

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECHANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# PROJET DE FIN D'ETUDES

## SUJET

METHODES D'ANALYSE  
DYNAMIQUE DES STRUCTURES  
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Proposé par :

M<sup>r</sup> BELBLIDIA

Etudié par :

M<sup>lle</sup> BAIRI FOUZIA  
M<sup>r</sup> OUYED ABDERRAHMANE

Dirigé par

M<sup>r</sup> BELBLIDIA

PROMOTION 1993

DEDICACES

A ma mère et à mon père qui ont toujours été à mes côtés  
pour me soutenir ,

A mes frères et à mes soeurs,

A la famille O U Y E D toute entière,

A tous mes amis,

je dédie cet humble travail.

Abderrahmane

A mes parents et tout mon entourage familial ,  
en particulier Yasmine, Doréa et Maya.

Fouzy

## REMERCIEMENTS

Nous remercions notre pays de nous avoir procurés les conditions nécessaires afin d'aboutir à notre grade d'ingénieur.

De même nous remercions tous les enseignants du département de génie mécanique de l' Ecole Nationale Polytechnique d'Alger qui ont contribué à notre formation.

Nous remercions plus particulièrement notre promoteur de projet de fin d'études M<sup>F</sup> FAWZI BELBLIDIA, qui nous a guidé et suivi dans notre travail et qui a su nous soutenir dans les moments difficiles.

## NOTATIONS

La liste des principales notations utilisées dans notre mémoire est présentée ci-dessous, bien qu'elles soient en général définies dans le texte dès leur apparition.

Afin d'éviter toute confusion, nous désignerons les matrices rigidité, masse et amortissement en caractères gras, à savoir  $K, M$  et  $C$ , ou entre crochets quelques fois. Nous noterons également  $K^t$ , la transposée de  $K$ .

Nous utiliserons enfin le point pour désigner la différentiation par rapport au temps, par exemple  $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ .

- $\epsilon$  : Déformations (vecteur).
- $\sigma$  : contraintes (vecteur).
- $u$  : Déplacements (vecteur).
- $E$  : Module d'YOUNG.
- $G$  : Module de cisaillement.
- $\nu$  : Coefficient de POISSON.
- $a_i$  : Coordonées généralisées fonctions inconnues du temps.
- $\gamma$  : Déformations de cisaillement (vecteur).
- $\omega$  : Fréquence d'excitation.
- $\omega_i$  : Fréquence propre correspondant au mode  $i$ .
- $\lambda_i$  :  $i$ ème valeur propre.
- $\phi_i$  :  $i$ ème vecteur propre.
- $\rho(\phi)$  : Quotient de RAYLEIGH.
- $T$  : Energie cinétique.
- $U$  : Energie potentielle.
- $\Lambda$  : Matrice spectrale.
- $E_i$  : Sous espace vectoriel.
- $\Delta t$  : Incrément de temps.
- $\xi$  : Coefficient d'amortissement.
- $A$  : Matrice d'amplification.
- MEF : Abréviation de la méthode des éléments finis.

Mots clés : dynamique, valeur propre, vecteur propre, intégration directe, superposition modale, Houbolt, Hilber  $\alpha$ , stabilité...

### ملخص

تتمثل هذه الأطروحة في دراسة الهياكل المتحركة عن طريق البرمجة باستخدام نظرية العناصر المتناهيّة وذلك بوجهتي نظر:  
- التحليل النمطي  
- التحليل المركبي بطريقتين: طريقة التفاضل المباشر وطريقة التركيب النمطي  
استعملت الطريقتان في البرمجة المعلوماتية على DLEARN وأجريت مقارنته نوعيّة بينهما.

### RESUME

L'étude consiste en l'analyse dynamique des structures discrétisées par éléments finis sous deux aspects :  
- Une analyse modale (fréquences et modes propres)  
- Une analyse dynamique par deux méthodes; à savoir la méthode d'intégration directe et la méthode de superposition modale.  
Les deux méthodes ont fait l'objet de programmation sur le code DLEARN et des études comparatives portant sur leurs performances ont été menées.

### SUMMARY

Our Survey aims at making the dynamic analysis of structures discretized into finite elements taking into account two aspects  
- A modal analysis (eigenvalues and eigenvectors)  
- A dynamic analysis with the help of two methods : direct integration and modal superposition.  
These methods have been implanted in the DLEARN code and a comparison in relation with their performances have been made.

SOMMAIRE



INTRODUCTION GENERALE

CHAPITRE I :

Introduction

I-1/ Rappels et hypothèses

I-1-1/ Notions d'élasticité dans un milieu continu ...1

I-1-2/ Propriétés des systèmes discrets ...5

I-2/ Principe de la méthode des éléments finis ...8

CHAPITRE II :

Introduction

II-1/ Méthodes de résolution des problèmes

aux valeurs propres ...12

II-1-1/ Méthode d'itération sur sous espace ...13

II-1-2/ Méthode de LANCZOS ...21

II-2/ Méthodes de recherche de la réponse dynamique ...29

II-2-1/ Recherche de la réponse dynamique par  
la méthode de superposition modale ...30

II-2-2/ Schémas d'intégration directe ...35

II-2-2-1/ Principe de ces méthodes ...35

II-2-2-2/ Méthodes explicites ...36

II-2-2-3/ Méthodes implicites ...42

II-2-2-4/ Schémas prédicteurs correcteurs ...50

II-2-2-5/ Méthodes mixtes ...52

II-2-2-6/ Analyse des méthodes directes d'intégration ...54

CHAPITRE III

Présentation du travail de programmation ...65

CHAPITRE IV

Résultats

Première partie: Comportement de l'algorithme de LANCZOS ...72

Deuxième partie: Effet de la troncature sur la réponse ...86

Troisième partie: Effet du nombre d'étapes d'intégration ...91

Quatrième partie: Etude de la stabilité des algorithmes ...94

Cinquième partie: Phénomène de résonance ...100

Sixième partie : Effet de l'amortissement numérique ...103

CONCLUSION GENERALE

## INTRODUCTION

De nos jours ,l'ingénieur se retrouve souvent confronté à réaliser des projets soumis à des contraintes financières et de sécurité des plus sévères .Celles-ci exigent non seulement un maximum de garanti de bon fonctionnement du projet fini mais aussi, dans beaucoup de cas ,d'éviter l'essai sur des modèles avant d'être pratiquement sûrs de leur résistance aux conditions de travail .

Du besoin de prévoir donc le comportement de certaines réalisations durant leur conception ,est née l'idée de la simulation numérique du comportement des systèmes physiques les plus complexes.

Celle-ci débute par la définition des hypothèses auxquelles satisfait le système ,puis nécessite par la suite l'utilisation des sciences de l'ingénieur pour aboutir à des systèmes aux équations différentielles décrivant le modèle mathématique.

Dans beaucoup de cas ,la complexité et la grande taille de ces systèmes nécessitent l'utilisation de l'outil informatique via des méthodes numériques ayant connu un essor certain. La méthode des éléments finis en est une des plus utilisées en calcul des structures, en mécanique des fluides et en transfert de chaleur.

L'analyse statique des structures ainsi discrétisées reste restreinte à certains cas seulement.

En effet, lors de présence d'excitations sismiques ou de mouvements alternatifs engendrant des excitations dues à l'inertie ,une étude sérieuse passe nécessairement par une analyse dynamique de la structure.

Ce type d'analyse tient compte de deux aspects fondamentaux que sont :  
Premièrement: Le spectre de fréquences propres de la structure permettant à l'ingénieur structuriste d'éviter, durant la conception, le phénomène de résonance.

Deuxièmement: L'analyse de la réponse structurale dans le temps,donnant la variation des déformations et des contraintes, permettant ainsi de juger quant à la résistance de la structure.

L'analyse dynamique des structures constituera donc le thème de notre projet.

## ASPIRATIONS:

Nous désirons, par le biais de ce travail, insérer dans un code éléments finis (DLEARN) une partie faisant le calcul de la réponse dynamique des structures par la méthode de superposition modale.

Une deuxième partie aura pour objet l'étude comparative de la méthode sus-citée et d'une méthode d'intégration directe existant dans le code.

## STRUCTURE DE LA THESE :

Notre mémoire est organisé en quatre chapitres rendant compte:

- \* Des bases théoriques nécessaires pour mener un calcul de dynamique des structures et émanant d'une recherche bibliographique.
- \* Du travail effectué en programmation.
- \* Des résultats recueillis en exécutant le programme pour certains cas simples .

### CHAPITRE I:

Fait le rappel de certaines hypothèses d'élasticité des matériaux et de propriétés modales , puis donne les concepts fondamentaux de la discrétisation éléments finis utilisés en dynamique des structures.

### CHAPITRE II:

Fait un exposé de méthodes d'analyse modale donc des algorithmes de résolution du problème propre généralisé ainsi que du principe de la méthode de superposition modale permettant de réduire la taille du problème en découplant les équations.

Après quoi, il donne une panoplie d'algorithmes aux différences finies. Laquelle, sans être exhaustive, étale explicitement leurs schémas en insistant particulièrement sur leurs comportements vis à vis de la stabilité et de la convergence.

### CHAPITRE III:

Présente quelques techniques utilisées par le programme DLEARN ainsi que sa structure en faisant mention des deux parties implantées; à savoir la partie faisant la résolution du problème aux valeurs propres et la partie calculant la réponse par la méthode de superposition modale.

### CHAPITRE IV:

Présente les résultats des applications faites, pour :

Premièrement: Montrer la manière selon laquelle les valeurs propres convergent en utilisant l'algorithme de LANCZOS. La visualisation des déformées modales étant faite par le logiciel SAP-90.

Deuxièmement: Comparer la méthode d'intégration directe utilisant la méthode- $\alpha$  de HILBER et la méthode de superposition modale faisant usage de l'algorithme de HUBBOLT. Et ce, du point de vue coût et précision.

Troisièmement: Illustrer un certain nombre de phénomènes physiques tels que la résonance, et numériques tels que la stabilité et l'amortissement algorithmique.

## CHAPITRE I

### LES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES

#### INTRODUCTION

Ce chapitre vise à introduire les notions de discrétisation des systèmes élastiques en mouvement.

Des rappels d'élasticité ,et de propriétés modales se sont donc avérés nécessaires.

Nous introduirons par la suite la méthode de discrétisation utilisée pour nos structures qu'est la méthode des éléments finis.

#### I-1/ RAPPELS ET HYPOTHESES

##### I-1-1/ notions d'élasticité dans un milieu continu

La mécanique des milieux continus s'intéresse à l'étude du comportement des fluides et des solides d'un point de vue macroscopique donc ignorant la structure moléculaire de la matière.

Par ailleurs ,on convient que le concept de milieu continu est un modèle physique permettant une approche mathématique conséquente pour la résolution de problèmes.

Dans la suite de notre travail,nous débuterons avec cette hypothèse de milieu continu pour l'étude et la résolution d'un problème particulier qu'est le comportement dynamique des structures élastiques.

Quelques définitions qui se retrouvent très souvent en mécanique des milieux continus s'imposent:

##### *\* Notion de vecteur contrainte:*

Soit un milieu (M) chargé extérieurement sectionné par un plan (P)de normale  $\vec{n}$  passant par un point Q.

On défini le vecteur contrainte  $\vec{t}$  agissant sur une surface infinitésimale dS entourant le point Q par:

$$\vec{t}(Q,\vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad \dots(1)$$

On note que  $\Delta \vec{F}$  est la résultante des forces internes par rapport au milieu initial (M) agissant sur l'élément de surface  $\Delta S$ .

*\* Tenseur de contraintes en un point:*

Etant donné la représentation des vecteurs contraintes  $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}, \vec{t}^{(3)}$ , en un point Q dans les trois directions du système choisi, alors le vecteur contrainte  $\vec{t}^{(n)}$  dans une direction  $\vec{n}$  quelconque pourra s'exprimer en fonction des contraintes  $\vec{t}^{(1)}, \vec{t}^{(2)}, \vec{t}^{(3)}$ , lesquelles sont la représentation du tenseur de contraintes T:

$$T = \left[ \left\{ \begin{matrix} \rightarrow(1) \\ t \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \rightarrow(2) \\ t \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} \rightarrow(3) \\ t \end{matrix} \right\} \right]$$

ou

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

**Conventions:**

\*  $\sigma_{ii} > 0$  (respectivement  $< 0$ ) correspondra à une traction (respectivement compression) dans la direction  $i$ .

\*  $\sigma_{ij}$ ,  $i$ : correspond à la face normale à  $x_i$   
 $j$ : indique la direction d'application sur la face normale à  $x_i$ .

Le vecteur contrainte  $\vec{t}^{(n)}$  en un point Q et dans une direction  $\vec{n} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$  exprimé dans le système de coordonnées choisi (Q,  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ) est donné par:

$$\vec{t}^{(n)} = T \cdot \vec{n}$$

I-1-1-b/ Etat de déformation élastique en un point d'un milieu continu :

L'hypothèse principale pour la caractérisation des déformations est que les déplacements et les gradients de déplacements sont infinitésimaux.

Cette hypothèse permet l'utilisation de la règle des petites déformations .Il est clair qu'une telle hypothèse donne des résultats corrects ,les déformations élastiques étant de 0.2%

Soit  $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ : un champ de déplacements des points du milieu par rapport à (R), repère de référence .

Alors le champ des déformations infinitésimales  $\epsilon_{ij}$  (composantes d'un champ tensoriel de déformations infinitésimales), sera défini par:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ u_{i,j} + u_{j,i} \right]$$

Remarque: Le tenseur de déformations est un tenseur symétrique.

I-1-1-c/ Comportement élastique des matériaux

DEFINITION:

Un matériau est dit élastique si une fois déchargé il retrouve sa position initiale .

Autrement dit ,en le chargeant ,il emmagasine de l'énergie potentielle sous une forme élastique ,et restitue toute cette énergie après sa décharge .

En 1638 ,GALILEE a commencé l'étude de la résistance du solide.Plus tard,(vers 1676),HOOKE, a développé cette étude et a publié ses travaux (extension proportionnelle à la force).

Le solide élastique linéaire est un modèle idéal ,en effet, il suit la loi de HOOKE qui s'exprime pour un essai uniaxial par la formule:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad \dots(2)$$

Celle-ci exprimant une relation linéaire entre la contrainte axiale et la déformation axiale  $\epsilon_x$ , E étant le module de YOUNG (propriété du matériau).

La loi de HOOKE pour un cisaillement s'exprime par:

$$\tau = G.\gamma$$

Dans le cas du chargement le plus général, on écrit:

$$\left\{ \sigma \right\} = \left[ D \right] \cdot \left\{ \gamma \right\}$$

Pour un matériau isotrope, la matrice  $\left[ D \right]$  s'écrit:

$$\left[ D \right] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}$$

$\lambda$  et  $\mu$ : Coefficients de LAME .

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G$$

Où:

E:Module d'élasticité d'YOUNG

$\nu$ :Coefficient de POISSON

G:Module de cisaillement

## I-1-2/ Propriétés des systèmes discrets :

### a- notion de mode :

La solution de (2) peut s'obtenir à partir de l'étude des vibrations libres c'est à dire par superposition des solutions du système sans second membre.

Modes= Solutions propres du système sans second membre.

Il est à noter que le problème fréquemment rencontré dans l'analyse des vibrations est celui de l'équation des vibrations libres sans amortissement:

$$M \ddot{q} + K q = 0 \quad \dots(3)$$

Le système homogène a donc n valeurs propres réelles

$$\lambda_i = \omega_i^2, \quad i=1, n$$

Avec  $\omega_i$  = pulsations propres

et la solution harmonique de ce système est  $q=x e^{j\omega t}$   
le système (3) devenant  $\omega^2 M x = K x \quad \dots(4)$

On appelle matrice modale  $\phi$ , la matrice (nxn) dont les colonnes sont constituées par les n vecteurs propres solutions de l'équation (4):

$$\phi = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$$

Le problème associé à [3] devient:

$$K \phi = M \phi \Lambda \quad \dots(5)$$

Avec  $\Lambda$ , matrice diagonale des valeurs propres correspondantes.

b- orthogonalité des modes :

Les modes propres sont orthogonaux par rapport à K et à M, soit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(i)T} \mathbf{M} \mathbf{x}^{(j)} = m_i \cdot \delta_{ij} \\ \mathbf{x}^{(i)T} \mathbf{K} \mathbf{x}^{(j)} = k_i \cdot \delta_{ij} \end{cases}$$

Avec:

$\delta_{ij}$  = Symbole de Kronecker.

$m_i$  = Masse généralisée du mode i.

$k_i = \omega_i^2 \cdot m_i$

c- structures non libres :

Pour ces structures, la matrice K est définie positive, et, la matrice M est définie positive également ou semi-définie positive (car tous les degrés de liberté ne sont pas obligatoirement affectés d'une masse).

d- Structures libres, propriétés des modes rigides :

Dans ce cas K est semi-définie positive. En effet K possède un certain nombre de singularités, 6, au maximum correspondantes aux différentes possibilités de déplacement d'ensemble ou modes rigides.

On distingue deux types de modes propres:

- modes rigides à fréquence propre nulle .
- modes élastiques à fréquence propre non nulle .

Soit  $[m_0]$  la matrice des 6 modes rigides purs,



Avec  $\eta = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ \eta_i \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$  coordonnées de RITZ

**\*\*PROPRIETE\*\*:**

Le quotient de Rayleigh est stationnaire au voisinage de tout vecteur propre et il atteint un extremum qui est la valeur propre correspondante. En particulier, le mode fondamental de vibration rend stationnaire le quotient de Rayleigh qui tend vers la valeur propre la plus basse. (ref I).

Ces rappels ayant été introduits, comme nous l'avons précisé plus haut; la méthode de discrétisation choisie étant la méthode des éléments finis de type déplacement, il nous faut expliquer son principe en dynamique.

I-2/ PRINCIPE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS EN DYNAMIQUE :

HISTORIQUE DE LA METHODE :

Il existe plusieurs méthodes décrivant le comportement des systèmes physiques, dans la modélisation d'une structure; parmi elles la méthode des éléments finis. Cette méthode s'applique à des problèmes stationnaires, non stationnaires, linéaires, non linéaires, à 1, 2 ou 3 dimensions.

Les travaux constituant le point de départ de l'histoire de l'analyse des structures furent ceux de NAVIER (1819), sur les structures hyperstatiques. Les méthodes énergétiques furent établies par MAXWELL (1864) et CASTIGLIANO (1878). Et c'est à cette période que les notions d'analyse des structures formées d'assemblage de barres ont été mises au point.

Avec le développement de l'ordinateur, la résolution de systèmes d'équations ne posait plus de problèmes et la MEF connut un progrès considérable, si bien qu'elle fut étendue à des domaines autres que celui de la mécanique des structures par COURANT en 1940.

A partir de 1960, Elle connut un développement rapide, et dans plusieurs directions à savoir:

- Création d'éléments de haute précision.
- Elargissement aux problèmes non linéaires.

De nos jours, elle représente la méthode la plus utilisée du moins, en mécanique des structures, retenue particulièrement pour sa fiabilité en modélisation des systèmes dans divers secteurs de l'industrie.

Elle consiste à étudier le comportement dynamique d'une structure en connaissant les déplacements aux différents noeuds en fonction du temps et cela en discrétisant cette structure dans l'espace (système de coordonnées (x,y,z) en éléments finis de type déplacements).

Il existe trois principales formulations de la méthode des éléments finis, la version déplacements, contraintes et la version mixte.

#### I-2-a/ Version déplacement :

La base de la formulation de la méthode des éléments finis, version déplacements est le principe des travaux virtuels.

Soit  $\bar{u}$  un petit déplacement imposé à la structure, le théorème des travaux virtuels donne la relation :

$$\int_V \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv = \int_V \{\bar{u}\}^t \{f^v\} dv + \int_S \{\bar{u}\}^t \{f^s\} ds + \sum_i \bar{u}_i^t F_i \quad \dots(1)$$

Avec :  $\{u\}$  = vecteur déplacement  
 $\{\sigma\}$  = vecteur contrainte  
 $\{\varepsilon\}$  = vecteur déformation

$\{f^v\}$  = vecteur forces volumiques  
 $\{f^s\}$  = vecteur forces surfaciques  
 $\Sigma$  = contient tous les points où des forces concentrées  $F_i$  sont appliquées.

En introduisant les forces d'inertie et d'amortissement à l'équation(1), puis par combinaisons de plusieurs équations liant les déformations aux déplacements généralisés et ceux-ci aux déplacements nodaux (voir ref B1); on obtient:

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F \quad \dots(2)$$

*Remarque :*

*Nous n'explicitons pas les versions contrainte et mixte car le code DLEARN que nous utilisons est formulé en version déplacement.*

I-2-b/ Phases de la méthode :

- 1- Découper la structure en éléments finis.
- 2- Définir dans chaque élément une approximation des déplacements en fonction des coordonnées de l'espace et du temps.

$$\left\{ u(x,y,z,t) \right\}_e = \langle P(x,y,z) \rangle \left\{ a(t) \right\}_e, \quad M(x,y,z) \in \text{l'élément } e.$$

- 3- Choisir comme coordonnées généralisées les déplacements nodaux, et poser:

$$\left[ u(x,y,z,t) \right]_e = \left[ N(x,y,z) \right] u_i(t)$$

$\left[ u \right]_e$  = vecteur déplacement en un point de l'élément e.

$\left[ P(x,y,z) \right]$  = matrice des fonctions de base de l'approximation spatiale (généralement des fonctions polynomiales en x, y, z).

$N(x,y,z)$  = matrice d'interpolation pour l'élément e.

$a(t)$  = vecteur de coordonnées généralisées.

$u_i(t) = q(t)$  = vecteur de déplacements nodaux de l'élément e.

- 4- Formuler K et M au niveau de l'élément (voir ref B2).

4- Formuler K et M au niveau de l'élément (voir ref B2).

5- Formulation globale:

a- Soit  $q^t$  = vecteur ligne des déplacements aux noeuds de la structure, Soit pour une structure à  $m$  noeuds:

$$q^t = \left[ q_1^t, q_2^t, \dots, q_m^t \right]$$

b-Définir la correspondance entre déplacements aux noeuds de l'élément  $q_e$  et les déplacements aux noeuds de la structure.

$$q_{\substack{e \\ (n_e * 1)}} = \beta_{\substack{e \\ (n_e * N)}} \cdot q_{\substack{} \\ (N * 1)}$$

$n_e$  = Nombre de degrés de liberté de l'élément.

$N$  = Nombre de degrés de liberté de la structure.

$\beta_e$  = Matrice de localisation de l'élément.

c- Etablir la matrice masse et la matrice rigidité de la structure complète.

On a respectivement:

$$M = \sum_e \beta_e^t M_e \beta_e$$

$$K = \sum_e \beta_e^t K_e \beta_e$$

d- Résolution de l'équation de Lagrange (2)  
ce qui fera l'objet des chapitres suivants.

CHAPITRE II  
REPOSE DYNAMIQUE D'UNE STRUCTURE

INTRODUCTION

Les deux facteurs primordiaux gérant les normes d'exigence d'un analyste structuriste sont les disponibilités des ressources informatiques d'une part et les ressources financières de l'autre.

Ceci traduit implicitement que pour arriver à des réponses dynamiques fiables (avec des précisions raisonnables), le calcul des périodes de vibration et modes propres associés doit être fait avec un algorithme efficient. Le choix de celui-ci représente donc la phase la plus importante de tout travail en dynamique des structures.

Avant de présenter donc les méthodes de recherche de la réponse dynamique nous expliciterons les deux méthodes que nous avons utilisées en programmation pour résoudre les problèmes aux valeurs propres.

II-1/ METHODES DE RESOLUTION DES PROBLEMES AUX VALEURS PROPRES :

Dans le cas de structures faiblement amorties, on se ramène à la résolution du problème aux valeurs propres général :

$$K u = \omega^2 M u$$

Le problème de la résolution de cette équation réside dans son ordre élevé pour le cas de la mécanique des structures qui concerne notre étude. Une résolution satisfaisante, d'après le critère économique n'est possible qu'en utilisant des méthodes performantes particulièrement adaptées pour ce type de problèmes.

Parmi ces méthodes, on étudiera les suivantes:

- \* Méthode d'itérations simultanées sur sous-espace.
- \* Méthode de LANCZOS-GRANDAL.

## II-1-1/ METHODE D'ITERATIONS SUR SOUS ESPACE:

### II-1-1-a/ Analyse de Ray-Ritz :

Elle nous permet de trouver les plus petites valeurs propres et vecteurs propres associés du problème .

Nous avons déjà défini le quotient de RAYLEIGH (§ I-1-2-e)

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^t K \phi}{\phi^t M \phi}$$

Et d'après le principe de RAYLEIGH:  $\lambda_1 = \min \{\rho(\phi)\}$

En supposant M et K définies positives, on a:

$$0 < \lambda_1 \leq \rho(\phi) \leq \lambda_n < \alpha$$

Dans l'analyse de Ritz, on considère les vecteurs  $\bar{\phi}$  qui sont des combinaisons linéaires des vecteurs de la base de Ritz  $\psi_i$ .

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^q x_i \psi_i$$

Avec  $\left\{ \begin{array}{l} x_i : \text{coordonnées de RITZ} \\ i = 1, q \end{array} \right.$

$\bar{\phi}$  est un vecteur appartenant au sous espace  $V_q$  engendré par la base de RITZ.

Dans l'analyse de Ray-Ritz, on souhaite déterminer les vecteurs spécifiques  $\bar{\phi}$ ,  $i=1, q$  lesquels, avec la contrainte d'appartenir au sous espace  $V_q$  (engendré par la base de Ritz), approchent le mieux les vecteurs propres désirés.

$$\rho(\phi) = \frac{\phi^t \tilde{K} \phi}{\phi^t \tilde{M} \phi} \quad \dots (P)$$

$$\text{Où } \begin{cases} \tilde{K} = \psi^t \cdot K \cdot \psi & , \quad K \text{ et } M \text{ sont des matrices } (n \times n) \\ \tilde{M} = \psi^t \cdot M \cdot \psi & , \quad \psi \text{ est une matrice } (n \times q) \end{cases}$$

La résolution du problème (P) fera dégager  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$  qui seront les valeurs approchées de  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  et  $q$  vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_q$  qui sont utilisés pour évaluer des vecteurs propres  $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_q$  dont les composantes sont exprimées dans la base des  $\psi_i$  ( $i=1, q$ ).

Il est très utile de noter que:

$$\lambda_1 \leq \rho_1 \leq \dots \leq \lambda_q \leq \rho_q \leq \lambda_n$$

Ainsi le calcul de  $\tilde{\rho}_1$  nécessite la minimisation de  $\rho(\bar{\phi})$ .

Et le calcul de  $\tilde{\rho}_i = \min \rho(\bar{\phi})$  à la  $i$ ème étape requiert le calcul de  $\min \rho(\bar{\phi})$ .

Avec  $\phi^t M \phi_j = 0$ ,  $j=1, i-1$

**\*/ PROCEDURE DE L'ANALYSE DE RITZ:**

\*1/ On choisit la base de RITZ composée de  $q$  vecteurs  $\psi_i, i=1, \dots, q$ .

\*2/ On résout le problème propre  $\tilde{K}x = \rho \tilde{M} x$

Où  $\rho$  est l'approximation de la valeur propre et  $x$  le vecteur propre exprimé dans la base de Ritz.

Dans la base de RITZ,  $\phi = [\psi] x$

$\phi$  est l'approximation du vecteur propre  $\phi$  dans la base primaire des déplacements nodaux.

N-B:

\* Dans la pratique, la base de Ritz peut être calculée par la résolution statique, où l'on définit  $q$  vecteurs charges dans  $R$ .

$$K \cdot \psi = R \Rightarrow \tilde{K} = \psi^t \cdot R$$

$$\text{Avec } [\psi] = [\psi_1, \dots, \psi_q]$$

\* La condition  $M$  définie positive n'est pas nécessaire. En effet les vecteurs de Ritz sont choisis de façon à ce qu'ils appartiennent à un sous espace où la projection  $\tilde{M}$  de  $M$  soit définie positive.

#### II-1-1-b/ La méthode d'itération sur sous espace :

Cette méthode consiste à :

a- Etablir  $q$  vecteurs linéairement indépendants où  $q > p$ ,  $p$  étant le nombre de couples propres à calculer.

b- Utiliser la méthode d'itération inverse (voir ref I) sur les  $q$  vecteurs et passer par l'analyse de Ritz pour tirer les meilleures valeurs propres et vecteurs propres des  $q$  vecteurs itérés.

c- Après convergence du processus itératif, on vérifie, par les suites de Sturm (ref H), que les couples propres escomptés ont bien été calculés.



\*1/ Ainsi, pour  $k=1,2,\dots$ , on itère de  $E_k$  vers  $E_{k+1}$

$$\text{et on a: } K x_{k+1} = M x_k$$

\*2/ On cherche alors la projection de  $M$  et  $K$  dans le sous espace  $E_{k+1}$

$$K_{k+1} = x_{k+1}^{-t} K x_{k+1}$$

$$M_{k+1} = x_{k+1}^t M x_{k+1}$$

\*3/ On résout le problème propre en projection sur  $E_{k+1}$

$$K_{k+1} \cdot Q_{k+1} = M_{k+1} \cdot Q_{k+1} \cdot \Lambda_{k+1} \quad \dots (Q)$$

\*4/ Et finalement, on améliore l'approximation des vecteurs propres:

$$x_{k+1} = x_{k+1} \cdot Q_{k+1}$$

\* Le processus convergera à condition que la base choisie ne soit orthogonale à aucun des vecteurs propres à calculer.

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \left[ \Lambda_{k+1} \right] \longrightarrow \left[ \Lambda \right] \\ \left[ x_{k+1} \right] \longrightarrow \left[ \phi \right] \end{array} \right\} \text{ quand } k \longrightarrow \infty$$

N-B: On note que la méthode de Jacobi, pourra être utilisée pour la résolution de  $Q$  avec efficacité (système  $qxq$ ).

En pratique, on choisira,  $q = \min(2p, p+8)$ . ..... [ref H]

*\* SELECTION DES VECTEURS INITIAUX :*

Une étape très importante dans la mise en oeuvre de la méthode sous espace est la sélection des vecteurs initiaux  $x_1$ . Il est clair que si l'on tombe dès le premier essai sur des vecteurs parallèles aux vecteurs propres alors, la convergence est réalisée en une étape.

\* Cas où seuls  $p$  termes de la diagonale de  $M$  sont non nuls ( $M$  étant diagonale) Il suffit de choisir alors comme vecteurs initiaux les  $p$  vecteurs colonnes ayant un terme non nul pour obtenir la convergence dès la première itération.

\* Cas où  $K$  et  $M$  sont toutes les deux diagonales:

Il suffit de choisir  $p$  vecteurs unité, dont les composantes correspondant aux degrés de liberté dont le rapport

$\frac{k_{ii}}{m_{ii}}$  est le plus petit.

\* Dans le cas le plus général, on prend comme premier vecteur de  $M \cdot x_1$  la colonne de  $M$ . Pour les autres vecteurs de  $M$ , on choisit les vecteurs unités ayant (+1) au degré de liberté  $i$  correspondant au rapport  $\frac{k_{ii}}{m_{ii}}$  minimal.

Il est clair que plus les matrices  $K$  et  $M$  s'approchent des deux premiers cas sus-cités, plus rapide est la convergence.

On a vérifié par expérience [ref B1] que pour  $q = \min(2p, p+8)$ , environ 10 itérations sont nécessaires pour converger. La plus grande valeur propre  $\lambda_p$  étant calculée à  $10^{-6}$  près (Et une meilleure précision pour les valeurs propres plus petites  $\lambda_i = 1, 2, \dots, p-1$ ).

*\* LA CONVERGENCE DE LA METHODE:*

On définit la convergence de la méthode par la condition:

$$\frac{\left| \lambda_i^{k+1} - \lambda_i^k \right|}{\lambda_i^{k+1}} \leq \varepsilon \quad , i=1, \dots, p$$

Où  $\varepsilon$  est la tolérance  $\varepsilon = 10^{-2s}$  , pour les valeurs propres calculées à  $10^{-2s}$ .

Comme les valeurs propres sont en fait évaluées par le quotient de Rayleigh alors les vecteurs propres sont définis à s près.

Il reste à vérifier par les suites de Sturm , que les p plus petites valeurs propres et les vecteurs propres correspondant ont été calculés.

**\*PROPRIÉTÉ\***

Une propriété des suites de STURM est que si l'on applique un décalage spectral de  $\mu$  , alors la décomposition de  $K - \mu M$  sous la forme  $LDL^t$  fera apparaître dans la diagonale de D autant de termes négatifs que de valeurs propres inférieures à  $\mu$  .

Pour cela et étant donné que les valeurs propres obtenues ne sont qu'approximées , on pourra écrire

$$0.99 \lambda_i^{(l+1)} < \lambda_i < 1.01 \lambda_i^{(l+1)}$$

$\lambda_i^{(l+1)}$  est la valeur de  $\lambda_i$  à la lième itération.

\* *CONCLUSIONS* :

\* La méthode d'itération sur sous espace ,est très employée dans les codes de calcul des structures dynamiques, nous citerons à titre d'exemple :SAP80.

\* Elle présente par ailleurs des caractères de convergence très intéressants pour les problèmes de grande taille. [ref B1].

\* Son but étant d'extraire certaines fréquences propres et modes propres, la taille du sous espace ( $n$ ) est généralement très inférieure à la taille du problème initial . Et la méthode doit son caractère d'efficacité au choix judicieux des vecteurs initiaux .

\* Il existe évidemment d'autres méthodes différentes de celle-ci et qui,elles, sont utilisées dans d'autres cas spécifiques à savoir par exemple la méthode de recherche par déterminant [ref C] qui est utilisée lorsque les matrices ont une largeur de bande faible.

\* La méthode d'itération sur sous espace ,comme nous l'avons vu plus haut utilise une combinaison de techniques .Il faut préciser qu'il existe également une autre technique de résolution des problèmes aux valeurs propres que l'on appelle technique fondamentale qui elle ne fait appel qu'à une seule méthode exemple:"methodes QR, JACOBI" [ref CH].

\* Le choix entre une technique fondamentale et celle englobant plusieurs techniques réside dans le nombre d'opérations et l'espace mémoire requis.La méthode de Jacobi par exemple est efficace lorsque tout le spectre est cherché et les éléments diagonaux sont proches de zéro ; raison pour laquelle d'ailleurs elle est très efficace pour la résolution du problème en  $K_{k+1}, M_{k+1}$  dans la méthode de sous espace.

\* Il serait trop hatif de notre part de tirer des conclusions d'efficacité définitives concernant les méthodes , chacune possédant des avantages et des inconvénients. Le seul moyen d'en choisir une est de considérer certains de leurs points forts suivant le type de problème, l'espace mémoire ainsi que le spectre demandé.

\* Nous terminerons cette partie en introduisant une méthode tout à fait remarquable du côté efficacité pour la recherche des valeurs propres faisant partie des méthodes utilisant une combinaison de techniques qui est la méthode de LANCZOS.

## II-1-2/ METHODE DE LANCZOS :

Comme pour la méthode d'itération sur sous espace, l'idée première de l'algorithme de LANCZOS est de déterminer les valeurs propres de notre système en le transformant en un système réduit.

Cet algorithme a été développé par LANCZOS en 1950, pour des problèmes aux valeurs propres symétriques et linéaires. Son objectif étant de construire une transformation pour tridiagonaliser la matrice  $K$  et de déterminer ainsi les valeurs propres de la matrice tridiagonale.

Comme nous l'avons introduit plus haut, la méthode de LANCZOS utilise plusieurs techniques. En effet son algorithme établi pour les problèmes aux valeurs propres standards avec des matrices  $(n \times n)$  symétriques, consiste en une projection tridiagonale suivie d'une analyse de RAYLEIGH-RITZ.

L'établissement de cet algorithme pour des problèmes aux valeurs propres standards peut paraître restrictif, mais il est en réalité utilisé également pour les problèmes généralisés puisque ceux-ci peuvent se réduire à des problèmes standards par des méthodes de factorisation.

Le côté mathématique assez astreignant de cette méthode pouvant créer une certaine lourdeur dans la compréhension de celle-ci nous avons pensé qu'il serait plus intéressant d'établir tout d'abord l'algorithme et de développer l'aspect mathématique de chaque étape par la suite.

II-1-2-a/ Etablissement de l'algorithme de LANCZOS :

On se donne au départ une paire de matrices  $M$  et  $K_\sigma$  ainsi qu'un vecteur de départ  $r$ .

$M$  : Matrice masse du problème généralisé ( $n \times n$ ) :  $(K - \lambda M)z = 0$

$K_\sigma = K - \sigma M$ , matrice associée au problème  $K_\sigma^{-1} \cdot M \{\phi\} = \mu \{\phi\}$

$\sigma$  : décalage spectral employé par l'utilisateur

$$\mu = \frac{1}{\lambda - \sigma}$$

On génère ensuite une série de vecteurs  $q_i, i=1, \dots, j$  (vecteurs de Lanczos) formant une base orthonormale pour un sous espace  $S_j$  déterminé par  $\left\{ r, K_\sigma^{-1} M r, \left( K_\sigma^{-1} M \right)^2 r, \dots, \left( K_\sigma^{-1} M \right)^j r \right\}$  ceux-ci formant la séquence de KRYLOV,  $r$  étant un vecteur initial que l'on se donne et  $j$  étant le nombre d'itérations.

Soit  $Q_j = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_j \end{bmatrix}$ , nous avons donc  $Q_j^t M Q_j = I$ , et on peut définir une projection  $T_j$  de  $K_\sigma^{-1} \cdot M$  dans le sous espace  $S_j$  par :

$$T_j = Q_j^t M K_\sigma^{-1} M Q_j \quad \dots(1)$$

Cette projection  $T_j$  est une matrice tridiagonale symétrique avec comme termes de la diagonale  $\alpha_i, i=1, 2, \dots, j$  et comme termes de la subdiagonale et de la superdiagonale  $\beta_i, i=1, \dots, j-1$ .

II-1-2-b/ Principales étapes de l'algorithme :

1/ Sélection d'un vecteur  $r_0$  non nul et  $q_0 = 0$ , comme vecteurs initiaux.

2/ Calcul des vecteurs de LANCZOS  $q_i, i=1, \dots, j$  définissant  $Q_j$  et engendrant le sous espace  $S_j$ .

Pour j itérations :

a/ On calcule la longueur  $\beta_{i-1}$  du vecteur itératif

$$r_{i-1}, \beta_{i-1} = ||r_{i-1}||.$$

( $\beta_{i-1}$  est un terme de la superdiagonale de  $T_j$ )

b/ On normalise afin d'obtenir le vecteur de LANCZOS

$$q_i, q_i = \frac{r_{i-1}}{\beta_{i-1}}.$$

c/ On détermine les termes  $\alpha_i$  de la diagonale de  $T_j$  par:

$$u_i = K q_i - q_{i-1} \cdot \beta_{i-1} ; \quad \alpha_i = q_i^t \cdot u_i$$

d/ On calcule le vecteur itératif suivant  $r_i$

$$r_i = u_i - \alpha_i q_i$$

Les approximations des valeurs et vecteurs propres de  $K^{-1}M$  du sous espace  $S_j$  peuvent maintenant être déterminés de la matrice tridiagonale  $T_j$ , en utilisant la procédure de RAYLEIGH-RITZ.

Soient  $\vartheta_1^{(j)}, \vartheta_2^{(j)}, \dots, \vartheta_j^{(j)}$ , les valeurs propres de  $T_j$  et  $y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_j^{(j)}$  les vecteurs propres correspondants.

Si  $\Lambda_j$  est la matrice diagonale des valeurs propres

et  $v_j$  est la matrice formée par des colonnes de vecteurs propres

Nous avons donc la relation :

$$T_j = v_j \Lambda_j v_j^t \quad \dots(2)$$

Il vient donc de (1) et (2) que les termes diagonaux constituant  $\lambda_j$  sont les approximations de RITZ des valeurs propres de  $K$  dans un sous espace engendré par  $q_i, i=1, j$  et que les colonnes de  $q_j v_j$  sont les vecteurs propres approximatifs correspondants.

II-1-2-c/ Détails mathématiques de la méthode :

Nous avons déjà vu dans les chapitres précédents que pour obtenir une approximation de RITZ à certains vecteurs propres du problème :

$$(K - \lambda M)z = 0 \quad \dots(a)$$

Il faut prendre une combinaison linéaire des vecteurs de départ  $X_j[x_1, \dots, x_j]$ , soit  $y = X_j s_j$ .

En introduisant le vecteur résiduel  $r$  associé à la paire de RITZ  $(\vartheta, y)$  (où  $\vartheta$  et  $y$  sont les approximations des valeurs et vecteurs propres du problème (a) ):

$$r = K y - \vartheta M y$$

et la nécessité dans la méthode de RAYLEIGH-RITZ d'une orthogonalisation de  $r$  à tous les vecteurs de départ ; on obtient:

$$X_j^t r = 0 \quad \dots(b)$$

(b) devient

$$\left[ K_j - \vartheta M_j \right] s = 0 \quad \dots(c)$$

Avec  $K_j = X_j^t K X_j$

$$M_j = X_j^t M X_j$$

Le vecteur propre de (c) va déterminer l'approximation du vecteur propre de (a).

Ceci résume l'approximation de RAYLEIGH-RITZ d'une façon générale.

L'algorithme de LANCZOS lui revient à obtenir une approximation de RAYLEIGH-RITZ avec comme vecteurs de départ, les vecteurs appelés

vecteurs de KRYLOV  $\left\{ r, K_{\vartheta}^{-1} M r, \left[ K_{\vartheta}^{-1} M \right]^2 r, \dots, \left[ K_{\vartheta}^{-1} M \right]^j r \right\}$ .

Avec  $j$ : nombre d'itérations.

*\*/ vecteurs de LANCZOS :*

Ils sont obtenus par orthonormalisation par rapport à M des vecteurs de KRYLOV .

Supposons que j premiers vecteurs de LANCZOS ont été calculés ,il nous faut trouver le (j+1)ème .

Pour cela introduisons un vecteur préliminaire  $\bar{r}_j$  :

$$\bar{r}_j = K_{\sigma}^{-1} M q_j$$

et orthonormalisons le par rapport à M avec les autres vecteurs de LANCZOS donc nous pouvons supposer qu'il contient les composantes de chacun des vecteurs de LANCZOS .

Aussi:

$$\bar{r}_j = r_j + \alpha_j q_j + \beta_j q_{j-1} + \gamma_j q_{j-2} + \dots \quad \dots(d)$$

$r_j$  : vecteur résiduel

$\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ , sont les composantes de  $\bar{r}_j$  dans les directions des vecteurs  $q_j, q_{j-1}, q_{j-2}$  respectivement.

Grace à l'orthonormalité des vecteurs de LANCZOS on trouve :

\* Composante de  $\bar{r}_j$  suivant  $q_j$  :

$$\alpha_j = q_j^t M \bar{r}_j$$

\* Composante de  $\bar{r}_j$  suivant  $q_{j-1}$  :

$$\beta_j = r_{j-1}^t M q_j$$

Or  $q_j$  est obtenu en normalisant  $q_{j-1}$

On trouve alors :

$$\beta_j = \frac{1}{\|r_{j-1}\|_M} (r_{j-1}^t M r_{j-1}) \dots (A)$$

Ou 
$$\beta_j = r_{j-1}^t M r_{j-1} \dots (B)$$

Les résultats numériques [ref C] ont montré qu'il est préférable de programmer la formule (B) que (A).

\* Composante de  $\bar{r}_j$  suivant  $q_{j-2}$  :

$$\gamma_j = q_{j-2}^t M \bar{r}_j$$

Après utilisation de l'orthonormalisation des vecteurs de LANCZOS, on trouve que:

$$\beta_{j-1} \cdot q_{j-1} = r_{j-2}$$

Cette relation combinée avec (d) donne  $\gamma_j = 0$ .

Une procédure identique nous montrera que toutes les autres composantes de  $\bar{r}_i$ , pour  $i = 1, j-3$  seront nulles.

*Conclusion très importante:*

*La procédure d'orthogonalisation utilisée pour la génération des vecteurs de LANCZOS ne nécessite que deux vecteurs.*

On trouve finalement que  $q_{j+1} = \frac{r_j}{\beta_{j+1}}$

et 
$$\beta_{j+1}^2 = \{r_j\}^t M \{r_j\}$$

Les vecteurs de LANCZOS étant formés ,il faut maintenant passer à l'analyse de RAY-RITZ sur matrice tridiagonale.

*\*/ Projection tridiagonale*

Afin de trouver la projection tridiagonale de  $K_{\sigma}^{-1} M$ , et ayant déjà trouvé les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  réécrivons l'équation (d):

$$r_j = \beta_{j+1} q_{j+1} = K_{\sigma}^{-1} M q_j - q_j \alpha_j - q_{j-1} \beta_j. \quad \dots(e)$$

Réécrivons sous forme matricielle l'équation (e):

Après j itérations :

$$\begin{bmatrix} K_{\sigma}^{-1} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & r_j \end{bmatrix} = r_j e_j^t \quad \dots(f)$$

$$e_j^t = \langle 0, 0, \dots, 1 \rangle$$

$Q_j$  est une matrice  $n \times j$  composée des colonnes  $q_i$ ,  $i=1, j$

$$T_j = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \\ & & & \beta_j \\ 0 & & & \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

En utilisant encore une fois la propriété d'orthogonalisation des vecteurs de LANCZOS (f) devient :

$$Q_j^t M K_{\sigma}^{-1} M Q_j = T_j$$

Appliquons maintenant la procédure de RAY-RITZ à la matrice  $T_j$  tridiagonale ,avec donc comme vecteurs de départ les vecteurs de LANCZOS  $Q_j$ , pour obtenir les meilleures approximations des vecteurs propres .

$$y_i^{(j)} = Q_j s_i^{(j)} \quad ; \quad i = \overline{1, j} \quad \dots (g)$$

Le vecteur résiduel  $r_j = K_j^{-1} M y_j - \vartheta_j y_j$  associé à la paire  $\{\vartheta_j, y_j\}$  est M orthogonal aux vecteurs de LANCZOS. On obtient alors à l'aide de l'équation (g):

$$T_j s_i^{(j)} - \vartheta_j s_i^{(j)} = 0$$

$\vartheta_j, s_i^{(j)}$  est une paire propre de la matrice tridiagonale  $T_j$ .

Quand le nombre de vecteurs de LANCZOS augmente, donc quand on augmente le nombre d'étapes de LANCZOS, la taille de  $T_j$  augmente aussi et les valeurs propres de  $T_j$ , convergent vers celles du problème initial  $(K_j^{-1} M - \mu I)z = 0$

*Remarque :*

*Au départ le principal inconvénient de cette méthode était le problème de la perte d'orthogonalité des vecteurs de LANCZOS durant l'exécution de l'algorithme.*

*Supposons en effet que jusqu'à la  $k^{\text{ème}}$  étape les vecteurs sont calculés dans une arithmétique exacte, et qu'à cette étape en question une petite erreur d'arrondi s'introduit dans le calcul des  $q_k$ .*

*Il est clair que les  $(k-1)$  premiers vecteurs seront parfaitement orthonormaux, mais ne seront plus orthogonaux à tous les vecteurs après la  $k^{\text{ème}}$  étape. L'erreur introduite sera amplifiée durant les étapes suivantes pouvant induire jusqu'à la perte d'indépendance linéaire des vecteurs.*

*Plusieurs mesures ont été adoptées dans le but de prévoir un niveau d'orthogonalité tolérable. LANCZOS lui même a été le premier à proposer un schéma dans ce sens. Tout lecteur désirant approfondir cette question pourra se référer à la thèse de ZEKKOUR (ref Z).*

## II-2/ METHODES DE RECHERCHE DE LA REPONSE DYNAMIQUE

### INTRODUCTION

Après la discrétisation spatiale et l'obtention d'un système d'équations dynamiques :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F(t) \quad \dots(A)$$

avec les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \\ \ddot{u}(t=0) = \ddot{u}_0 = M^{-1} [F(0) - C \dot{u}_0 - K u_0] \end{array} \right.$$

Où:  $u, \dot{u}, \ddot{u}$  sont respectivement les vecteurs de déplacements, de vitesses, et d'accélération aux noeuds.

$M, K, C$  sont respectivement les matrices masse rigidité et amortissement de la structure indépendantes de  $u, \dot{u}, \ddot{u}$  (cas linéaire). Il reste à établir les solutions approchées du système (A), qui lui est un système à plusieurs degrés de liberté, avec des forces d'excitation arbitraires.

Il y a deux voies possibles pour la solution de ce type de problèmes:

- La méthode de superposition modale
- Les méthodes d'intégration directe

## II-2-1/ RECHERCHE DE LA REPOSE DYNAMIQUE PAR LA METHODE DE SUPERPOSITION DES MODES :

La discrétisation d'une structure compliquée pouvant engendrer plusieurs centaines voire plusieurs milliers de degrés de liberté, il s'est avéré plus économique de réduire les équations de mouvement à un nombre plus petit avant le calcul de la réponse dynamique.

La méthode de superposition modale est celle la plus largement utilisée en analyse linéaire dynamique, et consiste à transformer le système (A) de taille  $(n \times n)$  de la base des déplacements nodaux dans celle des  $p$  vecteurs propres ( $p$  très petit devant  $n$  ( $p \ll n$ )) choisis pour être les modes dominants.

Elle nécessite au départ le calcul des modes propres, donc l'étude des petites oscillations libres de la structure non dissipative associée. (calcul présenté en chapitre II-1)

La réduction de la dimension du système (A), elle, se fera par la méthode de RAYLEIGH-RITZ en choisissant comme base de RITZ, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres calculées de la structure.

La projection ainsi faite va induire par la suite à un découplage du système. (sous certaines restrictions que détaillerons par la suite)

Le système d'équation (A) est transformé sous une forme effective, en écrivant donc les déplacements nodaux en fonction des déplacements généralisés.

$$\{u(t)\} = \phi \{x(t)\} \quad \dots(2-1)$$

$\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$ : matrice  $n \times p$ , des vecteurs propres.

En remplaçant l'équation (2-1) et ses dérivées dans l'équation globale (A), on obtient :

$$M \phi x(t) + C \phi x(t) + K \phi x(t) = F(t) \quad \dots(2-2)$$

En prémultipliant l'équation (2-2) par  $\phi^t$ , on aura:

$$\phi^t M \phi x(t) + \phi^t C \phi x(t) + \phi^t K \phi x(t) = \phi^t F(t) \quad \dots(2-3)$$

Or les vecteurs propres présentant des propriétés importantes d'orthogonalité vis à vis de K et d'orthonormalité vis à vis de M :

$$\phi^t M \phi = I = \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi^t K \phi = \Lambda = \tilde{K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{bmatrix} = \text{Matrice spectrale}$$

L'équation (2-3) devient donc:

$$\ddot{x} + \phi^t C \phi \dot{x} + \Lambda x = \phi^t F \quad \dots(2-4)$$

Cependant la transformation (2-1) ne diagonalise pas la matrice d'amortissement .

Il existe tout de même certaines conditions sur l'amortissement qui permettent d'assurer un caractère diagonal de la matrice C.

\* 1<sup>er</sup> cas: *Système non amorti*

Dans ce cas l'équation (2-4) se ramène à n équations découplées de la forme :

$$\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) - f_i(t) = 0$$

$$\text{Où } f_i(t) = \phi_i^t f(t)$$

Chaque équation de masse unité et de coefficient de raideur  $\omega_i^2$  est résolvable par les méthodes numériques dites méthodes directes que nous exposerons dans le chapitre (II-2-2) .

La solution finale du système est obtenue par superposition des réponses individualisées correspondant à chaque mode de vibration :

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i x_i(t)$$



qui tient pratiquement dans la plupart des calculs de dynamique des structures.

En écrivant  $\alpha + \beta \omega_i^2 = 2\xi_i \omega_i$

et  $\xi_i = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right) \dots(2-7)$

On obtient la relation donnant le rapport de frottement en fonction des fréquences de vibration. Pour l'obtention des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  le rapport de frottement doit donc être spécifié pour deux fréquences arbitraires du système.

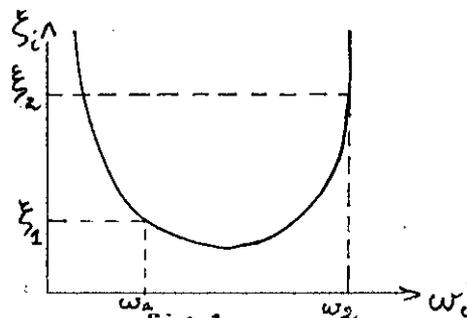


fig 1  
Amortissement en fonction de la fréquence

La dépendance entre le frottement et la fréquence est une caractéristique inhérente du frottement visqueux. Cependant expérimentalement on remarque que le frottement est en faible corrélation avec la fréquence, ceci fait que dans le cas où les deux fréquences permettant de définir le rapport d'amortissement ne sont pas choisies judicieusement certains modes dans l'amortissement de RAYLEIGH seront suramorties et d'autres sous amorties. Ainsi l'analyste doit avoir une idée sur la classe des fréquences des différents modes.

En remplaçant ensuite (2-6) dans (2-4), le système découplé à  $p$  équations et  $p$  inconnues s'écrira à l'instant  $t$  considéré:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{x}_i(t) + \omega_i^2 x_i(t) = \phi_i^t F(t) \quad , \quad i = 1, p \dots(2-8)$$

Avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} x(t=0) = \phi^t u_0 \\ x(t=0) = \phi^t u_0 \end{cases}$$

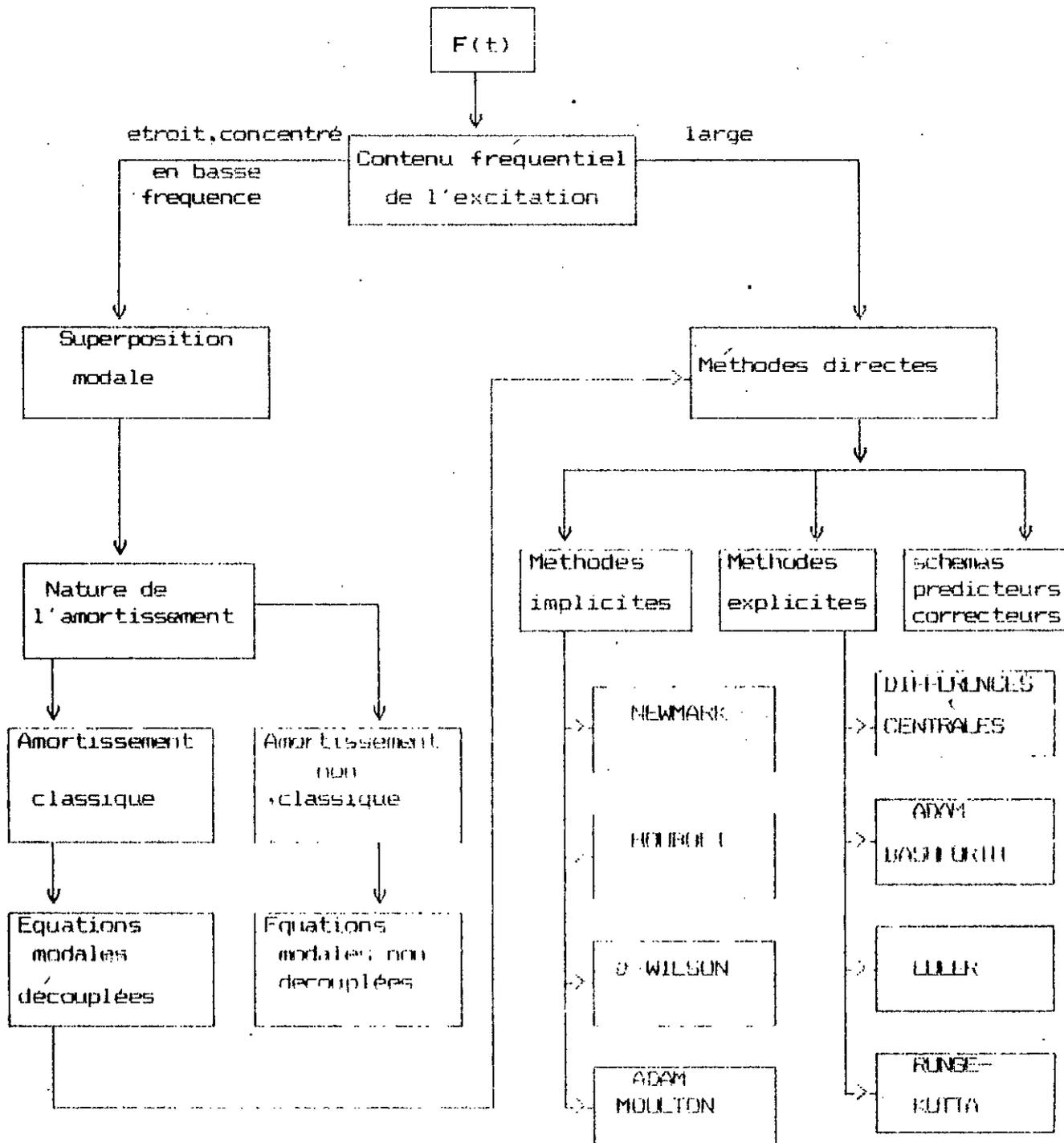
*Remarques :*

\* La détermination des  $p$  vecteurs propres et des  $p$  valeurs propres correspondantes est l'étape la plus sensible dans l'application de la méthode de superposition des modes. La stratégie adoptée, pour ce fait, est la méthode de LANCZOS décrite ci-haut.

\* L'utilisation de seulement  $p$  modes propres ( $p \ll n$ ) induit une erreur de troncature dans la solution calculée d'autant plus importante que  $p$  est petit. (ref B2)

\* La résolution du système d'équations découplées (2-8) se fera soit par l'une des méthodes d'intégration directes déjà citées qui agiront sur un système moins important que le système initial.

SYNOPTIQUE DES STRATEGIES DE RESOLUTION EN ANALYSE DYNAMIQUE



## II-2-2/ SCHEMAS D'INTEGRATION DIRECTE :

Ce sont des méthodes d'approximations que l'on dit 'directes' car la solution est cherchée grâce à des procédures numériques pas à pas sans une éventuelle transformation des déplacements .

### II-2-2-1/ Principe de ces méthodes :

La réponse du système (A) étant cherchée entre l'instant  $t=0$  et un instant  $T$ , connaissant les vecteurs déplacements, vitesses et accélérations initiales une discrétisation temporelle est nécessaire .

On subdivise donc  $T$  en plusieurs intervalles égaux  $\Delta t$  (c'est à dire :  $\Delta t = \frac{T}{n}$ ) et on établit les solutions approchées à des points discrets du temps :  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$ , grâce à certains algorithmes.

Le principe fondamental de ces méthodes est ensuite de réduire le système en termes d'équations différentielles en un système d'équations algébriques par approximation simple des inconnues.

Elles sont constituées de trois procédures fondamentales, aussi les appelle-t-on les méthodes des trois étapes.

Celles-ci consistent en:

1\* L'étape de discrétisation : qui est l'identification de points discrets appelés noeuds, et ces en ces points que les réponses seront évaluées.

2\* L'étape d'approximation : qui est le remplacement des termes en dérivées de l'équation différentielle par des approximations discrètes .

3\* L'étape de résolution : qui consiste en la détermination des réponses du système algébrique obtenu.

Les schémas d'intégration sont groupés en deux classes principales :

- Méthodes explicites.
- Méthodes implicites.

## II-2-2-2/ Méthodes explicites :

Les schémas explicites sont caractérisés par le fait que le déplacement au temps  $t+\Delta t$  est obtenu sachant que l'équation est satisfaite à l'instant  $t$ .

Ces méthodes sont conditionnellement stables (voir § II-2-2-6-a) et présentent de bons résultats pour les problèmes dynamiques non linéaires.

### 2-a/ Méthode de différences centrales

C'est le schéma explicite le plus utilisé. Les approximations des vitesses et accélérations sont formulées comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_i = \frac{1}{2 \Delta t} \left[ u_{i+1} - u_{i-1} \right] \\ \ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t^2} \left[ u_{i+1} - 2u_i - u_{i-1} \right] \end{array} \right.$$

Avec  $i$  représentant la  $i$ ème étape de temps ( $t=i\Delta t$ ).

En remplaçant ces approximations dans l'équation :

$$M \ddot{u}_i + C \dot{u}_i + K u_i = F_i \quad \dots(A')$$

$$\text{On obtient } K_{\text{eff}} \hat{u}_{i+1} = F_i \quad \dots(B)$$

$$\text{Avec } \left\{ \begin{array}{l} K_{\text{eff}} = \frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t} \\ \hat{F}_i = F_i + \frac{2M}{\Delta t^2} u_i + \left[ \frac{M}{\Delta t^2} - \frac{C}{2\Delta t} \right] u_{i-1} - K u_i \end{array} \right.$$

Cette méthode peut être particulièrement avantageuse dans le cas où M et C sont des matrices diagonales, le calcul de  $K_{\text{eff}}$  devenant trivial. Seulement dans le cas général, aucune restriction n'est imposée sur ces deux matrices et la factorisation de  $K_{\text{eff}}$  devient assez laborieuse.

Nous verrons en effet par la suite que les méthodes implicites sont plus attractives que celles explicites qui sont beaucoup plus efficaces dans les problèmes d'analyse non linéaires.

La méthode des différences centrales reste supérieure à tous les autres schémas explicites grâce à ses bonnes caractéristiques de stabilité et ceci pour un pas d'intégration inférieur au pas critique, autrement dit pour :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\text{cr}} ; \Delta t_{\text{cr}} = \frac{T_n}{\pi}$$

Où  $T_n$  est la plus petite période de résonance.

Il est intéressant de souligner qu'il existe une deuxième forme de la méthode de différences centrales qui est très utilisée et dont le schéma est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}_i = \frac{1}{2} \left[ \ddot{u}_{i+1/2} - \ddot{u}_{i-1/2} \right] \\ \\ \ddot{u}_i = \frac{1}{\Delta t} \left[ \dot{u}_{i+1/2} - \dot{u}_{i-1/2} \right] \end{array} \right.$$

Substituant ces deux équations dans (A'), on obtient:

$$K_{eff} u_{i+1/2} = \hat{F}_i$$

$$\text{où } \left[ \begin{array}{l} K_{eff} = \frac{M}{\Delta t} + \frac{C}{2} \\ \hat{F} = F_i - K u_i + \left( \frac{M}{\Delta t} + \frac{C}{2} \right) u_{i-1/2} \end{array} \right.$$

La réponse étant alors:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t u_{i+1/2}$$

Seulement les conditions initiales ne suffisent pas pour déterminer la solution, ce pourquoi, une procédure particulière est utilisée pour le calcul de  $u_1$ .

$$\text{Exemple : } u_1 = u_0 + \Delta t u_0 + \frac{\Delta t^2}{2} u_0''$$

### 2-b/ Méthode d'Adams-Bashforth :

L'importance de cet algorithme réside dans le fait qu'il est utilisé comme schéma prédicteur dans une classe de méthodes appelés schémas prédicteurs -correcteurs.

La méthode d'ADAMS-BASHFORTH est basée sur le développement en série de Taylor, et est appliquée au système (A') après réduction de celui-ci à un système différentiel du premier ordre:

$$\text{Soit le système suivant: } x = f(x,t) = Y \quad \dots(b-1)$$

$x(t)$  étant à déterminer

Le développement en série de Taylor de  $x$ , à un instant  $t=i \times \Delta t$ , donne:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t x_i' + \frac{\Delta t^2}{2!} x_i'' + \frac{\Delta t^3}{3!} x_i''' + \dots \quad \dots(b-2)$$

En substituant (b-1) dans (b-2), on obtient :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \left[ y_i + \frac{\Delta t}{2!} y_i' + \frac{\Delta t^2}{3!} y_i'' + \dots \right]$$

Si on néglige les termes contenant  $\Delta t^2, \Delta t^3, \dots$  etc, on obtient la formule d'Euler ou première formule d'ADAMS-BASHFORTH /

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t y_i$$

L'erreur de troncature étant alors de  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  et l'ordre de précision de 1.

L'augmentation de l'ordre de précision peut être obtenue en utilisant la formule de Taylor 'backward differences', qui est un réarrangement du développement en série de Taylor de  $y_i$ ,

$$y_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} y_i'' + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

On obtient alors:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{2} \left[ 3y_i - y_{i-1} \right] + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

Ceci étant la seconde formule d'ADAMS-BASHFORTH .

En approximant par la suite  $y_i, y_i'$  en fonction de  $y_i, y_{i-1}$ , on peut augmenter ainsi l'ordre de précision de la formule d'Adams-Bashforth et la formule générale devient alors:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \sum_{k=0}^n a_k f_{i-k} + \mathcal{O}(\Delta t^{n+2}) \quad \dots (b-3)$$

Cette expression a pour ordre de précision (n+1) et  $a_k$  sont des coefficients donnés par la table d'Adams-Bashforth.

Il est clair que si  $x$  est connu à l'étape  $i$  et avant  $y_i, y_{i-1}$ , peuvent être déterminés grâce à l'équation (b-1) et en utilisant (b-3), on peut trouver donc explicitement  $x_{i+1}$ .

\* *Remarque:*

Lorsque  $i=0$ ,  $x_1$  a  $\Delta t$  doit être calculé grâce à une procédure particulière, qui est la formule de RUNGE-KUTTA. Le schéma d'ADAMSGBASHFORTH démarrante en effet grâce à celle-ci.

### 2-c/ Méthode de RUNGE-KUTTA :

Cette méthode représente une classe importante des méthodes explicites, elle est de la forme:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \phi(x_i, t_i, \Delta t)$$

$x$  étant donné par (b-1).

Plusieurs méthodes sont classées comme étant des formules de RUNGE-KUTTA, et cela suivant le choix de la fonction  $\phi$  et de l'ordre de précision lui étant associé.

On détermine une solution de la forme :

$$x_{i+1} = x_i + a_1 G_1 + a_2 G_2 + \dots + a_n G_n$$

Où

$$G_1 = f(t, x)$$

$$G_2 = f(t + p_1 \Delta t, x + p_2 \Delta t G_1)$$

$$G_3 = f(t + p_3 \Delta t, x + p_4 \Delta t G_2)$$

⋮  
⋮  
⋮

Les coefficients  $a_i, p_i$  sont déterminés en comparant  $\phi$  à la série de

TAYLOR  $\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}$  d'ordre le plus élevé possible.

#### \* *Méthode de RUNGE-KUTTA D'ORDRE 2*

Pour cette méthode  $\phi$  est donnée par:

$$\phi = a_1 f(t_i, x_i) + a_2 f\left[t_i + p_1 \Delta t, x_i + p_2 \Delta t f(t_i, x_i)\right] \quad \dots (c-1)$$

Le développement en série de TAYLOR de  $f[t_i + p_1 \Delta t, x_i + p_2 \Delta t f(t_i, x_i)]$   
 donn (ref D):

$$f[t_i + p_1 \Delta t, x_i + p_2 \Delta t f(t_i, x_i)] = f(t_i, x_i) + p_1 \Delta t \frac{\delta f}{\delta t} + p_2 \Delta t \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} + \vartheta(\Delta t^2)$$

qui substituée dans (c-1) donne:

$$\phi = (a_1 + a_2) f(t_i, x_i) + a_2 \Delta t \left[ p_1 \frac{\delta f}{\delta t} + p_2 \frac{\delta f}{\delta x} f \right] + \vartheta(\Delta t^2)$$

D'autre part nous avons:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = x_i + \frac{\Delta t}{2} \dots \\ \text{et} \\ x_i = \frac{\delta f}{\delta t} \Big|_i + \frac{\delta f}{\delta x} \frac{\delta x}{\delta t} \Big|_i \end{array} \right.$$

On obtient donc:

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = f_i + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\delta f}{\delta t} + \frac{\delta f}{\delta x} f \right]_i$$

On trouve donc que:

$$\left[ \begin{array}{l} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = 1/2 \\ a_2 p_2 = 1/2 \end{array} \right.$$

En posant  $a_2 = 1/2$ , on trouve par exemple le schéma d'EULER :

$$x_{i+1} = x_{i+1/2} + \frac{1}{2} \Delta t f_i + \frac{1}{2} \Delta t f(t_i + \Delta t, x_i + \Delta t f_i)$$

Il est à noter ,que la formule de RUNGE-KUTTA se résout en une seule étape à l'inverse de celle d'ADAMS-BASHFORTH ,puisque le calcul de  $x_{i+1}$  ne dépend que de  $x_i$  et pas des étapes précédentes .Cette caractéristique lui vaut donc d'être utilisée comme formule de départ pour des méthodes à plusieurs étapes.

Autrement, c'est une méthode qui d'après des résultats expérimentaux,nécessite un intervalle de temps beaucoup plus petit que celui de la méthode des différences centrales pour maintenir sa stabilité ,et qui est inefficace devant celle-ci.

### II-2-2-3/ Méthodes implicites :

Ces méthodes diffèrent de celles explicites par le fait que la relation d'équilibre à l'instant  $t+\Delta t$  est utilisée pour calculer la réponse à ce même temps .

L'avantage premier de ces méthodes est qu'elles présentent de meilleures caractéristiques de stabilité par rapport aux méthodes explicites.

#### 3-a/ Méthode de NEWMARK :

Proposée par NEWMARK en 1959 ,c'est une méthode très populaire en dynamique des structures .

Basée sur le développement en séries de TAYLOR de la réponse [ref S],son schéma est le suivant:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{u}_i + \dots$$

$$\text{ou } u_{i+1} = u_i + \Delta t \hat{u}_i$$

Où  $\hat{u}_i$  est la valeur exacte de l'accélération donnant  $u_{i+1}$  .

Cette valeur appartient à l'intervalle  $[u_i, u_{i+1}]$  si les fonctions sont continues:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t [(1-\delta)u_i + \delta u_{i+1}] \quad \dots(a-1)$$

$$0 \leq \delta \leq 1$$

Les valeurs de  $u_{i+1}$  sont approximatives puisque  $\delta$  est arbitraire .

Par un raisonnement similaire , on obtient également:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t u_i + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\gamma)u_i + 2\gamma u_{i+1}] \quad \dots(a-2)$$

$$0 \leq 2\gamma \leq 1$$

Quand  $\delta = 1/2$  ,  $\gamma = 1/4$  : on obtient la méthode de l'accélération moyenne ou règle trapézoïdale .

Quand  $\delta = 1/2$  ,  $\gamma = 1/6$  : on obtient la méthode de l'accélération linéaire .

En réarrangeant (a-2) on obtient :

$$u_{i+1} = \frac{1}{\gamma \Delta t^2} (u_{i+1} - u_i) - \frac{1}{\gamma \Delta t} u_i (1 - \frac{1}{2\gamma}) \quad \dots(a-3)$$

Dans la partie droite de l'équation , la seule inconnue est  $u_{i+1}$  , en remplaçant cette nouvelle équation dans (a - 1) , on obtient  $u_{i+1}$  en fonction de  $u_{i+1}$  et des réponses à l'étape précédente ( $u_i, u_i, u_i$ ).

L'expression de  $u_{i+1}$  , remplacée par la suite dans l'équation (A') écrite à l'étape  $i+1$  donne:

$$K_{\text{eff}} u_{i+1} = F_{i+1} \quad \dots(a-4)$$

$$K_{eff} = K + \frac{1}{\gamma \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\gamma \Delta t} C$$

$$\hat{F}_{i+1} = F_{i+1} + \left[ \frac{1}{\gamma \Delta t^2} u_i + \frac{1}{\gamma \Delta t} \dot{u}_i + \left( \frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \ddot{u}_i \right] M + \left[ \frac{\delta}{\gamma \Delta t} u_i + \left( \frac{\delta}{\gamma} - 1 \right) \dot{u}_i + \Delta t \left( \frac{\delta}{2\gamma} - 1 \right) \ddot{u}_i \right] C$$

**\*Procédure de calcul:**

- $K_{eff}$  est établie grâce à l'expression ci-dessus.
- On calcule le vecteur  $\hat{F}_{i+1}$ .
- On résout (a-4) par le choix d'un algorithme convenable.
- On établit les vecteurs  $u_{i+1}, \dot{u}_{i+1}$  grâce à (a-1) et (a-3).
- $\hat{F}_{i+2}$  est maintenant calculé et on peut donc passer à l'étape suivante.

**\*Remarque:**

La méthode de **NEWMARK** est inconditionnellement stable pour les valeurs de  $\delta$  et  $\gamma$  suivantes:

$$\delta \geq 1/2 \quad \text{et} \quad \gamma \geq \frac{1}{4} (\delta + 1/2)^2 \quad (\text{ref H})$$

**3-b/ Méthode de  $\vartheta$ -WILSON :**

Cette méthode est basée sur les suppositions suivantes :

- \*1- L'accélération varie linéairement entre  $t$  et  $t+\Delta t$ .
- \*2- L'accélération est linéairement extrapolée de  $t+\Delta t$  à  $t+\vartheta\Delta t$ ;  $\vartheta > 1$ .
- \*3- L'équilibre est satisfait à  $t+\vartheta\Delta t$ , où  $u_{t+\Delta t}$  est à déterminer.

Le point (correspondant à un instant) où l'équation d'équilibre est vérifiée est appelé 'point de collocation'.

**\*Remarque:**

Il est à noter que lorsque  $\vartheta=1$ , on obtient le schéma de l'accélération linéaire qui est le même que celui de **NEWMARK** pour  $\delta=1/2$  et  $\gamma=1/6$ .

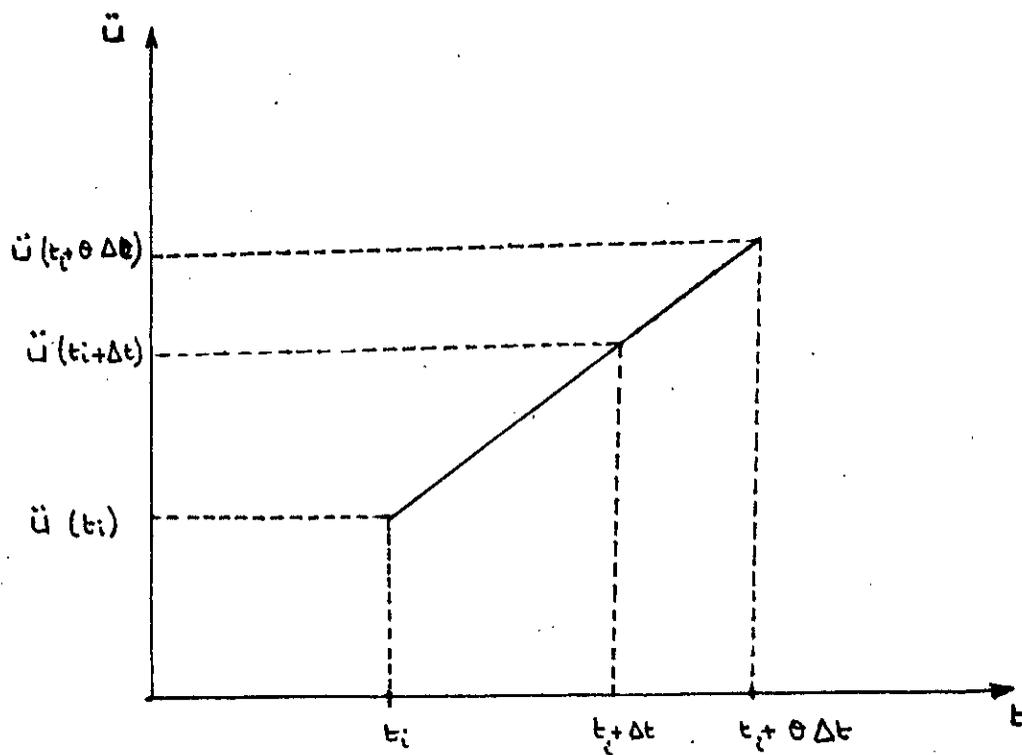


Schéma illustrant la variation linéaire de l'accélération entre  $t_i$  et  $t_i + \Delta t$  et l'extrapolation à  $t_i + \theta \Delta t$ ,  $\theta > 1$

**\*Procédure de calcul:**

Une fois  $u_{i+\vartheta}$  obtenu en résolvant (b-5), on utilise (b-2) pour le calcul de  $u_{i+\vartheta}$ . Ayant supposé une variation linéaire de l'accélération entre  $u_i$  et  $u_{i+\vartheta}$  et  $u_i$  connue,  $u_{i+1}$  pourra être calculé facilement.

$u_{i+1}$  et  $\dot{u}_{i+1}$  seront eux calculés par la méthode de **NEWMARK** pour  $\delta=1/2$  et  $\gamma=1/6$ , les expressions sont :

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta t}{2} (\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1})$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta t \ddot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{6} (2\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

Le calcul peut donc continuer jusqu'à l'étape  $i+2$  et ainsi de suite.

**\*Remarque:**

- La méthode de **WILSON** est inconditionnellement stable pour  $\vartheta \geq 1.37$ .

- Il a été également prouvé en 1972 par **GOUDREAU** et **TAYLOR** qu'elle surévaluait la réponse pour les petits pas de temps. ceci est d'ailleurs une particularité inhérente des méthodes de collocation.

### 3-c/ Méthode de Houbolt :

Cette méthode a été proposée par **HOUBOLT** en 1950, très largement populaire également en dynamique des structures, son plus grand avantage c'est qu'elle est inconditionnellement stable pour les problèmes linéaires.

Les expressions des vitesses et accélérations sont:

$$\dot{u}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11u_{i+1} - 18u_i + 9u_{i-1} - 2u_{i-2}) \quad \dots(c-1)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2u_{i+1} - 5u_i + 4u_{i-1} - u_{i-2}) \quad \dots(c-2)$$

Substituant (c-1) et (c-2) dans (A') on obtient :

$$K_{eff} \hat{u}_{i+1} = \hat{F}_{i+1} \quad \dots(c-3)$$

où :

$$\left[ \begin{array}{l} K_{eff} = \frac{2}{\Delta t^2} M + \frac{11}{6\Delta t} C + K \\ \hat{F}_{i+1} = F_{i+1} + \left[ \frac{5}{\Delta t^2} M + \frac{3}{\Delta t} C \right] u_i - \\ \left[ \frac{4}{\Delta t^2} M + \frac{3}{2\Delta t} C \right] u_{i-1} + \left[ \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{3\Delta t} C \right] u_{i-2} \end{array} \right.$$

Comme observé dans l'expression de  $\hat{F}_{i+1}$ , cette méthode nécessite un schéma implicite de départ pour les 2 premières étapes  $i=0$  et  $i=1$ .

#### II-3-3-d/ Méthode de PARK :

Développée par PARK en 1975 et particulièrement attractive pour les systèmes non linéaires :

Les expressions des vitesses et accélérations sont :

$$\left[ \begin{array}{l} \dot{u}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (10 \dot{u}_{i+1} - 15\dot{u}_i + 6\dot{u}_{i-1} - \dot{u}_{i-2}) \quad \dots(d-1) \\ \ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{6\Delta t} (10 \ddot{u}_{i+1} - 15\ddot{u}_i + 6\ddot{u}_{i-1} - \ddot{u}_{i-2}) \quad \dots(d-2) \end{array} \right.$$

En substituant dans (A'), on obtient :

$$K_{eff} \hat{u}_{i+1} = \hat{F}_{i+1} \quad \dots(d-3)$$

où :

$$\left[ \begin{array}{l} K_{eff} = K + \frac{100}{36\Delta t^2} M + \frac{10}{6\Delta t} C \\ \hat{F}_{i+1} = \hat{F}_{i+1} + \left[ \frac{10}{36\Delta t^2} (15u_i - 6u_{i-1} + u_{i-2}) + \frac{1}{6\Delta t} (15\dot{u}_i - 6\dot{u}_{i-1} + \dot{u}_{i-2}) \right] M \\ \quad + \frac{1}{6\Delta t} (15u_i - 6u_{i-1} + u_{i-2}) C \end{array} \right]$$

Le calcul de la vitesse à chaque étape de temps n'a pas besoin d'être effectué, il suffit de remplacer (d-1) dans (d-4).

Mais le large stockage nécessaire aux vecteurs déplacements de départ représente le plus grand inconvénient.

### 3-e/ Méthode de HILBER $-\alpha$ :

C'est une extension de la méthode de NEWMARK, elle est très intéressante pour les problèmes pour lesquels les modes élevés sont négligeables. Elle a été établie par HILBER en 1977.

L'expression de l'équation d'équilibre est la suivante:

$$M \ddot{u}_{i+1} + C \dot{u}_{i+1} + (1+\alpha)K u_{i+1} - \alpha K u_i = \hat{F}_{i+1}$$

Les approximations de la vitesse et de l'accélération sont les mêmes que pour la méthode de NEWMARK. (pour  $\alpha=0$ , ce schéma devient celui de NEWMARK).

On obtient alors:

$$K_{eff} u_{i+1} = \hat{F}_{i+1}$$

où:

$$K_{eff} = \frac{1}{\gamma \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\gamma \Delta t} C + (1+\alpha) K$$

$$\hat{F}_{i+1} = F_{i+1} + \left[ \frac{1}{\gamma \Delta t^2} u_i + \frac{1}{\gamma \Delta t} \dot{u}_i + \left( \frac{1}{2\gamma} - 1 \right) \ddot{u}_i \right] M$$

$$\left[ \frac{\delta}{\gamma \Delta t} u_i + \left( \frac{\delta}{\gamma} - 1 \right) \dot{u}_i + \Delta t \left( \frac{\delta}{2\gamma} - 1 \right) \ddot{u}_i \right] C + \alpha K u_i$$

### 3-f/ Schéma d'ADAM-MOULTON :

Le schéma d'ADAM-MOULTON est un schéma multipas .Il existe une analogie entre lui et celui d'ADAMS -BASHFORTH comme schéma explicite .Si les approximations du premier schéma ,étaient basées sur les séries de TAYLOR progressives ,celles du deuxième sont basées sur les séries de TAYLOR regressives :

$$x_i = x_{i+1} - \Delta t \dot{x}_{i+1} + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{x}_{i+1} - \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{x}_{i+1} + \dots$$

Or  $x_i = f(x_i, t_i) = y_i$

Donc  $x_{i+1} = x_i + \Delta t [y_{i+1} - \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{y}_{i+1} + \frac{\Delta t^3}{3!} \dddot{y}_{i+1} + \dots]$

De la même manière

$$x_{i+1} = x_i + f(x_{i+1}, t_{i+1})$$

En établissant l'approximation suivante :

$$y_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

On obtient la deuxième formule d'ADAM-MOULTON

$$x_{i+1} = x_i + \frac{\Delta t}{2} [y_i + y_{i+1}] + \mathcal{O}(\Delta t^3)$$

La forme générale du schéma d'ADAM-MOULTON est:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \sum_{k=0}^n b_k f_{i+1-k} + \mathcal{O}(\Delta t^{n+2})$$

$b_k$  sont des constantes données par des tables .

#### II-2-2-4/ Schémas prédicteurs-correcteurs :

Ces méthodes consistent à utiliser un schéma ouvert (explicite) pour prédire la solution du système , puis se basant sur les caractéristiques de stabilité des schémas implicites ,améliorer les résultats prédits.

L'algorithme implanté dans le logiciel dlearn est celui de HILBER- $\alpha$  avec un calcul de prédicteurs.(méthode de HILBER améliorée par HUGUES et TAYLOR.

Nous rappellerons que les formules de différences finis retenues pour cette méthode sont celles de NEWMARK.Mais l'équation du mouvement discretisée dans le temps est:

$$M u_{i+\alpha} + (1+\alpha) C u_{i+1} - \alpha C u_i + (1+\alpha) K u_{i+1} - \alpha K u_i = F_{i+\alpha} \quad \dots(4-1)$$

$$\text{Avec } t_{i+\alpha} = (1+\alpha) t_{i+1} - \alpha t_i = t_i + \alpha \Delta t$$

Le calcul des prédicteurs se fera comme suit:

$$\tilde{u}_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\gamma) \ddot{u}_i \quad \dots(4-2)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t (1 - \delta) \dot{u}_i \quad \dots(4-3)$$

Les équations (a-1) et (a-2) s'écriront pour donner les correcteurs :

$$u_{i+1} = \tilde{u}_{i+1} + \gamma \Delta t^2 \ddot{u}_{i+1} \quad \dots(4-4)$$

$$u_{i+1} = u_{i+1} + \delta \Delta t \dot{u}_{i+1} \quad \dots(4-5)$$

Pour commencer le processus, on calcule  $u_0$  par:

$$M u_0 = F - C u_0 - K u_0 \quad \dots(4-6)$$

Puis à partir de la deuxième étape, on calculera  $u_{i+1}$  en résolvant:

$$(M + \gamma(1+\alpha)\Delta t^2 K + \delta(1+\alpha)\Delta t C) u_{i+1} = F(t_{i+\alpha}) - (1+\alpha)C u_{i+1} + \alpha C u_i + \alpha K u_i - (1+\alpha)K u_{i+1} \quad \dots(4-7)$$

L'équation (4-7) étant équivalente à l'équation (4-1), en y introduisant les approximations de  $\dot{u}_{i+1}$  et  $\ddot{u}_{i+1}$  (de (a-1) et (a-2) respectivement) et en y remplaçant les parties correspondantes aux équations (4-2) et (4-3) respectivement par  $\tilde{u}_{i+1}$  et  $u_{i+1}$ .

\* Remarques:

\* Si les paramètres de la méthode sont choisis de telle sorte que :

$$1/ \alpha \in \left[ -\frac{1}{3}, 0 \right]$$

$$2/ \delta = (1-2\alpha)/2$$

$$3/ \gamma = (1-\alpha)^2/4$$

Alors la méthode sera inconditionnellement stable et sa convergence sera du second ordre.

\* Dans ce schéma à chaque itération on doit résoudre le système (4-1) en  $\ddot{u}_{i+1}$ . On décompose la matrice  $K^*$  en CROUT une seule fois et c'est le terme de droite qui change dans le temps.

On notera la matrice effective  $K^*$  :

$$K^* = (M + \gamma (1+\alpha)\Delta t^2 K + \delta(1+\alpha)\Delta t C)$$

\* D'après la définition du HUGHES, du terme explicite à savoir: "Le schéma est explicite si, dans le cas d'une matrice masse effective calcul de  $\ddot{u}_{i+1}$  dans (4-7) ne nécessite pas la résolution d'un système."

Le schéma de la méthode  $\alpha$  est explicite si  $\alpha = -1$ , ou si  $\beta$  et  $\gamma$  sont tous deux nuls.

#### II-2-2-5/ Méthodes mixtes :

Nous avons discuté deux classes de procédures d'intégration temporelle en différences finis, les méthodes explicites et implicites.

L'efficacité des méthodes explicites apparait dans la non nécessité de la factorisation de la matrice effective de rigidité. Le prix à payer pourtant étant le très petit incrément de temps engendrant une bonne stabilité.

Un bien plus grand pas ,par contre ,peut être utilisé dans une analyse implicite mais la factorisation coûteuse de la matrice effective de rigidité ,elle,est inévitable.

Plusieurs méthodes utilisant les aspects positifs de chacun des deux schémas ont donc été proposées au début des années 80. Le phénomène premier ayant engendré ,l'utilisation de ces méthodes est la différence de la réponse fréquentielle de différentes portions d'un système à une excitation donnée.

Nous citerons à titre d'exemple les problèmes d'interaction sol-structure. Une onde sismique provoquera en effet une réponse au niveau du sol où les hautes fréquences sont les plus significantes, et une autre réponse totalement différente de la première au niveau de la structure où cette fois-ci la participation des basses fréquences est la seule significative.

Si un même opérateur est donc utilisé pour les deux parties, l'intégration sera inefficace ,et la réponse de certaines parties ne sera pas donnée avec précision.

La seule solution est donc le choix de différents opérateurs aux différentes portions des équations d'équilibre : une méthode explicite pour la propagation d'ondes et une méthode implicite pour la réponse structurelle.

Il était important de citer l'existence de ces méthodes sans pour autant avoir à les expliciter ,et cela afin de respecter la logique de notre travail.(ces méthodes faisant partie de toutes autres recherches).

Nous citerons seulement le schéma le plus général explicite-implicite proposé par LIU et BELYSCHO (1982) ,basé sur le choix de différents pas de temps simultanément en différentes parties du système discrétisé.

## II-2-2-6/ Analyse des méthodes directes d'intégration :

### Introduction:

Dans le chapitre II-3-4 , nous avons abordé certaines méthodes directes sans discuter de leur analyse.

Ce chapitre vise à les analyser d'une part puis à les comparer sur certains critères et enfin à essayer de déterminer leur degré d'adaptation pour des problèmes dynamiques.

Les critères utilisés pour pouvoir décider de la conformité des méthodes en question pour un problème donné sont:

- La stabilité
- La précision
- L'efficacité

Il serait également intéressant que l'opérateur ne nécessite pas de schémas induisant les vecteurs de départ , mais c'est un désavantage qui peut être occulté si les caractéristiques d'efficacité et de précision sont attractives.

L'efficacité d'une méthode est déterminée par:

- \_ Le choix de l'intervalle de temps induisant une réponse stable.
- \_ L'effort de calcul déployé dans l'assemblage et la factorisation des matrices effectives de rigidité.

### 6-a/ Stabilité :

\* La stabilité est établie sur la base de la propagation de l'erreur dans le temps. Si l'erreur introduite à n'importe quel pas reste bornée ou limitée quand  $t$  tend vers l'infini , l'opérateur est stable .

\* On dit qu'un opérateur est conditionnellement stable s'il est en effet stable pour un  $\Delta t$  vérifiant la condition  $\frac{\Delta t}{T} < v_{cr}$ .

$v_{cr}$  : valeur critique  
 et  $T$  : la période la plus petite du système

\* Un opérateur est inconditionnellement stable si la solution est stable quelque soit le choix de  $\Delta t$ .

Le procédé de propagation de l'erreur peut être établi en considérant la solution des vibrations libres de l'équation à un degré de liberté:

$$\ddot{u} + 2\beta \dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad \dots(a-1)$$

conditions aux limites  $\begin{cases} u(0) = u_0 \\ \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \end{cases}$

La solution est donnée par :

$$u(t) = e^{-\beta\omega t} \left[ u_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{u}_0 + \beta\omega u_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] \quad \dots(a-2)$$

Avec  $\omega_d = \sqrt{1 - \beta^2}$

La réponse à  $t+\Delta t$  peut être écrite en fonction de celle au temps  $t$ ,

$$u(t+\Delta t) = A u(t) \quad \dots(a-3)$$

Où  $u$  est un vecteur donné par:

$$u(t) = \begin{Bmatrix} u(t) \\ \Delta t u(t) \end{Bmatrix}$$

$$A = e^{-\beta\Omega} \begin{bmatrix} \cos \Omega_d & (\sin \Omega_d)/\Omega_d \\ -\Omega_d \sin \Omega_d & \cos \Omega_d \end{bmatrix} + \frac{\beta e^{-\beta\Omega} \sin \Omega_d}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\beta\Omega & -1 \end{bmatrix}$$

Où  $\Omega = \omega \Delta t$  ,  $\Omega_d = \omega_d \Delta t$

L'équation (a-3) relie la solution exacte de (a-1) au temps  $t+\Delta t$  à celle au temps  $t$ .

Quand un opérateur des différences finis est utilisé pour résoudre (a-1), on peut relier la réponse du pas  $i+1$  à celle du pas  $i$  dans une forme similaire à (a-3) :

$$u_{i+1} = A u_i \quad \dots(a-4)$$

La matrice  $A$  étant unique pour chaque opérateur de (a-4), on a :

$$u_{i+n} = A^n u_i \quad \dots(a-5)$$

Supposons que  $e_i$  est l'erreur au pas  $i$ , celle au pas  $i+n$  peut être exprimée en utilisant (a-5).

$$e_{i+n} = A^n e_i$$

$A$  peut être décomposée sous la forme :  $A = \phi J \phi^{-1}$

$\phi$  : vecteurs propres de  $A$ .

$J$  : Matrice de JORDAN ( $\text{diag } J = \lambda_i$ )

$\lambda_i$  : valeurs propres de  $A$

Donc :  $A^n = \phi J^n \phi^{-1}$

La condition de stabilité est que l'erreur reste bornée durant toute l'analyse dans le temps, ceci implique que  $J^n$  reste bornée quand  $n \rightarrow \infty$ .

Ceci n'est possible que si le rayon spectral  $\rho(A) = \max |\lambda_i| \leq 1$ .

Il est à noter que plus petit sera  $\rho(A)$ , plus vite se fera la convergence.

Comme application du critère de stabilité, on considère la méthode des différences centrales dans le cas d'une vibration non amortie.

L'équation d'équilibre devient :

$$u_i + \omega^2 u_i = 0 \quad \dots(a-6)$$

L'approximation par les différences centrales pour les accélérations est :

$$\ddot{u} = \frac{1}{\Delta t^2} [u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}] \quad \dots(a-7)$$

En substituant (a-7) dans (a-6):

$$u_{i+1} = (2 - \omega^2 \Delta t^2) u_i - u_{i-1}$$

En prenant

$$u = \begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ u_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i-1} \end{Bmatrix}$$

Pour obtenir les valeurs propres de A, on doit résoudre le problème aux valeurs propres :

$$\det[A - \lambda I] = 0 \quad \dots(a-7')$$

$$\begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (2 - \omega^2 \Delta t^2) \lambda + 1 = 0$$

D'où:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ 2 - \omega^2 \Delta t^2 + \sqrt{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2 - 4} \right] \quad \dots(a-8)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ 2 - \omega^2 \Delta t^2 - \sqrt{(2 - \omega^2 \Delta t^2)^2 - 4} \right] \quad \dots(a-9)$$

Pour la stabilité, on suppose que  $|\lambda_1| \leq 1$ ,  $|\lambda_2| \leq 1$  (le rayon spectral  $\rho(A) \leq 1, \forall \Delta t/T$ ).

La condition de stabilité vérifiée pour (a-9) sera :

$$\omega \Delta t \leq 2$$

$$\text{ou } \frac{\Delta t}{T} \leq \frac{1}{\pi}$$

Les matrices d'amplification A de quelques méthodes sont données en annexe 1.

La figure 2 elle, montre les zones de stabilité pour quelques méthodes implicites appliquées pour des systèmes non amorties .

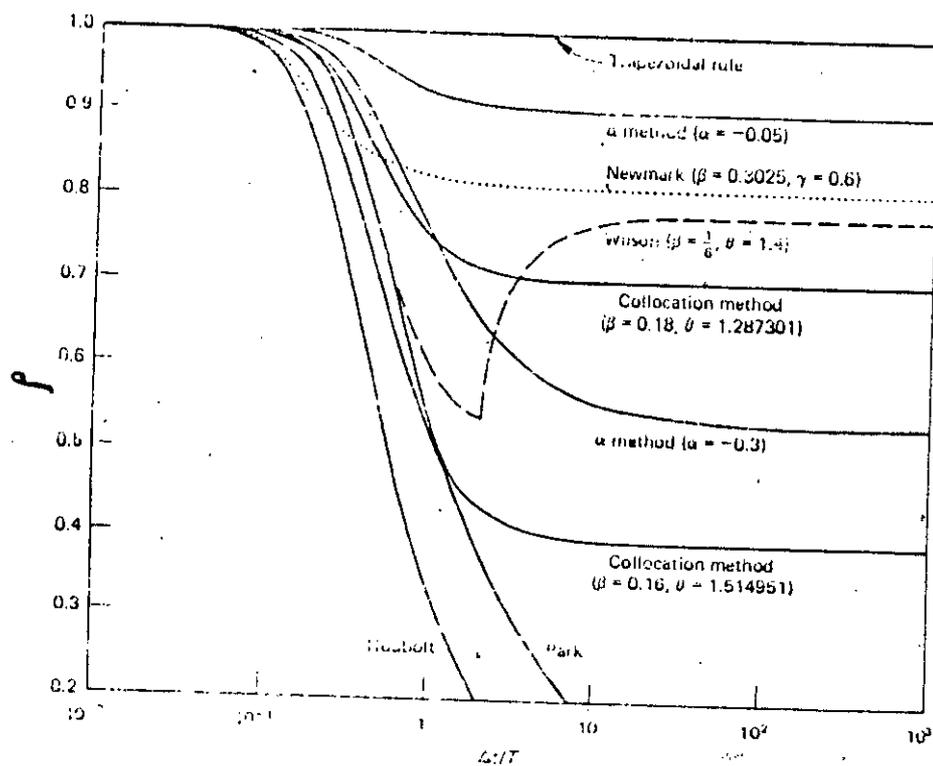


figure 2 (ref H)

Rayon spectral de la matrice d'amplification A  
en fonction de  $\Delta t/T$

### 6-b/ Convergence :

Il est nécessaire de souligner que la stabilité d'un opérateur n'assure pas la précision garantie ,pour cela il faut obligatoirement qu'il converge .

Un opérateur est dit convergent si la solution numérique approche la solution exacte de l'équation différentielle quand

$\Delta t \rightarrow 0$  c'est à dire pour un temps donné et pour  $i = \frac{t}{\Delta t}$  :

$$u(t) = u_1 \quad \text{et} \quad u(t) = u_1 \quad \text{quand} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

En accord avec le théorème de l'équivalence de LAX-RICHTMAYER , la condition nécessaire et suffisante de la convergence est que le procédé soit stable et consistant .

Un opérateur est dit consistant si l'équation de la différence finie approche l'équation d'équilibre quand  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Considérons la matrice d'amplification A , nous remarquerons que ses valeurs propres sont données par :

$$\det[A - \lambda I] = -\lambda^3 + 2A_1\lambda^2 - A_2\lambda + A_3 = 0 \quad \dots(b-1)$$

Où  $A_1 = 1/2$  trace de A

$A_2 =$  somme des principaux mineurs de A

$A_3 =$  déterminant de A

I = matrice identité

En réécrivant (a-4) pour trois étapes consécutives pour un ~~même~~  $\Delta t$  , HILBER a établi en 1976 l'équation suivante:

$$u_{i+1} - 2A_1 u_i + A_2 u_{i-1} - A_3 u_{i-2} = 0, i=2,3,\dots \quad \dots(b-2)$$

L'erreur de troncature locale est donnée par :

$$E_T = \frac{1}{\Delta t^2} \left[ u(t+\Delta t) - 2A_1 u(t) + A_2 u(t-\Delta t) - A_3 u(t-2\Delta t) \right] \quad \dots(b-3)$$

Si  $(b-3) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow 0$  l'équation (b-2) est dite consistante avec l'équation (a-1).

### 6-c/ Précision :

La précision d'une méthode de calcul direct se mesure par la manière dont la solution obtenue par une discrétisation temporelle et avec un intervalle de temps judicieusement choisi tend vers la solution exacte.

En considérant par exemple un système à un degré de liberté, la précision avec laquelle un opérateur peut déterminer la réponse dynamique du système dépend du rapport  $\frac{\Delta t}{T}$ . Plus petit est ce rapport, plus grande est la précision.

Généralement  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{1}{10}$  est adéquat pour la plupart des méthodes implicites et  $\frac{\Delta t}{T} \leq \frac{2}{\pi}$  pour la méthode explicite des différences centrales.

Il faut ajouter qu'en général, les opérateurs de second ordre de précision ( $E_T = \mathcal{O}(\Delta t^2)$ ) tracent des réponses plus précises que les opérateurs du premier ordre (ref H).

Seulement l'erreur de troncature n'est pas la seule mesure de la précision d'une méthode. Un autre phénomène entre en jeu : celui de l'amortissement numérique et de la période d'élongation introduite par l'opérateur, affecte d'une manière décisive la précision. On l'appelle communément effet de dissipation et dispersion.

#### \* Dissipation et dispersion numérique:

Pour analyser ces deux phénomènes, on rappelle (voir chapitre sdof) que dans le cas d'un système à un degré de liberté sous amorti, la réponse libre est de la forme :

$$u(t) = \exp(-\xi \omega_0 t) \left[ u_0 \cos \omega_d t + C \sin \omega_d t \right] \quad \dots(1)$$

Avec  $C = \frac{u_0 + \xi \omega_0 u_0}{\omega_d}$ ,  $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ ,  $0 < \xi < 1$  (sous amorti)

HUGHES a montré (ref H) que la solution peut se mettre sous la forme :

$$u_i = \exp(-\xi \bar{\omega}_o t_i) \left[ u_o \cos \bar{\omega}_d t_i + C \sin \bar{\omega}_d t_i \right] \quad \dots(2)$$

avec

$$C = \frac{u_1 - A_1 u_o}{(A_2 - A_1^2)^{1/2}}$$

$$\bar{\omega}_d = (1 - \xi^2)^{1/2} \bar{\omega}_o$$

$A_1$  et  $A_2$  sont des coefficients.

La comparaison de (1) et (2) exprime que  $\bar{\xi}$  est la contrepartie algorithmique de  $\xi$  et que  $\bar{\omega}_o$  et  $\bar{\omega}_d$  sont respectivement les contreparties algorithmiques de  $\omega_o$  et  $\omega_d$ .

La mesure de la dissipation numérique est exprimée par  $\bar{\xi}$  et celle de

la dispersion par  $\frac{|T - \bar{T}|}{T}$  : erreur relative sur la période.

Avec  $T = \frac{2\pi}{\bar{\omega}_o}$  et  $\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_o}$

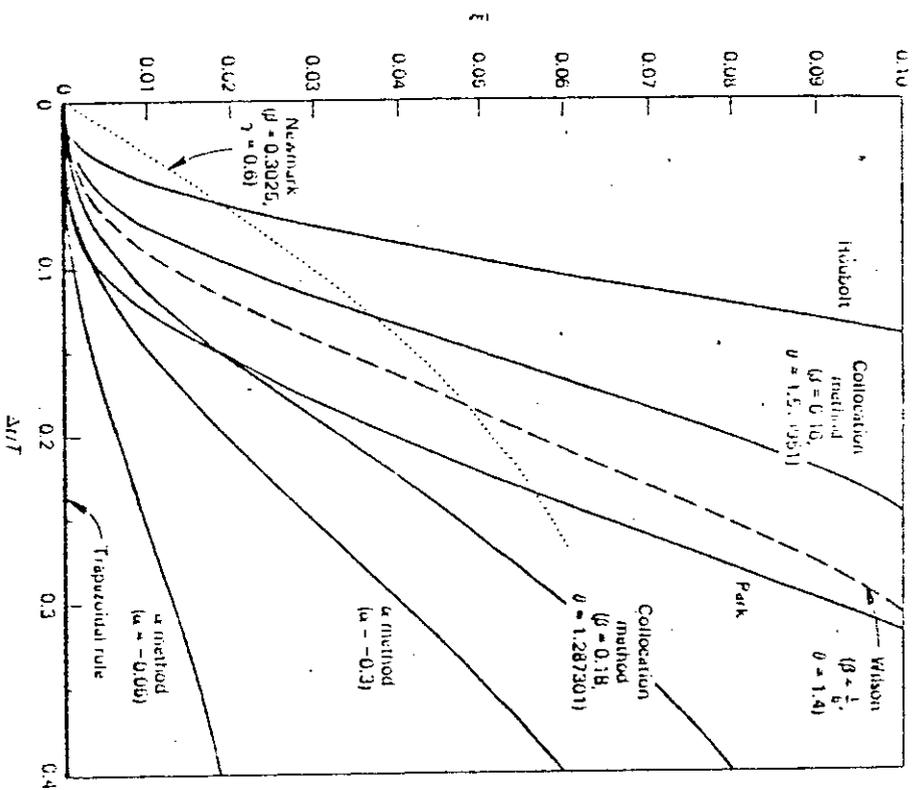
Il est clair que l'évaluation analytique de tels phénomènes reste très délicate ; ce qui a amené les structuristes à opter pour des approximations calculées par ordinateur.

Pour illustrer le phénomène de dissipation, supposons qu'à la  $i^{\text{ème}}$  étape, on a :  $t_i = T$ , alors,

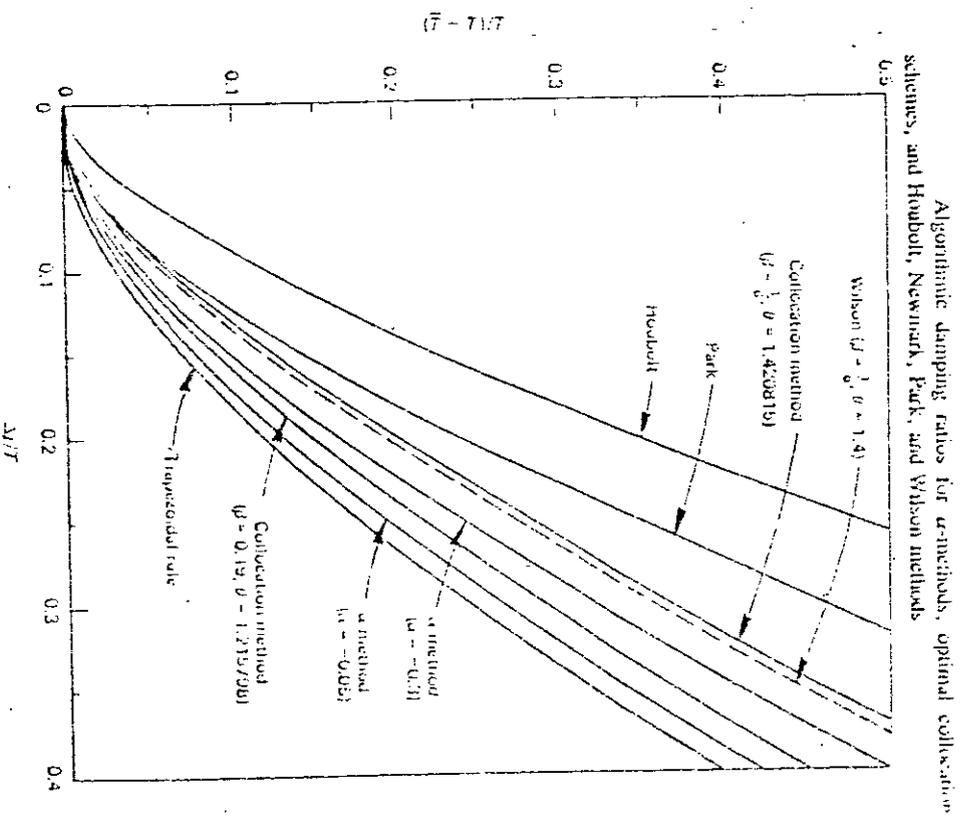
$$\exp(-\xi \bar{\omega}_o t_i) = \exp(-2\pi \bar{\xi}) \cong 1 - 2\pi \bar{\xi}$$

Ce qui implique qu'après une période de vibration, l'amplitude soit diminuée d'une proportion:

$$\text{diminution d'amplitude} = D-A = 2\pi \bar{\xi}$$



- Figure 3 -  
(ref H)



Algorithmic damping ratios for  $\alpha$ -methods, optimal collocation schemes, and Hoobolt, Newmark, Park, and Wilson methods

Relative period errors for  $\alpha$ -methods, optimal collocation schemes, and Hoobolt, Park, and Wilson methods

*Remarque :Ce phénomène existe même dans les cas physiquement non amortis.*

Pour résoudre ce problème ,des courbes ont été établies à partir de tests divers sur les méthodes donnant la dissipation ou la dispersion en fonction de l'incrément de temps .(voir fig 3)

### CONCLUSIONS :

Beaucoup d'efforts sont déployés par différents groupes de recherche de par le monde pour le développement de méthodes efficaces pour la résolution des problèmes de dynamique des structures.Néanmoins ,le consensus universel escompté ne s'est pas encore dégagé .

Il est généralement reconnu que pour reconnaître l'efficacité d'une méthode les critères retenus sont les suivants:

- 1/ Inconditionnabilité de la stabilité lorsqu'une méthode est appliquée à un problème linéaire.
- 2/ Convergence du second ordre.
- 3/ L'autocommencement.
- 4/ Controlabilité de la dissipation et de la dispersion.

\* Un algorithme conditionnellement stable requiert un incrément de temps  $\Delta t$  inférieur à une valeur critique donnée par l'analyse de sa stabilité ,ce qui peut être très difficile à réaliser dans le cas de structures compliquées tenant compte ,en plus du fléchissement ,ou du gauchissement.Pour cela , on préfère les algorithmes inconditionnellement stables.

DAHLQUIST a montré (ref H)qu'il est impossible qu'un schéma explicite soit inconditionnellement stable.Donc la vérification du critère 1/ nécessite un schéma implicite ,ce qui engendre une résolution du système à chaque étape d'intégration temporelle.

\* Toujours pour rester dans l'idée du choix de l'intervalle de temps, il est vrai qu'en le diminuant la solution exacte est mieux approchée pour tous les schémas mais ceci entraîne également un coût de calcul plus important.

Il ressort donc qu'un compromis précision-coût s'avère nécessaire.

\* L'expérience montre (ref H) qu'un schéma dont la convergence est du second ordre est nettement plus efficace qu'un schéma du premier ordre de convergence. Le théorème de DAHLQUIST ayant pour conséquence l'impossibilité qu'un schéma dont le degré de convergence est 3 soit inconditionnellement stable; on comprend qu'on doit se contenter de schémas dont la convergence est du second ordre.

\* Quant à l'autocommencement, comme déjà souligné, on n'est pas tenu de le respecter dans la mesure où il permet seulement de sortir une analyse spécifique à l'algorithme, alors que notre intérêt porte plus sur l'efficacité des méthodes à adopter.

Il est donc clair que le choix définitif d'une méthode remplissant les quatre critères en même temps est impossible, seulement à partir de résultats expérimentaux, on a abouti à certaines conclusions suivantes:

\* Les méthodes de PARK et HOUBOLT sont inconditionnellement stables.

\* La méthode de HOUBOLT est plus précise que celle de NEWMARK pour un large  $\Delta t$ .

\* La méthode de PARK donne pour un même intervalle de temps requis par les différences centrales, une réponse plus précise.

\* La méthode de PARK est plus précise que celle de HOUBOLT sauf dans les cas de régimes forcés.

\* La méthode des différences centrales est très précise pourvu qu'un intervalle de temps soit choisi suffisamment petit pour satisfaire la condition de stabilité.

## CHAPITRE III

### PRESENTATION DU TRAVAIL DE PROGRAMMATION

#### INTRODUCTION

Dans ce chapitre ,on donnera un aperçu assez global du DLEARN,un code éléments finis conçu à l'origine dans un cadre pédagogique pour la résolution de problèmes linéaires statiques et dynamiques.On insistera sur certains détails de techniques numériques utilisées (telle que l'allocation pseudo dynamique de la mémoire centrale);puis on donnera la structure du DLEARN en précisant la partie sur laquelle notre travail a porté,à savoir :

- Implantation de la partie calcul des valeurs et vecteurs propres par la méthode de LANCZOS :faite durant l'année 1991-1992,par M<sup>r</sup> ZEKKOUR .

- Implantation de la partie calcul de la réponse dynamique d'une structure par la méthode de superposition modale,objet de notre travail.(Il est à noter que les équations découplées obtenues après superposition des modes sont résolues ,par la méthode de HOUBOLT,laquelle nécessite l'utilisation de la méthode des différences centrales pour le calcul des vecteurs de départ).

#### III-1/Techniques numériques utilisées par DLEARN :

Le programme DLEARN est fait en langage FORTRAN qui ne permet pas un stockage dynamique des variables ,aussi a t-on opté pour une allocation pseudo dynamique de la mémoire centrale qui sera présentée plus bas .Néanmoins ,il est utile de savoir que le travail en mémoire centrale reste très limité du point de vue taille des problèmes à traiter .

Comme DLEARN ne fait pas appel au disque dur pour le stockage des variables ,il est facile de déduire ses limites .

### III-1-1/ Modularité :

La modularité est devenue une caractéristique très importante des programmes éléments finis dans la mesure où elle permet la lisibilité du programme et son extensibilité.

Le programme DLEARN ,au delà de sa taille importante et de sa complexité ,présente les caractéristiques suivantes:

- Sa logique est facile à comprendre.
- Il est aisément modifiable (cette caractéristique apparaîtra lors de la présentation de sa structure ).

### III-1-2/ La structure DATA :

La structure DATA est par définition ,le mode de stockage utilisé.Dans DLEARN ,tel qu'on l'avait déjà signalé toutes les variables (vecteurs ,matrices,scalaires) sont stockées en mémoire centrale dans un COMMON blanc A(mtot) ,la taille de mtot étant définie dans le programme principal.

### III-1-3/ Schéma de stockage des matrices globales :

Le schéma en question est celui en ligne de ciel (sky-line),que nous expliciterons à travers un exemple.

Soit la matrice de rigidité globale K symétrique de dimension 8x8 contenant des termes nuls et d'autres non nuls respectivement notés 0 et X .On appelle ligne de ciel le profil en tirets enveloppant les termes non nuls .

$$\begin{array}{l}
 K = \left[ \begin{array}{cccccccc}
 X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X \\
 & X & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
 & & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\
 & & & X & 0 & X & 0 & X \\
 & & & & X & X & 0 & 0 \\
 & & & & & X & X & 0 \\
 & & & & & & X & X \\
 & & & & & & & X
 \end{array} \right] \\
 \text{sym}
 \end{array} \quad \dots(1)$$

$$\begin{array}{l}
 \text{ALHS} = \left[ \begin{array}{l}
 X \rightarrow k_{11} < \text{--- 1} \\
 X \rightarrow k_{12} \\
 X \rightarrow k_{22} < \text{--- 2} \\
 X \rightarrow k_{23} \\
 X \rightarrow k_{33} < \text{--- 3} \\
 X \rightarrow k_{34} \\
 X \rightarrow k_{44} < \text{--- 4} \\
 X \rightarrow k_{25} \\
 X \rightarrow k_{35} \\
 X \rightarrow k_{45} \\
 X \rightarrow k_{55} < \text{--- 5} \\
 \vdots
 \end{array} \right] \quad \dots(2)
 \end{array}$$

La matrice ,dans le cas de superposition modale ,est stockée dans un vecteur colonne unidimensionnel ALHS dont le premier terme est le premier terme non nul de la matrice K (on lit les valeurs de la partie supérieure par colonne ) et le dernier est le terme diagonal de K. Les positions des termes diagonaux de K dans ALHS sont donnés par un vecteur d'entiers IDIAG .La dimension de IDIAG est égale au nombre d'équations (8 dans l'exemple donné).

La dimension de ALHS est  $n_{ALHS}$  qui est égale à la somme de toutes les hauteurs de colonnes (Par exemple : la colonne 8 a une hauteur de 8, et la colonne 7, une hauteur de 2). A titre d'exemples explicites, on peut citer:

ALHS (1) = $k_{11}$	IDIAG (1) = 1
ALHS (6) = $k_{34}$	IDIAG (2) = 3
ALHS (14) = $k_{66}$	IDIAG (3) = 11
ALHS (24) = $k_{88}$	IDIAG (8) = 24

Ce mode de stockage impose de modifier les algorithmes de décomposition des matrices de résolution des équations, de multiplication d'une matrice par un vecteur, ...etc.

#### III-1-4/ Résolution des systèmes d'équations par la méthode de CROUT :

Soit à résoudre le système

$$K x = b \quad , \text{ en } x \quad \dots(3)$$

Sous réserve que  $K$  soit symétrique définie positive, il sera possible de la décomposer en une matrice triangulaire supérieure à diagonale unité  $U$  et une matrice diagonale  $D$  de telle sorte que :

$$K = U^t D U$$

*Remarques:*

\* Dans le cas où  $K$  est définie positive, tous les termes de  $D$  sont strictement positifs. La vérification de ces termes permettra donc de déterminer si  $K$  est singulière ou pas.

\* La matrice  $U$  a le même profil que celui de  $K$ . Le fait que les termes diagonaux de  $U$  soient égaux à 1, nous permettra de stocker  $U$  à la place de  $K$ , en introduisant les termes de  $D$  à la place de la diagonale de  $K$  occupant le vecteur ALHS.

On n'a donc pas besoin d'allouer un nouvel espace mémoire pour la décomposition de K.

\* Après cette décomposition de CROUT ,on procède à la résolution du système (3) en trois étapes:

- On résout en z :  $U^t z = B$
- On résout en y :  $D y = z$
- Finalement on résout en x :  $U x = y$ .

Pour ce qui est de l'adaptation de l'algorithme de décomposition et de résolution de CROUT au stockage en ligne de ciel (ref H, chapitre 10).

### III-1-5/ Allocation pseudo-dynamique de la mémoire :

On a signalé en I-2 que tous les vecteurs ,matrices et scalaires étaient stockés dans un COMMON blanc A(mtot). Aussi at-il fallu définir des pointeurs définissant la position du début de telle matrice ou tel vecteur dans le vecteur A.

Les pointeurs sont calculés par la fonction MPOINT de la manière suivante:

\* Pour le calcul du pointeur de x ,par exemple on spécifie :

$MPx = MPOINT ('x', nsd, numnp, 0 iprec )$

La fonction MPOINT allouera un espace mémoire dans le COMMON blanc A(mtot) de nom x ,où les trois autres termes représentent les dimensions du tableau x dans les trois directions et où IPREC représente le nombre de précision :

IPREC = 1 pour le cas reel ou entier

IPREC = 2 pour les reels en double precision .

Pour ce type d'allocation ,les appels des sousroutines se fait de la manière suivante:

\* Pour l'appel par exemple de la sousroutine coord qui génère les coordonnées des noeuds ,on spécifie:

call COORD (A(MPx),NSD,NUMNP,IPRTIN)

La subroutine correspondant à cet appel aura la forme :

```
subroutine COORD (x,NSD,NUMNP,IPRTIN)
```

Ce qui veut dire que le tableau x commence à la position MPx du COMMON blanc A(mtot).

A l'intérieur de COORD ,le vecteur x est traité comme un tableau bidimensionnel par la déclaration de DIMENSION:

```
DIMENSION x(NSD,1)
```

Le fait que x est bidimensionnel alors qu'il fait partie d'un vecteur colonne A est sans importance ; en effet cela veut simplement dire que les termes de x sont stockés dans un vecteur organisé par colonnes, la succession des termes étant respectée.

En conséquence la position de x(M,N) dans A est donnée par :

$$\text{IPREC} * (\text{NSD} * (\text{N}-1) + \text{M}-1) + \text{MPx}$$

Où NSD :est le nombre de dimensions spatiales du problème .

et NUMNP : est le nombre de points nodaux de la structure discrétisée.

Donc la détermination de la position dans A de x(M,N) nécessite la connaissance de seulement IPREC ,NSD et la position de début MPx.

La connaissance de NUMNP n'est pas nécessaire ,ce qui explique le 1 utilisé dans DIMENSION x(NSD,1).

En fait n'importe quel entier positif à la place de 1 ferait aussi l'affaire car il ne sert qu'à préciser que le tableau est bidimensionnel.

En allocation pseudo-dynamique ,un vecteur colonne C sera dimensionné par :DIMENSIONC(1) ,et un tableau à 3 dimensions sera déclaré par : DIMENSION B(M,N,1) pour la même raison que pour x.

#### Remarque pratique:

Il est très important de noter que dans les subroutines où l'on déclare le vecteur A par par COMMON A(1) ,il ne faut pas que A soit déjà déclaré en double précision.(Dans le cas d'un travail en double précision).

### III-2/ Structure du programme :

Dans paragraphe ,on donnera la structure du DLEARN en encadrant les parties qui ont été rajoutées au programme .Tout programme éléments finis doit contenir des blocs fonctionnels caractéristiques à savoir:

a/ Lecture, vérification et organisation des données (géométriques et physiques du problème) .

b/ Construction des matrices et vecteurs élémentaires puis leurs assemblages .

c/ Résolution du système obtenu en tenant compte des conditions aux limites.( conditions aux limites et conditions initiales pour les problèmes dynamiques).

d/ Impression des grandeurs escomptées pour le problème traité.

Les tableaux suivants montrent l'organisation générale du DLEARN.



CHAPITRE IV  
RESULTATS

PREMIERE PARTIE  
COMPORTEMENT DE L'ALGORITHME DE LANCZOS

Introduction:

Cette partie est consacrée au calcul des valeurs propres, étape primordiale pour la suite de notre travail, qui est la recherche de la réponse dynamique.

La méthode implantée dans le code est celle de LANCZOS.

On a choisi cette méthode à celle de sous-espace pour ses performances inégalables. (ref Z)

On étudiera trois exemples différents, en observant pour chacun un aspect particulier de l'algorithme de LANCZOS.

PREMIER EXEMPLE:

BARRE CANTILEVER

On s'intéresse ici au problème aux valeurs propres de la barre cantilever (fixe-libre) à 20 noeuds, 19 éléments. (fig b-1)

Les caractéristiques spécifiées sont:

- \* Module de YOUNG  $E = 1.0E+6 \text{ N/m}^2$
- \* masse volumique  $\rho = 4.0E+3 \text{ kg/m}^3$
- \* section  $A = 1.0E-4 \text{ m}^2$
- \* Longueur de la barre = 1 m
- \* Nombre maximum d'itérations de LANCZOS = 15
- \* Nombre maximum de valeurs propres à calculer = 4
- \* Borne gauche du domaine de recherche des valeurs propres =  $-1E-2 \text{ (rad/s)}^2$
- \* Borne droite du domaine de recherche des valeurs propres =  $+1E+7 \text{ (rad/s)}^2$

Le tableau suivant donne pour chaque itération de LANCZOS, le nombre de valeurs propres qui ont convergé et éventuellement, sa grandeur.

Nombre d'itérations de LANCZOS	nombre de valeurs propres ayant convergé	valeurs propres (rad/s) <sup>2</sup>
1	0	
2	0	
3	0	
4	0	
5	0	
6	0	
7	1	617.20
8	1	
9	1	
10	2	5580.2
11	2	
12	2	
13	3	15642.0
14	3	
15	4	31078.0

Pour cet exemple de taille très petite ,la première valeur propre a convergé à partir de la septième itération ,ce qui est très important pour tout utilisateur que seule la fréquence fondamentale intéresse.

Un exemple aussi petit ,de taille 19 ,a été choisi pour montrer l'inefficacité de l'algorithme de lanczos lorsqu'il est utilisé pour la résolution de petits problèmes aux valeurs propres.En effet le nombre d'itérations maximum de LANCZOS ne pouvant dépasser la taille du problème<sup>(2)</sup>, le nombre de valeurs propres qui convergent reste limité.

---

(2) Il serait absurde du point de vue mathématique de projeter un espace vectoriel dans un espace plus grand.

## CONCLUSION :

\* Pour les problèmes aux valeurs propres de petite taille, il est préférable d'utiliser les méthodes directes (telle que JACOBI) si l'on s'intéresse à un nombre de modes comparable à la taille du problème. Sinon, dans le cas où l'on s'intéresse à un nombre de modes comparable à la moitié de la taille du problème la méthode de sous-espace est plus efficace.

\* Pour les problèmes aux valeurs propres de grande taille, il est conseillé d'opter pour sous-espace ou LANCZOS selon l'efficacité de l'une ou l'autre dans le cas particulier étudié.(ref Z).

## DEUXIEME EXEMPLE :

### STRUCTURE EN TREILLIS

On applique cette fois-ci l'algorithme de LANCZOS pour la recherche des valeurs propres et modes propres d'un treillis (fig t1) de 18 noeuds et 40 éléments. ceux-ci sont en matériau 1 de 1 à 12 et en matériau 2 de 13 à 40.

\* matériau 1:

$$E_1 = 30E+7 \text{ lbf/in}^2 \quad \rho_1 = 7.3E-4 \text{ lb/in}^3 \quad S_1 = 10.0 \text{ in}^2$$

\* matériau 2:

$$E_2 = 3E+7 \text{ lbf/in}^2 \quad \rho_2 = 7.3E-4 \text{ lb/in}^3 \quad S_2 = 6.0 \text{ in}^2$$

La taille de ce problème est  $n=32$ , la taille de la matrice de rigidité stockée en ligne de ciel est  $\text{nalhs} = 192$  et sa largeur de bande moyenne est  $l_m = 6$ .

On a exécuté l'algorithme avec différents nombres de valeurs propres à calculer afin d'évaluer l'effort de calcul requis pour chacun d'eux.

Pour cela on dresse le nombre de valeurs propres spécifié (neig), le nombre de diagonalisations de KROUT utilisées (Kfac), le nombre de résolutions de  $LDL^t y = x$  en  $y$  (Nres), le nombre de multiplications de  $M$  par un vecteur requis (Mfac), ainsi que le temps nécessaire pour le calcul (tnec).

neig	Kfac	Mfac	Nres	tnec (s)
1	1	12	6	160.97
2	1	22	9	240.33
3	1	24	11	362.20
5	1	36	16	849.25
7	1	50	20	894.58

Le nombre de résolutions varie d'une manière presque linéaire avec le nombre de valeurs propres (neig) requises, alors que le nombre de multiplication de M par un vecteur varie plus vite en augmentant neig. En effet de 12 correspondant à neig=1, le nombre de M multiplications passe à 24 pour neig=3, puis à 50 pour neig=7.

La colonne du nombre de K factorisations selon CROUT est insérée afin d'insister sur le fait que celle-ci ne s'effectue qu'une seule fois durant le processus de LANCZOS.

Le tableau donne cette fois, pour neig=6, le cheminement des itérations de LANCZOS en spécifiant les valeurs propres qui ont convergé.

numéro de l'itération de LANCZOS	nombre de valeurs propres ayant convergé	valeurs propres (rad/s) <sup>2</sup>
1	0	
2	0	
3	0	
4	0	
5	0	
6	1	0.29220E+4
7	1	
8	1	
9	1	
10	2	0.34145E+5
11	2	
12	3	0.10002E+6
13	3	
14	4	0.14757E+6
15	4	
16	4	
17	5	0.35823E+6
18	5	
19	5	
20	6	0.63759E+6

Le tableau ci-après donne la première composante  $\phi(1,i)$  et la deuxième composante  $\phi(2,i)$  du  $i^{\text{ème}}$  mode.

mode i → composante ↓	1	2	3	4	5	6
$\phi(1,i)$	0.11416 E-1	-0.6659 E-1	0.9892 E-2	-16527 E-5	-23233 E-6	-23607 E-6
$\phi(2,i)$	0.22065 E-1	-48531 E-6	0.18604 E00	-30939 E-6	0.22832 E-1	-0.1473

Une représentation des quatre premiers modes est faite grâce au SAP90 (fig mt1), les valeurs propres correspondant à ces vecteurs propres sont:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0.19514E4 \text{ (rad/s)}^2 \\ \lambda_2 &= 0.342030E5 \text{ (rad/s)}^2 \\ \lambda_3 &= 0.859388E5 \text{ (rad/s)}^2 \\ \lambda_4 &= 0.158798E6 \text{ (rad/s)}^2\end{aligned}$$

### TROISIEME EXEMPLE :

#### ELEMENT PLAQUE

Le dernier aspect de l'algorithme que nous étudierons sera fait à travers l'exemple d'une plaque discrétisée initialement à 66 noeuds et 50 éléments.(fig.p1)

Nous observerons donc le comportement de l'algorithme de LANCZOS vis à vis de la taille du problème d'une part puis vis à vis de la largeur de bande moyenne des matrices K et M .

\* Dimensions de la plaque:

\* Longueur : 16.0 in

\* Largeur : 2.0 in

\* Epaisseur : 1.0 in

\* Caractéristiques physiques :

\* Coefficient de POISSON :  $\nu = 0.4$

\* Module de YOUNG :  $E = 3E+6 \text{ lbf/in}^2$

\* Masse volumique :  $\rho = 4.3E+3 \text{ lb/in}^3$

\* Coefficient d'amortissement

- par rapport à la masse :  $\alpha = 0.5$

- par rapport à la rigidité :  $\beta = 0.3$

\* Conditions aux limites : attache d'un bord complètement

\* données de LANCZOS :

\* Nombre de valeurs propres cherchées = 5

\* Nombre maximum d'itérations de LANCZOS = 25

\* Décalage spectral = 0

\* Borne gauche du domaine de recherche des  
valeurs propres =  $-0.02 \text{ (rad/s)}^2$

\* Borne droite du domaine de recherche des  
valeurs propres =  $1.0E+9 \text{ (rad/s)}^2$

\* cas de discrétisation :

\* 1<sup>er</sup> cas :  
plaque à 66 noeuds ,50 éléments.

\* 2<sup>eme</sup> cas :  
plaque à 77 noeuds ,60 éléments.

\* 3<sup>eme</sup> cas :  
plaque à 66 noeuds ,50 éléments.  
(en changeant la numérotation des éléments).

Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux suivants:

Numéro de l'itéra- -tion	1 <sup>er</sup> cas		2 <sup>eme</sup> cas		3 <sup>eme</sup> cas	
	neig	$\lambda_i$ (rad/s) <sup>2</sup>	neig	$\lambda_i$ (rad/s) <sup>2</sup>	neig	$\lambda_i$ (rad/s) <sup>2</sup>
1	0		0		0	
2	0		0		0	
3	0		0		0	
4	0		0		0	
5	0		0		0	
6	0		0		0	
7	0		0		0	
8	0		0		0	
9	0		0		0	
10	0		1	.14877E3	0	
11	0		1		1	.15063E3
12	1	.15063E3	2	.18802E3	1	
13	1		2		2	.18032E3
14	2	.18032E3	2		2	
15	2		3	.32443E3	3	.28977E3
16	2		3		3	
17	3	.28977E3	3		3	
18	3		3		4	.47513E3
19	3		4	.51211E3	4	
20	3		4		4	
21	4	.47513E3	4		4	
22	4		4		5	.66604E3
23	4		4			
24	5	.6659E3	5	.65179E3		

Tableau 1

Les modes représentés en (fig p2) correspondent aux valeurs propres calculées à l'aide du SAP90 suivantes: (en  $(\text{rad/s})^2$ )

$$\lambda_1 = 0.14318E3$$

$$\lambda_3 = 0.1933E3$$

$$\lambda_2 = 0.151229E3$$

$$\lambda_4 = 0.23036E3$$

	1 <sup>er</sup> cas	2 <sup>eme</sup> cas	3 <sup>eme</sup> cas
neq	120	140	120
$l_m$	19	19	20
Nres	25	24	22
Mfac	52	48	44
nwords	13875	16295	13911

Tableau 2

\* Notations :

\* neig = nombre de valeurs propres qui ont convergé.

\*  $\lambda_i$  = valeur propre qui a convergé.

\* neq = nombre d'équations.

\*  $l_m$  = longueur moyenne de bande.

\* Nres = nombre de résolutions de  $LDL^t y=x$ .

\* Kfac = nombre de multiplications de M par un vecteur.

\* nalhs = taille de la matrice de rigidité stockée en ligne de ciel.

\* nwords = Longueur totale requise.

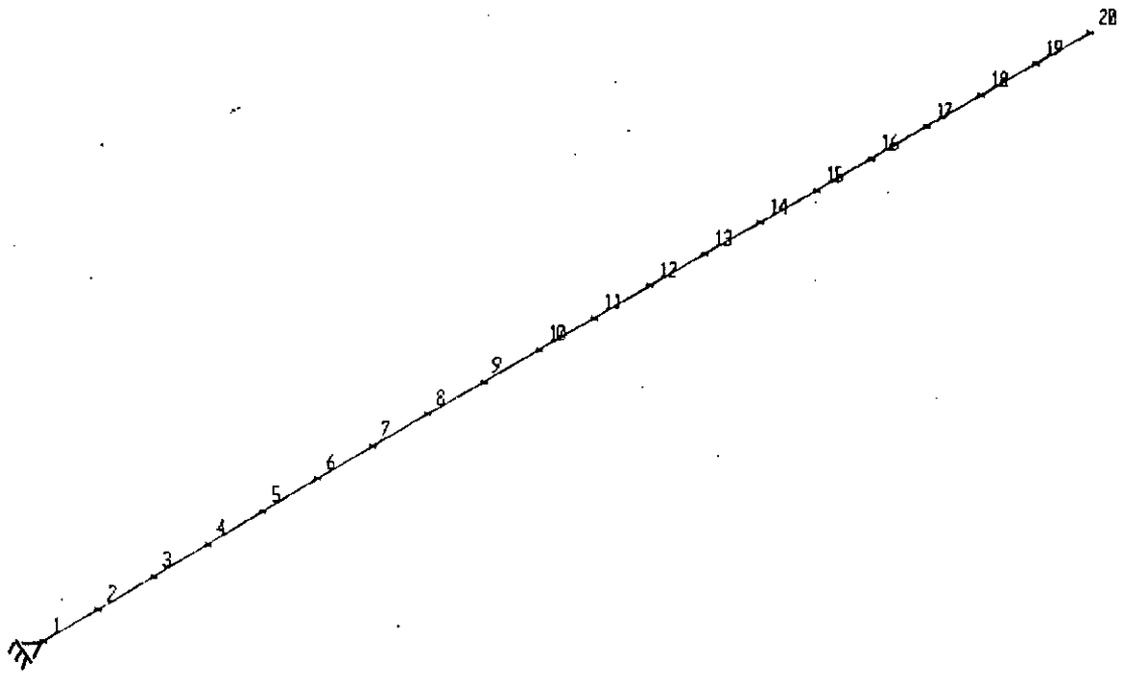
\* Conclusions:

Les tableaux précédents ont été dressés pour voir comment ,pour la meme plaque formulée en membrane ,le comportement de l'algorithme de LANCZOS varie t-il en changeant une fois le nombre d'éléments (raffinant le maillage) ,puis une autre fois en gardant le meme maillage et en changeant la numérotation des éléments.

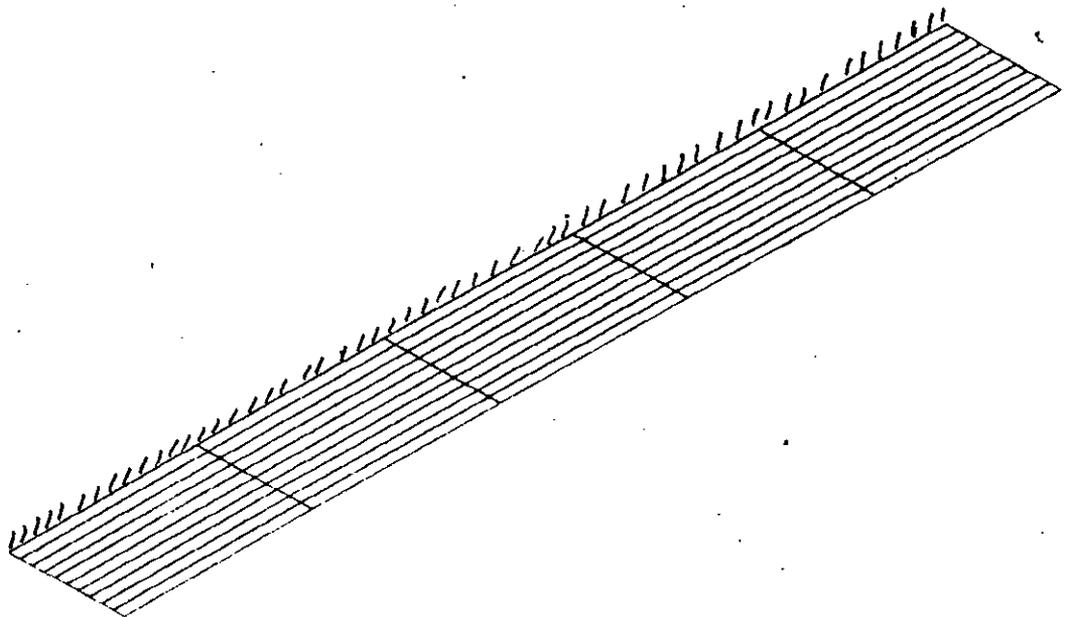
-Dans le troisième cas de maillage ,les valeurs propres sont exactement identiques à celles calculées dans le premier cas vu que la finesse du maillage n'a pas varié donc l'information contenue dans M et dans K aussi. Alors que dans le cas du deuxième maillage où le nombre d'éléments est plus grand ,les valeurs propres sont légèrement différentes de celles calculées dans le premier cas. Cette différence est due à la discrétisation en éléments finis et non pas à l'algorithme de LANCZOS.

-A largeurs de bande égales (19) ,l'algorithme converge plus vite pour le cas de maillage donnant la taille  $n = 140$  que pour le cas où la taille  $n=120$ .

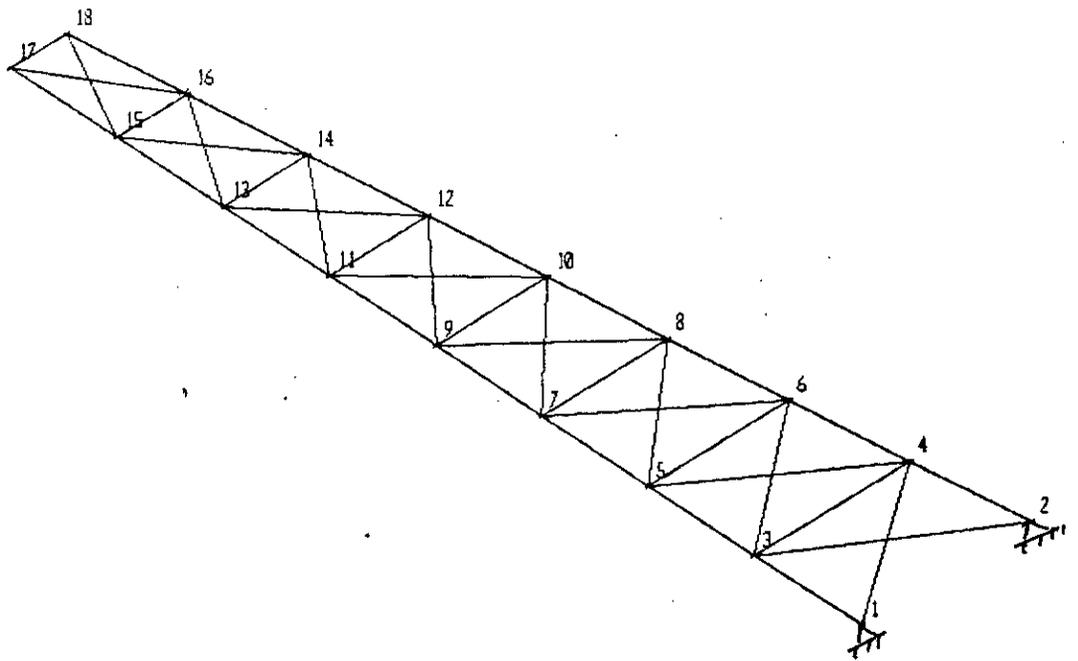
-Par ailleurs ,à tailles de problèmes égales, l'algorithme converge plus vite pour une plus grande largeur de bande pour laquelle la cinquième valeur propre escomptée converge au bout de la 22<sup>ème</sup> itération de Lanczos. Une largeur de bande légèrement plus petite requiert, elle, par contre pas moins de 24 itérations.



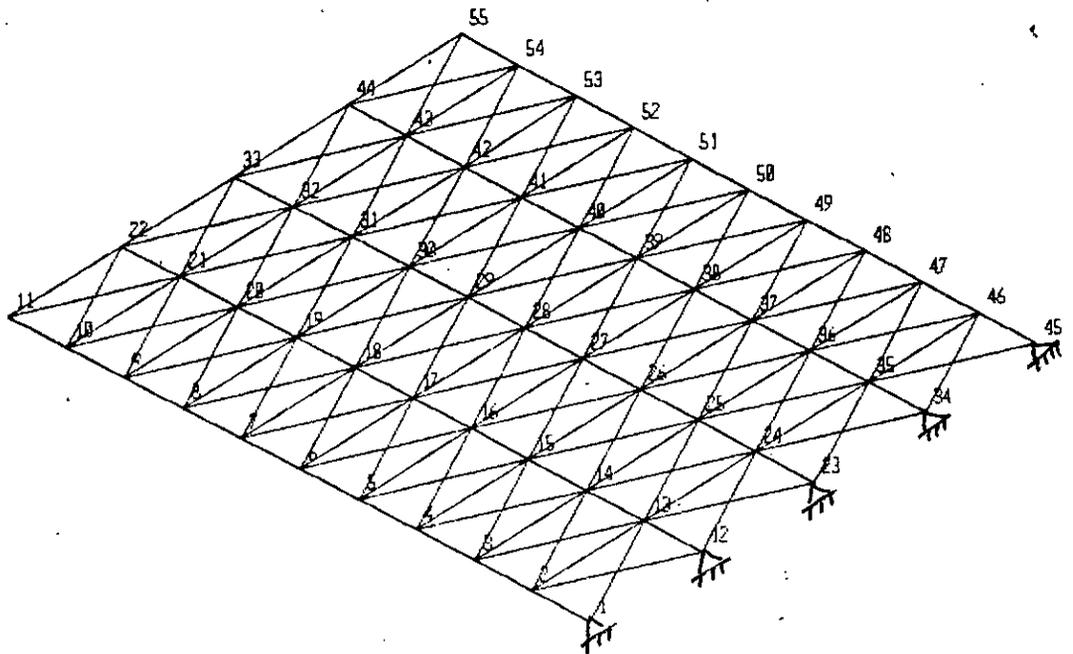
-fig b1-



-fig p1-

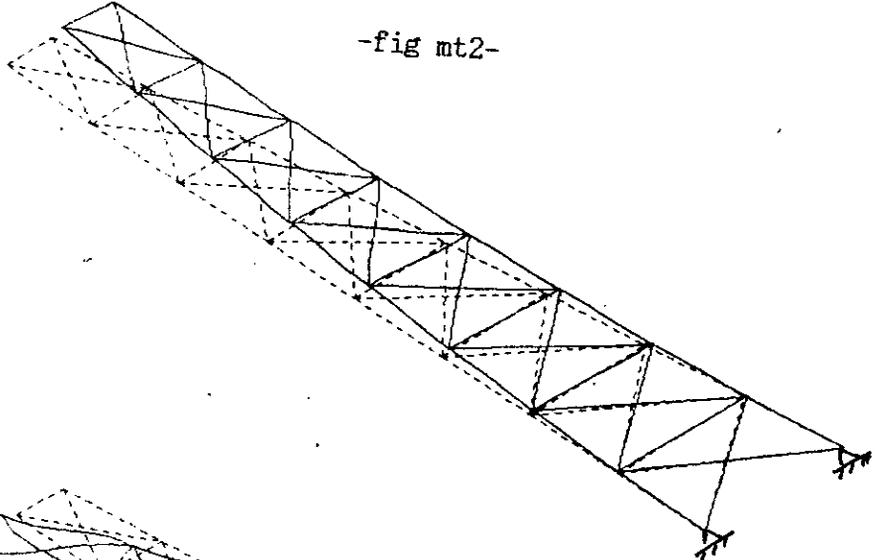


-fig t1-

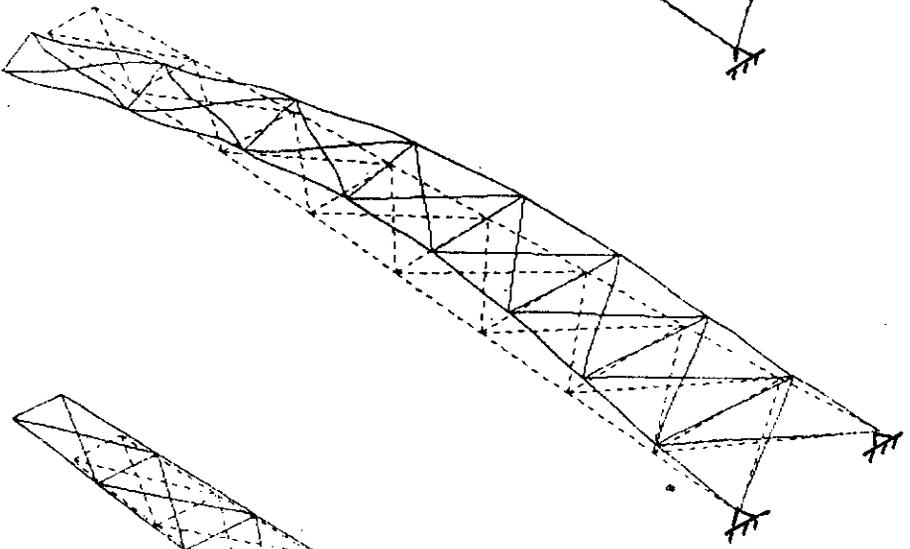


-fig t2-

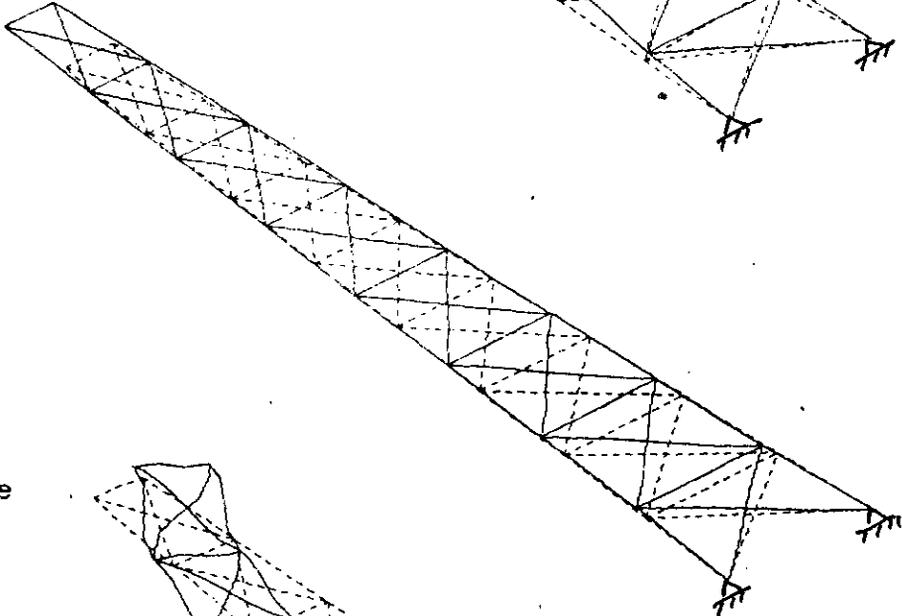
première déformée  
modale



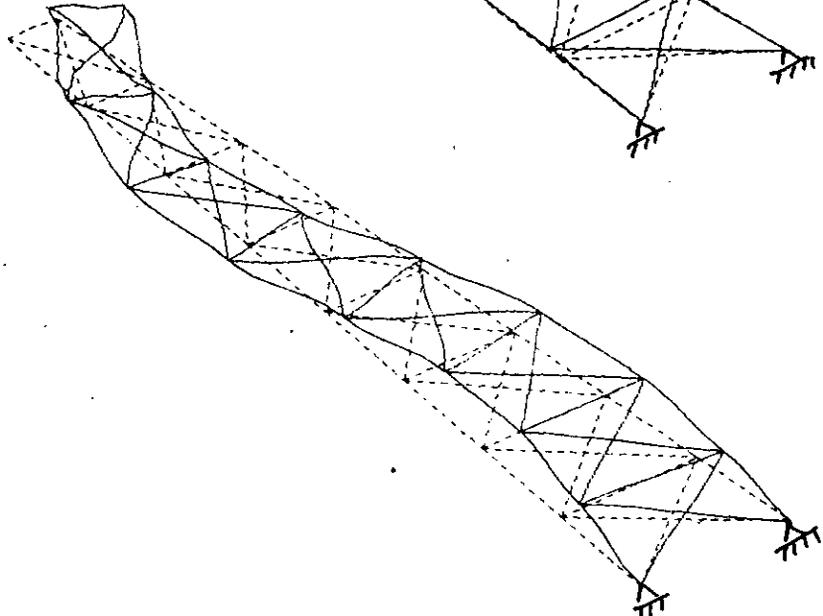
deuxième déformée  
modale



troisième déformée  
modale

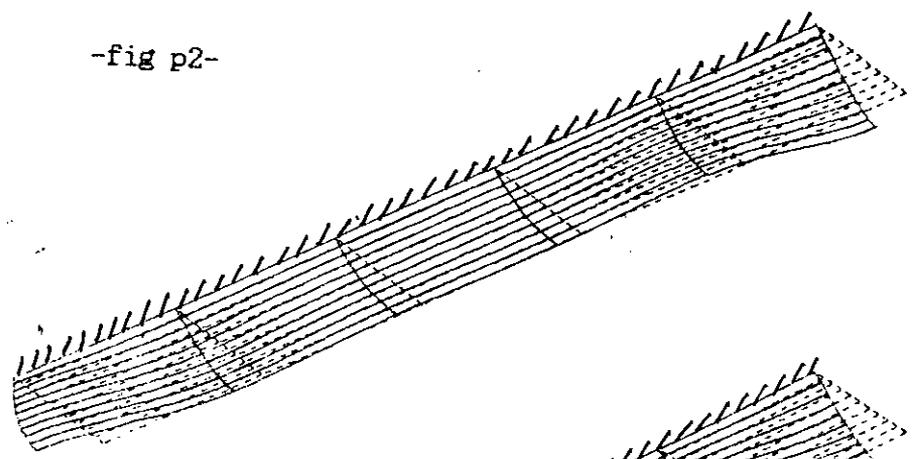


quatrième déformée  
modale

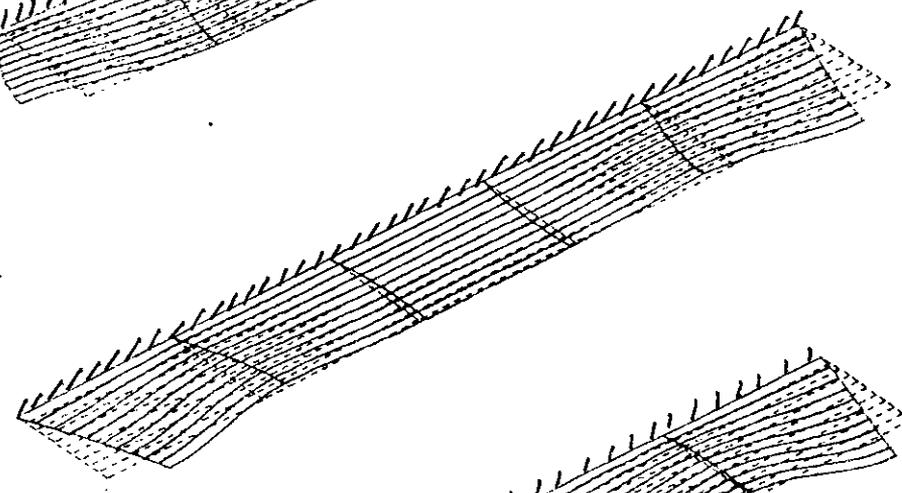


-fig p2-

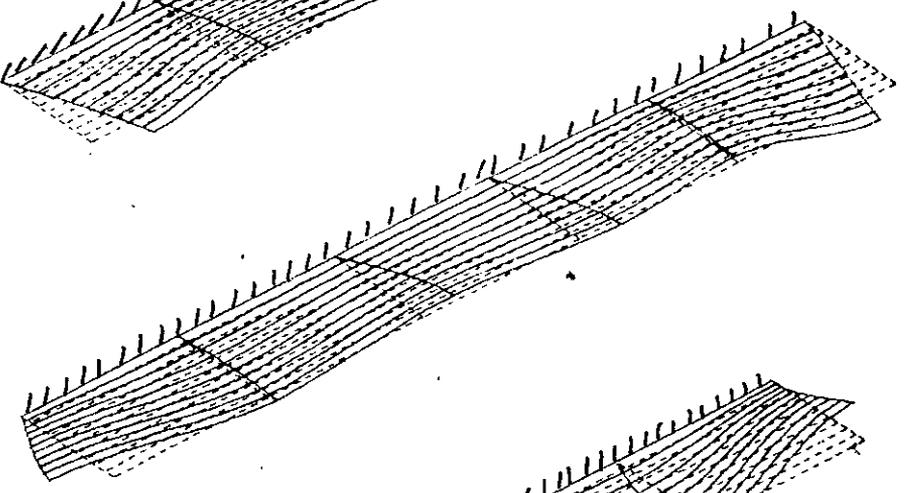
première déformée  
modale



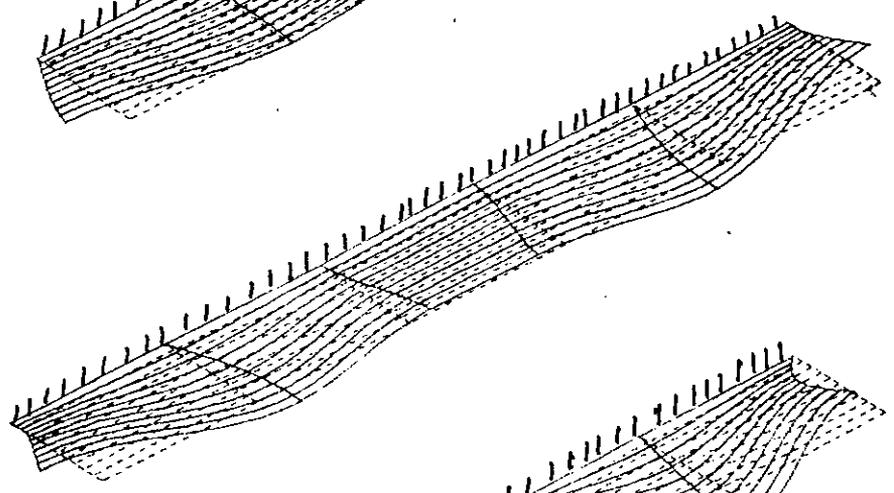
deuxième déformée  
modale



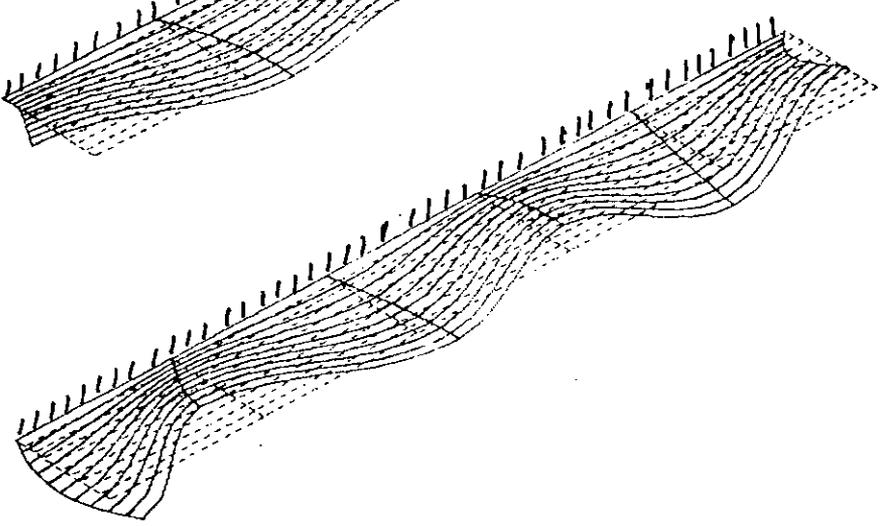
troisième déformée  
modale



quatrième déformée  
modale



cinquième déformée  
modale



DEUXIEME PARTIE  
EFFET DE LA TRONCATURE SUR LA REPONSE  
DYNAMIQUE

Introduction :

L'objet de cette partie est d'examiner les effets implicites de troncature modale sur les déplacements dynamiques. Cette étude sera faite par la méthode de superposition des modes que nous avons inclu dans le DLEARN. Nous rappellerons donc que sa formulation réside essentiellement dans l'idée d'associer une procédure de réduction des équations d'équilibre dynamique avec une technique de résolution d'équations découplées par la méthode de HOUBOLT.

Les premiers modes de vibration sont eux trouvés par la méthode de LANCZOS.

Les réponses obtenues seront par la suite comparées à une réponse obtenue par intégration directe (méthode de HILBER- $\alpha$ ).

Mise en évidence des effets de troncature modale :

Avant de donner les principales observations relatives à nos résultats, il serait intéressant de suivre l'évolution des travaux de recherche dans ce domaine.

L'analyse de l'effet de troncature représente un fait relativement récent. Elle a toujours été axée sur les structures off-shores, les structures en portique ayant été quelque peu délaissées.

En effet la première mise en évidence des effets de troncature remonte à l'année 1975, lorsque MADDOX (au service de la compagnie pétrolière EXXON) a établi à partir de l'étude du comportement dynamique d'une structure off-shore soumise à l'action de la houle.

En 1979 VUGTS, HINES, NATARAJA et SCHUMM établirent alors lors d'une étude comparative entre les solutions obtenues par intégration directe avec celles de l'analyse modale ; que les réponses présentaient en effet des différences notables. La deuxième méthode pouvait même mener à des erreurs substantielles sur l'évaluation des efforts dynamiques dans plusieurs éléments, malgré l'inclusion des 50 premiers modes (ref T).

Critères d'analyse :

Nous avons choisi deux exemples pour l'étude de cette partie:

PREMIER EXEMPLE : Une barre cantilever ,à 20 noeuds ,19 éléments

\* Pour la méthode d'intégration directe :

$$\Delta t = E-6 \text{ s.} \quad \alpha = -0.1 \quad \beta = 0.3025 \quad \gamma = 0.6$$

\* Pour la superposition modale:

$$\text{Nombre de modes} = 4$$

Nous avons établi 4 courbes ,dans chacune il ya la réponse par les deux méthodes .Celle en traits continus correspondant au mode approprié.(voir fig tr1 et fig tr2 ).

DEUXIEME EXEMPLE : Un treillis (fig t2 (1<sup>ere</sup> partie))

à 50 noeuds,170 éléments:

\* Pour la méthode d'intégration directe :

$$\Delta t = 3E-3 \text{ s} \quad \alpha = -0.1 \quad \beta = 0.325 \quad \gamma = 0.6$$

\* Pour la superposition modale :

$$\text{Nombre de modes} = 4$$

Comme pour le premier exemple nous établirons 4 courbes.(voir fig tr3)

Résultats et observations :

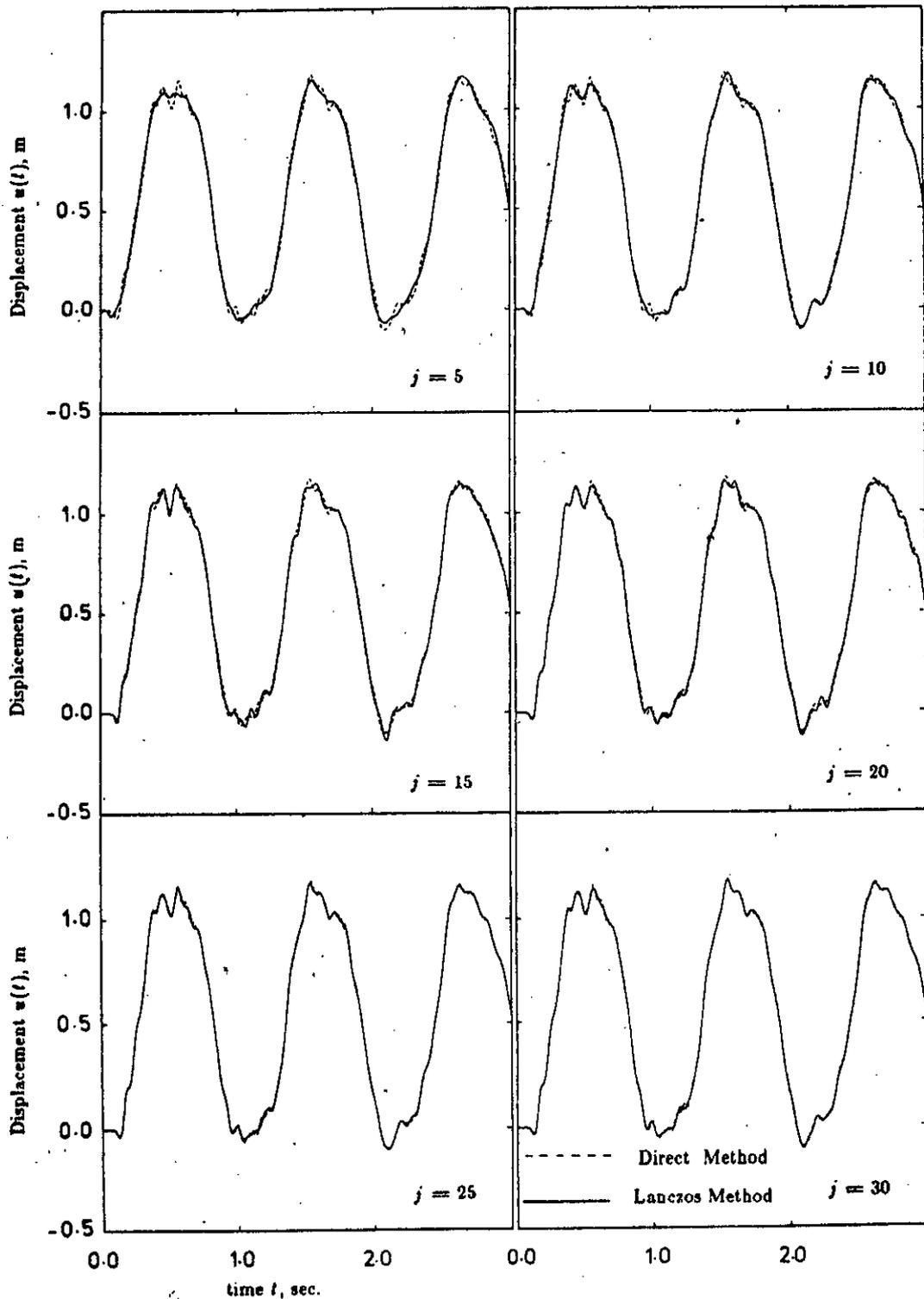
1/ Pour l'exemple de la barre nous avons choisi de chercher la réponse en deux noeuds différents .Le premier étant proche de l'excitation (noeud 20,voir fig b-1)et l'autre assez loin (noeud 2,voir fig b-1).Il nous apparait clairement que dans le deuxième cas l'effet de l'excitation ne commence à apparaitre qu'à partir de  $t=0.015E-2 \text{ s}$ ,la vibration ne suivant pas du tout la forme de l'excitation.Le noeud 20 par contre qui est le noeud où l'excitation est produite,répond de la façon que l'on aurait pu prédire.

2/ L'effet de la troncature lui est parfaitement visible sur les trois figures ,l'augmentation des modes entrainant une meilleure approche de la réponse directe.Seulement étant limités par le nombre d'étapes dans la méthode de LANCZOS nous ne pouvions avoir un nombre plus grand de modes.

3/ Toute étude comparative nécessite une référence aussi nous prendrons comme telle la réponse directe .En effet si erreur il y a dans une réponse directe ceci est principalement du à un mauvais choix de l'incrément de temps.Tandis que dans le cas de la superposition des modes cela serait du essentiellement à un mauvais choix du nombre  $p$  de modes propres.Ayant assuré le choix de l'incrément de temps dans la première méthode grace aux critères de stabilité ,la consistance de la méthode de HILBER- $\alpha$  est prouvée par le choix de différents exemples et l'obtention dans chaque cas de l'approche des deux réponses en augmentant le nombre de modes .

4/ Nous ferons enfin une dernière remarque quant au choix du deuxième exemple du treillis .Connaissant la forme de la réponse à une excitation  $f(t)$  en palier (voir ref T) , la comparaison nous a été simplifiée.

L'article A2 étant la base du choix de l'exemple t2, la réponse pour une excitation en palier et avec un nombre de vecteurs de LANCZOS variable est donnée sur la figure suivante.



Comparison of the computed response obtained using different number of Lanczos vectors and direct integration

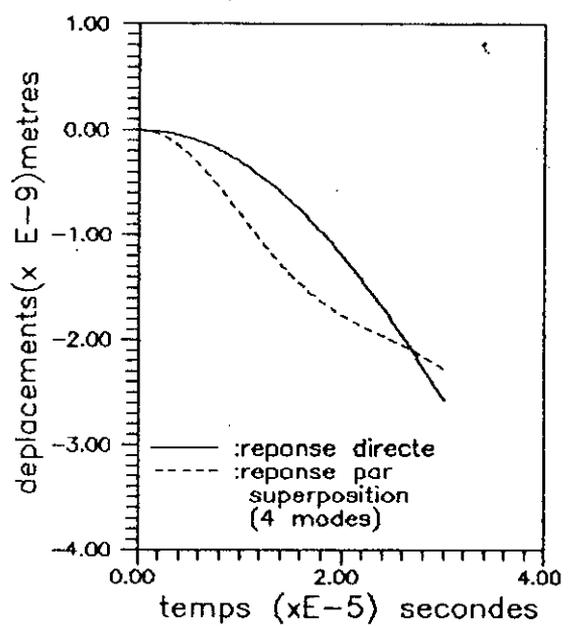
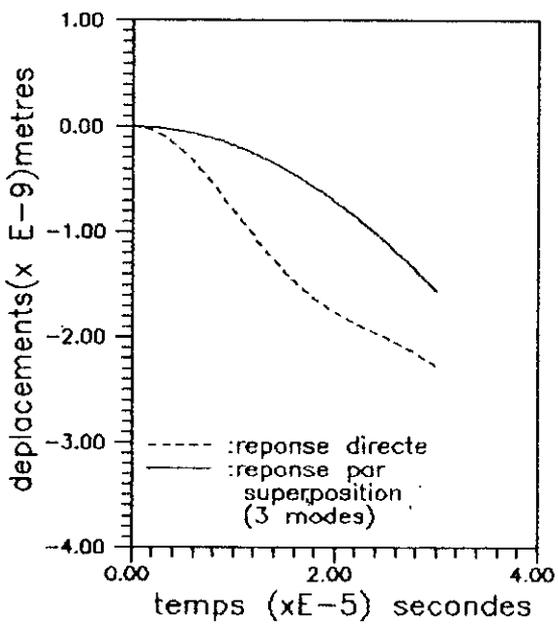
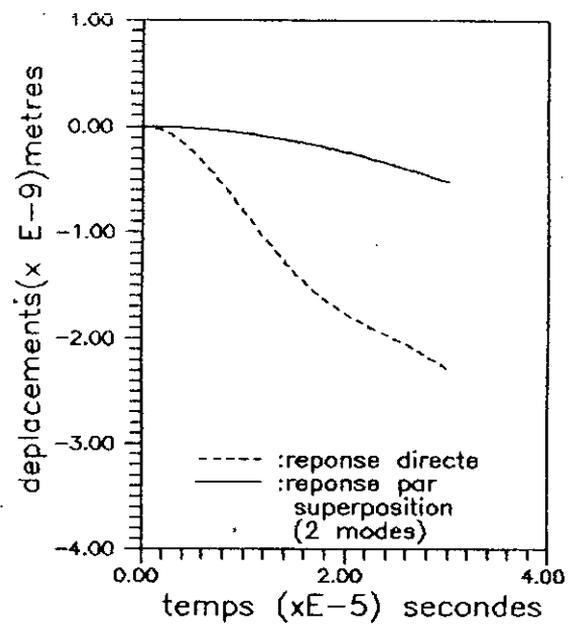
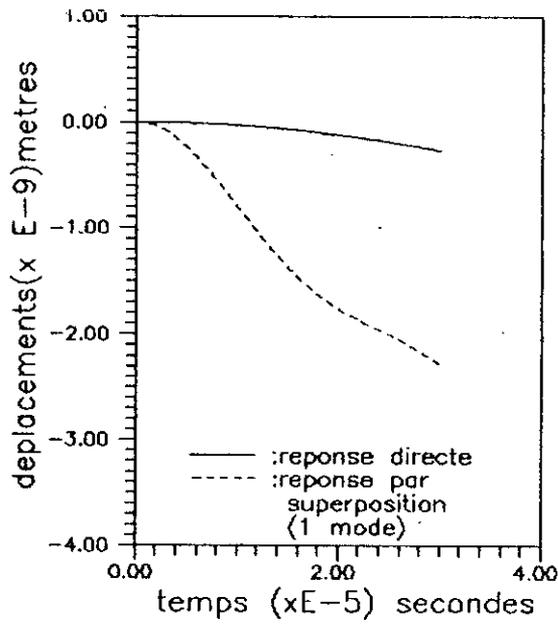


fig tr1

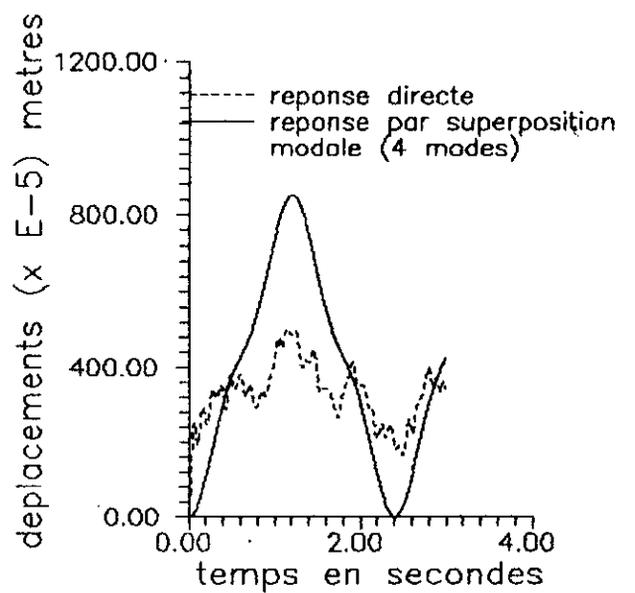
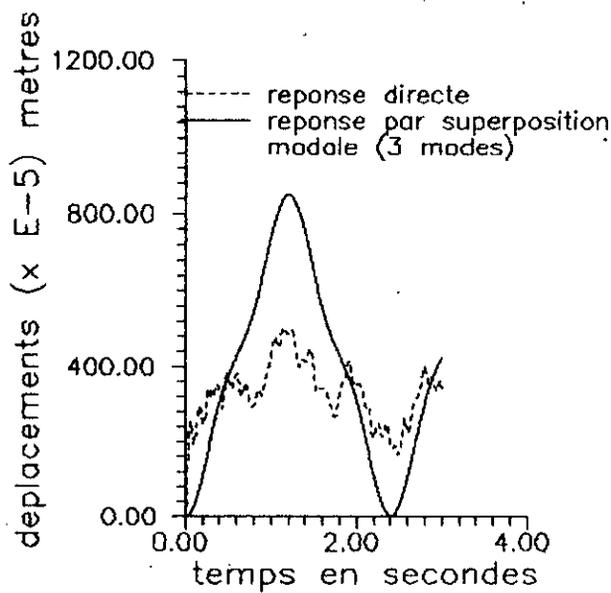
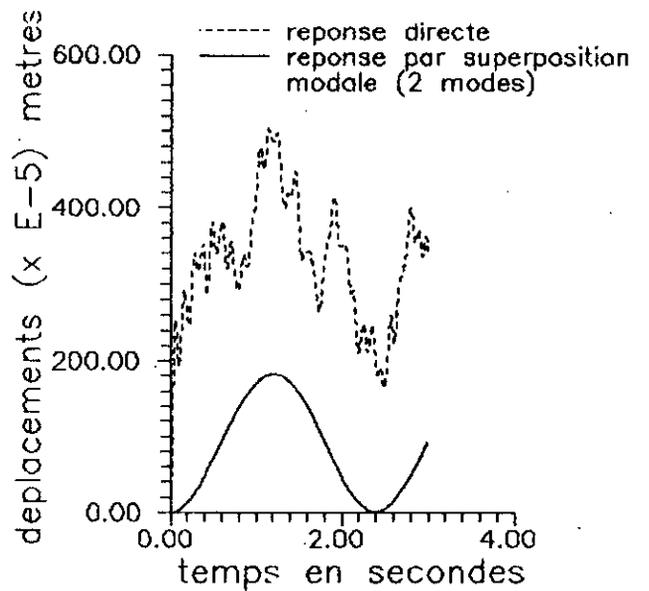
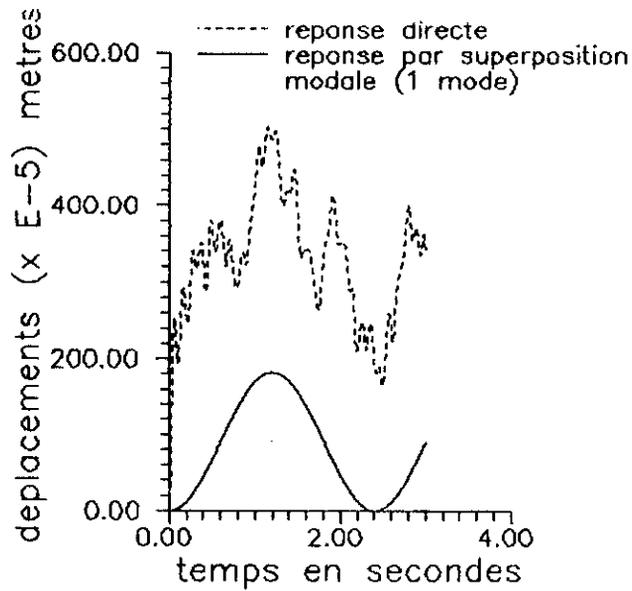


fig tr3

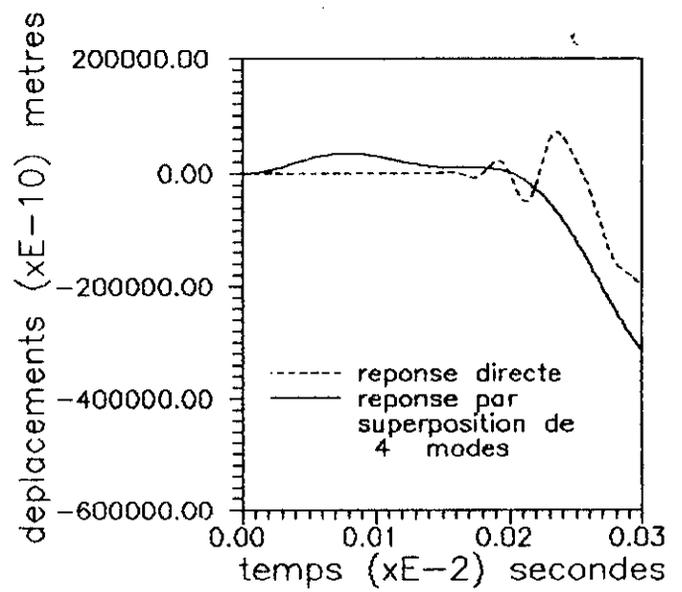
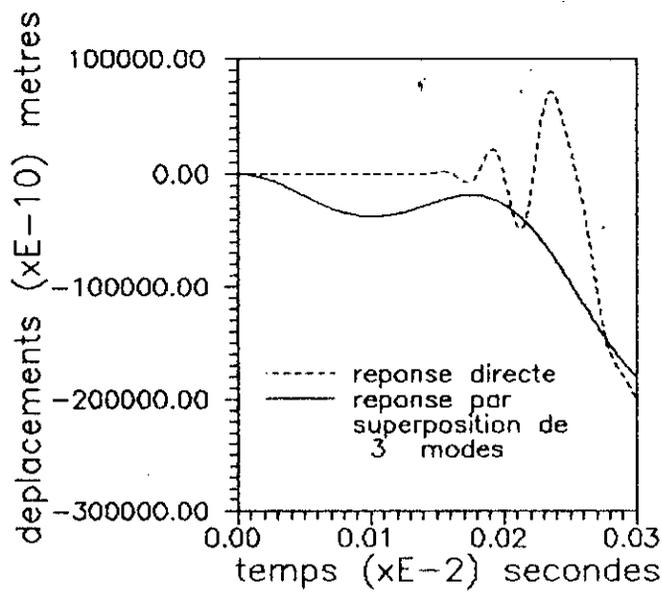
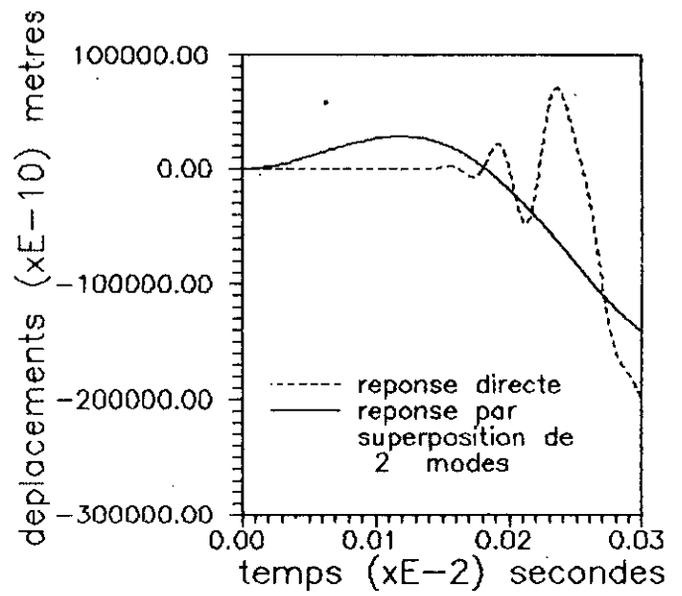
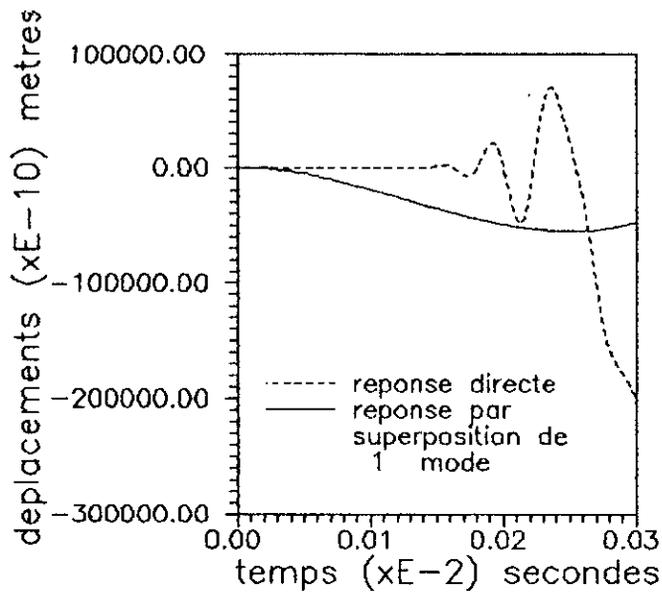


fig tr2

TROISIEME PARTIE  
INFLUENCE DU NOMBRE D'ETAPES D'INTEGRATION

La figure (E-1) donne la variation du temps d'exécution en fonction du nombre d'étapes d'intégration pour les deux cas de méthodes étudiées ; à savoir le cas d'intégration directe utilisant la méthode  $\alpha$  et le cas de superposition modale avec 4 modes et utilisant la méthode de Houbolt.

L'application a été faite pour la barre à 20 noeuds présentée ultérieurement et dont la taille du problème est 19. Le temps d'exécution dans le cas d'intégration directe varie beaucoup plus rapidement que dans le cas de la superposition modale ; et ce en fonction du nombre d'étapes d'intégration (ou du temps de réponse à un incrément de temps égal).

Hormis l'investissement en temps nécessaire pour la résolution du problème propre (4 modes dans ce cas), et valant à peu près 29 s ; la méthode de superposition nécessite un effort peu important, ce qui était prévisible par essence même de la méthode.

Ceci n'est pas le cas pour la méthode d'intégration directe qui requiert un effort de calcul plus important surtout dans le cas de réponse sur un long intervalle. Néanmoins elle se rapproche de la méthode précédente dans le cas de faibles intervalles de temps de réponse.

Trois remarques très importantes peuvent être soulignées :

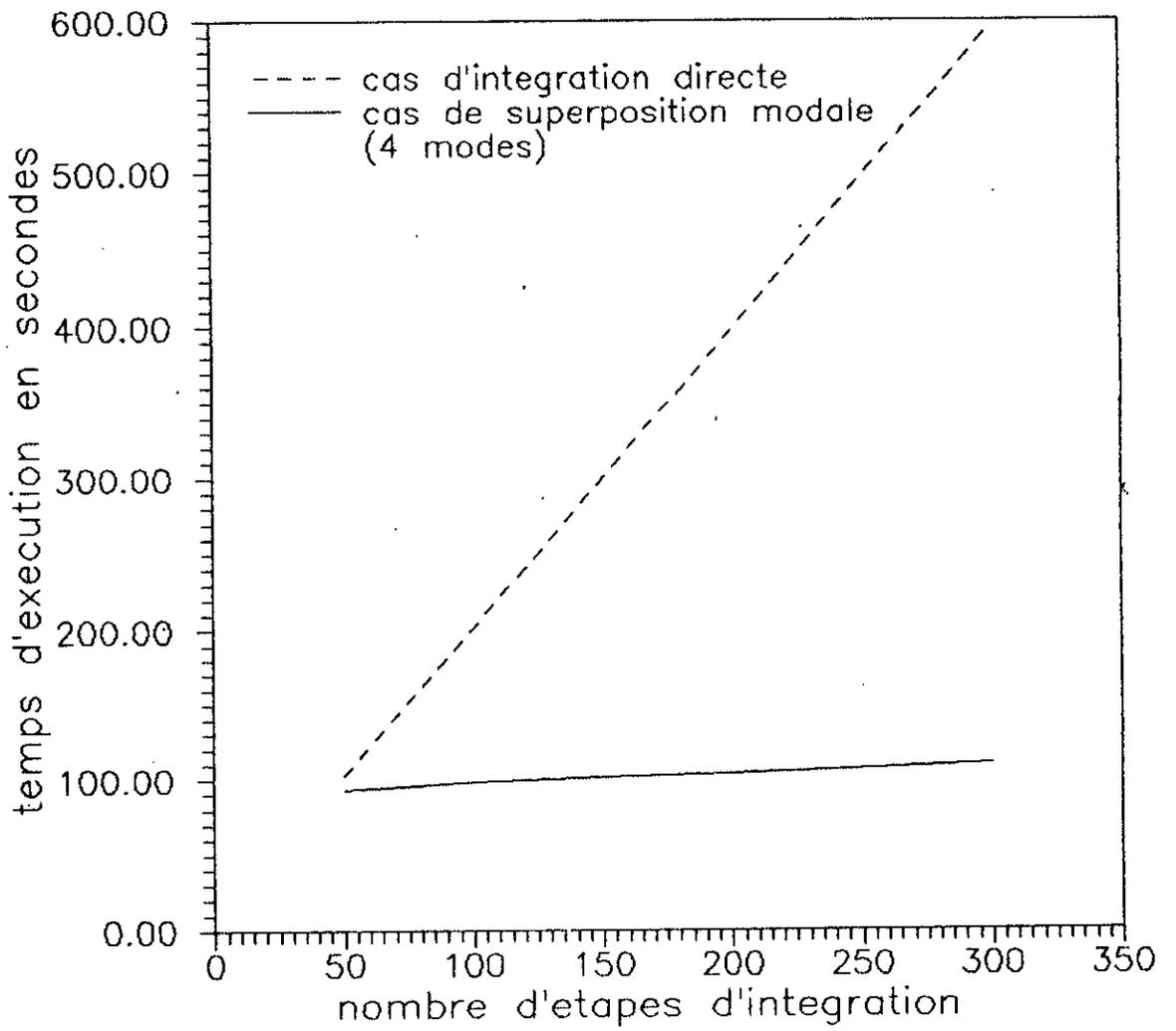
1/ Pour des temps de réponse très importants, la méthode d'intégration directe s'avère être totalement inefficace par rapport à la méthode de superposition modale, et ce du point de vue coût de calcul. Mais du point de vue précision, on a certainement de meilleurs résultats avec la méthode directe, laquelle tient compte implicitement de tous les modes structuraux.

2/ Pour des problèmes de grande taille, l'allure du graphe (temps d'exécution - nombre d'étapes d'intégration), se garde avec une translation vers le haut, ce qui accentue nettement la remarque précédente.

3/ Quelque soit la taille du problème dynamique il existe une marge du nombre d'étapes où les performances des deux méthodes sont comparables en temps d'exécution (entre 50 et 100 étapes dans le cas présent) ,et là le choix de la méthode s'impose .Alors qu'à partir d'une certaine limite le choix d'une méthode par rapport à une autre doit tenir compte d'un certain nombre de paramètres dont surtout la sécurité de la structure et le côté financier s'y rattachent .

Donc une prise en compte effective passe par les cas de simulation où la précision prévaut pour des considérations de sécurité dans le domaine nucléaire et aéronautique par exemple ;on est tenu de mettre le prix en optant pour une méthode directe si la taille du problème n'est pas excessivement grande sinon pour la méthode de superposition modale  $n$  avec un nombre de modes assez important .Alors que pour une simulation destinée à une construction courante ,la méthode de superposition modale reste satisfaisante dans beaucoup de cas.

fig (E-1)



QUATRIEME PARTIE  
 ETUDE DE LA STABILITE DES METHODES DIRECTES

I- Illustration de 2 cas conditionnellement stables de la méthode HILBER- $\alpha$  :

Nous nous intéresserons à la barre cantilever de la première partie à laquelle est appliqué un chargement en palier au noeud 20 et longitudinalement.

La résolution de l'équation du mouvement se fera d'abord avec la méthode de HILBER- $\alpha$  puis avec la méthode de NEWMARK ,pour deux cas de  $\delta$  et  $\gamma$ .

La partie théorique de ce présent document indique que la stabilité inconditionnelle de la méthode HILBER- $\alpha$  était retenue pour :

$$\alpha \in \left[ -1/3 , 0 \right]$$

$$\delta = (1-2\alpha)/2$$

$$\gamma = (1-\alpha)^2 /4$$

or  
 \* 1 cas :

Les figures (S-1-a)et (S-1-b) représentent la réponse donnée pour  $\alpha =0.2$  , $\gamma=0.3$  et  $\delta =0.4$  .Ces valeurs correspondent à à un schéma conditionnellement stable,ce qui est confirmé ,vu que pour un  $\Delta t =E-6$  s la réponse est d'un ordre logique alors qu'en augmentant  $\Delta t$  à E-4 s ,la réponse devient instable et atteint des ordres faramineux.

Il est à remarquer que dans la figure (S-1-a) l'axe des temps n'a atteint que  $3E-4$  s alors que dans la figure (S-1-b) il va jusqu'à  $3E-2$ .Il pourrait venir à l'esprit du lecteur que les deux figures ne remplissent pas toutes les conditions de comparabilité, mais en fait il n'en ait rien du moment que le nombre d'étapes est identique et que c'est seulement le nombre exécuté qui peut trancher quant à la stabilité d'un schéma.

\* 2<sup>ème</sup> cas :

Les figure (S-1-c) et (S-1-d) représentent (toujours avec la méthode de HILBER- $\alpha$  la réponse à l'excitation en palier d'amplitude 500 kN.

Les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  sont:

$$\alpha = 0.2 \in [-1/3, 0]$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = 0.3025 \\ \delta = 0.6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ne vérifiant pas les conditions de stabilité} \\ \text{inconditionnelle.} \end{array}$$

Ces figures viennent appuyer le critère du choix de l'incrément de temps par rapport à une valeur critique et illustrent d'une manière probante la stabilité conditionnelle du schéma. En effet en prenant  $\Delta t = E-6$  s, la réponse est d'un ordre normal, mais pour  $\Delta t = E-4$  s, la réponse atteint des ordres qui ne peuvent être ceux de la réponse escomptée.

## II- Illustration de deux cas conditionnellement stables de la méthode de NEWMARK :

On a vu lors de la présentation de la méthode HILBER- $\alpha$  que  $\alpha=0.0$  correspond à la méthode de NEWMARK. D'après DHATT et TOUZOT, une condition de stabilité inconditionnelle serait vérifiée pour:

$$\delta \geq 1/2$$

$$\text{et } \gamma \geq \frac{1}{2} \left( \delta + \frac{1}{2} \right)^2$$

Les figures (S-2-a) et (S-2-b) montrent la réponse calculée avec  $\gamma = 0.6$  et  $\delta = 0.3$  correspondant à un schéma conditionnellement stable. Ceci est vérifiable du fait de l'instabilité de la réponse pour l'incrément de temps  $\Delta t = E-4$  s (fig(2-b)), largement supérieur à celui nous fournissant une réponse satisfaisante (fig(2-a),  $\Delta t = E-6$  s).

Les figures (S-2-c) et (S-2-d) représentent cette fois-ci la réponse pour  $\delta=0.0$  et  $\gamma=0.5$ . Le fait d'avoir encore diminué  $\delta$  par rapport à 1/2, donne toujours une réponse satisfaisante pour  $\Delta t=E-6$  s. Mais pour  $\Delta t=E-4$  s l'instabilité est nettement plus accentuée que pour la figure (S-2-b). Cela voudrait dire du point de vue analytique, que le rayon spectral de la matrice d'amplification A est nettement plus grand dans le cas où ( $\alpha=0.0, \gamma=0.5, \delta=0.0$  et  $\Delta t=E-4$  s) que celui dans le cas où ( $\alpha=0.0, \gamma=0.6$  et  $\delta=0.3$  et  $\Delta t=E-4$  s).

### III- Illustration de l'inconditionabilité de la stabilité de la méthode de HOUBOLT :

Nous avons étudié en chapitre II que la méthode de HOUBOLT est inconditionnellement stable, chose pour laquelle d'ailleurs nous avons choisi cet algorithme dans la résolution des p équations découplées après superposition des modes. (fig S-3)

Nous avons élargi l'intervalle de temps à 3s pour mieux juger de la stabilité du schéma.

Les incréments choisis sont  $\Delta t = \frac{T}{10}$  (condition de stabilité de tous les schémas implicites en général), puis deux incréments l'un inférieur et l'autre supérieure à cette valeur (respectivement  $\frac{T}{100}$  et 0.1 s.

Avec  $T = 0.025$  s.

#### *Remarques :*

Cette partie a été introduite, car lors de l'exécution de notre programme ; nous avons très souvent rencontré ces problèmes, ne maîtrisant pas au début les problèmes des algorithmes.

Dans la recherche de la réponse dynamique d'une structure, par des méthodes directes ; il est clair que si erreur il ya, la cause première réside dans le mauvais choix de l'incrément de temps.

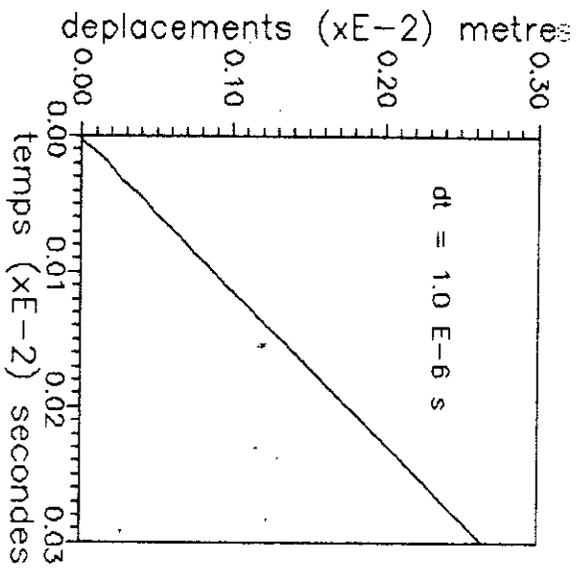


Fig (S-1-a)

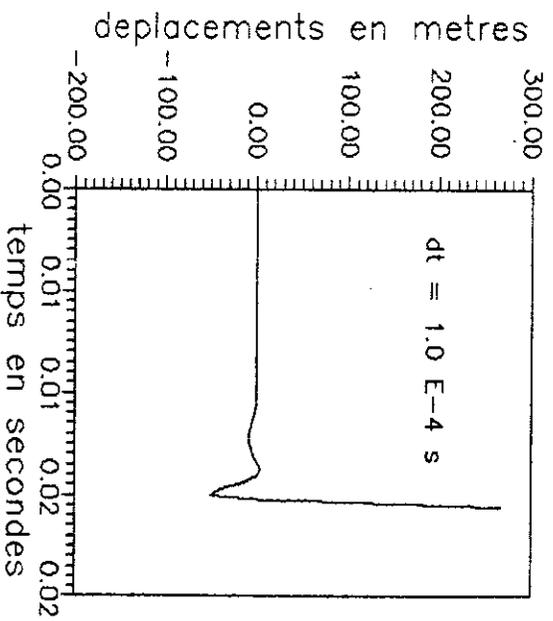


Fig (S-1-b)

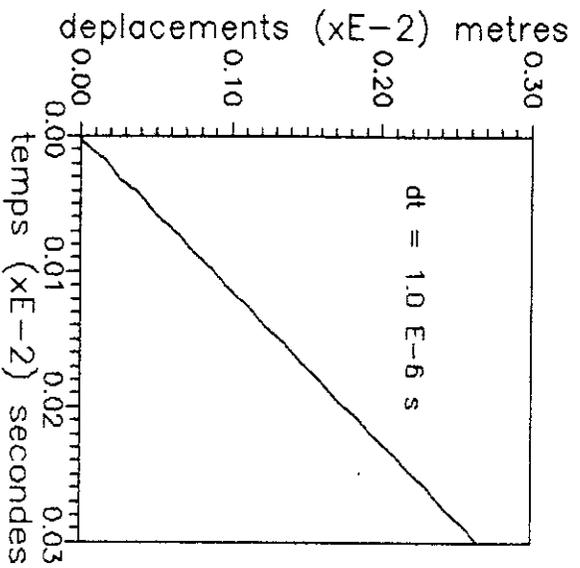


Fig (S-1-c)

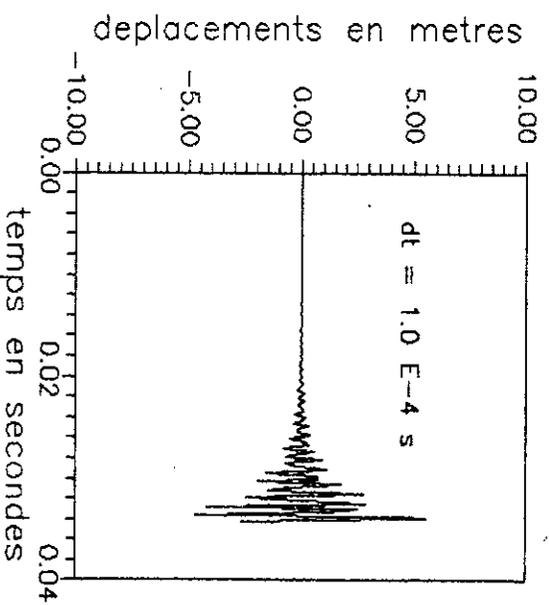


Fig (S-1-d)

fig (S-2-a)

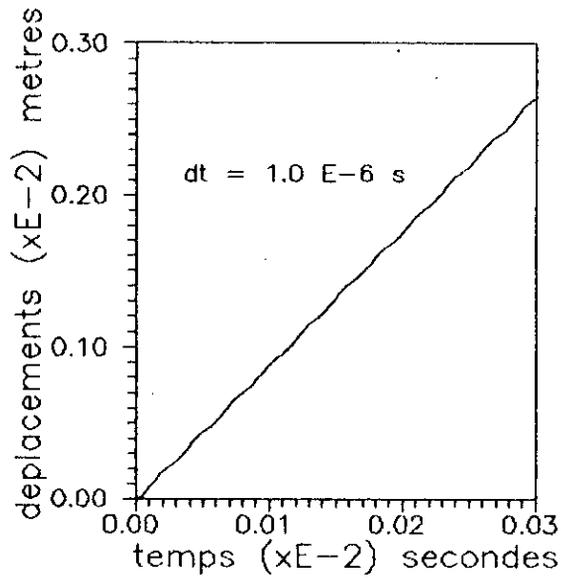


fig (S-2-b)

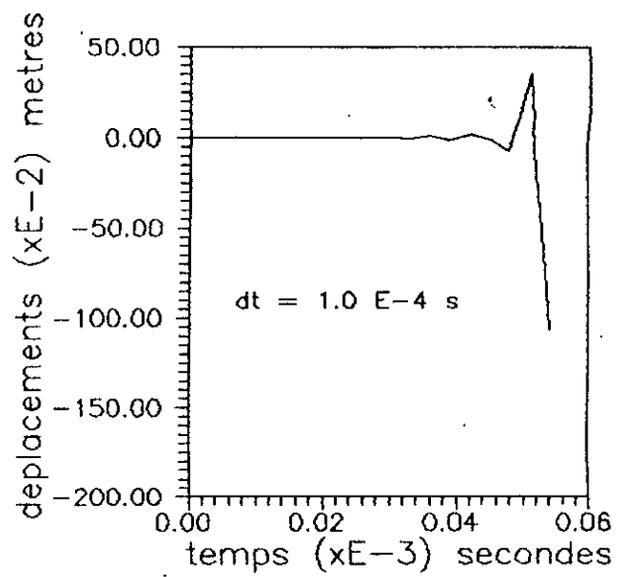
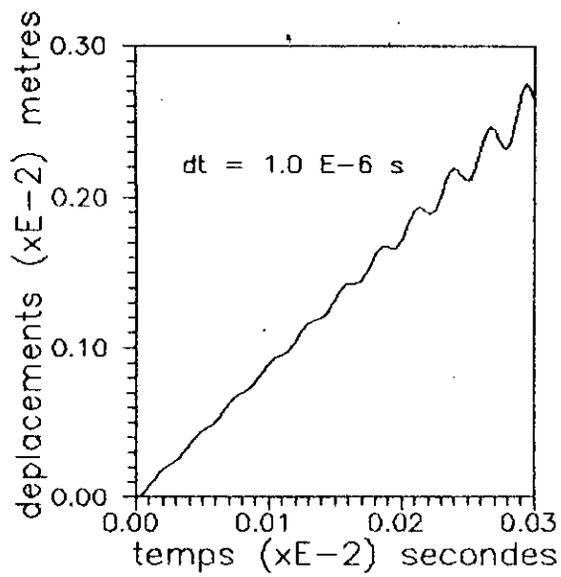
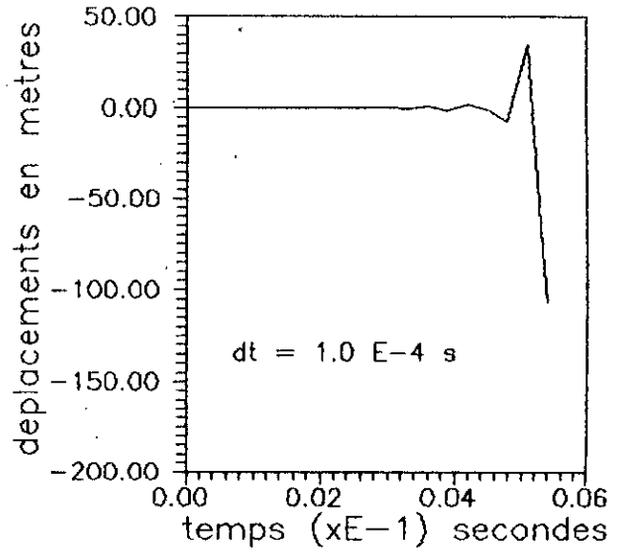
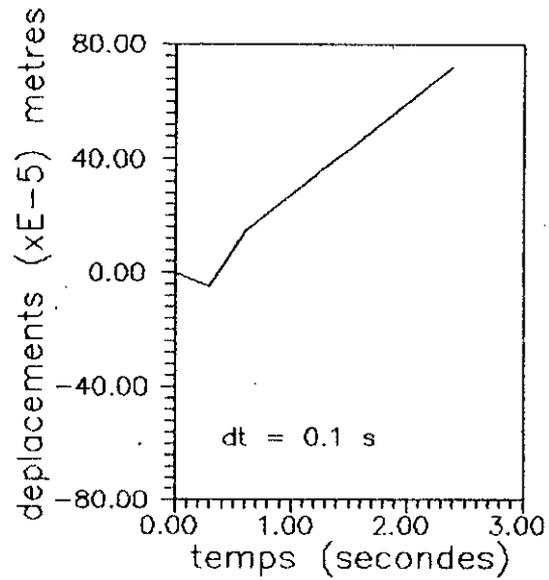
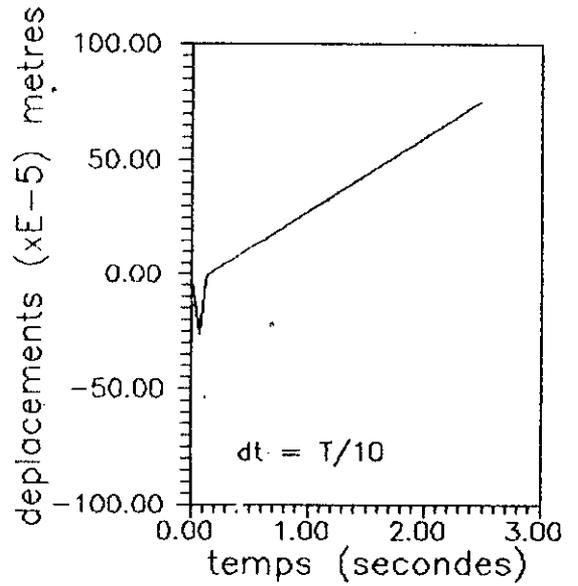
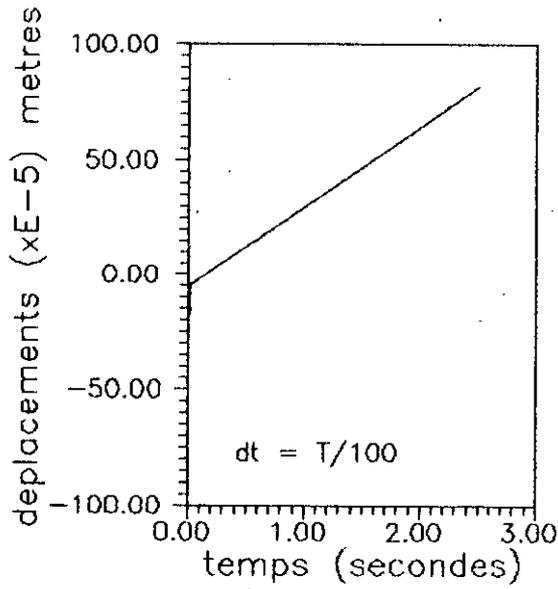


fig (S-2-c)

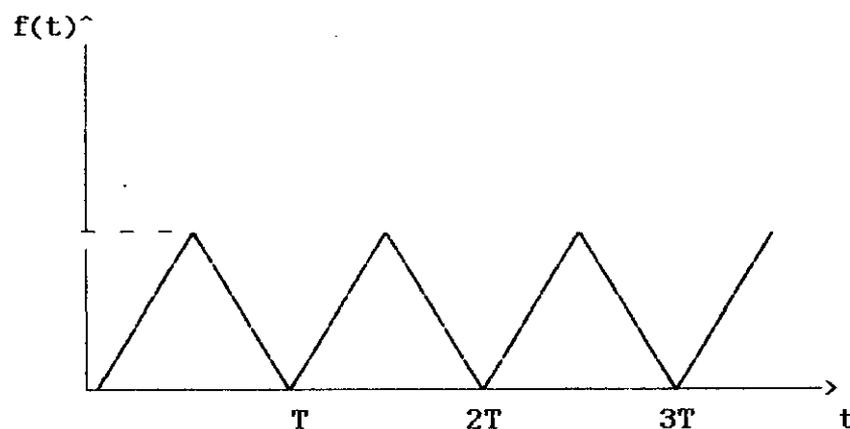
fig (S-2-d)

fig ( S-3 )



CINQUIEME PARTIE  
MISE EN EVIDENCE DU PHENOMENE DE RESONNANCE

Pour cette partie l'exemple choisi est celui du treillis de la première partie (fig t1), pour lequel on a excité certains noeuds avec une fonction modulatrice de la forme :



Où T est la période de résonance correspondant à la plus petite fréquence propre:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$$

Comme d'après les séries de FOURIER, toute fonction continue et périodique peut se décomposer en une somme de fonctions harmoniques, c'est à dire:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

En particulier pour n=1, l'excitation harmonique :  $a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t$  est une excitation de résonance pour la structure considérée.

Dans notre cas  $\omega_1 = 118.43 \text{ rad/s}$ ,  $T = 0.05305 \text{ s}$

et  $f(T/2) = E - 2 \text{ N}$

Il était important de mettre en évidence ce phénomène qui est le souci premier de tout structuriste. La réponse selon  $x$  du noeud 17 est représentée sur la figure (R-1) pour deux cas d'amortissement:

Nous savons que l'étude du phénomène de résonance passe par le tracé du facteur d'amplification qui sera maximum lorsque la fréquence d'excitation est proche de la fréquence propre de la structure. Grâce à des résultats pratiques, la valeur du facteur d'amplification étant fixée (ref C1), la solution s'écrira :

$$u(t) = \frac{1}{2\xi} F_0 [e^{-\omega t} - 1] \cos \omega t \quad \text{pour } \xi \ll 1 \quad \dots(B)$$

$$u(t) = \frac{1}{2} F_0 [\sin \omega t - \omega t \cos \omega t] \quad \text{pour } \xi = 0 \quad \dots(A)$$

Avec  $F_0$  : simple coefficient.

1/ En prenant, un amortissement nul, on remarque que l'amplitude augmente indéfiniment. (Ceci correspond à l'équation A)

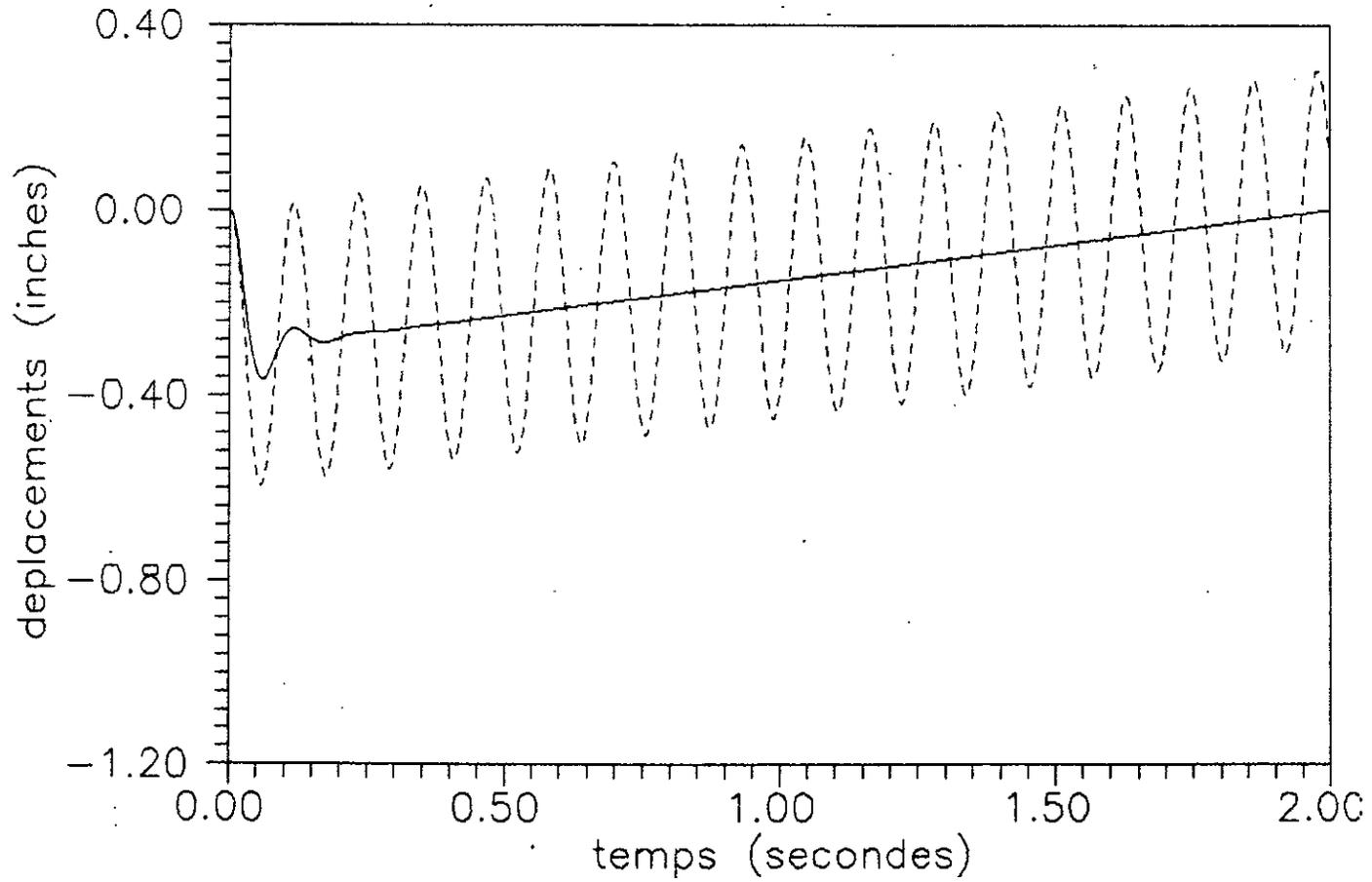
2/ En prenant les coefficients de RAYLEIGH

Matériau 1 $\alpha = 3E-2$ $\beta = E-2$	Matériau 2 $\alpha = 9E-2$ $\beta = 4E-2$
---	--

On voit que la vibration du noeud 17 est super amorti, de façon à ce que son déplacement se rapproche du zéro d'une manière presque linéaire par rapport au temps. (Ceci correspond à l'équation B).

fig (R-1)

Reponse a une excitation de resonance  
- - - : sans amortissement  
- - - - : avec amortissement



<p>SIXIEME PARTIE</p> <p>EFFET DE L'AMORTISSEMENT NUMERIQUE</p>
---

Dans cette partie ,on s'intéresse aux deux phénomènes décrivant le degré d'exactitude des schémas d'intégration étape par étape ,à savoir les phénomènes de dissipation et de dispersion. Pour cela ,on a repris l'exemple du treillis (fig t-2) dont la période fondamentale est de l'ordre de 3s et avec la même excitation appliquée au noeud 48 dans la direction des x,et l'on s'intéresse à la réponse du noeud 55 dans la même direction.On a calculé la réponse par la méthode de HOUBOLT via la superposition modale avec 3 modes .La figure (A-1) contenant deux graphes ,l'un correspondant à un incrément de temps de 0.015 s et l'autre à 0.15 s (soit respectivement à 1/200 et à 1/20 de la période fondamentale de la structure).

Phénomène de dissipation :

Les deux cas d'incrémentation illustrent comment la dissipation algorithmique induisant un amortissement purement numérique croit quand  $\Delta t/T$  est proche de 0.1, faisant passer l'amplitude d'oscillation de 0.03 m au début de la réponse à 0.02 m au bout de 10 oscillations pour  $\Delta t/T = 1/20$ .

La diminution d'amplitude vaut alors :

$$D-A = E-3 \text{ m}$$

et la valeur de  $\xi$  sera alors donnée ,d'après la formule du §

6-c(chapII), par :

$$\xi = \frac{D-A}{2\pi} = 1.5 E-3$$

Phénomène de dispersion :

$$\frac{\bar{T} - T}{T} = 0.05$$

Les valeurs de  $\xi$  et de  $\frac{\bar{T} - T}{T}$  sont comparables à celles données sur la figure 3 du chapitre II.

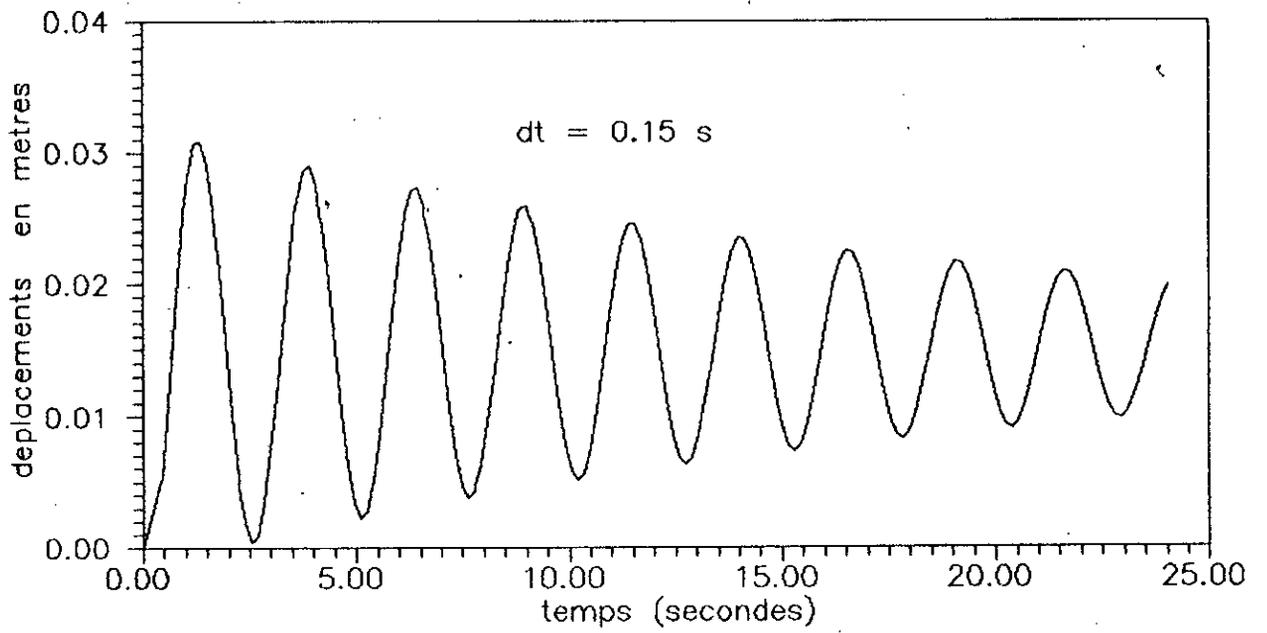
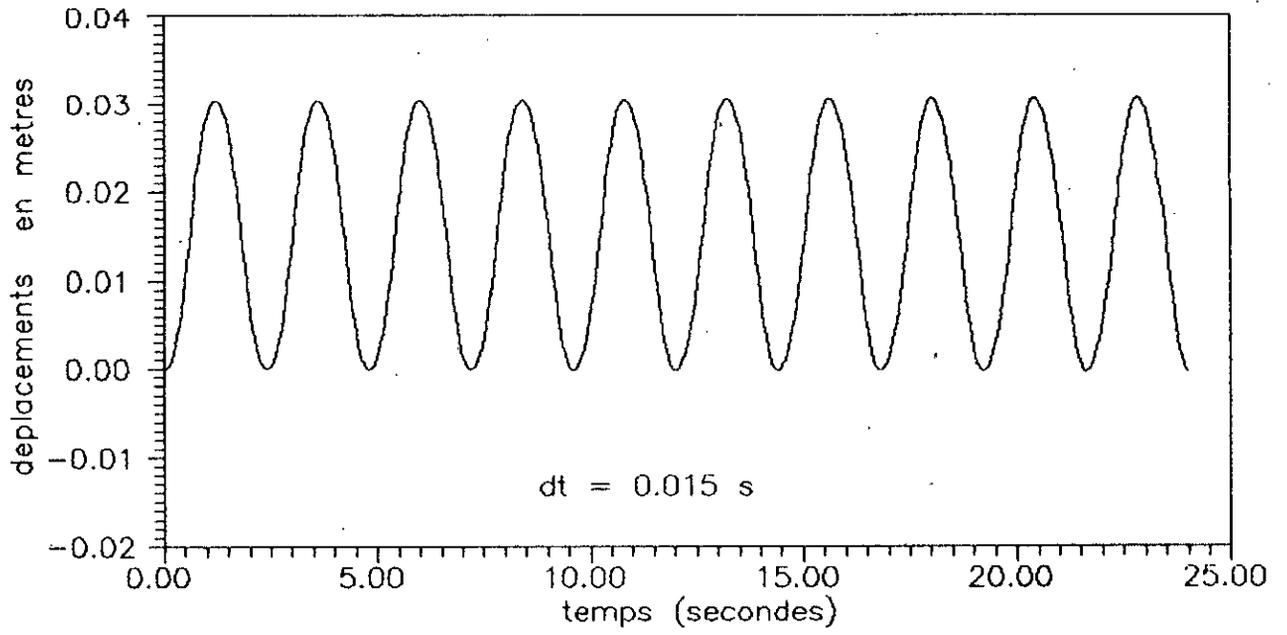
Le phénomène de dispersion numérique est nettement apparent pour le cas où  $\Delta t/T = 1/20$ .

En effet ,la période d'oscillation passe de 2.5 s au début de la réponse à 3 s à la neuvième oscillation.Alors qu'elle reste pratiquement invariable durant toute la période de réponse pour le cas  $\Delta t/T = 1/200$ .

Conclusion :

Quand nous avons étudié la stabilité de la méthode  $\alpha$  de HILBER et de la méthode de HOUBOLT ,nous étions vraiment tentés de conclure qu'il était inutile d'utiliser la méthode de HILBER vu qu'elle présentait l'énorme inconvénient d'être conditionnellement stable dans beaucoup de cas ,alors que la méthode de HOUBOLT est inconditionnellement stable et que l'on pouvait se permettre des incréments de temps assez importants.Mais la découverte tout à fait hasardeuse de ces deux phénomènes numériques a vite fait de nous dissuader d'une telle conclusion qui aurait été sinon fausse du moins hative.En effet un jugement fiable passerait par la prise en compte de tous les phénomènes susceptibles d'entraver au bon déroulement d'un algorithme et à l'exactitude des résultats.

fig A-1



## CONCLUSION

Tel que défini au départ, le présent travail devait nous permettre d'accéder à deux objectifs, à savoir :

- Un objectif d'ordre pédagogique
- Et un objectif d'ordre pratique

Les deux objectifs ont été atteints dans une certaine mesure si on en juge de l'apprentissage dont on a pu bénéficier tout au long de la rédaction des quatre chapitres constituant ce document.

La recherche bibliographique, objet des deux premiers chapitres, nous a permis de faire le point sur des concepts fondamentalement nécessaires à toute entreprise dans le sens de notre travail.

L'essentiel de notre travail a été effectué en programmation où l'effort requis fût conséquent. En effet, la compréhension des techniques et de la logique utilisés par DLEARN était de longue haleine, mais nécessaire à l'implantation de la partie faisant le calcul de la réponse dynamique par la méthode de superposition modale.

Le principal résultat pratique tiré de cette étude est la conclusion relative aux performances des méthodes directes et de superposition modale pour le calcul de la réponse dynamique des structures.

En effet, l'exécution des deux méthodes pour des cas simples de structures nous a permis de conclure quant à la nécessité d'utiliser la méthode de superposition modale pour deux familles de structures; à savoir :

- Les structures dont la taille du problème est très grande.
- Et les structures soumises à des contraintes de sécurité sévères avec la restriction d'utiliser un grand nombre de modes.

De sorte que le prix de la simulation du comportement dynamique s'en trouve diminué.

Il est tout de même important de parler des deux phénomènes numériques auxquels nous nous sommes confrontés durant l'exécution des exemples; à savoir :

- L'instabilité des phénomènes dans certains cas de figures
- Et les phénomènes de dissipation et de dispersion algorithmiques dont on n'a pris connaissance qu'une fois les avoir rencontrés.

Ainsi aimerions-nous inscrire ce travail, si humble soit-il, dans une logique de perspectives de recherche pouvant donner lieu à certains sujets de projets de fin d'étude.

Et dans ce sens, nous avons veillé à ce que le présent document tienne de soutien pour tout travail venant à l'enrichir.

#### SUJETS PROPOSES POUR L'AVENIR:

1-Compléter la bibliothèque d'éléments de DLEARN dont la pauvreté en fait un handicap majeur.

2-Etudier les schémas aux différences finies utilisés en dynamique des structures afin d'aboutir à une meilleure maîtrise des phénomènes numériques de stabilité et d'amortissement permettant de rentabiliser leur usage.

3-Implantation, dans DLEARN, d'une méthode utilisant les coordonnées de LANCZOS, à la place des coordonnées modales pour réduire la taille des problèmes dynamiques. Ceci nécessiterait l'exploitation du caractère tridiagonal du problème réduit durant la résolution.

4-Enlacement d'une approche mixte des méthodes directes.

## ANNEXE 1

### ANALYSE DE LA STABILITE DES METHODES DIRECTES

L'analyse de stabilité faite pour la méthode des différences centrales en chapII-3-5-a, peut être réalisée pour tout schéma. Aussi dans cette partie nous établirons la matrice d'amplification A des méthodes les plus connues en dynamique.

Pour ce qui est du choix des incréments de temps il suffit de se référer à la figure 2 donnée au chapII-2-2-a.

#### II-RECHERCHE DE L'OPERATEUR A :

##### 1-méthode des différences finies centrales:

Soit à résoudre chacune des équations découplées suivantes:

$$\ddot{x} + 2 \xi \omega \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \dots(1)$$

La méthode des différences finies centrales utilise l'approximation:

$$\ddot{x}(t) = (1/\Delta t^2) \{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)\} \quad \dots(2)$$

$$\dot{x}(t) = (1/2\Delta t) \{x(t+\Delta t) - x(t-\Delta t)\} \quad \dots(3)$$

En substituant (2) et (3) dans (1), on obtient:

$$x(t+\Delta t) = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} x(t) - \frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t} x(t-\Delta t) \quad \dots(4)$$

(4) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} x(t+\Delta t) \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} & - \frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\Delta t) \end{bmatrix} \quad \dots(5)$$

En identifiant à (a-5)(chapII-2-2-a) , on a:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi \omega \Delta t} & - \frac{1 - \xi \omega \Delta t}{1 + \xi \omega \Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots(6)$$

Cette méthode est stable à condition que l'incrément de temps soit inférieur à  $\Delta t_{cr}$ . Celui-ci est lié à la plus petite période de résonance par:

$$\Delta t_{cr} \cong 0.1 T_{min}$$

#### 2-méthode de HOUBOLT:

De même, la résolution de (1) par la méthode de HOUBOLT dont le schéma de discrétisation est:

$$x(t) = (1/\Delta t)^2 \left\{ 2 x(t+\Delta t) - 5 x(t) + 4 x(t-\Delta t) - x(t-2\Delta t) \right\} \quad \dots(7)$$

$$x(t) = (1/6\Delta t) \left\{ 11 x(t+\Delta t) - 18 x(t) + 9 x(t-\Delta t) - 2 x(t-2\Delta t) \right\} \quad \dots(8)$$

En substituant (7) et (8) dans (a-5), on a:

$$\begin{bmatrix} x(t+\Delta t) \\ x(t) \\ x(t-\Delta t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t+\Delta t) \\ x(t) \\ x(t-\Delta t) \end{bmatrix} \quad \dots(9)$$

Avec:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 6\kappa & -\left(\frac{4\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 3\kappa\right) & \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + (2/3)\kappa \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Où:

$$\beta = \left( \frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{11\xi}{3\omega \Delta t} + 1 \right)^{-1}, \quad \text{et, } \kappa = \frac{\beta \xi}{\omega \Delta t}$$

Cet algorithme est inconditionnellement stable.

### 3-méthode de NEWMARK:

La méthode de NEWMARK considère l'équation (1) à  $t+\Delta t$ .

Avec les approximations (a-1) et (a-2) données dans le chap II-2-2-3-a, on trouve finalement:

$$A = \begin{bmatrix} -(0.5-\gamma)\beta - 2(1-\delta)\kappa & -(\beta+2\kappa)/\Delta t & -\beta/\Delta t^2 \\ \Delta t [ 1-\delta-(0.5-\gamma)\delta\beta-2(1-\delta)\delta\kappa ] & 1-\beta\delta-2\beta\kappa & -\beta\delta/\Delta t^2 \\ \Delta t^2 [ 0.5-\gamma - (0.5-\gamma)\gamma\beta - 2(1-\delta)\gamma\kappa ] & \Delta t(1-\gamma\beta-2\gamma\kappa) & 1-\gamma\beta \end{bmatrix} \quad \dots(10)$$

$$\text{où: } \beta = \left( (1/\omega \Delta t)^2 + 2\xi\delta/(\omega \Delta t) + \gamma \right)^{-1}; \quad \text{et, } \kappa = \xi\beta/(\omega \Delta t)$$

Comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre II la famille de NEWMARK inclu plusieurs schémas ,suivant les valeurs de  $\delta$  et  $\gamma$ .

SCHÉMAS	$\gamma$	$\delta$	Contrôle de stabilité
Accélération moyenne	1/4	1/2	inconditionnel
Accélération linéaire	1/6	1/2	$\Delta t_{cr} \leq 23/\omega_{max}$
Méthode de FOX-GOODWIN	1/12	1/2	$\Delta t_{cr} \leq 6/\omega_{max}$
Méthode des différences centrales	0	1/2	$\Delta t_{cr} \leq 2/\omega_{max}$

$\omega_{max}$  est la fréquence naturelle maximale de la structure.

#### 4-METHODE DE TETA WILSON:

La méthode de WILSON est basée sur le postulat de la variation linéaire de l'accélération entre  $t$  et  $t+\theta \Delta t$ ,  $\theta > 1$ .

Schéma:

La matrice A est dans ce cas :

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \beta\theta^2/3 - 1/\theta - \kappa\theta & (-\beta\theta - 2\kappa)/\Delta t & -\beta/\Delta t^2 \\ \Delta t(1 - (\beta\theta)^{-1} - \beta\theta^2/6 - \kappa\theta/2) & (1 - \beta\theta/2 - \kappa) & -\beta/(2\Delta t) \\ \Delta t^2(0.5 - (\beta\theta)^{-1} - \beta\theta^2/6 - \kappa\theta/6) & \Delta t(1 - \beta\theta/6 - \kappa/3) & 1 - \beta/6 \end{bmatrix}$$

Où:  $\beta = (\theta / (\omega^2 \Delta t^2) + \xi \theta^2 / (\omega \Delta t) + \theta^3 / 6)^{-1}$

et:  $\kappa = \xi \beta / (\omega \Delta t)$

La méthode de  $\theta$ -WILSON est inconditionnellement stable pour  $\theta=1.4$  (ref B2).

BIBLIOGRAPHIE

- B1- K.J.BATHE et E.WILSON  
 'Numerical methods in finite element analysis'  
 Prentice-Hall 1976
- C- G.F.CAREY et T.ODEN  
 'Finite elements 'Computational aspects' volume III 1984
- Z- O.C.ZIENKEWITZ et R.L.TAYLOR  
 'La méthode des éléments finis' tome I 1989  
 Mc Graw Hill tome II 1991
- H- T.J.R .HUGUES  
 'The finite element method :Linear static and dynamic finite  
 element analysis'  
 Prentice Hall inc 1987
- I- IMBERT  
 'Analyse des structures par éléments finis'  
 Cepadues édition 1975
- D- DHATT et TOUZOT  
 'Une présentation de la méthode des éléments finis'  
 deuxième édition Maloinès 1984
- CL- CLOUGH  
 'Dynamics of structures'  
 Mac Graw-Hill 1975
- DB- DHATT et BATOZ  
 'Modélisation des structures par éléments finis' tome I  
 Hermes 1990
- HA- H.KARDESTUNCER  
 'finite element handbook'  
 Mac Graw-Hill 1987
- CH- F.CHATELAIN  
 'valeurs propres des matrices'  
 MASSON 1988

- SA- E.WILSON et A.HABIBULAH  
 SAP80 'structural analysis programs' technical reference manual  
 Computers and structures inc 1986
- T- B.TILIOUINE et A.TAIBI  
 Journal of technology (ENP)  
 'Investigation analytique des effets de troncature modale sur la  
 réponse dynamique des structures'  
 volume n° 9 1993
- S- A.SELMAN  
 'Free vibration and impact analysis of symmetrically laminated  
 plates using finite elements'  
 University College of Swansea Nov. 1988
- Z- M.ZEKKOUR  
 'Formulation de la méthode de Lanczos pour la recherche des  
 valeurs propres'  
 Dept de génie mécanique ENP PFE 1992
- HD-M.HADID et A.BENAZOUZ  
 'Investigation numérique du comportement des plaques raidies par  
 la méthode des éléments finis et la méthode des équations intégrales'  
 Dept de génie civil ENP PFE 1992
- BO-N.S.BUCHEFFA et BOUBERBACHENE  
 'Analyse dynamique des plaques minces et épaisses par la méthode  
 des éléments finis'  
 Dept de génie civil ENP PFE 1992
- A1-T.ERICSSON et A.RUHE  
 'The spectral transformation Lanczos method for the numerical  
 solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems'  
 volume 354 n° 152 pages 1251-1268  
 Mathematics of computation 1980

A2-B.NOUR-OMID et R.W.CLOUGH

'Dynamic analysis of structures using Lanczos co-ordinates'  
volume 12 pages 565-577

Earthquake engineering and structural dynamics 1984

A3-B.N.PARLETT and NOUR-OMID

'The use of refined error bounds when updating eigenvalues of  
tridiagonals'

volume 68 pages 179-219

Linear algebra and its applications 1985

A5-R.M HINTZ

'Analytical methods in component modal synthesis'

volume 13 n° 8 pages 1007-1016

AIAA

1975

A6-B.N.OMID et B.N PARLETT et R.L.TAYLOR

'Lanczos versus subspace iteration for solution of eigenvalue  
problems'

volume 19 pages 859-871

International journal for numerical methods in engineering 1983