

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

MÉCANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

CALCUL DE LA
STRUCTURE D'UN ARROSOIR ROTATIF
Par La Méthode des éléments finis

Proposé par :

P.M.A.

Etudié par :

N. SETTOU

Dirigé par :

M. TAZI

PROMOTION

JUIN 1987

Ministère de l'enseignement supérieur

وزارة التعليم العالي

Ecole nationale polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département de mécanique

فرع الهندسة الميكانيكية

Promoteur: Tazi Mohamed

المكتبة - المكتبة
BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

الموجه: تازي محمد

Elève ingénieur: Settou N

الطالب المهندس: ستو نورالدين

العنوان: حساب خبصل لآلة رش دورانية بطريقة العناصر المحدودة.
الملخص: يهدف عملنا هذا إلى دراسة سكونية وديناميكية للهياكل المرصبة من العتبات.
الدراسة السكونية تسمح لنا بإيجاد الإجهادات في مختلف العناصر، بينما ندرسنا الدراسة الديناميكية من حساب الترددات والأنشعة الذاتية المرافقة. وقد أعدنا العمل من الدراستين برنامجاً معلوماتياً.

Sujet: Calcul de la structure d'un arrosoir rotatif par éléments finis

Resumé: L'objet de notre travail consiste en l'étude statique et dynamique des structures en éléments poutres. L'étude statique permet de déterminer les contraintes dans les différents éléments. L'étude dynamique permet le calcul de fréquences et vecteurs propres, chacun de ces calculs est déterminé par un logiciel.

Subject: Calculus structure for a rotating irrigation system by finite elements method.

Abstract: The goal of our work consists in the static and dynamic study of a structure composed of beam elements. In both cases a program using finite elements has been developed. This program enables us to determine in static case, the stresses in each element whereas in the dynamic case, the natural frequencies and mode shapes of the entire structure have been calculated.

REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية العليا للعلوم والتقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à monsieur TAZI Mohamed qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre dans ce travail, ainsi que monsieur S. RECHAK et tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet trouvent ici ma sincère gratitude.

S. TA

DEDICACES

A

mes parents

mes frères et sœurs

toute la famille

et mon ami f. BELBLIDIA

TABLE DE MATIERES

Introduction	1
Chap. 1 : Généralités	3
1.1. Présentation de la méthode des éléments finis	4
1.2. Description de la structure	8
Chap. 2 : Méthode des éléments finis	9
2.1. Matrice de rigidité élémentaire	9
2.2. Matrice masse élémentaire	19
2.3. Passage du repère local au repère global	25
2.4. Assemblage des matrices rigidité et masse	29
Chap. 3 : Résolution	32
3.1. Résolution statique	32
3.2. Résolution dynamique	39
Chap. 4 : Modélisation	43
4.1. Description de la structure	43
4.2. Degrés de liberté permis aux nœuds	44
4.3. Moments d'inertie des éléments	44
4.4. Discrétisation	47
Organigramme	50
Conclusion	51

INTRODUCTION

L'analyse des structures est une science qui se base sur deux types de calculs, d'abord le calcul statique qui, en connaissant les sollicitations statiques auxquelles est soumise une structure, permet d'aboutir à un dimensionnement assurant une économie de matière, puis le calcul dynamique qui recherche les modes de vibrations propres à éviter lors du fonctionnement.

Notre sujet s'intéresse à l'étude d'une structure en treillis qui constitue un système d'arrosage rotatif utilisé en agriculture surtout dans les régions de grandes étendues plates où l'apport des eaux naturelles est insuffisant.

Pour l'analyse statique et dynamique de cette structure, on se propose d'utiliser la méthode des éléments finis, méthode très puissante et générale qui, à cause du développement de l'outil informatique s'est imposé pour la résolution des problèmes les plus divers.

Elle est la plus efficace dans l'analyse des structures de grandes dimensions et permet à

la fois le traitement des cas statiques et dynamiques.

A cet effet, on a développé un programme en éléments finis en FORTRAN permettant le calcul des structures tridimensionnelles en treillis.

On a abordé ce sujet dans le but de présenter un avant-projet de conception et réalisation d'un système d'arrosage très utile pour notre pays dont le développement agricole est l'un des préoccupations actuelles.

Il est enfin utile de noter que cette étude est complétée en parallèle par l'étude de la chaîne de transmission du mouvement qui fait le thème d'un autre projet de fin d'études.

Chap 1 - GENERALITES

Les techniques de calcul des structures ont connu ces dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries et soutenu par les progrès effectués dans les outils de calculs.

La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier correctement des structures continues ou discrètes ayant des propriétés géométriques et des conditions de charges complexes. Elle nécessite un grand nombre de calculs, qui grâce à leur nature répétitive, s'adaptent parfaitement à la programmation numérique et à la résolution par ordinateur.

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la méthode des éléments finis appliquée au calcul des structures est une technique récente, et qui met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, etc.

- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, des problèmes aux valeurs propres, etc.
- L'informatique appliquée.

1.1. Présentation de la méthode des éléments finis

La modélisation consiste à discrétiser une structure continue en éléments simples, l'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts :

- Définir analytiquement la géométrie de tous les éléments ce qui est plus ou moins compliqué selon leurs formes, ces éléments sont délimités par des nœuds.
- Définir ensuite les charges concentrées aux nœuds.

Pour cela, nous choisissons un ensemble des points sur la structure qui servira à définir la géométrie des éléments, ces points appelés nœuds géométriques, puis nous remplaçons la structure par un ensemble d'éléments de formes relativement simples, chaque élément doit être défini analytiquement de manière unique en

fonction des coordonnées des nœuds qui appartiennent à cet élément.

La structure réelle connaissant des charges réparties sur l'ensemble de ses différentes régions, cet état de charge peut être représenté dans les éléments finis à l'aide d'une structure simplifiée par réduction des charges réparties en quelques nœuds.

L'application de la M.E.F pour le cas de notre structure comporte deux parties, l'analyse statique et l'analyse dynamique.

1.1.1. Analyse statique

Elle consiste à déterminer les déplacements des nœuds et les contraintes dans les éléments de toute la structure.

Pour cela on utilise la méthode des déplacements qui permet de trouver les déplacements inconnus connaissant les forces appliquées à la structure et ses caractéristiques de rigidités.

Les étapes de base pour un calcul statique sont :

- Identifier le type de problème revient à définir les types d'éléments simples utilisés pour discrétiser la structure, puis choisir un système de coordonnées convenable et numéroté les nœuds de façon judicieuse.
- Choisir une fonction de déplacement qui lie les déplacements généralisés à un nombre de constantes égal au nombre de degrés de liberté total de l'élément.
- Obtenir l'état des déplacements en chaque point de l'élément en fonction des déplacements nodaux et relier les déformations en chaque point à ces déplacements.
- Exprimer l'énergie de déformation et déterminer la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$, qui est par définition, la forme quadratique de cette énergie.
- Exprimer toutes les matrices de rigidité élémentaires dans le repère global préalablement choisi, puis assembler toutes ces matrices suivant des règles bien précises pour obtenir la matrice de rigidité de l'ensemble de la structure $[K]$.

- Former le vecteur force nodal dans le même repère $\{F\}$.
- Résolution du système linéaire $[K]\{q\} = \{F\}$, pour trouver les déplacements nodaux en utilisant la méthode d'élimination de Gauss, et enfin établir la matrice reliant les contraintes aux déplacements nodaux.

1.1.2. Analyse dynamique

Ce calcul revient à déterminer les fréquences propres et les déformées nodales de la structure.

Pour cela, on détermine la matrice masse de chaque élément à l'aide de l'expression de l'énergie cinétique, et on assemble toutes les matrices élémentaires $[M^e]$ dans le même repère global pour obtenir la matrice masse assemblée de toute la structure.

La recherche des valeurs propres revient à la résolution du système d'équations algébriques :

$$\det([K] - \lambda_i [M]) = 0$$

par la méthode itérative de Jacobi, ce qui nous permet de tirer les fréquences propres et les vecteurs propres qui sont les formes de vibration de la

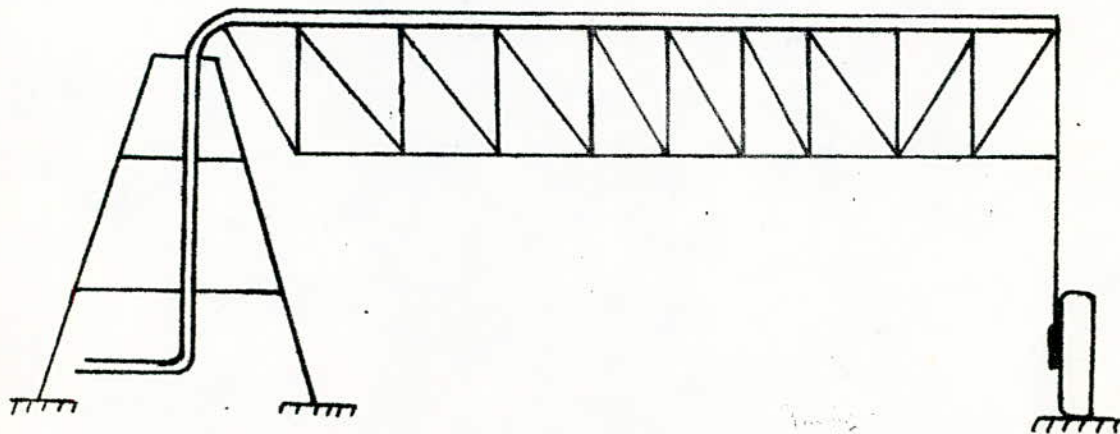
structure .

1.2 Description de la structure

Etant donné la structure de l'avrossoir, formé de cornières et de câbles assemblés entre eux suivant des formes bien étudiées .

Au centre une tour centrale sert de pivot à l'avrossoir, la structure comporte trois modules séparables supportés à leurs extrémités par des tours qui eux même reposent sur deux roues ,

Afin de bien discrétiser la structure, on choisit l'élément linéaire qui permet a priori les différentes sollicitations et possédant ainsi douze degrés de liberté .



Chap 2. Méthode des éléments finis

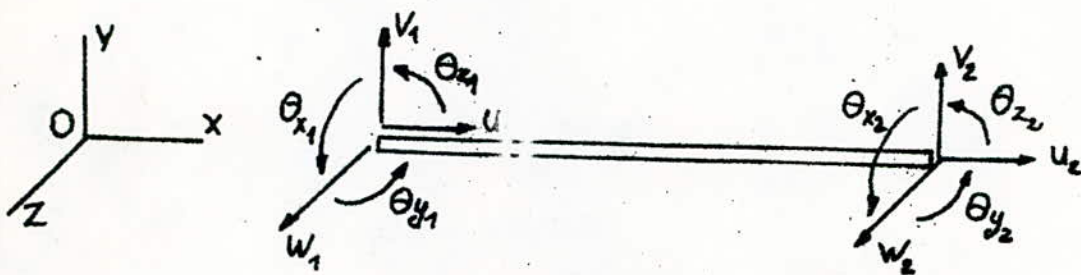
Dans ce qui suit, nous allons développer ce qui a été donné au chapitre 1.

2.1 Matrice de rigidité élémentaire

On appelle la matrice d'une structure, la matrice $[K^e]$ permettant d'exprimer l'énergie de déformation U sous forme quadratique des déplacements nodaux $\{q\}$,

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}$$

Pour une étude complète, on considère 12 degrés de liberté par élément.



$\{q\}$: vecteur déplacements aux nœuds

$$q^T = [u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}]$$

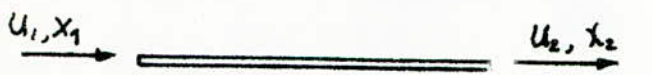
$\{F\}$: vecteur forces appliquées aux nœuds


$$F^T = [X_1, Y_1, Z_1, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, X_2, Y_2, Z_2, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}]$$

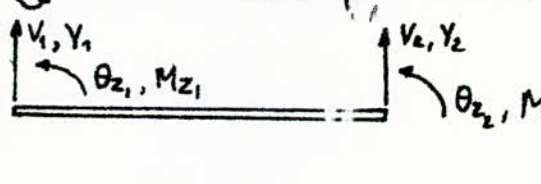
La section droite de l'élément est supposée identique le long de Ox , admet Oy et Oz comme axes principaux ;

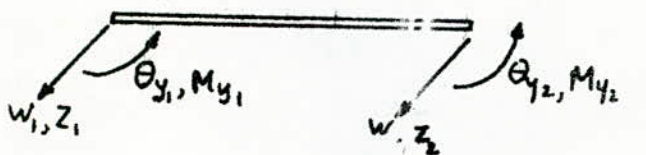
Les caractéristiques de cette section droite sont respectivement la section S , les moments d'inertie I_x (moment d'inertie polaire) I_y et I_z .

Le problème peut être considéré comme la superposition des quatre problèmes suivants que l'on peut résoudre séparément :

 : Extension

 : Torsion

 : Flexion autour de Oz dans le plan (XOY)

 : Flexion autour de Oy dans le plan (XOZ)

2.1.1. Choix de la fonction de déplacement

Après la détermination du vecteur déplacement nodal et le vecteur charge nodal, et connaissant le nombre de degrés de liberté correspondant à chaque problème, on peut représenter la fonction de déplacement de

tous les points de l'élément par une expression polynomiale qui donne le déplacement $q(x)$ de n'importe quel point, cette fonction doit contenir un nombre de coefficients inconnus égal au nombre de degrés de liberté de l'élément.

En appliquant les conditions aux limites, on peut déterminer les coefficients inconnus de la fonction de déplacement.

2.1.2. Matrice de rigidité en extension

Considérons une barre de longueur L travaillant en traction compression

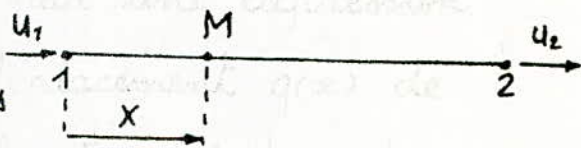
sollicitée par des forces axiales aux nœuds X_1, X_2 , soient u_1, u_2

les deux déplacements correspondants.

Dans l'approche, il faut d'abord exprimer le déplacement $u(x)$ d'un point M situé sur la barre en fonction des déplacements aux nœuds u_1 et u_2 .

On sait que pour une barre soumise uniquement des forces axiales aux extrémités, la déformation ϵ_x est constante.

Par conséquent, le déplacement $u(x)$ varie liné-



airement entre u_1 et u_2 , d'où :

$$u(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \cdot \frac{x}{L} \quad \text{avec} \quad \epsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

On a pour l'énergie de déformation :

$$U = \int_V W dV$$

W : potentiel de déformation

dV : élément de volume

avec $dV = S \cdot dx$ et $W = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \epsilon$

or d'après la loi de Hooke : $\sigma = E \cdot \epsilon$

E : module d'élasticité linéaire

$$W = \frac{1}{2} E \cdot \epsilon^2$$

$$\text{d'où} \quad U_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{E \cdot S}{L} \cdot (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2)$$

On peut mettre cette expression sous la forme suivante :

$$U_E = \frac{1}{2} q_E^T \cdot K \cdot q_E = \frac{1}{2} [u_1 \ u_2] \cdot \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

d'où l'expression de la matrice de rigidité :

$$K_E = \frac{ES}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.3. Matrice de rigidité en torsion



L'énergie de déformation en torsion s'exprime sous la forme suivante :

$$U_T = \frac{GI_x}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 dx$$

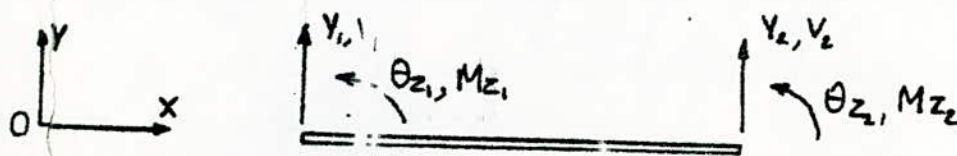
Si la poutre n'est soumise qu'à des couples de torsion aux extrémités, alors la variation de θ_x est linéaire.

Par analogie avec l'énergie de déformation en extension, on obtient immédiatement le résultat suivant :

$$U_T = \frac{1}{2} q_T^T \cdot k \cdot q_T \quad \text{avec} \quad q_T^T = [\theta_{x_1} \quad \theta_{x_2}]$$

$$k_T = \frac{GI_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.4. Matrice de rigidité en flexion dans le plan (XOY)



Soit un champ de déplacement v_y dans l'axe des y

$$v_y = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{x}{L}$$

Appliquons les conditions aux limites

$$\xi = 0, \quad V = V_1 = a_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_3 = \theta_{31} = \frac{dV_1}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{a_1}{L} = \frac{1}{L} [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\xi = 1, \quad V = V_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\theta_3 = \theta_{32} = \frac{dV_2}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{1}{L} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

Finalement la matrice des déplacements généralisés s'écrit :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ L\theta_{31} \\ V_2 \\ L\theta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

On inverse la matrice et on tire le vecteur des coefficients inconnus :

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ L\theta_{31} \\ V_2 \\ L\theta_{32} \end{bmatrix}$$

L'énergie de flexion est donnée par :

$$U_F = \frac{1}{2} EI_z \int_0^L \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

$$\text{On a : } \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} = \frac{2}{L^2} a_2 + \frac{6a_3}{L^2} \xi$$

sous la forme matricielle :

$$L^2 \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} = [0 \ 0 \ 2 \ 6\xi] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left(L^2 \frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} \right)^2 &= [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6\xi \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 2 \ 6\xi] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &= [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12\xi \\ 0 & 0 & 12\xi & 36\xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'intégrale (1) conduit à :

$$\frac{1}{2} EI_z \int_0^L L^4 \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial X^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} EI_z [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 12l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

En remplaçant les déplacements généralisés par leurs valeurs, l'énergie de déformation à la flexion devient :

$$\begin{aligned} U_F &= \frac{1}{2} EI_z \cdot \frac{1}{L^4} [V_1 \ L\theta_{31} \ V_2 \ L\theta_{32}] \begin{bmatrix} 12l & 6l & -12l & 6l \\ 6l & 4l & -6l & 2l \\ -12l & -6l & 12l & -6l \\ 6l & 2l & -6l & 4l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ L\theta_{31} \\ V_2 \\ L\theta_{32} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} [V_1 \ \theta_{31} \ V_2 \ \theta_{32}] [K_{Fz}] \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_{31} \\ V_2 \\ \theta_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où K_{Fz} la matrice rigidité élémentaire à la flexion d'un élément poutre dans le plan (XOY)

$$K_{Fz} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

2.1.5. Matrice de rigidité en flexion dans le plan (XOZ)



De même que pour la flexion dans le plan (XOY), on obtient le même résultat.

$$K_{Fy} = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \text{Sym.} & & 12 & -6l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

2.1.6. Matrice de rigidité de l'élément poutre

En écrivant la relation énergétique, l'énergie de déformation totale devient :

$$\frac{1}{2} q^T K q = \frac{1}{2} [q_E^T K_E q_E + q_T^T K_T q_T + q_Z^T K_Z q_Z + q_Y^T K_Y q_Y]$$

$$= \frac{1}{2} [q_E^T \ q_T^T \ q_Z^T \ q_Y^T] \cdot \begin{bmatrix} K_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_E \\ q_T \\ q_Z \\ q_Y \end{bmatrix}$$

On en déduit l'expression de la matrice de rigidité $[K]$ relative au vecteur déplacement q :

$$\text{avec } q^T = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x_1} \ \theta_{y_1} \ \theta_{z_1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x_2} \ \theta_{y_2} \ \theta_{z_2}]$$

la matrice de rigidité $[K]$ est représentée sur la figure 1.

K =

$$\begin{bmatrix}
 \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\
 & & & & & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\
 & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix}$$

Sym.

fig. 1

2.2. Matrice masse élémentaire

La matrice masse élémentaire, permet d'écrire l'énergie cinétique sous la forme quadratique des vitesses généralisées aux nœuds.

$$E_c = \frac{1}{2} [\dot{q}^e]^T [M^e] [\dot{q}^e]$$

La matrice masse élémentaire peut être obtenue à partir de l'expression de l'énergie cinétique en utilisant les mêmes fonctions de déplacements déjà choisies pour le calcul des matrices de rigidités.

L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_V [\dot{\delta}(x)]^T [\dot{\delta}(x)] dV$$

$\delta(x)$: fonction de déplacement généralisée en fonction des déplacements nodaux.

$$[\delta(x)] = [A] [q^e] \quad (2)$$

avec $[q^e]$: déplacements nodaux

$[A]$: matrice liant les déplacements nodaux aux coefficients inconnus.

introduisons l'égalité (2) dans l'expression de l'énergie cinétique.

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_V [\dot{q}]^T [A]^T [A] [\dot{q}] dV \quad \text{avec } dV = S dx$$

20

$$E_c = \frac{1}{2} \rho S \int_0^L [\dot{q}]^T ([A]^T [A]) [\dot{q}] dx$$

Comme les vitesses généralisées nodales ne s'expriment pas en fonction de x , on peut écrire que :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho S [\dot{q}]^T \left(\int_0^L [A]^T [A] dx \right) [\dot{q}]$$

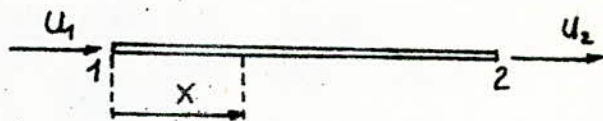
Or, $E_c = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [M^e] [\dot{q}]$

d'où $[M^e] = \rho S \int_0^L [A]^T [A] dx$ (3)

Comme pour la matrice de rigidité, pour déterminer la matrice masse d'un élément poutre, on peut considérer le problème comme la superposition des quatre problèmes suivants que l'on peut résoudre séparément :

2.2.1. Matrice masse élémentaire en extension

D'après la fonction de déplacement déjà choisie :



$$u(x) = \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [A] [q]$$

$$\text{d'où } [A] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}$$

En utilisant la relation (3), on obtient :


$$M_E = \rho S \begin{bmatrix} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx & \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx \\ \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx & \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{bmatrix}$$

En calculant ces intégrales, on obtient :

$$M_E = \frac{\rho S L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

qui est la matrice masse élémentaire en extension.

2.2.2. Matrice masse en torsion

$$\theta_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{x_2} \end{bmatrix}$$


$$= [A] \begin{bmatrix} \theta_{x_1} \\ \theta_{x_2} \end{bmatrix}$$

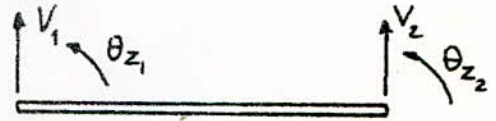
Le calcul de $[A]$ pour le cas de la torsion est semblable au cas de l'extension

$$E_c = \rho S \int_0^L [A]^T [A] dx$$

d'où, on écrit la matrice masse pour le cas de la torsion comme suit :

$$M_T = \frac{\rho S L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.2.3. Matrice masse en flexion dans le plan (xOy)



La fonction de déplacement

$V_y(x)$ est donné au paragraphe précédent par

$$V_y = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad \text{avec } \xi = \frac{x}{L}$$

après application des conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_{z1} \\ V_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

La matrice $[A]$ devient :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

En remplaçant l'expression de $[A]$ et $[A]^{-1}$ dans l'égalité (3), on obtient pour la matrice $[M_z]$

$$M_z = \frac{\rho S L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l \\ \text{Sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

2.2.4. Matrice masse élémentaire en flexion dans le plan (XOZ)

L'expression de la fonction de déplacement $w_z(x)$ choisie est analogue à celle de $v_y(x)$, on effectue une correspondance entre les vecteurs déplacements généralisés $[w_1, \theta_{y_1}, w_2, \theta_{y_2}]$ et $[v_1, \theta_{z_1}, v_2, \theta_{z_2}]$, on obtient pour la matrice masse en flexion dans le plan (XOZ)

$$M_y = \frac{\rho S L}{480} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{Sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix}$$

2.2.5. Matrice masse de l'élément poutre

En écrivant la relation énergétique, l'énergie cinétique totale devient :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} = \frac{1}{2} [\dot{q}_E^T M_E \dot{q}_E + \dot{q}_T^T M_T \dot{q}_T + \dot{q}_Z^T M_Z \dot{q}_Z + \dot{q}_Y^T M_Y \dot{q}_Y]$$

$$E_c = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_E^T & \dot{q}_T^T & \dot{q}_Z^T & \dot{q}_Y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_E \\ \dot{q}_T \\ \dot{q}_Z \\ \dot{q}_Y \end{bmatrix}$$

On en déduit l'expression de la matrice masse $[M]$

relative au vecteur vitesse \dot{q}

avec $\dot{q}^T = [\dot{u}_1 \dot{v}_1 \dot{w}_1 \dot{\theta}_{x1} \dot{\theta}_{y1} \dot{\theta}_{z1} \dot{u}_2 \dot{v}_2 \dot{w}_2 \dot{\theta}_{x2} \dot{\theta}_{y2} \dot{\theta}_{z2}]$

M = 9Sl

$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0
	$\frac{156}{420}$	0	0	0	$\frac{22l}{420}$	0	$\frac{54}{420}$	0	0	0	$-\frac{13l}{420}$
		$\frac{156}{420}$	0	$\frac{22l}{420}$	0	0	0	$\frac{54}{420}$	0	$-\frac{13l}{420}$	0
			$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0
				$\frac{4l^2}{420}$	0	0	0	$\frac{13l}{420}$	0	$-\frac{3l^2}{420}$	0
					$\frac{4l^2}{420}$	0	$\frac{13l}{420}$	0	0	0	$-\frac{3l^2}{420}$
						$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0
							$\frac{156}{420}$	0	0	0	$-\frac{22l}{420}$
								$\frac{156}{420}$	0	$-\frac{22l}{420}$	0
									$\frac{1}{3}$	0	0
										$\frac{4l^2}{420}$	0
											$\frac{4l^2}{420}$

Sym.

fig. 2

2.3. Passage du repère local au repère global

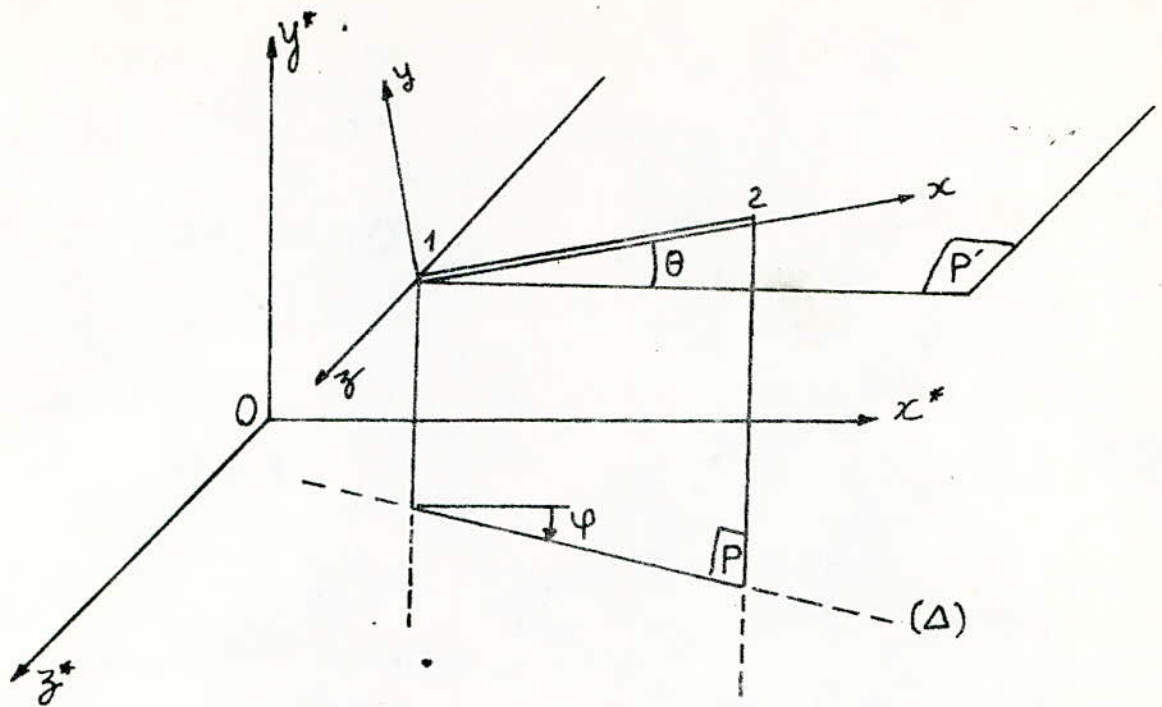
2.3.1. Transformation de coordonnées

Dans les calculs des éléments d'une structure, il est fréquent d'effectuer des transformations de coordonnées vu les différentes positions et directions prise par les éléments poutres de la structure étudiée.

Pour pouvoir déterminer les caractéristiques de la structure, il est nécessaire d'exprimer les caractéristiques des éléments préalablement calculées dans un système d'axes locaux, dans un même système d'axes dit global.

Soient respectivement q et F , les vecteurs des déplacements et forces élémentaires par rapport à un système d'axes lié à l'élément (x, y, z) , q^* et F^* les vecteurs des déplacements et forces élémentaires par rapport au système d'axes globaux (x^*, y^*, z^*)

P' : plan passant par le nœud 1 et parallèle au plan $(x^* 0 z^*)$



P : plan passant par l'axe de la poutre et perpendiculaire au plan (x^*Oz^*)

θ : angle formé par le plan P' et l'axe de la poutre

φ : angle formé par l'axe Ox^* et la droite (Δ) .

Après transformation de coordonnées dans le repère global, on peut écrire pour un nœud i de la poutre donné les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_i = \cos\theta \cos\varphi \cdot u_i^* + \sin\theta \cdot v_i^* + \cos\theta \sin\varphi \cdot w_i^* \\ v_i = -\sin\theta \cos\varphi \cdot u_i^* + \cos\theta \cdot v_i^* - \sin\theta \sin\varphi \cdot w_i^* \\ w_i = -\sin\varphi \cdot u_i^* + \cos\varphi \cdot w_i^* \end{cases}$$

Ainsi, on peut écrire sous forme matricielle :

$$\{q\} = [T] \{q^*\}$$

avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

avec

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\varphi & \sin\theta & \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta \cos\varphi & \cos\theta & -\sin\theta \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Nous pouvons ainsi définir les termes de la matrice de passage à partir des coordonnées des nœuds dans le repère global.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}{L}, \quad \sin\theta = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$$

$$\cos\varphi = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{Z_2 - Z_1}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}$$

$$\text{avec } L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}$$

Remarque : on peut facilement démontrer que la matrice de passage $[T]$ est orthogonale, c'est à dire que la matrice inverse est égale à sa transposée

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

2.3.2. Matrice rigidité dans le repère global

L'énergie de déformation et le travail des forces élémentaires sont des invariants dans toute transformation de coordonnées, on a donc :

$$2U = q^T \cdot K \cdot q = q^{*T} \cdot K^* \cdot q^* \quad (4)$$

En utilisant la relation $q = T \cdot q^*$

d'après l'égalité (4), on en tire immédiatement

$$[K^*] = [T]^T \cdot [K] \cdot [T]$$

Par ailleurs, l'invariance du travail des forces élémentaires ($q^T \cdot F = q^{*T} \cdot F^*$), permet d'obtenir en utilisant $q = T \cdot q^*$, la relation suivante :

$$[F^*] = [T] \cdot [F]$$

2.3.3. Matrice masse dans le repère global

De même que pour l'énergie de déformation, l'énergie cinétique est invariante dans toute transformation de coordonnées.

$$\dot{q}^T \cdot M \cdot \dot{q} = \dot{q}^{*T} \cdot M^* \cdot \dot{q}^* \quad (5)$$

D'après la relation : $q = T \cdot q^*$, on obtient :

$$\dot{q} = T \cdot \dot{q}^*$$

et en remplaçant dans la relation (5), on aura :

$$[M^*] = [T]^T \cdot [M] \cdot [T]$$

2.4. Assemblage des matrices rigidité et masse

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire les matrices globales, masse et rigidité à partir des matrices masse et rigidité élémentaires dans un repère global préalablement choisi, le principe utilisé dans cette opération est que l'énergie globale de déformation et l'énergie globale cinétique de la structure sont les sommes des énergies respectives élémentaires.

Puisqu'une variable nodale (vitesse ou déplacement) apparaît souvent dans plusieurs vecteurs élémentaires, et comme un nœud peut appartenir à plusieurs éléments, il est donc nécessaire qu'une telle variable nodale soit exprimée dans le même repère appelé repère global pour tous les éléments.

2.4.1. Expansion des matrices élémentaires

C'est la première opération de l'assemblage qui consiste à construire les matrices $[\bar{M}^e]$ et $[\bar{K}^e]$ par expansion des matrices respectives $[M^e]$ et $[K^e]$ grâce à des insertions de lignes et de colonnes de zéros.

$[K^e]$ et $[M^e]$ ont pour dimension le nombre de degrés de liberté de l'élément.

$[K^e]$ et $[M^e]$ ont pour dimension le nombre de degrés de liberté totale de la structure.

Soit W^e , l'énergie de déformation de l'élément ayant I, J numéros des nœuds dans la structure.

W^e s'écrit :

$$W^e = [u_I \ u_J] \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IJ} \\ K_{JI} & K_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ u_J \end{bmatrix}$$

Exprimons l'énergie de déformation élémentaire W^e dans le vecteur déplacement global $[U]$

$$[U] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_I \ \dots \ u_J \ \dots \ u_N]$$

N étant le nombre de nœuds total dans la structure.

$$W^e = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_I \ \dots \ u_J \ \dots \ u_N] \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & K_{II} & \dots & K_{IJ} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & K_{JI} & \dots & K_{JJ} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_I \\ \vdots \\ u_J \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

↑ ↑
 Colonne I Colonne J

} ligne I
 ←
 } ligne J

2.4.2. Assemblage

Pour obtenir la matrice de rigidité assemblée globale, on utilise le fait que l'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformations

élémentaires .

$$W = \sum_e W^e$$

Donc on fait la somme des matrices élémentaires
termes à termes après expansion, pour obtenir la
matrice de rigidité assemblée $[K]$.

On en fait de même pour construire la matrice masse
assemblée globale.

Chap. 3 RESOLUTION

La résolution est une étape importante dans la méthode des éléments finis pour l'analyse des structures, elle est à la fois délicate et difficile du point de vue du choix d'algorithmes efficaces pour la résolution, et ceci suivant l'ordre de complexité du problème et la disponibilité d'outils de calculs, la résolution dans notre cas de calcul, la résolution se divise en deux parties :

- Résolution statique
- Résolution dynamique

3.1. Résolution statique

Le calcul statique revient à la résolution du système d'équations $[K]\{U_n\} = \{F\}$, ce système est linéaire puisque $[K]$ ne dépend pas de $\{U_n\}$, N est le nombre d'inconnues dans ce système qui est proportionnel au nombre total de nœuds et au nombre de degrés de liberté par nœud.

Les méthodes de résolution de systèmes linéaires peuvent être classées en deux catégories :

- a. méthodes directes qui conduisent à la solution en un nombre d'opérations connu.

b. méthodes itératives qui conduisent à la solution par une succession d'améliorations d'une solution approchée, le nombre d'itérations nécessaires étant difficile à prévoir et dépendant de la structure des matrices formant le système.

Nous choisissons pour la résolution du système la méthode d'élimination de Gauss.

3.1.1 Méthode d'élimination de Gauss

Cette méthode très souvent utilisée, est constituée de deux étapes :

a. Triangularisation :

Cette étape consiste à transformer le système d'équations en un système triangulaire :

$$\begin{bmatrix} \backslash & & S \\ & \backslash & \\ 0 & & \backslash \end{bmatrix} \{u_n\} = \{F'\}$$

$[K] = [K^0]$ et $\{F\} = \{F^0\}$: système initial

↓ éliminer u_1 dans les équations 2 à n
 $[K^1]$ et $\{F^1\}$

↓ éliminer u_2 dans les équations 3 à n
 $[K^2]$ et $\{F^2\}$

⋮

\vdots
 \downarrow éliminer U_s dans les équations $s+1$ à n
 $[K^s]$ et $\{F^s\}$

\downarrow
 \downarrow éliminer U_{n-1} dans les équations $n-1$ à n
 $[K^{n-1}] = [S]$ et $\{F'\} = \{F^{n-1}\}$: système triangulaire

↳ Résolution du système triangulaire supérieur

Cette étape consiste à calculer les inconnues $\{U_n\}$,
 de la dernière à la première, en calculant successiv-
 ement U_n, U_{n-1}, \dots, U_1

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & S & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \{U_n\} = \{F'\}$$

$$U_n = S_{nn}^{-1} \cdot F'_n$$

$$U_{n-1} = S_{n-1, n-1}^{-1} \cdot (F'_{n-1} - S_{n-1, n} \cdot U_n)$$

\vdots

$$U_1 = S_{11}^{-1} (F'_1 - S_{12} U_2 - \dots - S_{1n} U_n)$$

3.1.2 Relation contraintes - déplacements nodaux

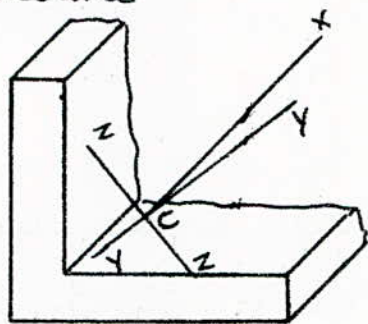
En fait, après la résolution du système précédent,
 on obtient les déplacements nodaux, or le résultat final

du calcul statique, est de retrouver les contraintes.

Le problème peut être considéré comme la superposition de trois problèmes suivants que l'on peut résoudre séparément :

- flexion dans le plan (xy)
- flexion dans le plan (xz)
- Extension suivant l'axe longitudinal de la poutre

Premons le cas de la section en cornière utilisée dans notre structure :



Le plan (xy) représente un plan de symétrie pour la poutre, les couples s'exerçant dans ce plan sont appliqués aux nœuds de l'élément, donc la poutre fléchit dans ce même plan, l'axe neutre passe par le centre de gravité C et est perpendiculaire au plan où s'exercent les couples.

Par raison de symétrie, les contraintes correspondant à cette direction de l'axe neutre donnent un couple résultant dans le plan (xy) , et par une sélection appropriée

de la valeur de ces contraintes, ce couple équilibre le couple extérieur M_z appliqué au nœud et on obtient l'expression de la contrainte :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

I_z : moment d'inertie de la section transversale par rapport à l'axe neutre (ZZ)

Pour la flexion dans le plan (xz), on en déduit immédiatement à partir du résultat obtenu précédemment que :

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Les contraintes maximales dues à la flexion se développent dans les fibres extrêmes, on peut donc prendre comme valeur de y et z les distances les plus éloignées de la section aux axes neutres y_e et z_e .

En ajoutant à ces deux cas de contraintes engendrées de la flexion, l'état de contrainte d'extension qui s'écrit :

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

On obtient donc :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_e + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_e + E u'_x \quad (6)$$

Or, on sait que :

$$V''_y = - \frac{M_z}{EI_z} \quad \text{et} \quad W''_z = - \frac{M_y}{EI_y}$$

L'équation (6) s'écrit :

$$\sigma_x = E (u'_x - y_e \cdot v''_y - z_e \cdot w''_z) \quad (7)$$

Le problème qui se pose maintenant, est d'exprimer les déplacements généralisés $\{\delta\} = \{u_x, v_y, w_z\}$ en fonction des déplacements nodaux $\{q^e\}$.

Pour cela, on choisit trois fonctions de déplacements convenables qui définissent de façon unique l'état de déplacements de tous les points de l'élément.

Le modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynômiale, et puisque son but est d'exprimer les déplacements généralisés $\{\delta\}$ de n'importe quel point en termes de déplacements nodaux $\{q^e\}$, elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément.

L'état des déplacements en chaque point x de l'élément peut être décrit sous forme matricielle par l'équation :

$$\{\delta\} = [f(x)] \{\alpha\}$$

où $\{\alpha\}$ est le vecteur colonne des coefficients inconnus de

la fonction polynôme $[f(x)]$

Puisque l'élément poutre possède douze degrés de libertés $(u_1, v_1, w_1, \theta_{x_1}, \theta_{y_1}, \theta_{z_1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x_2}, \theta_{y_2}, \theta_{z_2})$, douze coefficients inconnus doivent apparaître dans les polynômes représentant le modèle du déplacement

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\{\delta(x)\} = [f(x)] \cdot \{\alpha\} \quad (8)$$

Pour établir les déplacements nodaux en fonction des coefficients inconnus, on écrit :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} [f(x)|_{x=0}] \\ [f(x)|_{x=L}] \end{Bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\text{ou} \quad \{q^e\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (9)$$

Puisque la matrice $[A]$ est maintenant connue, le vecteur des coefficients inconnus $\{\alpha\}$ peut être obtenu en inversant l'expression de l'équation (9), cela donne :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{q^e\}$$

On remplace $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation (8).
on obtient :

$$\{\delta(x)\} = [f(x)][A]^{-1}\{q^e\}$$

À partir de l'équation (8), on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

Après différentiation on obtient :

$$\begin{bmatrix} u' \\ v'' \\ w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\text{or, } \{\alpha\} = [A]^{-1}\{q^e\}$$

et en utilisant l'équation (7), on obtient :

$$E \cdot \begin{bmatrix} u' \\ -y_e v'' \\ -z_e w'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2y_e E & -6xy_e E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2z_e E & -6xz_e E & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cdot [A]^{-1} \cdot \{q^e\}$$

On effectue ensuite la somme des trois termes du vecteur résultat et on obtient la contrainte σ_x le long de l'axe longitudinal

3.2. Résolution dynamique

Le calcul dynamique de la structure en vibrations libres

revient à déterminer les fréquences propres et les déformées modales par la résolution du système d'équations linéaires algébriques donné par l'équation fondamentale du mouvement

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0$$

$\{q\}$ et $\{\ddot{q}\}$ sont respectivement les déplacements et accélérations généralisés, la résolution de l'équation précédente revient à déterminer les valeurs propres du système suivant :

$$\det([K] - \omega_i^2[M]) = 0$$

ω_i sont les pulsations propres du système, tout en utilisant la méthode itérative de Jacobi pour résoudre le problème aux valeurs propres.

3.2.1 Méthode de Jacobi

La méthode générale de Jacobi permet de calculer les n valeurs propres d'un système comportant n degrés de liberté

Elle consiste à transformer les matrices de rigidité $[K]$ et masse $[M]$ qui sont définies positives en des matrices diagonales en utilisant les transformations successives suivantes :

$$[K^1] = [K]$$

$$[M^1] = [M]$$

$$[K^2] = [Q^1]^T [K^1] [Q^1]$$

$$[M^2] = [Q^1]^T [M^1] [Q^1]$$

⋮

⋮

$$[K^{m+1}] = [Q^m]^T [K^m] [Q^m]$$

$$[M^{m+1}] = [Q^m]^T [M^m] [Q^m]$$

Les matrices $[K^{m+1}]$ et $[M^{m+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$ lorsque m tend vers l'infini.

Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\lambda] = [K^d][M^d]^{-1}$$

où $\lambda_i = K_{ii}^d / M_{ii}^d$

$$[X] = [Q^1][Q^2] \dots [Q^{m+1}] \begin{bmatrix} \circ & & \circ \\ & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & \\ \circ & & \circ \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, chaque matrice $[Q^m]$ est choisie de manière à ce qu'un terme (i, j) non diagonal et nul de $[K^m]$ et $[M^m]$ soit nul après la transformation.

La matrice $[Q^m]$ a la structure suivante :

$$[Q^m] = \begin{bmatrix} 1 & & & \circ \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ \circ & & b & 1 \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- ligne } i \\ \text{--- ligne } j \end{array}$$

$\begin{array}{cc} | & | \\ \text{colonne } i & \text{colonne } j \\ | & | \end{array}$

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que $K_{ij}^{m+1} = M_{ij}^{m+1} = 0$ soit, en supprimant par simplicité l'indice $m+1$ sur les termes de chaque matrice:

$$\begin{cases} aK_{ii} + (1+ab)K_{ij} + bK_{jj} = 0 \\ aM_{ii} + (1+ab)M_{ij} + bM_{jj} = 0 \end{cases}$$

Chap 4 Modélisation

4.1. Description de la structure

La structure à étudier est un système d'arrosage rotatif.

Qui doit à la fois, supporter la conduite d'eau et entraîner la structure en mouvement de rotation permanent.

Pour cela, on décompose la structure en trois modules séparables et identiques, la description d'un module suffira pour toute la structure.

La structure est constituée de cornières, de tubes et de câbles en acier.

Les cornières forment des triangles qui servent de support à la conduite d'eau, et étirées entre elles par des câbles.

Les modules sont supportés par deux tours formées chacune par deux triangles de grande dimension en cornières, ces dernières reposent s'appuyant sur deux roues.

Au niveau du pivot central, la tour est un tétraèdre formé de cornières et encastré à sa base, la liai-

son entre les cornières est assurée par des boulons, de même que la liaison entre les tubes, tout le système est donc démontable.

4.2. Degrés de liberté permis aux nœuds

On distingue quatre types de conditions sur les nœuds.

- pour la connection entre deux cornières, on peut supposer qu'il y'a six degrés de liberté par nœud.
- pour la connection entre cornières et cables, on n'a que deux degrés de liberté libres et ce selon l'axe lon l'axe longitudinal de la tige.
- pour l'appui des cornières sur les jantes des roues, on considère deux degrés de liberté libres : un déplacement suivant la direction du déplacement et une rotation suivant l'axe longitudinal de la structure.
- pour l'encastrement du support du centre du pivot qui est formé de quatres cornières, aucun degré de liberté n'est permis.

4.3. Moments d'inertie des éléments

Chap 4 Modélisation

4.1. Description de la structure

La structure à étudier est un système d'arrosage rotatif.

Qui doit à la fois, supporter la conduite d'eau et entraîner la structure en mouvement de rotation permanent.

Pour cela, on décompose la structure en trois modules séparables et identiques, la description d'un module suffira pour toute la structure.

La structure est constituée de cornières, de tubes et de câbles en acier.

Les cornières forment des triangles qui servent de support à la conduite d'eau, et étirées entre elles par des câbles.

Les modules sont supportés par deux tours formées chacune par deux triangles de grande dimension en cornières, ces dernières reposent s'appuyant sur deux roues.

Au niveau du pivot central, la tour est un tétraèdre formé de cornières et encastrée à sa base, la liai-

son entre les cornières est assurée par des boulons, de même que la liaison entre les tubes, tout le système est donc démontable

4.2. Degrés de libertés permis aux nœuds

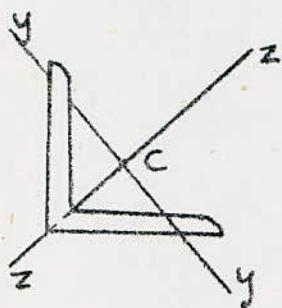
On distingue quatre types de conditions sur les nœuds.

- pour la connection entre deux cornières, on peut supposer qu'il y'a six degrés de liberté par nœud.
- pour la connection entre cornières et cables, on n'a que deux degrés de libertés libres et ce selon l'axe lon l'axe longitudinal de la tige.
- pour l'appui des cornières sur les jantes des roues, on considère deux degrés de libertés libres : un déplacement suivant la direction du déplacement et une rotation suivant l'axe longitudinal de la structure.
- pour l'encastrement du support du centre du pivot qui est formé de quatres cornières, aucun degré de liberté n'est permis.

4.3. Moments d'inertie des éléments

Le calcul des termes de la matrice de rigidité de l'élément poutre, exige la détermination des moments d'inertie I_y et I_z qui sont définis comme moments d'inertie principaux et le moment d'inertie polaire I_x , on a quatre types d'éléments.

- cornière à ailes égales de 5 cm



C: centre de gravité

Aire de la section, $S = 3,89 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Moments d'inertie principaux, $I_y = 3,80 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

$$I_z = 14,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Moment d'inertie polaire, $I_x = I_y + I_z = 18,4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

- cornière à ailes égales de 8 cm

Aire de la section, $S = 10,80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Moments d'inertie principaux, $I_y = 27 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

$$I_z = 104 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

Moment d'inertie polaire, $I_x = I_y + I_z = 131 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

- Cable de diamètre $d = 2 \text{ cm}$

$$I_y = I_z = 3,14 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_x = 6,28 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

- Cable de diamètre $d = 5 \text{ cm}$

$$\text{Aire de la section, } S = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$I_y = I_z = 30,7 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_x = 61,4 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

On doit préciser que tous les éléments constituant la structure sont faits d'un même matériau, et donc ayant les mêmes caractéristiques mécaniques, à savoir :

module d'élasticité de young, $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

module de Coulomb, $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$

masse volumique, $\rho = 7,98 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$

Dans nos calculs, nous devons utiliser les unités S.I pour simplifier notre tâche de calculs, pour cela nous dressons un tableau des caractéristiques géométriques et mécaniques des éléments.

Type d'élément	$I_y \cdot 10^8$ (m^4)	$I_z \cdot 10^8$ (m^4)	$I_x \cdot 10^8$ (m^4)	$S \cdot 10^{-4}$ (m^2)
1. Cable $d=2\text{cm}$	3,14	3,14	6,28	3,14
2. cornière de 5cm	3,8	14,6	18,4	3,89
3. cornière de 8cm	27	104	131	10,8
4. Cable $d=5\text{cm}$	30,7	30,7	61,4	6,25

4.4. Discrétisation

4.4.1. Choix et numérotation des nœuds

Suivant la disposition des poutres dans la structure, et les variations des paramètres géométriques ou physiques intervenant dans la structure, nous choisissons les nœuds qui sont appelés nœuds géométriques, un deuxième choix est autant important que le premier est la distribution des charges supportées par la structure, ou le poids propre des éléments.

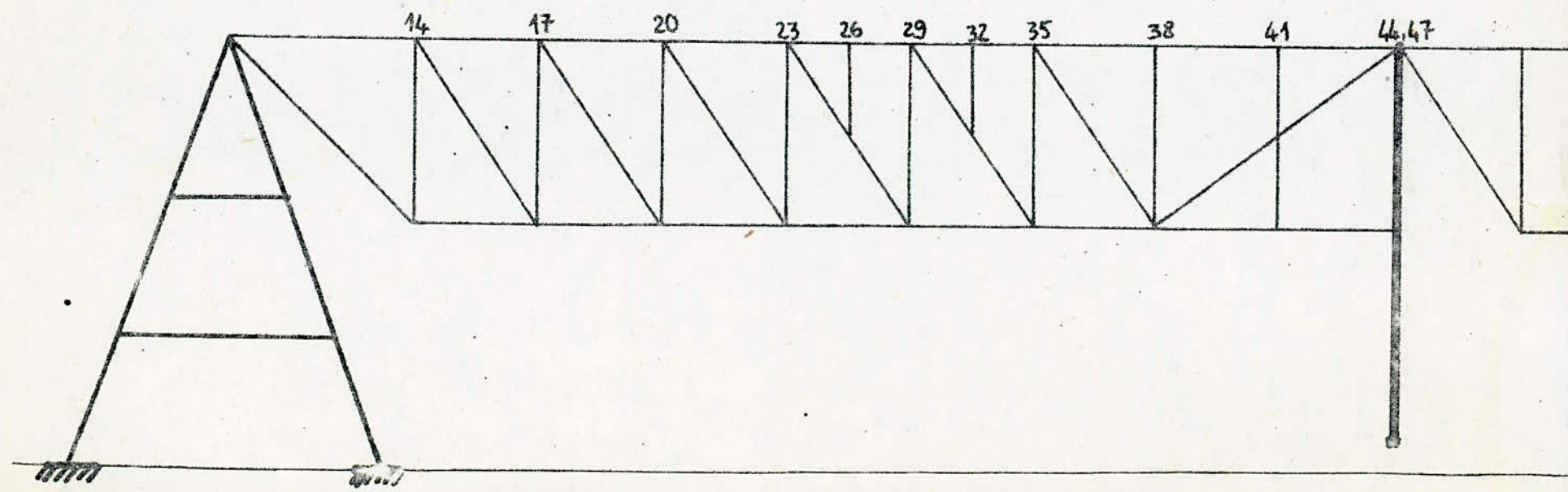
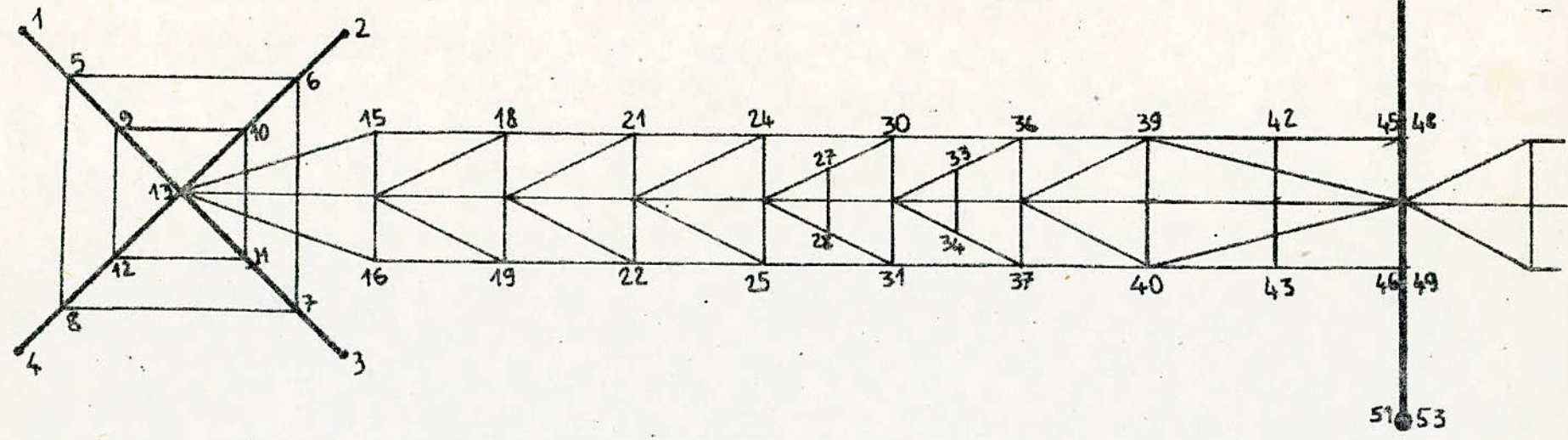
L'ordre de numérotation des nœuds ainsi choisis intervient lors de la résolution des systèmes d'équations d'équilibre aux nœuds, nous cherchons une numérotation qui permet d'avoir des matrices de rigidité et masse qui ont une largeur de bande la plus petite possible, pour cela nous devons avoir une différence minimum pour toute la structure, entre les numéros des nœuds du même élément.

Soient m : maximum de différence entre les numéros des nœuds.

n : nombre de degrés de liberté par nœud

La largeur de la bande L est définie par :

Numérotation des nœuds



NOEUDS

Degres de libertes

COORDONNEES

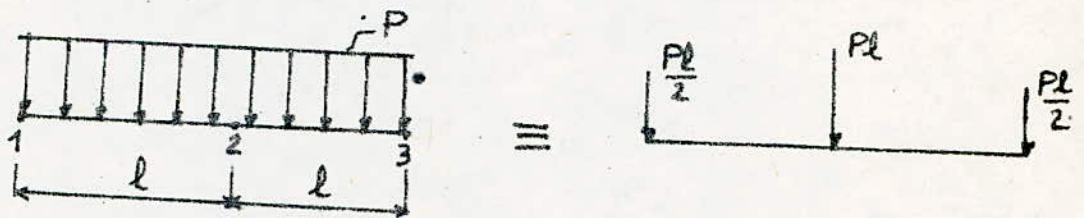
No	X	Y	Z	Rx	Ry	Rz	X	Y	Z
1	0	0	0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	-.15E+01
2	0	0	0	0	0	0	0.30E+01	0.00E+00	-.15E+01
3	0	0	0	0	0	0	0.30E+01	0.00E+00	0.15E+01
4	0	0	0	0	0	0	0.00E+00	0.00E+00	0.15E+01
5	1	1	1	0	1	1	0.50E+00	0.11E+01	-.10E+01
6	1	1	1	0	1	1	0.25E+01	0.11E+01	-.10E+01
7	1	1	1	0	1	1	0.25E+01	0.11E+01	0.10E+01
8	1	1	1	0	1	1	0.50E+00	0.11E+01	0.10E+01
9	1	1	1	0	1	1	0.90E+00	0.20E+01	-.60E+00
10	1	1	1	0	1	1	0.21E+01	0.20E+01	-.60E+00
11	1	1	1	0	1	1	0.21E+01	0.20E+01	0.60E+00
12	1	1	1	0	1	1	0.90E+00	0.20E+01	0.60E+00
13	1	1	1	0	0	0	0.15E+01	0.34E+01	0.00E+00
14	1	1	1	0	0	0	0.75E+01	0.34E+01	0.00E+00
15	1	1	1	0	0	0	0.75E+01	0.24E+01	-.60E+00
16	1	1	1	0	0	0	0.75E+01	0.24E+01	0.60E+00
17	1	1	1	0	0	0	0.13E+02	0.34E+01	0.00E+00
18	1	1	1	0	0	0	0.13E+02	0.24E+01	-.60E+00
19	1	1	1	0	0	0	0.13E+02	0.24E+01	0.60E+00
20	1	1	1	0	0	0	0.18E+02	0.34E+01	0.00E+00
21	1	1	1	0	0	0	0.18E+02	0.24E+01	-.60E+00
22	1	1	1	0	0	0	0.18E+02	0.24E+01	0.60E+00
23	1	1	1	0	0	0	0.23E+02	0.34E+01	0.00E+00
24	1	1	1	0	0	0	0.23E+02	0.24E+01	-.60E+00
25	1	1	1	0	0	0	0.23E+02	0.24E+01	0.60E+00
26	1	1	1	0	1	1	0.25E+02	0.34E+01	0.00E+00
27	1	1	1	0	0	0	0.25E+02	0.29E+01	-.29E+00
28	1	1	1	0	0	0	0.25E+02	0.29E+01	0.29E+00
29	1	1	1	0	0	0	0.28E+02	0.34E+01	0.00E+00
30	1	1	1	0	0	0	0.28E+02	0.24E+01	-.60E+00
31	1	1	1	0	0	0	0.28E+02	0.24E+01	0.60E+00
32	1	1	1	0	1	1	0.30E+02	0.34E+01	0.00E+00
33	1	1	1	0	0	0	0.30E+02	0.29E+01	-.29E+00
34	1	1	1	0	0	0	0.30E+02	0.29E+01	0.29E+00
35	1	1	1	0	0	0	0.33E+02	0.34E+01	0.00E+00
36	1	1	1	0	0	0	0.33E+02	0.24E+01	-.60E+00
37	1	1	1	0	0	0	0.33E+02	0.24E+01	0.60E+00
38	1	1	1	0	0	0	0.38E+02	0.34E+01	0.00E+00
39	1	1	1	0	0	0	0.38E+02	0.24E+01	-.60E+00
40	1	1	1	0	0	0	0.38E+02	0.24E+01	0.60E+00
41	1	1	1	0	1	1	0.43E+02	0.34E+01	0.00E+00
42	1	1	1	0	1	1	0.43E+02	0.24E+01	-.60E+00
43	1	1	1	0	1	1	0.43E+02	0.24E+01	0.60E+00
44	1	1	1	0	0	0	0.48E+02	0.34E+01	0.00E+00
45	1	1	1	0	1	1	0.48E+02	0.24E+01	-.60E+00
46	1	1	1	0	1	1	0.48E+02	0.24E+01	0.60E+00
47	1	1	1	0	0	0	0.49E+02	0.34E+01	0.00E+00
48	1	1	1	0	1	1	0.49E+02	0.24E+01	-.60E+00
49	1	1	1	0	1	1	0.49E+02	0.24E+01	0.60E+00
50	0	0	1	1	0	0	0.48E+02	0.40E+00	-.17E+01
51	0	0	1	1	0	0	0.48E+02	0.40E+00	0.17E+01
52	0	0	1	1	0	0	0.49E+02	0.40E+00	-.17E+01

$$L = 2[m \cdot n + (n-1)] + 1$$

D'après la numérotation qu'on a adopté pour notre structure (fig.) le maximum était $m=7$

4.4.2. Répartition des charges aux nœuds

La seule charge considérable supportée par la structure est le poids d'eau dans la conduite supérieure en fait c'est une charge uniformément répartie le long de la structure, pour cela on va subdiviser cette charge en la concentrant aux nœuds

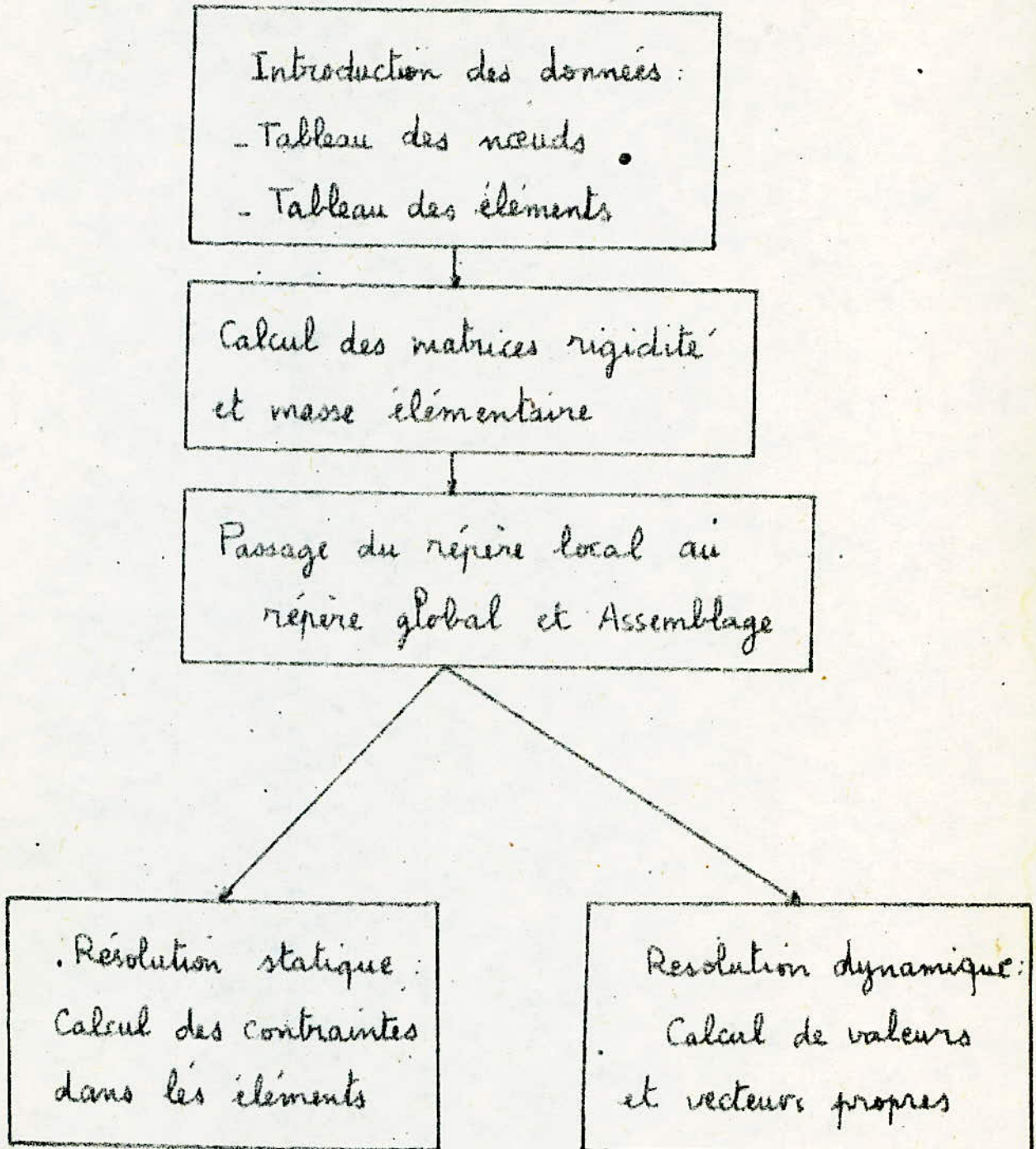


P : poids de l'eau par unité de longueur

$$P = \rho_{\text{eau}} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 31,42 \text{ Kg/m}$$

La distance qui sépare deux nœuds consécutifs est de 5m.

Organigramme



CONCLUSION

La méthode des éléments finis étant une méthode itérative qui en proposant un dimensionnement préliminaire, nous vérifions à chaque itération, si les contraintes auxquelles sont soumis les éléments dans la structure ne dépassent pas les contraintes admissibles.

Dans notre cas, partant d'un dimensionnement d'une simple, on a pu vérifier que les contraintes dans certains éléments dépassent la contrainte admissible du matériau utilisé.

On envisage trois solutions possibles :

- Modifier les caractéristiques mécaniques du matériau.
- Renforcer au niveau de ces éléments par l'ajout d'autres éléments.
- Remplacer ces éléments par d'autres de sections (moments d'inerties) plus grandes.

La solution ainsi choisie doit vérifier les conditions de résistance de tous les éléments en utilisant le programme déjà établi.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. ASANCHEYEV

Calcul des structures en BASIC

2. G. DHATT , G. TOUZOT

Une présentation de la méthode des éléments finis

3. J.F. IMBERT

Analyse des structures par éléments finis

4. M.C. ROCKEY , H.R. EVANS

Introduction à la méthode des éléments finis

5. Aide Mémoire Résistance des matériaux

Editions Moscou

