation par A^T :

$$A^T M \ddot{q} = A^T F + A^T G \tau + A^T L^T \lambda \quad (1.54)$$

Et en remplaçant \ddot{q} par son expression :

$$A^T M (\dot{A} v + A \dot{v}) = A^T F + A^T G \tau + A^T L^T \lambda \quad (1.55)$$

$$A^T M \dot{A} v + A^T M A \dot{v} = A^T F + A^T G \tau + A^T L^T \lambda \quad (1.56)$$

$$A^T M A \dot{v} = -A^T M \dot{A} v + A^T F + A^T G \tau + A^T L^T \lambda \quad (1.57)$$

Don on aura l'expression suivante :

$$\dot{v} = (A^T M A)^{-1} (-A^T M \dot{A} v + A^T F + A^T G \tau) + (A^T M A)^{-1} A^T L^T \lambda \quad (1.58)$$

On calcule les différent termes de l'expression précédant on trouve :

$$A^T M A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\frac{1}{d} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\frac{1}{d} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$A^T M A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m + \frac{I}{d^2} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

$$(A^T M A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m + \frac{I}{d^2}} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$$(A^T M A)^{-1} A^T L^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m + \frac{I}{d^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ 0 & -\frac{1}{d} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -d \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

$$(A^T M A)^{-1} A^T L^T = \begin{bmatrix} \frac{-\sin(\theta)}{m} & \frac{\cos(\theta)}{m} & \frac{1}{md} \\ \frac{\cos(\theta)}{m + \frac{I}{d^2}} & \frac{\sin(\theta)}{m + \frac{I}{d^2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ -d \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

$$(A^T M A)^{-1} A^T L^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.64)$$

Donc notre modèle devient :

$$\begin{cases} \dot{q} = A v \\ \dot{v} = (A^T M A)^{-1} (-A^T M \dot{A} v + A^T F + A^T G \tau) \end{cases} \quad (1.65)$$

1.3. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de faire la modélisation d'un robot mobile à quatre roues type différentiel, on fait le développement mathématique des différentes forces et contraintes régissant la dynamique de notre système, on a été rigoureux dans notre démarche de modélisation afin d'avoir un modèle mathématique le plus proche du système réel.

Chapitre 2

Commande d'un robot mobile à 4 roues

2.1. Introduction

Après avoir réussi à faire le développement d'un modèle mathématique qui permettra de décrire le comportement dynamique du robot mobile à 4roues type différentiel, on utilisera pour faire la synthèse de lois de commande qui auront pour but de faire suivre au robot mobile des trajectoires bien particulière, on commencera par une commande PID puis on fera quelques transformations qui permettront de faire une autre lois commande (commande par mode glissant) d'une manière plus simple, puis on fera la simulation des différentes lois et on commentera les résultats ainsi obtenu.

2.2. Synthèse de lois de commande

Dans cette partie nous allons faire la synthèse de lois de commande pour un but de faire le suivie de trajectoire.

2.2.1. Commande PID

Le régulateur utilisé dans plus de 90% des asservissements est du type proportionnel-intégrale-dérivée (PID). L'histoire de ces régulateurs remonte au début du vingtième siècle. Les applications du PID sont extrêmement nombreuses et variées. Ce compensateur est utilisé en commande des procédés industriels et des moteurs, dans le monde de l'aéronautique et de l'automobile, en robotique, dans plusieurs appareils courants etc. l'idée de cet organe de contrôle est de modifier intentionnellement la valeur de l'erreur qui subsiste entre la consigne et la mesure effectuer par exemple dans le cos d'un asservissement l'erreur serait :

$$\varepsilon = \Omega_{consigne} - \Omega_{mesure} \quad (2.1)$$

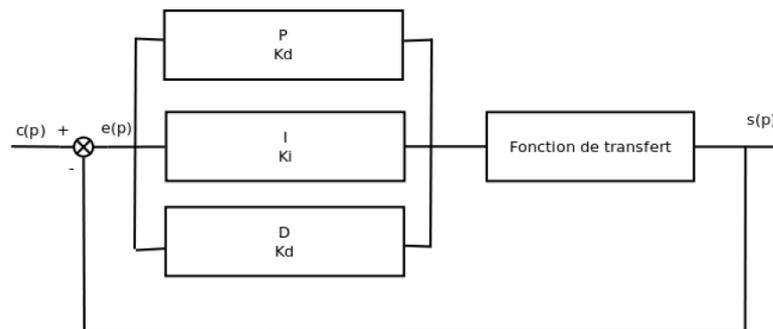


Figure 8 : commande par régulateur PID

2.2.1.1. P, Proportionnel

Dans le cas d'un contrôle proportionnel, l'erreur est virtuellement amplifiée d'un certain gain constant qu'il conviendra de déterminer en fonction du système.

$$consigne(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) \quad (2.2)$$

En faisant la transformation de Laplace :

$$consigne(p) = K_p \cdot \varepsilon(p) \quad (2.3)$$

L'idée étant d'augmenter l'effet de l'erreur sur le système afin que celui-ci réagisse plus rapidement aux changements de consignes. Plus la valeur de K_p est grande, plus la réponse ne

l'est aussi. En revanche, la stabilité du système s'en trouve détériorée et dans le cas d'un K_p démesuré le système peut même diverger et devenir instable.

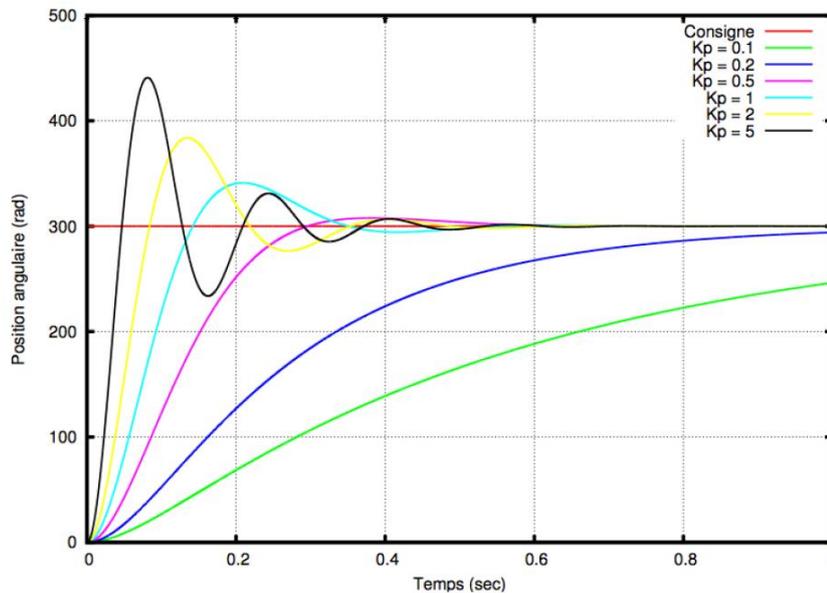


Figure 9 : effet de l'action proportionnel sur la réponse du système

2.2.1.2. I, intégral

Au contrôle proportionnel, nous pouvons ajouter l'intégration de l'erreur. Dans ce cas nous obtenons une régulation PI (proportionnel et intégral). L'erreur entre la consigne et la mesure est ici intégrée par rapport au temps et multipliée par une constante qu'il faudra aussi déterminer en fonction du système.

$$\text{consigne}(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_i \cdot \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

En faisant la transformation de Laplace :

$$\text{consigne}(p) = K_p \cdot \varepsilon(p) + K_i \cdot \frac{\varepsilon(p)}{p} \quad (2.5)$$

Le régulateur intégral devient indispensable lorsque on utilise contrôle proportionnel et qu'il subsiste une erreur statique. Lorsque le système s'approche de sa consigne, l'erreur n'est plus assez grande pour faire avancer le système. Le terme intégral permet ainsi de compenser l'erreur statique et fournit, par conséquent un système plus stable en régime permanent. Plus K_i est élevé, plus l'erreur statique est corrigée.

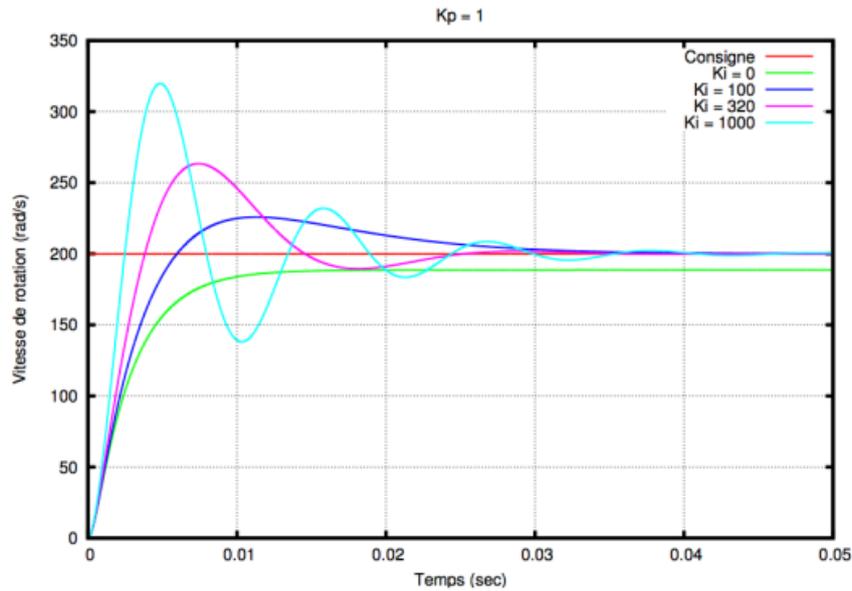


Figure 10 : effet de l'action intégrale sur la réponse du système

2.2.1.3. D, Dérivé

Pour obtenir un contrôle en PID, il nous faut encore rajouter un terme. Celui-ci consiste à dériver l'erreur entre la consigne et la mesure par rapport au temps et multiplier par une constante.

$$\text{consigne}(t) = K_p \cdot \varepsilon(t) + K_i \cdot \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_d \cdot \frac{d}{dt} \varepsilon(t) \quad (2.6)$$

En faisant la transformation de Laplace :

$$\text{consigne}(p) = K_p \cdot \varepsilon(p) + K_i \cdot \frac{\varepsilon(p)}{p} \quad (2.7)$$

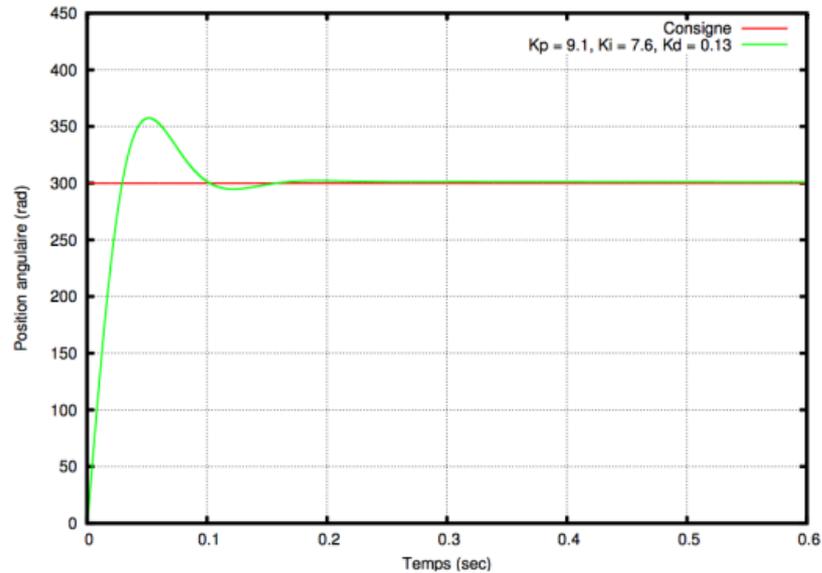


Figure 11 : effet de l'action dérivé sur la réponse du système

L'action dérivé devient très utile par exemple lorsque le contrôle PI amène à un dépassement de la consigne, ce qui n'est pas toujours très souhaitable (exemple d'inversion de polarité dans le cas de moteurs électriques). Le terme dérivé permet de limiter cela. Lorsque le système s'approche de la consigne, ce terme freine le système en appliquant une action dans le sens opposé et permet ainsi une stabilisation plus rapide.

2.2.1.4. Synthèse de la loi commande PID

Soit le vecteur d'état :

$$X_e = \begin{bmatrix} X_{e1} \\ X_{e2} \\ X_{e3} \\ X_{e4} \\ X_{e5} \\ X_{e6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \theta \\ \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Le modèle de notre système :

$$\begin{cases} \dot{q} = A v \\ \dot{v} = (A^T M A)^{-1} (-A^T M \dot{A} v + A^T F + A^T G \tau) \end{cases} \tag{2.10}$$

Le but de cette synthèse de lois de commande est de faire suivre au robot une trajectoire particulière, nous avons deux commandes celle du couple de droite et celle du couple gauche du robot mobile, donc le système aura besoin de deux régulateurs un premier pour annuler l'erreur selon l'axe x et donc générer la commande du couple gauche et un deuxième pour annuler l'erreur selon l'axe y et donc générer la commande du couple droite.

2.2.1.5. Les simulations de la commande PID

Les paramètres du premier régulateur PID :

$$k_{p1} = 60 \quad k_{d1} = 35 \quad k_{i1} = 0.012$$

Les paramètres du deuxième régulateur PID :

$$k_{p2} = 60 \quad k_{d2} = 35 \quad k_{i2} = 0.012$$

Les trajectoires de référence :

$$X_{ref} = t \tag{2.11}$$

$$Y_{ref} = -0.002 * t^3 + 0.1 * t^2 + 0.1 * t \tag{2.12}$$

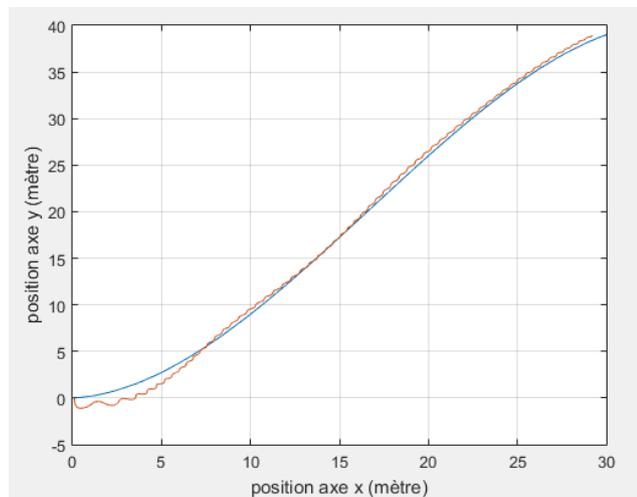


Figure 12 : la trajectoire réelle (rouge) et la trajectoire désiré (bleu), la position y en fonction de x

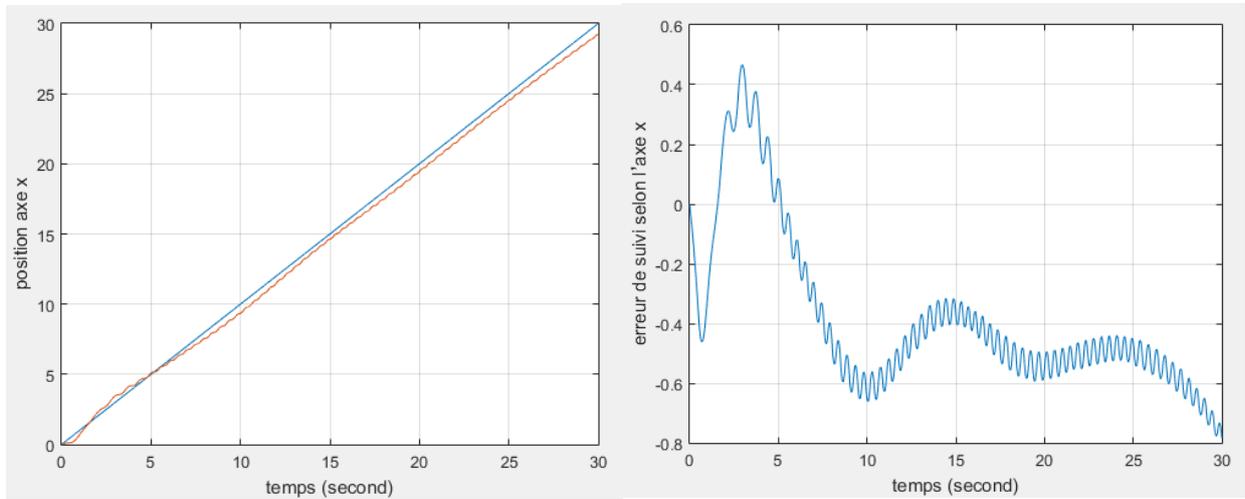


Figure 13 : à gauche : la trajectoire selon l'axe x, à droite erreur de suivi selon x

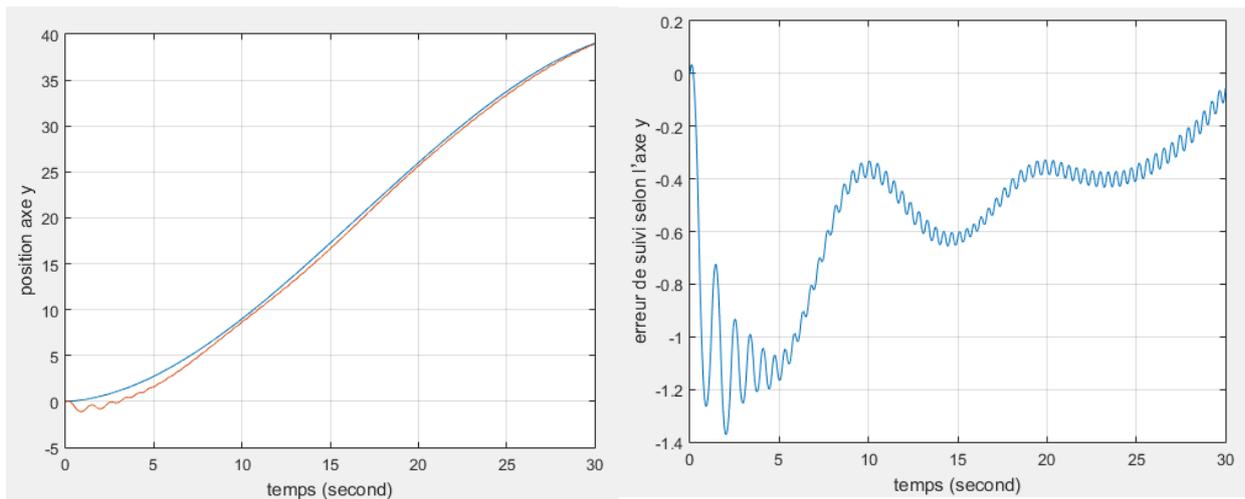


Figure 14 : à gauche : la trajectoire selon l'axe y, à droite erreur de suivi selon y

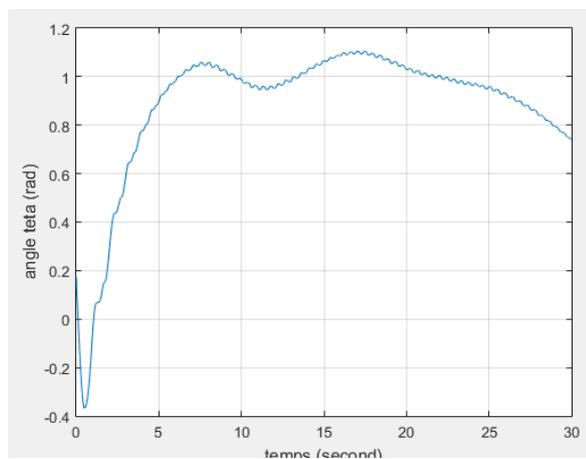


Figure 15 : l'angle d'orientation θ du robot par rapport au repère fixe.

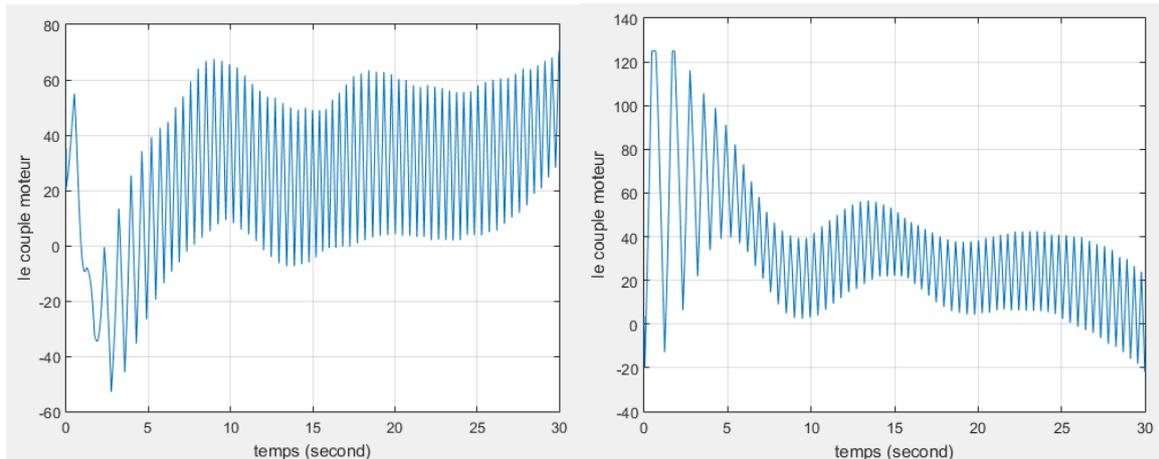


Figure 16 : les deux couples moteur celui de gauche et celui de droite.

2.2.1.6. Commentaire

On constate que la commande PID a permis au robot mobile de suivre la trajectoire de référence (désiré) avec une erreur de suivi relativement faible, de plus on remarque que trajectoire réelle est légèrement oscillatoire et ceci est dû au fait que le robot dépasse la trajectoire de référence donc le régulateur PID généré les deux commandes en couple pour pouvoir le ramener vers la position désirée et on remarque ceci dans la figure qui montre l'évolution des commandes.

2.2.2. Commande par mode glissant

$$\begin{aligned} \dot{q} &= A v \\ \dot{v} &= (A^T M A)^{-1} (-A^T M \dot{A} v + A^T F + A^T G \tau) \end{aligned} \quad (2.13)$$

En choisissant un retour particulier :

$$\tau = (A^T G)^{-1} (A^T M A U - A^T F + A^T M \dot{A} v) \quad (2.14)$$

Tel que : U est la nouvelle commande.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Donc notre système devient :

$$\dot{q} = A v \quad (2.16)$$

$$\dot{v} = U \quad (2.17)$$

$$\dot{X} = \cos(\theta)\dot{x} - \sin(\theta)\dot{y} \quad (2.18)$$

$$\dot{Y} = \sin(\theta)\dot{x} + \cos(\theta)\dot{y} \quad (2.19)$$

$$\dot{\theta} = \frac{-\dot{y}}{d} \quad (2.20)$$

$$\ddot{x} = u_1 \quad (2.21)$$

$$\ddot{y} = u_2 \quad (2.22)$$

$$\tau = (A^T G)^{-1}(A^T M A U - A^T F + A^T M \dot{A} v) \quad (2.23)$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\cos(\theta)}{r} & \frac{\cos(\theta)}{r} \\ \frac{\sin(\theta)}{r} & \frac{\sin(\theta)}{r} \\ \frac{c}{r} & -\frac{c}{r} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En démontre par la suite que en choisissant un vecteur de sortie particulier Z on pourrait obtenir un système découpler et complètement linéaire :

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + d \cos(\theta) \\ Y + d \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

De plus nous ajoutons un intégrateur devant l'entrée u_1 et on pose :

$$u_1 = \delta \quad (2.26)$$

$$\dot{\delta} = w_1 \quad (2.27)$$

$$u_2 = w_2 \quad (2.28)$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{X} - d\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \dot{Y} + d\dot{\theta} \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\dot{x} - \sin(\theta)\dot{y} + \dot{y} \sin(\theta) \\ \sin(\theta)\dot{x} + \cos(\theta)\dot{y} - \dot{y} \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

$$\dot{Z} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\dot{x} \\ \sin(\theta)\dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\ddot{Z} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\ddot{x} - \dot{\theta} \sin(\theta) \dot{x} \\ \sin(\theta)\ddot{x} + \dot{\theta} \cos(\theta) \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\ddot{Z} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin(\theta)\dot{x} + \cos(\theta)\ddot{x} - \ddot{\theta} \sin(\theta) \dot{x} - \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \dot{x} - \dot{\theta} \sin(\theta) \ddot{x} \\ \dot{\theta} \cos(\theta)\dot{x} + \sin(\theta)\ddot{x} + \ddot{\theta} \cos(\theta) \dot{x} - \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \dot{x} + \dot{\theta} \cos(\theta) \ddot{x} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\ddot{Z} = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta} \sin(\theta)\dot{x} + \cos(\theta)\ddot{x} - \ddot{\theta} \sin(\theta) \dot{x} - \frac{1}{d^2} \dot{x}\dot{y}^2 \cos(\theta) \\ 2\dot{\theta} \cos(\theta)\dot{x} + \sin(\theta)\ddot{x} + \ddot{\theta} \cos(\theta) \dot{x} - \frac{1}{d^2} \dot{x}\dot{y}^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\ddot{Z} = \begin{bmatrix} -2\dot{\theta} \sin(\theta)u_1 + \cos(\theta)w_1 - \frac{1}{d} \sin(\theta) \dot{x} - \frac{1}{d^2} \dot{x}\dot{y}^2 \cos(\theta) \\ 2\dot{\theta} \cos(\theta)u_1 + \sin(\theta)w_1 + \ddot{\theta} \cos(\theta) \dot{x} - \frac{1}{d^2} \dot{x}\dot{y}^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\ddot{Z} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \frac{1}{d} \dot{x} \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\frac{1}{d} \dot{x} \cos(\theta) \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} \frac{2}{d} \delta\dot{y} \sin(\theta) - \frac{1}{d^2} \dot{x}\dot{y}^2 \cos(\theta) \\ -\frac{2}{d} \delta\dot{y} \cos(\theta) - \frac{1}{d^2} \dot{x}\dot{y}^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \frac{1}{d} w_1 \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\frac{1}{d} w_1 \cos(\theta) \end{bmatrix} w \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{2}{d} \delta w_2 \sin(\theta) - \frac{1}{d^2} w_1 w_2^2 \cos(\theta) \\ -\frac{2}{d} \delta w_2 \cos(\theta) - \frac{1}{d^2} w_1 w_2^2 \sin(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Donc :

$$\ddot{Z} = \gamma(q, v)w + \beta(q, v) \quad (2.38)$$

La loi de commande choisit est :

$$w = \gamma(q, v)^{-1}[r - \beta(q, v)] \quad (2.39)$$

On notera que $\gamma(q, v)$ est inversible si :

$$\det(\gamma(q, v)) \neq 0 \quad (2.40)$$

Donc il faut que $v_1 \neq 0$

En remplaçant l'expression de la loi de commande on aura un système de découplé de deux triples intégrateurs :

$$\ddot{Z} = r \quad (2.41)$$

Nous avons :

$$u_1 = \delta \quad (2.42)$$

$$u_2 = \frac{d}{v_1} (\sin(\theta) r_1 - \cos(\theta) r_2) - \frac{2}{v_1} \delta v_2 \quad (2.43)$$

$$\dot{\delta} = \cos(\theta) r_1 + \sin(\theta) r_2 + \frac{1}{d^2} v_1 v_2^2 \quad (2.44)$$

Donc le système est d'un point de vue synthèse de lois de commande est vue comme étant un double triple intégrateur :

$$\ddot{Z} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

2.2.2.1. Synthèse de la loi de commande par mode de glissant

La méthodologie est la suivante. Soit un système,

$$\dot{X} = f(X) + g(X)U \quad (2.46)$$

On choisit une surface de glissement par exemple :

$$s = \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right)^{r-1} e \quad (2.47)$$

s : la surface de glissement

e : l'erreur par rapport à la consigne

λ : une constante

Ensuite on calcule le r qui correspond en nombre de dérivation de l'erreur pour que la commande apparait

Enfin la commande se calcul comme suite :

$$\dot{s} = \frac{ds}{dX} \dot{X} = \frac{ds}{dX} [f(X) + g(X)U] = -k \text{sign}(s) \quad (2.48)$$

Donc

$$U = \left[\frac{ds}{dX} g(X) \right]^{-1} \left[-\frac{ds}{dX} f(X) - k \text{sign}(s) \right] \quad (2.49)$$

Soit le vecteur d'état :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ r_1 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(X) + g_1(X)r_1 \\ f_2(X) + g_2(X)r_2 \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

On choisit comme surface de glissement :

$$s = \left(\lambda + \frac{d}{dt} \right)^{r-1} e \quad (2.51)$$

Calcul de r :

Pour la commande r_1 :

$$e_1 = X_1 - X_{1ref} \quad (2.52)$$

$$\dot{e}_1 = \dot{X}_1 - \dot{X}_{1ref} \quad (2.53)$$

$$\ddot{e}_1 = \ddot{X}_1 - \ddot{X}_{1ref} \quad (2.54)$$

$$\ddot{e} = \ddot{X}_1 - \ddot{X}_{1ref} = r_1 - \ddot{X}_{1ref} \quad (2.55)$$

Pour la commande est apparue après trois dérivations donc $r = 3$ (même chose pour la commande r_2)

Donc on a la commande r_1 :

$$s_1 = \left(\lambda_1 + \frac{d}{dt} \right)^2 e_1 \quad (2.56)$$

$$r_1 = \left[\frac{ds_1}{dX} g_1(X) \right]^{-1} \left[-\frac{ds_1}{dX} f_1(X) - k_1 \text{sign}(s_1) \right] \quad (2.57)$$

Tel que :

$$e_1 = X_1 - X_{1ref} \quad (2.58)$$

Et pour on a la commande r_2 :

$$s_2 = \left(\lambda_2 + \frac{d}{dt} \right)^2 e_2 \quad (2.59)$$

$$r_2 = \left[\frac{ds_2}{dX} g_2(X) \right]^{-1} \left[-\frac{ds_2}{dX} f_2(X) - k_2 \text{sign}(s_2) \right] \quad (2.60)$$

Tel que :
$$e_2 = X_4 - X_{4ref} \quad (2.61)$$

Simulation de la commande par mode de glissant

$$z_{1ref} = 0.1 * t$$

$$z_{1ref} = 0.001 * t^3$$

$$\lambda_1 = 20 \quad \lambda_2 = 20$$

$$k_1 = 0.1 \quad k_2 = 0.1$$

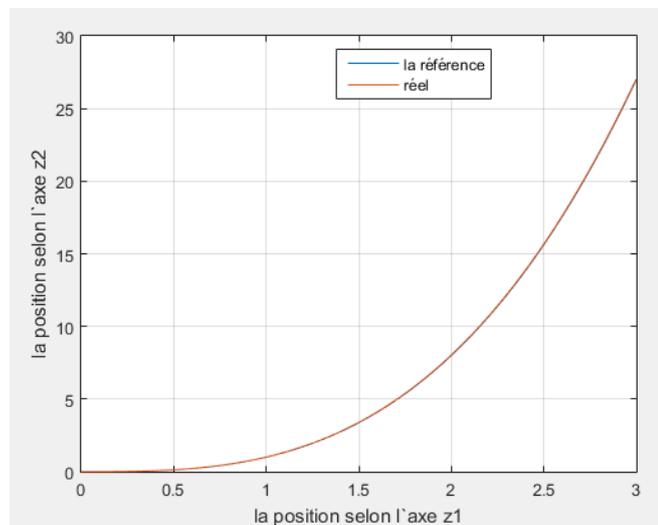


Figure 17 : trajectoire réelle (rouge) du robot et trajectoire de référence (bleu), z_2 en fonction de z_1

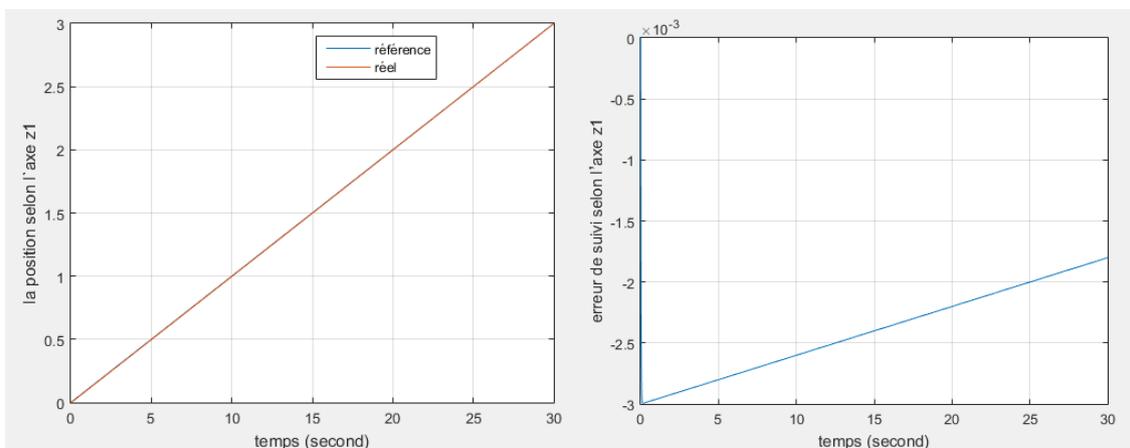


Figure 18 à gauche : la trajectoire selon l'axe z_1 , à droite erreur de suivi selon z_1

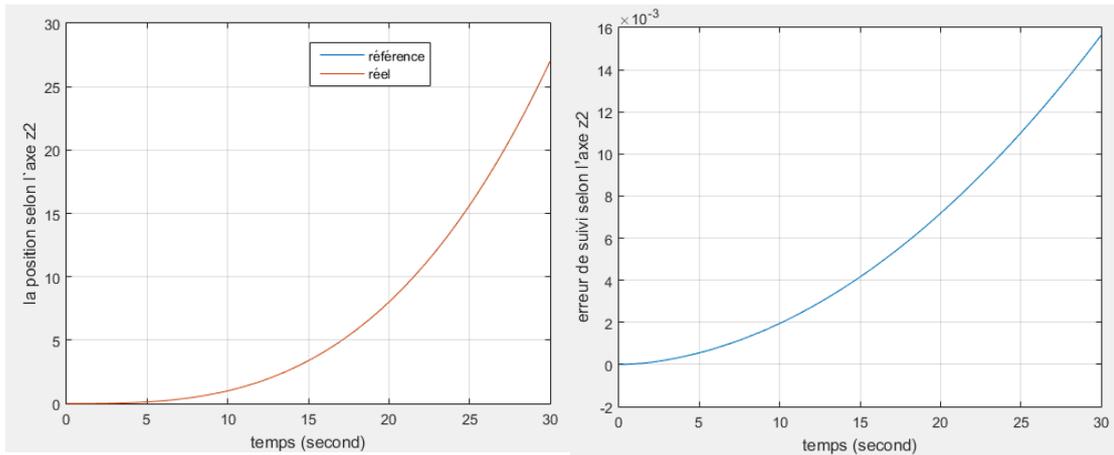


Figure 17 : à gauche : la trajectoire selon l'axe z_2 , à droite erreur de suivi selon z_2

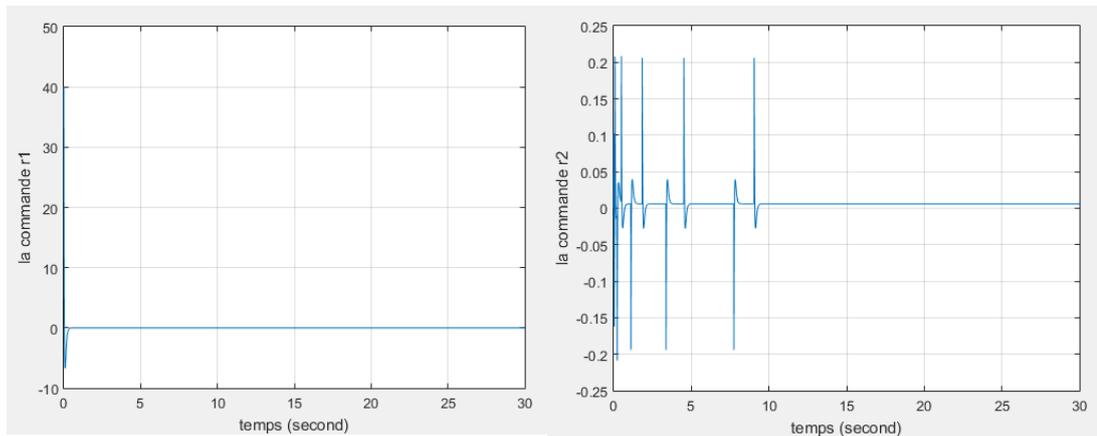


Figure 18 : les deux commande r_1 et r_2

2.2.2.2. *Commentaire*

On remarque clairement que le système a parfaitement suivi la référence de plus les erreurs de suivi selon les deux axes sont très faibles de l'ordre de 10^{-3} , donc la commande par mode glissant avec le choix de la surface a permis de converger le système vers la trajectoire désiré.

2.3. Conclusion

Au cours de chapitre nous avons utilisé le modèle du robot mobile à roues types différentiel élaboré au chapitre pour pouvoir faire la synthèse de deux lois de commande qui avaient pour but de garantir au robot un bon suivi de trajectoire, la première loi de commande est basée sur un régulateur PID qui a donné des résultats assez bons, et la deuxième est une commande par mode glissant qui a retourner d'excellent résultats

Conclusion générale

Au cours de ce mémoire nous avons commencé par le développement mathématique d'un modèle régissant la dynamique d'un robot mobile à roues avec commande différentiel, pour cela nous avons tout d'abord défini les différents repères, ensuite nous avons une modélisation cinématique, par la suite nous avons représenté les différentes forces qui agissent sur le système et le modèle dynamique du système, au cours de cette modélisation nous avons adopté une démarche rigoureuse, afin d'obtenir le modèle le plus proche du système réel et cela pour obtenir de meilleure performance en terme de précision et de robustesse. Le modèle défini nous a permis de passer à la synthèse de lois de commande qui avait pour but essentiel de permettre au robot de suivre des trajectoires et ainsi se déplacer dans son environnement, la première loi de commande est celle basée sur le régulateur PID et la deuxième est celle de la commande par mode glissant qui a été utilisée après quelque transformation, après nous avons effectué des simulations sous Matlab afin de juger des performances des lois de commande et du comportement du robot mobile.

En perspective, notre étude pourrait être étendue à :

- une modélisation au niveau électrique (commande des moteurs des roues).
- appliquer d'autres commandes comme une commande adaptative.
- faire une modélisation plus poussée qui prend en compte les perturbations (le vent).

Bibliographies

- [1] J.J D'Azzo and C.H. Houpis, *Linear Control System Analysis and Design*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York, 1988
- [2] G. Campion, G. Bastin, and B. d'Andrea-Novel, "Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots," *IEEE Trans on Robotics and Automation*, col. 12, no.1, pp.47-62,1996.
- [3] J.Y. Wong, *Theory of Ground Vehicles*, John Wiley, New York, 1978.
- [4] A.B. Will and S.H. Zak, "Modelling and control of an automated vehicle," *Vehicle System Dynamics*, vol. 27,pp. 131-155, 1997.
- [5] B. d'Andrea-Novel, G. Campion, and G. Bastin "Control of nonholonomic wheeled mobile robots by state feedback linearization," *Int. J. of Robotics Research*, vol. 14, no. 6, pp. 543-559, 1995.
- [6] A.T. Le, D.C. Rye, and H.F. Durrant-Whyte, "Estimation of track-soil interactions for autonomous tracked vehicles," *1997 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, Albuquerque, NM, pp. 1388-1393, 1997.
- [7] A. De Luca, G. Oriolo, and C. Samson, "Feedback control of a nonholonomic car-like robot," in J.P. Laumond (Ed.) *Robot motion Planning and Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229, pp. 171-253, Springer-Verlag, London, 1998.
- [8] C. Canudas de Wit, A. D. NDoudi-Likoho, and A. Micaelli, "Feedback control for a train-like vehicle," *Proc. 1994 IEEE Int. Conf. Robotics Automation*, 1994.
- [9] C. Canudas de Wit, "Trends in mobile robot and vehicle control," in *Control Problems in Robotics*, B. Siciliano and K. P. Valavanis, Eds. London, U.K.: Springer-Verlag, 1998, pp. 151–176. *Lecture Notes in Control and Information Sciences* 230.