

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

ETUDE COMPARATIVE DE LA METHODE  
DES SINGULARITES DISTRIBUEES APPLIQUEE  
AUX ECOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES

Proposé par :

Mr A. Atif

Etudié par :

Mr Nacereddine Rabia  
Mr Nouioua Hakim

Dirigé par

Mr A. Atif  
Mr M. Boudjema

PROMOTION 1992 - 1993

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

ETUDE COMPARATIVE DE LA METHODE  
DES SINGULARITES DISTRIBUEES APPLIQUEE  
AUX ECOULEMENTS AUTOUR D'OBSTACLES

Proposé par :

Mr A. Atif

Etudié par :

Mr Nacereddine Rabia  
Mr Nouioua Hakim

Dirigé par

Mr A. Atif  
Mr M. Boudjemaa

PROMOTION 1992 - 1993

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi El-Harrach - ALGER

---

DEDICACES

---

A ma mère, à qui je lui dois tout.

A tous ceux qui me sont chers.

HAKIM

o ————— o

A

Mes parents, mon père et ma mère

Mes soeurs

Mes frères

Abdelhak, Nabil, Kamel et le  
petit abdenour

A mon enseignant Chanane kamel

A mes amis

Hakim, Abdenour et Abdelkader

A toute la promotion 1993 du  
département Génie-mécanique.

RABIA

---

REMERCIEMENT

---

Nous exprimons notre sincère reconnaissance à Monsieur A. ATIF maître assistant à l'USTHB pour nous avoir guidé et orienté dans notre présente étude avec compétence et bienveillance. Qu'il veuille trouver ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous remercions vivement Monsieur M. BOUDJEMAA, enseignant à l'ENP pour l'intérêt qu'il a toujours manifesté vis à vis de notre étude, ainsi que pour les conseils qu'il nous a prodigué tout au long de ce travail.

Qu'il nous soit permis de remercier, chaleureusement, tous ceux qui ont contribué à notre formation.

Nous ne saurions oublier, l'ensemble du personnel de l'E.N.P pour la serviabilité et la compréhension qu'il nous a toujours manifesté.

Que tous ceux qui nous sont chers, parents, familles et amis qui nous ont soutenus par leur présence, leur aimable aide et leurs précieux conseils, voient dans ce travail notre humble hommage à leur affection.

الملخص :

إنّ الاجسام الملبة ذات الأشكال الهندسية المركبة تحتاج الى مطابقة عدد كبير من الأحاديات حتى يتسنى لنا دراستها بالنظرية الكونية لسيلان الموائع .  
تتمثل الطريقة في نشر أحاديات على طول قطع مستقيمة أستعملت لتقريب شكل الجسم المدروس و بأستعمال الشروط الحدية للجسم، نستخرج قوة الأحاديات وبالتالي تتم دراسة كل الوسائط الممكنة لهذا الجسم .

#### RESUME

Les corps solides de formes complexes exigent la superposition d'un grand nombre de singularités pour être traité par la théorie potentielle des écoulements. La méthode consiste à disposer des distributions de singularités (sources, vortex, ...) sur des panneaux de façon à approximer la forme du solide et analyser ainsi l'écoulement autour de ce dernier.

#### ABSTRACT

The solid bodies of complex shapes require the superposition of a great number of singularities in order to be treated by the flows potential theory. The used method is to dispose the singularities distribution (sources, vortex) on the panels to approximate the solid shape, therefore, analyse the flow around it.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	2
CHAPITRE I : GENERALITES.....	3
I-1 Fonction de courant et potentiel de vitesse.....	4
I-2 Interprétation physique d'une fonction de courant....	5
I-3 Théorie potentielle des écoulements incompressibles..	7
I-3-1 Principe de superposition.....	8
I-3-2 Ecoulements potentiels élémentaires.....	9
I-4 Analyse d'écoulement autour des obstacles.....	13
I-4-1 Méthode des images.....	13
I-4-2 Transformation conforme.....	13
CHAPITRE II : PRESENTATION DE LA METHODE.....	14
II-1 Principe de la méthode.....	15
II-2 Développement de la méthode.....	17
II-2-1 Cas d'une charge uniforme de sources.....	17
II-2-2 Cas d'une charge linéairement répartie de vortex.....	21
II-3 Calcul des différents paramètres de l'écoulement....	22
II-3-1 Calcul des coefficients de pression.....	23
II-3-2 Calcul de portance.....	23
II-3-3 Tracé des lignes de courant .....	25
CHAPITRE III : APPLICATION DE LA METHODE POUR DIVERS OBSTACLES.....	27
III-1 Analyse d'écoulement autour d'un cylindre fixe.....	28
III-1-1 Charge concentrée de sources.....	29
III-1-2 Charge concentrée de vortex.....	30

III-1-3 Charge uniformément distribuée de sources....	32
III-1-4 Charge uniformément distribuée de vortex.....	38
III-2 Analyse d'écoulement autour d'un cylindre en rotation.....	40
III-3 Tracé des lignes de courants.....	46
III-4 Analyse de l'écoulement autour d'une rangée de cylindres.....	50
III-5 Analyse de l'écoulement autour des profils.....	52
III-6 ORGANIGRAMME.....	54
CHAPITRE IV : RESULTATS ET INTERPRETATIONS.....	56
IV-1 Analyse d'écoulement autour du cylindre fixe.....	57
IV-2 Analyse d'écoulement autour du cylindre tournant....	62
IV-3 Analyse d'écoulement autour d'une rangée de cylindres.....	67
IV-4 analyse d'écoulement autour profils d'ailes.....	67
CONCLUSION.....	73
BIBLIOGRAPHIE.....	75
ANNEXE 1 : METHODE DE SUPERPOSITION.....	76
ANNEXE 2 : ANALYSE DE L'ECOULEMENT.AU VOISINAGE DES SINGULARITES.....	80
ANNEXE 3 : CALCUL D'INTEGRALES.....	82
ANNEXE 4 : PROGRAMME.....	89

PRINCIPALES NOTATIONS

$\alpha$	: Angle d'incidence
$r_{ij}$	: Rayon position ou distance séparant $i$ et $j$
$\delta_i$	: Angle du panneau $i$ avec l'horizontale
$s_j$	: Abscisse suivant la longueur du panneau
$\theta_i$	: Position géométrique des sommets
$x_s(i), y_s(i)$	: Coordonnées des sommets
$x(i), y(i)$	: Coordonnées des points de contrôles
$U_\infty$	: Vitesse de l'écoulement uniforme
$\Gamma$	: Circulation
$L(j)$	: Longueur des panneaux
$k_i$	: Intensités des sources par unité de longueur
$\gamma_j$	: Intensités des vortex par unité de longueur
$\gamma_{sj}$	: Intensités des vortex aux sommets
$R$	: Rayon du cylindre
$C_p$	: Coefficient de pression
$C_l$	: Coefficient de portance
$C_d$	: Coefficient de traînée
$V_\eta$	: Vitesse normale
$V_\tau$	: Vitesse tangentielle
$u, v$	: Composantes de vitesses dans le repère cartésien
$n$	: Nombre des points de contrôles
$\psi$	: Fonction de courant
$\phi$	: Fonction potentielle de vitesse
$p$	: Pression locale
$p_\infty$	: pression a l'infini
$\rho$	: Masse volumique du fluide considéré



## INTRODUCTION

Les problèmes de la mécanique des fluides sont généralement difficiles à résoudre car les équations de bases sont non linéaires, il est donc impossible de trouver des solutions générales exactes, sauf dans quelques cas très simples. Pourtant l'évolution de la science de la mécanique des fluides a porté ses fruits. Ceci est confirmé par l'avancement spectaculaire des secteurs technologiques dans lesquels la qualité et l'originalité des solutions des problèmes d'écoulements ont joué un rôle primordial, par exemple dans le secteur du transport (avions, bateaux, voitures, etc...).

Dans une grande mesure, ces réussites sont dûes aux échanges étroits entre la théorie et l'expérience en mécanique des fluides. D'une part l'expérience est indispensable pour vérifier les hypothèses et les résultats qui ressortent de la théorie; d'autre part la théorie est nécessaire pour expliquer les résultats obtenus par l'expérience et d'en tirer des modèles pratiques à exploiter, par conséquent les bases de la science de la mécanique des fluides ont pu être fondées et développées sur des observations expérimentales.

Cela dit, nous allons consacrer notre étude aux écoulements potentiels et aux problèmes pratiques qu'ils rencontrent.

A cette fin, on a choisi la méthode des singularités distribuées, comme outil d'analyse pour la résolution de ces problèmes et comparer les résultats avec ceux disponibles des méthodes analytiques et expérimentales appliquées aux mêmes problèmes.

CHAPITRE I

GENERALITES

La partie de la mécanique qui a pour objet l'étude de l'équilibre et du mouvement des fluides, ainsi que les interactions de ces derniers avec les corps solides est appelée " mécanique des fluides ".

La mécanique des fluides étudie principalement le mouvement des fluides, et dans la plupart des cas, ces derniers sont considérés comme incompressible.

L'étude du mouvement des fluides est un problème beaucoup plus difficile et compliqué que l'étude du mouvement d'un corps solide parfait. Ceci s'explique par le fait que la mécanique des corps solides envisage un système de particules reliées rigidement entre elles, alors que la mécanique des fluides considère un milieu qui consiste en une infinité de particules qui se déplacent les unes par rapport aux autres.

GALILEE disait "qu'il est beaucoup plus facile d'étudier les mouvements d'astres infiniment éloignés de nous que celui d'un ruisseau qui coule à nos pieds ".

## I-1 FONCTION DE COURANT ET POTENTIEL DE VITESSE

Considérons un écoulement plan (bidimensionnel), on peut toujours trouver une fonction  $\psi(x,y,t)$  telle que:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y,t) \\ v(x,y,t) &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y,t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

Cette fonction  $\psi$  est appelée fonction de courant du domaine de vitesse  $(u,v)$ , l'introduction de cette fonction simplifiera le problème puisque au lieu de résoudre un système à deux inconnues, on aura tout simplement à trouver la fonction  $\psi$ .

Cependant, la fonction de courant  $\psi$  ne peut être obtenue que pour un écoulement bidimensionnel ou un écoulement axisymétrique.

Pour un écoulement irrotationnel, la vitesse est le gradient d'un potentiel telle que :

$$\vec{V} = \overline{\text{Grad}}\phi \quad (1-2)$$

donc 
$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (1-3)$$

d'après (1-1) et (1-3) on aura :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

vectorellement

$$\overline{\text{Grad}}\phi = \vec{k} \times \overline{\text{Grad}}\psi \quad (1-4)$$

Le potentiel de vitesse  $\phi$ , peut être défini dans un écoulement tridimensionnel, permet la simplification du problème (passage de trois inconnues  $u, v, w$  à une seule). Mais ce passage n'est valable que pour un écoulement irrotationnel ou la vorticité est défini par :

$$\overline{\text{Rot}}\vec{V} = \vec{0} \quad (1-5)$$

## I-2 INTREPRETATION PHYSIQUE D'UNE FONCTION DE COURANT

Considérons l'écoulement d'une masse de fluide a travers une courbe ABP de profondeur unité et considérons l'écoulement a travers un élément  $d\ell$  de gauche à droite.

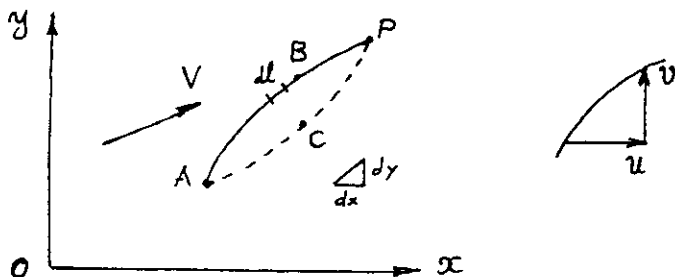


Figure 1-1 . Ecoulement à travers un élément curviligne  $\overline{AP}$

Le bilan massique s'écrit :

$$\rho \cdot u \cdot dy \cdot l - \rho \cdot v \cdot dx \cdot l = \rho(u \cdot dy - v \cdot dx)$$

L'écoulement total a travers ABP de gauche a droite s'écrit:

$$\int_A^P \rho(u \cdot dy - v \cdot dx) = \rho \int_A^P (u \cdot dy - v \cdot dx)$$

La même chose peut être établie a travers la courbe ACP ou l'écoulement est :

$$\rho \int_A^P (u \cdot dy - v \cdot dx)$$

Les courbes ABP et ACP sont arbitraires, de plus la conservation de masse du fluide incompressible nécessite qu'a chaque instant la masse entrante par ABP soit égale a celle sortante par ACP.

$$\rho \int_A^P (u \cdot dy - v \cdot dx) = \rho \int_A^P (u \cdot dy - v \cdot dx)$$

Donc quelque soit le chemin entre A et P l'intégrale est toujours

$$\int_A^P (u \cdot dy - v \cdot dx)$$

Si l'on fixe l'un des deux points A  $(x_0, y_0)$  comme point de référence on aura :

$$\int_{A(x_0, y_0)}^{P(x, y)} (u \cdot dy - v \cdot dx) = F(x, y) = \psi(x, y) \quad \forall t \quad (1-6)$$

Cette fonction ne peut être que la même fonction de courant déjà définit:

$$d\psi = u \cdot dy - v \cdot dx \quad (1-7)$$

$$\text{et } d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$\rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

L'équation (1-6) traduit physiquement la fonction de courant  $\psi(x,y;t)$  qui est tout simplement l'écoulement de volume de gauche à droite à travers n'importe quelle courbe reliant le point  $(x,y)$  un point de référence A  $(x_0,y_0)$  à l'instant t.

De plus la différence des  $\psi$  entre deux points  $(x_1,y_1)$  et  $(x_2,y_2)$

$$\psi(x_2,y_2;t) - \psi(x_1,y_1;t) = \int_A^{(x_2,y_2)} (u dy - v dx) - \int_A^{(x_1,y_1)} (u dy - v dx)$$

$$\Delta\psi = \psi(x_2,y_2) - \psi(x_1,y_1) = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u dy - v dx)$$

Un écoulement se fait toujours le long des lignes de courants ( $\psi$  constant) et jamais à travers.

### I-3 THEORIE POTENTIELLE DES ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES

L'écoulement irrotationnel joue un très grand rôle dans la théorie des écoulements potentiels. Cela provient directement du fait que tous les mouvements qui peuvent être engendrés dans un fluide sans frottement interne doivent vérifier le principe d'inertie à savoir  $\text{Rot } V = 0$ .

On se limitera aux écoulements incompressibles de densité constante qui peuvent être généralisés si l'écoulement est stationnaire.

La conception d'un écoulement incompressible équivaut à l'hypothèse d'une vitesse infinie de propagation des perturbations de pressions faibles dans l'écoulement.

#### DEFINITION

Un écoulement potentiel est un écoulement irrotationnel appliqué aux fluides incompressibles.

De nombreux écoulements réels sont similaires à ce type d'écoulements ce qui justifie en fait toute l'étude de ces écoulements et qui restent une bonne approche de la réalité.

### I-3-1 PRINCIPE DE SUPERPOSITION

D'après l'équation (1-4) :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad v = \nabla \phi = \text{grad} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k} \quad (1-8)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

de même les composantes de vitesses sont obtenues à l'aide de la fonction de courant tel que :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En combinant ces équations avec l'équation de continuité, disponible dans tout ouvrage de mécanique des fluides, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{on trouve} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-9)$$

ou vectoriellement

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = 0 \quad (1-8)$$

$$\text{avec} \quad \zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \overline{\text{Rot}(V)} \Big|_{\vec{i}}$$

Si l'écoulement est irrotationnel alors

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \zeta_z = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi = 0 \quad (1-10)$$

Remarquons que les deux équations différentielles (1-9) et (1-10) sont similaires ce qui signifie que pour un écoulement donné les deux fonctions  $\phi$  et  $\psi$  peuvent être interchangées pour définir un

autre écoulement.

Il est à noter que les équipotentiels et les lignes de courants pour un point donné se trouvent toujours perpendiculaires, en effet :

suisant une equipotentielle  $\Rightarrow udx + vdy = 0 \dots\dots(1)$

suisant une ligne de courant  $\Rightarrow -udy + vdx = 0 \dots\dots(2)$

$$(1) - \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\phi} = -\frac{u}{v} \qquad \Rightarrow \qquad \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\phi} = -\left[ \frac{1}{(dy/dx)} \right]_{\psi} \quad (1-11)$$

$$(2) - \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{\psi} = \frac{v}{u}$$

REMARQUE : L'équation de LAPLACE en  $\phi$  et en  $\psi$  est linéaire, ce qui signifie que le principe de superposition est applicable. Il est donc possible de construire des solutions plus complexes par une superposition de solution simples.

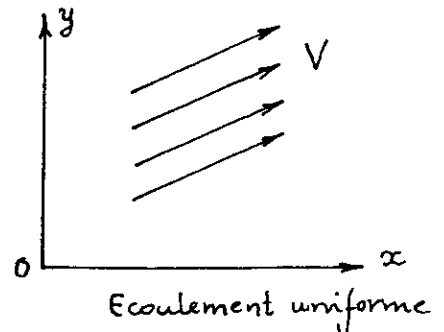
### I-3-2 ECOULEMENTS POTENTIELLES ELEMENTAIRES

#### 1- ECOULEMENT HOMOGENE ET PARALLELE

Considérons un écoulement homogène et parallèle de vitesse  $U$  selon l'axe des  $x$ , pour déterminer la fonction  $\phi$  et  $\psi$  de cet écoulement par rapport aux variables  $x, y$  on a :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = U\infty = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = v = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



D'ou  $\phi = U\infty.x$  et  $\psi = U\infty.y$  (1-12)

En coordonnées polaires :  $(r, \theta)$

$$\phi = U\infty.r \cos \theta \qquad \psi = U\infty.r \sin \theta$$



## 2-SOURCE ET PUIITS BIDIMENTIONNEL

En un point du plan  $(x,y)$  un écoulement radial ,soit sortant ou rentrant correspond a un écoulement engendre soit par une source soit par un puit .En utilisant les coordonnées polaires  $r,\theta$  centrées en un tel point .L'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(V_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial r}(rV_r) = 0$$

La nature radiale de l'écoulement implique que  $V_{\theta} = 0$  par conséquent l'équation se réduit a :

$rV_r = \text{constante}$  .Ainsi la fonction de courant associe vérifie

$$V_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad , \quad rV_r = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \text{constante}$$

d'ou

$$\psi = C\theta$$

La constante s'exprime en fonction débit , $Q$  de la source .

$$Q = 2\pi rV_r = 2\pi C \quad (1-13)$$

ou  $Q$  est donne par unité de longueur dans la direction  $\vec{k}$  .

$$V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{C}{r}$$

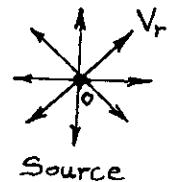
$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \quad \text{et}$$

$$V_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$V_{\theta} = 0$$

(1-14)



Les lignes de courant sont donc les rayons à  $\theta = \text{constante}$  et les lignes equipotentiellles les cercles  $r = \text{constante}$

Si la source est située en un point  $Q(a,b)$  dans le plan  $x,y$   
 $r$  est alors la distance entre la source et un point  $P(x,y)$   
 quelconque considère et  $\theta$  l'angle définit tel que :

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln [(x - a)^2 + (y - b)^2]^{1/2}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \text{Arctg} \left[ \frac{y-b}{x-a} \right] \quad (1-15)$$

$$V_x = \frac{Q}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (1-16)$$

$$V_y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad (1-17)$$

Alors le signe de  $Q$  nous indique si on a une source ( $>0$ ) ou un puit ( $<0$ ).

### 3- VORTEX OU FIL TOURBILLONAIRE RECTILIGNE .

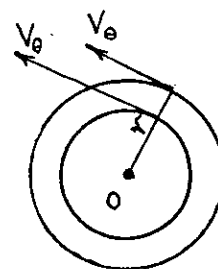
Un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle a l'axe  $Z$  engendre un écoulement irrotationnel dans le plan  $(x,y)$ . En utilisant les coordonnées polaires  $r, \theta$  centres au rayon du fil nous pouvons donc écrire :

$$(\nabla \cdot V) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) = 0$$

ou  $V_r = 0$  et  $rV_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}$

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$V_r = 0 \quad V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$



Vortex.

### - DOUBLET : (ou dipôle)

Il s'agit ici d'une superposition d'une source d'intensité  $+Q$  située au point  $x',y'$  et d'un puit d'intensité  $-Q$  située a  $x'-\Delta x',y'$   
 Le potentiel  $\phi$  par rapport au point  $P(x,y)$  devient alors

$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \left[ \ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} - \ln [(x-x'+\Delta x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} \right]$$

(1-33)

Le dipôle se définit par un passage aux limites  $\Delta x' \rightarrow 0$

$Q \rightarrow \infty \Rightarrow Q\Delta x' \rightarrow \mu$  ou  $\mu$  intensité du dipôle,  $\mu$  s'exprime donc en  $m^3 s^{-1}$ .

$$\phi = \lim_{\substack{\Delta x' \rightarrow 0 \\ Q\Delta x' \rightarrow \mu}} \frac{Q\Delta x'}{2\pi} \left[ \frac{\ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} - \ln [(x-x'+\Delta x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}}{\Delta x'} \right]$$

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r}$$

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\overset{\cos\theta}{\sin\theta}}{r^2} = \frac{\partial\phi}{\partial r}$$

$$\psi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r}$$

un dipôle est donc caractérisé par sa direction et son orientation positive définie par les points consécutifs puits-source.

Le tableau ci-dessous donne la valeur des fonctions  $\phi$  et  $\psi$  pour quelques écoulements élémentaires qui nous seront utiles plus tard.

Écoulement	$\psi$	$\phi$	$V_r$	$V_\theta$
Écoulement uniforme	$U_\infty r \sin\theta$	$U_\infty r \cos\theta$	$U_\infty \cos\theta$	$-U_\infty \sin\theta$
Source	$\frac{k\theta}{2\pi}$	$\frac{k}{2\pi} \ln r$	$\frac{k}{2\pi r}$	0
Vortex	$\frac{\gamma}{2\pi} \ln r$	$-\frac{\gamma}{2\pi} \theta$	0	$\frac{\gamma}{2\pi r}$

Tableau 1-1

## I-4 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR DES OBSTACLES

De nombreuses méthodes d'analyse d'écoulement autour des obstacles ont été proposées, et sont disponibles dans plusieurs ouvrages. Nous citerons à titre d'exemples deux de ces méthodes qui sont:

### I-4-1 METHODES DES IMAGES

Pour résoudre certains problèmes d'écoulements potentiels, la méthode des images est souvent utile. Elle s'applique au cas de présence d'un écoulement (sources, vortex) devant un obstacle à une distance  $a$ , on considère l'obstacle comme une ligne de courant et on le remplace par le même écoulement élémentaire mais d'intensité opposée à une distance  $-a$ , c'est tout simplement l'image de la source à travers l'obstacle.

### I-4-2 TRANSFORMATION COFORME

Il est possible, par un changement de coordonnées ( $x_1, x_2 \rightarrow \xi, \eta$ ) ou transformation conforme, de passer de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec une circulation à l'écoulement autour d'un profil d'aile. La forme du profil obtenu dépend de la position du centre du cercle par rapport à l'origine des axes, de son rayon et de la transformation conforme utilisée. A titre d'illustration, nous considérerons la TRANSFORMATION DE JOUKOWSKI bien qu'elle conduise à des profils d'ailes non utilisés en pratique.

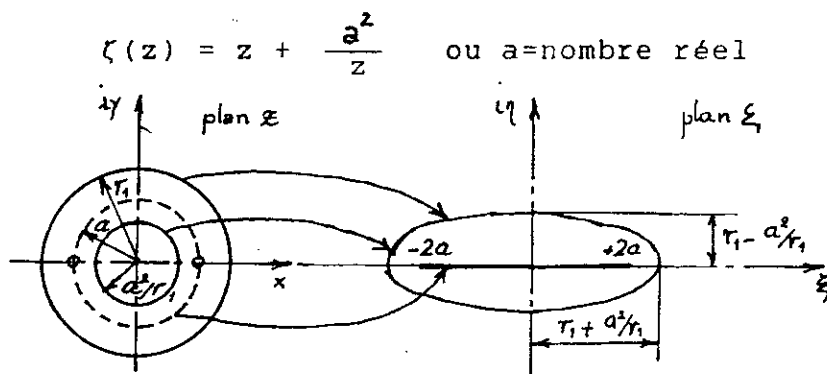


Figure N° 2-1 . la transformation selon JOUKOWSKI d'un cercle centre' dans le plan  $z$  engendre une ellipse dans le plan  $\xi$

CHAPITRE II

PRESENTATION DE LA METHODE DES  
SINGULARITES DISTRIBUEES

## II-1 PRINCIPE DE LA METHODE

Parmi plusieurs méthodes d'analyse d'écoulements, vient la méthode des singularités distribuées pour simuler ces écoulements autour d'obstacles et aussi pour calculer les différents paramètres tels que la vitesse, la pression, et aussi le potentiel de vitesse  $\phi$  et la fonction de courant  $\psi$ .

Les singularités représentent les écoulements élémentaires complètement définis, nous citerons comme exemple l'écoulement uniforme, les sources, les vortex et les doublets.

Le principe de base de cette méthode consiste à superposer ces singularités pour déduire une solution plus complexe qui simule l'écoulement autour d'un obstacle bien défini. Cependant c'est le problème inverse qui se pose réellement, où on connaît parfaitement la forme de l'obstacle mais la nature et l'intensité des singularités à superposer sont inconnues, donc on doit ajuster ces singularités pour obtenir l'écoulement autour de l'obstacle donné. Ceci représente l'objectif de notre travail.

la méthode consiste d'une manière globale à :

1- Discretiser l'obstacle en divisant sa forme en un nombre fini de points qu'on appellera "sommets", ces sommets seront reliés par des segments de droite, qu'on appellera "panneaux", pour former un polygone de  $n$  côtés.

2- Charger les panneaux par des singularités. La manière de ce chargement dépend du profil qu'on veut analyser (profil portant ou non).

3- Localiser en chaque milieu de panneau un point appelé "point de contrôle" et définir parfaitement les coordonnées de ce point.

4- Calculer en chaque point de contrôle, le potentiel de vitesse produit par le chargement de singularités sur chaque panneau. Ce potentiel sera noté  $\Delta\phi$ . Ensuite, en appliquant le principe de superposition, calculer le potentiel de vitesse  $\phi$  en ce point de contrôle induit par tous les panneaux. On obtient :

$$\phi = \sum \Delta\phi \quad (2-1)$$

Le potentiel global  $\phi$  au point de contrôle s'obtient par la superposition du potentiel  $\phi$  et du potentiel de vitesse de l'écoulement uniforme, on aura :

$$\phi = \phi_{\text{écoul. uniforme}} + \sum \Delta\phi \quad (2-2)$$

5- Imposer, à partir de la condition 2-2, que la vitesse normale au point de contrôle soit nulle, cette condition provient du fait que les particules ne pénètrent pas dans le profil, et qu'à ses frontières la vitesse de ces particules est tangentielle, ce qui permet d'obtenir autant de conditions que de charges de singularités, donc un système d'équations linéaires.

6- Résoudre le système linéaire pour trouver les solutions, c'est à dire les singularités, en appliquant une méthode de résolution numérique des systèmes linéaires.

7- Enfin calculer les différents paramètres de l'écoulement tels que le potentiel de vitesse, la pression, la portance etc..).

## II-2 DEVELOPPEMENT DE LA METHODE

Considérons en premier lieu un obstacle dans un écoulement uniforme  $U_\infty$  faisant un angle d'attaque  $\alpha$  avec l'horizontale (voir figure 2-1).

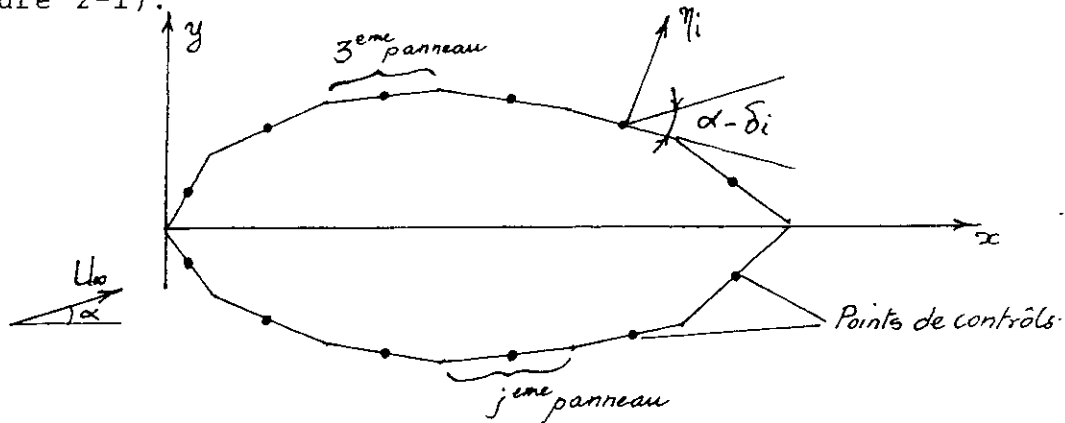


figure 2-1. Approximation d'un obstacle symétrique par  $n$  panneaux.

On discrétise la forme de l'obstacle en un nombre fini  $n$  de points (sommets) reliés par des segments de droites (panneaux), pour former ainsi un polygone de  $n$  côtés.

### II-2-1 CAS D'UNE CHARGE UNIFORME DE SOURCES

On place le long de chaque panneau une charge constituée par une distribution uniforme de sources d'intensités  $k_i$  définies par unité de longueur. (voir figure 2-2)

En un point de contrôle  $i$  de coordonnées  $(x_i, y_i)$ , chaque panneau  $j$  induit un potentiel de vitesse  $\phi_{ij}$  tel que :

$$\phi_{ij} = \int_0^{l_j} \frac{k_j dS_j}{2\pi} \cdot \ln r_{ij} \quad (2-3)$$

$r_{ij}$  représente la distance qui sépare le point de contrôle  $i$  et un point situé sur le panneau  $j$  :

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$



Le potentiel de vitesse résultant en chaque point de contrôle  $i$   $(x_i, y_i)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi(x_i, y_i) = U_\infty x_i \cos\alpha + U_\infty y_i \sin\alpha + \sum_{j=1}^n \frac{k_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \ln r_{ij} \, dS_j \quad (2-4)$$

"  $U_\infty x_i \cos\alpha + U_\infty y_i \sin\alpha$ " représente le potentiel de vitesse dû à l'écoulement uniforme au point de contrôle  $i$  et  $\alpha$  l'angle que fait l'écoulement avec l'horizontale.

Chaque terme de la somme représente la contribution du panneau  $j$  sur le point de contrôle  $i$ .

On impose la condition que la vitesse normale en chaque point de contrôle soit nulle. En fait cette condition équivaut à ce que les bords de l'obstacle forment une ligne de courant, et donc les particules ont une vitesse tangentielle à cette ligne de courant. On peut donc écrire :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \phi(x_i, y_i) = 0 \quad (2-5)$$

Cette condition doit être satisfaite pour chaque point de contrôle donc  $n$  conditions pour  $n$  singularités inconnues, ce qui nous permet d'avoir un système d'équations  $n \times n$ .

$$\frac{k_i}{2} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{\partial}{\partial n_i} \ln r_{ij} \, dS_j = -U_\infty \sin(\alpha - \delta_i) \quad (2-6)$$

Avec  $\delta_i$  l'angle que fait le panneau avec l'axe des  $x$

Remarquons que le terme sommation se fait pour tous les panneaux excepté pour  $i=j$ ; un développement est fait en annexe II.

Le premier terme représente la contribution du  $i^{\text{ème}}$  panneau sur le point  $(x_i, y_i)$  c'est à dire sur lui même, le second représente les contributions des autres sources sur le même point  $(x_i, y_i)$  et le dernier celui de l'écoulement uniforme.

Mais tout de même on peut retrouver les mêmes résultats avec un développement géométrique.

Considérons deux panneaux i et j

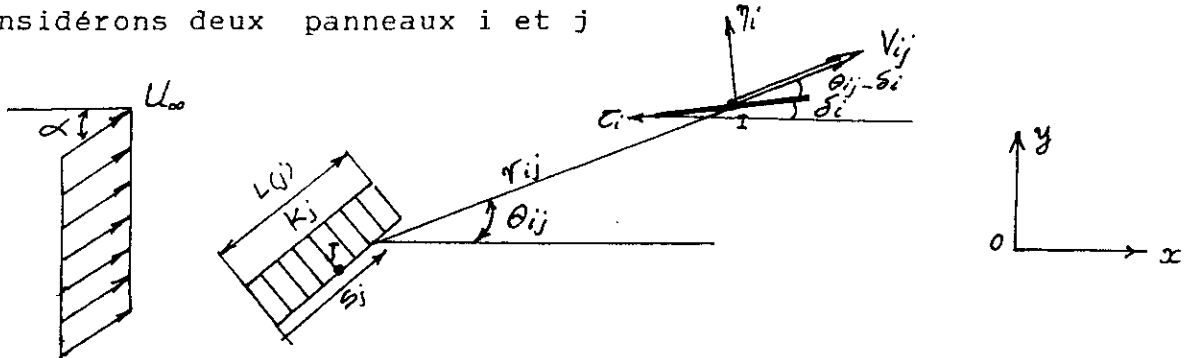


Figure 2-2. Schématisation de l'influence d'une distribution de sources le long d'un panneau J sur un point de contrôle I.

Avec  $V_j$  vitesse induite par un élément  $dS_j$  sur le point de contrôle i donc avec :

$$V_j = \frac{k_j dS_j}{2\pi r_{ij}}$$

ceci vient directement de :

$$\phi_j = \frac{k_j}{2\pi} \ln(r_{ij}) dS_j$$

$$\text{ou } V_{rj} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{k_j dS_j}{2\pi r_{ij}}$$

$$V_{\tau j} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

Alors on a seulement :

$$V_j = V_{rj} = \frac{k_j dS_j}{2\pi r_{ij}}$$

on fait une projection suivant les deux directions normale  $\eta_i$  et tangentielle  $\tau_i$  au panneau i

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{k_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j + \frac{k_i}{2} \quad (2-7)$$

$$V_{ri} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j l_j}{2\pi} \int_0^{l_j} \frac{k_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \cdot ds_j \quad (2-8)$$

Le point de contrôle est choisi au milieu de chaque panneau d'où :

$$x_i = \frac{x_{s_i} + x_{s_{i-1}}}{2} \quad (2-9)$$

$$y_i = \frac{y_{s_i} + y_{s_{i-1}}}{2}$$

De plus on a :

$$x_j = x_{s_{j-1}} + s_j \cos \delta_j \quad (2-10)$$

$$y_j = y_{s_{j-1}} + s_j \sin \delta_j$$

avec  $s_j$  abscisse suivant le panneaux  $j$

donc

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\theta_{ij} = \text{Artg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \quad (2-11)$$

$$\delta_i = \text{Artg} \frac{y_{s_i} - y_{s_j}}{x_{s_i} - x_{s_j}}$$

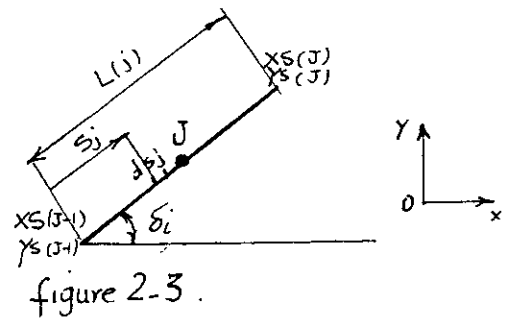
Alors tous les paramètres  $r_{ij}$  et  $\theta_{ij}$  sont fonctions de  $s_j$  ce qui impose un passage par l'intégrale sur la longueur de chaque panneau  $j$  notée  $l_j$  :

$$l_j = \sqrt{(x_{s_j} - x_{s_{j-1}})^2 + (y_{s_j} - y_{s_{j-1}})^2}$$

Le problème qui se pose est celui pour  $j=1$ , et afin de fermer l'obstacle on pose  $j-1=n$  pour  $j=1$  c'est à dire que le dernier point  $n$  appartient en même temps au panneau 1 et au panneau  $n$ .

La condition sur les frontières impose que :

$$V_{ri} = 0 \quad i=1, n \quad (2-12)$$



On obtient un système  $[A][k_j] = [B]$  d'ordre  $n \times n$  dont les inconnues sont les intensités des singularités.

## II-2-2 CAS D'UNE CHARGE LINEAIREMENT REPARTIE DE VORTEX

L'idée de base reste la même que précédemment pour la discretisation de l'obstacle, ou le profil considéré est approché par un polygone de  $n$  cotes.

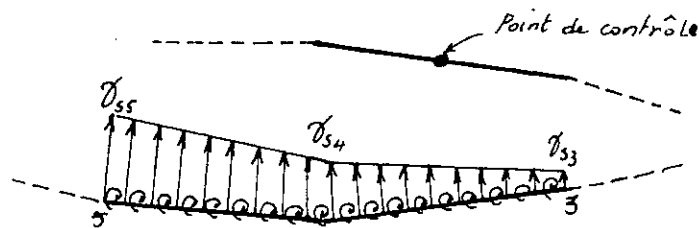


figure 2-4 : Distribution linéaire de vortex autour d'un profil

Comme le montre la figure 2-4, une distribution continue de vortex ( ou sources ) est placée sur chaque sommet du polygone d'intensité  $\gamma_{sj}$  par unité de longueur, et en faisant varier linéairement entre chaque deux sommets consécutifs l'intensité de la singularité distribuée.

La figure 2-4 illustre la méthode par deux panneaux connectés par trois sommets 3, 4 et 5 . Les points de contrôles sont choisis évidemment aux milieux de chaque panneau.

les valeurs des intensités des vortex sont déduites de telle sorte que la vitesse aux points de contrôles soit nulle. On obtiendra donc  $n$  équations pour  $n+1$  inconnues. On doit donc ajouter une équation supplémentaire au système, en imposant la condition de KUTTA-JOUKOWSKI qui est réalisée par :

$$\gamma_{s_{n+1}} = -\gamma_{s_1} \quad (2-13)$$

Cette condition fait que la vitesse induite en ce point soit finie .

## CONDITION DE KUTTA JOUKOWSKI

La condition de KUTTA a été découverte en 1902 et indépendamment de JOUKOWSKI en 1906, elle applicable au bord de fuite tranchant.

Cependant pour l'écoulement stationnaire autour d'un profil quelconque cette condition se traduit différemment selon la géométrie du bord de fuite:

- Pour un profil se terminant par un dièdre, le bord de fuite lui même est un point d'arrêt.

- Pour un profil se terminant par un point de rebroussement la vitesse a l'extrados et a l'intrados, au bord de fuite, a la même valeur finie

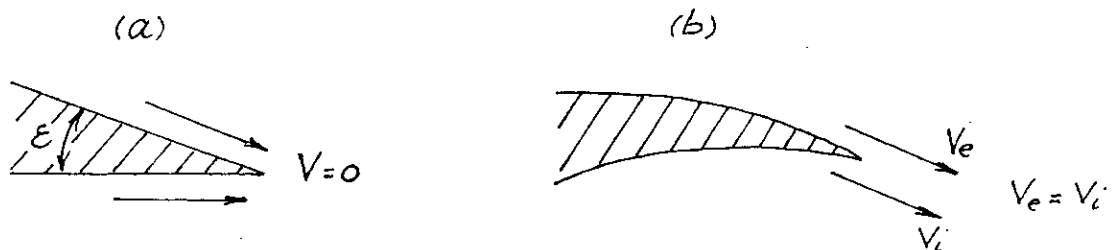


Figure 2-5. Condition de KUTTA d'un profil :  
a) En forme de dièdre.  
b) et d'un point de rebroussement  
au bord de fuite.

La relation (2-13) assure la condition de KUTTA-JOUKOWSKI pour obtenir un point de stagnation au bord de fuite (configuration a).

## II-3 CALCUL DES DIFFERENTS PARAMETRES DE L'ÉCOULEMENT

Les intensités des singularités étant déterminées, on peut donc les exploiter pour calculer les différents paramètres aérodynamique de l'écoulement.

## II-3-1 CALCUL DU COEFFICIENT DE PRESSION

On applique l'équation de Bernoulli entre deux points, le premier à l'infini amont et le deuxième, un point de l'obstacle  $i$  tel que :

$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = P + \frac{1}{2} \rho V_T^2$$

$$P - P_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \left[ 1 - \left( \frac{V_T}{U_{\infty}} \right)^2 \right]$$

On définit le coefficient de pression comme :

$$C_p \equiv \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{V_T}{U_{\infty}} \right)^2 \quad (2-19)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$C_p = 1 - \left( \frac{V_x^2}{U_{\infty}^2} \right) - \left( \frac{V_y^2}{U_{\infty}^2} \right) \quad (2-20)$$

## II-3-2 CALCUL DE LA PORTANCE

Soit une branche de longueur unité. Considérons l'élément  $abcd$  de largeur  $dx$ , on a :

$$ad = ds_i$$

$$bc = ds_e$$

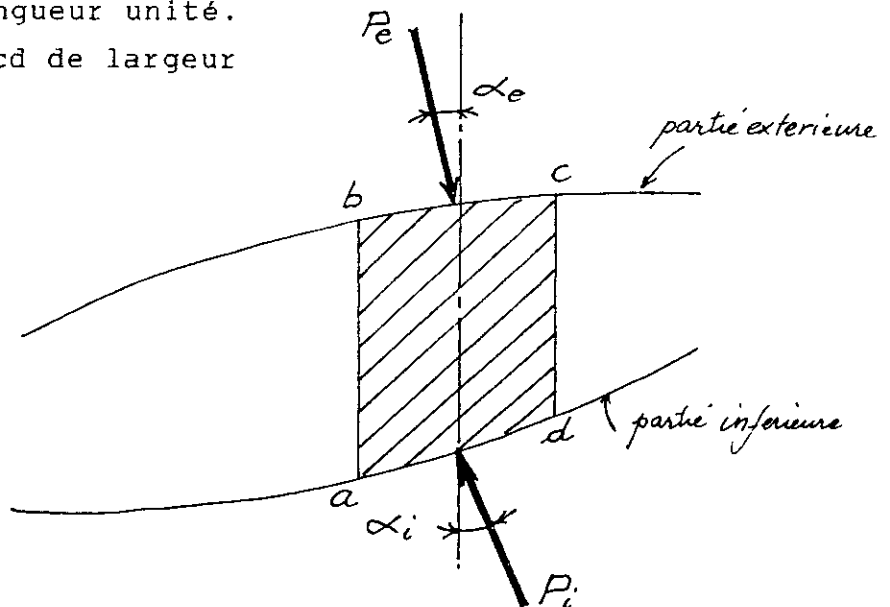


Figure 2-6. Forces agissant sur une portion  $abcd$  d'un corps solide.

la projection de la force résultante suivant l'axe y est :

$$\begin{aligned}
 -dR_y &= P_i d s_i \cos \alpha_i - P_e d s_e \cos \alpha_e \\
 &= (P_i - P_e) . dx \\
 -R_y &= \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_0^L (C_{p_i} - C_{p_e}) dx \quad (2-21)
 \end{aligned}$$

avec  $C_{p_e}$  : coefficient de pression de la surface supérieure (éxtrados).

$C_{p_i}$  : coefficient de pression de la surface inférieure (intrados).

On définit alors le coefficient de portance

$$C_l = \frac{1}{l} \int_0^1 (C_{p_i} - C_{p_e}) dx \quad (2-22)$$

pour le cas d'obstacle cylindrique les formules sont exprimées en coordonnées polaires et on obtiendra des formes plus simplifiées

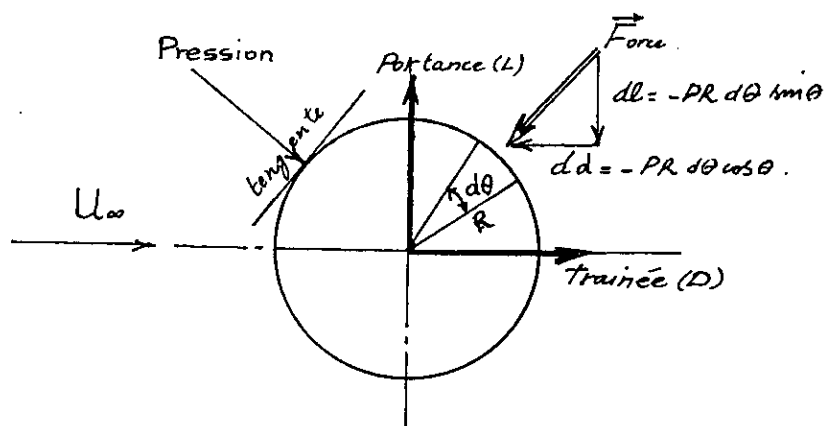


Figure 2-7. Forces agissant sur la surface d'un cylindre soumis à un écoulement Uniforme.

En intégrant sur tout le profil on obtient :

$$\begin{aligned}
 l &= - \int_0^{2\pi} P \sin(\theta) d\theta R \\
 d &= - \int_0^{2\pi} P \cos(\theta) d\theta R \quad (2-23)
 \end{aligned}$$

et les coefficients de portance et de traînée s'écriront :

$$C_l = - \int_0^{2\pi} C_p \sin(\theta) d\theta R$$

$$C_d = - \int_0^{2\pi} C_p \cos(\theta) d\theta R$$

(2-24)

### II-3-3 CALCUL ET TRACE DES LIGNES DE COURANTS

Une fois l'intensité des singularités déterminées la fonction de courant en un point du plan (x,y) peut être déduite par superposition des fonctions de courant produites par toutes les singularités, même celle de l'écoulement uniforme. On aura :

$$\psi(x,y) = \psi_{\text{écoul uniforme}} + \sum_{j=1}^n \psi_j(x,y) \quad (2-25)$$

ou  $\psi_j$  : la fonction de courant induite par le panneau j (j=1,n). On se réfère pour cela au tableau 1-1.

Pour le tracé d'une ligne de courant, on choisira un point (x,y) à l'infini amont (qu'on supposera à  $x = -10 \times$  dimension de l'obstacle), et on cherchera à relier tous les points ayant la même valeur de  $\psi$  que ce point, pour cela on procédera par la méthode de dichotomie, en suivant les étapes suivantes :

1- Choisir un point 0 de coordonnées (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>)

2- Calculer la fonction de courant en ce point qu'on notera  $\psi_0$

3- Repérer les points situés sur un cercle de rayon h donné et de centre le point 0(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>). Ces points seront repérés par un angle  $\theta$  tels que

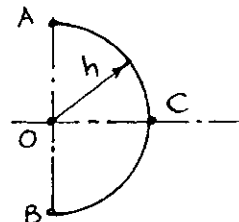
$$x = x_0 + h \cdot \cos\theta$$

$$y = y_0 + h \cdot \sin\theta$$



4- Repérer les deux sommets du cercle A et B tel que  $\theta_A = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta_B = -\frac{\pi}{2}$  et donc

$$\begin{aligned} x_A &= x_0 + h \cdot \cos \theta_A & x_B &= x_0 + h \cdot \cos \theta_B \\ y_A &= y_0 + h \cdot \sin \theta_A & y_B &= y_0 + h \cdot \sin \theta_B \end{aligned} \quad \text{et}$$



5- Calculer la fonction  $\psi$  aux points A et B tels que :

$$\psi_A = \psi(x_A, y_A) \quad \text{et} \quad \psi_B = \psi(x_B, y_B)$$

6- Repérer le point C tel que  $\theta_C = \frac{\theta_A + \theta_B}{2}$  et donc :

$$x_C = x_0 + h \cdot \cos \theta_C$$

$$y_C = y_0 + h \cdot \sin \theta_C$$

7- Calculer la fonction de courant au point C telle que :

$$\psi_C = \psi(x_C, y_C)$$

8- Calculer  $\psi_1 = (\psi_A - \psi_0)(\psi_C - \psi_0)$ . Si  $\psi_1 < 0$  alors il existe un point appartenant au cercle et compris entre A et C telle que la valeur de la fonction  $\psi$  soit égale à  $\psi_0$ , on remplace donc l'arc AB par AC. Dans le cas contraire, ou  $\psi_1 > 0$ , on remplace l'arc AB par CB.

9- Revenir à l'étape 5 cette opération se répétera jusqu'à atteindre le point ayant la même valeur  $\psi_0$  à une erreur  $\varepsilon$  près.

10- Après avoir trouver le point C tel que  $\psi_C = \psi_0$  on refait toute cette procédure depuis l'étape 3 en remplaçant le point C par O.

CHAPITRE III

APPLICATION DE LA METHODE POUR  
DIVERS OBSTACLES

### III-1 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE

On commence notre application par le cylindre, car la solution analytique est bien connue, ce qui nous permet de comparer les résultats de la méthode avec la solution exacte.

Soit un cylindre de rayon unité et un nombre  $n$  de points de contrôle, les sommets et leurs coordonnées sont calculables à l'aide d'une simple localisation angulaire :

$$\theta_i = \frac{2\pi}{n}(i-1) + \frac{\pi}{n} \quad \text{pour } i=1, n$$

donc :

$$x_s(i) = \cos\theta_i$$

$$y_s(i) = \sin\theta_i$$

Le cylindre sera alors approché par un polygone de  $n$  côtés (voir figure 3-1)

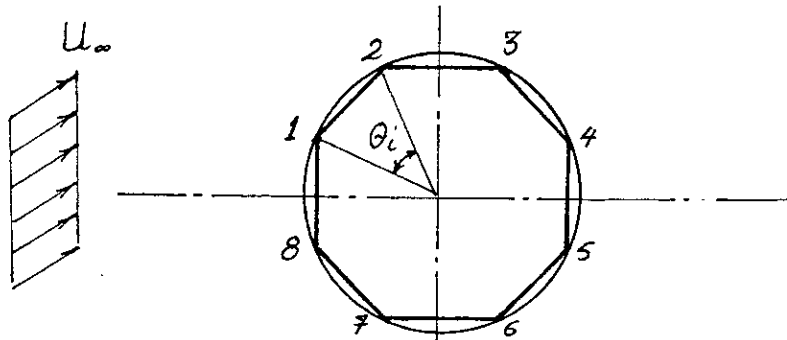


Figure 3-1. Discretisation du cylindre en 8 panneaux.

#### III-1-1 CHARGE CONCENTREE DE SOURCE

Considérons deux éléments  $i$  et  $j$  (figure 3-2). Chaque panneau étant chargé en son milieu par une source d'intensité  $k_j$  définie par unité de longueur (voir figure 3-2).

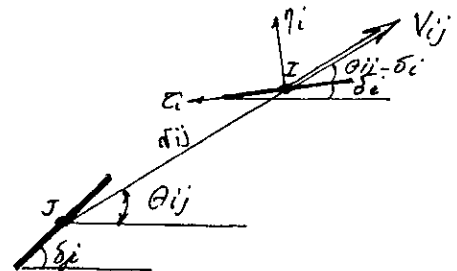


Figure 3.2. Influence d'un panneau  $J$  en charge concentrée de source sur un point de contrôle  $I$ .

La vitesse induite par l'élément  $j$  sur le point de contrôle  $i$ , suivant la normale, est d'après le tableau 1-1 :

$$V_{\eta i} = \frac{k_j \cdot l(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

L'effet de l'écoulement uniforme sur le point  $i$  suivant la normale est égal à  $-U_{\infty} \cdot \sin(\delta_i - \alpha)$

La vitesse normale induite par la totalité des panneaux et de l'écoulement uniforme  $U_{\infty}$  peut s'écrire comme suit :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \cdot \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j \cdot l(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{k_i}{2} \quad (3-1)$$

Le terme  $\frac{k_i}{2}$  représente l'influence de l'élément sur lui même (voir annexe 2).

Avec  $\sin(\theta_{ij} - \delta_i) = \sin\theta_{ij} \cos\delta_i - \cos\theta_{ij} \sin\delta_i$

et 
$$r_{ij} = \sqrt{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2}$$

$$\sin\theta_{ij} = \frac{y(i) - y(j)}{r_{ij}}$$

$$\cos\theta_{ij} = \frac{x(i) - x(j)}{r_{ij}}$$

La vitesse normale  $V_{\eta i}$  doit être nulle pour chaque point de contrôle  $i$

$$V_{\eta i} = 0 \Rightarrow \text{on obtient un système } [A](k) = (B)$$

Les inconnues sont les intensités des sources, on doit donc résoudre ce système par une méthode numérique telle que la méthode d'élimination de GAUSS avec pivotation maximale de lignes.

$[A](k) = (B)$  tel que :

$$\begin{aligned}
 A(i,j) &= \frac{\sin(\theta_{ij}-\delta_i) \cdot l(j)}{r_{ij}} = \frac{(y(i)-y(j))\cos\delta_i - (x(i)-x(j))\sin\delta_i}{(x(i)-x(j))^2 + (y(i)-y(j))^2} \\
 i \neq j \\
 A(i,i) &= \pi \\
 B(i) &= 2\pi U\omega (\sin\delta_i \cos\alpha - \cos\delta_i \sin\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{3-2}$$

Une fois la résolution faite, on obtient les valeurs  $k_i$   $i=1,n$ . On passe alors au calcul de la vitesse tangentielle :

On fait une projection suivant l'axe  $\tau$ , d'après la figure (3-2) on a :

$$V_{\tau i} = -U\omega \cdot \cos(\delta_i - \alpha) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j \cdot l(j)}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i)
 \tag{3-3}$$

On peut ensuite passer directement au calcul du coefficient de pression  $C_p$  donné par (2-19) :

$$C_p(i) = 1 - \left[ \frac{V_{\tau}(i)}{U\omega} \right]^2$$

Le résultat est représenté graphiquement sous la forme  $C_p=f(\theta)$  et comparé avec la solution analytique établit en annexe 1.

### III-1-2 CHARGE CONCENTREE DE VORTEX

On remplace simplement les sources par les vortex (voir figure 3-3)

L'effet du panneau  $j$  sur le point de contrôle  $i$  donne une vitesse  $V_{ij} = \gamma_j / (2\pi r_{ij})$ . Cette vitesse se divise en deux composantes (tangentielle et normale) avec  $r_j$  intensité du vortex.

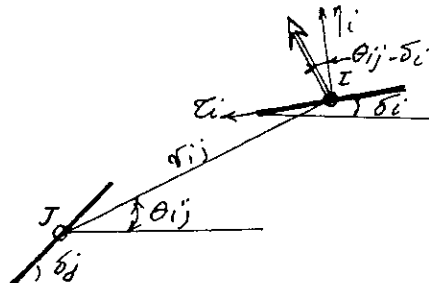


figure 3.3 . Influence d'un panneau J en charge concentrée de Vortex sur le point de contrôle I.

Alors une projection suivant la normale donnerait :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \cdot \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\gamma_j \cdot l(j)}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) + \begin{matrix} 0 \\ (i=j) \end{matrix} \quad (3-4)$$

L'influence du panneau  $i$  sur son point de contrôle est nulle (Annexe 2).

La condition limite sur la frontière de l'obstacle impose que :

$$V_{\eta i} = 0$$

d'où l'obtention de nouveau un système d'équations linéaires à  $n$  inconnues ( $\gamma_j$   $j=1, n$ ).  $[A] (\gamma) = (B)$

$$\left| \begin{array}{l} A(i, j) = \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i) \cdot l(j)}{r_{ij}} - \frac{(x(i) - x(j)) \cos \delta_i (y(i) - y(j)) \sin \delta_i}{(x(i) - x(j))^2 + (y(i) - y(j))^2} \cdot l(j) \\ i \neq j \\ \\ A(i, i) = 0 \\ \\ B(i) = 2\pi U_{\infty} (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha) \end{array} \right. \quad (3-5)$$

On résout alors ce système, ensuite, on injecte ces valeurs dans le calcul de la vitesse tangentielle  $V_{\tau}(i)$  qui se déduit par la projection de  $V_{ij}$  suivant l'axe  $\tau$ . (voir figure 3-3)

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cdot \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\gamma_j \cdot l(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{\gamma_i}{2} \quad (3-6)$$

Ainsi on calcul le coefficient de pression :

$$C_p(i) = 1 - \left[ \frac{V_{\tau}(i)}{U_{\infty}} \right]^2$$

Il est à noter que ce coefficient  $C_p$  ne dépend pas de la grandeur de la vitesse  $U_{\infty}$  de l'écoulement uniforme.

### III-1-3 CHARGE UNIFORMEMENT DISTRIBUEE DE SOURCES

Afin d'améliorer les résultats précédents et pour une meilleure précision, on passe à une distribution uniforme de sources d'intensités  $k_j$  par unité de longueur constante le long de chaque panneau (voir figure 3-4).

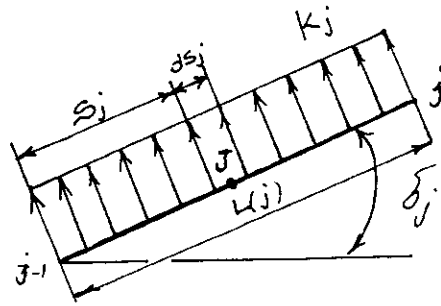


Figure 3-4. Charge uniformément distribué sur un panneau  $J$

La vitesse induite par chaque segment  $ds_j$  est  $(k_j ds_j)/(2\pi r_{ij})$  ou  $r_{ij}$  représente le rayon position du panneau  $j$  par rapport au point de contrôle  $i$ .

Etudions l'influence d'un élément différentiel  $ds_j$  sur le point de contrôle  $i$  par des projections suivant la normale et la tangentielle, On obtient l'ensemble des influences entre le point de contrôle  $i$  et l'ensemble des panneaux ( $j=1,n$ ). Une fois les vitesses élémentaires trouvées, on doit passer obligatoirement par une intégration le long de chaque panneau.

Considérons un panneau  $j$  et un point de contrôle  $i$  (figure 3-5)

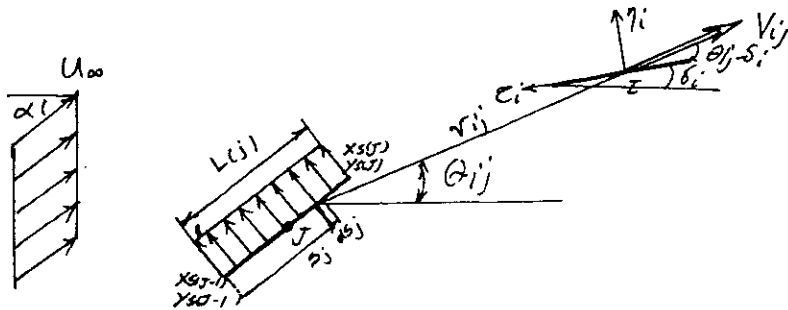


Figure 3-5. Influence d'un panneau  $J$  chargé uniformément de sources sur un point de contrôle  $I$ .

La vitesse induite suivant la normale par l'élément  $ds_j$  est :

$$dV_{\eta i} = \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

$$V_{\eta i} = \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i)$$

L'ensemble des panneaux donnent :

$$V_{\eta i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{k_i}{2}$$

L'écoulement uniforme contribue avec  $-U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha)$ , et cela pour donner finalement :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{k_i}{2} \quad (3-7)$$

Mais dans ce cas tout est en fonction de la variable curviligne  $s_j$  telle que :

$$x(j) = x_s(j-1) + s_j \cos \delta_j$$

$$y(j) = y_s(j-1) + s_j \sin \delta_j$$

et

$$r_{ij}^2 = (x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j)^2$$

Si  $j=1$  alors on prend  $j-1=n$  pour évidemment fermer la forme du corps étudié.

$$\sin \theta_{ij} = \frac{y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j}{r_{ij}}$$

$$\cos \theta_{ij} = \frac{x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j}{r_{ij}}$$



Alors l'intégrale de la formule (3-7) devient :

$$\int_0^{l(j)} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j}{2\pi r_{ij}} = \int_0^{l(j)} \frac{(y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j) \cos \delta_j - (x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j) \sin \delta_j}{2\pi [(x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j)^2]} ds_j$$

Cette intégrale peut s'écrire sous la forme :

$$\int_0^{l(j)} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j}{2\pi r_{ij}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(j)} \frac{(T_1 s_j + T_2) ds_j}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} \quad (3-8)$$

Il est à noter que cette intégrale se trouve répéter avec  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  définis pour chaque cas, alors il suffit de la calculer une fois en fonction de  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  et pour chaque cas, on doit remplacer les valeurs des paramètres appropriées.

Différents cas se présentent pour le calcul. Pour des raisons de simplifications, on met le dénominateur sous la forme canonique.

$$r_{ij}^2 = T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2 = (s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2$$

Alors l'intégrale se calcule comme suit :

Cas 1 : si  $T_3^2 - T_4^2 > 0$

$$I = \int \frac{(T_1 s_j + T_2) ds_j}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2} = T_1 \int \frac{s_j ds_j}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2} + T_2 \int \frac{ds_j}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2}$$

$$I = \frac{T_1}{2} \int \frac{2(s_j - T_4) + 2T_4}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2} ds_j + T_2 \int \frac{ds_j}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2}$$

$$I = \frac{T_1}{2} \int \frac{2(s_j - T_4) ds_j}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2} + (T_1 T_4 + T_2) \int \frac{ds_j}{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2}$$

$$I = \frac{T_1}{2} \text{Ln} \left| (s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2 \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{T_3^2 - T_4^2} \int \frac{ds_j}{\left[ \frac{(s_j - T_4)^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]^2 + 1}$$

$$I = \frac{T_1}{2} \text{Ln} \left| (s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2 \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \text{Arctg} \frac{s_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \quad (3-9)$$

Cas 2 Si  $T_3^2 - T_4^2 = 0$  alors

$$I = \int \frac{(T_1 s_j + T_2) ds_j}{(s_j - T_4)^2} = T_1 \int \frac{(s_j - T_4 + T_4) ds_j}{(s_j - T_4)^2} + T_2 \int \frac{ds_j}{(s_j - T_4)^2}$$

$$I = T_1 \int \frac{(s_j - T_4) ds_j}{(s_j - T_4)^2} + T_1 T_4 \int \frac{ds_j}{(s_j - T_4)^2} + T_2 \int \frac{ds_j}{(s_j - T_4)^2}$$

$$I = T_1 \text{Ln} |s_j - T_4| + (T_1 T_4 + T_2) \left[ \frac{-1}{s_j - T_4} \right] \quad (3-10)$$

Revenons à notre distribution :

Comme déjà indiqué, il suffit maintenant de définir les paramètres  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$

$$\int_0^{l(j)} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j}{2\pi r_{ij}} = \int_0^{l(j)} \frac{(y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j) \cos \delta_j - (x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j) \sin \delta_j}{2\pi [(x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j)^2 + (y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j)^2]}$$

$$(y(i) - y_s(j-1) - s_j \sin \delta_j) \cos \delta_j - (x(i) - x_s(j-1) - s_j \cos \delta_j) \sin \delta_j =$$

$$\left\{ (y(i) - y_s(j-1)) \cos \delta_j - (x(i) - x_s(j-1)) \sin \delta_j \right\} + \left\{ -\sin \delta_j \cos \delta_i - \cos \delta_j \sin \delta_i \right\} s_j$$

$$= T_2 + T_1 s$$

Et

$$\begin{aligned} & (x(i)-x_s(j-1)-s_j \cos \delta_j)^2 + (y(i)-y_s(j-1)-s_j \sin \delta_j)^2 = \\ & (x(i)-x_s(j-1))^2 + (y(i)-y_s(j-1))^2 - 2 \left\{ (x(i)-x_s(j-1)) \cos \delta_j \right. \\ & \left. + (y(i)-y_s(j-1)) \sin \delta_j \right\} + (\cos^2 \delta_j + \sin^2 \delta_j) \cdot s_j^2 = T_3^2 - 2T_4^2 + s_j^2 \end{aligned}$$

En fin :

$$\begin{aligned} T_1 &= -\sin \delta_j \cos \delta_i - \cos \delta_j \sin \delta_i \\ T_2 &= (y(i)-y_s(j-1)) \cos \delta_j - (x(i)-x_s(j-1)) \sin \delta_j \\ T_3^2 &= (x(i)-x_s(j-1))^2 + (y(i)-y_s(j-1))^2 \\ T_4 &= (x(i)-x_s(j-1)) \cos \delta_j + (y(i)-y_s(j-1)) \sin \delta_j \\ T_3^2 - T_4^2 &= (x(i)-x_s(j-1))^2 + (y(i)-y_s(j-1))^2 - (y(i)-y_s(j-1))^2 \sin^2 \delta_j \\ &\quad - x((i)-x_s(j-1))^2 \cos^2 \delta_j - 2(x(i)-x_s(j-1))(y(i)-y_s(j-1)) \sin \delta_j \cos \delta_j \\ &= \left[ (x(i)-x_s(j-1)) \sin \delta_j - (y(i)-y_s(j-1)) \cos \delta_j \right]^2 \end{aligned}$$

Alors  $T_3^2 - T_4^2$  est un carré parfait, ce qui nous évite le cas ou  $T_3^2 - T_4^2 < 0$ .

La vitesse donnée par la formule (3-7) devi ent alors :

$$V_{\eta i} = -U\omega \cdot \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{k_j}{2\pi} I_{i j} + \frac{k_i}{2} \quad (3-11)$$

La condition de vitesse normale nulle s'impose pour d'écrire un cylindre, donc on aura un système d'équations  $[A] (k_j) = (B)$  telles que les  $A_{ij}$  et  $B_i$  sont définis par :

$$A(i, j) = \frac{T_1}{2} \ln \left| \frac{(L_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2}{T_3^2} \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \operatorname{Arctg} \frac{L_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \operatorname{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

$$A(i, i) = \pi \quad (3-12)$$

$$B(i) = 2\pi U_\infty (\sin \delta_i \cos \alpha - \cos \delta_i \sin \alpha)$$

Avec  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  déjà définis.

Pour le cas  $j = 1$  on remplace la valeur de  $j-1$  par  $n$ .

-Calcul de la vitesse tangentielle aux points de contrôles:

d'après la figure 3-5, l'écoulement uniforme contribue par la quantité (suivant  $\tau$ ):  $-U_\infty \cos(\delta_i - \alpha)$ .

L'élément  $ds_j$  induit une vitesse élémentaire  $-\frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i)$

Pour tout le panneau on doit intégrer cette vitesse élémentaire.

$$\text{alors on aura } V_{ij} = - \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (3-13)$$

Si  $i=j$  chaque source a son image de l'autre cote du point de contrôle alors il y a compensation de part et d'autre (voir figure 3-6). Donc on peut conclure que le terme ( $i=j$ ) est nul



Figure 3-6. Aspect compensatoire de l'influence d'un panneau sur lui même.

on aura :

$$V_{ri} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (3-14)$$

Remarque que l'intégrale (sous le signe somme) a la même forme que (3-8) déjà calculée.

$$\int_0^{l(j)} \frac{(T_1 s_j + T_2) ds_j}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} = \frac{T_1}{2} \operatorname{Ln} \left| \frac{(s_j - T_4)^2 + T_3^2 - T_4^2}{T_3^2} \right| + \\
 + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \operatorname{Arctg} \frac{s_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \operatorname{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

Alors il suffit de définir  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  par identification

On trouve :

$$T_1 = -\sin\delta_j \cos\delta_i - \cos\delta_j \sin\delta_i$$

$$T_2 = (y(i) - y_s(j-1)) \cos\delta_j - (x(i) - x_s(j-1)) \sin\delta_j$$

$T_3^2, T_4$  restent les mêmes que précédemment et toujours pour  $j=1$  on remplace  $j-1$  par  $n$ .

On calcule à présent le coefficient de pression défini par :

$$C_p(i) = 1 - \left[ \frac{V_T(i)}{U_\infty} \right]^2$$

Il est à noter que les cas où  $C_p(i)=1$  représentent des points de stagnations (vitesse nulle).

### III-1-4 CHARGE UNIFORME DISTRIBUEE DE VORTEX

On peut en deuxième lieu remplacer les sources par des vortex, mais on s'attend à avoir des résultats analogues au cas des sources.

Considérons toujours deux panneaux sur lesquels il y a une distribution uniforme de vortex d'intensité  $\gamma_j$  par unité de longueur de chaque panneau (voir figure 3-7).

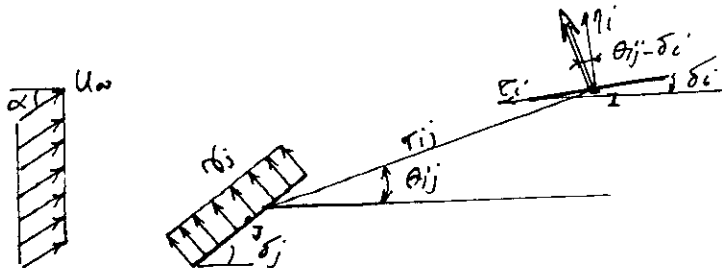


Figure 3.7. Influence d'un panneau  $J$  sur le point de contrôle  $I$  avec une charge uniforme de vortex.

Alors la vitesse normale induite par l'écoulement uniforme et l'ensemble des panneaux sur le point de contrôle  $i$  est :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_0^{l(j)} \frac{\gamma_j ds_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) + \begin{matrix} 0 \\ (i=j) \end{matrix}$$

Le terme de  $(i=j)$  donne une vitesse nulle car il y a l'effet de compensation sur le panneau lui même comme, donc :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\gamma_j I_{ij}}{2\pi}$$

$$V_{\eta i} = 0 \Rightarrow [A] (Y) = (B)$$

avec :

$$\begin{cases} A(i, j) = I_{ij} \\ i \neq j \\ A(i, i) = 0 \\ B(i) = 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{cases} \quad (3-15)$$

$$I_{ij} = \int_0^{l(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} ds_j = \int_0^{l(j)} \frac{T_1 S_j + T_2}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2} ds_j$$

$$I_{ij} = \frac{T_1}{2} \ln \left| \frac{l^2(j) - 2T_4 l(j) + T_3^2}{T_3^2} \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \text{Arctg} \frac{l(j) - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \text{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

Avec :

$$T_1 = -\cos \delta_i \cos \delta_j - \sin \delta_i \sin \delta_j$$

$$T_2 = [x(i) - x_s(j-1)] \cos \delta_i + [y(i) - y_s(j-1)] \sin \delta_i$$

$$T_3, T_4 \text{ restent inchangés}$$

On passe au calcul de  $V_{\tau i}$

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_0^{l(j)} \frac{k_j}{2\pi} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) ds_j + \frac{k_i}{2} \quad (3-16)$$

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{I_{ijkj}}{2\pi} + \frac{k_i}{2}$$

$$I_{ij} = \frac{T_1}{2} \ln \left| \frac{l^2(j) - 2T_4 l(j) + T_3^2}{T_3^2} \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \text{Arctg} \frac{l(j) - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \text{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

avec

$$T_1 = -\sin \delta_j \cos \delta_i - \cos \delta_j \sin \delta_i$$

$$T_2 = -[x(i) - x_s(j-1)] \sin \delta_i + [y(i) - y_s(j-1)] \cos \delta_i$$

$$T_3, T_4^2 \text{ restent inchangés}$$

et ensuite :

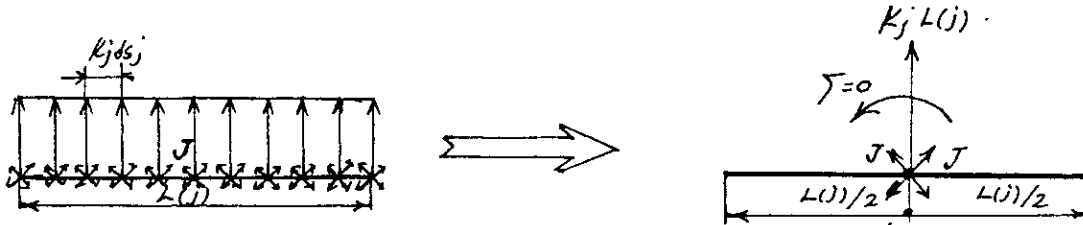
$$C_p(i) = 1 - \left[ \frac{V_{\tau}(i)}{U_{\infty}} \right]^2$$

Remarque: La distribution uniforme n'est pas continue c'est à dire de part et d'autre des sommets subsistent deux intensités différentes.

### III-2 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE TOURNANT :

L'analyse qu'on a faite jusqu'à présent convient seulement aux corps sans portance, la raison est que :

- La portance est le résultat d'une circulation qui est l'équivalent d'un moment, alors pour le cas d'une distribution uniforme :

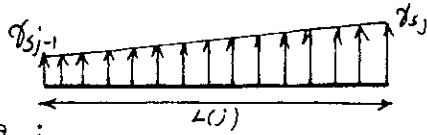


*Réduction d'une charge uniforme de source au point de contrôle.*

Si on fait une réduction au point de contrôle on aura uniquement un vecteur au centre et un moment réduit nul car le point de contrôle est aussi le centre de gravité de la charge.

Donc tout autre distribution non uniforme peut simuler les écoulements autour de corps portants. En fait les corps sans portance ne sont pas de grande utilité dans la réalité, mais on s'intéresse plutôt aux profils portant qui trouvent leur application dans plusieurs domaines tels que l'aéronautique, aviation etc...

On prendra donc une distribution la plus simple qui nous assure la production de portance, c'est la distribution de charge linéaire de vortex.

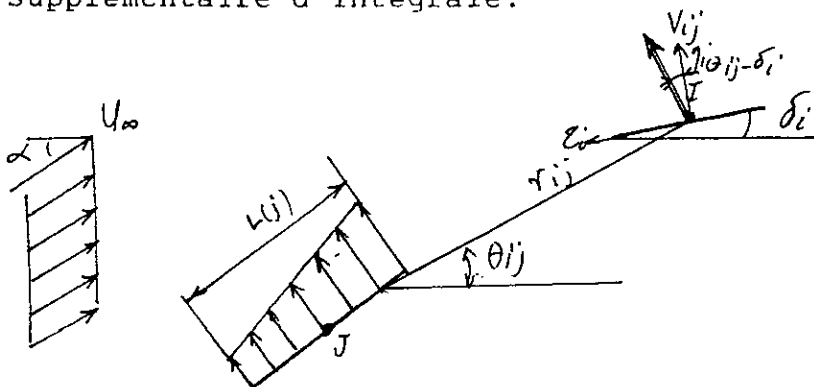


*Figure 3.8. Distribution linéaire de vortex.*

D'après la figure 3-8 on a :

$$\gamma(j) = \gamma_s(j-1) + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{L(j)} s_j \quad (3-17)$$

L'application  $\gamma_s(j)$  signifie que c'est propre aux sommets. Considérons deux éléments  $i$  et  $j$  (voir figure 3-9). La vitesse induite a toujours la même expression sauf qu'ici  $\gamma_j$  n'est plus constante mais fonction de  $s_j$  ce qui fait qu'on aura un calcul supplémentaire d'intégrale.



*Figure 3-9. Influence du panneau J chargé linéairement par des vortex sur le point de contrôle Z*



La vitesse normale induite est alors :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \int_c^{l_j} \frac{\gamma(j)}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

Le terme de (i=j) est non nul car on n'est plus en distribution uniforme, mais constitue un cas bien particulier qu'on discutera plus loin.

On injecte l'expression (3-17) pour avoir :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\gamma_s(j-1) + \frac{(\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)) S_j}{l(j)}}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \gamma_s(j-1) \int_0^{l(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j}{2\pi r_{ij}} + \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l(j)} \int_0^{l(j)} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j}{2\pi r_{ij}}$$

Pour des raisons de simplifications on pose :

$$\int_0^{l(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j}{2\pi r_{ij}} = G(i, j) \quad (3-18)$$

$$\int_0^{l(j)} \frac{S_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j}{2\pi r_{ij}} = F(i, j)$$

Alors :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left[ G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \frac{(\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1))}{l(j)} \right]$$

le but c'est d'écrire  $V_{\eta i} = [A](\gamma_s) - (B) = 0$

On développe la somme qui commence de  $j=2$  à  $n+1$  pour éviter la répétition de la distribution sur le premier panneau, le point  $n+1$  est confondu avec le point 1.

$$\text{donc } F(i, n+1) = f(i, 1)$$

$$G(i, n+1) = G(i, 1)$$

$$l(n+1) = l(1)$$

et utilisant la condition de KUTTA ( $\gamma_s(n+1) = -\gamma_s(1)$ ) et la vitesse  $V_{\eta i}$  s'écrit :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n A(i, j) \cdot \gamma_s(j)$$

$$V_{\eta i} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n A(i, j) \cdot \gamma_s(j)$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(i, 1) = G(i, 2) - \frac{F(i, 2)}{l(2)} - \frac{F(i, 1)}{l(1)} \\ A(i, j) = G(i, j+1) + \frac{F(i, j)}{l(j)} - \frac{F(i, j+1)}{l(j+1)} \\ A(i, n) = G(i, 1) + \frac{F(i, n)}{l(n)} - \frac{F(i, 1)}{l(1)} \\ B(i) = 2\pi U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) \end{array} \right. \quad (3-19)$$

Le calcul des coefficients  $G(i, j)$  et  $F(i, j)$  est développé en Annexe 3

Remarque:

La condition de KUTTA impose que le point 1 soit un point de stagnation.

Dans le cas d'un cylindre en rotation, d'après la solution exacte et pour une valeur donnée de la circulation les 2 points de stagnations sont bien déterminés (position connue), alors pour appliquer notre méthode, on doit refaire la numérotation des panneaux de telle manière que le premier panneau contiendrait le

point de stagnation qui serait de préférence un sommet et cette démarche constitue une partie très importante dans le programme (le deuxième point sera déduit automatiquement) voir figure 3-10.

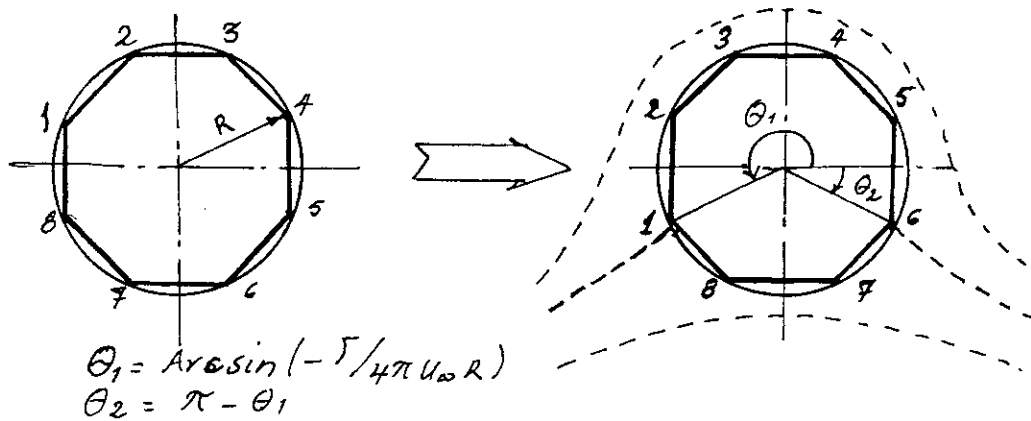


Figure 3-10. Renumerotation des sommets pour le cas d'un cylindre en rotation.

On résout le système  $[A](\gamma_s) = [B]$  avec les paramètres  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$  définis :

$$T_1 = -\cos\delta_i \cos\delta_j - \sin\delta_i \sin\delta_j$$

$$T_2 = [x(i) - x_s(j-1)]\cos\delta_i + [y(i) - y_s(j-1)]\sin\delta_i$$

$$T_3, T_4 \text{ restent inchangés}$$

Une fois les solutions  $\gamma_s(j)$  ( $j=1, n$ ) calculées, on les injecte pour calculer  $V_{ri}$  telle que :

$$V_{ri} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\gamma(j)}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

$$V_{ri} = -U_\infty \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \left[ G(i, j) \cdot \gamma_s(j-1) + F(i, j) \frac{(\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1))}{l(j)} \right]$$

avec  $G(i,j), F(i,j)$  définis:

$$G(i,j) = \int_0^{l(j)} \frac{\sin(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j}{2\pi r_{ij}}$$

$$F(i,j) = \int_0^{l(j)} \frac{S_j \cdot \sin(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j}{2\pi r_{ij}} \quad (3-20)$$

On remarque que (3-20) a la même forme que (3-18), donc on aura les mêmes calculs.

On aura :

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n A(i,j) \cdot \gamma_s(j) + \text{terme}_{i=j}$$

avec les  $A(i,j)$  définis en (3-19)

Le cas  $i=j$  représente l'influence du panneau sur lui même, le développement fait en annexe 2 nous permet de trouver la valeur de ce facteur d'influence (voir fig 3-11).

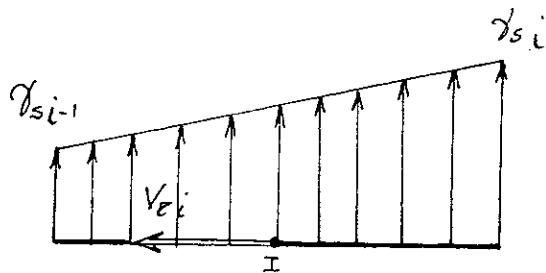


Figure 3-11

$$V\tau(l=j) = \frac{\gamma_i(s_j=l(j)/2)}{2} = \frac{\gamma_s(i-1) + \gamma_s(i)}{2} \quad (3-24)$$

Alors à ce niveau :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(i, i) = 1 \\ F(i, i) = l(i)/2 \end{array} \right. \quad (3-25)$$

### III-3 TRACE DES LIGNES DE COURANT

#### -CAS DU CYLINDRE FIXE

Pour tracer une ligne de courant, on choisit un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  situé en dehors du cylindre, on calcule la valeur de la fonction de courant dû à l'écoulement uniforme et aux singularités distribuées sur les panneaux.

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{k_j \theta_i ds_j}{2\pi} \quad (3-26)$$

$\alpha \equiv$  l'angle que fait le rayon position  $r_{ij}$  avec l'axe des x

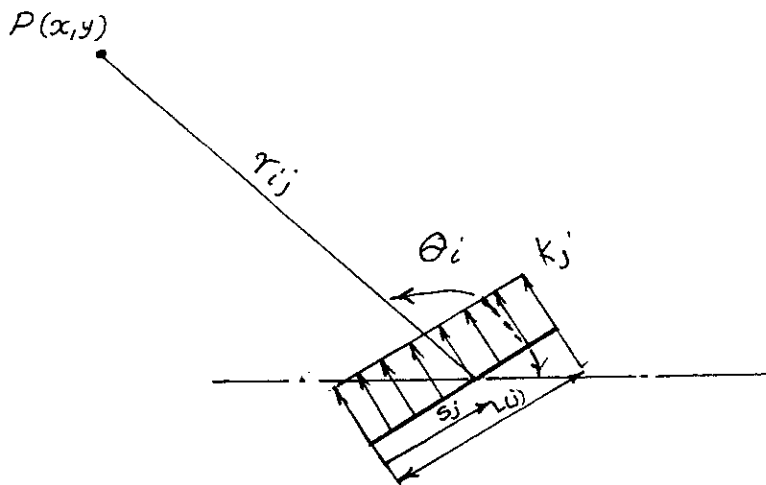


Figure 3-12. Influence d'une distribution uniforme de source sur un panneau au point  $P(x, y)$ .

d'après la figure 3.12 on a :

$$\theta_i = \text{Arctg} \frac{y_0 - y(j)}{x_0 - x(j)}$$

avec :

$$y(j) = y_s(j-1) + s_j \sin \delta_j$$

$$x(j) = x_s(j-1) + s_j \cos \delta_j$$

alors :

$$\psi(x_0, y_0) = U_\infty y_0 \cos \alpha - U_\infty x_0 \sin \alpha + \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{k_j}{2\pi} \text{Arctg} \frac{y_0 - y(j)}{x_0 - x(j)} ds_j \quad (3-27)$$

On a affaire à une intégrale qu'on fera numériquement par SIMPSON Pour une meilleure précision on a pris le cas de  $n=32$  points de contrôles et on obtient ainsi la valeur de la fonction de courant au point  $(x, y)$ , ensuite on passe au test sur un demi cercle de rayon  $h$  par dichotomie pour retrouver le point ayant la même valeur  $\psi$ , et le processus continue.

#### -CAS DU CYLINDRE TOURNANT

On considère une distribution linéaire de vortex le long de chaque panneau, et on doit évaluer la valeur de la fonction courant en un point donnée  $(x_0, y_0)$  en dehors du cylindre (voir figure 3-13).

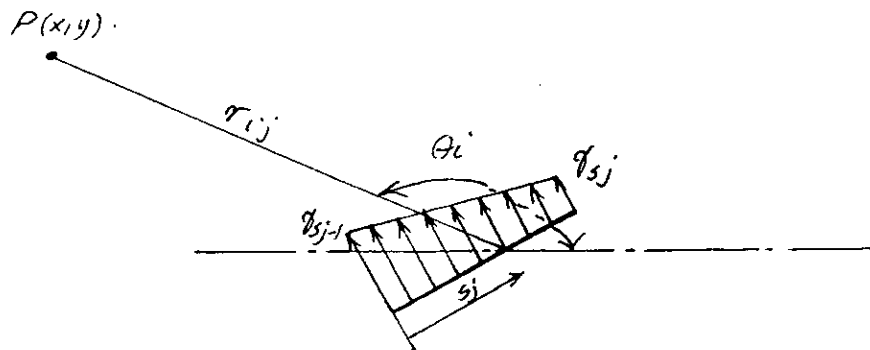


Figure 3-13. Schématisation de l'influence d'un panneau  $J$  en distribution linéaire de vortex sur un point  $P(x, y)$

La fonction de courant  $\psi$  en un point  $(x_0, y_0)$  est donnée par:

-Pour l'écoulement uniforme  $\psi_1(x, y) = U y \cos\alpha + U x \sin\alpha$

-pour un vortex élémentaire d'intensité  $\gamma_j$  par unité de longueur

$$\psi_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \gamma_j \text{Ln } r_{ij} \, dS_j$$

donc:

$$\psi(x_0, y_0) = \psi_1(x_0, y_0) + \psi_2(x_0, y_0)$$

$$\psi(x_0, y_0) = U y \cos\alpha + U x \sin\alpha + \sum_{j=1}^n \int_0^{l(j)} \frac{\gamma_j}{2\pi} \text{Ln } r_{ij} \, ds_j \quad (3-28)$$

Alors on est amené à faire un calcul d'intégrale et on procédera numériquement en utilisant la méthode de Simpson disponible à la ref 8.

Par la suite on passe au tracé des lignes de courants en suivant la procédure décrite au chapitre II. L'organigramme qui suit illustre cette méthode de tracé.

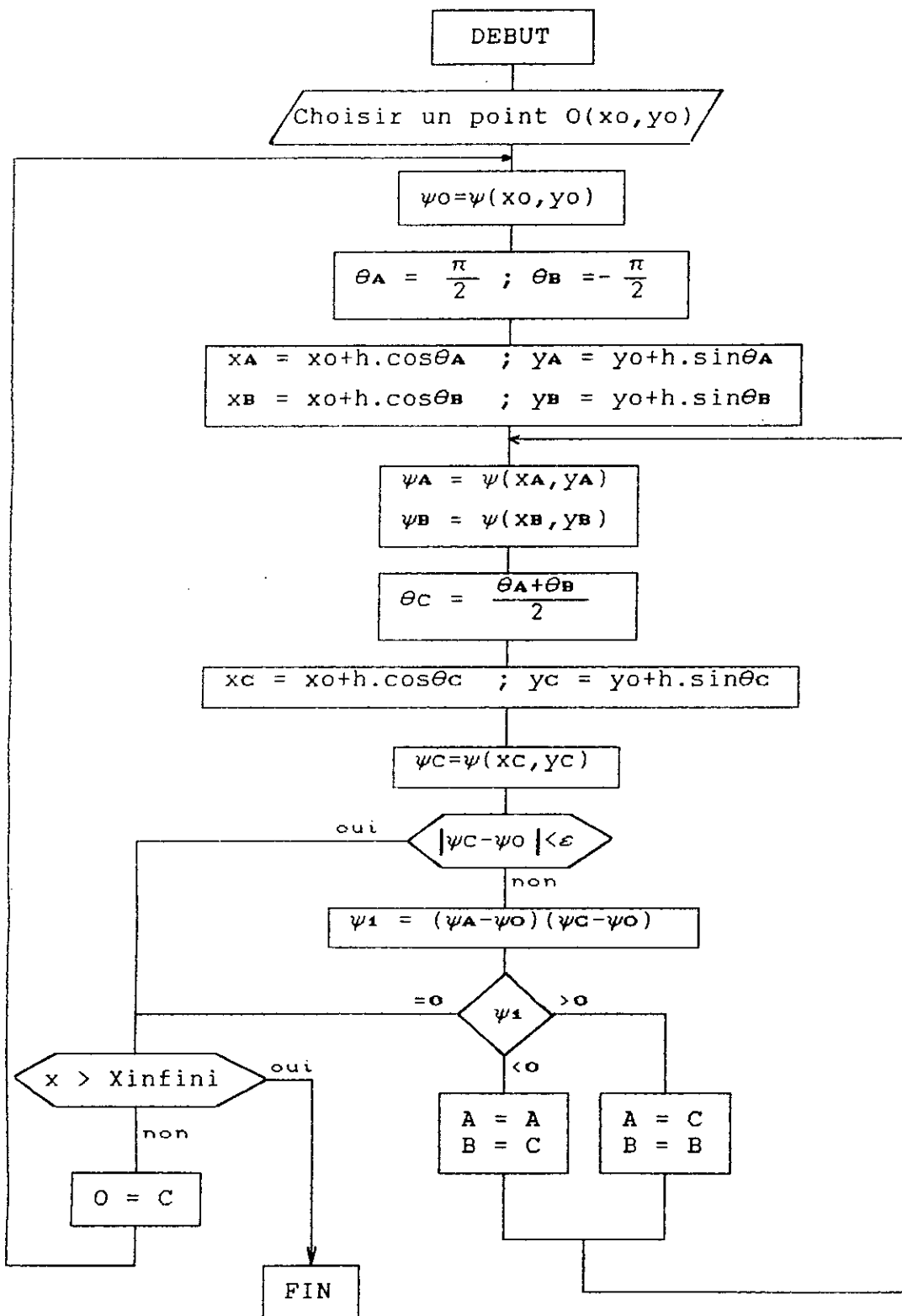


figure 3-14 Organigramme de tracé des lignes de courants



### III-4 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE RANGÉE DE CYLINDRES

Soit une rangée de cylindres identiques de rayons unité, disposés verticalement, la distance séparant les centres est de  $a$  ( $a=2r$ ).

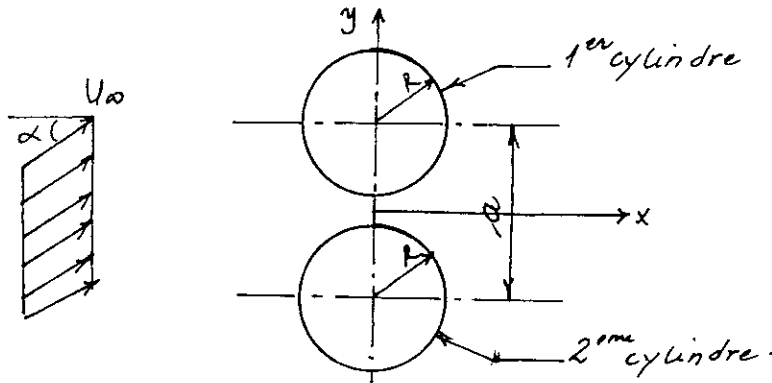


Figure 3-15. Deux cylindres soumis à un écoulement uniforme  $U_\infty$ .

Cette rangée de cylindres peut être remplacée par une rangée d'aube qui s'avère très utile de le domaine des turbomachines. Considérons le cas simple de deux cylindres comme indiqué sur la figure 3-15. Le système d'axe étant centré entre les deux cylindres, on voudrait ajuster les singularités d'une distribution uniforme pour d'écrire l'écoulement autour de ces cylindres.

La démarche reste évidemment la même que celle d'un cylindre isolé

On divise chaque cylindre en  $n$  panneaux, donc le nombre total de panneau devient  $2n$ .

On considère un panneau  $I$  et on évalue l'influence de la totalité de  $2n$  panneaux sur ce point (voir figure 3-5)

La vitesse normale induite au point  $I$  par l'écoulement uniforme et l'ensemble des  $2n$  panneaux est

$$v_{\eta i} = -U_\infty \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \sin(\theta_{ij} - \delta_i) + \frac{k_i}{2} \quad (3-29)$$

En utilisant les intégrales déjà établies en (3-8)

Toute fois pour fermer les deux cylindres on a :

si  $j=1$  on remplace  $j-1$  par  $n$

et si  $j= n+1$  on remplace  $j-1$  par  $2n$

on impose la condition  $V_{\tau i}=0$  mais cette fois ci pour  $2n$  points de contrôle, on doit résoudre un système d'équations  $2n \times 2n$  avec les inconnues  $k_i$  ( $i=1$  à  $2n$ ) tout en précisant que :

$k_i$  ( $i=1$  à  $n$ ) solutions du premier cylindre.

$k_i$  ( $i=n+1$  à  $2n$ ) solutions du deuxième cylindre.

Ensuite on passe au calcul de la vitesse  $V_{\tau i}$  :

$$V_{\tau i} = -U_{\infty} \cos(\delta_i - \alpha) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{2n} \int_0^{l(j)} \frac{k_j \cdot ds_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) \quad (3-30)$$

et finalement :  $C_p(i) = 1 - \left[ \frac{V_{\tau(i)}}{U_{\infty}} \right]^2$

Cette solution trouvée est valable pour deux cylindres seulement et si on veut généraliser à une rangée de cylindres, il nous faudra une infinité de cylindres donc une infinité de points de contrôle; ce qui impossible à le réaliser numériquement.

Pour juste une approximation de l'écoulement dans cette rangée de cylindres, et vue la symétrie du problème, l'analyse sera restreinte à un passage formé par deux cylindres dont la paroi supérieure  $C_2$  d'un cylindre et la paroi  $C_3$  inférieure de l'autre (voir figure 3-16) et on néglige l'effet des autres cylindres.

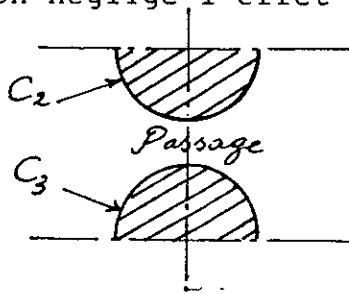
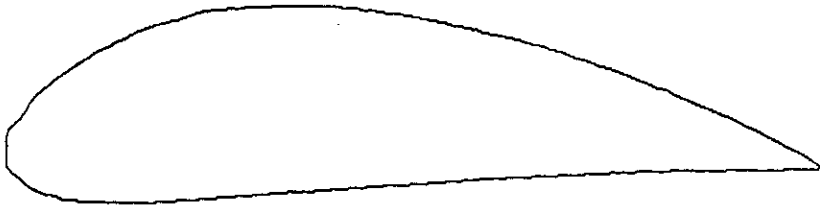


Figure 3-16. Passage entre deux cylindres (Contraction).

### III-5 ANALYSE D'ÉCOULEMENT AUTOUR DES PROFILS

On entend par profil d'aile, une forme profilée avec un bord d'attaque arrondi (pour écoulement subsonique), et bord de fuite anguleux qu'on obtiendra par exemple par une coupe transversale d'une aile d'avion, d'une pale de rotor d'hélicoptère ou d'hélice ou d'une aube de turbine de compresseur. L'étude que nous faisons est relative à des écoulements plans (voir figure 3-17).

Figure 3-17 profil NACA 4412



Pour l'application de la méthode, on discrétise le contour en  $n$  panneaux (on prend par exemple  $n = 54$  panneaux), sur lesquels on place une distribution linéaire de vortex (voir figure 2-4).

Le calcul de la vitesse normale tient compte de l'écoulement uniforme et de l'influence de l'ensemble des panneaux ou on a :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \frac{\gamma(j)}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

On injecte l'expression (3-17) pour avoir :

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta_i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \int_c^{l_j} \frac{\gamma_s(j-1) + \frac{(\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1))}{l(j)} S_j}{2\pi r_{ij}} \cos(\theta_{ij} - \delta_i) dS_j$$

$$V_{\eta i} = -U_{\infty} \sin(\delta i - \alpha) + \sum_{j=1}^n \gamma_s(j-1) \int_0^{l(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta i) dS_j}{2\pi r_{ij}} +$$

$$+ \frac{\gamma_s(j) - \gamma_s(j-1)}{l(j)} \int_0^{l(j)} \frac{S_j \cdot \cos(\theta_{ij} - \delta i) dS_j}{2\pi r_{ij}}$$

On remarque que l'expression de  $V_{\eta i}$  a exactement la même forme que celle calculée pour le cas du cylindre en rotation établie au paragraphe III-2

Par la suite on impose la condition  $V_{\eta i} = 0$  pour tous les points de contrôles, Ce qui nous permet d'avoir  $n$  équations pour  $n+1$  inconnues . La condition supplémentaire qu'on ajoute est bien évidemment la condition de KUTTA-JOUKOWSKI assurée par la relation (2-13), où on choisit le bord de fuite du profil comme point de stagnation (voir figure 2-5-a).

En fait, on a choisit le point de stagnation précisément au bord de fuite afin de s'approcher au mieux du cas réel, car si le point d'arrêt loin du bord de fuite, sur l'extrados par exemple, (voir figure 3-18-b) les lignes de courants auront une possibilité de contourner le profil (voir figure 3-18-a) et d'inverser le sens de l'écoulement ce qui est loin de la réalité.

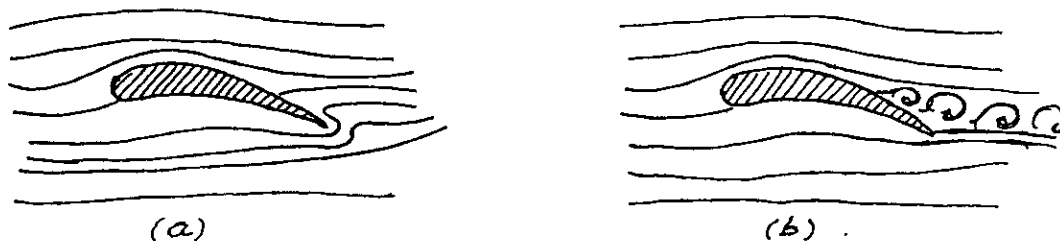
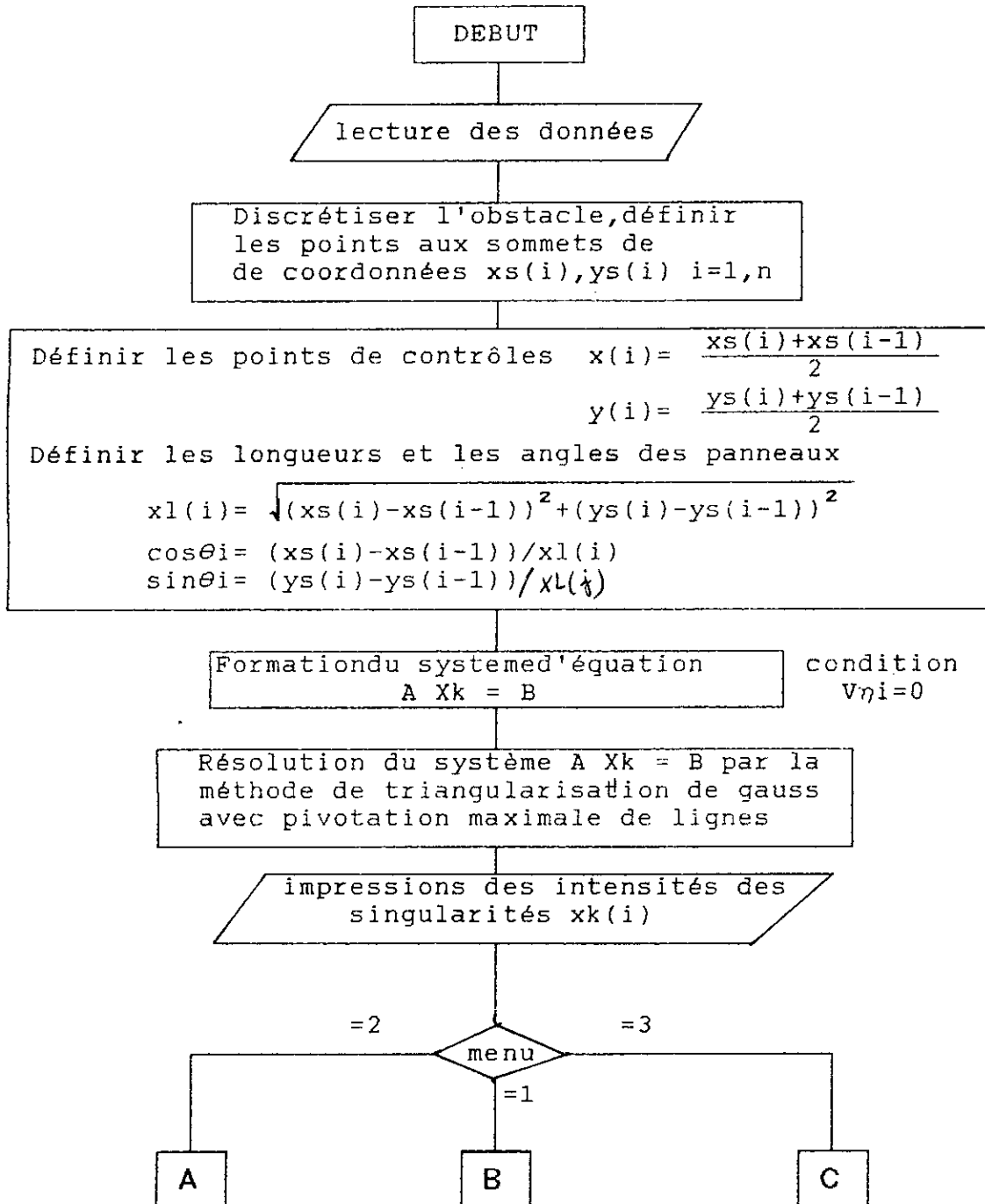


Figure 3-18. Ecoulement autour d'un profil d'aile.  
a) - Ecoulement Potentiel.  
b) - Ecoulement réel.

### III-6 ORGANIGRAMME

Nous proposons pour terminer ce chapitre de présenter les grandes lignes du notre programme disponible en annexe 4 à travers l'organigramme ci-dessous :



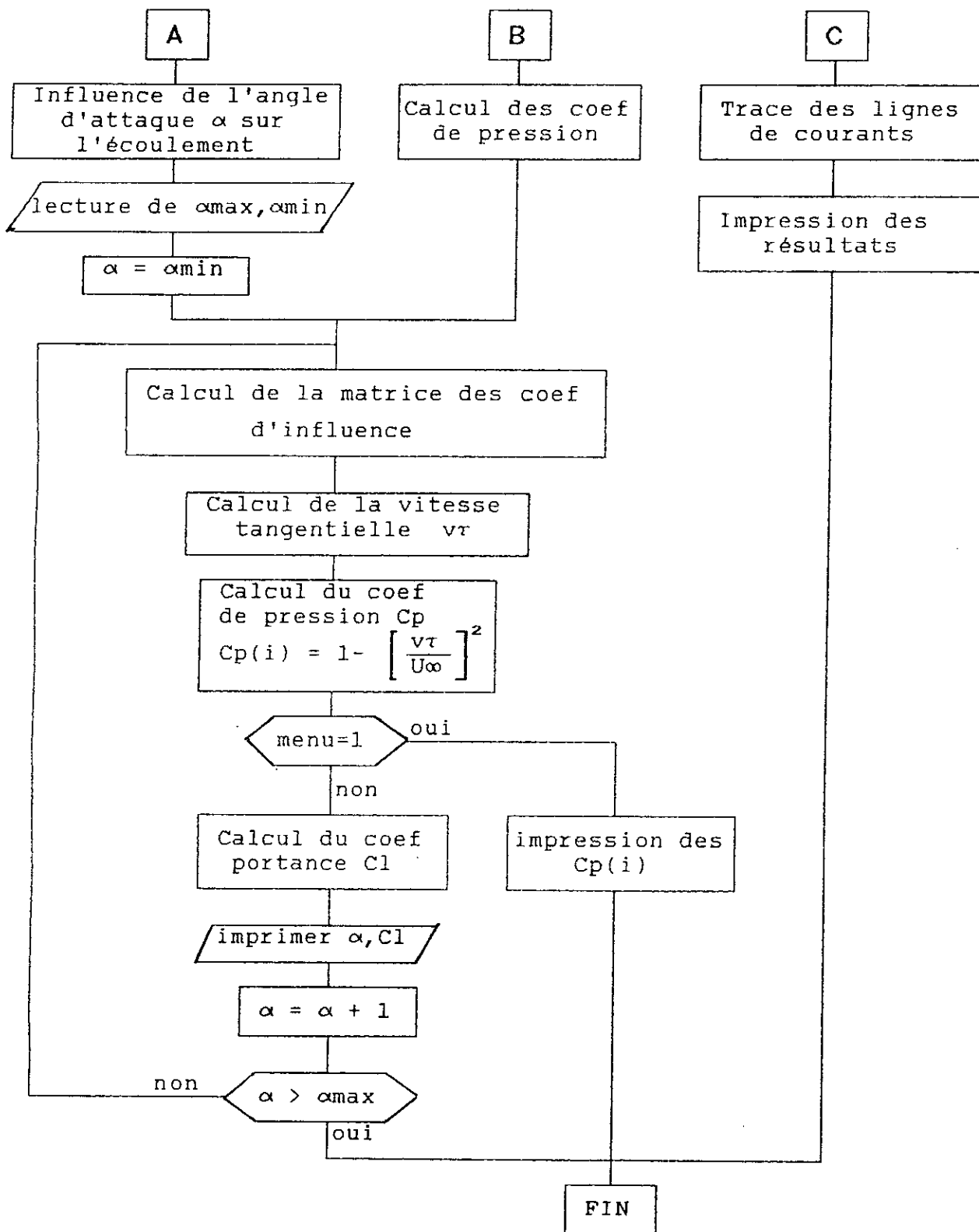


Figure 3-19 Organigramme de la methode des singularités

CHAPITRE IV

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

## IV-1 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DU CYLINDRE FIXE

La solution analytique pour le cas du cylindre fixe est donnée en annexe 1. La vitesse tangentielle sur la surface du cylindre est :

$$v_{\theta} = 2U_{\infty} \sin\theta$$

Le coefficient de pression est donné par :

$$C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

### IV-1-1 CHARGE CONCENTRÉE DE SINGULARITES

On considère une distribution de sources avec charges concentrées au milieu de chaque panneau.

La méthode des singularités donne les résultats illustrés par la figure 4-1.

On voit que la méthode approche la solution analytique, les points de stagnations sont parfaitement déterminés à  $\theta=0^{\circ}$  et  $\theta=180^{\circ}$  ( $C_p=1$ ).

Pour un nombre  $n=8$  panneaux, on remarque qu'il y a deux zones, la première zone située au voisinage des points de stagnations, se caractérise par une bonne concordance de la méthode par rapport à la théorie, mais dès qu'on s'éloigne de ces deux points une deuxième zone apparaît, c'est une zone où on constate une légère différence entre la courbe analytique et celle de la méthode des singularités, ceci est dû au fait qu'à cette zone la vitesse devient maximale et il y a un passage d'un régime accéléré vers un autre décéléré et la discretisation utilisée par huit panneaux s'avère insuffisante pour suivre exactement cette variation.



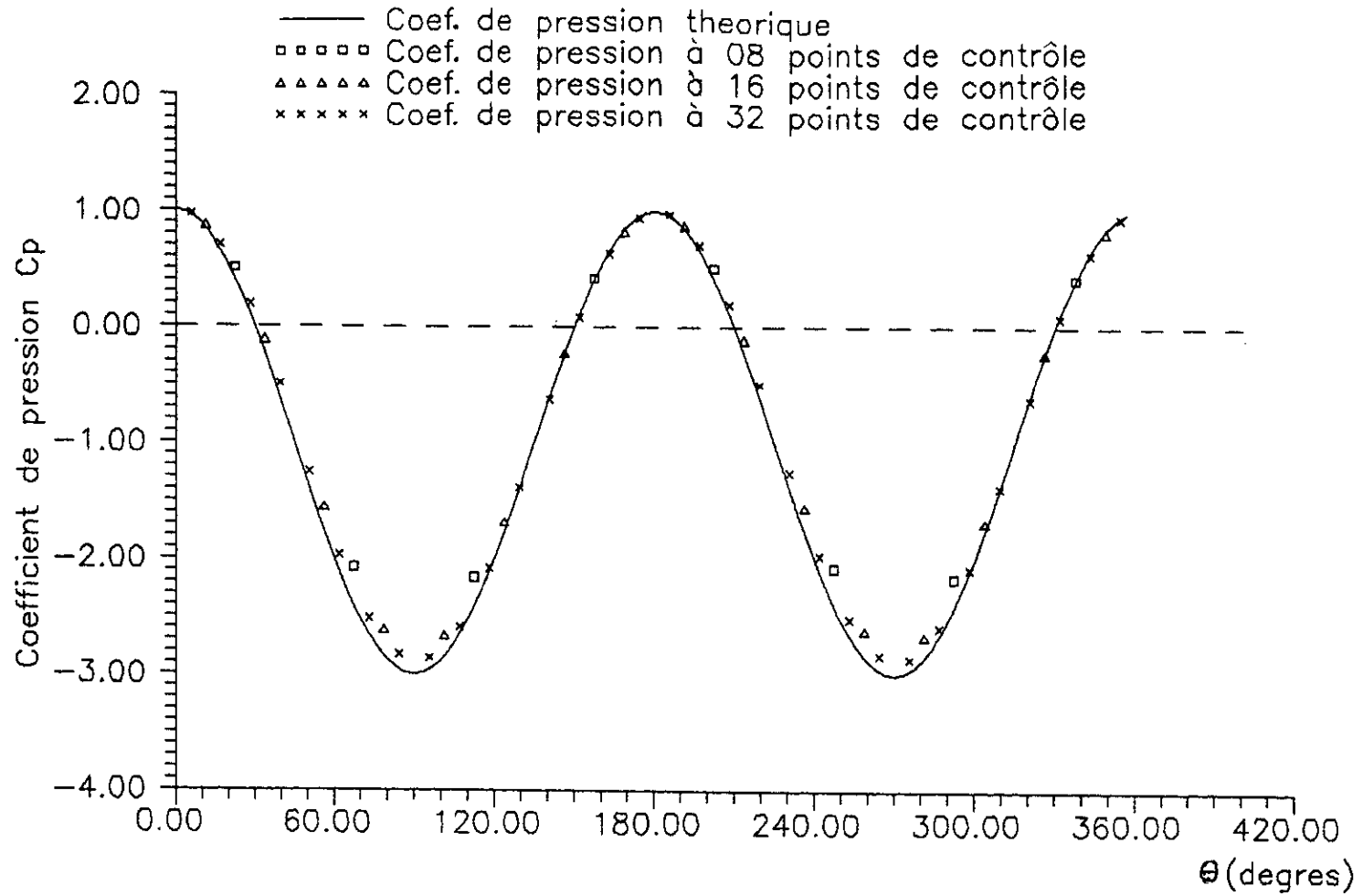


Figure 4-1

Distribution du coef. de pression pour un cylindre fixe  
avec charge concentrée de sources aux milieux des panneaux

Si on augmente le nombre de panneaux à 16 puis à 32, on remarque que dans la deuxième zone, on commence à avoir une bonne concordance, et la méthode des singularités converge vers la solution analytique, cette convergence est donc liée au nombre de panneaux utilisés.

#### IV-1-2 CHARGE UNIFORMEMENT DISTRIBUEE

En analysant les valeurs de  $K_i$  obtenues au cours de la résolution on remarque qu'on a toujours :

$$\sum_{i=1}^n K_i = 0$$

Ceci s'explique par le fait que pour avoir un corps fermé la continuité impose que la somme des intensités des sources soit égale à la somme des intensités des puits.

Alors en règle générale : La surface du corps est fermée si la somme totale des intensités des sources et des puits est égale à zéro.

on trace ensuite  $C_p = f(\theta)$  (voir figure 4-2)

Cette courbe présente toujours une symétrie. Pour  $n=8$  panneaux, on remarque déjà que les valeurs de  $C_p$  calculées appartiennent à la courbe théorique point par point, et les points de stagnations ( $C_p=1$ ) sont parfaitement déterminés. En augmentant le nombre de panneaux  $n$  à 16 puis à 32, on a une meilleure convergence vers la courbe théorique.

En comparant avec la solution du cas précédent, on peut affirmer que la méthode des singularités distribuées marche aussi bien pour le cas concentré que le cas réparti, mais tout de même la charge concentrée est moins précise que la charge répartie pour un même nombre de panneaux, et dans les deux cas la convergence s'améliore avec une augmentation du nombre de panneaux.

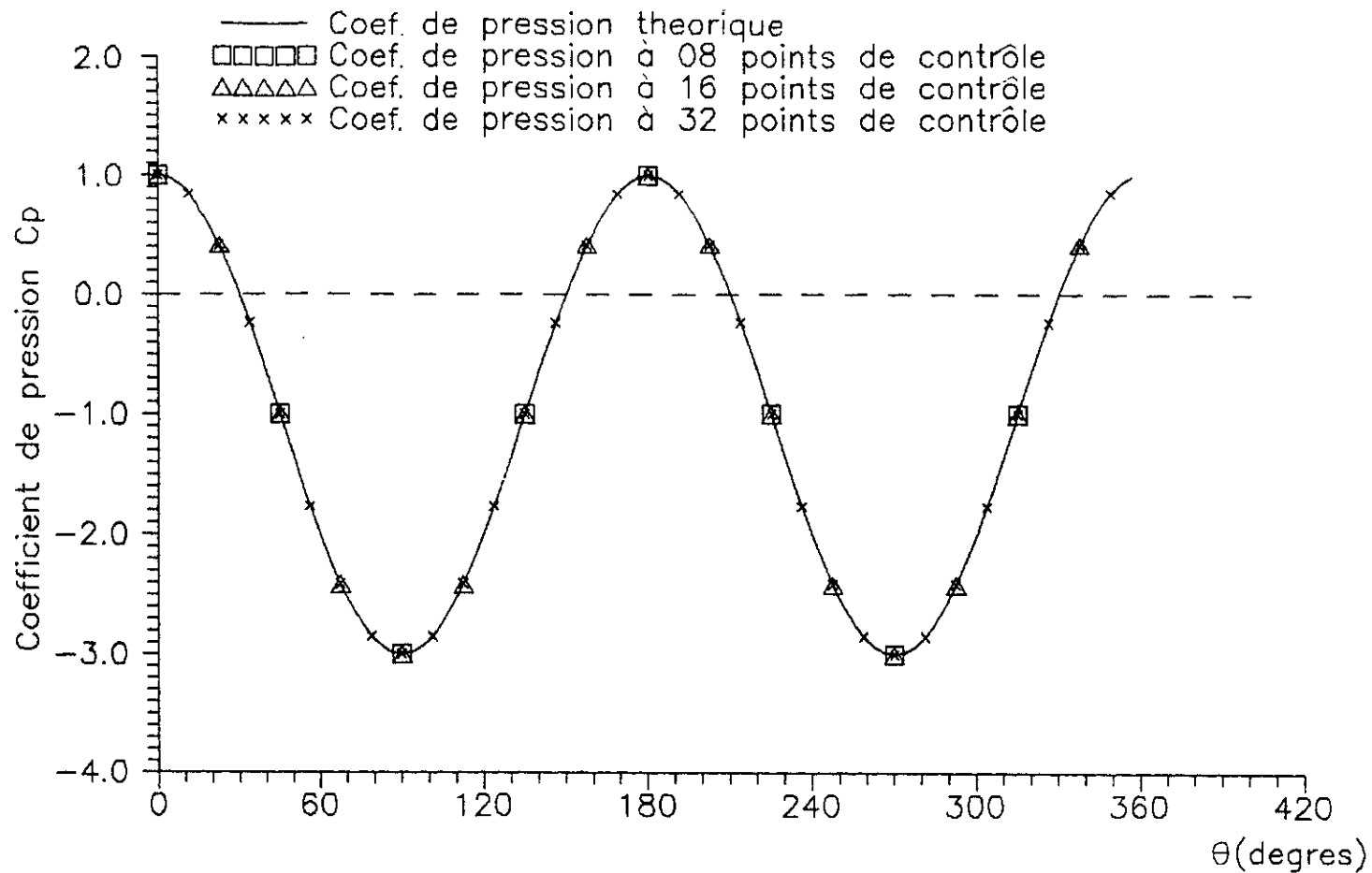
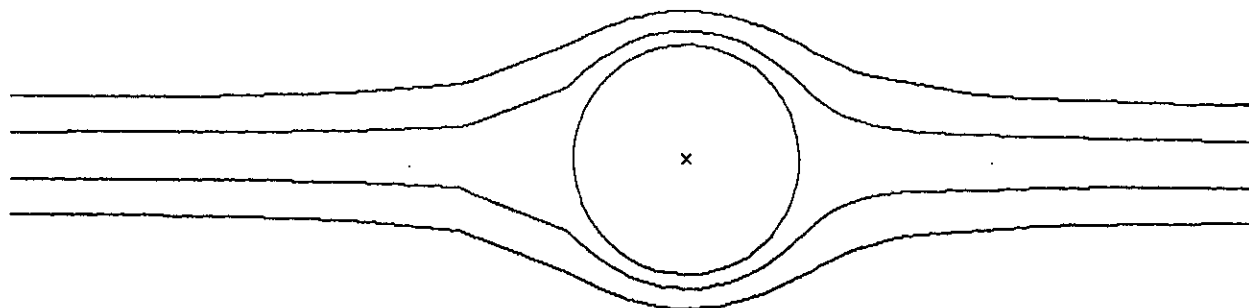


Figure 4-2

Distribution du coefficient de pression pour un cylindre fixe avec charge répartie de sources le long des panneaux

Figure 4-3

Tracé des lignes de courant  
pour le cas d'un cylindre fixe



### IV-1-3 TRACE DES LIGNES DE COURANT

La méthode du tracé des lignes de courant est établie au chapitre II et nous allons illustrer cette méthode pour le cas d'un cylindre fixe. En suivant l'organigramme de la figure 3-14, on obtient le graphe illustré par la figure 4-3. On voit clairement que les lignes de courant contournent parfaitement l'obstacle et qu'à l'infini amont l'écoulement n'est pas influencé par le cylindre, mais en s'approchant de lui les lignes de courant commencent à dévier de part et d'autre, ceci est dû à la condition de non pénétration des particules dans l'obstacle qui les oblige à choisir un autre chemin.

La méthode de tracé des lignes de courant est assez précise et cette précision augmente d'autant plus qu'on utilise un grand nombre de panneau sur le cylindre.

### IV-2 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DU CYLINDRE TOURNANT

#### IV-2-1 CALCUL DU COEFFICIENT DE PRESSION

La solution analytique étant donnée en annexel par :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \left[ 2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi U_\infty R} \right]^2$$

La courbe  $C_p = f(\theta)$  obtenue en utilisant la méthode des singularités est représentée par la figure 4-4.

La courbe théorique ne garde plus sa symétrie car il y a la présence de la circulation  $\Gamma$  qui engendre une vitesse supplémentaire qui vient s'ajouter à celle de l'écoulement uniforme.

Pour l'application de la méthode on a choisit  $\Gamma = 2\pi U_\infty R$ . En prenant  $n=8$  panneaux, on voit toujours que les points de stagnations sont parfaitement déterminés, et les remarques faites

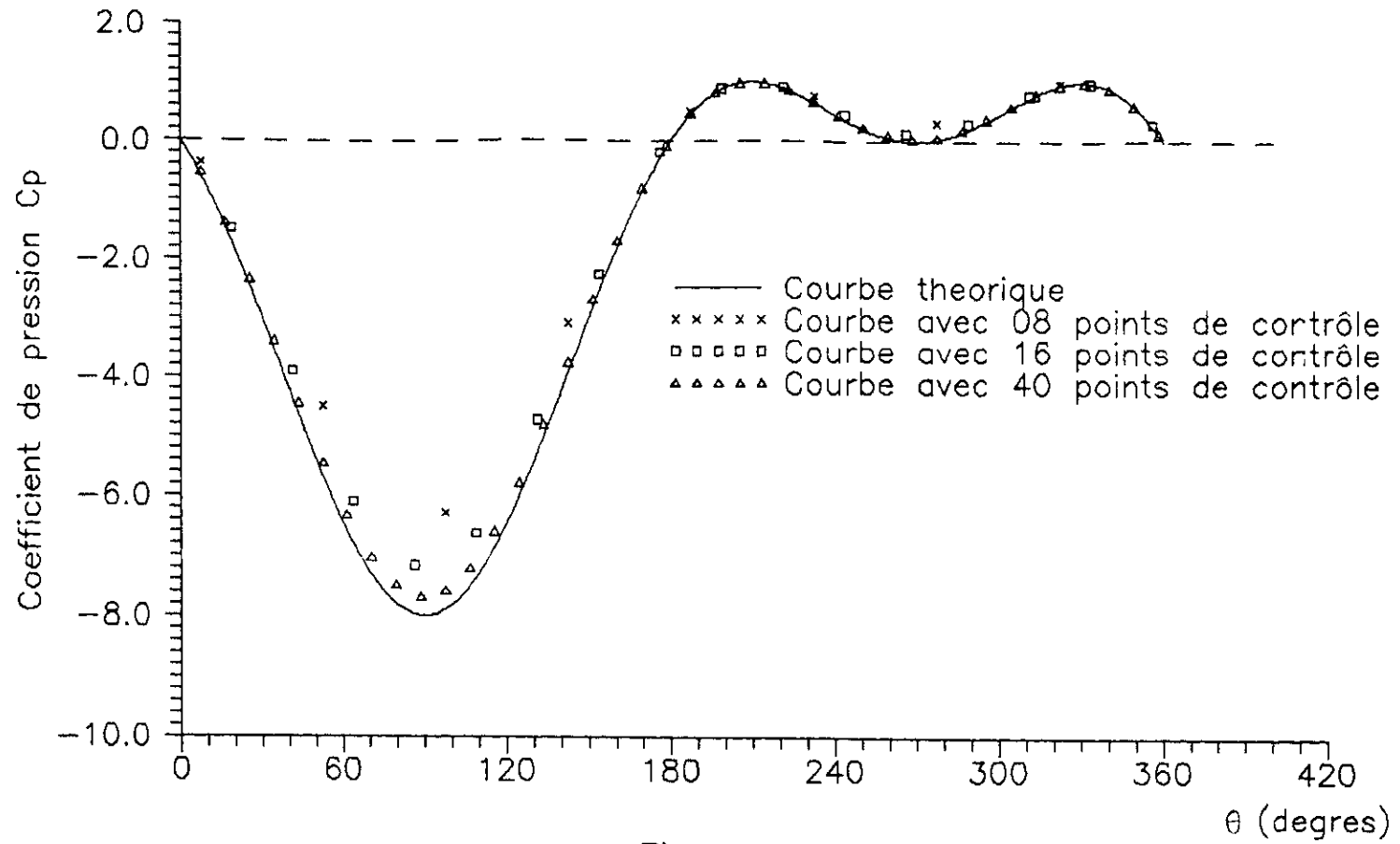


Figure 4-4

Distribution du coefficient de pression pour un cylindre en rotation avec une circulation  $\Gamma = 2\pi R U$

sur le cylindre fixe restent valables, il y a une divergence de la méthode autour des points où il y a changement de la pente c'est à dire passage d'un régime accéléré à un autre décéléré. En augmentant le nombre de panneaux cette divergence s'atténue et les deux courbes se rapprochent de mieux en mieux, cependant on remarque toujours une légère différence entre ces deux dernières dans la partie  $\theta$  ( $60^\circ, 120^\circ$ ), due à la grande valeur du gradient de pression, et si on veut améliorer la précision, on doit donc augmenter le nombre de panneaux, ou bien choisir un autre type de distribution de singularités tel que la charge parabolique.

#### IV-2-2 TRACE DES LIGNES DE COURANT

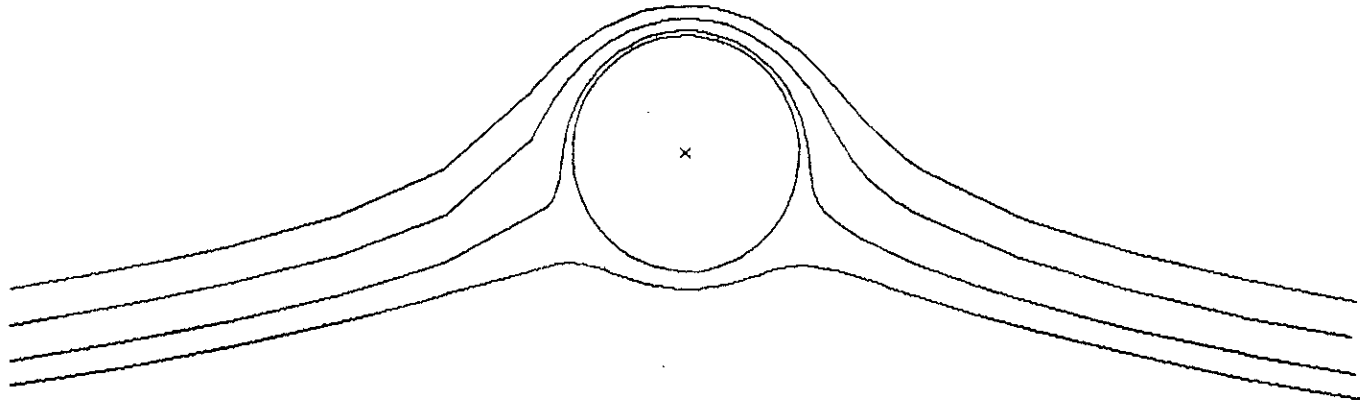
La figure 4-5 montre le tracé des lignes de courant autour du cylindre tournant avec une circulation  $\Gamma = 2\pi R U_\infty$ , cette valeur est choisie arbitrairement.

On voit clairement que les lignes de courant contournent parfaitement l'obstacle et les points de stagnations sont bien définis, néanmoins, on constate que ces lignes sont un peu déformées dans la partie gauche proche du cylindre, comparé à la partie droite, car on a choisit un pas plus grand dans la première partie ( $h = 1$  unité) tandis que pour la deuxième partie on a choisit un pas plus petit ( $h = 0.1$  unité).

La méthode des singularités distribuées appliquée au cylindre donne des résultats assez précis, mais l'inconvénient de cette méthode de tracé est toujours le temps de calcul qui est très long.

Figuré 4-5

Tracé des lignes de courant pour un  
cylindre tournant  $\Gamma = 2\pi R U$





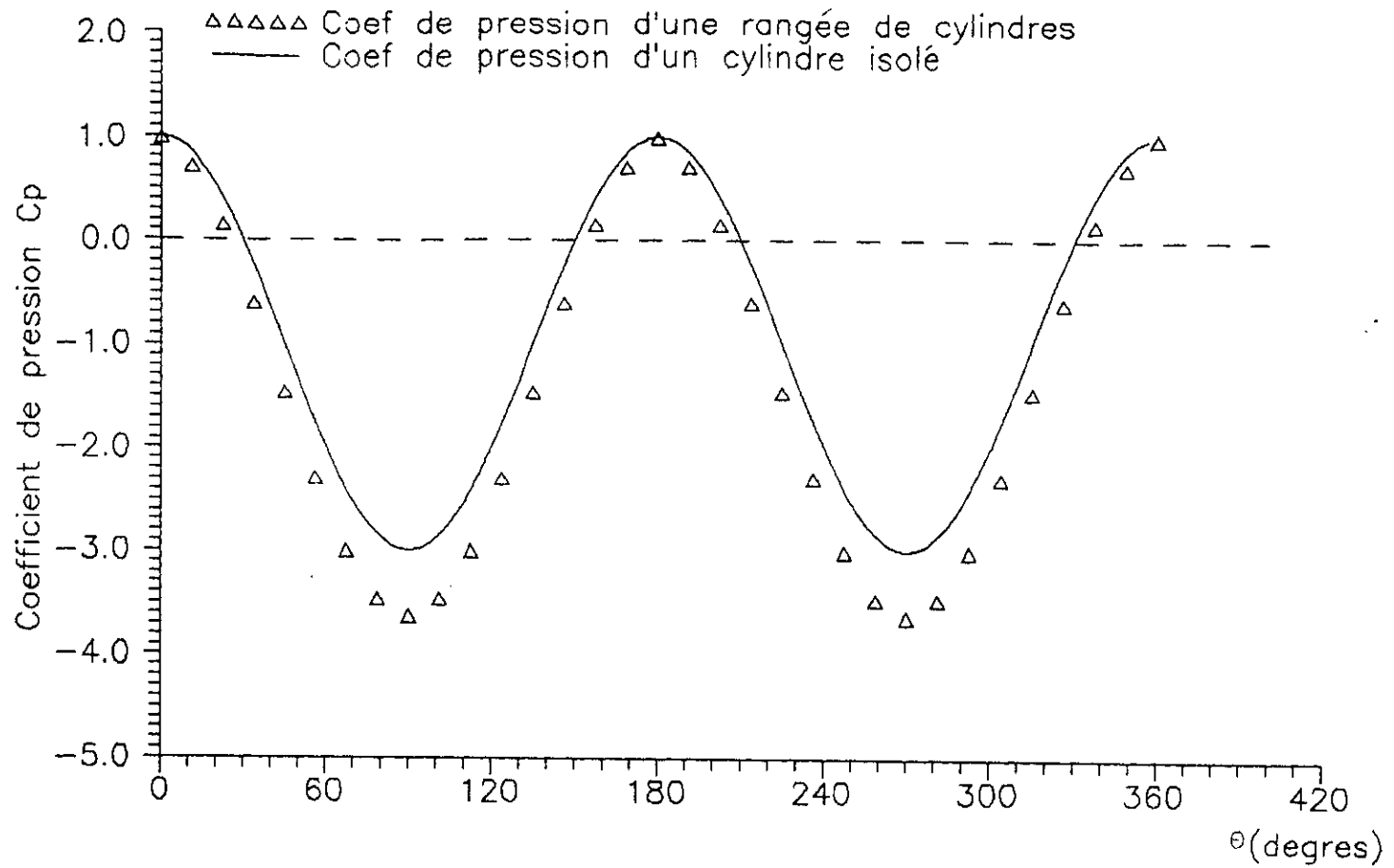


Figure 4-6

Distribution du coefficient de pression pour  
une rangée de cylindres

## IV-3 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR D'UNE RANGEE DE CYLINDRES

Les résultats obtenus sont illustrés par la figure 4-6. La courbe  $C_p=f(\theta)$  est symétrique à cause de la symétrie géométrique que présente la rangée de cylindres, cependant la distribution de  $C_p$  rappelle celle du cylindre isolé, mais on remarque que les valeurs de  $C_p$  sont différentes par rapport au cas du cylindre isolé.

En effet deux obstacles adjacents forment une contraction à l'entrée et donc la section diminue et la vitesse augmente d'où une chute de pression (effet de blocage).

## IV-4 ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT AUTOUR DES PROFILS D'AILES

### IV-4-1 REPARTITION DE PRESSION

On applique la méthode des singularités distribuées au profil NACA 4412 (référence 5) pour deux angles d'incidences  $\alpha=2^\circ$  et  $\alpha=16^\circ$ . Les figures 4-7 et 4-8 représentent les variations du coefficient de pression  $C_p$  en fonction de l'abscisse  $x$  (en % de la corde), obtenue par la méthode des singularités ainsi que les courbes expérimentales disponibles à la référence 2.

Pour  $\alpha = 2^\circ$  :

En comparant avec les résultats expérimentaux (voir figure 4-7), on remarque une assez bonne concordance. Le point de stagnation est parfaitement déterminé au bord d'attaque présentant un pic très prononcé, le fluide est ensuite accéléré des deux côtés, mais d'une façon plus accentuée sur l'extrados, d'où un gradient de pression plus important ce qui explique la différence des deux courbes (expérimentale et celle de méthode des singularités). La variation de pression sur l'intrados est régulière, donc faible gradient de pression et la méthode concorde bien dans cette partie.

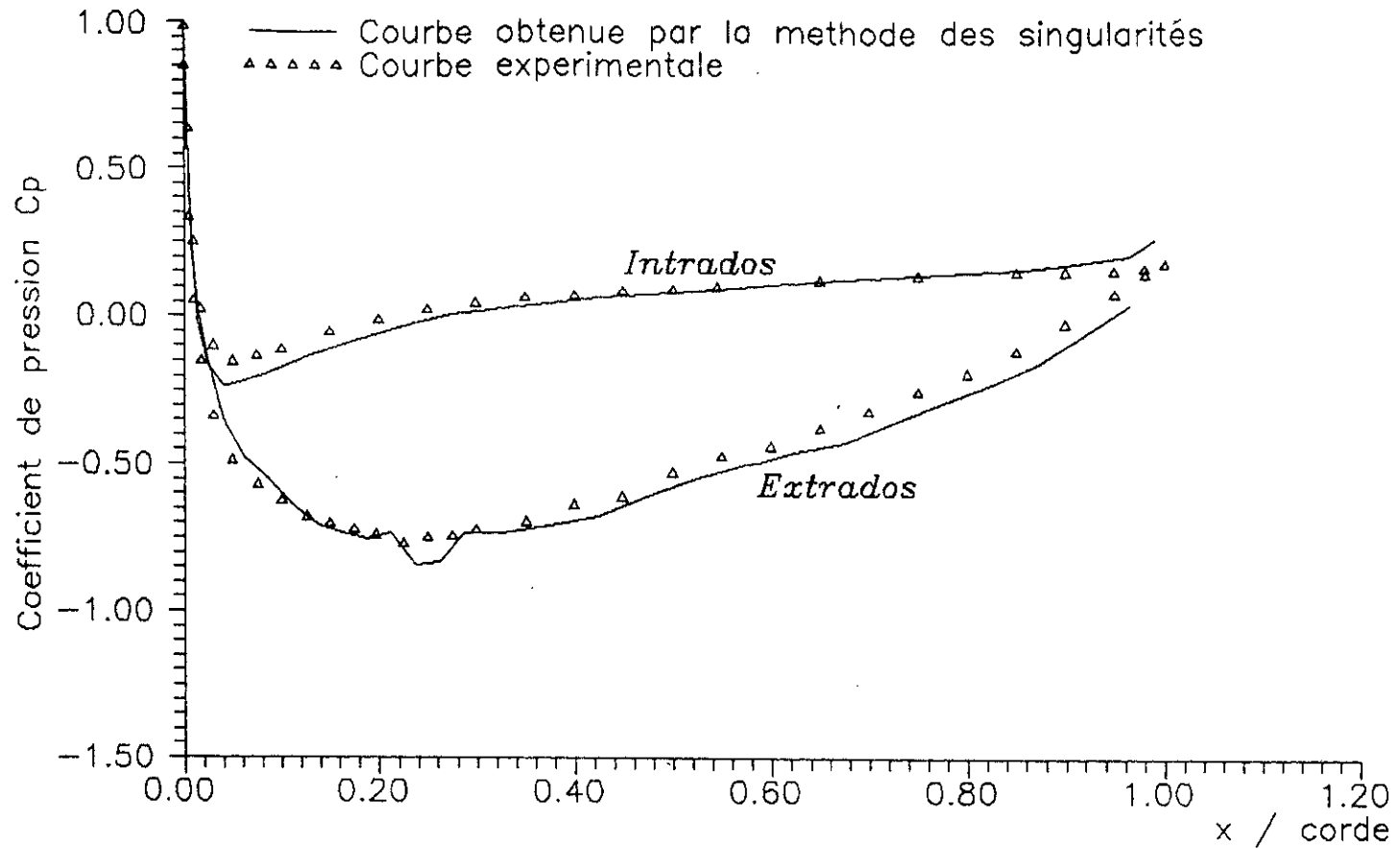


Figure 4-7

Distribution du coefficient de pression pour le profil  
NACA 4412 avec un angle d'attaque de 0.2 degrés

On remarque aussi une divergence dans la zone située à environ 25% de la corde sur l'extrados dû d'une part au changement de pente de profil et d'autre part à un gradient de pression nul.

Une deuxième zone de divergence située sur l'intrados à environ 6% de la corde, dû essentiellement aux grandes variations de vitesse que la méthode des singularités n'arrive pas à suivre exactement.

La courbe expérimentale est légèrement inférieure à la courbe obtenue par la méthode des singularités, ceci est dû à l'hypothèse d'un écoulement potentiel où l'effet de la viscosité est négligé, cette viscosité qui tend à diminuer la vitesse d'où une augmentation de pression comme on le voit clairement sur la courbe.

Alors une fois de plus la méthode prouve son efficacité en donnant des résultats satisfaisants.

Pour  $\alpha = 16^\circ$  :

La méthode présente toujours une courbe d'allure similaire à celle présentée par l'expérience.

Le point de stagnation se trouve déplacé sur l'intrados à cause de l'accroissement de l'angle d'incidence, néanmoins la position de ce point n'est pas la même pour les deux courbes (expérimentale, méthode des singularités) à cause de l'effet plus prononcé de la couche limite qui tend à augmenter l'épaisseur du profil sur l'extrados pour déformer les lignes et donc déplacer le point de stagnation vers le bord d'attaque.

L'écoulement est accéléré de part et d'autre du point de stagnation et atteint une vitesse maximum au bord d'attaque ensuite l'écoulement décélère sur l'extrados mais une grande divergence de la méthode apparaît à cause phénomènes de décollements la couche limite, ces décollements vont gêner

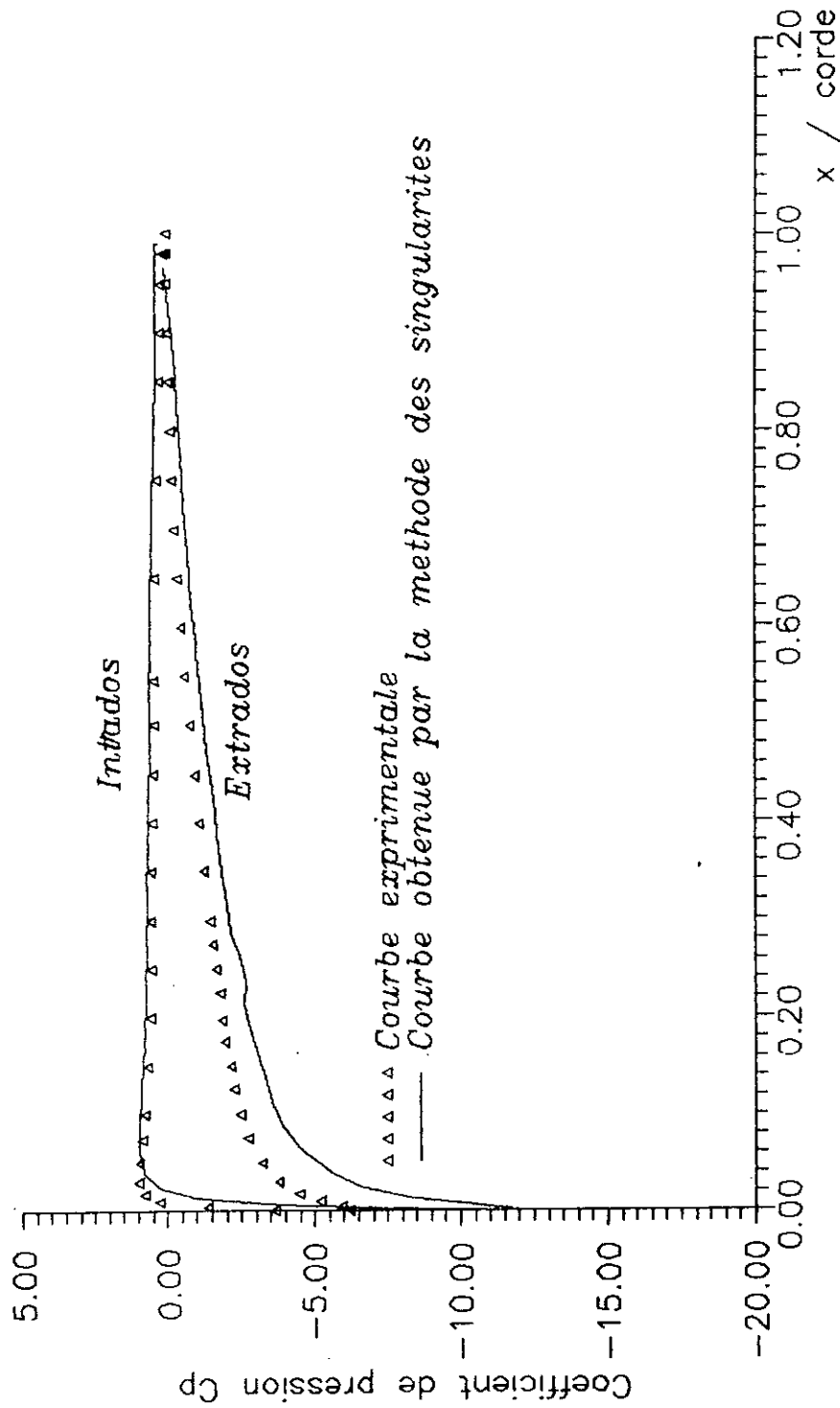


Figure 4-8

Distribution du coef de pression pour le profil  
 NACA 4412 avec un angle d'attaque de 16degres

l'écoulement tout en réduisant la vitesse et augmentant ainsi la pression.

A travers ces deux cas, on remarque qu'à faibles incidences l'écoulement autour du profil est très voisin de l'écoulement expérimental, la présence de faible gradient de pression ne provoque pas de décollements, mais si l'incidence  $\alpha$  croît, le gradient de pression croît, ce qui se traduit par une grande différence entre les  $C_p$ .

#### IV-4-2 INFLUENCE DE L'ANGLE D'ATTAQUE SUR LA PORTANCE

En faisant varier l'angle d'attaque  $\alpha$  et en calculant chaque fois le coefficient de portance, on obtient le graphe de la figure 4-9 qui comporte aussi les valeurs expérimentales du coefficient de portance  $C_l$  en fonction de  $\alpha$  (référence 2).

On remarque que la portance obtenue par la méthode des singularités distribuées suit une variation linéaire et présente un coefficient de portance qui augmente indéfiniment avec  $\alpha$ , alors qu'en réalité cette croissance est limitée à cause de l'effet de la viscosité qui réduit la portance.

L'accord est bon entre la courbe expérimentale et la courbe obtenue par la méthode des singularités surtout aux petites incidences .

On remarque aussi que la courbe expérimentale est toujours au dessous de la courbe de la méthode car l'effet de la viscosité influe d'une manière négative sur le coefficient de portance qui devient plus petit comparé à l'écoulement potentiel.

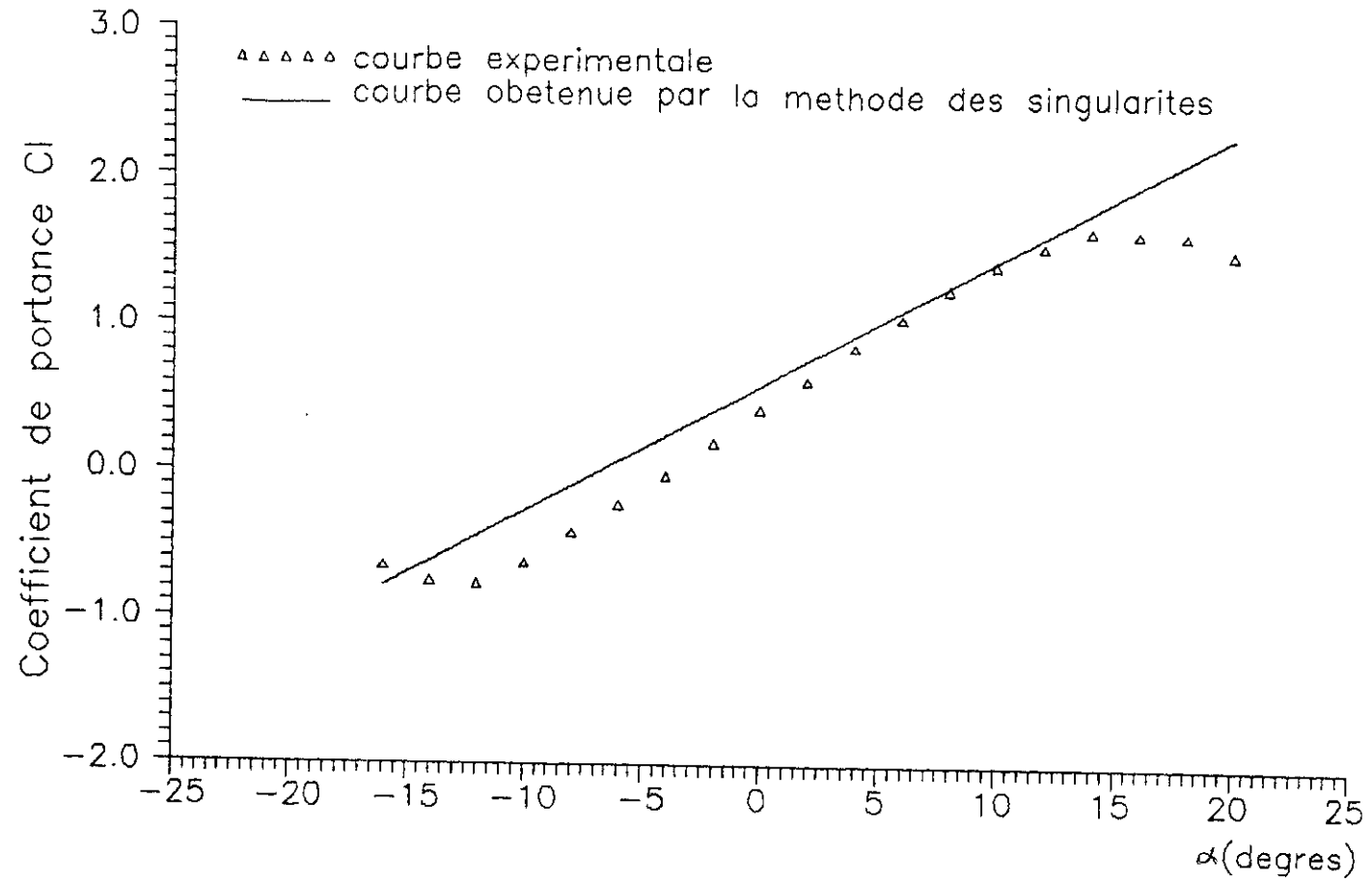


Figure 4-9

Influence de l'angle d'attaque sur la portance du  
profil NACA 4412

CONCLUSION GENERALE



A travers l'analyse et les résultats qu'on vient d'illustrer, la méthode des singularités distribuées s'avère très utile et d'une assez bonne précision pour la simulation des écoulements autour des formes géométriques variés, du fait qu'elle présente à la fois un aspect analytique et numérique.

L'utilisation d'une charge répartie uniformément de singularités donne une meilleure convergence comparée au cas concentré mais tout de même ces deux types de distribution se limite au cas des profils non portants. Tandis que ces derniers nécessitent l'utilisation d'une charge plus qu'uniforme; au moins linéaire. La méthode est d'autant plus précise que la discretisation est raffinée.

La méthode donne de meilleurs résultats dans les zones d'écoulement régulier ne présentant pas des variations rapides de vitesse et présente des divergences dans les zones où les phénomènes réels (viscosité, couche limite, décollement) sont prépondérants.

Pour une amélioration de cette méthode, on peut utiliser des charges réparties de singularités plus complexes (parabolique, cubique,...), Ce qui nécessite des conditions supplémentaires et des calculs plus longs, mais donnera sûrement des résultats plus satisfaisants.

On pourra aussi utiliser cette méthode pour tracer les lignes de courant et les lignes equipotentiellles dans une grille d'aubes pour ainsi les utiliser dans d'autres méthodes d'analyse.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1- L. M. MILNE THOMSON : " Theoretical aerodynamics "  
C.B.E. (fifth edition 1968)
- 2- J.J. BERTIN et M.L. SMITH : " Aerodynamics for Engineers "  
Prentice- HALL , 1989
- 3- B.W. Mc GROMICK : " Aerodynamics, Aeronautics and flight  
Mechanics " WILEY, 1979
- 4- B. THWAITES : " Incompressible aerodynamics "  
Oxford 1960
- 5- P. REBUFFET : " Aérodynamique expérimentale "  
Paris DUNOD 1966-1969
- 6- REUBEN M. OLSON : "Essentiels of engeneering fluid mechanics"  
Third edition Intext educational publishers NEW YORK
- 7- R.COMOLET : " Mécanique expérimentale des fluides "  
Paris MASSON 1961-1964
- 8- B.DEMIDOVITCH : "Elément de calcul numérique"  
Edition MIR Moscou

ANNEXE I

METHODE DE SUPERPOSITION

Par une superposition de certains écoulements potentiels élémentaires, il est possible de construire des cas d'écoulements plus ou moins complexes. Nous utilisons ce principe pour déduire l'écoulement autour du cylindre.

-ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE FIXE DE SECTION CIRCULAIRE

L'écoulement autour d'un cylindre de section circulaire est obtenue par la superposition d'un dipôle et d'un écoulement parallèle homogène (voir figure a-1)

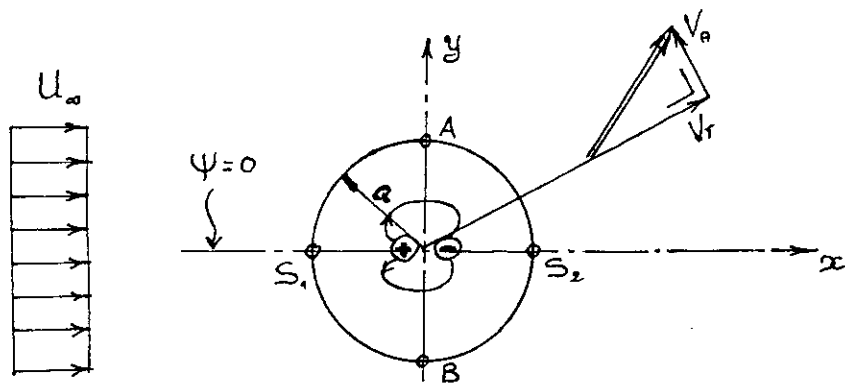


Figure a-1 - Superposition d'un écoulement uniforme et d'un doublet.

En utilisant un système de coordonnées polaires  $r, \theta$  nous obtenons.

$$\psi = U_{\infty} r \sin\theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} \quad (a-1)$$

où le terme du dipôle est exprimé avec un signe négatif puisque son orientation est contraire au sens de l'écoulement homogène. Le rayon du cylindre est obtenu en posant  $\psi = 0$ , condition qui détermine la ligne de courant singulière. Cette dernière se divise au point  $S_1$  en deux branches qui se réunissent au point  $S_2$ . Il en découle que

$$\psi = 0 = \frac{U_{\infty} \sin\theta}{r} \left[ r^2 - \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right] \quad (a-2)$$

Le rayon  $a$  du cylindre devient donc

$$a = \left[ \frac{\mu}{2\pi U_{\infty}} \right]^{1/2}$$

Par conséquent (a-1) prend la forme

$$\psi = U_{\infty} \sin\theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right)$$

d'où

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos\theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$V_{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = U_{\infty} \sin\theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\phi = U_{\infty} \cos\theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right)$$

On remarque que pour  $r = a$

$$V_r = 0$$

$$V_{\theta} = 2 \times U_{\infty} \sin\theta \quad (\text{a-3})$$

#### - ECOULEMENT AUTOUR D'UN CYLINDRE EN ROTATION

La solution générale est obtenue par la superposition supplémentaire de la solution élémentaire du fil tourbillonnaire selon l'équation :

$$\psi = U_{\infty} \sin\theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$\phi = U_{\infty} \cos\theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$V_r = U_{\infty} \cos\theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$V_{\theta} = U_{\infty} \sin\theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Où le signe de  $\Gamma$  est choisie négatif de manière à obtenir un mouvement de rotation du vortex dans le sens des aiguilles d'une montre.

Observons que les conditions aux limites  $V_r=0$  sur  $r=a$  est toujours vérifiée mais que les deux points  $S_1$  et  $S_2$  sont déplacés;

Ces deux sont reperés par l'angle  $\theta$  tel que :

$$\sin\theta_{1,2} = -\frac{\Gamma}{4\pi a U_\infty}$$

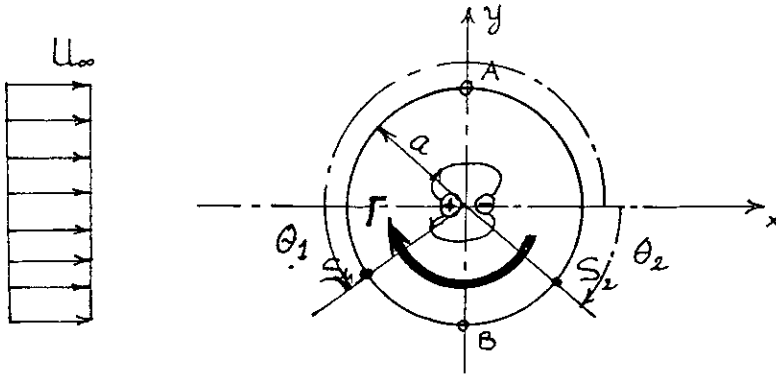


Figure a-2 - Ecoulement autour d'un cylindre en rotation

A la surface du cylindre  $r$  est égale à  $a$ , et par conséquent :

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= -2 U_\infty \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{aligned} \quad (a-4)$$

On en déduit donc le coefficient de pression :

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \left[ 2 \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a U_\infty} \right]^2$$

ANNEXE II

ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT

AU VOISINAGE DES

SINGULARITES

On voit, d'après le tableau 1-1 (paragraphe I-4-2), pour certaines singularités, le cas  $r$  égale à zéro présente un problème d'indétermination et les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  ne peuvent être calculées en ce point. Pour y remédier à cette situation, on fait un développement au voisinage proche de cette singularité. On s'intéresse dans notre étude à deux cas qui sont les suivant :

a) Pour le cas des sources

Considérons un volume de contrôle au voisinage de la source de longueur  $\Delta x$  et une hauteur infinitésimale (voir figure a-3):

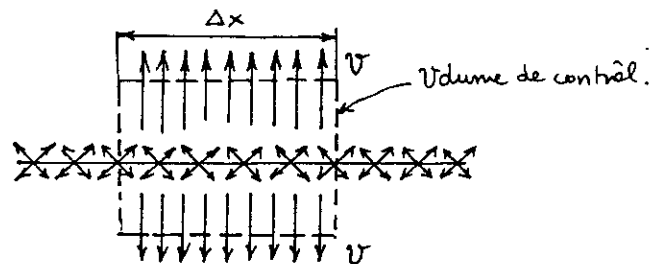


Figure a-3 - Calcul de la vitesse au voisinage d'une source

Le flux total à travers ce volume de contrôle doit être égale à  $q_t \Delta x$  d'une part, et d'autre part à la vitesse des deux cotés :

d'ou

$$V\Delta x + V\Delta x = q \Delta x$$

alors

$$2V\Delta x = q \Delta x$$

$$v = \frac{k}{2} \quad (a-5)$$

b) pour le cas des vortex

On considère le même volume de contrôle que pour le cas des sources (voir figure a-4).

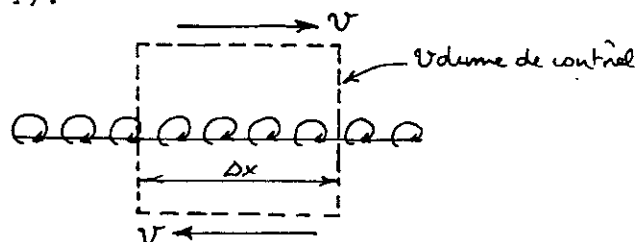


Figure a-4 - Calcul de la vitesse au voisinage d'un vortex



Si  $\gamma$  représente la force du vortex par unité de longueur  $\gamma\Delta x$  peut être la force totale induite par le volume de contrôle ou le flux, le volume est tellement petit qu'on peut considérer les deux vitesses tangentes de part et d'autre constantes et égales à  $V$  et du fait de la symétrie on a la même vitesse de part et d'autre mais de sens opposé. L'égalité des flux donne:

$$\gamma\Delta x = 2V\Delta x$$

d'où

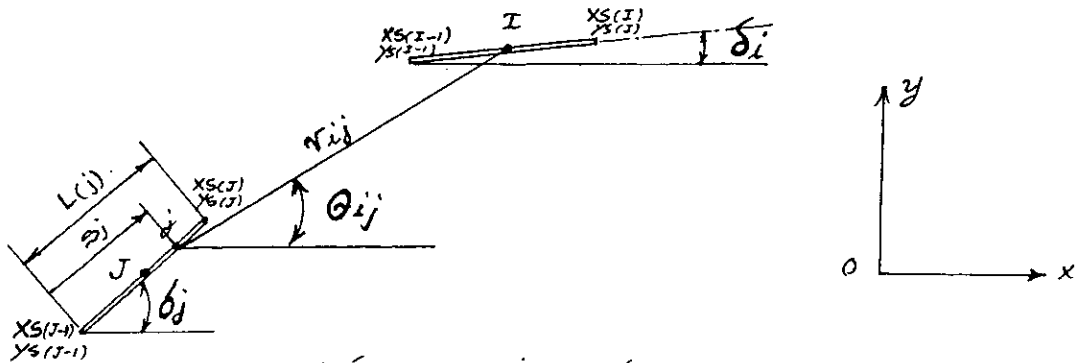
$$V = \frac{\gamma}{2} \quad (a-6)$$

Remarque : On constate d'après le développement fait, qu'au centre de la source ou du vortex, la vitesse est égale à la moitié de l'intensité de cette singularité, sauf que pour la source la vitesse est transversale, tandis que pour le vortex elle est longitudinale.

ANNEXE III

CALCUL DES COEFFICIENTS  
D'INFLUENCE

CALCUL DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE G(i,j) et F(i,j)



Représentation géométrique des paramètres d'intégration

$$G(i,j) = \int_0^{l(j)} \frac{\cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} ds_j$$

$$= \frac{T_1}{2} \ln \left| \frac{l^2(j) - 2T_4 l(j) + T_3^2}{T_3^2} \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \text{Arctg} \frac{l(j) - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \text{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

$$F(i,j) = \int_0^{l(j)} \frac{s_j \cos(\theta_{ij} - \delta_i)}{r_{ij}} ds_j = \int_0^{l(j)} \frac{s_j (T_1 s_j + T_2)}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} ds_j$$

$$\Rightarrow \int_0^{l(j)} \frac{T_1 s_j^2 + T_2 s_j}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} ds_j = T_1 \int_0^{l(j)} \frac{s_j^2 ds_j}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} + T_2 \int_0^{l(j)} \frac{s_j ds_j}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2}$$

$$= T_1 \times I_1 + T_2 \times I_2$$

Calcul de  $I_1$ :

$$I_1 = T_1 \int_0^{l(j)} \frac{s_j^2 ds_j}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} = \int_0^{l(j)} \frac{s_j^2 - 2T_4 s_j + T_3^2 + 2T_4 s_j - T_3^2}{T_3^2 - 2T_4 s_j + s_j^2} ds_j$$

$$I_4 = \int_0^{l(j)} dS_j + 2T_4 \int_0^{l(j)} \frac{S_j dS_j}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2} - T_3^2 \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2}$$

$$I_4 = l(j) + 2T_4 I_2 - \frac{-T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \Bigg|_0^{l(j)}$$

$$I_4 = l(j) - \frac{-T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \Bigg|_0^{l(j)} + 2T_4 I_2$$

calcul de  $I_2$ :

$$I_2 = \int_0^{l(j)} \frac{S_j dS_j}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2} = \frac{1}{2} \int_0^{l(j)} \frac{2S_j + 2T_4 - 2T_4}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2} dS_j$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{l(j)} \frac{2(S_j - T_4)}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2} dS_j + T_4 \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2 \right| \Bigg|_0^{l(j)} + \frac{T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \Bigg|_0^{l(j)}$$

Donc :

$$F(i, j) = T_1 \left[ S_j - \frac{T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]_0^{l(j)} + 2T_4 \left[ \frac{1}{2} \ln \left| T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2 \right| \right]_0^{l(j)} + \frac{T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \Bigg|_0^{l(j)} + T_2 I_2$$

$$F(i, j) = T_1 S_j - \frac{T_1 T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} + 2T_1 T_4 I_2 + T_2 I_2$$

$$F(i, j) = T_1 S_j - \frac{T_1 T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}}$$

$$+ \left[ 2T_1 T_4 + T_2 \right] \left[ \frac{1}{2} \ln \left| T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2 \right| \right]_0^{l(j)} + \frac{T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \Bigg|_0^{l(j)}$$

$$F(i, j) = T_1 S_j + \left[ \frac{(2T_1 T_4 + T_2) T_4 - T_1 T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right] \operatorname{Arctg} \frac{S_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}}$$

$$+ \frac{2T_1 T_4 + T_2}{2} \ln \left| T_3^2 - 2T_4 S_j + S_j^2 \right| \Bigg|_0^{l(j)}$$

$$G(i, j) = \frac{T_1}{2} \ln \left| \frac{l^2(j) - 2T_4 l(j) + T_3^2}{T_3^2} \right| + \frac{T_1 T_4 + T_2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \operatorname{Arctg} \frac{l(j) - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \operatorname{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

$$F(i, j) = T_1 l_j + \frac{(2T_1 T_4 + T_2) T_4 - T_1 T_3^2}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \left[ \text{Arctg} \frac{l_j - T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} - \text{Arctg} \frac{-T_4}{\sqrt{T_3^2 - T_4^2}} \right]$$

$$+ \frac{2T_1 T_4 + T_2}{2} \ln \frac{T_3^2 - 2T_1 l_j + l_j^2}{T_3^2}$$

mais ceci reste valable seulement pour le cas  $T_3^2 - T_4^2 > 0$

Le cas  $T_3^2 = +T_4^2$  se présente comme suit :

$$G(i, j) = T_1 \ln(S_j - T_4) - (T_1 T_4 + T_2) \frac{1}{S_j - T_4}$$

$$G(i, j) = T_1 \ln \frac{l_j - T_4}{-T_4} - (T_1 T_4 + T_2) \left[ \frac{1}{l_j - T_4} + \frac{1}{T_4} \right]$$

pour  $F(i, j)$  on a :

$$F(i, j) = \int_0^{l(j)} \frac{S_j (T_1 S_j + T_2)}{(S_j - T_4)^2} dS_j = T_1 \int_0^{l(j)} \frac{S_j^2 dS_j}{(S_j - T_4)^2} + T_2 \int_0^{l(j)} \frac{S_j dS_j}{(S_j - T_4)^2}$$

$$= T_1 \int_0^{l(j)} \frac{S_j^2 - 2T_4 S_j + T_4^2 + 2T_4 S_j - T_4^2}{(S_j - T_4)^2} dS_j + T_2 \int_0^{l(j)} \frac{(S_j - T_4) + T_4}{(S_j - T_4)^2} dS_j$$

$$= T_1 \int_0^{l(j)} dS_j + T_1 \int_0^{l(j)} \frac{2T_4 S_j - T_4^2}{(S_j - T_4)^2} dS_j + T_2 \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{S_j - T_4} + T_2 T_4 \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{(S_j - T_4)^2}$$

$$= T_1 S_j + 2T_1 T_4 \int_0^{l(j)} \frac{S_j dS_j}{(S_j - T_4)^2} + T_2 \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{S_j - T_4} + T_2 T_4 \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{(S_j - T_4)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= T_1 S_j + 2T_1 T_4 \int \frac{(S_j - T_4) + T_4}{(S_j - T_4)^2} dS_j + T_2 \int \frac{dS_j}{S_j - T_4} + T_2 T_4 \int \frac{dS_j}{(S_j - T_4)^2} \\
&= T_1 S_j + (2T_1 T_4 + T_2) \int \frac{dS_j}{S_j - T_4} + (T_2 T_4 + 2T_1 T_4^2) \int \frac{dS_j}{(S_j - T_4)^2} \Big|_0^{l(j)}
\end{aligned}$$

$$F(i, j) = T_1 S_j + (2T_1 T_4 + T_2) \text{Ln}(S_j - T_4) + (T_2 T_4 + 2T_1 T_4^2) \left[ -\frac{1}{S_j - T_4} \right] \Big|_0^{l(j)}$$

$$F(i, j) = T_1 l(j) + (2T_1 T_4 + T_2) \text{Ln} \left[ \frac{l(j) - T_4}{-T_4} \right] - (T_2 T_4 + 2T_1 T_4^2) \left[ \frac{1}{l(j) - T_4} + \frac{1}{T_2} \right]$$

Pour  $i=j \Rightarrow G(i, j)$  et  $F(i, j)$  prennent des formes différentes de celle calculées donc on va considérer le cas particulier important  $i=j \Rightarrow$  ceci se manifeste par le fait que  $\theta_{ij} = \delta_j$  c'est à dire qu'on est sur le panneau lui même.

Alors on aura :

$$G(i, j) = \int_0^{l(j)} \frac{\cos \theta dS_j}{r_{ij}} = \int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{\sqrt{[x(i) - xS(i-1) - S_i \cos \delta_i]^2 + [y(i) - yS(i-1) - S_j \sin \delta_i]^2}}$$

$$r_{ij} = \left| \frac{l(j)}{2} - S_j \right|$$

Alors :

$$\int_0^{l(j)} \frac{dS_j}{\frac{l(j)}{2} - S_j} = -\ln \left| \frac{l(j)}{2} - S_j \right| \Big|_0^{l(j)} = 0$$

Ce premier résultat est évident car il provient de la partie distribution uniforme

Donc :

$$G(i, j) = 0$$

$$F(i, j) = \int_0^{l(j)} \frac{s_j ds_j}{\frac{l(j)}{2} - s_j} = - \int_0^{l(j)} \frac{\frac{l(j)}{2} - s_j - \frac{l(j)}{2}}{\frac{l(j)}{2} - s_j} ds_j$$

Finalement :

$$F(i, j) = \int_0^{l(j)} - ds_j + \frac{l(j)}{2} \int_0^{l(j)} \frac{ds_j}{\frac{l(j)}{2} - s_j} = -l(j)$$



ANNEXE IV

PROGRAMME

METHODE DES SINGULARITES DISTRIBUEES

```

*****
* ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE *
* Deprt GENIE-MECANIQUE *
* *
* PROJET DE FIN D'ETUDES *
* *
* ANALYSE DES ECOULEMENTS POTENTIELLES *
* PAR *
* LA METHODE DES SINGULARITES DISTRIBUEES *
* *
* Binome : Promoteur : *
* - NACEREDDINE Rabia - ATIF Abdelmadjid *
* - NOUIOUA Hakim *
* *
* Promotion 1992-1993 *
*****

```

implicit double precision (a-h,o-z)

```

*****
*=====
*
* n : Nombre de points de controles
* u : Vitesse de l'ecoulement uniforme
* alf : Angle d'incidence
* r1,r2 : Dimension de l'obstacle (r1=r2=r pour le cylindre
* g : Circulation
* nbr : Type de charge de singularits nbr=1 :charge concentree
* nbr=2 :charge repartie
* nbc : (nbc =1 pour obstacle isol , nbc =2 pour une rangee
* ik : Numero du bord d'attaque pour le cas des profils d'ailes
* xs : Abscisse des points aux sommets de l'obstacle
* ys : Ordonnee des " "
* x : Abscisse des points de controle
* y : Ordonnee des " "
* xl : Longueur des panneaux
* csdt,sndt : Cossinus directeurs des panneaux
* a : Matrice des coef d'influences pour le calcul Vn
* xk : Intensites des singularitess
* er1..5: Coefficient pour les calculs d'integreles
* obstacle : Type d'obstacle
* fich : Nom du fichier DATA
* cp : Coef de pression
* ge,f : Matrices des coef d'influences pour le calcul de Vt
* cl : Coef de portance
* cd : Coef de trainee
* psi : Fonction de courant
*=====
*****

```

```

parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre6/ er1,er2,er3,er4,er5
common /cylindre7/ obstacle,fich

```

```

common /cylindre8/ cp(mn)
common /cylindre10/ ge(mn,mn),f(mn,mn)
common /cylindre12/ xc1,xc2,yc1,yc2

```

```

dimension tet(mn)

```

```

character*20 obstacle,fich

```

```

open(1,file='profi.dat',status='unknown')
data pi /3.141592654/

```

```

call menu(men)
print*,men

```

```

* * * * *
*          CREATION DES FICHIERS DATA
* * * * *

```

```

print*, 'FICHER DE DONNEES : '
read(*,35) fich
open(2,file=fich,status='unknown')
print*, 'FICHER DE RESULTATS : '
read(*,35) fich
35  format(a10,S)
open(3,file=fich,status='unknown')

```

```

call espace
nbc=1

```

```

* * * * *
*          LECTURE DES DONNEES
* * * * *

```

```

read(2,*) u,alf,n
alf=alf*pi/180
call profil(nr)

```

```

* * * * *
*          CALCUL DES POSITION DES POINTS DE CONTROLE
* * * * *

```

```

do 1 i=1,n*nbc
if(i.eq.n+1)then
ii=2*n
else
if(i.eq.1)then
ii=n
else
ii=i-1
endif
endif
x(i)=(xs(ii)+xs(i))/2
y(i)=(ys(ii)+ys(i))/2
if(i.le.n)then
if(nbc.eq.2)then
write(1,39)xs(i),ys(i),xs(n+i),ys(n+i)
else

```

```

write(1,39)xs(i),ys(i)
endif
endif
xl(i)=dsqrt((xs(ii)-xs(i))*2+(ys(ii)-ys(i))*2)
sndt(i)=(ys(i)-ys(ii))/xl(i)
csdt(i)=(xs(i)-xs(ii))/xl(i)
1 continue
if(nbc.eq.2)then
write(1,39)xs(1),ys(1),xs(n+1),ys(n+1)
else
write(1,39)xs(1),ys(1)
endif
39 format(1x,4(f8.4,1x))
12 format(1x,i2,6(1x,f7.4))

nbr=2
if((g.eq.0).and.((nr.ne.3).and.(men.ne.3)))then
* * * * *
* CHOIX DU CHARGEMENT
* * * * *

write(*,*)
write(*,*)' 1- sources concentrees sur les milieux des panneaux'
write(*,*)' 2- chargement reparti sur tout les panneaux'
write(*,*)
write(*,18)
18 format(1x,'choix :',S)
read(*,*) nbr
endif

* * * * *
* CREATION D'UN FICHER POUR LE CALCUL DE LA PORTANCE C1
* * * * *

if(men.eq.2)then
lim1=-16
lim2=16
open(6,file='cl.dat',status='unknown')
else
lim1=1
lim2=1
endif
do 1586 ite=lim1,lim2,2
if(men.eq.2) alf=pi*ite/180

* * * * *
* CALCUL DU SYSTEME A X = B
* * * * *

call ft(nr)

* * * * *
* RESOLUTION DU SYSTEME A X = B
* * * * *

call gauss

```

```

sk=0
if(men.ne.2)then
do 4 i=1,n*NBC
sk=sk+xk(i)
4 write(*,*)'k',i,'=',xk(i)
print*,'SOMME DES KI=',sk
pause
endif

```

```

* * * * *
* INFLUENCE D 'UNE RANGEE D'OBSTACLE
* * * * *

```

```

if(nbc.eq.2)then
do i=1,n
if(i.le.ik)then
if(nr.eq.3)then
xk(i)=xk(n+i)
else
xk(i+n)=xk(i)
endif
else
if(nr.eq.3)then
xk(n+i)=xk(i)
else
xk(i)=xk(i+n)
endif
endif
enddo
endif
if(men.ne.3)then

```

```

* * * * *
* CALCUL DES COEFICIENTS DE PRESSION
* * * * *

```

```

if((nr.eq.3).or.(g.ne.0))then
call zitounel
endif
do 75 i=1,n*NBC
cp(i)=-u*(dcos(alf)*csdt(i)+dsin(alf)*sndt(i))
if((nr.ne.3).and.(g.eq.0))then
do 76 j=1,n*NBC
if(j.eq.1) then
jj=n
else
if(j.eq.n+1)then
jj=2*n
else
jj=j-1
endif
endif
call meftah(s,i,j,jj)
cp(i)=cp(i)+0.5*s*xk(j)/pi
76 continue
else

```

```

    call chaouchi(i)
    endif
    cp(i)=cp(i)/u
    cp(i)=1-(cp(i))**2
75  continue
    h=2*pi/100

* * * * *
*   IMPRESSION DES RESULTATS
* * * * *

    xc=(nbc-1)*xc1
    yc=(nbc-1)*yc1
    do 81 i=n,1,-1
    if(x(i)-xc)755,720,730
755  if(y(i).ge.yc)then
    tet(i)=atan((y(i)-yc)/(x(i)-xc))+pi
    else
    tet(i)=atan((y(i)-yc)/(x(i)-xc))-pi
    endif
    goto 80
720  if(y(i).lt.yc) then
    tet(i)=-0.5*pi
    else
    tet(i)=pi*0.5
    endif
    goto 80
730  tet(i)=atan((y(i)-yc)/(x(i)-xc))
80   tet(i)=tet(i)*180/pi
    if(nr.eq.3)then
    if(nbc.eq.2)then
    write(3,123)x(i),cp(i),x(i),cp(n+i)
    else
    v=u*dsqrt(1-cp(i))
    write(3,*)x(i),cp(i),v
    endif
    endif
81   continue
123  format(1x,4(f10.5,1x))
    if(nr.ne.3)then
    il=0
    il=0
89   il=il+1
    if(tet(il).lt.0) goto 89
    do 95 ik=il,n
    tt=tet(ik)*tet(il)
    if(tt)98,99,95
98   ij=ik-1
    goto 85
99   ij=ik
    goto 85
95   continue

85   write(3,*)tet(ij),cp(ij),cp(ij+n*(nbc-1))
    do 96 j=ij-1,ij-n+1,-1
    if(j.gt.0)then
    if(tet(j).lt.0)then

```

```

tte=tet(j)+360
else
tte=tet(j)
endif
write(3,*)tte,cp(j),cp(j+n*(nbc-1))
else
jj=n-il
il=il+1
if(jj.eq.n)then
jj1=1
else
jj1=jj+1
endif
if(tet(jj).lt.0)then
tte=tet(jj)+360
else
tte=tet(jj)
endif
write(3,*)tte,cp(jj),cp(jj+n*(nbc-1))
endif

```

```

96 continue
endif
if((nbc.eq.2).and.(nr.eq.3))then
open(5,file=' ',status='unknown')
print*, 'ATTENTION L"EXTADOS ET L"INTRADOS DOIVENT AVOIR '
print*, 'DE PREFERENCE LE MEME NBRE DE POINTS '
print*, 'Nbre de division en largeur du canal:'
read(*,*)nd
print*, ik, n
do 165 i=ik, n+1
if(i.ne.n+1)then
xx=xs(i)
yya=ys(i)
yyb=ys(2*n+2-i)
else
xx=xs(1)
yya=ys(1)
yyb=ys(n+1)
endif
h=(yyb-yya)/(nd+1)
do 165 j=1, nd
yy=yya+j*h
a(i,j)=xx
f(i,j)=yy
write(5,*)xx,yy,psi
print*,xx,yy
165 continue
else

```

```

* * * * *
*   CALCUL DU COEFICIENT DE PORTANCE
* * * * *

```

```

h=2*pi/n
it=n
if(nr.ne.3)then

```

```

do 195 i=1,n
195 b(i)=-cp(i)*csdt(i)
    b(n+1)=b(1)
    call integrale(it,h,cl)
    cl=0.5*cl
    else
    call lift(cl,1)
endif

```

```

* * * * *
*   CALCUL DU COEFICIENT DE TRAINEE
* * * * *

```

```

    h=2*pi/n
    it=n
    if(nr.ne.3) then
do 295 i=1,n
295 b(i)=cp(i)*sndt(i)
    b(n+1)=b(1)
    call integrale(it,h,cd)
    cd=0.5*cd
    else
    call lift(cd,2)
endif
    print*,ite,cl,cd
    write(6,*)ite,cl,cd
endif
else

```

```

* * * * *
*   CALCUL DES LIGNES DE COURANTS
* * * * *

```

```

    close(1)
    close(2)
    write(*,*)'xx,yy  ?'
    read(*,*)xx,yy
    call courant(xx,yy,psi,nr)
    write(3,111)xx,yy,psi
111 format(1x,2(f5.2,1x),2(1x,f10.7))
    do 179 ii=1,100
    if(xx.ge.10)goto 999
    ta=7*pi/8
    tb=-7*pi/8
    if((xx**2-4).lt.0)then
    h=0.1
    else
    h=1
    endif
    xxa=xx
    yya=yy+h
    xxb=xx
    yyb=yy-h
    call courant(xxa,yya,psia,nr)
    call courant(xxb,yyb,psib,nr)
    do 149 ij=1,10
    tc=(ta+tb)/2
    xxc=xx+h*dcos(tc)

```



```

    yyc=yy+h*dsin(tc)
    call courant(xxc,yyc,psic,nr)
    psr=(psia-psi)*(psic-psi)
    pst=(psib-psi)*(psic-psi)
    if(psr)146,147,148
146  tb=tc
    psib=psic
    goto 152
147  goto 151
148  if(pst)161,151,163
161  ta=tc
    psia=psic
    goto 152
163  write(*,*)'P A S   D E   S O L U T I O N'
    goto 999
152  continue
189  format(5(f7.5,1x))
149  continue
151  xx=xxc
    yy=yyc
    write(*,*)xx,yy
    write(3,111)xx,yy,psi,psic
    write(*,*)'psi=',psi,psic
    psi=psic
    if(xx.ge.2.5)goto 999
179  continue
999  continue
endif
1586 continue
    stop
    end

```

```

C=====
C          SUBROUTINE PROFIL
C          DICRITISATION DE L'OBSTACLE
C=====
    subroutine profil(nr)

    implicit double precision (a-h,o-z)

    parameter(mn=60)
    common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
    common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
    common /cylindre7/ obstacle,fich
    common /cylindre12/xcl,xc2,ycl,yc2

    character*20 obstacle,fich
    data pi /3.141592654/

    call espace
    nbc=1
    read(2,159)obstacle
159  format(2x,a10)
    call espace
    read(2,*)g

```

```

call espace
if(obstacle.eq.'cylindre') then
nr=1
read(2,*) r1
else
if(obstacle.eq.'ellipse') then
nr=2
read(2,*) r1,r2
else
nr=3
endif
endif
em=1.e-7
if(dabs(g-(4*pi*u*r1)).gt.em)then
delt=asin(-g/(4*pi*u*r1))
else
delt=-pi/2
endif

if (nr-2) 152,153,154
152 r2=r1
153 write(*,*)
if(g.eq.0)then
if(nr.eq.1)then
write(*,*)'          1- Cylindre isol '
write(*,*)'          2- Range de cylindres '
else
write(*,*)'          1- Ellipse isol '
write(*,*)'          2- Range d"ellipses'
endif
write(*,*)
write(*,1)

1 format(1x,'Choix :',S)

read(*,*)nbc
endif
if(nbc.eq.2)then
if(mod(n,2).ne.0)then
print*,'LE NBRE DE NOEUDS DOIT ETRE PAIR'
write(*,*)'PROPOSER UNE AUTRE VALEURE DE N:'
read(*,*)n
endif
ik=1+n/2
xc1=0
yc1=-2*r2
xc2=0
yc2=2*r2
endif
write(*,*)

do 100 i=1,n
if(g.eq.0)then
teta=2*(i-1)*pi/n
else
teta=2*(i-1)*pi/n

```

```

endif
xs(i)=(nbc-1)*xc1+r1*dcos(pi-teta-delt)
100 ys(i)=(nbc-1)*yc1+r2*dsin(pi-teta-delt)

if((g.eq.0).and.(nbc.eq.2))then
do 101 i=(n+1),2*n
teta=pi/n+2*(i-1)*pi/n
teta=2*(i-1)*pi/n
xs(i)=((nbc-1)*xc2+r1*dcos(pi-teta-delt))*(nbc-1)
101 ys(i)=((nbc-1)*yc2+r2*dsin(pi-teta-delt))*(nbc-1)
endif
return
154 print*, 'profil quelconque'
write(*,*) '          1- Aube isole '
write(*,*) '          2- Range d"aubes '
read(*,*)nbc

if(nbc.eq.2)then
print*, 'Donner le numero du bord d"attaque:'
read(*,*)ik
write(*,*) 'Distance entre les deux bords de fuites:'
read(*,*)bb
endif
do 134 i=1,n
read(2,*) xs(i),ys(i)
if(i.eq.1)then
cc=dsqrt(xs(1)**2+ys(1)**2)
endif
xs(i)=xs(i)/cc
ys(i)=ys(i)/cc
134 continue
if(nbc.eq.2)then
do i=1,n
xs(i+n)=xs(i)*(nbc-1)
ys(i+n)=(ys(i)+bb)*(nbc-1)
enddo
endif
return
end

```

```

C=====
C          RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATION A X =B
C          PIVOTATION MAXIMALE DE LIGNES
C=====

```

```

subroutine gauss

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)

DO 260 K=1,n*nbc-1
call pivotmax(k)
DO 260 I=K+1,n*nbc
b(I)=b(I)-b(K)*a(I,K)/a(K,K)
DO 260 J=n*nbc,K,-1

```

```

a(I,J)=a(I,J)-a(I,K)*a(K,J)/a(K,K)
260 continue
xk(n*NBC)=b(n*NBC)/a(n*NBC,n*NBC)
DO 270 I=n*NBC-1,1,-1
xk(I)=0
DO 280 J=I+1,n*NBC
xk(I)=xk(I)+a(I,J)*xk(J)
280 continue
xk(I)=(b(I)-xk(I))/a(I,I)
270 continue
RETURN
END

```

```

C=====
C          SUBROUTINE ANGLE
C    CALCUL ET LOCALISATION DES ANGLES
C=====

```

```

subroutine angle(t,xx,yy,ih)
implicit double precision (a-h,o-z)

```

```

parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
data pi /3.141592654/

```

```

if(xx)787,788,789
787 if(yy.gt.0)then
t=pi+atan(yy/xx)
ih=3
else
t=atan(yy/xx)-pi
ih=4
endif
goto 790
788 if(yy.gt.0)then
t=pi/2
else
t=-pi/2
endif
goto 790
789 t=atan(yy/xx)
if(yy.gt.0)then
ih=1
else
ih=2
endif
790 continue
return
end

```

```
C=====
C             SUBROUTINE FT
C             CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE A
C=====
```

```
subroutine ft(nr)
```

```
implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre6/er1,er2,er3,er4,er5
common /cylindre10/ge(mn,mn),f(mn,mn)
```

```
data pi /3.141592654/
```

```
if((nr.ne.3).and.(g.eq.0)) then
```

```
if(nbr.eq.1)then
```

```
print*, '1111111111111111111111111111111111'
```

```
do 356 i=1,n*nbc
```

```
if(i.eq.1)then
```

```
ii=n
```

```
else
```

```
if(i.eq.n+1)then
```

```
ii=2*n
```

```
else
```

```
ii=i-1
```

```
endif
```

```
endif
```

```
xx=xs(i)-xs(ii)
```

```
yy=ys(i)-ys(ii)
```

```
call angle(di,xx,yy,igi)
```

```
b(i)=-2*pi*u*(dsin(alf)*csdt(i)-dcos(alf)*sndt(i))
```

```
do 356 j=1,n*nbc
```

```
if(i.eq.j)then
```

```
a(i,i)=pi
```

```
else
```

```
rii=(y(i)-y(j))**2+(x(i)-x(j))**2
```

```
xx=x(i)-x(j)
```

```
yy=y(i)-y(j)
```

```
call angle(tij,xx,yy,ig)
```

```
a(i,j)=xl(j)*sin(tij-di)/rii**0.5
```

```
endif
```

```
356 continue
```

```
return
```

```

else
do 3 i=1,n*ncb
b(i)=-2*pi*u*(dsin(alf)*csdt(i)-dcos(alf)*sndt(i))
do 3 j=1,n*ncb
if(i.eq.j) then
a(i,j)=pi
else
if(j.eq.1)then
jj=n
else
if(j.eq.n+1)then
jj=2*n
else
jj=j-1
endif
endif
er1=(-x(i)+xs(jj))*sndt(i)+(y(i)-ys(jj))*csdt(i)
er2=-sndt(i)*csdt(j)+sndt(j)*csdt(i)
er3=(x(i)-xs(jj))**2+(y(i)-ys(jj))**2
er4=(x(i)-xs(jj))*csdt(j)+(y(i)-ys(jj))*sndt(j)
er5=(x(i)-xs(jj))*sndt(j)-(y(i)-ys(jj))*csdt(j)
er5=dabs(er5)
a(i,j)=(er1-er2*er4)*(atan((xl(j)-er4)/er5)-atan(-er4/er5))/er5
a(i,j)=a(i,j)-0.5*er2*dlog(dabs((er3-2*er4*xl(j)+xl(j)**2)/er3))
endif
3 continue
endif
else
print*, '*/**/*/*/*/*/*/*/*/*/*/*/*/*/*/*/*'
do 333 i=1,n*ncb
do 333 j=1,n*ncb
if(i.eq.j) then
ge(i,i)=0
f(i,i)=-xl(i)
else
if(j.eq.1)then
jj=n
else
if(j.eq.n+1)then
jj=2*n
else
jj=j-1
endif
endif
er1=(x(i)-xs(jj))*csdt(i)+(y(i)-ys(jj))*sndt(i)
er2=csdt(i)*csdt(j)+sndt(j)*sndt(i)
er3=(x(i)-xs(jj))**2+(y(i)-ys(jj))**2
er4=(x(i)-xs(jj))*csdt(j)+(y(i)-ys(jj))*sndt(j)
er5=(x(i)-xs(jj))*sndt(j)-(y(i)-ys(jj))*csdt(j)
er5=dabs(er5)
if(er5.le.0)then
print*, char(7)
s1=1/(xl(j)-er4)
s1=s1+1/er4
s10=(er4*er2-er1)*s1
s15=2*er2*er4**2-er1*er4

```

```

s16=s15*s1 .
s2=dlog(dabs((xl(j)-er4)/er4))
s25=(er1-2*er4*er2)*s2
s20=er2*s2
ge(i,j)=s10-s20
f(i,j)=s25+s16-er2*xl(j)
goto 334
endif
s11=atan((xl(j)-er4)/er5)
s11=s11-atan(-er4/er5)
s11=s11/er5
s22=(er3-2*er4*xl(j)+xl(j)**2)/er3
s22=dlog(dabs(s22))
s21=0.5*er2*s22
s=(er1-er2*er4)*s11
ge(i,j)=s-s21
er9=er1-2*er2*er4
s=(er9*er4+er2*er3)*s11-er2*xl(j)
f(i,j)=s+0.5*er9*s22
334 continue
endif
333 continue
do 555 i=1,n*NBC
b(i)=-2*pi*u*(dsin(alf)*csdt(i)-dcos(alf)*sndt(i))
do 556 j=1,n
if(j.eq.1)then
a(i,1)=ge(i,2)-f(i,2)/xl(2)-f(i,1)/xl(1)
else
if(j.eq.n) then
a(i,n)=f(i,n)/xl(n)+(ge(i,1)-f(i,1)/xl(1))
else
a(i,j)=f(i,j)/xl(j)+ge(i,j+1)-f(i,j+1)/xl(j+1)
endif
endif
endif
556 continue
if(NBC.eq.2)then
do 557 j=1+n,2*n
if(j.eq.1+n)then
a(i,1+n)=ge(i,n+2)-f(i,n+2)/xl(n+2)-f(i,n+1)/xl(n+1)
else
if(j.eq.2*n) then
a(i,2*n)=f(i,2*n)/xl(2*n)+(ge(i,n+1)-f(i,n+1)/xl(n+1))
else
a(i,j)=f(i,j)/xl(j)+ge(i,j+1)-f(i,j+1)/xl(j+1)
endif
endif
endif
557 continue
endif
555 continue
endif
return
end

```

subroutine pivotmax(k)

implicit double precision (a-h,o-z)

```

parameter(mn=60)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)

```

```

l=k
do 300 ik=k+1,n*nbk
if(dabs(a(ik,k)).gt.dabs(a(l,k)))then
l=ik
endif

```

```

300 continue
do 301 jk=k,n*nbk
c=a(k,jk)
a(k,jk)=a(l,jk)
301 a(l,jk)=c
c=b(k)
b(k)=b(l)
b(l)=c
return
end

```

```

=====
CALCUL DE LA FONCTION DE COURANT
=====

```

```

subroutine courant(xx,yy,psi,nr)

```

```

implicit double precision (a-h,o-z)

```

```

parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre8/ cp(mn)
common /cylindre10/ ge(mn,mn),f(mn,mn)

```

```

data pi /3.141592654/

```

```

psi=u*xx*dsin(alf)+u*yy*dcos(alf)
if((nr.eq.3).or.(g.ne.0)) goto 315
it=98
do 236 j=1,n*nbk
h=xl(j)/98
if(j.eq.1)then
jj=n
else
if(j.eq.n+1)then
jj=2*n
else
jj=j-1
endif
endif
call rech(xx,yy,j,jj,h)

```



```

call integrale(it,h,s)
s=0.5*xk(j)*s/pi
236 psi=psi+s
return
315 it=48
do 237 j=1,n
h=x1(j)/48
if(j.eq.1)then
jj=n
xkj1=xk(n)
xkj2=xk(1)
else
jj=j-1
xkj1=xk(j-1)
xkj2=xk(j)
endif
do 129 jk=1,49
xj=xs(jj)+h*(jk-1)*csdt(j)
yj=ys(jj)+h*(jk-1)*sndt(j)
xxj=xx-xj
yyj=yy-yj
rik=dsqrt(xxj**2+yyj**2)
xkj=xkj1+(jk-1)*(xkj2-xkj1)/48
b(jk)=xkj*dlog(rik)
129 continue
call integrale(it,h,s)
s=0.5*s/pi

psi=psi+s
237 continue
return
end

```

```

=====
TRACE DES LIGNES DE COURANTS
=====

```

```

subroutine rech(xx,yy,j,jj,h)

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)

data pi /3.141592654/

do 128 jk=1,99
xj=xs(jj)+h*(jk-1)*csdt(j)
yj=ys(jj)+h*(jk-1)*sndt(j)
xxj=xx-xj
yyj=yy-yj
if(xxj)555,520,530
55 if(yyj.ge.0)then
teta=atan(yyj/xxj)+pi
else

```

```

teta=atan(yyj/xxj)-pi
endif
goto 531
520 if(yyj.lt.0) then
teta=-0.5*pi
else
teta=pi*0.5
endif
goto 531
530 teta=atan(yyj/xxj)
531 b(jk)=teta
128 continue
return
end

```

```

=====
CALCUL DE LA VITESSE TANGENTIELLE POUR
LE CAS DES PROFILS NON PORTANT
=====

```

```

subroutine meftah(s,i,j,jj)

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre6/ er1,er2,er3,er4,er5
common /cylindre10/ge(mn,mn),f(mn,mn)

data pi /3.141592654/

if(nbr.eq.1)then

if(i.eq.j)then
s=0
else
rii=(y(i)-y(j))**2+(x(i)-x(j))**2
if(i.eq.1)then
ii=n
else
if(i.eq.n+1)then
ii=n*2
else
ii=i-1
endif
endif
print*,i,j
xx=x(i)-xs(ii)
yy=y(i)-ys(ii)
call angle(di,xx,yy,igi)

```

```

xx=x(i)-x(j)
yy=y(i)-y(j)
call angle(tij,xx,yy,ig)

```

```

s=-xl(j)*cos(di-tij)/rii**0.5

```

```

endif
else
print*, 'chargement reparti'
if(i.eq.j)then
s=0
else
er1=-(x(i)-xs(jj))*csdt(i)-(y(i)-ys(jj))*sndt(i)
er2=csdt(i)*csdt(j)+sndt(j)*sndt(i)
er3=(x(i)-xs(jj))**2+(y(i)-ys(jj))**2
er4=(x(i)-xs(jj))*csdt(j)+(y(i)-ys(jj))*sndt(j)
er5=(x(i)-xs(jj))*sndt(j)-(y(i)-ys(jj))*csdt(j)
er5=dabs(er5)
s=(er1+er2*er4)*(atan((xl(j)-er4)/er5)-atan(-er4/er5))/er5
s=s+0.5*er2*dlog(dabs((er3-2*er4*xl(j)+xl(j)**2)/er3))
endif
endif
return
end

```

```

=====
CALCUL DES COEF DE PORTANCE ET DE TRAINEE
POUR LES PROFILS D'AILLES
=====

```

```

subroutine lift(cl,ii)
implicit double precision (a-h,o-z)

parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre6/ er1,er2,er3,er4,er5
common /cylindre8/ cp(mn)
common /cylindre10/ge(mn,mn),f(mn,mn)
common /cylindre12/xcl,xc2,ycl,yc2

call surch
print*,ik
it=ik-1
h=1
do i=1,ik-1
if(ii.eq.1)then
df=csdt(i+1)
else
df=sndt(i)
endif

```

```

b(i)=cp(i)*xl(ik+1)*df
enddo
call integrale(it,h,c11)
it=n-ik
do i=ik,n-1
if(ii.eq.1)then
df=csdt(i+1)
else
df=snadt(i)
endif
b(i)=cp(i)*xl(i+1)*df
enddo
call integrale(iy,h,c12)
cl=c11-c12

return
end

```

```

=====
CALCUL DU NUMERO DU BORD D'ATTAQUE
POUR LES PROFILS D'AILES
=====

```

```

subroutine surch
implicit double precision (a-h,o-z)

parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik

do 15 i=1,n
dif=xs(i+1)-xs(i)

if(dif.ge.0) goto 16
15 continue
16 ik=i
return
end

```

```

=====
INTEGRATION NUMERIQUE PAR LAMETHODE DE SIMPSON
=====

```

```

subroutine integrale(it,h,s)

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre8/ cp(mn)

s=b(1)+b(it+1)+4*b(it)
do 175 ii=2,it-2,2
75 s=s+4*b(ii)+2*b(ii+1)
s=h*s/3
return
end

```

=====

CALCUL DE LA VITESSE TANGENTIELLE POUR LE CAS  
DES PROFILS PORTANTS

=====

subroutine zitounel

```

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre6/ er1,er2,er3,er4,er5
common /cylindre8/ cp(mn)
common /cylindre10/ge(mn,mn),f(mn,mn)

data pi /3.141592654/
print*, '////////////////////////////////////'
do 833 ii=1,n*nb
do 833 jj=1,n*nb
if(ii.eq.j) then
ge(ii,j)=pi
f(ii,j)=pi*xl(j)/2
else
if(j.eq.1)then
jj=n
else
if(j.eq.n+1)then
jj=2*n
else
jj=j-1
endif
endif
er1=-(x(ii)-xs(jj))*sndt(ii)+(y(ii)-ys(jj))*csdt(ii)
er2=csdt(ii)*sndt(j)-csdt(j)*sndt(ii)
er3=(x(ii)-xs(jj))**2+(y(ii)-ys(jj))**2
er4=(x(ii)-xs(jj))*csdt(j)+(y(ii)-ys(jj))*sndt(j)
er5=(x(ii)-xs(jj))*sndt(j)-(y(ii)-ys(jj))*csdt(j)
er5=dabs(er5)
if(er5.lt.0)then
print*,char(7)
s1=1/(xl(j)-er4)
s1=s1+1/er4
s10=(er4*er2-er1)*s1
s15=2*er2*er4**2-er1*er4
s16=s15*s1
s2=dlog(dabs((xl(j)-er4)/er4))
s25=(er1-2*er4*er2)*s2

s20=er2*s2
ge(ii,j)=s10-s20
f(ii,j)=s25+s16-er2*xl(j)
goto 834

```

```

endif
s11=(atan((xl(j)-er4)/er5)-atan(-er4/er5))/er5
s22=dlog(dabs((er3-2*er4*xl(j)+xl(j)**2)/er3))
s=(er1-er2*er4)*s11
ge(ii,j)=s-0.5*er2*s22
er9=er1-2*er2*er4
s=(er9*er4+er2*er3)*s11-er2*xl(j)
f(ii,j)=s+0.5*er9*s22
4 continue
endif
33 continue
do 757 i=1,n*NBC
do 758 j=1,n
if(j.eq.1)then
a(i,1)=ge(i,2)-f(i,2)/xl(2)-f(i,1)/xl(1)
else
if(j.eq.n) then
a(i,n)=f(i,n)/xl(n)+(ge(i,1)-f(i,1)/xl(1))
else
a(i,j)=f(i,j)/xl(j)+ge(i,j+1)-f(i,j+1)/xl(j+1)
endif
endif
8 continue
if(NBC.eq.2)then
do 759 j=1+n,2*n
if(j.eq.n+1)then
a(i,n+1)=ge(i,n+2)-f(i,n+2)/xl(n+2)-f(i,n+1)/xl(n+1)
else
if(j.eq.2*n) then
a(i,2*n)=f(i,2*n)/xl(2*n)+(ge(i,n+1)-f(i,n+1)/xl(n+1))
else
a(i,j)=f(i,j)/xl(j)+ge(i,j+1)-f(i,j+1)/xl(j+1)
endif
endif
9 continue
endif
7 continue
return
end

```

subroutine chaouchi(i)

```

implicit double precision (a-h,o-z)
parameter(mn=60)
common /cylindre1/ xs(mn),ys(mn)
common /cylindre2/ x(mn),y(mn),xl(mn)
common /cylindre3/ n,u,alf,r1,r2,g,nbr,nbc,ik
common /cylindre4/ sndt(mn),csdt(mn),r(mn,mn)
common /cylindre5/ a(mn,mn),b(100),xk(mn)
common /cylindre8/ cp(mn)
common /cylindre10/ge(mn,mn),f(mn,mn)

```

```

data pi /3.141592654/

```

```

do 888 j=1,n*NBC

```

```
cp(i)=cp(i)+0.5*a(i,j)*xk(j)/pi
```

```
88 continue
```

```
return
```

```
end
```

```
=====
MENU PRINCIPAL
=====
```

```
subroutine menu(men)
```

```
implicit double precision (a-h,o-z)
```

```
write(*,7)
```

```
write(*,*)'
```

```
1- Calcul des coef de pression '
```

```
write(*,*)'
```

```
2- Calcul de portance
```

```
write(*,*)'
```

```
3- Calcul des lignes de courants'
```

```
write(*,*)
```

```
write(*,8)
```

```
read(*,*) men
```

```
7 format(//////////)
```

```
8 format(1x,' Choix :', $)
```

```
return
```

```
end
```

```
subroutine espace
```

```
read(2,*)
```

```
read(2,*)
```

```
return
```

```
end
```