

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

3/87

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : G.MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CALCUL DES PULSATIONS PROPRES ET DEFORM-
-EES MODALES DES ARBRES RAMIFIES EN
VIBRATION DE TORSION

Proposé Par :

M.Tazi

Etudié par :

N.Daoud

Dirigé par :

M.Tazi

PROMOTION : Janvier 87

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : G. MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CALCUL DES PULSATIOS PROPRES ET DEFORMEES

MODALES DES ARBRES RAMIFIES

EN VIBRATION DE TORSION

Proposé Par :

M.Tazi

Etudié par :

N.Daoud

Dirigé par :

M.Tazi

PROMOTION : Janvier 87

Ministère de l'enseignement supérieur.

وزارة التعليم العالي

École nationale polytechnique. المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département: Mécanique

المعهد الوطني المتعدد التقنيات
الميكانيكية

Promoteur: Tazi Mohamed

الموجه: طارق محمد

Elève ingénieur: Daoud N.

الطالب المهندس: داود نورالدين

العنوان: حساب الترددات الذاتية ودوال تشويه الأعمدة المتفرعة المعرضة للاهتزاز الفتلبي.

الملخص: يهدف هذا العمل إلى دراسة الاهتزازات الفتلبية في الأعمدة المتفرعة، وذلك بحساب الترددات الذاتية ودوال تشويه هذه الأعمدة. من ضمن الطرق المستعملة لدراسة الأعمدة إختارنا طريقة المصفوفات وطريقة هولزر. وأتممت هذه الدراسة بوضع برنامجين على الناظمة الإلكترونية يتعلقان بالطريقتين المذكورتين آنفاً.

Titre: Calcul des pulsations propres et déformées modales des lignes d'arbres ramifiées en vibration de torsion.

Resumé: L'objet de ce travail est l'étude des vibrations de torsion des arbres ramifiés. Il est consacré particulièrement à déterminer les pulsations propres et déformées modales de ces arbres.

Parmi les diverses méthodes proposées pour le calcul des arbres, on a choisi une méthode matricielle et la méthode d'Holzer. Cette étude est complétée par l'élaboration de deux programmes relatifs aux deux méthodes.

Subject: Determination of proper pulpes and déformed modes of branched systems in torsional vibration.

Abstract: In the present work, we tried to study the torsional vibrations of branched system. Particularly, we tried to determine the proper pulses and deformed modes of branched shafts. Different methods have been proposed. In our case, we have applied two of them: a matrix method and the Holzer's method. We have completed our present study by two programs relative to the two methods chosen above.

***** REMERCIEMENT *****

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à monsieur: Tazi Mohamed qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre dans ce travail, ainsi que tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet trouvent ici ma sincère gratitude.

Tazi

***** DEDICACE *****

Je dédis ce modeste travail à :

- Mes parents
- Mon frère et mes sœurs
- Toute la famille
- Tous ceux qui témoignent qu'il n'y a de dieux qu'Allah et que Mohamed est son prophète



TABLE DES MATIERES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction

Chapitre I / Généralités :	I.1
I.1 — Classification des modèles des lignes d'arbres	I.1
I.1.1 — Les modèles des lignes d'arbres non ramifiées	I.1
I.1.2 — Les modèles des lignes d'arbres ramifiées	I.2
I.1.3 — Les modèles complexes	I.2
I.2 — Exemples de modèles des lignes d'arbres ramifiées	I.2
- Premier exemple	I.2
- Deuxième exemple	I.4
- Troisième exemple	I.5
I.3 — Remarques	I.6
Chapitre II / Méthode d'Holzer	II.1
II.1 — Introduction	II.1
II.2 — Principe de la méthode	II.1
II.2.1 — Principe d'Holzer pour les systèmes d'arbres non ramifiés	II.1
II.2.2 — Equation aux pulsations	II.3
II.2.3 — Application du principe d'Holzer aux systèmes d'arbres ramifiés	II.5
II.3 — Programme "Holzer"	II.10
II.4 — Application	II.12

Chapitre III / Méthode matricielle:.....	III.1
III.1 - Remarques préliminaires	III.1
III.2 - Notation utilisée	III.1
III.3 - Différents types de branches	III.3
III.3.1 - Branche de type 1	III.3
III.3.2 - " " " " 2	III.3
III.3.3 - " " " " 3	III.3
III.4 - Equations du mouvement des disques	III.4
III.4.1 - Branches du type 1	III.4
III.4.2 - " " " " 2	III.5
III.4.3 - " " " " 3	III.6
III.5 - Construction de la matrice globale d'inertie	III.7
III.5.1 - Matrice locale d'inertie d'une branche	III.7
III.5.2 - Matrice globale d'inertie du système	III.8
III.6 - Construction de la matrice globale de rigidité	III.9
III.6.1 - Matrices locales de rigidité	III.9
III.6.2 - Matrice globale de rigidité	III.13
III.7 - Matrice de connexion	III.15
III.7.1 - Propriétés	III.15
III.7.2 - Utilisation	III.16
III.8 - Matrice aux pulsations	III.18
III.9 - Recherches des pulsations propres et déformées modales	III.18
III.10 - Programme "MAT"	III.19
III.11 - Application	III.32



.../ Conclusion

.../ Annexe :
- Programme "Mat"

.../ Bibliographie.....

NOTATIONS UTILISEES

- I : moment d'inertie [kg.m^2 ou N.m/s^2]
 K : rigidité torsionnelle [N.m/rad]
 θ : déplacement angulaire
 X : amplitude angulaire.
 T : force vive
 U : fonction de force
 M : couple d'inertie
 ω : pulsation [rad/s]
 φ : déphasage
 $[M]$: matrice d'inertie
 $[L]$: matrice locale de rigidité
 $[SL]$: sous-matrice de $[L]$
 $[GL]$: matrice globale de rigidité.
 $[CONEX]$: matrice globale de connexion.
 N : vitesse de rotation [tr/mn]

Table des figures

figure I.1.1: modèle des lignes d'arbres non ramifiées	I.1
figure I.1.2: " " " " ramifiées	I.2
figure I.1.3: modèle complexe	I.2
figure I.2.1: Modélisation d'un moteur 12 cylindres en V	I.3
figure I.2.2: " " " " porsche, 12 cylindres	I.4
figure I.2.3: " " " " de motocyclette	I.5
figure II.2.3: exemple d'un système ramifié auquel on lui applique le principe d'Holzer	II.6
figure III.1.1: schéma simplifié d'un système ramifié	III.1
figure III.1.2: exemple de numérotation des branches et des noeuds	III.2
figure III.3.1: branche de type 1	III.3
figure III.3.2: " " " " 2	III.3
figure III.3.3: " " " " 3	III.3
figure III.4.1: système ramifié à partir duquel on détermine les équations du m^{th} des disques des branches de type 1	III.4
figure III.4.2: système ramifié à partir duquel on détermine les équations du m^{th} des disques des branches de type 2	III.5
figure III.4.3: système ramifié à partir duquel on détermine les équations du m^{th} des disques des branches de type 3	III.6
figure III.6.1.1: Matrice locale de rigidité d'une branche de type 1	III.10
figure III.6.1.2: " " " " " " " " 2	III.11
figure III.6.1.3: " " " " " " " " 3	III.12
figure III.6.2.2: Matrice globale de rigidité	III.14

INTRODUCTION

En raison de l'accroissement des dimensions et de l'augmentation des vitesses de rotation dans les machines modernes, l'étude des problèmes de vibration a acquis une importance considérable dans le calcul des pièces de machines. C'est un fait établi, que seule la théorie des vibrations permet de comprendre entièrement nombre de problèmes dont l'importance pratique est très grande, tels que : équilibrage des machines, vibrations de torsion des arbres et des trains d'engrenage, vibrations des disques et des aubes de turbine,.....

Ce n'est qu'à par l'usage de cette théorie que l'on pourra assigner aux divers organes, les dimensions qui permettront de supporter les conditions critiques dans lesquelles risquent de se produire les fortes vibrations.

Les éléments principaux qui sont recherchés sont :

- a) La fréquence de la vibration
- b) Son amplitude
- c) Le type d'onde vibratoire
- d) Les tensions produites par ces vibrations.

Il est très important de connaître la fréquence d'une vibration; car bien souvent, la connaissance de cette fréquence est le fil conducteur qui conduit à la source de la vibration.

Il existe beaucoup de cas dans lesquels il est très important de calculer l'amplitude de la vibration; Par exemple, pour l'étude des vibrations périodiques forcées dont on connaît la fréquence; C'est le cas de nombreuses constructions métalliques et des appareils qui dépendent d'une machine animée d'un mouvement de rotation.

C'est vers la fin du XIX^{ème} siècle que les bateaux propulsés par des moteurs alternatifs multicylindres à vapeur connurent des ruptures d'arbres manivelles dues aux vibrations de torsion. Les premières recherches furent entreprises sur l'équilibrage des arbres de transmission. Et au cours de la première guerre mondiale de nombreux navires sont équipés de moteurs Diesel rapides. Avec eux ressurgissent les ruptures d'arbres et les communications sur les oscillations de torsion. Les recherches se font alors dans deux directions complémentaires. La première s'intéresse à l'amortissement des vibrations, la deuxième axe de recherche est caractérisé par les travaux, au cours des années 20, de HOLZER, WYALER, LEWIS, ... sur les méthodes de calculs numériques qui permettront de déterminer les pulsations propres de torsion des lignes d'arbres non ramifiées à faible degré de liberté.

Dés lors, de nombreux ouvrages sont écrits sur les vibrations de torsion : par Tuplin (1935), Ker Wilson (1935 et 1946)

- Dans notre travail, on va appliquer aux systèmes d'arbres ramifiés la méthode d'HOLZER, et une méthode matricielle

D'une façon générale, le contenu de ce projet est disposé comme suit :

- Le 1^{er} chapitre permet de donner une idée générale sur les différents modèles des lignes d'arbres. Il est consacré en 1^{er} lieu à montrer quelques exemples de modélisation des arbres ramifiés.

- Le 2^{ème} chapitre est consacré à résoudre le problème de la détermination des pulsations propres par la méthode d'Holzer. Il débute par l'exposer de cette méthode, ensuite par l'élaboration d'un programme relatif à la méthode, et en fin l'application de cette théorie sur un système ramifié.

- Le 3^{ème} chapitre est relatif à une méthode matricielle appliquée aux différents types de branches pouvant se présenter. Cette étude est complétée par l'élaboration d'un programme permettant le calcul rapide des pulsations propres et déformées modales des arbres ramifiés.

CHAPITRE I / GENERALITES

La complexité d'une ligne d'arbres conduit à substituer à la réalité des "esquisses" simplifiées ou modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique.

Ainsi, il est nécessaire de créer, pour une ligne d'arbres, différents modèles pour : réaliser l'équilibrage du système, connaître les fréquences propres des vibrations de torsion, déterminer les amplitudes en quelques points particuliers des oscillations,

Les éléments de ces modèles doivent satisfaire à des règles bien connues : proportionnalité entre efforts et déformations, conservation des masses, pour que les lois de la mécanique leur soient applicables.

Les lignes d'arbres qui sont essentiellement composées de coudes, d'arbres manivelles, d'arbres épaulés, d'accouplements, de réducteurs et de rotors, seront réduites à des modèles équivalents constitués de disques reliés entre eux par des ressorts de torsion.

I.1 / Classification des modèles des lignes d'arbres :

Au plan des vibrations de torsion, les modèles représentatifs des lignes d'arbres peuvent prendre diverses formes suivant la complexité des installations.

Parmi les plus courants, nous pouvons citer :

I.1.1 / Les modèles des lignes d'arbres non ramifiées :

Composés de disques calés sur un seul arbre dont les deux extrémités sont libres, encastrées ou libre à une extrémité, encastré à l'autre. (voir figure I. 1.1).



Figure I. 1.1

I.1.2/ Les modèles des lignes d'arbres ramifiées :

Composés de disques collés sur des arbres différents qui tournent à la même vitesse. Une représentation symbolique est donnée figure I.1.2.

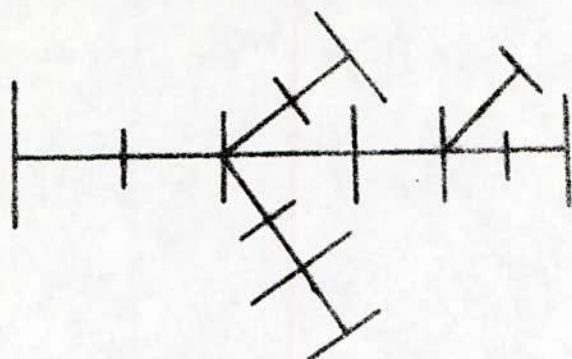


Figure I.1.2

I.1.3/ Les modèles complexes :

De type de ceux qui comportent des schémas équivalents de différentiels ou de boucles. (voir figure I.1.3)

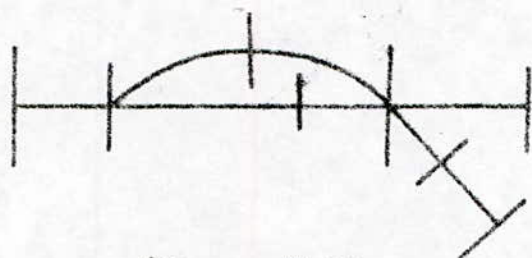


Figure I.1.3

I.2/ Exemples de modèles des lignes d'arbres ramifiées :

Du fait qu'on ne s'intéresse qu'aux arbres ramifiés, on va donner quelques exemples relatifs aux lignes d'arbres ramifiées.

Premier exemple: Un moteur 12 cylindres en V, entraîne par l'intermédiaire d'un réducteur à deux sorties, un alternateur R_2 , et une pompe R_1 . (voir figure I.2.1).

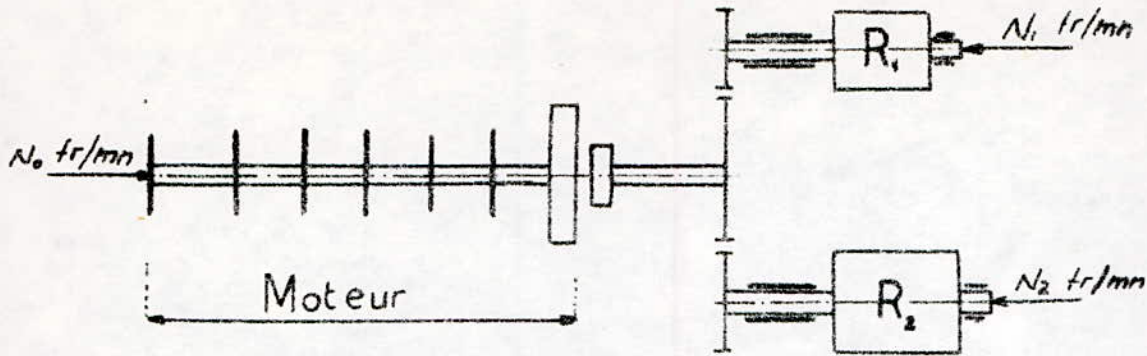


figure I.2.1

Les figures I.2.1a et I.2.1b représentent les étapes successives de la modélisation de ce système.

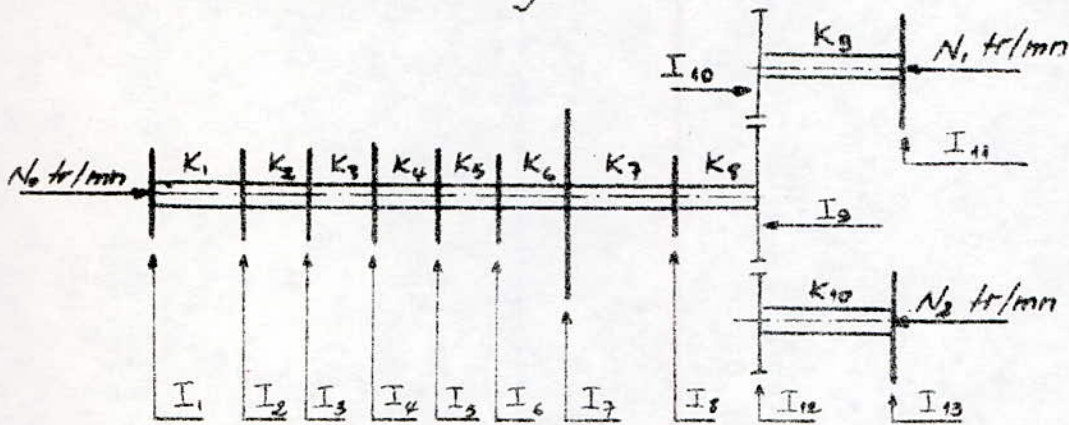


Figure I.2.1a

Schéma équivalent ramené à N_0 tr/mn :

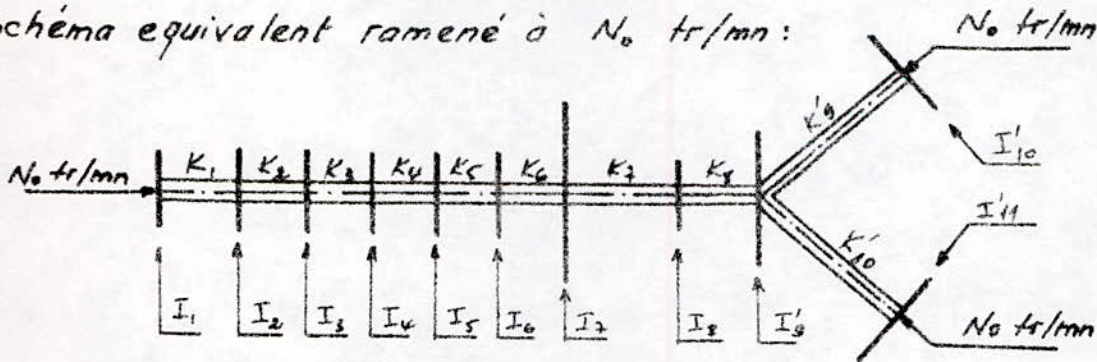


Figure I.2.1b

avec :

$$I'_9 = I_9 + I_{12} \left(\frac{N_2}{N_0} \right)^2 + I_{10} \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2$$

$$I'_{10} = I_{11} \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^2$$

$$I'_{11} = I_{13} \left(\frac{N_2}{N_0} \right)^2$$

$$K'_9 = K_9 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

$$K'_{10} = K_{10} \left(\frac{N_2}{N_0} \right)^2$$

Deuxieme exemple: Moteur porsche, 12 cylindres à plat.
(voir figure I.2.2).

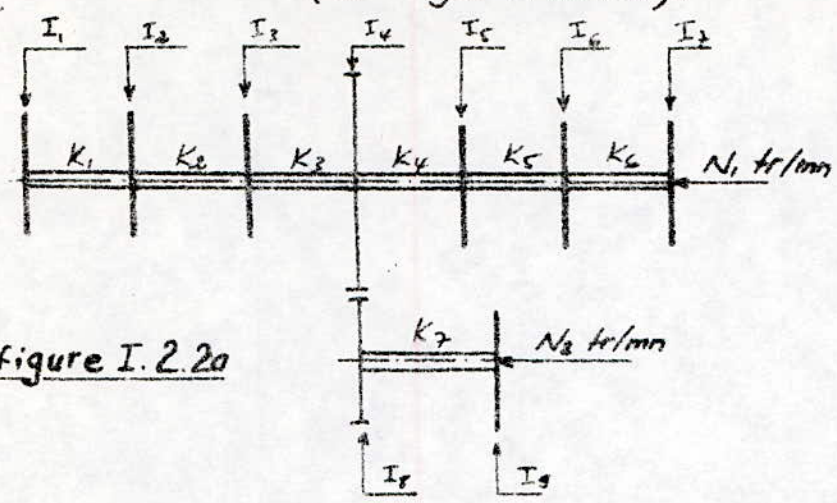


Figure I.2.2a

Schéma équivalent ramené à N_1 tr/mn :

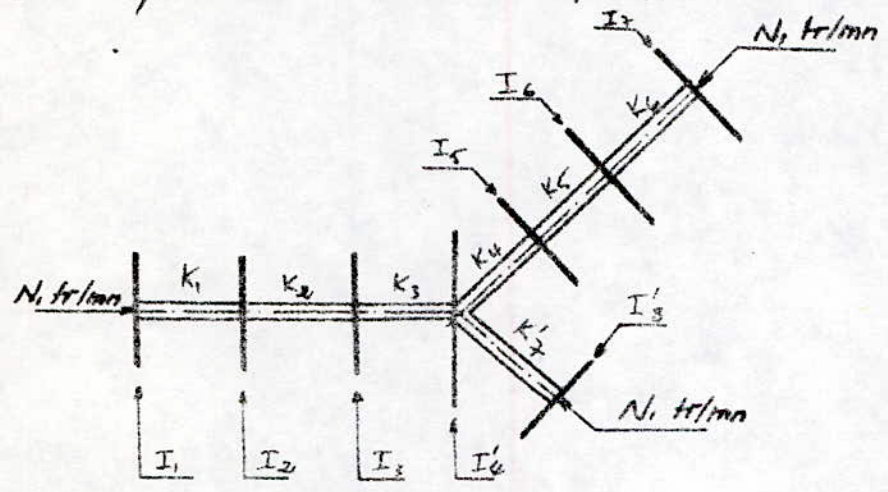


Figure I.2.2b

avec :

$$I_4' = I_4 + I_2 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$I_8' = I_9 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

$$K_7' = K_7 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2$$

Troisième exemple: Moteur de motocyclette JAVA, de 300 cm³,
4 cylindres, à 2 vilebrequins (voir figure I.23)

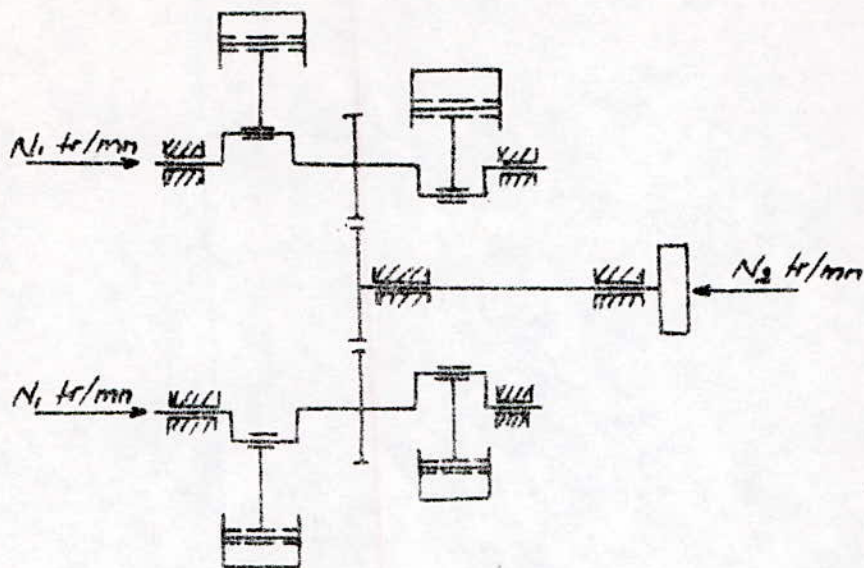


Figure I.2.3

Les figures I.2.3a et I.2.3b représentent les étapes successives de la modélisation de ce moteur.

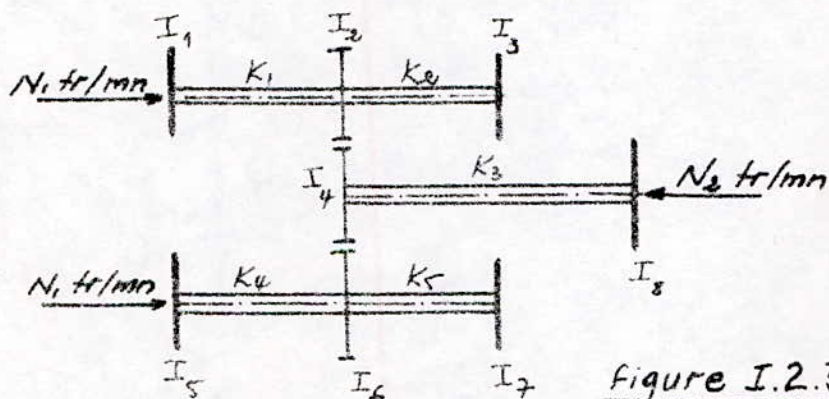


Figure I.2.3a.

Schéma équivalent ramené à N₁ tr/mn :

avec :

$$I'_4 = I_2 + I_6 + I_4 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

$$I'_8 = I_8 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

$$K'_3 = K_3 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

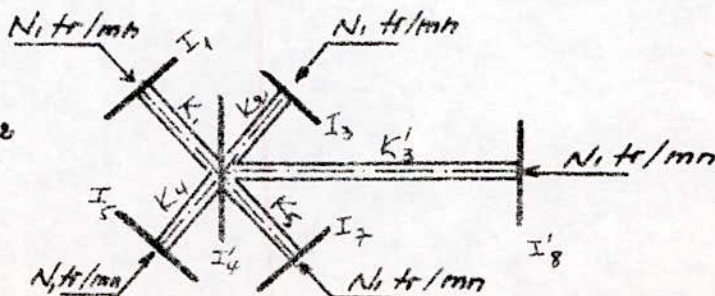


Figure I.2.3b

I.3/ Remarques:

Première remarque: Un nœud de ramification est le point de rencontre d'au moins trois branches.

En effet, si seulement deux branches aboutissent à un nœud, le schéma peut être ramené à celui d'une ligne unique (voir fig I.3)

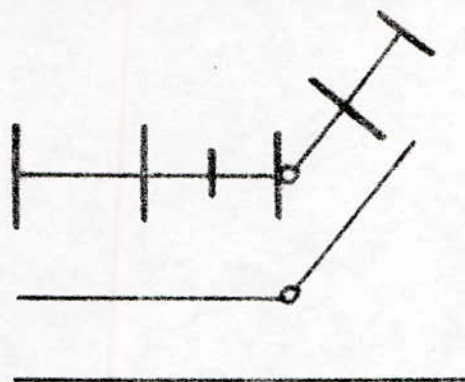


Figure I.3

Deuxième remarque: Avant l'application des deux méthodes choisies, il est nécessaire de fixer quelques hypothèses relatives au calcul des pulsations propres des arbres soumis à des vibrations de torsion:

- 1^o - Le système obéit à la loi de Hooke (les déformations sont proportionnelles aux efforts).
- 2^o - Seules les déformations de torsion sont prises en compte
- 3^o - Le système est conservatif.
- 4^o - Les centres de gravité des disques appartiennent à l'axe de rotation.
- 5^o - L'axe de rotation est un axe principal d'inertie.
- 6^o - Le moment des actions mécaniques des paliers sur les arbres a une composante nulle sur l'axe de rotation.

CHAPITRE II / METHODE D'HOLZER

II.1/ Introduction :

C'est en 1921 qu'Holzer propose dans la revue Springer-Verlag OHG (Berlin) une méthode de calcul des systèmes discrets en régime harmonique stationnaire où les actions sont caractérisées par une amplitude et une pulsation.

En 1912, Gumbel avait proposé une méthode graphique. Depuis et sur les bases d'Holzer, plus de trente méthodes ont été définies.

Pour les régimes libres, c'est-à-dire sans action extérieure, on impose une grandeur, par exemple: un déplacement à l'une des extrémités et une pulsation ω ; Si les conditions aux limites ne sont pas satisfaites, on modifie la pulsation ω ; Les valeurs de ω pour lesquelles les conditions aux limites sont satisfaites sont des valeurs de l'ensemble [... ω_p ...] des pulsations propres.

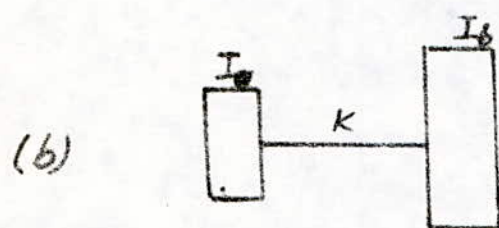
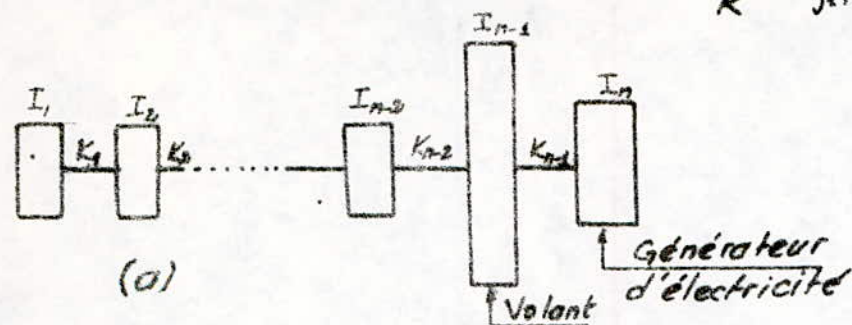
La méthode d'Holzer est avantageuse pour les systèmes caractérisés par un nombre élevé de degrés de liberté que l'algorithme soit traité manuellement ou automatiquement par ordinateur; de plus, elle fournit directement les déformées puisqu'elle est fondée sur leur détermination.

II.2/ Principe de la méthode :

II.2.1/ Pour les systèmes d'arbres non ramifiés :

Il s'agit de partir d'une hypothèse grossière sur la fréquence. Cette hypothèse sur la plus basse des fréquences naturelles peut consister à remplacer le système de la figure II.2a par II.2b; c'est-à-dire en remplaçant les $(n-2)$ cylindres par un disque de moment d'inertie " I_a " égal à la somme des moments d'inertie des $(n-2)$ cylindres,

et l'ensemble Volant - Générateur par un autre disque de moment d'inertie I_b , telle que: $\frac{1}{K} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{K_j}$



Le système est remplacé par un ensemble à deux masses en vue de calculer approximativement la fréquence propre la plus basse.

Figure II. 2

La pulsation de ce nouveau système est: $\omega = \sqrt{K \frac{I_a + I_b}{I_a \cdot I_b}} = \omega_1$ qui est une valeur approchée de la plus basse pulsation naturelle du système de la figure II. 2.

Nous allons nous servir de cette valeur " ω_1 " comme base de calcul approximatif d'Holzer qui est le suivant:

Supposons que le système de la figure II. 2 a vibre en torsion avec une pulsation ω_1 . Si ω_1 était une pulsation naturelle, le mouvement serait une vibration libre, mais comme en général elle ne l'est pas, la vibration du système sera forcée.

Supposons arbitrairement que l'amplitude angulaire du 1^{er} disque soit "1 radian". Le couple nécessaire pour faire vibrer ce disque est: " $I_1 \omega_1^2 \sin \omega_1 t$ ". Ce couple ne peut provenir que de l'arbre à droite de " I_1 ". Si cet arbre a une constante élastique de torsion " K_1 ", son angle de torsion est: " $(I_1 / K_1) \omega_1^2 \sin \omega_1 t$ " qui a pour valeur maximum " $(I_1 / K_1) \omega_1^2$ ".

Puisque l'amplitude du disque n°1 est de "1 radian" et que l'arbre se tord de " $(I_1 / K_1) \omega_1^2$ " radian, le disque n°2 doit vibrer avec une amplitude égale à: " $1 - (I_1 / K_1) \omega_1^2$ " radian. Ce qui

nécessite un couple égal à " $I_2 \omega_1^0 (1 - \frac{I_1 \omega_1^0}{K_1})$ " résultant de la différence entre les couples élastiques de l'arbre à gauche et celui à droite. Puisque nous connaissons le couple dans K_1 , nous pourrions calculer celui dans K_2 . On calculera alors l'angle de torsion de K_2 , l'amplitude de I_3 , etc.

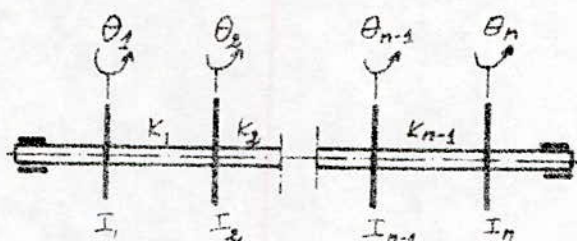
Ainsi, de proche en proche, nous arrivons au dernier disque; Mais il n'y a plus d'arbre à droite de I_n pour fournir le couple nécessaire. Pour que le système vibre ainsi que nous l'avons dit, il faut faire agir sur I_n un couple extérieur " M_{ext} " ayant la valeur que nous donne le calcul.

Si ω_1 était une pulsation propre, nous trouverons $M_{ext} = 0$.

La grandeur et le signe de M_{ext} nous indiquent dans quel sens et de combien à peu près nous nous sommes trompés en prenant ω_1 comme pulsation naturelle. On recommencera le calcul avec une nouvelle valeur " ω_1 " jusqu'à trouver " $M_{ext} = 0$ ".

II.2/ Equation aux pulsations:

Soit l'arbre représenté ci-dessous:



I_i , ($i = 1, \dots, n$) les moments d'inertie des masses en mouvement de rotation par rapport à l'axe de l'arbre.

K_j , ($j = 1, \dots, n-1$) les constantes des rigidités torsionnelles des tronçons d'arbres séparant les disques.

θ_i , ($i = 1, \dots, n$) les angles de rotation des disques pendant la torsion.

Le couple agissant sur le 1^{er} disque est égal à: $-K_1(\theta_1 - \theta_2)$
 sur le 2^{ème} disque le couple sera: $-K_1(\theta_2 - \theta_1) - K_2(\theta_2 - \theta_3)$
 et ainsi qu'on détermine les couples agissant sur les autres disques.

Les équations du mouvement s'écrivent:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = -K_1(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = -K_1(\theta_2 - \theta_1) - K_2(\theta_2 - \theta_3)$$

$$(A) \quad I_3 \ddot{\theta}_3 = -K_2(\theta_3 - \theta_2) - K_3(\theta_3 - \theta_4)$$

$$I_i \ddot{\theta}_i = -K_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}) - K_i(\theta_i - \theta_{i+1}) \quad \forall i \in [2, n-1]$$

$$I_n \ddot{\theta}_n = -K_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1})$$

En additionnant les équations du système (A), on aura:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + I_2 \ddot{\theta}_2 + \dots + I_n \ddot{\theta}_n = 0 \quad \text{ou:} \quad \sum_{j=1}^n I_j \ddot{\theta}_j = 0 \quad \dots (B)$$

Comme solutions des équations du système (A), on prend:

$$\theta_i = X_i \sin(\omega t + \varphi) \quad \forall i \in [1, n]$$

Les X_i : représentent les amplitudes relatives.

ω : pulsation naturelle d'oscillation

φ : déphasage.

Pour des valeurs maximums des couples et des angles de torsion ($\sin(\omega t + \varphi) = 1$), le système (A) devient:

$$I_1 X_1 \omega^2 = K_1(X_1 - X_2)$$

$$I_2 X_2 \omega^2 = K_1(X_2 - X_1) - K_2(X_3 - X_2)$$

$$I_i X_i \omega^2 = K_{i-1}(X_i - X_{i-1}) - K_i(X_{i+1} - X_i)$$

$$\forall i \in [2, n-1]$$

$$I_n X_n \omega^2 = K_{n-1}(X_n - X_{n-1})$$

De ce système d'équations, on peut tirer les relations suivantes:

$$X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 I_1 X_1}{K_1}$$

$$X_3 = X_2 - \frac{\omega^2 [I_1 X_1 + I_2 X_2]}{K_2}$$

D'où la forme générale:

$$X_n = X_{n-1} - \frac{\omega^2 \sum_{i=1}^{n-1} I_i X_i}{K_{n-1}} \quad n \geq 2$$

et avec la relation (B) on aura:

$$\omega^2 \sum_{j=1}^{n-1} I_j X_j = 0$$

En éliminant les X_j entre les équations, on aura une équation du $n^{\text{ième}}$ degré en ω^2 qui est appelée "équation aux pulsations".

Cette équation admet une racine: $\omega^2 = 0$ signifiant que l'arbre est libre en torsion, et $(n-1)$ solutions correspondant aux $(n-1)$ modes principaux de vibration du système.

II.2.3/ Application du principe d'Holzer aux systèmes d'arbres ramifiés

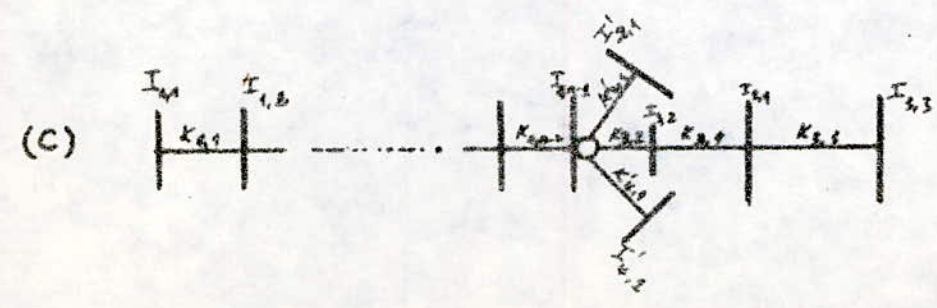
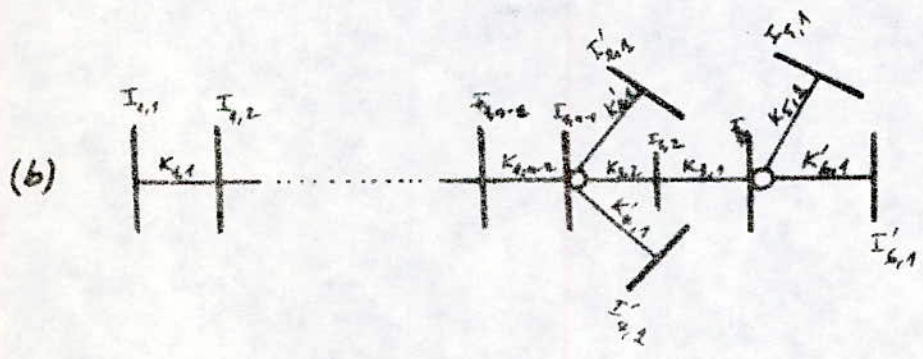
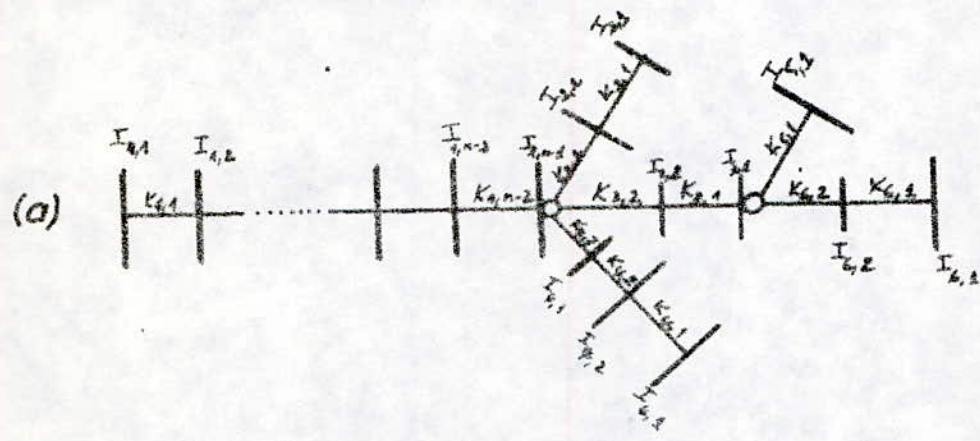
Le principe d'Holzer pour les systèmes d'arbres ramifiés consiste à les ramener à des systèmes d'arbres non ramifiés.

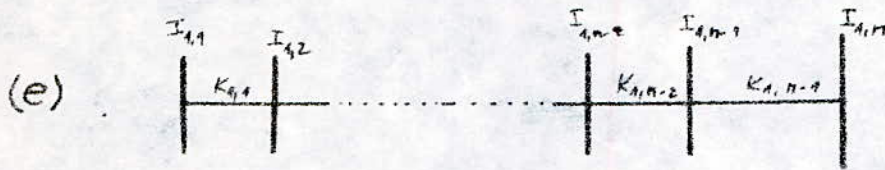
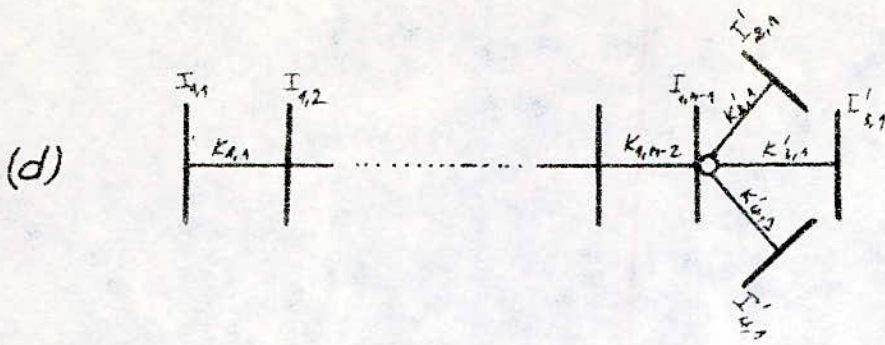
Il s'agit en 1^{er} lieu de remplacer les disques calés sur une branche par un seul disque exactement comme on l'a déjà cité pour les lignes d'arbres non ramifiées; c'est-à-dire que le moment d'inertie de ce disque sera égal à la somme de tous les moments d'inertie des disques regroupés, et la rigidité torsionnelle du tronçon d'arbre portant ce disque égale à la résultante des inverses des rigidités des tronçons d'arbres séparant les disques. Et à chaque nœud de ramification, on ramène les branches portant chacune un disque à un seul arbre

dont la rigidité torsionnelle est égale à la somme des rigidités torsionnelles des branches et dont le moment d'inertie du disque équivalent est égal à la somme des moments d'inertie des disques portés par les tronçons ramifiés.

On procède de la même manière jusqu'au dernier nœud et c'est ainsi qu'on réduit notre système ramifié à un autre non ramifié auquel on peut appliquer le principe cité au paragraphe II.2.1.

Afin de mieux saisir l'application du principe d'Holzer aux systèmes d'arbres ramifiés, prenons l'exemple suivant : (Figure II.2.3)





tels que :

$$\begin{aligned}
 (b) \quad I'_{2,1} &= I_{2,1} + I_{2,2} \\
 I'_{6,1} &= I_{6,1} + I_{6,2} \\
 I'_{4,1} &= I_{4,1} + I_{4,2} + I_{4,3}
 \end{aligned}
 \left\| \begin{aligned}
 \frac{1}{K'_{2,1}} &= \frac{1}{K_{2,1}} + \frac{1}{K_{2,2}} \\
 \frac{1}{K'_{6,1}} &= \frac{1}{K_{6,1}} + \frac{1}{K_{6,2}} \\
 \frac{1}{K'_{4,1}} &= \frac{1}{K_{4,1}} + \frac{1}{K_{4,2}} + \frac{1}{K_{4,3}}
 \end{aligned}
 \right.$$

$$(c) \quad I_{3,3} = I_{5,1} + I'_{6,1} \quad \left\| \quad K_{3,3} = K_{5,1} + K'_{6,1}$$

$$(d) \quad I'_{3,1} = I_{3,1} + I_{3,2} + I_{3,3} \quad \left\| \quad \frac{1}{K'_{3,1}} = \frac{1}{K_{3,1}} + \frac{1}{K_{3,2}} + \frac{1}{K_{3,3}}$$

$$(e) \quad I_{1,n} = I'_{2,1} + I'_{3,1} + I'_{4,1} \quad \left\| \quad K_{1,n-1} = K'_{2,1} + K'_{3,1} + K'_{4,1}$$

Conclusion: Le moment d'inertie agissant sur l'arbre principal - de toutes les masses calées sur les branches - est donné par la relation :

$$I_{1,n} = \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=1}^n I_{i,j} \right) \quad \text{où : } \begin{array}{l} i : \text{indice des branches} \\ j : \text{indice des disques.} \end{array}$$

Les relations données aux paragraphes II.2.1 et II.2.2 - relatives aux systèmes d'arbres non ramifiés - auront pour les systèmes d'arbres ramifiés les formes suivantes:

$$X_{i,j+1} = X_{i,j} - \frac{\omega^2 \sum_{j=2}^{n-1} I_{i,j} X_{i,j}}{K_{i,j}}$$

où: j : indice indiquant le numéro du disque. $j \in [1, n-1]$
avec n : nombre de disques sur la branche.

i : indice indiquant le numéro de la branche
 $i \in [1, b]$ avec: b : nombre de branche.

- Le couple agissant sur chaque disque est donné par:

$$M_{i,j} = I_{i,j} \cdot \omega^2 \cdot X_{i,j}$$

Soit M_i la somme des $M_{i,j}$ tel que: $M_i = \sum_{j=1}^{n-1} M_{i,j}$
Le couple d'inertie au nœud de ramification sera:

$$M = M_{dn} + \sum_{i=1}^b M_i$$

où: M_{dn} est le propre couple d'inertie
du disque ou nœud.

Remarques:

1^o/ Pour chaque branche, on reportera toujours de la valeur hypothétique donnée à l'amplitude angulaire du disque $n=1$ qui est égale à "1 radian". Le $n=1$ est donné au dernier disque de chaque branche en partant du nœud de ramification. (voir la notation utilisée pour l'exemple de la figure II.2.3).

2^o/ A chaque nœud de ramification, on peut avoir - d'après les calculs - des valeurs différentes de l'amplitude du disque

ou nœud. Il est évident qu'un disque ne peut avoir simultanément pour amplitude plusieurs valeurs différentes.

Pour résoudre ce problème, on fixe la valeur de l'amplitude du disque au nœud issue du calcul de la 1^{ère} branche, et on ramène le reste des amplitudes à la même valeur fixée.

Pour cela, il suffit de donner à l'amplitude angulaire du disque n° 1 de chaque branche dont $X_{i,n}$ est différente de $X_{1,n}$ la valeur résultant du rapport entre l'amplitude fixée et l'amplitude du disque au nœud issue du calcul de la branche considérée et on refait le calcul avec :

$$X_{i,1} = \frac{X_{1,n}}{X_{i,n}}$$

telles que :

$X_{i,1}$: l'amplitude du disque n° 1 de la branche i
 $i \in [2, b]$

$X_{1,n}$: l'amplitude fixée au disque au nœud.

$X_{i,n}$: l'amplitude du disque au nœud issue du calcul de la branche i .

3°/ La somme des couples d'inertie au nœud de ramification - inclu le propre couple du disque au nœud - devrait être égale à zéro. Si non, on modifie la valeur de ω jusqu'à ce que la condition indiquée soit satisfaite. On dit que " ω " - vérifiant cette condition - est une pulsation propre.


```

1 ! *****
2 ! *          CALCUL DES PULSATIONS PROPRES ET DEFORMEES MODALES *
3 ! *          DES ARBRES RAMIFIES EN VIBRATION DE TORSION *
4 ! *          ----- *
5 ! *          ***** *
6 ! *          METHODE D'HOLZER *
7 ! *          ----- *
8 ! *****

```

```

10 DIM AI(30,30),AK(30,30),X(30,30),M(30,30),S(30,30),ND(30)
15 EPS=1E-3
20 INPUT "NOMBRE DE BRANCHES ";B
40 I=1
45 PRINT " I=";I
50 INPUT "NOMBRE DE DISQUES SUR LA BRANCHE :I ";ND(I)
60 FOR J=1 TO ND(I)
65 PRINT " J=";J
70 INPUT " AI(I,J)=";AI(I,J)
80 INPUT " AK(I,J)=";AK(I,J)
90 NEXT J
100 INPUT " OMEGA=";w
130 X(1,1)=1
135 M(1,1)=(w^2)*AI(1,1)*X(1,1)
150 S(1,1)=M(1,1)
160 FOR J=2 TO ND(I)
165 X(1,J)=X(1,J-1)-S(1,J-1)/AK(1,J-1)
200 M(1,J)=(w^2)*AI(1,J)*X(1,J)
210 S(1,J)=S(1,J-1)+M(1,J)
220 NEXT J
225 PRINT
230 PRINT " BRANCHE NO: ";I
240 PRINT " ====="
250 PRINT " OMEGA= ";w
255 PRINT " ====="
260 PRINT
265 PRINT "-----"
270 PRINT " J", "AI(I,J)", "AK(I,J)", "X(I,J)", "M(I,J)"
280 PRINT "-----"
290 FOR J=1 TO ND(I)
300 PRINT " J", AI(I,J), AK(I,J), X(I,J), M(I,J)
310 PRINT "-----"
320 NEXT J
330 G=S(1,ND(I))/AK(1,1)
340 I=I+1
350 IF I > B THEN 650
355 PRINT " I=";I
360 INPUT " NOMBRE DE DISQUES SUR LA BRANCHE: I ";ND(I)
370 FOR J=1 TO ND(I)
380 INPUT " AI(I,J)=";AI(I,J)
390 INPUT " AK(I,J)=";AK(I,J)
400 NEXT J

```

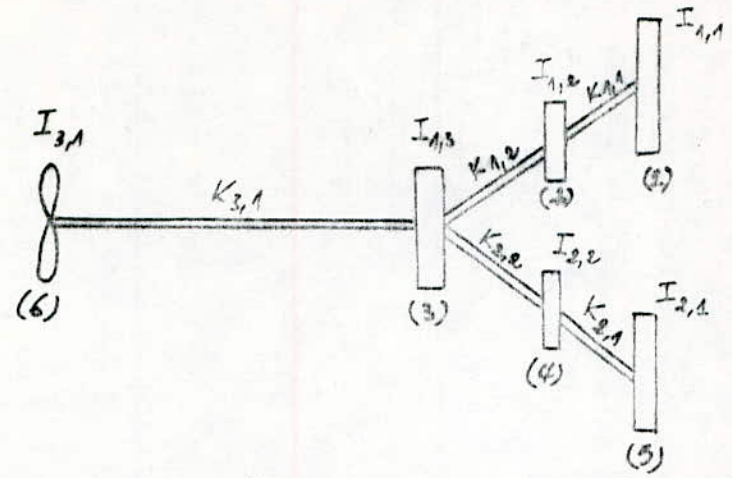
```

410 X(I,1)=1
420 M(I,1)=(W^2)*AI(I,J)*X(I,1)
440 S(I,1)=M(I,1)
450 FOR J=2 TO ND(I)
460 X(I,J)=X(I,J-1)-S(I,J-1)/AK(I,J-1)
480 M(I,J)=(W^2)*AI(I,J)*X(I,J)
490 S(I,J)=S(I,J-1)+M(I,J)
500 NEXT J
502 IF X(I,ND(I))=X(1,ND(1)) THEN 513
505 X(I,1)=X(1,ND(1))/X(I,ND(I))
506 M(I,1)=(W^2)*AI(I,J)*X(I,1)
507 S(I,1)=M(I,1)
508 FOR J=2 TO ND(I)
509 X(I,J)=X(I,J-1)-S(I,J-1)/AK(I,J-1)
510 M(I,J)=(W^2)*AI(I,J)*X(I,J)
511 S(I,J)=S(I,J-1)+M(I,J)
512 NEXT J
513 G=G+S(I,ND(I)-1)/AK(1,1)
514 PRINT " BRANCHE NO: ";I
520 PRINT " ====="
523 PRINT " OMEGA= ";W
525 PRINT " ====="
530 PRINT "-----"
540 PRINT "J", "AI(I,J)", "AK(I,J)", "X(I,J)", "M(I,J)"
550 PRINT "-----"
560 FOR J=1 TO ND(I)
570 PRINT J, AI(I,J), AK(I,J), X(I,J), M(I,J)
580 PRINT "-----"
585 PRINT
590 NEXT J
600 GO TO 340
655 PRINT "G=";G
656 PRINT "-----"
657 IF G > EPS THEN 680
660 PRINT " W UTILISEE EST UNE PULSATION PROPRE "
665 PRINT " *****"
670 GO TO 690
680 PRINT " W UTILISEE N'EST PAS UNE PULSATION PROPRE "
685 PRINT " *****"
690 INPUT " VOULEZ VOUS CHANGER LA VALEUR DE W OUI/NON ";LS
700 PRINT
710 IF LS="OUI" THEN 40
720 PRINT " ***** FIN *****"
730 PRINT " *****"
740 END

```


II.4/ Application:

la figure ci-dessous représente la commande principale d'un navire construit en 1940 pour la « U.S. Maritime Commission ».



Les disques (1) et (5) représentent les moments d'inertie respectifs d'une turbine à vapeur à basse et haute pression, tournant à 7980 tr/min. Les disques (2) et (4) sont des pignons intermédiaires tournant à 730 tr/min; tandis-que (3) est le pignon principal accouplé à l'hélice tournant à 85 tr/min.

Tableaux des données:

Raideurs (kgcm/rad)	
$K_{1,1}$	$643 \cdot 10^9$
$K_{1,2}$	$5,22 \cdot 10^9$
$K_{2,1}$	$938 \cdot 10^9$
$K_{2,2}$	$5,22 \cdot 10^9$
$K_{3,1}$	$0,071 \cdot 10^9$

Inerties (kgcm.s ²)	
$I_{1,1}$	724000
$I_{1,2}$	1029000
$I_{1,3}$	345000
$I_{2,1}$	470000
$I_{2,2}$	1,085000
$I_{3,1}$	416000

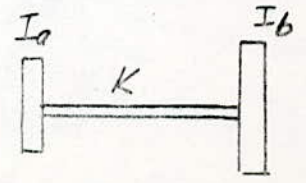
Détermination de la pulsation propre la plus basse:

$$I_a = I_{3,1} + I_{1,3} = 761 \cdot 10^3 \text{ [kg.cm.s}^2\text{]}$$

$$I_b = I_{1,1} + I_{1,2} + I_{2,1} + I_{2,2} = 3308 \cdot 10^3 \text{ [kg.cm.s}^2\text{]}$$

$$K_1 = 1 / \left(\frac{1}{K_{1,2}} + \frac{1}{K_{1,1}} \right) ; K_2 = 1 / \left(\frac{1}{K_{2,2}} + \frac{1}{K_{2,1}} \right)$$

$$K_3 = K_1 + K_2 \Rightarrow$$



$$K = \frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_{3,1}} = 0,07 \cdot 10^9 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{K \frac{I_a + I_b}{I_a \cdot I_b}} = 10,63$$

BRANCHE NO: 1
 =====
 OMEGA= 15
 =====

J	AI(I,J)	AK(I,J)	X(I,J)	M(I,J)
1	724000	.643E+12	1	.1629E+09
2	.1029E+07	.522E+10	.999747	.231466E+09
3	345000	0	.924198	.717408E+08

BRANCHE NO: 2
 =====
 OMEGA= 15
 =====

J	AI(I,J)	AK(I,J)	X(I,J)	M(I,J)
1	470000	.238E+12	.96954	0
2	.1085E+07	.522E+10	.96954	.236689E+09
3	0	0	.924198	0

BRANCHE NO: 3
 =====
 OMEGA= 15
 =====

J	AI(I,J)	AK(I,J)	X(I,J)	M(I,J)
1	416000	.71E+08	.924198	.717408E+08
2	345000	0	-.862368E-01	-.669414E+07

G= .120457E-02
 W UTILISEE N'EST PAS UNE PULSATION PROPRE

BRANCHE NO: 1
=====
OMEGA= 13.27
=====

J	AI(I,J)	AK(I,J)	X(I,J)	M(I,J)
1	724000	.643E+12	1	.127491E+09
2	.1029E+07	.522E+10	.999802	.181164E+09
3	345000	0	.940672	.571478E+08

BRANCHE NO: 2
=====
OMEGA= 13.27
=====

J	AI(I,J)	AK(I,J)	X(I,J)	M(I,J)
1	470000	.238E+12	.976411	0
2	.1085E+07	.522E+10	.976411	.186554E+09
3	0	0	.940672	0

BRANCHE NO: 3
=====
OMEGA= 13.27
=====

J	AI(I,J)	AK(I,J)	X(I,J)	M(I,J)
1	410000	.71E+08	.940672	.571478E+08
2	345000	0	.135774	.824555E+07

G= .947907E-03
W UTILISEE EST UNE PULSATION PROPRE

***** FIN *****

CHAPITRE III / METHODE MATRICIELLE

Les méthodes classiques sont difficilement applicables, telle que la méthode d'Holzer que nous avons détaillé dans le chapitre précédent. Pour cela, on va choisir dans ce qui suit une méthode matricielle qui permet de calculer les pulsations propres des systèmes ramifiés avec une rapidité importante et une précision acceptable.

III.1 / Remarques préliminaires:

1^{ère} remarque: Afin de simplifier la représentation des modèles, nous proposons des schémas sans disques. Seuls les branches et les nœuds sont indiqués (voir fig. III.1.1).

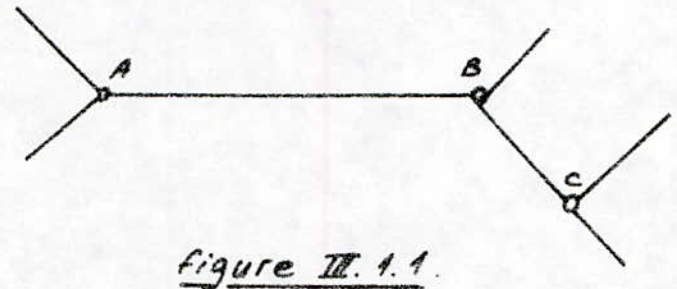


figure III. 1.1.

2^{ème} remarque: Pour éviter la multiplication des cas particuliers et faciliter l'assemblage de la matrice globale de rigidité, la numérotation des nœuds et des branches, et la construction des schémas simplifiés doivent obéir à des règles précises:

- 1^{ère}/ Le numéro d'un nœud est constitué par l'ensemble des numéros des branches qui aboutissent à ce nœud.
- 2^{ème}/ Les branches seront numérotées en tournant autour de chaque nœud dans un sens quelconque (voir fig. III.1.2)

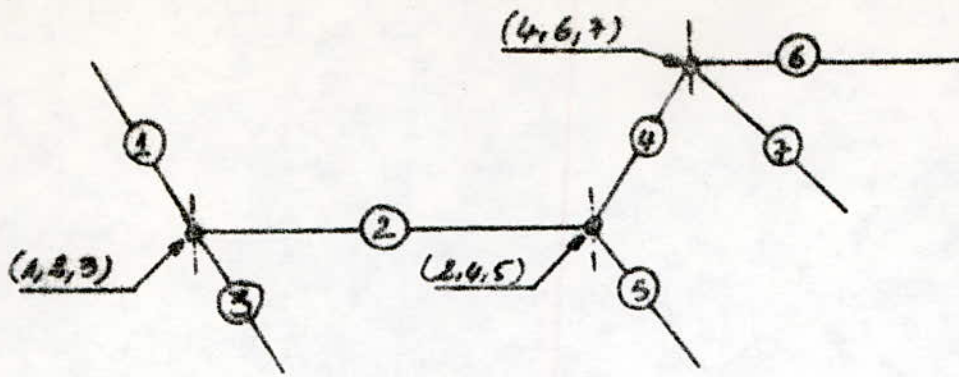


Figure III. 1.2

3^e/ A gauche d'un noeud de ramification, il y aura une et une seule branche.

La figure III. 1.3 indique comment on peut modifier un schéma pour le rendre conforme à cette convention.

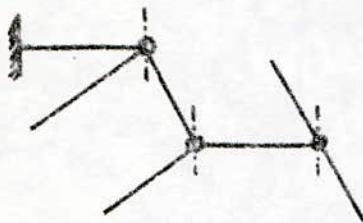


schéma non conforme à la convention

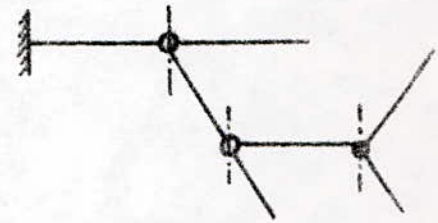


schéma conforme à la convention.

Figure III. 1.3

3^e remarque: On a toujours un disque à un noeud de ramification par construction du modèle. Ce disque peut être affecté à l'une quelconque des branches qui en issues. On conviendra d'affecter ce disque à la branche située à gauche du noeud.

II.2/ Notation utilisée :

$I_{i,j}$: le moment d'inertie du disque "j" appartenant à la branche "i".

$K_{i,j}$: la raideur torsionnelle du tronçon élastique reliant les disques : $(i, j-1)$ et (i, j) .

$\theta_{i,j}$: la rotation du disque (i, j) par rapport au repère fixe.

III.3/ Différents types de branches :

On distingue trois types de branches, car à partir de ces trois cas nous pourrions construire les schémas ramifiés de toutes les lignes d'arbres sans différentiel et sans boucle.

III.3.1/ Branche de type 1: branche située à gauche d'un nœud dont l'extrémité gauche est libre ou encastree.

(voir fig. III.3.1).



figure III.3.1.

III.3.2/ Branche de type 2: branche située à droite d'un nœud dont l'extrémité droite est libre ou encastree.

(voir fig. III.3.2).

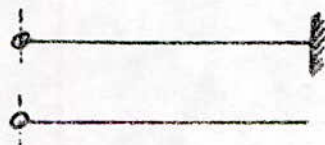


figure III.3.2.

III.3.3/ Branche de type 3: branche située entre deux nœuds. (voir fig. III.3.3).

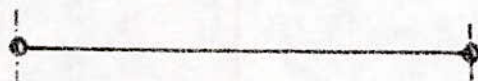


figure III.3.3

III.4/ Equations du mouvement des disques:

III.4.1/ Equations du m^{vt} des disques des branches de type 1

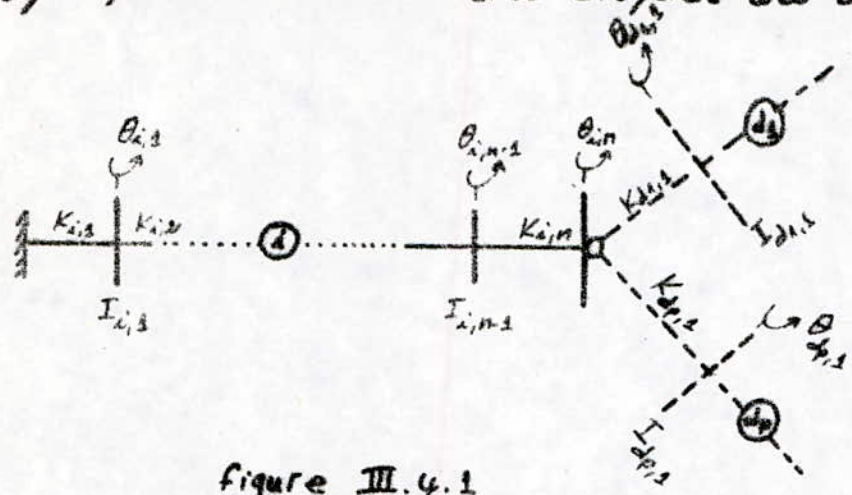


figure III.4.1

La branche i de type 1 (fig. III.4.1) comporte n disques. Il existe p branches : d_1, \dots, d_p situées à droite du nœud.

- la force vive des disques de la branche i est :

$$2T = \sum_{j=1}^n I_{i,j} \cdot \dot{\theta}_{i,j}^2$$

- la fonction de force s'écrit :

$$U = -\frac{K_{i,1}}{2} \theta_{i,1}^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^n K_{i,j} (\theta_{i,j-1} - \theta_{i,j})^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p K_{j,2} (\theta_{i,n} - \theta_{j,2})^2$$

Les équations du mouvement des disques des branches du type 1 sont obtenues par les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_{i,j}} - \frac{\partial T}{\partial \theta_{i,j}} = \frac{\partial U}{\partial \theta_{i,j}}$$

Le système différentiel du second ordre à coefficients constants sans second membre issu des équations du mouvement des disques est :

$$I_{i,1} \ddot{\theta}_{i,1} + \theta_{i,1} (K_{i,1} + K_{i,2}) - \theta_{i,2} K_{i,2} - \theta_{g,j} K_{i,1} = 0$$

$$I_{i,j} \ddot{\theta}_{i,j} - \theta_{i,j-1} K_{i,j} + \theta_{i,j} (K_{i,j} + K_{i,j+1}) - \theta_{i,j+1} K_{i,j+1} = 0 \quad \forall j \in [2, n-1]$$

$$I_{i,n} \ddot{\theta}_{i,n} - \theta_{i,n-1} K_{i,n} + \theta_{i,n} (K_{i,n} + K_{i,n+1}) = 0$$

Remarque: Lorsque l'extrémité d'une branche de type 1 est libre, les équations du mouvement sont obtenues en posant: $K_{i,1} = 0$.

III.4.2/ Equations du mouvement des disques des branches de type 2:

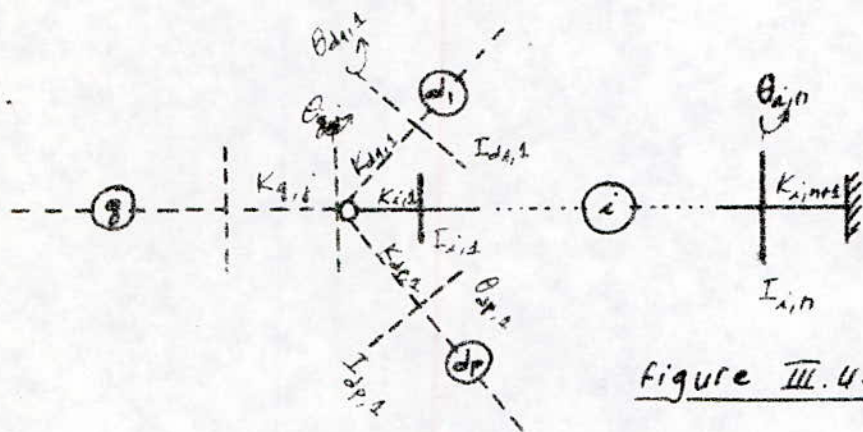


Figure III.4.2

La branche i de type 2 comporte n disques (Fig. III.5.2).

Soient g le numéro de la branche située à gauche du nœud, et $d_1, \dots, i, \dots, d_p$ les numéros des branches situées à droite du nœud.

- la force vive des disques de la branche i est:

$$2T = \sum_{j=1}^n I_{i,j} \dot{\theta}_{i,j}^2$$

- la fonction de force s'écrit:

$$U = -\frac{K_{i,g}}{2} (\theta_{g,i} - \theta_{i,1})^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n+1} K_{i,j} (\theta_{i,j-1} - \theta_{i,j})^2$$

En appliquant l'équation de Lagrange on aura:

$$I_{i,i} \ddot{\theta}_{i,i} + \theta_{i,i} (K_{i,i} + K_{i,i+1}) - \theta_{i,i+1} K_{i,i+1} - \theta_{q,i} K_{q,i} = 0$$

$$I_{i,j} \ddot{\theta}_{i,j} - \theta_{i,j+1} K_{i,j} + \theta_{i,j} (K_{i,j} + K_{i,j+1}) - \theta_{i,j+1} K_{i,j+1} = 0 \quad \forall j \in [2, n-1]$$

$$I_{i,n} \ddot{\theta}_{i,n} - \theta_{i,n-1} K_{i,n} + \theta_{i,n} (K_{i,n} + K_{i,n+1}) = 0$$

Remarque: lorsque l'extrémité droite d'une branche de type 2 est libre, les équations du mouvement sont obtenues en posant: $K_{i,m+1} = 0$.

III.4.3/ Equations du mouvement des disques des branches de type 3:

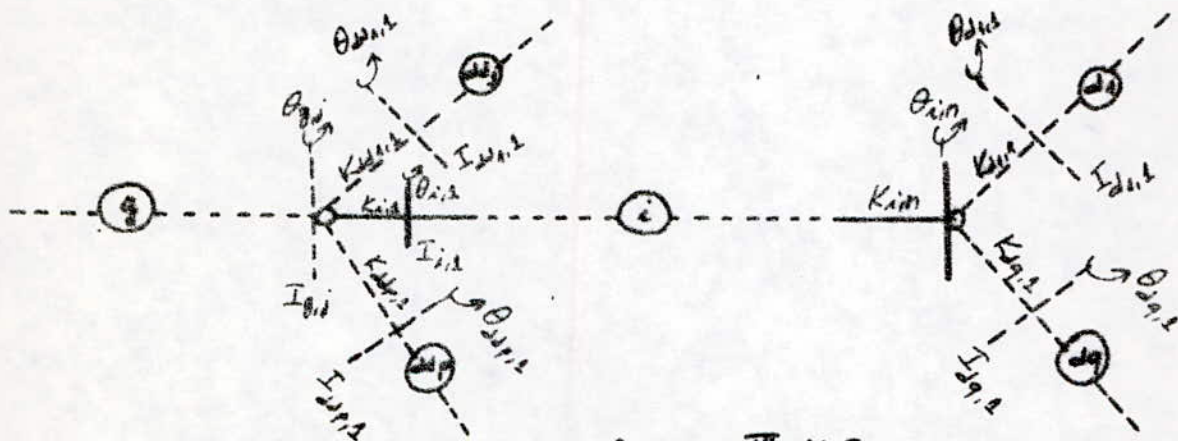


Figure III. 4.3

la branche i de type 3 comporte n disques (fig. III. 4.3).

- la force vive des disques de la branche i est:

$$2T = \sum_{m=1}^n I_{i,m} \dot{\theta}_{i,m}^2$$

- la fonction de force a pour expression:

$$U = - \frac{K_{q,i}}{2} (\theta_{q,i} - \theta_{i,i})^2 - \frac{1}{2} \sum_{m=2}^n K_{i,m} (\theta_{i,m-1} - \theta_{i,m})^2 - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^q K_{l,i} (\theta_{i,m} - \theta_{l,i})^2$$

D'après les équations de Lagrange, le système d'équations différentielles du mouvement s'écrit:

$$I_{i,1} \ddot{\theta}_{i,1} + \theta_{i,1} (K_{i,1} + K_{i,2}) - \theta_{i,2} K_{i,2} - \theta_{g,i} K_{i,1} = 0$$

$$I_{i,m} \ddot{\theta}_{i,m} - \theta_{i,m-1} K_{i,m} + \theta_{i,m} (K_{i,m} + K_{i,m+1}) - \theta_{i,m+1} K_{i,m+1} = 0 \quad \forall m \in [2, n-1]$$

$$I_{i,n} \ddot{\theta}_{i,n} - \theta_{i,n-1} K_{i,n} + \theta_{i,n} (K_{i,n} + \sum_{t=2}^q K_{d_{i,t}}) - \sum_{t=1}^q K_{d_{t,i}} \theta_{d_{t,i}} = 0$$

III.5/ Construction de la matrice globale d'inertie:

III.5.1/ Matrice locale d'inertie d'une branche:

Pour la branche i à n_i disques, le système différentiel précédent (quelque soit le type de branche) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$[M_i](\ddot{\theta}_i) + [L_i](\theta_i) = 0$$

avec: $[M_i]$: matrice locale d'inertie, carrée d'ordre n_i , de la branche i .

$(\ddot{\theta}_i)$: matrice colonne des $\ddot{\theta}_{i,j}$

$[L_i]$: matrice locale de rigidité, carrée d'ordre n_i , de la branche i .

(θ_i) : matrice colonne des $\theta_{i,j}$.

La matrice $[M_i]$ est une matrice diagonale.

$$[M_i] = \begin{array}{|c|} \hline I_{i,1} & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{i,n_i} \\ \hline \end{array}$$

III.3.2/ Matrice globale d'inertie du système:

Soient : $1, \dots, m$: les numéros des branches composent le système.

n_i : le nombre de disques par branche. avec $i = 1, \dots, m$

Les éléments de la matrice colonne $(\ddot{\theta})$ sont rangés dans l'ordre correspondant aux numéros des branches.

$$(\ddot{\theta}) = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{1,1} \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_{1,n_1} \\ \ddot{\theta}_{2,1} \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_{2,n_2} \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_{m,n_m} \end{bmatrix}$$

La matrice globale d'inertie $[M]$ est à partir des matrices locales $[M_i]$.

$$[M] = \begin{bmatrix} \boxed{I_{1,1}} & & & \\ & \boxed{I_{2,1}} & & \\ & & \boxed{I_{2,n_2}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \boxed{I_{m,1}} \\ & & & & & \boxed{I_{m,n_m}} \end{bmatrix}$$

La matrice $[M]$ est une matrice carrée, diagonale, d'ordre $\sum_{i=1}^m n_i$.

les éléments non nuls de la dernière ligne de la matrice $[L1^i]$ sont :

$$L1^i_{n_i, n_i} = -K_{i, n_i}$$

$$L1^i_{n_i, n_i} = K_{i, n_i} + \sum_{j=1}^p K_{d_j, 2}$$

avec : p : nombre de branches situées à droite du nœud
 Les autres éléments de la matrice $[L1^i]$ sont ceux de la sous-matrice $[SL^i]$.

Des termes de type $-K_{d_j, 2}$ ($j \in [1, p]$) sont situés sur la dernière ligne de la matrice $[L1^i]$. Les colonnes dans lesquelles se placent ces éléments correspondent aux colonnes des paramètres $\theta_{d_j, 2}$ dans la matrice globale de rigidité $[GL]$.
 La matrice $[L1^i]$ est représentée (figure III.6.11) avec les éléments extérieurs.

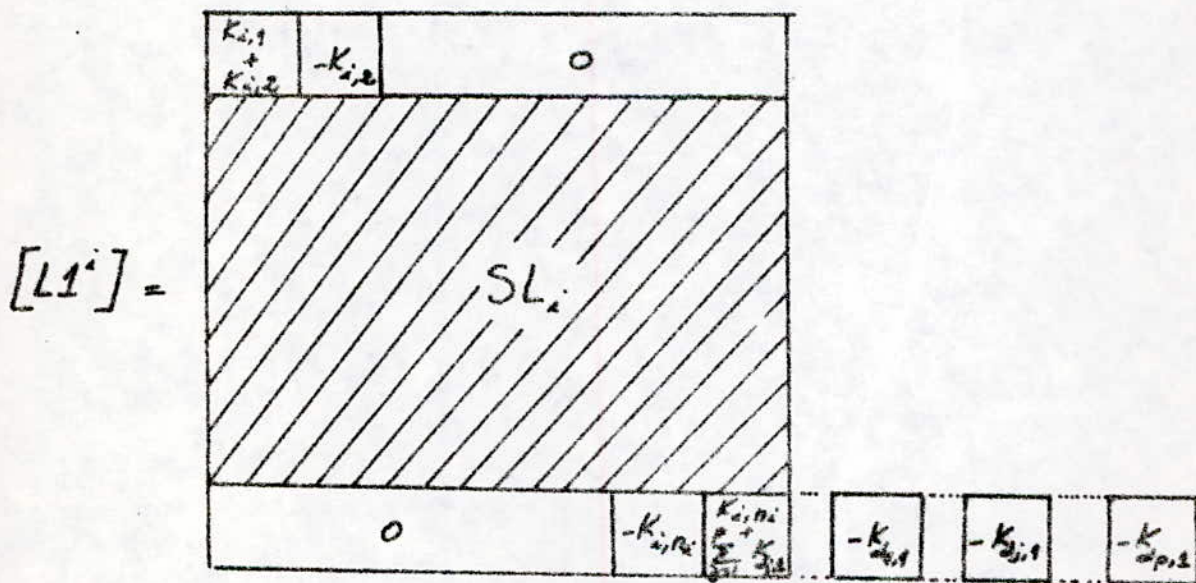


Figure III.6.11

6.1.2/ Matrice locale de rigidité des branches de type 2:

Les éléments non nuls de la 1^{ère} ligne de la matrice locale de rigidité $[L2^i]$, d'une branche i de type 2 comportant n_i disques sont définis par :

$$L2_{1,1}^i = K_{i,1} + K_{i,2}$$

$$L2_{1,2}^i = -K_{i,2}$$

Les éléments non nuls de la dernière ligne de la matrice

$$[L2^i] \text{ sont : } L2_{n_i, n_i}^i = -K_{i,n_i}$$

$$L2_{n_i, n_i}^i = K_{i,n_i} + K_{i,n_i+2}$$

Les autres éléments de la matrice $[L2^i]$ sont ceux de la sous-matrice $[SL_i]$.

Soit g le numéro de la branche située à gauche du noeud comportant n_g disques. Le terme $-K_{i,1}$ est situé sur la 1^{ère} ligne de $[L2^i]$ et dans la colonne du paramètre θ_{g,n_g} de la matrice globale de rigidité $[GL]$.

La matrice $[L2^i]$ est représentée (figure III.6.1.2) avec son élément extérieur.

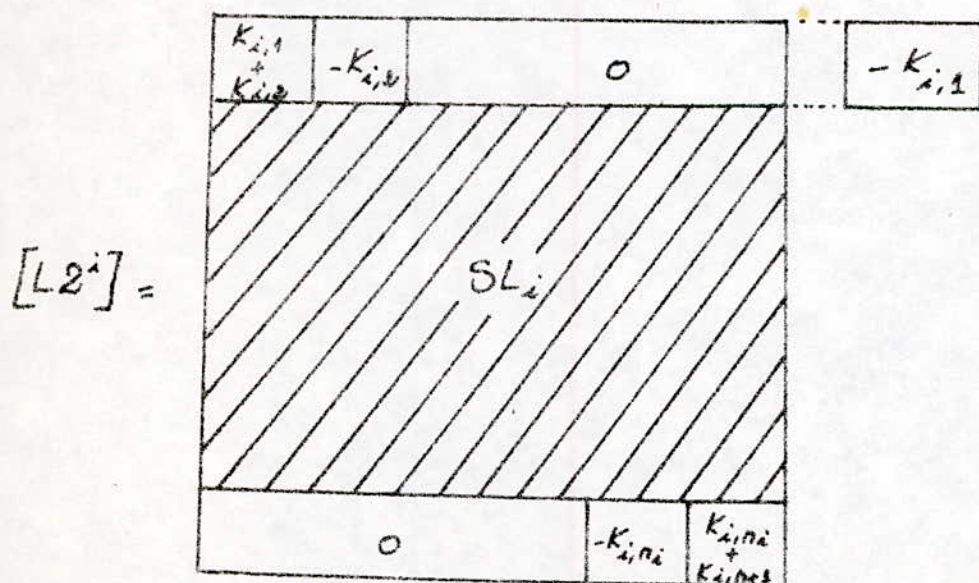
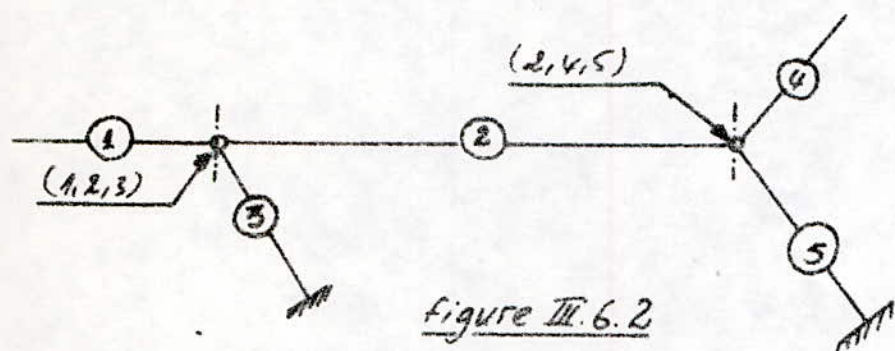


Figure III.6.1.2

III.6.2/ Matrice globale de rigidité:

La matrice globale de rigidité $[GL]$ est constituée par l'ensemble des matrices locales de rigidité des branches du système.

Nous allons prendre l'exemple de l'installation dont le schéma simplifié est représenté figure III.6.2.



Les branches 1, 2, 3, 4 et 5 ont respectivement n_1, n_2, n_3, n_4 et n_5 branches.

- La branche 1 est de type 1.
- Les branches 3, 4 et 5 sont de type 2
- La branche 2 est de type 3.

Soient $[L1^1], [L3^2], [L2^3], [L2^4], [L2^5]$ Les matrices locales de rigidité des branches 1, 2, 3, 4 et 5.

L'emplacement de la matrice $[L1^1]$ dans le tableau $[GL]$ est limité par les lignes 1 et n_1 et par les colonnes 1 et n_1 .

L'emplacement de la matrice $[L3^2]$ dans le tableau $[GL]$ est limité par les lignes n_1+1 et n_1+n_2 et les colonnes n_1+1 et n_1+n_2 .

Plus généralement, la matrice $[LT^i]$ ($T=1, 2$ ou 3 et $i \in [2, 5]$), dans le tableau $[GL]$, est limitée par les lignes: $1 + \sum_{j=1}^{i-1} n_j$ et $\sum_{j=1}^i n_j$ et les colonnes: $1 + \sum_{j=1}^{i-1} n_j$ et $\sum_{j=1}^i n_j$.

Une représentation symbolique de la matrice $[GL]$ est donnée figure III.6.2.2.

Les éléments représentés par des carrés noirs a, b, c et d sont les éléments extérieurs aux matrices locales de rigidité définies au paragraphe précédent. Ils ont pour valeur :

$$a = -K_{2,1} ; \quad b = -K_{3,1} ; \quad c = -K_{4,1} ; \quad d = -K_{5,1}$$

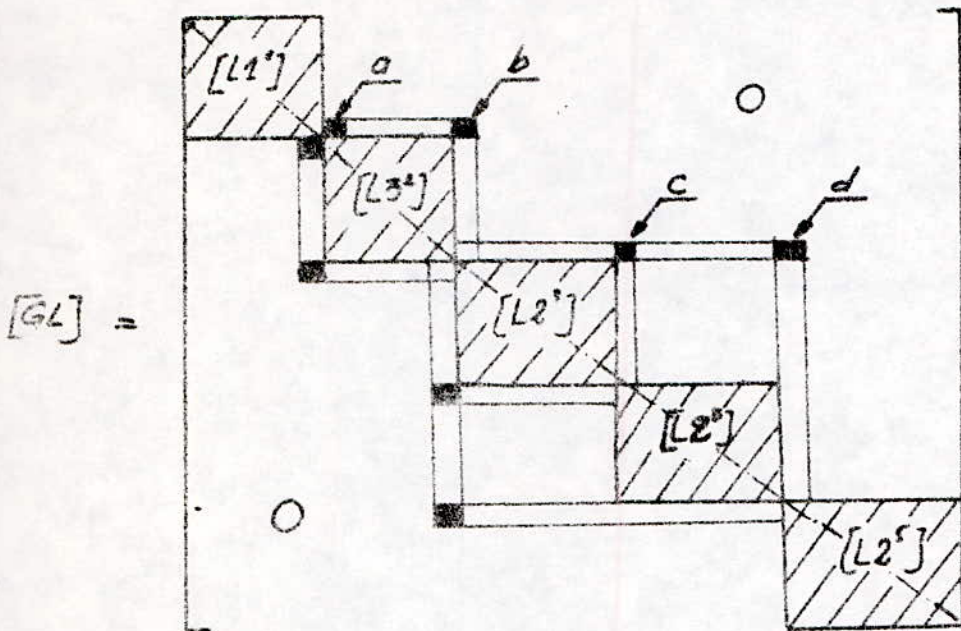


Figure III. 6.2.2.

Remarque :

Les matrices de raideurs des branches sont symétriques par rapport à la diagonale principale ainsi que la matrice globale de raideur $[GL]$.

III.7/ Matrice de connexion:

III.7.1/ Propriétés:

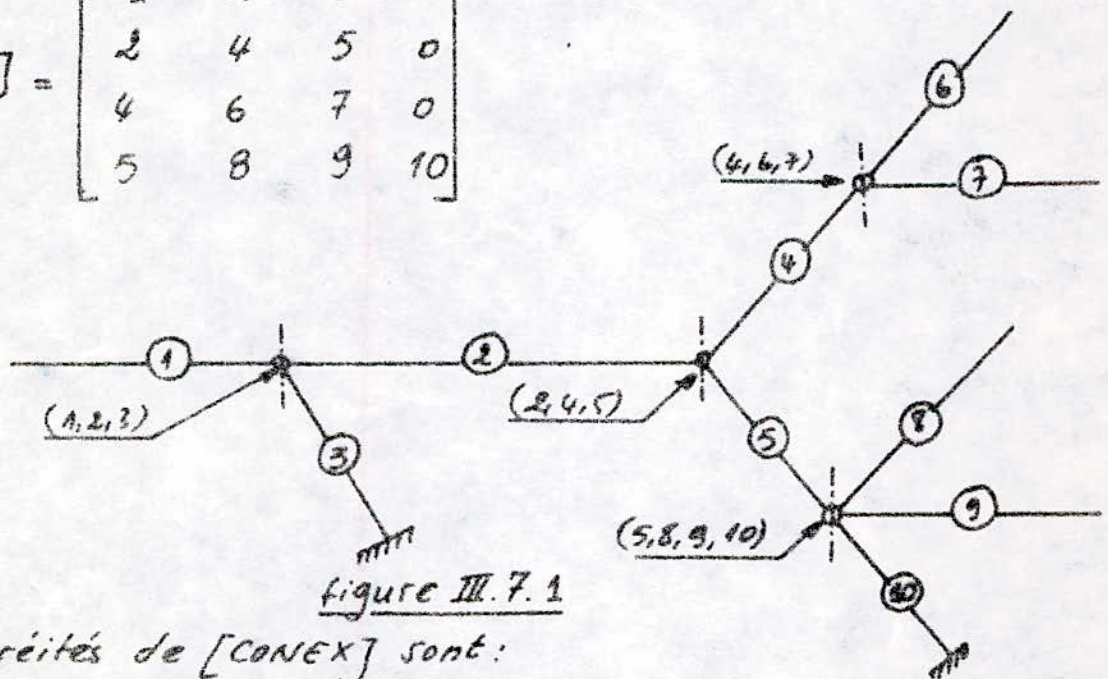
Nous appellerons [CONEX] la matrice dont les éléments d'une ligne sont les indices du repère d'un noeud.

Cette matrice comporte autant de lignes qu'il ya de noeuds de ramification dans le système.

Le nombre de colonne de cette matrice est égal au nombre maximum de branches qui sont issues d'un noeud. Les éléments non atteints sont égaux à 0.

Le tableau ci-dessous, représente la matrice de connexion du système, décrit figure III.7.1.

$$[\text{CONEX}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$



Les propriétés de [CONEX] sont:

- 1°/ Tous les numéros des branches apparaissent au moins une fois et au plus deux fois dans la matrice [CONEX].
- 2°/ Toute ligne de [CONEX] possède au moins trois éléments non nuls.
- 3°/ Un numéro de branche ne peut apparaître qu'une seule fois dans une ligne de la matrice [CONEX].
- 4°/ Un numéro de branche ne peut apparaître au plus qu'une seule fois dans la 1^{ère} colonne.

2.7.2/ Utilisation:

III.7.2.1/ Détermination du type de branche à partir de la matrice de connexion:

Branche de type 1:

Si le numéro i d'une branche apparaît une seule fois et seulement dans la première colonne de la matrice [CONEX] alors la branche i est de type 1.

Soit $(i, d_{11}, \dots, d_{p1}, 0, \dots, 0)$ la ligne de la matrice [CONEX] dans laquelle apparaît i .

Branche de type 2:

Si le numéro i d'une branche apparaît une seule fois dans une colonne autre que la 1^{ère} de la matrice [CONEX] alors la branche i est de type 2.

Soit $(q, d_{11}, \dots, i, \dots, d_{p1}, 0, \dots, 0)$ la ligne de la matrice [CONEX] dans laquelle apparaît i .

Branche de type 3:

Si le numéro i d'une branche apparaît deux fois dans la matrice [CONEX] alors la branche est de type 3.

Soient: $(i, d_{11}, \dots, d_{q1}, 0, \dots, 0)$ et $(q, d_{11}, \dots, i, \dots, d_{p1}, 0, \dots, 0)$

les deux lignes de la matrice [CONEX] dans lesquelles apparaît i .

III.7.2.2/ Construction de la matrice globale de rigidité:

Soient n_1, \dots, n_p le nombre de disques des branches 1, 2, ..., p qui constituent le schéma équivalent. Les types de ces branches étant déterminés grâce à la matrice [CONEX]. Il s'agit d'implanter les matrices locales de rigidité et leur éléments extérieurs dans le tableau [GL].

Les éléments des matrices locales de rigidité $[LT^i]$ ($T=1, 2$ ou 3 et $i \in [1, p]$) sont d'abord placés dans le tableau représentant la matrice globale de rigidité [GL], ensuite, les éléments extérieurs aux matrices $[LT^i]$ sont implantés dans [GL] en fonction du type de branche.

Implantation des matrices $[LT^i]$ dans le tableau $[GL]$

L'élément LT_{KL}^i de la matrice $[LT^i]$ deviendra l'élément $GL_{m,j}$ de la matrice $[GL]$. Le 1^{er} indice inférieur est le numéro de ligne, le second le numéro de colonne

d'où : $GL_{m,j} = LT_{KL}^i$ pour K et $L \in [1, n_i]$

avec : si $i = 1$: $m = K$ et $j = L$

si $i \neq 1$: $m = \left(\sum_{o=1}^{i-1} n_o\right) + K$ et $j = \left(\sum_{o=1}^{i-1} n_o\right) + L$

Implantation des éléments extérieurs aux matrices $[LT^i]$ dans le tableau $[GL]$:

- cas des matrices : $[L1^i]$:

D'après la représentation des éléments extérieurs à $[L1^i]$ donnée figure III.7.1.1 :

$$GL_{m,L_j} = -K_{d_j,1} \text{ pour } j \in [1, r]$$

$$\text{avec : } m = \sum_{o=1}^{d_j-1} n_o$$

$$L_j = \left(\sum_{o=1}^{d_j-1} n_o\right) + 1 \text{ pour } j \in [1, r]$$

où r : indice des branches issues du même noeud que la branche.

- cas des matrices : $[L2^i]$:

D'après la représentation des éléments extérieurs à $[L2^i]$ donnée figure III.6.1.2 :

$$GL_{m,L} = -K_{i,1}$$

avec : si $i = 1$: $m = 1$

si $i \neq 1$: $m = \left(\sum_{o=1}^{i-1} n_o\right) + 1$ et $L = \sum_{o=1}^i n_o$

- cas des matrices : $[L3^i]$:

D'après la représentation des éléments extérieurs à $[L3^i]$ donnée figure III.6.1.3 : $GL_{m,L} = -K_{i,1}$

$$GL_{s,t_j} = -K_{d_j,1} \text{ pour } t \in [1, r]$$

avec : $\begin{matrix} \text{si } i=1 & m=1 \\ \text{si } i \neq 1 & m = \sum_{o=1}^{i-1} n_o + 1 \end{matrix}$ et $L = \sum_{o=1}^q n_o$

II.8 / Matrice aux pulsations:

Les pulsations propres du système sont égales aux racines carrées des valeurs propres de la matrice: $[c] = [M]^{-1} \times [GL]$.

L'inverse de la matrice $[M]$ diagonale, définie au paragraphe II.6.2 est une matrice diagonale dont les termes non nuls sont:

$$M_{ii}^{-1} = \frac{1}{M_{i,i}}$$

d'où : $C_{i,j} = GL_{i,j} \cdot \frac{1}{M_{i,i}}$

En fonction des moments d'inertie $I_{L,m}$ des disques du modèle nous obtenons:

$$C_{i,j} = GL_{i,j} \cdot \frac{1}{I_{L,m}}$$

pour i et $j \in [1, \sum_{o=1}^p n_o]$ si le système comporte p branches.

avec : $L = q$ si $n_1 + \dots + n_{q-1} < i \leq n_1 + \dots + n_q$

et : $m = j$ si $i \leq n_1$

$$m = j - \sum_{o=1}^{q-1} n_o \text{ si } i > n_1.$$

II.9 / Recherche des pulsations propres et des déformées modales:

Les pulsations propres sont égales aux racines carrées des valeurs propres de la matrice $[c]$.

Les déformées modales sont caractérisées par les composantes des vecteurs propres.

Programme "MAT":

Ce programme permet de calculer les pulsations propres et les déformées modales des lignes d'arbres ramifiées.

Les extrémités des arbres peuvent être libres ou encastrées.
Le programme accepte des installations comportant au plus

11 branches

5 nœuds

20 disques par branche

6 branches par nœud.

Liste des données:

NBN: nombre de nœuds de ramification.

NB: nombre de branches

NMB: nombre maximum de branches issues d'un nœud.

CONEX(I,J): matrice de connexion.

ND(I): nombre de disques par branche.

I = 1, NB

INERT(I,J): moments d'inertie des disques du modèle.

I: numéro de la branche (I = 1, NB)

J: numéro du disque sur la branche (J = 1, ND(I)).

RAID(I,J): raideurs torsionnelles du tronçon du modèle.

I = 1, NB

J = 1, ND(I) + 1.

Noms des variables:

IB: numéro de la branche étudiée.

LT(I,J): matrice locale de rigidité de la branche étudiée

GL(I,J): matrice globale de rigidité.

C(I,J): matrice aux pulsations.

ITYP : caractérise le type de la branche étudiée.

ITYP = 1 la branche est de type 1

ITYP = 2 la branche est de type 2

ITYP = 3 la branche est de type 3.

NEU(I) : Tableau contenant les numéros des branches issues du même noeud que la branche étudiée lorsqu'elle est de type 1 ou 2.

NEUD(I) : numéros des branches issues du noeud de ramification droit de la branche étudiée.

NEUG(I) : numéros des branches issues du noeud de ramification gauche de la branche étudiée.

IPRDR : ordre de la matrice (GL).

Structure du programme:

- Le programme principal fait appel à sept (7) sous-programmes

- Le sous-programme "BTYP" détermine le type de branche et les tableaux NEU(I), NEUD(I) et NEUG(I) à l'aide de la matrice de connexion [CONEX].

- Le sous-programme "SLT" calcul les éléments de la sous-matrice de rigidité locale.

- Le sous-programme "LT1" calcul le dernier élément de la diagonale principale de la matrice locale [LT].

- Le sous-programme "SCLAS1" calcul les éléments extérieurs à la matrice locale de rigidité des branches de type 1 et place ces éléments dans la matrice [GL].

- Le sous-programme "SCLAS2" calcul les éléments extérieurs à la matrice locale de rigidité des branches de type 2 et place ces éléments dans la matrice [GL].

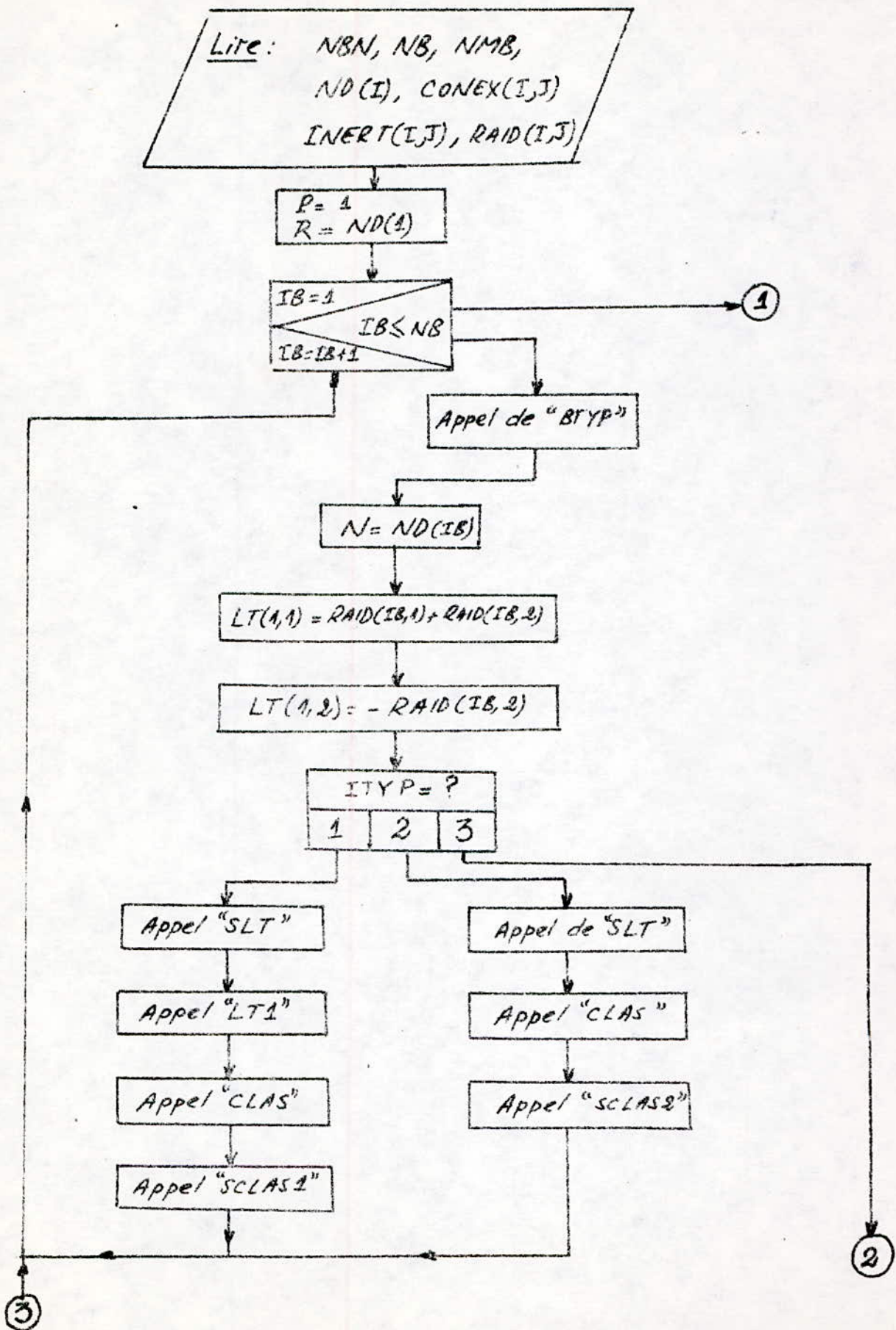
- Le sous-programme "CLAS" place les éléments des matrices de rigidité locale dans la matrice [GL].

- Le sous-programme "JAC" calcul les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice aux pulsations $[C]$.

Les calculs sont faits dans l'ordre suivant:

- soit IB le numéro d'une branche du modèle.
- appel de "BTYP" qui détermine $ITYP$, $NEU(I)$, $NEUD(I)$ et $NEUG(I)$.
- Calcul des éléments de la 1^{ère} et dernière ligne de la matrice de rigidité locale.
- appel du "SLT".
- appel du "LT1" si $ITYP=1$ ou $ITYP=3$.
- appel du S-P "CLAS".
- appel du S-P "SCLAS1" si $ITYP=1$
- appel du S-P "SCLAS2" si $ITYP=2$
- appel de "SCLAS1" et "SCLAS2" si la branche est du type 3.
- Prendre une autre branche et recommencer toutes les opérations précédentes.
- Lorsque toutes les branches ont été étudiées, appel du S-P: "JAC" pour obtenir les pulsations propres et les vecteurs propres.

Organigramme du programme principal



3

2

Appel "SLT"

I = 1
I ≤ NMB
I = I + 1

NEU(I) = NEUD(I)

Appel "LT1"

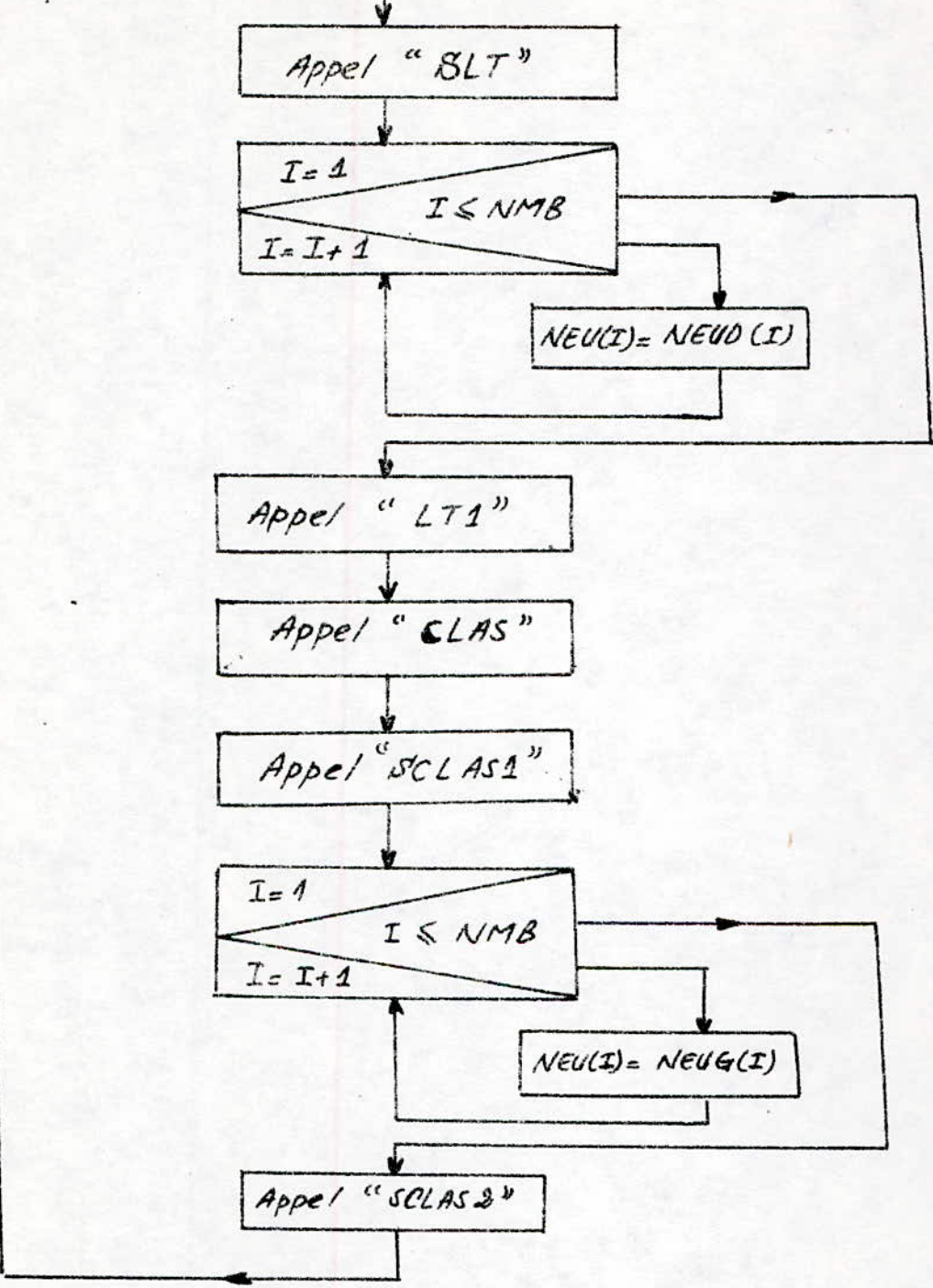
Appel "CLAS"

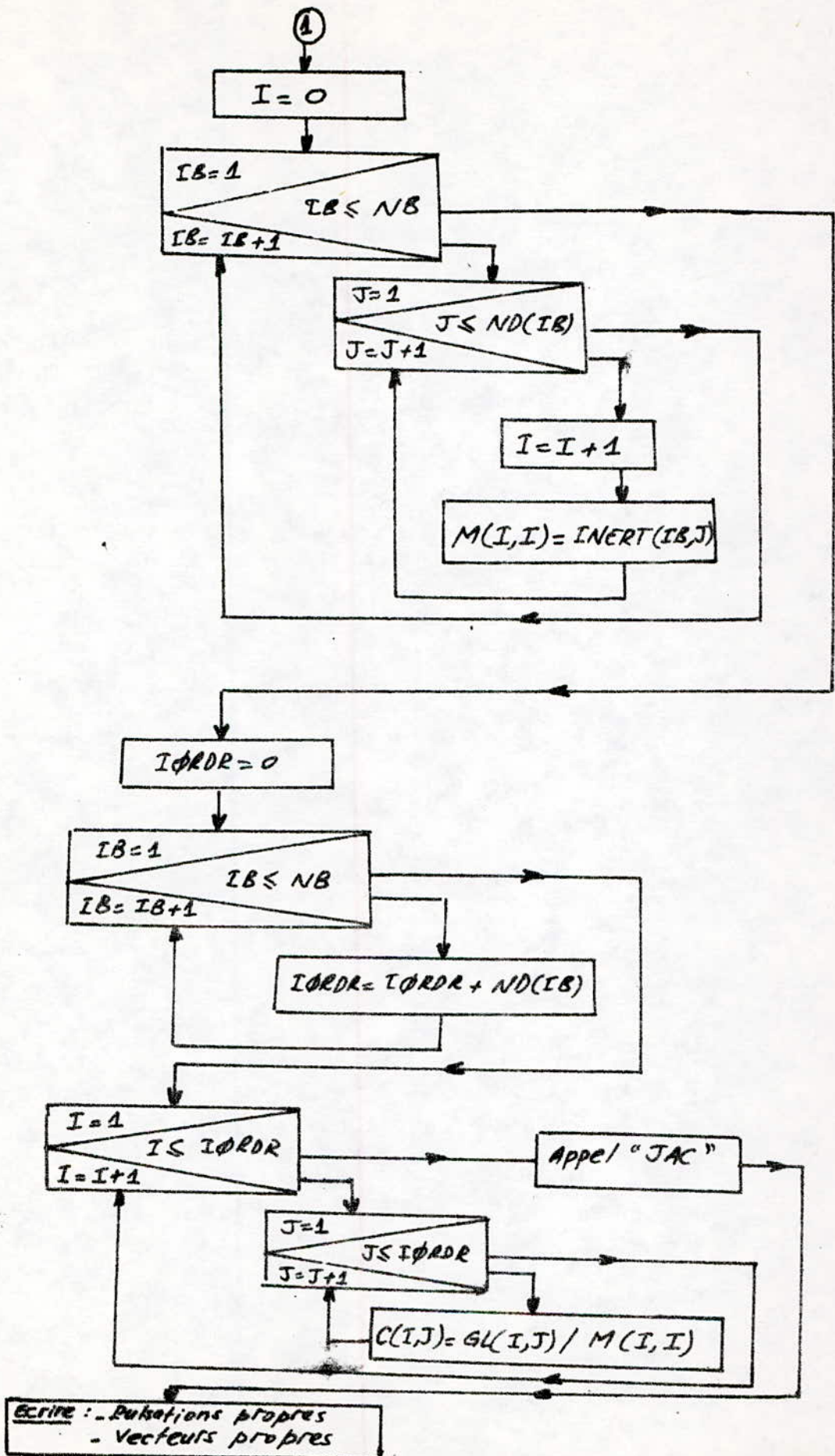
Appel "SCLAS1"

I = 1
I ≤ NMB
I = I + 1

NEU(I) = NEUG(I)

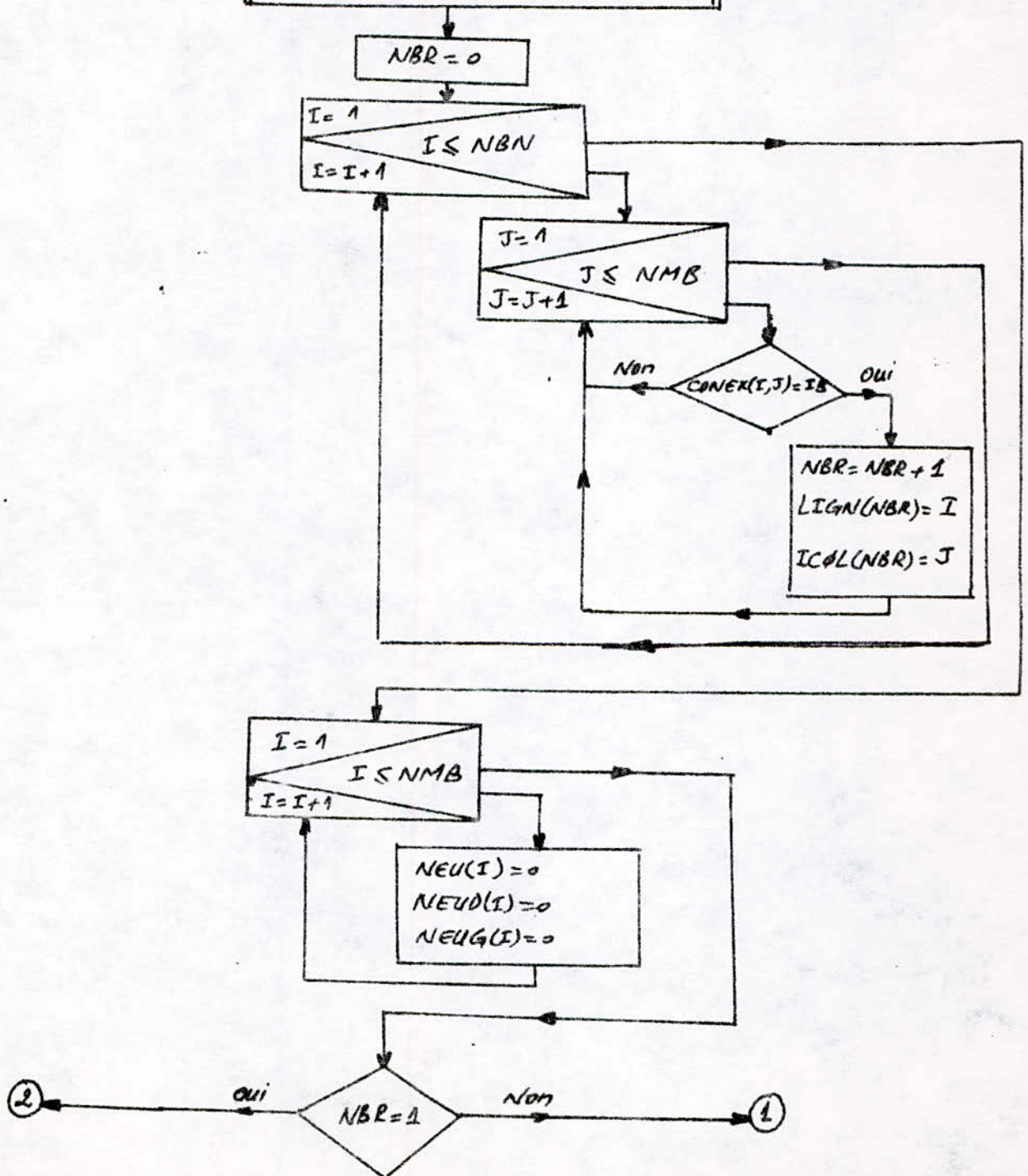
Appel "SCLAS2"

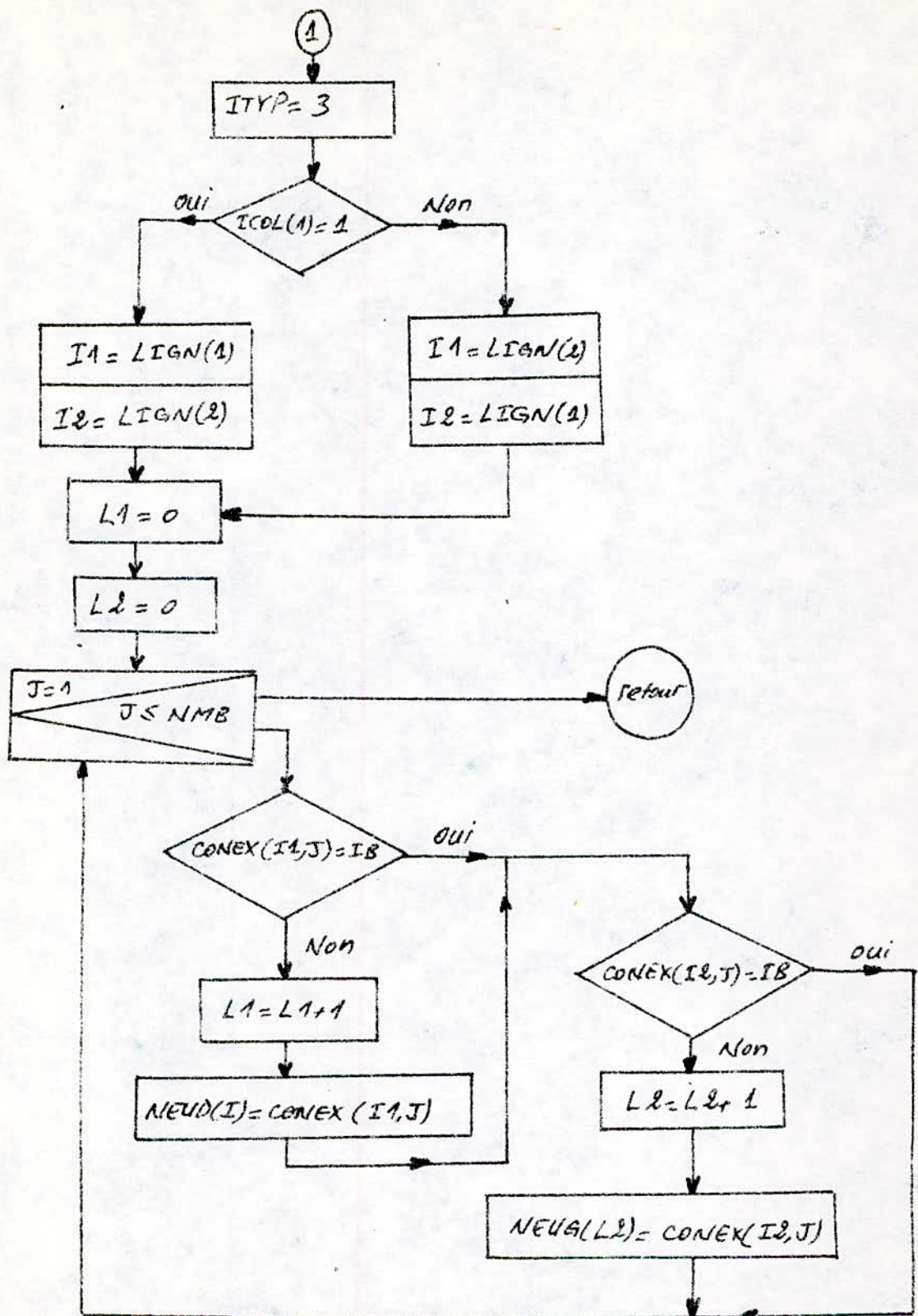


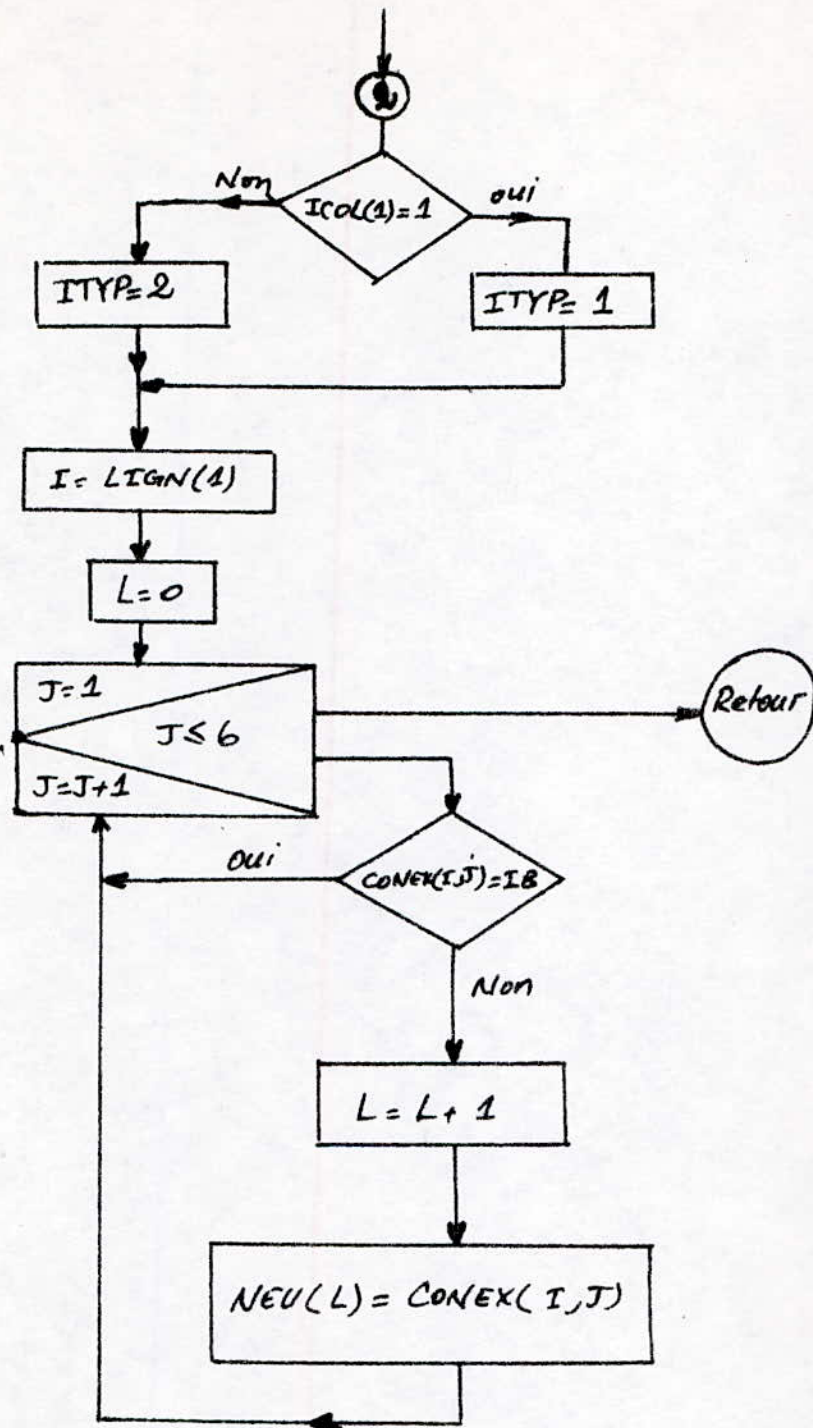


Organigramme du sous-programme: "BTYP"

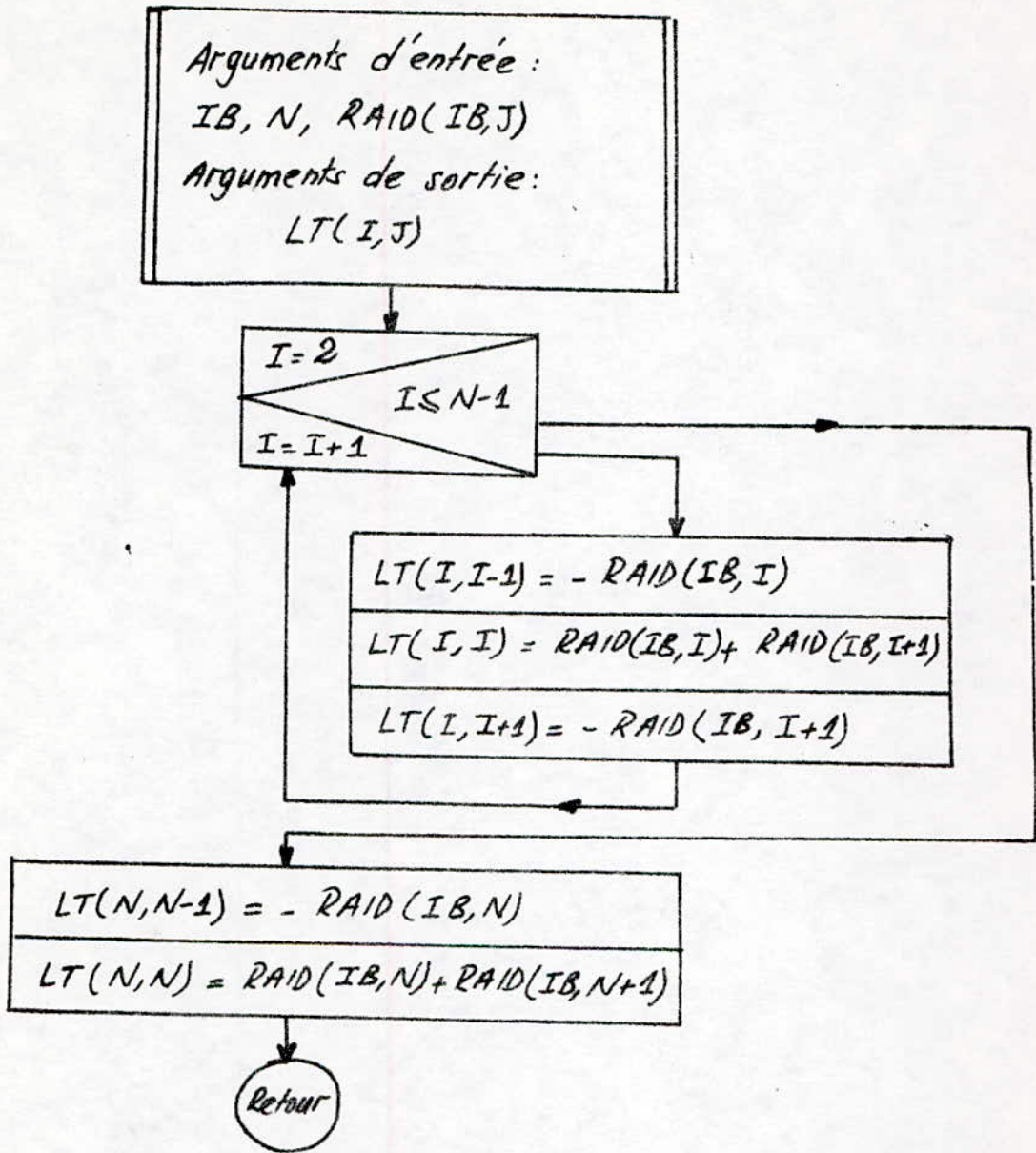
Arguments d'entrée:
 $IB, NBN, CONEX(I,J), NMB$
Argument de sortie:
 $ITYP, NEU(I), NEUD(I), NEUG(I)$



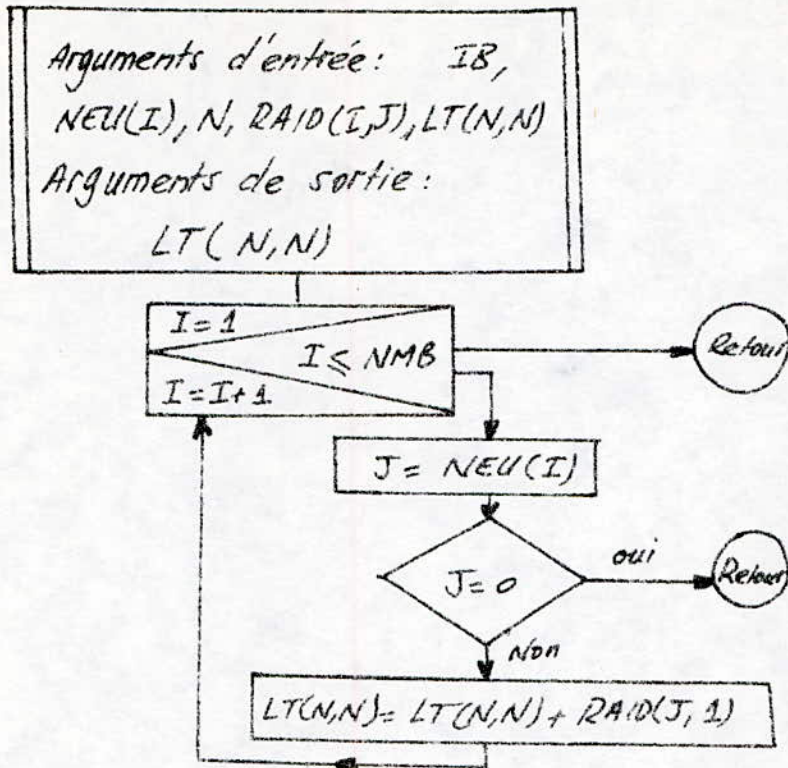




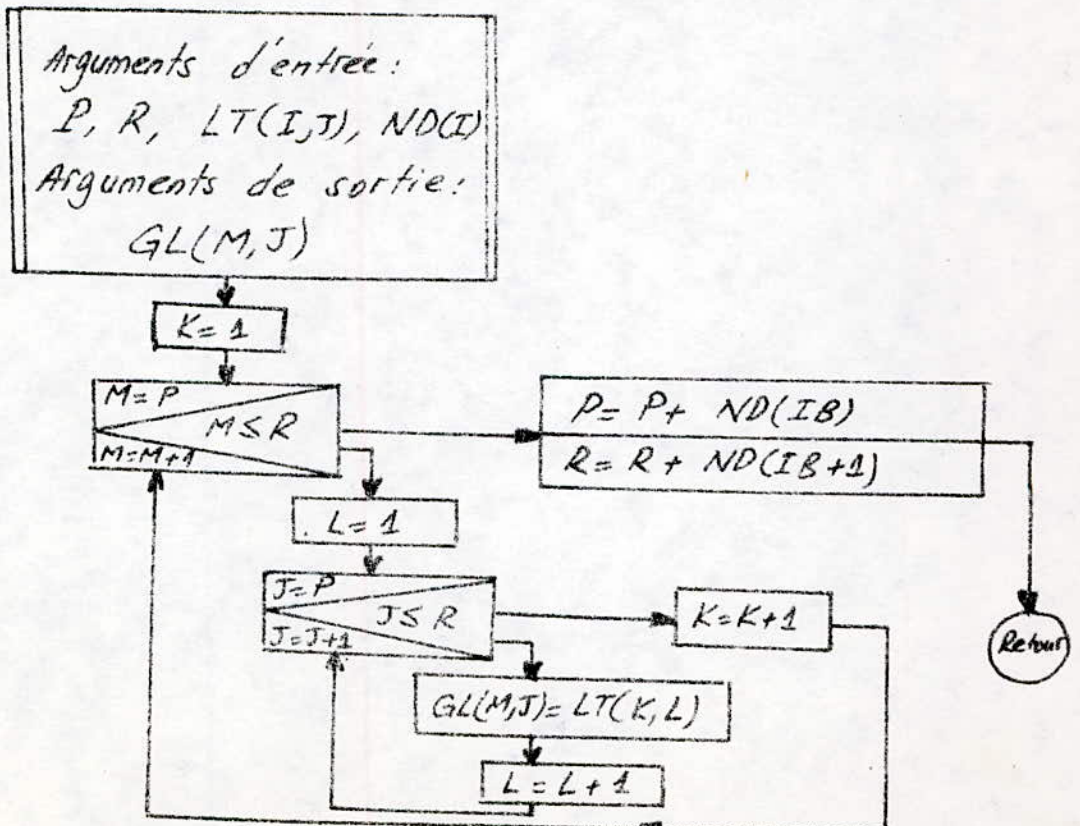
Organigramme du sous-programme: "SLT"



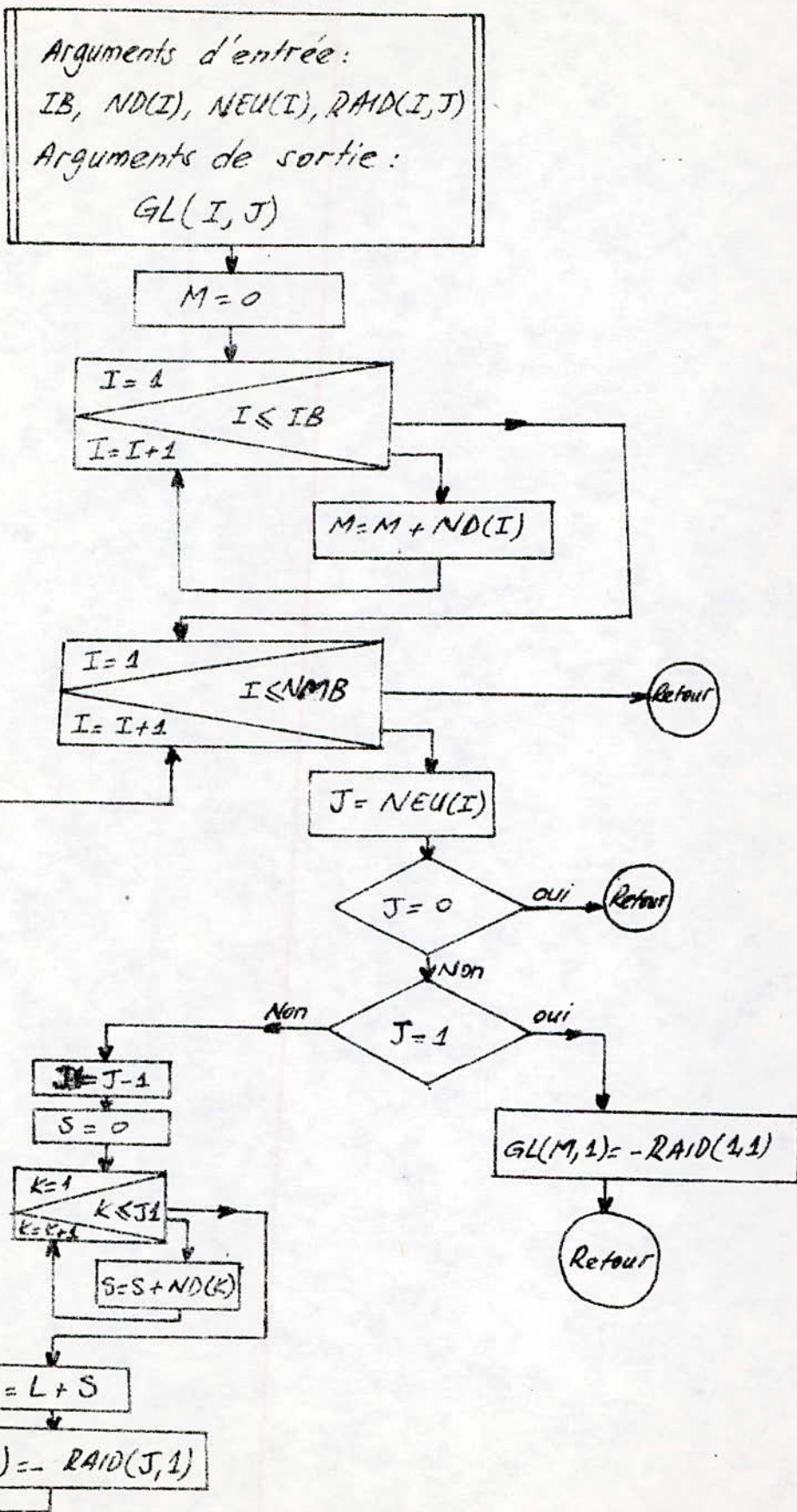
Organigramme du sous-programme: "LT1"



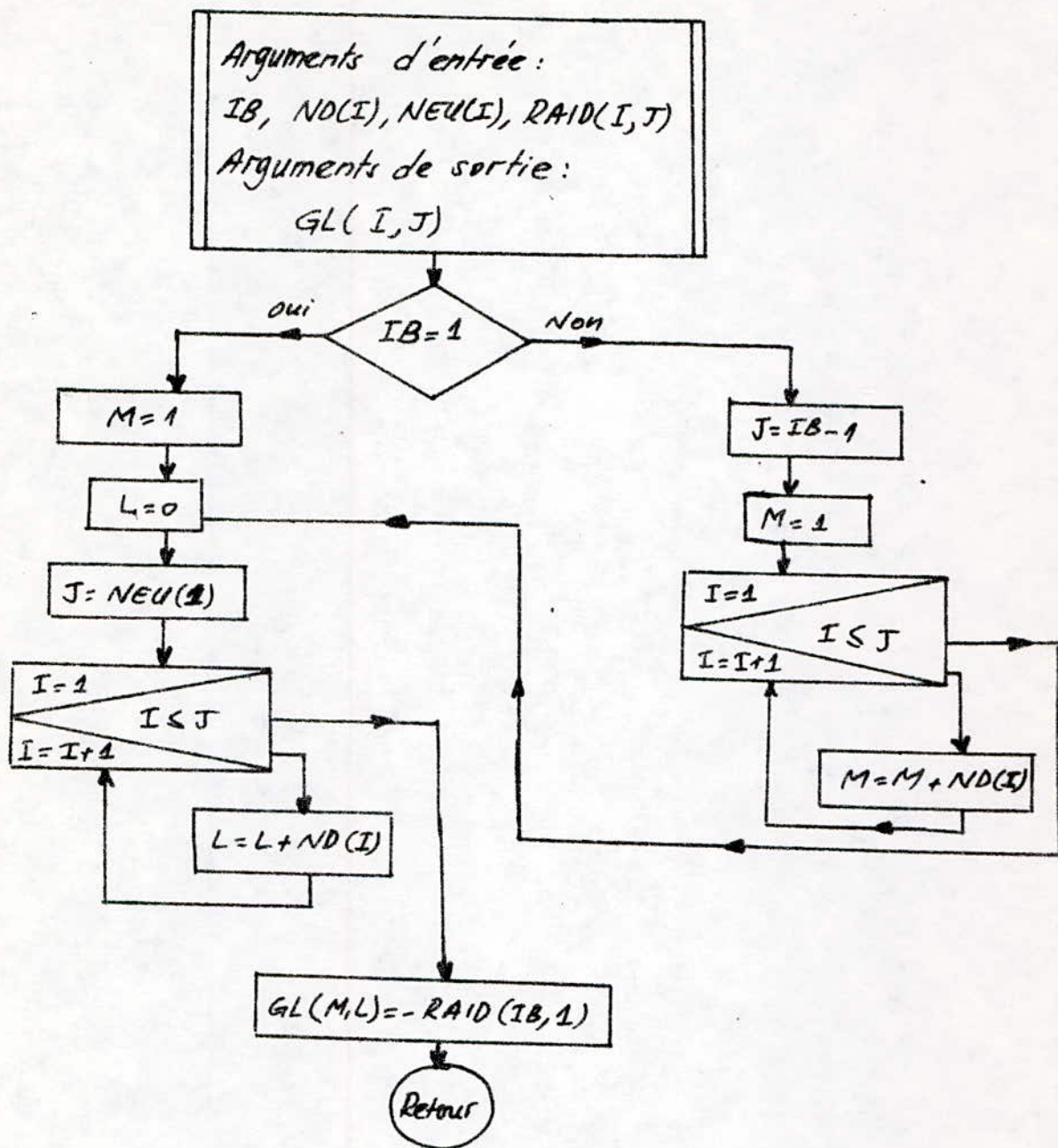
Organigramme du sous-programme: "CLAS"



Organigramme du sous-programme: "SCLAS1"

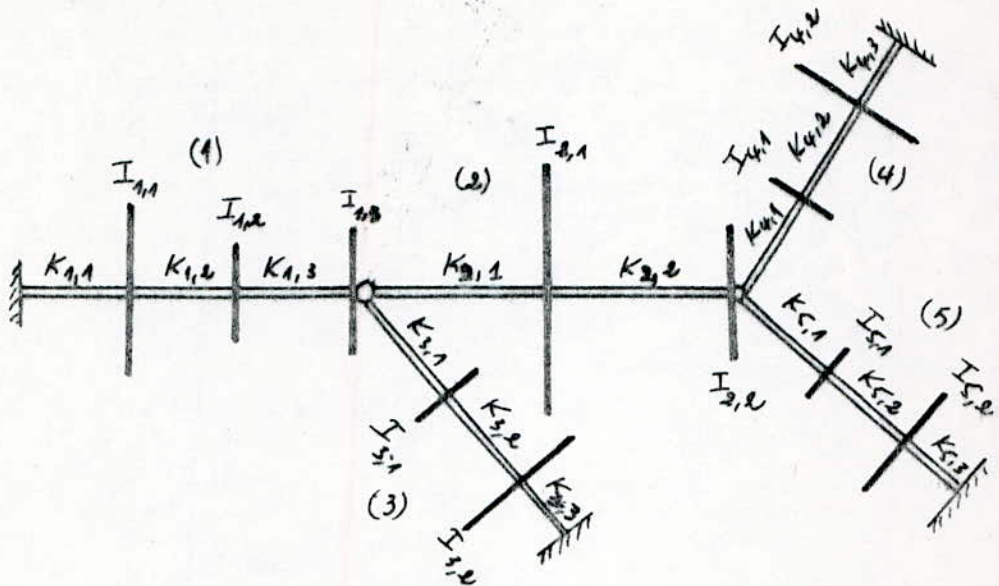


Organigramme du sous-programme : "SCLAS2"



III.11/ Application:

Preons comme exemple l'installation dont le modèle équivalent ramené au régime moteur - est donné par la figure ci-dessous :



liste des données :

$NBN = 2$ (nombre de nœuds)

$NB = 5$ (nombre de branches)

$NMB = 3$ (nombre maximum de branches issues d'un nœud)

$$[CONEX] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$ND(1) = 3$$

$$ND(3) = 2$$

$$ND(5) = 2$$

$$ND(2) = 2$$

$$ND(4) = 2$$

$$K_{1,1} = K_{3,3} = K_{4,3} = K_{5,3} = 0,1 \cdot 10^5 \text{ [mN/rd]}$$

$$K_{1,2} = K_{3,2} = K_{4,2} = K_{5,2} = 0,315 \cdot 10^4 \quad \gg$$

$$K_{1,3} = K_{3,1} = K_{4,1} = K_{5,1} = 0,45 \cdot 10^4 \quad \gg$$

$$K_{2,1} = K_{2,2} = 0,526 \cdot 10^4 \text{ [mN/rd]}.$$

$$I_{1,1} = I_{3,2} = I_{4,2} = I_{5,2} = 0,875 \text{ [mN} \cdot \text{s}^2]$$

$$I_{1,2} = I_{3,1} = I_{4,1} = I_{5,1} = 0,0306 \quad \gg$$

$$I_{1,3} = I_{2,2} = 0,0865 \text{ [mN} \cdot \text{s}^2] \quad ; \quad I_{2,1} = 8,75 \text{ [mN} \cdot \text{s}^2]$$

VALEUR PROPRE = 12753.1

PULSATION PROPRE = 112.952

BRANCHE NO: 1

=====

DISQUE	!	DEFORMEE
1	!	.330343
2	!	2.27369
3	!	1.73311

BRANCHE NO: 2

=====

DISQUE	!	DEFORMEE
1	!	.330343
2	!	2.27369

BRANCHE NO: 3

=====

DISQUE	!	DEFORMEE
1	!	.330343
2	!	2.27369

BRANCHE NO: 4

=====

DISQUE	!	DEFORMEE
1	!	.330343
2	!	2.27369

BRANCHE NO: 5

=====

DISQUE	!	DEFORMEE
1	!	.330343
2	!	2.27369

VALEUR PROPRE = 15028.6

PULSATION PROPRE = 122.591

BRANCHE NO: 1

```
=====
DISQUE      !  DEFORMEE
-----
. 1         !    .313936
-----
. 2         !   -1.58201
-----
. 3         !    1.81663
-----
```

BRANCHE NO: 2

```
=====
DISQUE      !  DEFORMEE
-----
. 1         !    .313936
-----
. 2         !   -1.58201
-----
```

BRANCHE NO: 3

```
=====
DISQUE      !  DEFORMEE
-----
. 1         !    .313936
-----
. 2         !   -1.58201
-----
```

BRANCHE NO: 4

```
=====
DISQUE      !  DEFORMEE
-----
. 1         !    .313936
-----
. 2         !   -1.58201
-----
```

BRANCHE NO: 5

```
=====
DISQUE      !  DEFORMEE
-----
. 1         !    .313936
-----
. 2         !   -1.58201
-----
```

VALEUR PROPRE = .110127E+07

PULSATION PROPRE = 1049.41

BRANCHE NO: 1

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! -.326624E-01

2 ! .709391E-03

3 ! -.273967E-01

BRANCHE NO: 2

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! -.326624E-01

2 ! .709391E-03

BRANCHE NO: 3

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! -.326624E-01

2 ! .709391E-03

BRANCHE NO: 4

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! ! -.326624E-01

2 ! .709391E-03

BRANCHE NO: 5

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! -.326624E-01

2 ! .709391E-03

VALEUR PROPRE = .157353E+07

PULSATION PROPRE = 1254.4

BRANCHE NO: 1

=====

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! .313938

2 ! -1.48098

3 ! 1.41686

BRANCHE NO: 2

=====

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! .313938

2 ! -1.48098

BRANCHE NO: 3

=====

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! .313938

2 ! -1.48098

BRANCHE NO: 4

=====

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! .313938

2 ! -1.48098

BRANCHE NO: 5

=====

DISQUE ! DEFORMEE

1 ! .313938

2 ! -1.48098

***** F I N *****

Conclusion :

D'après notre étude, on peut conclure que :

- La méthode d'Holzer, beaucoup plus facile à mettre en œuvre surtout pour les lignes d'arbres non ramifiées, ne peut s'appliquer aisément qu'à des systèmes à un seul nœud. En outre, du fait de l'introduction d'une valeur approchée de la pulsation et de la réduction du système à un modèle simplifié, le nombre de valeurs propres obtenu est très limité et imprécis, et le temps de recherche de ces valeurs peut aussi s'avérer très long.

- Malgré la difficulté de l'obtention de la matrice globale de raideurs du système, la méthode matricielle permet d'étudier un système avec un nombre de nœuds théoriquement illimité et d'obtenir toutes les valeurs propres désirées. Elle est aussi beaucoup plus rapide et plus précise que la méthode d'Holzer.

Cette deuxième méthode s'avère donc beaucoup plus utile et plus efficace que la méthode d'Holzer pour les systèmes ramifiés.

- Néanmoins, je ne pourrais terminer cette étude sans citer le cas important des lignes d'arbres complexes (comportant : différentiel ou boucle) qui pourrait faire une suite à cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

1^o/ *Projet de fin d'études :*

"Programmation pour la détermination des pulsations propres et déformées modales des arbres en vibration de torsion" M. Laaroussi

2^o/ *"Vibrations Mécaniques"*

D. Hartog

3^o/ *"Engineering vibrations"*

A. Jacobsen

4^o/ *"Contribution à l'étude des arbres
Application aux vilebrequins"*

L. Guy.

5^o/ *"Théorie des vibrations à l'usage de l'ingénieur"*

S. Timoshenko

6^o/ *"Vibrations des machines tournantes et des structures"
(tome 2)*

R. Bigret

7^o/ *"Une présentation de la méthode des éléments finis"*

G. Dhatt

G. Touzot

