الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

COMPORTEMENT DE CERTAINS TYPES DE SUSPENSIONS AVEC LA CARACTERISTIQUE NON-LINEAIRE

Proposé Par : M. KSIAZEK

Etudié par : M.BOUMAKH

Dirigé par : M.KSIAZEK

PROMOTION :JANVIER 87

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi – EL-HARRACH – ALGER

الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : **GENIE MECANIQUE**

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

COMPORTEMENT DE CERTAINS TYPES DE SUSPENSIONS AVEC LA CARACTERISTIQUE NON-LINEAIRE

Proposé Par :
M.Ksiazek

Etudié par :
M.Boumakh

Dirigé par :
M. Ksiazek

PROMOTION : **JANVIER 87**

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi – EL-HARRACH – ALGER

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur Marek Ksiazek pour son aide et son suivi durant cette étude; ainsi que les professeurs qui ont contribué à ma formation

Il en est de même à tous qui m'ont porté leur sincère aide.

Ministère de l'enseignement superieur — وزارة التعليم العالي
Ecole nationale polytechnique — المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Département : Mécanique — فرع : الهندسة الميكانيكية
Promoteur : Marek Ksiazek — الموجه : مارك كسيازك
Elève ingenieur : Boumakh Mourad — الطالب المهندس : بومخ مراد

الموضوع : دراسة بعض أجهزة إخماد الإهتزازات الغير خطية تحت تحريض عشوائي.

الملخص : تتمثل هذه الدراسة في تحليل الاهتزازات العشوائية لبعض أجهزة إخماد الإهتزازات الغير خطية وحساب التوزع للكتل المطلوب عزلها، والتي هي تحت تأثير قوى غير خطية وتحريض عشوائي.

Sujet : Analyse de certaines non linéarités des amortisseurs dynamiques soumis aux excitations aléatoires.

Resumé : Cette étude a pour but d'analyser les vibrations aléatoires de certains amortisseurs dynamiques non linéaires et unidimensionnels, et le calcul des dispersions des masses à vibroisoler qui sont soumises à certaines forces non linéaires et aux excitations aléatoires.

Subject : Analysis of some nonlinear dynamic dampers submitted to random excitations.

Abstract : The purpose is to study the random vibrations of some nonlinear unidimensional dynamic dampers have been analysed. The dispersions of vibroisolated mass for some nonlinear restoring forces and some random excitations have been calculated.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Les phénoménes de vibrations sont nuisibles et se rencontre dans plusieurs domaines, l'élimination ou encore l'amortissement des vibrations constitue un domaine d'étude des plus poussé surtout dans la théorie des processus aléatoires.

L'analyse des vibrations alèatoires des amortisseurs dynamiques soumis aux éfforts non linéaire exige la linéarisation de ces efforts pour qu'on puisse étudier le systeme, Car l'étude des systémes comprenant des élements de non linéarité est délicate d'autant plus qu'il n'éxiste pas une théorie pouvant résoudre ce genre de probléme, cependant il existe plusieurs méthodes d'analyse de vibrations aléatoires non linéaire quisont developpées sur la base de l'analyse détérministique.

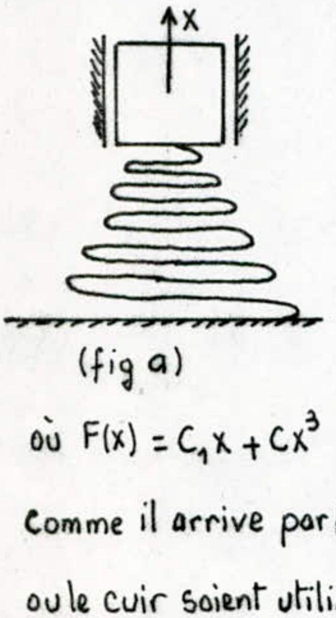
Parmis ces méthodes on peut citer

- La méthode des petits paramétres
- La méthode de la linéarisation equivalente
- La méthode de la linéarisation statistique

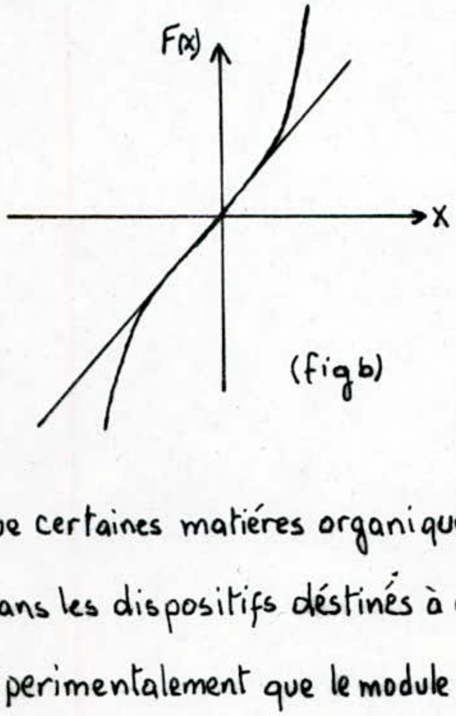
La méthode qu'on a choisi pour mener cette étude est la méthode de linéarisation-statistique; qui consiste à approximer des transformations non linéaires par des transformations linéaire.

A quoi est dûe la non linéarité des systémes réels ?

Dans cette étude la non linéarité est dûe au fait qu'on admet pas que la déformation du ressort obéissait à la loi de Hooke : c.a.d " que la deformation n'est pas proportionnelle à la force qui la produisait" comme consequence de cela les vibrations du systéme se présentent par des equations différentielles non linéaire ce sont ces systémes que l'on appelle systémes à caractéristiques non linéaires par exemple le ressort dans lequel la force n'est pas proportionnelle au déplacement à partir de la position d'equilibre fournit un exemple de ce genre de systéme " sur la (fig a) est représenté un systéme pour le quel la caractéristique élastique du ressort (fig b) est une fonction non linéaire du déplacement



(fig a)



(fig b)

où $F(x) = C_1 x + C x^3$

Comme il arrive parfois que certaines matiéres organiques telles que le caoutchouc ou le cuir soient utilisées dans les dispositifs déstinés à absorber les vibrations dans ce cas on constate experimentalement que le module d'elasticité croît avec l'allongement.

I GENERALITES

I1. Notions de statistiques:

1.1 : Processus aléatoire ; le fait qu'on ne puisse pas prédire le caractére du processus, même si on connait ses résultats au passé celui-ci est appelé processus aléatoire

1.2 : Definition de fonction aléatoire :

une fonction est dite aléatoire lorsque pour toute valeur de la variable indépendante, on ne peut prédire sa valeur

1.3 : Caractéristiques probabilistes d'un processus aléatoire :

pour pouvoir décrire les propriétes d'un processus aléatoire, on a cinq fonctions non aléatoires, ou encore cinq fonctions numériques qui caractérisent ce processus

1.3.1 : Esperance mathématique : qui est definie par . $\overline{X}(t)$

$$\overline{X}(t) = M\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,t)\, dx$$

ou $f(x,t)$ est la densité de probabilité et x la variable indépendante

1.3.2 : Moyenne quadratique : definie par : $\overline{X^2}(t)$

$$\overline{X^2}(t) = M\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t)\, dx$$

1.3.3 : Variance : definie par : $\sigma_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) = \overline{[X(t) - \overline{X}(t)]^2} = M\{(X-\overline{X})^2\}$$

1.3.4 : Fonction de correlation : definie par : $R_{xx}(t_1,t_2)$

$$R_{xx}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

1.3.5 : Fonction de corrélation mutuelle : definie par $R_{xy}(t_1,t_2)$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x.y\, f(x, y, t_1, t_2)\, dx\, dy$$

1.4 : Moyennestemporelles :

pour simplifier l'étude on peut considérer une moyenne dans le temps d'une réalisation particulière et cela pour évaluer le processus

1.4 1 : Valeur moyenne : definie par : $\breve{X}(t)$

$$\breve{X}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt$$

1.4.2 : Moyenne quadratique : definie par $\breve{X}^2(t)$

$$\breve{X}^2(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt$$

1.5 : Processus stationnaire

les processus stationnaires sont des processus dont les propriétés statistiques sont indépendantes du temps

1.6 . Processus érgodique :

Un processus érgodique est le processus pour lequel les moyennes statistiques sont egales aux moyennes temporelles dans l'étude on considére le processus stationnaire et érgodique

on aura donc les relations suivantes

1.6.1 : Esperance

$$M\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, dt = m_x$$

1.6.2 : Moyenne quadratique :

$$M\{x^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X^2(t)\, dt$$

1.6.3 variance :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (x - m_x)^2\, dt$$

1.6.4 : Fonction de corrélation

$$R(\tau) = \overline{X(t_1)X(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, f(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t).X(t+\tau)\, dt$$

avec $t_2 = t_1 + \tau$: c.a.d la fonction de corrélation ne dépend que de $\tau = t_2 - t_1$

1.6.5 : Fonction de Corrélation mutuelle

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)\, Y(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f(x, y, t_1, t_2)\, dx\, dy = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)\, Y(t)\, dt$$

1.7 : *Loi normale* : l'étude de certains phenomenes physiques variés montrent que

de nombreuses variables aléatoires suivent une loi de Probabilité ayant une densité de Probabilité normale donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right\}$$

dans cette étude on considére que le processus suit une loi normale

I.2 : Fonction de densité spéctrale énérgitique : $S(\omega)$

la densité spéctrale $S(\omega)$ se definit comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $R(\tau)$

Soit : $$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \qquad (2.1)$$

Soit $X(j\omega)$ est la transformée de Fourier de $x(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Soit la fonction $$R_T(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_T(t) \cdot x_T(t+\tau)\, dt \quad (2.2)$$

de (2.1) et (2.2) on obtient

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) \cdot x_T(t+\tau)\, dt$$

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, e^{-j\omega(t+\tau)}\, d\tau$$

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega) \cdot X_T(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| X_T(j\omega) \right|^2$$

I 3 : Expression de la dispérsion de la grandeur de sortie d'un systéme :

soit $x_0(t)$ et $x(t)$, les 2 grandeurs d'entrée et de sortie d'un systéme

on suppose que l'esperance mathématique $\bar{X}(t)$ et nulle

alors on aura :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)\,dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega\right\} dt$$

on sait que $X_x(-j\omega) = H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\cdot X_{x_0}(-j\omega)$

où $H_{\frac{x}{x_0}}$ j représente la fonction de transfert du systéme

d'où

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega\right\} dt$$

aprés pérmutation des 2 intégrales on obtient

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 \cdot \left|X_{x_0}(j\omega)\right|^2 d\omega$$

or : $S_{x_0}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left|X_{x_0}(j\omega)\right|^2$

d'où

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 S_{x_0}(\omega)\, d\omega$$ si on pose $j\omega = s$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(s)\right|^2 S_{x_0}(s)\, ds \,.$$

I 4 : Definitions des transformations :

4.1 : La transformation linéaire sans retard :

on a ce genre de transformation lorsque le signal de sortie X est lié au signal d'entrée Z par l'équation suivante

$X = hZ$ où h = clé ou une fonction du temps

4.2 : La transformation linéaire avec retard :

dans ce cas ; la valeur du signal de sortie $X(t)$ à l'instant (t) ne depend pas uniquement du signal d'entrée $Z(t)$ au même instant mais aussi de ses valeurs aux differents instants. cette transformation est donnée par :

$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\, Z(\tau)\, d\tau$ où $h(t,\tau)$ est la fonction de ponderation

4.3 : La transformation NL. sans retard :

La relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie est donnée par l'équation

$X = f(Z)$ où f : est une fonction non linéaire

II LINEARISATION-STATISTIQUE

II.1 : Principe de la linéarisation statistique:

La linéarisation statistique consiste de trouver la meilleure description de la transformation non linéaire par une transformation linéaire.

Cette méthode d'approche est importante pour étudier les systémes complexes ou les mecanismes qui représentent des non-linéarités.

Le probleme de la linéarisation-statistique, peut être formulé mathématiquement comme suit:

Ayant F_0 une transformation non-linéaire et F la transformation linéaire, nous choisissons F de façon que le signal $Y = F(z)$ approxime au mieux le signal de sortie $X = F_0(z)$.

Il existe plusieurs critéres pour aboutir à cette approximation. Dans cette étude on s'est basé sur le critére de la minimisation de l'erreur quadratique.

II.2 : Critére de la minimisation de l'erreur quadratique:

Soient les caractéristiques statistiques déterminées par le processus aléatoire X et z associé l'un à l'autre, la transformation linéaire F qui approxime le mieux F_0 doit satisfaire

$$\sigma_\varepsilon^2 = M\{(F(z)-X)^2\} = \min \qquad \text{eq } (2-1)$$

La variation de l'érreur σ_ε^2 ; $\delta\sigma_\varepsilon^2$; provoquée par une légére variation $\varepsilon G(z)$ de l'operateur $F(z)$ nous donne:

$\sigma_\varepsilon^2 + \delta\sigma_\varepsilon^2 = M\{[(F(z) + \varepsilon G(z)) - X]^2\}$ en developpant ceci on obtient

$\sigma_\varepsilon^2 + \delta\sigma_\varepsilon^2 = M\{(F(z) - x)^2\} + 2\varepsilon M\{G(z)[F(z) - X]\} + \varepsilon^2 M\{(G(z))^2\}$

$\sigma_\varepsilon^2 + \delta\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2 + 2\varepsilon M\{G(z)(F(z) - X)\} + \varepsilon^2 M\{(G(z))^2\}$

d'où

$\delta\sigma_\varepsilon^2 = 2\varepsilon M\{G(z)(F(z) - X)\} + \varepsilon^2 M\{(G(z))^2\}$

où G est un opérateur arbitraire qui appartient à la même classe que F

et ε un nombre très petit :

ecrivons $\delta\sigma_\varepsilon^2$ sous la forme

$\delta\sigma_\varepsilon^2 = 2\varepsilon\, \overline{G(z)[F(z) - X]} + \varepsilon^2 \overline{(G(z))^2}$

alors F est optimale si : $\dfrac{\partial \delta\sigma_\varepsilon^2}{\partial \varepsilon} = 0$

donc il faut que :

$\overline{G(z)[F(z) - X]} = 0$ eq (2.2) en negligeant le terme dependant de ε

puisque $G(z)$ est arbitraire on pose que $G(z) = 1$

donc on a

$\overline{[F(z) - X]} = 0$

on se propose que l'approximation soit une transformation linéaire sans retard de la forme : $F(z) = h_0 m_z + h_1 z^0$

où m_z est l'esperance mathematique du signal d'entrée

z^0 est le processus centrée : $z^0 = z - m_z$

$h_1 . h_0$: coefficients de transmissions

II 3 : Détermination des coefficients de transmission h_0, h_1 :

De l'eq (2.1) : $\sigma_\varepsilon^2 = M\{(F(z) - X)^2\} = \min$

avec $F(z) = h_0 m_z + h_1 z^0$

pour que σ_ε^2 soit mini il faut et il suffit de l'etudier par rapport à h_0, h_1

soit : $\sigma_\varepsilon^2 = M\{(h_0 m_z + h_1 z^0 - X)^2\} = \min$

donc il faut que : $\dfrac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial h_0} = 0$, $\dfrac{\partial \sigma_\varepsilon^2}{\partial h_1} = 0$

on obtient

$$h_0 = \frac{M\{X\}}{m_z} = \frac{\bar{X}}{m_z}$$

$$h_1 = \frac{M\{X z^0\}}{\sigma_z^2} = \frac{\overline{X z^0}}{\sigma_z^2}$$

Remarque : le coefficient de transmission h_0 n'est introduit que si pour $m_z = 0$

on a $m_x = 0$

dans le cas contraire il est interessant d'ecrire la transformation d'approximation sous la forme

$F(z) = m_x + h_1 z^0$

où m_x est l'esperance mathematique du signal de sortie

c.a.d $m_x = h_0 m_z$

II 4 : Exemples de linéarisation statistique :

4.1 : L.S de $f(z) = C_1 z + C_2 z^3$

$$Y = h_0 m_z + h_1 z^0$$

$$h_0 = \frac{\overline{f(z)}}{m_z} \quad , \quad h_1 = \frac{\overline{f(z) z^0}}{\sigma_z^2}$$

où

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1 z + C_2 z^3) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

on pose $\frac{z-m_z}{\sigma_z} = U \Rightarrow z = \sigma_z U + m_z \Rightarrow dz = \sigma_z dU$

on a

$$f(z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} C_1 z \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz + \int_{-\infty}^{\infty} C_2 z^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz\right.$$

calcul de :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} C_1 z \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} (z-m_z) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz + C_1 m_z \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$= C_1 \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} U \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU + C_1 m_z \sigma_z \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU$$

$$= C_1 \sigma_z^2 \left[-\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}\right]_{-\infty}^{\infty} + C_1 m_z \sigma_z \sqrt{2\pi}$$

$$I_1 = C_1 m_z \sigma_z \sqrt{2\pi}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} C_2 z^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

or

$$z^3 = (\sigma_z U + m_z)^3 = (\sigma_z^3 U^3 + 3\sigma_z^2 m_z U^2 + 3\sigma_z m_z^2 U + m_z^3)$$

$$I_2 = \frac{C_2}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_z^3 U^3 + 3\sigma_z^2 m_z U^2 + 3\sigma_z m_z U + m_z^3) \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU \cdot \sigma_z$$

$$I_2 = \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}} [I_3 + I_4 + I_5 + I_6]$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_z^3 U^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = \sigma_z^3 \int_{-\infty}^{\infty} U^2 . U \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = 0$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} 3\sigma_z^2 m_z U^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = 3\sigma_z^2 m_z \int_{-\infty} U . U \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = 3\sigma_z^2 m_z \sqrt{2\pi}$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} 3\sigma_z m_z^2 U \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = 3\sigma_z m_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} U \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = 0$$

$$I_6 = \int_{-\infty}^{\infty} m_z^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = m_z^3 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU = m_z^3 \sqrt{2\pi}$$

d'où

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} (I_1) + \frac{C_2}{\sqrt{2\pi}} (I_3 + I_4 + I_5 + I_6)$$

$$\overline{f(z)} = C_1 m_z + C_2 (3\sigma_z^2 m_z + m_z^3)$$

d'où

$$h_0 = C_1 + C_2 (3\sigma_z^2 + m_z^2)$$

détermination de h_1 : $h_1 = \dfrac{\overline{f(z) z^0}}{\sigma_z^2}$

$$\overline{f(z) z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (C_1 z + C_2 z^3)(z - m_z) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$\overline{f(z) z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} (I_1 + I_2)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} C_1 z (z - m_z) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz = C_1 \int_{-\infty}^{\infty} (z-m_z)^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz + C_1 m_z \int_{-\infty}^{\infty} (z-m_z) \times \ldots$$

$$\ldots \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_1 = C_1 \sigma_z^3 \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\{-\tfrac{1}{2}u^2\} du + C_1 m_z \sigma_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} u \exp\{-\tfrac{1}{2}u^2\} du = C_1 \sigma_z^3 \sqrt{2\pi}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} C_2 z^3 (z - m_z) \exp\{-\tfrac{1}{2}(\tfrac{z-m_z}{\sigma_z})^2\} dz = \int_{-\infty}^{\infty} (C_2 z^4 - C_2 m_z z^3) \exp\{-\tfrac{1}{2}(\tfrac{z-m_z}{\sigma_z})^2\} dz$$

$$I_2 = C_2 \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \exp\{-\tfrac{1}{2}(\tfrac{z-m_z}{\sigma_z})^2\} dz - C_2 m_z \int_{-\infty}^{\infty} z^3 \exp\{-\tfrac{1}{2}(\tfrac{z-m_z}{\sigma_z})^2\} dz$$

D'aprés les changement de variable déja consideré et aprés tout calcul fait on obtient

$$I_2 = C_2 (3\sigma_z^4 + 3\sigma_z^2 m_z^2) \sigma_z \sqrt{2\pi}$$

$$\overline{f(z) z^0} = C_1 \sigma_z^2 + C_2 (3\sigma_z^4 + 3\sigma_z^2 m_z^2)$$

d'où

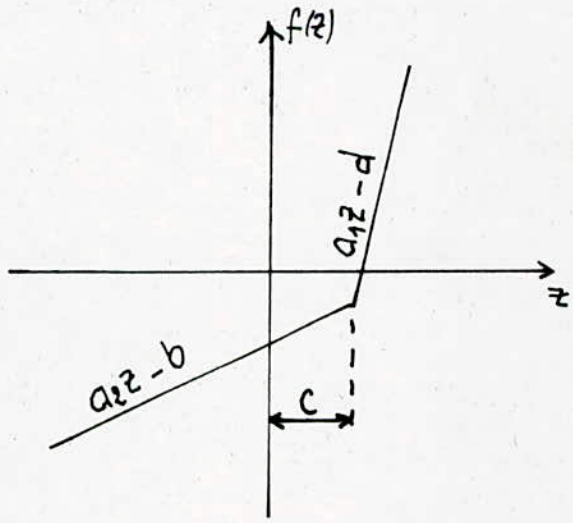
$$h_1 = C_1 + 3C_2(\sigma_z^2 + m_z^2)$$

de là on obtient l'approximation lineaire de $f(z) = C_1 z + C_2 z^3$

$$Y = [C_1 + C_2(3\sigma_z^2 + m_z^2)] m_z + [C_1 + 3C_2(\sigma_z^2 + m_z^2)] z^0$$

4.2 : L.s de $f(z)$ donnée par

$$f(z) = \begin{cases} a_1 z - d, & z \geq c \\ a_2 z - b, & z \leq c \end{cases}$$



$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{c}(a_2 z - b)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz + \int_{c}^{\infty}(a_1 z - d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz\right\}$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(I_1 + I_2\right)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{c}(a_2 z - b)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz = \int_{-\infty}^{c}\left[a_2(z - m_z + m_z) - b\right]\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz$$

$$= \int_{-\infty}^{c} a_2(z - m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz + (a_2 m_z - b)\int_{-\infty}^{c}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz$$

apres avoir fait le changement de variable suivant $\frac{z-m_z}{\sigma_z} = U$ on obtient

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\frac{c-m_z}{\sigma_z}} a_2\sigma_z^2\, U\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}dU + (a_2 m_z - b)\sigma_z\int_{-\infty}^{\frac{c-m_z}{\sigma_z}}\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}dU$$

$$I_1 = -a_2\sigma_z^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_2 m_z - b)\sigma_z\sqrt{2\pi}\,\phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)$$

$$I_2 = \int_{c}^{\infty}(a_1 z - d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz$$ on procédera comme dans I_1

$$I_2 = a_1\sigma_z^2\int_{\frac{c-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} U\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}dU + (a_1 m_z - d)\sigma_z\int_{\frac{c-m_z}{\sigma_z}}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}dU$$

$$I_2 = a_1\sigma_z^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_1 m_z - d)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left[1 - \phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)\right]$$

$$\overline{f(z)} = (a_1 - a_2)\left[\frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} - m_z\phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)\right] + (d-b)\phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right) + a_1 m_z - d$$

$$h_0 = (a_1 - a_2)\left[\frac{\sigma_z}{m_z\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} - \phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)\right] + \frac{d-b}{m_z}\,\phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right) + a_1 - \frac{d}{m_z}$$

$$h_1 = \frac{\overline{f(z)\,z^0}}{\sigma_z^2}$$

$$\overline{f(z)\,z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{c} (a_2 z - b)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz + \int_{c}^{\infty}(a_1 z - d)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left[I_1 + I_2\right]$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{c}(a_2 z - b)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz$$ on effectue le même changement

$$I_1 = a_2\sigma_z^3\int_{-\infty}^{\frac{c-m_z}{\sigma_z}} u^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}du + (a_2 m_z - b)\sigma_z^2\int_{-\infty}^{\frac{c-m_z}{\sigma_z}} u\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}du$$

$$I_1 = \sigma_z^2(b - a_2 c)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_2\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\,\phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)$$

$$I_2 = \int_{c}^{\infty}(a_1 z - d)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz$$ de même on obtient

$$I_2 = a_1\sigma_z^3\int_{\frac{c-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} u^2\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}du + (a_1 m_z - d)\sigma_z^2\int_{\frac{c-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} u\exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\}du$$

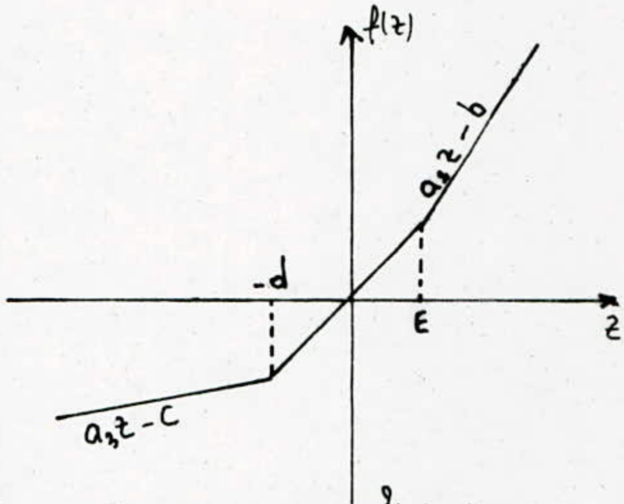
$$I_2 = \sigma_z^2(a_1 c - d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_1\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(1 - \phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$\overline{f(z)\,z^0} = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi}}(a_1 - a_2)c\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + \frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi}}(b-d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + \cdots$$

$$\cdots\cdots + (a_2 - a_1)\sigma_z^2\,\phi\left(\frac{c-m_z}{\sigma_z}\right) + a_1\sigma_z^2$$

$$h_1 = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}(a_1-a_2).C\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{C-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}(b-d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{C-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + \cdots$$
$$\cdots\cdots + (a_2-a_1)\,\phi\left(\frac{C-m_z}{\sigma_z}\right) + a_1$$

4.3: L.S de $f(z)$ donnée par:



$$f(z) = \begin{cases} a_3 z - C\ , & z \leq -d \\ a_1 z\ , & -d \leq z \leq \varepsilon \\ a_2 z - b\ , & z \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$h_0 = \frac{\overline{f(z)}}{m_z}$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\int_{-\infty}^{-d}(a_3 z - C) + \int_{-d}^{\varepsilon} a_1 z + \int_{\varepsilon}^{\infty}(a_2 z - b)\right]\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz\right\}$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-d}(a_3 z - C)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}dz$$ Aprés changement de variable on obtient

$$I_1 = a_3\sigma_z^2\int_{-\infty}^{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)} U\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}dU + (a_3 m_z - C)\sigma_z\int_{-\infty}^{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)}\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\}dU$$

d'ou

$$I_1 = -a_3\sigma_z^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_3 m_z - C)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(1-\phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2 = \int_{-d}^{\varepsilon} a_1 z\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}$$

$$I_2 = a_1\sigma_z^2 \int_{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)}^{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}} U \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU + a_1 m_z \sigma_z \int_{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)}^{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}} \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU$$

$$I_2 = a_1\sigma_z^2\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right) + a_1 m_z \sigma_z\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right) + \phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)\right) - \dots$$

$$\dots - a_1 m_z \sigma_z \sqrt{2\pi}$$

$$I_3 = \int_{\epsilon}^{\infty} (a_2 z - b)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_3 = a_2\sigma_z^2 \int_{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} U\exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU + (a_2 m_z - b)\sigma_z \int_{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}U^2\right\} dU$$

$$I_3 = a_2\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_2 m_z - b)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(1 - \phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\Big[(a_1-a_3)\sigma_z^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_2-a_1)\sigma_z^2\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + \dots$$

$$\dots + (a_3+a_2-a_1)m_z\sigma_z\sqrt{2\pi} + (a_1-a_3)m_z\sigma_z\sqrt{2\pi}\,\phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right) + \dots$$

$$\dots + (a_1-a_2)m_z\sigma_z\sqrt{2\pi}\,\phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right) + c\sigma_z\sqrt{2\pi}\,\phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right) + b\sigma_z\sqrt{2\pi}\,\phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right) - \dots$$

$$\dots - (b+c)\sigma_z\sqrt{2\pi}\Big]$$

$$h_0 = \frac{1}{m_z\sqrt{2\pi}}\left[(a_1-a_3)\sigma_z\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_2-a_1)\sigma_z\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right] + (a_1-a_3)\phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right) + \dots$$

$$\dots + (a_1-a_2)\phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right) + \frac{1}{m_z}\left[c\,\phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right) + b\,\phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right) - (b+c)\right] + (a_3+a_2-a_1)$$

$$h_1 = \frac{\overline{f(z)z^0}}{\sigma_z^2}$$

$$\overline{f(z)z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\int_{-\infty}^{-d}(a_3 z - c) + \int_{-d}^{\epsilon} a_1 z + \int_{\epsilon}^{\infty}(a_2 z - b)\right](z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz\right\}$$

$$\overline{f(z)\,z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-d} (a_3 z - c)(z - m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_1 = a_3\sigma_z^3 \int_{-\infty}^{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)} u^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du + (a_3 m_z - c)\sigma_z^2 \int_{-\infty}^{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)} u \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du$$

$$I_1 = \sigma_z^2 (c + a_3 d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_3\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(1 - \phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2 = \int_{-d}^{\epsilon} a_1 z (z - m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2 = \int_{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)}^{\frac{\epsilon - m_z}{\sigma_z}} a_1\sigma_z^3 u^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du + a_1 m_z \sigma_z^2 \int_{-\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)}^{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}} u \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du$$

$$I_2 = -a_1\sigma_z^2\left(d\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + \epsilon\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right) + a_1\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{d+m_z}{\sigma_z}\right) + \phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right) - 1\right)$$

$$I_3 = \int_{\epsilon}^{\infty} (a_2 z - b)(z - m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_3 = a_2\sigma_z^3 \int_{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} u^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du + (a_2 m_z - b)\sigma_z^2 \int_{\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}}^{\infty} u \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du$$

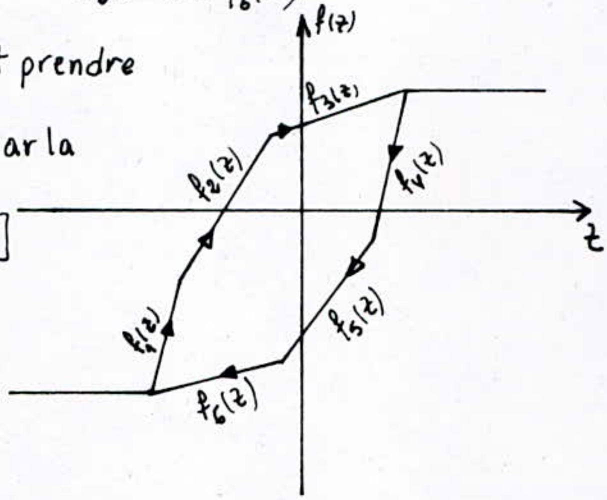
$$I_3 = \sigma_z^2(a_2\epsilon - b)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_2\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(1 - \phi\left(\frac{\epsilon-m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

d'où

$$h_1 = \frac{1}{\sigma_z^2}\cdot\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left[I_1 + I_2 + I_3\right]$$

4.4 : L.s d'une transformation donnée par

$$f(z) = \begin{cases} -P & \text{si } z \leqslant -\Delta_1 \\ R & \text{si } z \geqslant \Delta_2 \\ \text{si } -\Delta_1 \leqslant z \leqslant \Delta_2 & \text{la dépendance entre } x \text{ et } z \text{ est multifonctionnelle} \\ a_1 z + b & \text{si } -\Delta_1 \leqslant z \leqslant -f \quad \text{Posons : } a_1 z + b = f_1(z) \\ a_2 z + c & \text{"} \ -f \leqslant z \leqslant -g \quad \text{"} \quad a_2 z + c = f_2(z) \\ a_3 z + d & \text{"} \ -g \leqslant z \leqslant \Delta_2 \quad \text{"} \quad a_3 z + d = f_3(z) \\ a_4 z - e & \text{"} \ \Delta_2 \geqslant z \geqslant h \quad \text{"} \quad a_4 z - e = f_4(z) \\ a_5 z - l & \text{"} \ h \geqslant z \geqslant -j \quad \text{"} \quad a_5 z - l = f_5(z) \\ a_6 z - n & \text{"} \ -j \geqslant z \geqslant -\Delta_1 \quad \text{"} \quad a_6 z - n = f_6(z) \end{cases}$$



dans le cas où $z(t)$ est stationnaire on peut prendre que la probabilite pour que $z(t)$ arrive par la droite par rapport à l'intervalle $[-\Delta_1, \Delta_2]$ est μ_1 :

$$\mu_1 = \frac{\int_{\Delta_2}^{\infty} w(z)\,dz}{\int_{-\infty}^{-\Delta_1} w(z)\,dz + \int_{\Delta_2}^{\infty} w(z)\,dz}, \quad \mu_2 = 1 - \mu_1$$

ou $w(z)$ est la densité de Probabilité de la loi normale que suit le processus z

$$h_0 = \frac{\overline{f(z)}}{m_z}$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{-\Delta_1} -P + \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \mu_1 \left(f_1(z) + f_2(z) + f_3(z) \right) + \mu_2 \left(f_4(z) + f_5(z) + f_6(z) \right) + \int_{\Delta_2}^{\infty} R \right] \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{z - m_z}{\sigma_z} \right)^2 \right\} dz \right\}$$

$$\overline{f(z)} = \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} \left[I_1 + I_2 + I_3 \right]$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-\Delta_1} -P \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz = -P\sigma_z \int_{-\infty}^{-\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2}u^2\right\} du$$

$$I_1 = -P\sigma_z\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2 = \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2}\left[\mathcal{N}_1\left(f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)\right)+\mathcal{N}_2\left(f_4(z)+f_5(z)+f_6(z)\right)\right]\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2 = \mathcal{N}_1\left(I_2^1+I_2^2+I_2^3\right)+\mathcal{N}_2\left(I_2^4+I_2^5+I_2^6\right)$$

$$I_2^1 = \int_{-\Delta_1}^{-f_1}(a_1 z+b)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^1 = a_1\sigma_z^2\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right)+(a_1 m_z+b)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)-\phi\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^2 = \int_{-f}^{-g}(a_2 z+c)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^2 = a_2\sigma_z^2\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right)+(a_2 m_z+c)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{f+m}{\sigma_z}\right)-\phi\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^3 = \int_{-g}^{\Delta_2}(a_3 z+d)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^3 = a_3\sigma_z^2\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right)+(a_3 m_z+d)\sigma_z\left(\phi\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)+\phi\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)-1\right)\sqrt{2\pi}$$

$$I_2^4 = \int_{\Delta_2}^{h}(a_4 z-e)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^4 = a_4\sigma_z^2\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}-\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right)+(a_4 m_z-e)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)-\phi\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^5 = \int_h^{-d} (a_5 z - l) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^5 = a_5 \sigma_z^2 \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right) + (a_5 m_z - l)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(1 - \phi\left(\frac{d+m_t}{\sigma_z}\right) - \phi\left(\frac{h-m_t}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^6 = \int_{-d}^{-\Delta_1} (a_6 z - n) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^6 = a_6 \sigma_z^2 \left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{d+m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1+m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\}\right) + (a_6 m_z - n)\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{d+m_t}{\sigma_z}\right) - \phi\left(\frac{\Delta_1+m_t}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_3 = \int_{\Delta_2}^{\infty} R \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_t}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_3 = R\sigma_z\sqrt{2\pi}\left(1 - \phi\left(\frac{\Delta_2-m_t}{\sigma_t}\right)\right)$$

on note que

$$\mu_1 = \frac{\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_2-m_t}{\sigma_z}\right)\right)}{\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_1+m_t}{\sigma_z}\right)\right)+\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_2-m_t}{\sigma_z}\right)\right)}$$

$$\mu_2 = \frac{\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_1+m_t}{\sigma_z}\right)\right)}{\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_1+m_t}{\sigma_z}\right)\right)+\left(1-\phi\left(\frac{\Delta_2-m_t}{\sigma_z}\right)\right)}$$

$$h_0 = \frac{\overline{f(z)}}{m_z} = \frac{1}{m_z\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(I_1+I_2+I_3\right) = \frac{1}{m_z\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(I_1+\mu_1\left(I_2^1+I_2^2+I_2^3\right)+\mu_2\left(I_2^4+I_2^5+I_2^6\right)+I_3\right)$$

$$h_1 = \frac{\overline{f(z)z^0}}{\sigma_z^2}$$

$$\overline{f(z)z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\left[\int_{-\infty}^{-\Delta_1} -P + \int_{-\Delta_1}^{\Delta_2} \mu_1\left(f_1(z)+f_2(z)+f_3(z)\right)+\mu_2\left(f_4(z)+f_5(z)+f_6(z)\right)+\int_{\Delta_2}^{\infty} R\right](z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} \ldots dz\right]\right\}$$

$$\overline{f(z)z^0} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(I_1+I_2+I_3\right)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-\Delta_1} -p(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_1 = p\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}$$

$$I_2 = \nu_1\left(I_2^1 + I_2^2 + I_2^3\right) + \nu_2\left(I_2^4 + I_2^5 + I_2^6\right)$$

$$I_2^1 = \int_{-\Delta_1}^{-f} (a_1 z + b)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^1 = (a_1 f - b)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (b - a_1\Delta_1)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_1\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right) - \phi\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^2 = \int_{-f}^{-g} (a_2 z + c)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^2 = (a_2 g - c)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (c - a_2 f)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_2\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{f+m_z}{\sigma_z}\right) - \phi\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^3 = \int_{-g}^{\Delta_2} (a_3 z + d)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^3 = -(a_3\Delta_2 + d)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (d - a_3 g)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{g+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_3\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right) + \phi\left(\frac{g+m}{\sigma_z}\right) - 1\right.$$

$$I_2^4 = \int_{\Delta_2}^{h} (a_4 z - e)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^4 = (e - a_4 h)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_4\Delta_2 - e)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_4\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right) - \phi\left(\frac{\Delta_2-m}{\sigma_z}\right)\right.$$

$$I_2^5 = \int_{h}^{-j} (a_5 z - e)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^5 = (a_5 j + \ell)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{j+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + (a_5 h - \ell)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_5\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(1-\phi\left(\frac{j+m}{\sigma_z}\right)-\phi\left(\frac{h-m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_2^6 = \int_{-j}^{-\Delta_1} (a_6 z - n)(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

$$I_2^6 = (a_6\Delta_1 + n)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} - (a_6 j + n)\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{j+m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} + a_6\sigma_z^3\sqrt{2\pi}\left(\phi\left(\frac{j+m_z}{\sigma_z}\right)-\phi\left(\frac{\Delta_1+m_z}{\sigma_z}\right)\right)$$

$$I_3 = \int_{\Delta_2}^{\infty} R(z-m_z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$$

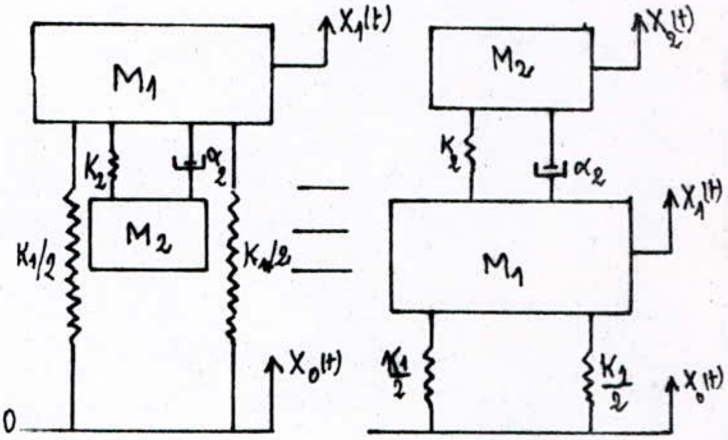
$$I_3 = R\sigma_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_2-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\}$$

$$h_1 = \frac{1}{\sigma_z^2}\cdot\frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\left(I_1 + \mathcal{N}_1(I_2^1+I_2^2+I_2^3) + \mathcal{N}_2(I_2^4+I_2^5+I_2^6) + I_3\right)$$

où $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ ont été déja calculé.

III MODELE D'UN AMORTISSEUR LINEAIRE

III 1. Détermination des fonctions de transferts du système :



on obtient ces fonctions à partir des équations différentielles du mouvement qui sont :

$$\begin{cases} M_1\ddot{X}_1 + K_1(X_1 - X_0) + \alpha_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + K_2(X_1 - X_2) = 0 \\ M_2\ddot{X}_2 + \alpha_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + K_2(X_2 - X_1) = 0 \end{cases}$$

en passant aux transformées de Fourier on obtient

$$M_1 s^2\overline{X}_1 + K_1(\overline{X}_1 - \overline{X}_0) + \alpha_2 s(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + K_2(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = 0$$

$$M_2 s^2\overline{X}_2 + \alpha_2 s(\overline{X}_2 - \overline{X}_1) + K_2(\overline{X}_2 - \overline{X}_1) = 0$$

d'où

$$(M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2)\overline{X}_2 = (\alpha_2 s + K_2)\overline{X}_1 \qquad (1)$$

$$(M_1 s^2 + \alpha_2 s + K_1 + K_2)\overline{X}_1 - (\alpha_2 s + K_2)\overline{X}_2 = K_1\overline{X}_0 \qquad (2)$$

de (1) et (2) on aura

$$\left((M_1 s^2 + \alpha_2 s + K_1 + K_2) - \frac{(\alpha_2 s + K_2)^2}{M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2}\right)\overline{X}_1 = K_1\overline{X}_0$$

ou encore

$$\frac{(M_1 s^2 + \alpha_2 s + K_1 + K_2)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2) - (\alpha_2 s + K_2)^2}{M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2}\cdot\overline{X}_1 = K_1\overline{X}_0 \qquad (3)$$

de (1) $$H\frac{x_2}{x_1}(s) = \frac{\overline{X}_2}{\overline{X}_1} = \frac{\alpha_2 s + K_2}{M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2} \quad (4)$$

de (3) $$H\frac{x_1}{x_0}(s) = \frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_0} = \frac{K_1(M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2)}{(M_1 s^2 + \alpha_2 s + K_1 + K_2)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2) - (\alpha_2 s + K_2)^2} \quad (5)$$

de (4) et (5) $$H\frac{x_2}{x_0}(s) = \frac{\overline{X}_2}{\overline{X}_0} = \frac{K_1(\alpha_2 s + K_2)}{(M_1 s^2 + \alpha_2 s + K_1 + K_2)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + K_2) - (\alpha_2 s + K_2)^2}$$

on obtient finalement :

$$H\frac{x_1}{x_0}(s) = \frac{M_2 K_1 s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 K_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)s^3 + (M_1 K_2 + M_2 K_2 + M_2 K_1)s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 K_2}$$

$$H\frac{x_2}{x_0}(s) = \frac{\alpha_2 K_1 s + K_1 K_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)s^3 + (M_1 K_2 + M_2 K_2 + M_2 K_1)s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 K_2}$$

III 2 : Détermination des dispersions pour differents bruits

2.1 : Cas où le bruit est donné par $S_{x_0}(s) = N^2$

par definition $\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} |H(s)|^2 S(s)\, ds$

2.1.1 Détermination de $\sigma_{x_1}^2$:

on a deja obtenu $H\frac{x_1}{x_0}(s) = \frac{M_2 K_1 s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 K_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)s^3 + (M_1 K_2 + M_2 K_2 + M_2 K_1)s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 K_2}$

posons :

$A = M_2 K_1$, $B = M_1 M_2$, $C = (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)$, $D = (M_1 + M_2)$, $E = \alpha_2 K_1$

de ce fait on a $$\sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{A s^2 + E s + K_1 K_2}{B s^4 + C s^3 + (D K_2 + A) s^2 + E s + K_1 K_2} \right|^2 N^2 ds$$

dans ce cas on peut poser $\sigma_{x_1}^2$ sous la forme

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(s)\cdot C(-s)}{d(s)\cdot d(-s)}\,ds$$

où $C(s) = As^2 + Es + K_1K_2$

$$d(s) = Bs^4 + Cs^3 + (DK_2 + A)s^2 + Es + K_1K_2$$

donc : $\sigma_{x_1}^2 = I_4^{(1)} N^2$ où I_4 est donné par les tables d'intégrale

$$I_4 = \frac{c_3^2(-d_0^2 d_3 + d_0 d_1 d_2) + (c_2^2 - 2c_1c_3)d_0 d_1 d_4 + (c_1^2 - 2c_0c_2)d_0 d_3 d_4 + c_0^2(-d_1^2 d_4 + d_2 d_3 d_4)}{2 d_0 d_4(-d_0 d_3^2 - d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3)}$$

dans notre cas : $c_0 = K_1K_2$, $c_1 = E$, $c_2 = A$, $c_3 = 0$

$$d_0 = K_1K_2 \ , \ d_1 = E \ , \ d_2 = (DK_2 + A) \ , \ d_3 = C \ , \ d_4 = B$$

d'où

$$I_4^{(1)} = \frac{A^2E + E^2C + K_1K_2(CDK_2 - AC - EB)}{2(EAC - E^2B) + 2(EDC - K_1C^2)K_2} = \frac{N_{41}}{D_{41}} \quad \text{avec}$$

$$N_{41} = M_2^2\alpha_2K_1^3 + M_1\alpha_2^3K_1^2 + M_2\alpha_2^3K_1^2 + M_1^2\alpha_2K_1K_2^2 + M_2^2\alpha_2K_1K_2^2 + 2M_1M_2\alpha_2K_1K_2^2 - 2M_1M_2\alpha_2K_1^2K_2 - \dots$$
$$\dots - M_2^2\alpha_2K_1^2K_2$$

$$D_{41} = 2M_2^2\alpha_2^2K_1^2$$

d'où $\quad \sigma_{x_1}^2 = \dfrac{N_{41}}{D_{41}} N^2$

2.1.2 Détermination de $\sigma_{x_2}^2$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{Es + K_1K_2}{Bs^4 + Cs^3 + (DK_2 + A)s^2 + Es + K_1K_2} \right|^2 N^2\,ds$$

dans ce cas $C_0 = K_1K_2$, $C_1 = E$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 sont les même que ceux déja definis

$$\sigma_{x_2}^2 = I_4^{(2)} N^2$$

$$I_4^{(2)} = \frac{E^2C + K_1K_2(DCK_2 + AC - EB)}{2(EAC - E^2B) + 2(EDC - K_1C^2)K_2} = \frac{N_{42}}{D_{42}} \quad \text{avec}$$

$$N_{42} = M_1\alpha_2^3K_1^2 + M_2\alpha_2^3K_1^2 + M_1^2\alpha_2K_1K_2^2 + M_2^2\alpha_2K_1K_2^2 + 2M_1M_2\alpha_2K_1K_2^2 + M_2^2\alpha_2K_1^2K_2$$

$$D_{42} = D_{41} = 2M_2^2\alpha_2^2K_1^2$$

donc $\sigma_{x_2}^2 = \frac{N_{42}}{D_{42}} . N^2$

2.2 Cas où le bruit est donné par $S_{x_0}(s) = \frac{N^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - s^2)$

2.2.1 Détermination de $\sigma_{x_1}^2$

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{As^2 + Es + K_1K_2}{Bs^4 + Cs^3 + (DK_2 + A)s^2 + Es + K_1K_2}\right|^2 \frac{N^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - s^2)\, ds$$

or $(\Omega^2 - s^2) = (\Omega + s)(\Omega - s)$

dans ce cas on aura :

$$C(s) = (As^2 + Es + K_1K_2)(\Omega + s) = As^3 + (A\Omega + E)s^2 + (E\Omega + K_1K_2)s + K_1K_2\Omega$$

d'ou : $C_0 = K_1K_2\Omega$, $C_1 = (E\Omega + K_1K_2)$, $C_2 = (A\Omega + E)$, $C_3 = A$

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 ont été definis

pour simplifier l'ecriture posons :

$C_1 = U$, $C_2 = x$ et $d_2 = m = (DK_2 + A)$

donc. $\sigma_{x_1}^2 = I_4^{(1)^*} \frac{N^2}{\Omega^2}$

où

$$I_4^{(1)^*} = \frac{A^2(\varepsilon m - K_1K_2C) + (x^2 - 2UA)\varepsilon B + (U^2 - 2K_1K_2\Omega x)CB + K_1K_2\Omega^2(mCB - \varepsilon B^2)}{2B(\varepsilon mC - \varepsilon^2 B - K_1K_2C^2)} = \frac{N_{41}^*}{D_{41}^*}$$

où

$$N_{41}^* = M_2^3\alpha_2K_1^4 + M_2^3M_1K_1^3\alpha_2\Omega^2 + M_2M_1\alpha_2^3K_1^3 - 2M_2^2M_1\alpha_2K_1^3K_2 + M_2M_1\alpha_2^3K_1^2\Omega^2 + M_2M_1\alpha_2K_1^2K_2^2 - \dots$$

$$\dots - 2M_2^2M_1^2\alpha_2K_1^2K_2\Omega + M_2^2M_1\alpha_2^3K_1^2\Omega^2 + M_2^2M_1\alpha_2K_1^2K_2^2 - 2M_2^3M_1\alpha_2K_1^2K_2\Omega^2 + \dots$$

$$\dots + M_2M_1^3\alpha_2K_1K_2^2\Omega^2 + 2M_2^2M_1^2\alpha_2K_1K_2^2\Omega^2 + M_2^3M_1\alpha_2K_1K_2^2\Omega^2 + M_2^3M_1\alpha_2K_1^2K_2\Omega^2$$

$$D_{41}^* = 2M_2^3M_1\alpha_2^2K_1^2$$

d'où $\sigma_{x_1}^2 = \frac{N_{41}^*}{D_{41}^*} \cdot \frac{N^2}{\Omega^2}$

2.2.2 Détermination de $\sigma_{x_2}^2$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\varepsilon S + K_1K_2}{BS^4 + CS^3 + (DK_2 + A)S^2 + \varepsilon S + K_1K_2} \right|^2 \frac{N^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - S^2)\, dS$$

d'où

$C(S) = (\varepsilon S + K_1K_2)(\Omega + S) = \varepsilon S^2 + (\varepsilon\Omega + K_1K_2)S + K_1K_2\Omega$

$C_0 = K_1K_2\Omega$, $C_1 = U$, $C_2 = \varepsilon$, $C_3 = 0$

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 ont été définis; on précise que $d_2 = (DK_2 + A) = m$

donc :

$$\sigma_{x_2}^2 = I_4^{(2)^*} \frac{N^2}{\Omega^2}$$

où

$$I_4^{(2)^*} = \frac{\varepsilon^3 + (U^2 - 2K_1K_2\Omega\varepsilon)C + K_1K_2\Omega^2(mC - \varepsilon B)}{2(\varepsilon mC - \varepsilon^2B - K_1K_2C^2)} = \frac{N_{42}^*}{D_{42}^*}$$

avec

$$N^*_{42} = \alpha_2^3 K_1^3 + M_1\alpha_2^3 K_1^2 \Omega^2 + M_1\alpha_2 K_1^2 K_2^2 + M_2\alpha_2^3 K_1 \Omega^2 + M_2\alpha_2 K_1^2 K_2^2 + M_1^2\alpha_2 K_1 K_2^2 \Omega^2 + \ldots$$
$$\ldots 2M_1M_2\alpha_2 K_1 K_2 \Omega^2 + M_2^2\alpha_2 K_1 K_2^2 \Omega^2 + M_2^2 \alpha_2 K_1^2 K_2 \Omega^2$$

$$D^*_{42} = 2M_2^2\alpha_2^2 K_1^2$$

d'où

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{N^*_{42}}{D^*_{42}} \cdot \frac{N^2}{\Omega^2}$$

2.2.3 Détermination des caractéristiques de l'amortisseur (K_2, α_2, M_2)

pour déterminer complétement l'amortisseur dynamique linéaire il faut necessairement satisfaire la condition

$$\sigma_{x_1}^2 = \min$$

pour satisfaire cette condition il faut théoriquement résoudre le systéme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^2}{\partial M_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^2}{\partial \alpha_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^2}{\partial K_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{avec forcement } \alpha_2 \neq 0$$

2.2.3.1 Cas où le bruit est $S_{x_0}(s) = N^2$

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{N_{41}}{D_{41}} \cdot N^2$$

dans ce cas on doit résoudre le systéme

$$D_{41}^2 \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial M_2} = 2M_2^2 M_1 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 - 2M_2^2 M_1 \alpha_2^3 K_1^3 K_2^2 - M_2^2 \alpha_2^5 K_1^4 - 2M_2 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^3 K_2^2 = 0$$

$$D_{41}^2 \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial \alpha_2} = -M_2^4 \alpha_2^2 K_1^5 + M_2^2 M_1 \alpha_2^4 K_1^4 + M_2^3 \alpha_2^4 K_1^4 - M_2^2 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^3 K_2^2 - 2M_1 M_2^3 \alpha_2^2 K_1^3 K_2^2 - \dots$$
$$\dots - M_2^4 \alpha_2^2 K_1^3 K_2^2 + 2M_1 M_2^3 \alpha_2^2 K_1^4 K_2 + M_2^4 \alpha_2^2 K_1^4 K_2 = 0$$

$$D_{41}^2 \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial K_2} = 2M_1^2 M_2^2 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 + 2M_2^4 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 + 4M_1 M_2^3 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 - 2M_1 M_2^3 \alpha_2^3 K_1^4 - M_2^4 \alpha_2^3 K_1^4 = 0$$

2.2.3.2 Cas où le bruit est $S_{x_0}(s) = \frac{N^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - s^2)$

dans ce cas on doit résoudre le systéme

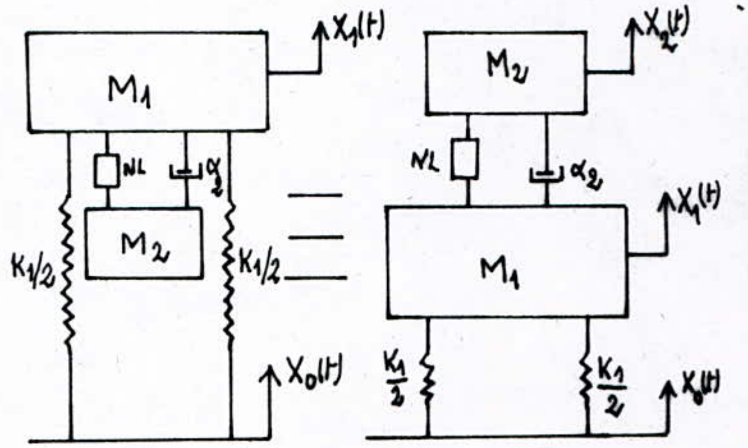
$$D_{42}^2 \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial M_2} = -2M_2^3 M_1^2 \alpha_2^5 K_1^5 + 2M_2^4 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^5 K_2 - 2M_2^3 M_1^3 \alpha_2^5 K_1^4 \Omega^2 - 2M_2^3 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^4 K_2^2 + \dots$$
$$\dots + 2M_2^4 M_1^3 \alpha_2^3 K_1^4 K_2 \Omega - M_2^4 M_1^2 \alpha_2^5 K_1^4 \Omega^2 - M_2^4 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^4 K_2^2 - 2M_2^3 M_1^3 \alpha_2^3 K_1^3 K_2^2 \Omega^2 - \dots$$
$$\dots - 2M_2^4 M_1^3 \alpha_2^3 K_1^3 K_2^2 \Omega^2 = 0$$

$$D_{42}^2 \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial \alpha_2} = -M_2^6 M_1 \alpha_2^2 K_1^6 - M_2^6 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^5 \Omega^2 - M_2^6 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^4 K_2 \Omega^2 + 2M_2^6 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^4 K_2 \Omega^2 - \dots$$
$$\dots - M_2^5 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^3 K_2^2 \Omega^2 - 2M_2^5 M_1^3 \alpha_2^2 K_1^3 K_2^2 \Omega^2 - M_2^5 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^4 K_2^2 + M_2^5 M_1^2 \alpha_2^4 K_1^4 \Omega^2 + \dots$$
$$\dots + 2M_2^5 M_1^3 \alpha_2^2 K_1^4 K_2 \Omega + 2M_2^5 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^5 K_2 - M_2^4 M_1^4 \alpha_2^2 K_1^3 K_2^2 \Omega^2 - M_2^4 M_1^2 \alpha_2^2 K_1^4 K_2^2 + \dots$$
$$\dots + M_2^4 M_1^3 \alpha_2^4 K_1^4 \Omega^2 + M_2^4 M_1 \alpha_2^4 K_1^5 = 0$$

$$D_{42}^2 \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial K_2} = -2M_2^5 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^5 - 2M_2^5 M_1^3 \alpha_2^3 K_1^4 \Omega + 2M_2^5 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^4 K_2 - 2M_2^6 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^4 \Omega^2 + \dots$$
$$\dots + 2M_2^6 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 \Omega^2 + M_2^6 M_1 \alpha_2^3 K_1^4 \Omega^2 + 4M_2^5 M_1^3 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 \Omega^2 + 2M_2^4 M_1^4 \alpha_2^3 K_1^3 K_2 \Omega^2 + \dots$$
$$\dots + 2M_2^4 M_1^2 \alpha_2^3 K_1^4 K_2 = 0$$

IV ETUDE D'UN AMORTISSEUR NON LINEAIRE

On entend par amortisseur non linéaire un amortisseur où le ressort développe une force non lineaire dans le systéme.



IV.1. Détérmination des fonctions de transferts du systéme :

on obtient ces fonctions de transferts à partir des équations differentielles du mouvement qui sont :

$$M_1 \ddot{X}_1 + K_1(X_1 - X_0) + \alpha_2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - S\{X_2 - X_1\} = 0$$

$$M_2 \ddot{X}_2 + \alpha_2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) + S\{X_2 - X_1\} = 0$$

où $S\{X_2 - X_1\}$ est la force non lineaire qui se dévellope dans le systéme

Posons $X_2 - X_1 = Z$

$$X_2 = Z + X_1$$

Les équations deviennent :

$$M_2 \ddot{X}_2 + \alpha_2 \dot{Z} + S(Z) = 0$$

$$M_1 \ddot{X}_1 + K_1 X_1 - \alpha_2 \dot{Z} - S(Z) = K_1 X_0$$

d'aprés la linearisation statistique on a

$S(z) = h_0 m_z + h_1 \overset{\circ}{z}$, $\overset{\circ}{z} = z - m_z$, $h_0 = h_0(m_z, \sigma_z)$, $h_1 = h_1(m_z, \sigma_z)$

d'où le systeme devient

$$M_2 \ddot{X}_2 + \alpha_2 \dot{z} + h_0 m_z + h_1 \overset{\circ}{z} = 0 \qquad (1)$$

$$M_1 \ddot{X}_1 + K_1 X_1 - \alpha_2 \dot{z} - h_0 m_z - h_1 \overset{\circ}{z} = K_1 X_0 \quad (2)$$

d'aprés $X_2 = z + X_1$ et l'eq (1) on aura

$$M_2 \ddot{z} + \alpha_2 \dot{z} + h_0 m_z + h_1 \overset{\circ}{z} = -M_2 \ddot{X}_1 \qquad (3)$$

passant au processus centré dans (2) et (3)

sachant que

$$X_j = \overset{\circ}{X}_j + m_{x_j} \quad , j = 1, 2$$

$$z = \overset{\circ}{z} + m_z$$

on obtient :

$$M_2 \frac{d^2}{dt^2}(\overset{\circ}{z} + m_z) + \alpha_2 \frac{d}{dt}(\overset{\circ}{z} + m_z) + h_0 m_z + h_1 \overset{\circ}{z} = -M_2 \frac{d^2}{dt^2}(\overset{\circ}{X}_1 + m_{x_1}) \quad (4)$$

$$M_1 \frac{d^2}{dt^2}(\overset{\circ}{X}_1 + m_{x_1}) + K_1(\overset{\circ}{X}_1 + m_{x_1}) - \alpha_2 \frac{d}{dt}(\overset{\circ}{z} + m_z) - h_0 m_z - h_1 \overset{\circ}{z} = K_1(\overset{\circ}{X}_0 + m_{x_0}) \quad (5)$$

de (4) et (5) on obtient un systéme de 4 equations qui sont

$$M_2 \ddot{\overset{\circ}{z}} + \alpha_2 \dot{\overset{\circ}{z}} + h_1 \overset{\circ}{z} = -M_2 \ddot{\overset{\circ}{X}}_1 \qquad (6)$$

$$M_1 \ddot{\overset{\circ}{X}}_1 + K_1 \overset{\circ}{X}_1 - \alpha_2 \dot{\overset{\circ}{z}} - h_1 \overset{\circ}{z} = K_1 \overset{\circ}{X}_0 \quad (7)$$

$$M_2 \frac{d^2}{dt^2}(m_z) + \alpha_2 \frac{d}{dt}(m_z) + h_0 m_z = -M_2 \frac{d^2}{dt^2}(m_{x_1}) \qquad (8)$$

$$M_1 \frac{d^2}{dt^2}(m_{x_1}) + K_1 m_{x_1} - \alpha_2 \frac{d}{dt}(m_z) - h_0 m_z = K_1 m_{x_0} \qquad (9)$$

Sachant que le processus est stationnaire

de (8) on a $h_0 m_z = 0$ (10)

et
de (9) on a $m_{x_1} = m_{x_0}$

on considére dans la suite de l'etude que le processus d'entrée est centré c.a.d $m_x = 0$

on a finalement que systeme non lineaire est caractérisé par

$$h_0 m_z = 0 \qquad (10')$$

$$M_2 \ddot{\mathring{z}} + \alpha_2 \dot{\mathring{z}} + h_1 \mathring{z} = -M_2 \ddot{\mathring{x}}_1 \qquad (6')$$

$$M_1 \ddot{\mathring{x}}_1 + K_1 \mathring{x}_1 - \alpha_2 \dot{\mathring{z}} - h_1 \mathring{z} = +K_1 \mathring{x}_0 \qquad (7')$$

Passant aux transformées de Fourier dans (6') et (7') on obtient

$$(M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1)\overline{Z} = -M_2 s^2 \overline{X}_1 \qquad (11)$$

$$(M_1 s^2 + K_1)\overline{X}_1 - (\alpha_2 s + h_1)\overline{Z} = K_1 \overline{X}_0 \qquad (12)$$

d'où

$$(M_1 s^2 + K_1)\overline{X}_1 + (\alpha_2 s + h_1)\frac{M_2 s^2}{M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1}\overline{X}_1 = K_1 \overline{X}_0$$

ou encore

$$\left[(M_1 s^2 + K_1)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1) + M_2 s^2(\alpha_2 s + h_1)\right]\overline{X}_1 = K_1 (M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1)\overline{X}_0 \qquad (13)$$

de (11) on a

$$H_{\frac{z}{x_1}}(s) = \frac{-M_2 s^2}{M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1}$$

$$H_{\frac{z}{x_1}}(s) = H_{\frac{x_2}{x_1}} - 1 \Rightarrow H_{\frac{x_2}{x_1}} = H_{\frac{z}{x_1}} + 1$$

$$H_{\frac{x_2}{x_1}}(s) = \frac{\alpha_2 s + h_1}{M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1}$$

de (13)

$$H_{\frac{X_1}{X_0}}(s) = \frac{K_1(M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1)}{(M_1 s^2 + K_1)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1) + M_2 s^2(\alpha_2 s + h_1)}$$

$$H_{\frac{Z}{X_0}}(s) = H_{\frac{Z}{X_1}} \cdot H_{\frac{X_1}{X_0}} = \frac{-M_2 K_1 s^2}{(M_1 s^2 + K_1)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1) + M_2 s^2(\alpha_2 s + h_1)}$$

$$H_{\frac{X_2}{X_0}} = H_{\frac{X_2}{X_1}} \cdot H_{\frac{X_1}{X_0}} = \frac{K_1(\alpha_2 s + h_1)}{(M_1 s^2 + K_1)(M_2 s^2 + \alpha_2 s + h_1) + M_2 s^2(\alpha_2 s + h_1)}$$

on obtient finalement

$$H_{\frac{Z}{X_0}}(s) = \frac{-M_2 K_1 s^2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)s^3 + ((M_1+M_2)h_1 + M_2 K_1)s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 h_1}$$

$$H_{\frac{X_1}{X_0}}(s) = \frac{M_2 K_1 s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 h_1}{M_1 M_2 s^4 + (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)s^3 + ((M_1+M_2)h_1 + M_2 K_1)s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 h_1}$$

$$H_{\frac{X_2}{X_0}}(s) = \frac{\alpha_2 K_1 s + K_1 h_1}{M_1 M_2 s^4 + (M_1\alpha_2 + M_2\alpha_2)s^3 + ((M_1+M_2)h_1 + M_2 K_1)s^2 + \alpha_2 K_1 s + K_1 h_1}$$

IV 2 : Détermination des dispersions pour different bruits

2.1 Cas où le bruit est donné par $S_{X_0}(s) = N^2$

de la definition de la dispersion

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} |H|^2 S_0(s)\,ds$$

on remarque que "dans ce cas où on a une certaine non linéarité dans le systéme" pour déterminer $\sigma_{X_1}^2$ et $\sigma_{X_2}^2$ on doit nécéssairement déterminer σ_Z^2

car on constate que $H\frac{x_1}{x_0}$ et $H\frac{x_2}{x_0}$ dependent de h_1 qui est lui même en fonction de σ_z

2.1.1 Détermination de σ_z^2

on a $H\frac{z}{x_0} = \frac{-M_2K_1S^2}{M_1M_2S^4+(M_1\alpha_2+M_2\alpha_2)S^3+((M_1+M_2)h_1+M_2K_1)+\alpha_2K_1S+K_1h_1}$

Posons comme on l'a deja fait dans le cas linéaire

$M_2K_1 = A$, $M_1M_2 = B$, $(M_1\alpha_2+M_2\alpha_2) = C$, $(M_1+M_2) = D$, $\alpha_2K_1 = E$.

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{-AS^2}{BS^4+CS^3+(Dh_1+A)S^2+ES+K_1h_1}\right|^2 N^2 ds$$

$\sigma_z^2 = I_4 N^2$; I_4 donné par les tables d'integrale

pour calculer I_4 l'étude devient comme on l'a fait dans le cas linéaire

dans ce cas on a :

$C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = -A$, $C_3 = 0$

$d_0 = K_1h_1$, $d_1 = E$, $d_2 = (Dh_1+A)$; $d_3 = C$, $d_4 = B$

$$I_4 = \frac{A^2E}{2(EAC-E^2B)+2(EDC-K_1C^2)h_1}$$

$$\sigma_z^2 = N^2 \cdot \frac{K_1}{2\alpha_2}$$

2.1.2 Détermination de $\sigma_{x_1}^2$

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H\frac{x_1}{x_0}\right|^2 N^2 ds$$

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{As^2+Es+K_1h_1}{Bs^4+Cs^3+(Dh_1+A)s^2+Es+K_1h_1}\right|^2 N^2 ds$$

$$\sigma_{x_1}^2 = I_4^{(1)} N^2$$

dans ce cas $c_0 = K_1h_1$, $c_1 = E$, $c_2 = A$, $c_3 = 0$

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 ont été definis

$$I_4^{(1)} = \frac{A^2E + E^2C + K_1h_1(CDh_1 - AC - EB)}{2(EAC - E^2B) + 2(EDC - K_1C^2)h_1} = \frac{N_{41N}}{D_{41N}} \quad \text{avec}$$

$$N_{41N} = M_2^2\alpha_2K_1^3 + M_1\alpha_2^3K_1^2 + M_2\alpha_2^3K_1^2 + M_1^2\alpha_2K_1h_1^2 + M_2^2\alpha_2K_1h_1^2 + 2M_1M_2\alpha_2K_1h_1^2 - \ldots$$
$$\ldots - 2M_1M_2\alpha_2K_1^2h_1 - M_2^2\alpha_2K_1^2h_1$$

$$D_{41N} = 2M_2^2\alpha_2^2K_1^2$$

d'où $\sigma_{x_1}^2 = N^2\frac{N_{41N}}{D_{41N}}$

2.1.3 Détermination de $\sigma_{x_2}^2$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{Es+K_1h_1}{Bs^4+Cs^3+(Dh_1+A)s^2+Es+K_1h_1}\right|^2 N^2 ds$$

$$\sigma_{x_2}^2 = I_4^{(2)} N^2$$

dans ce cas: $c_0 = K_1h_1$, $c_1 = E$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 déja definis

$$I_4^{(2)} = \frac{E^2C + K_1h_1(DCh_1 + AC - EB)}{2(EAC - E^2B) + 2(EDC - K_1C^2)h_1} = \frac{N_{42N}}{D_{42N}} \quad \text{avec}$$

$N_{42N} = M_1\alpha_2^3 K_1^2 + M_2\alpha_2^3 K_1^2 + M_1^2\alpha_2 K_1 h_1^2 + M_2^2 \alpha_2 K_1 h_1^2 + 2M_1M_2\alpha_2 K_1 h_1^2 + M_2^2\alpha_2 K_1^2 h_1$

$D_{42N} = 2M_2^2\alpha_2^2 K_1^2$

d'ou $\sigma_{x_2}^2 = N^2 \dfrac{N_{42N}}{D_{42N}}$

2.2 cas où le bruit est donné par $S_{x_0}(s) = \dfrac{N^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - s^2)$

des considerations déja vu on détermine en premier lieu σ_z^2

2.2.1 Détermination de σ_z^2

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-As^2}{Bs^4 + Cs^3 + (Dh_1 + A)s^2 + Es + K_1h_1} \right|^2 \frac{N_2}{\Omega^2}(\Omega^2 - s^2)\, ds$$

Comme dans le cas linéaire on détermine $C(s)$ et $d(s)$

$C(s) = -As^3 - A\Omega s^2$

$d(s) = Bs^4 + Cs^3 + ms^2 + K_1h_1$ où $m = (Dh_1 + A)$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{-As^3 - A\Omega s^2}{Bs^4 + Cs^3 + ms^2 + Es + K_1h_1} \right|^2 \frac{N^2}{\Omega^2}\, ds$$

dans ce cas. $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = -A\Omega$, $C_3 = -A$

$d_0 = B$, $d_1 = E$, $d_2 = m$, $d_3 = C$, $d_4 = B$

$\sigma_z^2 = I_4 \cdot \dfrac{N^2}{\Omega^2}$

$$I_4 = \frac{A^2(Em - K_1h_1C) + A^2\Omega^2 EB}{2B(EmC - E^2B - K_1h_1C^2)} = \frac{N_{4z}}{D_{4z}}$$ avec

$$N_{4z} = M_2^3 \alpha_2 K_1^4 + M_2^3 M_1 \alpha_2 K_1^3 \Omega^2$$

$$D_{4z} = 2 M_2^3 M_1 \alpha_2^2 K_1^2$$

$$I_4 = \frac{M_1 K_1 \Omega^2 + K_1^2}{2 M_1 \alpha_2}$$

d'où

$$\sigma_z^2 = \frac{M_1 K_1 \Omega^2 + K_1^2}{2 M_1 \alpha_2} \cdot \frac{N^2}{\Omega^2}$$

2.2.2 Détermination de $\sigma_{X_1}^2$

$$\sigma_{X_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{A s^2 + E s + K_1 h_1}{B s^4 + C s^3 + m s^2 + E s + K_1 h_1} \right|^2 \frac{N^2}{\Omega^2} (\Omega^2 - s^2)$$

dans ce cas on doit déterminer $C(S)$

$$C(S) = (A S^2 + E S + K_1 h_1)(\Omega + S) = A S^3 + (A\Omega + E) S^2 + (E\Omega + K_1 h_1) S + K_1 h_1 \Omega$$

d'où $C_0 = K_1 h_1 \Omega$, $C_1 = (E\Omega + K_1 h_1)$, $C_2 = (A\Omega + E)$, $C_3 = A$

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 ont été definis

$$\sigma_{X_1}^2 = I_4^{(1)} \cdot \frac{N^2}{\Omega^2}$$

pour simplificier l'écriture posons

$C_1 = U$, $C_2 = x$

$$I_4^{(1)} = \frac{A^2 (E m - K_1 h_1 C) + (x^2 - 2UA) E B + (U^2 - 2 K_1 h_1 \Omega x) C B + K_1 h_1 \Omega^2 (m C B - E B^2)}{2B (E m C - E^2 B - K_1 h_1 C^2)} = \frac{N_{41N}^*}{D_{41N}^*}$$

où

$$N_{41N}^* = M_2^3 \alpha_2 K_1^4 + M_2^3 M_1 K_1^3 \alpha_2 \Omega^2 + M_2 M_1 \alpha_2^3 K_1^3 - 2 M_2^2 M_1 \alpha_2 K_1^3 h_1 + M_2 M_1 \alpha_2^3 K_1^2 \Omega^2 + M_2 M_1 \alpha_2 K_1^2 h_1^2 - \dots$$

$$\dots - 2 M_2^2 M_1^2 \alpha_2 K_1^2 h_1 \Omega + M_2^2 M_1 \alpha_2^3 K_1^2 \Omega^2 + M_2^2 M_1 \alpha_2 K_1^2 h_1^2 - 2 M_2^3 M_1 \alpha_2 K_1^2 h_1 \Omega^2 + \dots$$

$$\dots + M_2 M_1^3 \alpha_2 K_1 h_1^2 \Omega^2 + 2 M_2^2 M_1^2 \alpha_2 K_1 h_1^2 \Omega^2 + M_2^3 M_1 \alpha_2 K_1 h_1^2 \Omega^2 + M_2^3 M_1 \alpha_2 K_1^2 h_1 \Omega^2$$

$D^*_{41N} = 2M_2^3 M_1 \alpha_2^2 K_1^2$

d'où

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{N^*_{41N}}{D^*_{41N}} \cdot \frac{N^2}{\Omega^2}$$

2.2.3 Détérmination de $\sigma_{x_2}^2$

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{ES + K_1h_1}{BS^4 + CS^3 + mS^2 + ES + K_1h_1} \right|^2 \frac{N^2}{\Omega^2}(\Omega^2 - S^2)$$

$$C(S) = (ES + K_1h_1)(\Omega + S) = ES^2 + (E\Omega + K_1h_1)S + K_1h_1\Omega$$

$$\sigma_{x_2}^2 = I_4^{(2)} \frac{N^2}{\Omega^2}$$

$C_0 = K_1h_1\Omega$, $C_1 = U$, $C_2 = E$, $C_3 = 0$, U est défini dans le cas precedent

d_0, d_1, d_2, d_3, d_4 ont été définis

$$I_4^{(2)} = \frac{E^3 + (U^2 - 2K_1h_1\Omega E)C + K_1h_1\Omega^2(mC - EB)}{2(EmC - E^2B - K_1K_1C^2)} = \frac{N^*_{42N}}{D^*_{42N}}$$

où

$$N^*_{42N} = \alpha_2^3K_1^3 + M_1\alpha_2^3K_1^2\Omega^2 + M_1\alpha_2K_1^2h_1^2 + M_2\alpha_2^3K_1^2\Omega^2 + M_2\alpha_2K_1^2h_1^2 + M_1^2\alpha_2K_1h_1^2\Omega^2 + \dots$$
$$\dots + 2M_1M_2\alpha_2K_1h_1\Omega^2 + M_2^2\alpha_2K_1h_1^2\Omega^2 + M_2\alpha_2K_1^2h_1\Omega^2$$

$D^*_{42N} = 2M_2^2\alpha_2^2K_1^2$

d'où

$$\sigma_{x_2}^2 = \frac{N^*_{42N}}{D^*_{42N}} \cdot \frac{N^2}{\Omega^2}$$

Note*: on constate effectivement que pour determiner $\sigma_{x_1}^2$, $\sigma_{x_2}^2$ dans le cas non linéaire on doit determiner le coefficent de transmission $h_1(m_z, \sigma_z)$ or on a trouvé σ_z suivant le cas du bruit excitateur et qui est fonction des caractéristiques du système (M_1, K_1, α_2) donc pour détérminer complétement $h_1(m_z, \sigma_z)$ il faut connaitre la valeur de ; m_z ; et qui est détérminée de la condition (10) $h_0 m_z = 0$; dans ce cas on peut détérminer $\sigma_{x_1}^2$ et $\sigma_{x_2}^2$

2.2.4 Détérmination des caractéristiques de l'amortisseur non-linéaire :

dans ce cas on se trouve confrontér à un proléme complexe car il depend de la non linéarité considérée.

On essayera de donner ici un mode de resolution général pour ce probléme.

Pour que l'amortisseur non linéaire soit complétement détérminé on doit comme dans le cas de l'amortisseur lineaire satisfaire la condition

$$\sigma_{x_1}^2 = \min$$

dans le cas général on doit resoudre le systéme

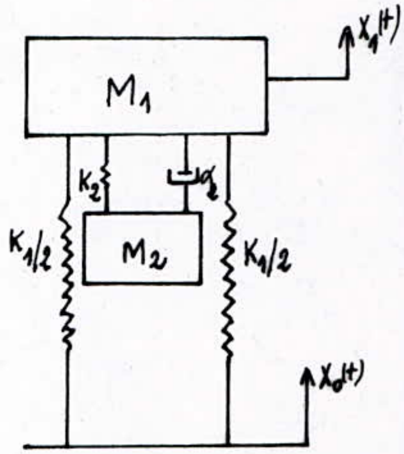
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^2}{\partial M_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^2}{\partial \alpha_2} = 0 & \text{avec forcement } \alpha_2 \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^2}{\partial h_1} \cdot \dfrac{\partial h_1}{\partial w_i} = 0 & \text{où } w_i \text{ représentent les pramétres de la non linéarité considérée} \\[2ex] h_0 m_z = 0 \end{cases}$$

D'aprés la formule donnant h_1 pour chaque non linéarité on peut construire notre systéme

V EXEMPLES

Pour simplifier l'étude on ne s'interessera qu'au cas où l'excitation est un bruit blanc et en particulier $S_{x_0}(s) = N^2 = 1\ [m^2.s]$

V 1 Amortisseur linéaire



Dans cette étude on a un passager sur un fauteuil comme le cas représenté sur la figure ci-contre

où M_1 : masse du passager

K_1 : régidité du fauteuil

On a vu au chapitre III que pour déterminer théoriquement les caractéristiques de l'amortisseur on doit résoudre le systéme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial M_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial \alpha_2} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial K_2} = 0 \end{cases}$$

Dans cette étude on a voulu détérminer les caracteristiques de l'amortisseur lineaire en fonction du rapport $\mu = \dfrac{M_2}{M_1}$

Par consequent le Probleme revient à résoudre un systéme de deux equations en fonction de μ

Le systéme à resoudre est le suivant

$$\begin{cases} D_{41}^2 \cdot \dfrac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial \alpha_2} = M_1^3 K_1^4 (\nu^3+\nu^2)\alpha_2^4 - M_1^4 K_1^3 (\nu^4+2\nu^3+\nu^2)\alpha_2^2 K_2^2 + M_1^4 K_1^4 (\nu^4+2\nu^3)\alpha_2^2 K_2 - M_1^4 K_1^5 \nu^4 \alpha_2^2 = 0 \\[2ex] D_{41}^2 \cdot \dfrac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial K_2} = 2 M_1^4 K_1^3 (\nu^4+2\nu^3+\nu^2)\alpha_2^3 K_2 - M_1^4 K_1^4 (\nu^4+2\nu^3)\alpha_2^3 = 0 \end{cases}$$

Pour exemple d'application : on prend

$M_1 = 80$ Kg

$K_1 = 12500$ N/m

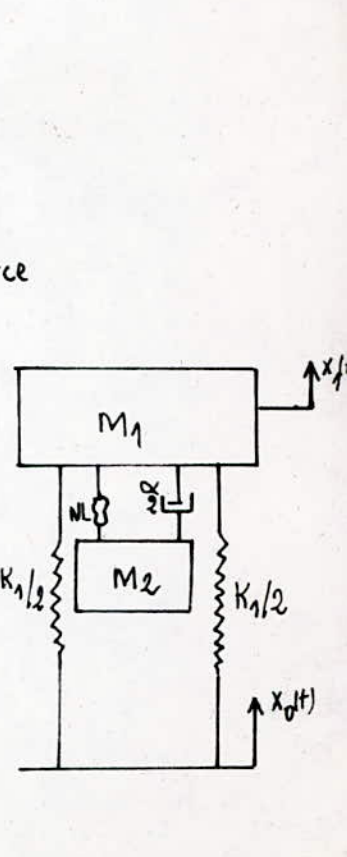
La résolution du systéme précédent nous donne α_2 et K_2 pour cela on a choisi la methode de Newton-Raphson pour la resolution de ce systéme

Remarque : les notations utilisées dans le programme sont

$XM = M_1$, $XK = K_1$, $X(1) = \alpha_2$, $X(2) = K_2$, $R = \nu$

V.2 Amortisseur non lineaire :

La non linéarité considérée dans cet exemple est où la force agissant dans le systéme est $f(z) = C_1 z + C_2 z^3$.



D'apres l'étude générale faite au chapitre IV on a obtenu

$$\sigma_{x_1}^2 = \frac{N_{41N}}{D_{41N}} \cdot N^2$$

où

$$N_{41N} = M_2^2 \alpha_2 K_1^3 + M_1 \alpha_2^3 K_1^2 + M_2 \alpha_2^3 K_1^2 + M_1^2 \alpha_2 K_1 h_1^2 + M_2^2 \alpha_2 K_1 h_1^2 + \dots$$

$$\dots + 2 M_1 M_2 \alpha_2 K_1 h_1^2 - 2 M_1 M_2 \alpha_2 K_1^2 h_1 - M_2^2 \alpha_2 K_1^2 h_1$$

$$D_{u1N} = 2M_2^2\alpha_2^2K_1^2$$

où $h_1 = C_1 + 3C_2(\sigma_z^2 + m_z^2)$ avec $\sigma_z^2 = \frac{K_1}{2\alpha_2}N^2$

donc pour déterminer les caractéristiques de l'amortisseur on doit résoudre

$$\begin{cases} h_0 m_z = 0 \quad ① \\ \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial h_1} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial w_i} = 0 \quad ② \text{ où }, \ w_i = C_1, C_2, \alpha_2 \end{cases}$$

d'aprés la linéarisation statistique on a

$$h_0 m_z = C_1 m_z + C_2 m_z (3\sigma_z^2 + m_z^2)$$

de ① on a

$$C_1 m_z + C_2 m_z (3\sigma_z^2 + m_z^2) = 0 \Rightarrow \text{forcement } m_z = 0$$

d'où

$$h_1 = C_1 + 3C_2\left(\frac{K_1}{2\alpha_2}\right)$$

d'où

$$N_{u1N} = M_2^2\alpha_2K_1^3 + M_1\alpha_2^3K_1^2 + M_2\alpha_2^3K_1^2 + M_1^2K_1\alpha_2\left(C_1 + 3C_2\left(\frac{K_1}{2\alpha_2}\right)\right)^2 + M_2^2K_1\alpha_2\left(C_1 + 3C_2\left(\frac{K_1}{2\alpha_2}\right)\right)^2 + \dots$$

$$\dots + 2M_1M_2K_1\alpha_2\left(C_1 + 3C_2\left(\frac{K_1}{2\alpha_2}\right)\right)^2 - 2M_1M_2K_1^2\alpha_2\left(C_1 + 3C_2\left(\frac{K_1}{2\alpha_2}\right)\right) - M_2^2K_1^2\alpha_2\left(C_1 + 3C_2\left(\frac{K_1}{2\alpha_2}\right)\right)$$

de ② aprés tout calcul de derivation effectué

$$D_{u1N}^2 \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial C_1} = (2M_1^2M_2^2K_1^3 + 2M_2^4K_1^3 + 4M_1M_2^3K_1^3)\alpha_2^3C_1 + 3(M_1^2M_2^2K_1^4 + 2M_1M_2^3K_1^4)\alpha_2^2C_2 - \dots$$

$$\dots - (2M_1M_2^3K_1^4 + M_2^4K_1^4)\alpha_2^3 = 0$$

$$D_{u1N}^2 \cdot \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial C_2} = 3(M_1^2M_2^2K_1^4 + M_2^4K_1^4 + 2M_1M_2^3K_1^4)\alpha_2^2C_1 + \frac{9}{2}(M_1^2M_2^2K_1^5 + M_2^4K_1^5 + 2M_1M_2^3K_1^5)\alpha_2C_2 - \dots$$

$$\dots - (3M_1M_2^3K_1^5 + \frac{3}{2}M_2^4K_1^5)\alpha_2^2 = 0$$

$$D_{41N}^2 \, \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial \alpha_2} = -M_2^4K_1^5\alpha_2^2 + (M_1M_2^2K_1^4 + M_2^3K_1^4)\alpha_2^4 - (M_1^2M_2^2K_1^3 + M_2^4K_1^3 + 2M_1M_2^3K_1^3)C_1^2\alpha_2^2 - \dots$$

$$\dots - \frac{13}{2}(M_1^2M_2^2K_1^5 + M_2^4K_1^5 + 2M_1M_2^3K_1^5)C_2^2 - 6(M_1^2M_2^2K_1^4 + M_2^4K_1^4 + 2M_1M_2^3K_1^4)C_1C_2\alpha_2 \dots$$

$$\dots + 3(2M_1M_2^3K_1^5 + M_2^4K_1^5)C_2\alpha_2 + M_2^4K_1^4 + 2M_1M_2^3K_1^4)C_1\alpha_2^2 = 0$$

Comme dans l'étude de l'amortisseur on peut étudier l'amortisseur non linéaire en fonction de $\nu = M_2/M_1$

ce qui conduit à résoudre le systéme

$$D_{41N}^2 \, \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial C_1} = 2M_1^4K_1^3(\nu^2+\nu)^2\alpha_2^3 C_1 + 3M_1^4K_1^4(2\nu^3+\nu^2)\alpha_2^2 C_2 - M_1^4K_1^4(\nu^4+2\nu^3)\alpha_2^3 = 0$$

$$D_{41N}^2 \, \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial C_2} = 3M_1^4K_1^4(\nu^2+\nu)^2\alpha_2^2 C_1 + \frac{9}{2}M_1^4K_1^5(\nu^2+\nu)^2\alpha_2 C_2 - M_1^4K_1^5\left(\frac{3}{2}\nu^4 + 3\nu^3\right)\alpha_2^2 = 0$$

$$D_{41N}^2 \, \frac{\partial \sigma_{x1}^2}{\partial \alpha_2} = -M_1^4K_1^5\nu^4\alpha_2^2 + M_1^3K_1^4(\nu^3+\nu^2)\alpha_2^4 - M_1^4K_1^3(\nu^2+\nu)^2C_1^2\alpha_2^2 - \frac{13}{2}M_1^4K_1^5(\nu^2+\nu)^2C_2^2 \dots$$

$$\dots - 2M_1^4K_1^4(\nu^2+\nu)^2C_1C_2\alpha_2 + 2M_1^4K_1^5\left(\frac{3}{2}\nu^4 + 3\nu^3\right)C_2\alpha_2 + M_1^4K_1^4(\nu^4+2\nu^3)C_1\alpha_2^2 =$$

pour déterminer les caractéristiques de l'amortisseur non lineaire en fonction de ν on doit résoudre le systéme d'équations obtenu

Vu les risques de divérgence de la méthode de Newton - Raphson on abordera la résolution du probléme de la façon suivante :

supposant qu'on impose le coefficient de frottement α_2 cela nous conduit a résoudre le systéme en (C_1, C_2)

C.a.d on résoudera avec α_2 connue

$$\begin{cases} D^2_{41N}\cdot\dfrac{\partial \sigma^2_{x1}}{\partial C_1} = 2M_1^4K_1^3(\nu^2+\nu)^2\alpha_2^3C_1 + 3M_1^4K_1^4(2\nu^3+\nu^2)\alpha_2^2C_2 - M_1^4K_1^4(\nu^4+2\nu^3)\alpha_2^3 = 0 \\ \\ D^2_{41N}\cdot\dfrac{\partial \sigma^2_{x1}}{\partial C_2} = 3M_1^4K_1^4(\nu^2+\nu)^2\alpha_2^2C_1 + \dfrac{9}{2}M_1^4K_1^5(\nu^2+\nu)^2\alpha_2C_2 - M_1^4K_1^5\left(\dfrac{3}{2}\nu^4+3\nu^3\right)\alpha_2^2 = 0 \end{cases}$$

C'est un systéme linéaire en (C_1, C_2) on le résoud par la methode de Cramer

Posons

$V = M_1^4K_1^3(\nu^2+\nu)^2$, $Q = M_1^4K_1^5(\nu^2+\nu)^2$, $P = M_1^4K_1^5\left(\frac{3}{2}\nu^4+3\nu^3\right)$

$U = M_1^4K_1^4(\nu^2+\nu)^2$, $Y = M^4K_1^4(\nu^4+2\nu^3)$, $Z = M_1^4K_1^4(2\nu^3+\nu^2)$

d'où

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2V\alpha_2^3 & Y\alpha_2^3 \\ 3U\alpha_2^2 & P\alpha_2^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2V\alpha_2^3 & 3Z\alpha_2^2 \\ 3U\alpha_2^2 & \frac{9}{2}Q\alpha_2 \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_2^5(2VP-3UY)}{9\alpha_2^4(VQ-UZ)} = 0 \quad \forall\ \nu, \alpha_2$$

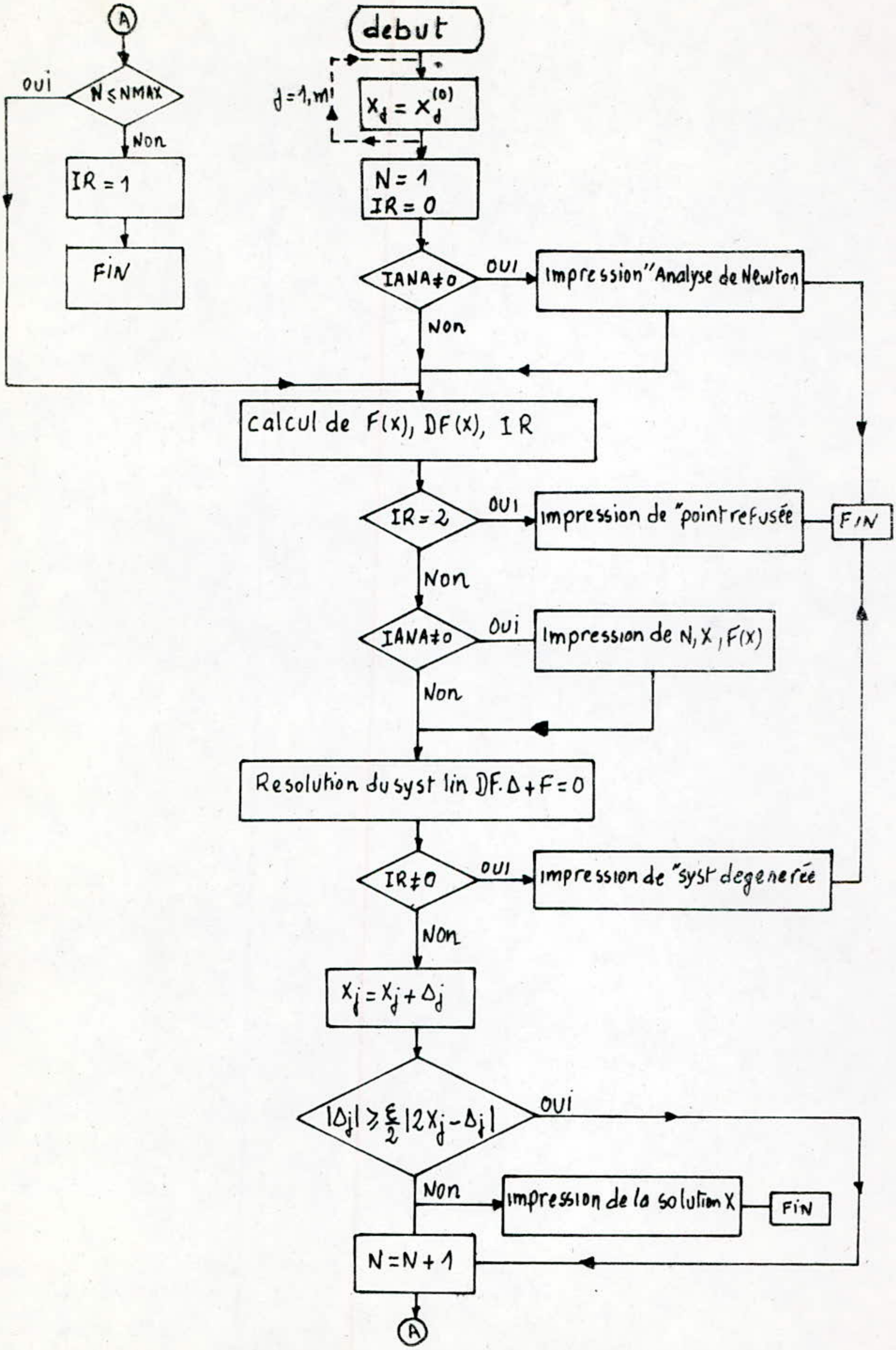
$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} Y\alpha_2^3 & 3Z\alpha_2^2 \\ P\alpha_2^2 & 4{,}5\,Q\alpha_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha_2^4(4{,}5\cdot Y\cdot Q - 3PZ)}{9\alpha_2^4(VQ-UZ)} \quad \text{qui depend de } \nu$$

puisqu on a trouvé que $C_2 = 0\ \forall\ \nu, \alpha_2$ alors pour détérminer les caracteristiques de cet amortisseur on doit résoudre le systéme general de l'amortisseur non lineaire en portant dans celui.ci $C_2 = 0$

C.a.d on résoud le systéme obtenu en (C_1, α_2)

$$\begin{cases} D_{41N}^{2} \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^{2}}{\partial \alpha_2} = M_1^{3}K_1^{4}(\nu^{3}+\nu^{2})\alpha_2^{4} - M_1^{4}K_1^{3}(\nu^{2}+\nu)^{2}\alpha_2^{2}C_1^{2} + M_1^{4}K_1^{4}(\nu^{4}+2\nu^{3})\alpha_2^{2}C_1 - M_1^{4}K_1^{5}\nu^{4}\alpha_2^{2} = 0 \\ D_{41N}^{2} \cdot \dfrac{\partial \sigma_{x_1}^{2}}{\partial C_1} = 2M_1^{4}K_1^{3}(\nu^{2}+\nu)^{2}\alpha_2^{3}C_1 - M_1^{4}K_1^{4}(\nu^{4}+2\nu^{3})\alpha_2^{3} = 0 \end{cases}$$

de ce systéme on remarque qu'on revient à la même étude deja faite dans la determination des caracteristiques de l'amortisseur linéaire.



Organigramme de Newton_Raphson "RSNL"

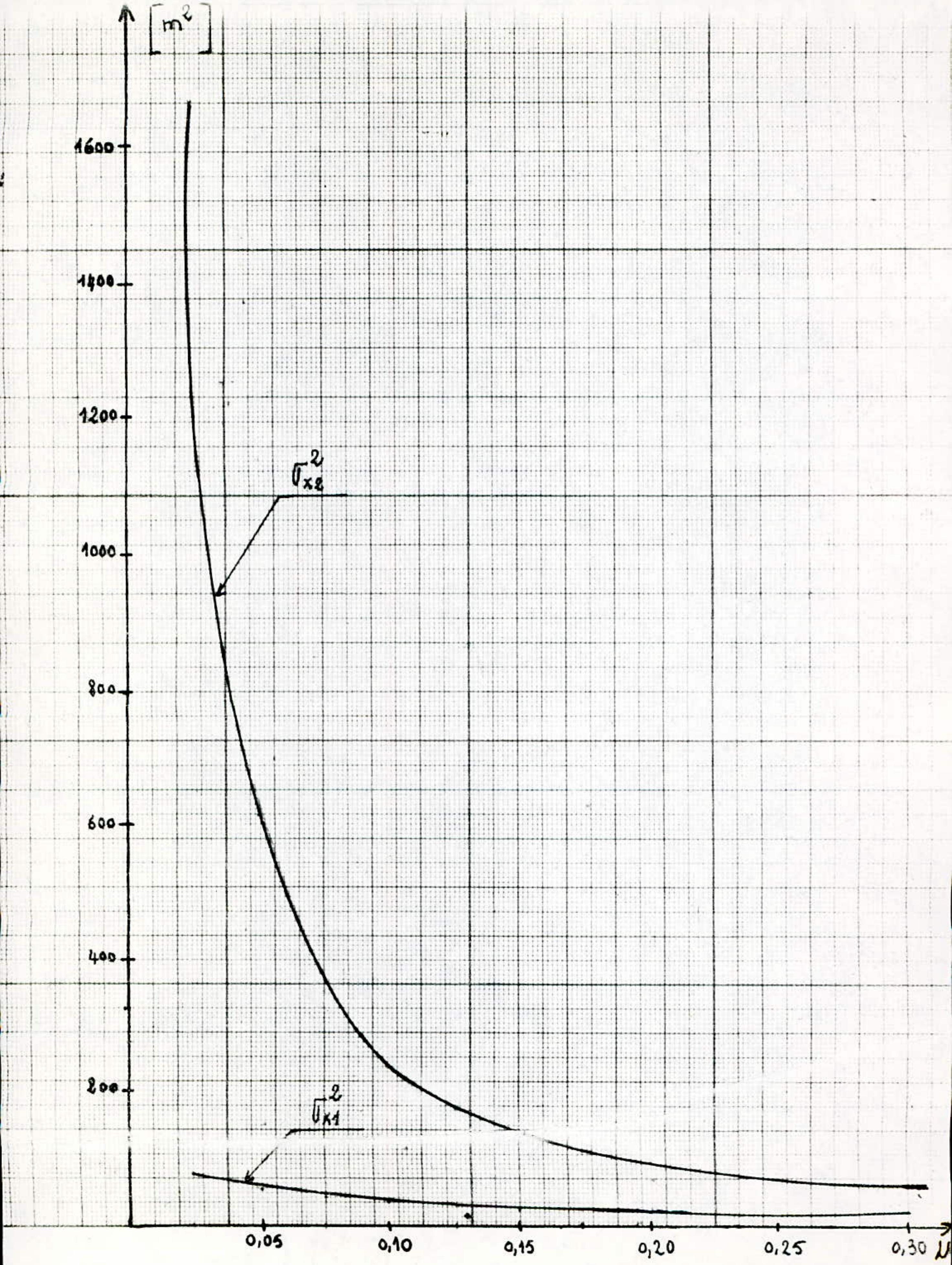
```
C     *********** PROGRAMME POUR LA DETERMINATION********
C          *********** DES CARACTERISTIQUE D'UN AMORTISSEUR**********
C               ****************      LINEAIRE   *****************
C
C     PROGRAMME PRINCIPALE
      DIMENSION  XO(20),X(20),F(20),DF(20,21)
      EXTERNAL CALCUL
      READ*,XO(1),XO(2)
      CALL NEWR(2,CALCUL,XO,1.E-5,100,1,X,IR)
      STOP
      END
C
      SUBROUTINE CALCUL(M,X,F,DF,IR)
      DIMENSION X(20),F(20),DF(20,21)
      R=.1
      XM=80.
      XK=12500.
      A=XM**3*XK**4*(R**3+R**2)
      B=XM**4*XK**3*(R**4+2.*R**3+R**2)
      C=XM**4*XK**4*(R**4+2.*R**3)
      D=XM**4*XK**5*R**4
      F(1)=A*X(1)**4-B*X(1)**2*X(2)**2+C*X(1)**2*X(2)-
     1 D*X(1)**2
      F(2)=2.*B*X(1)**3*X(2)-C*X(1)**3
      DF(1,1)=4.*A*X(1)**3-2.*B*X(1)*X(2)**2+2.*C*X(1)*X(2)
     1 -2.*D*X(1)
      DF(1,2)=-2.*B*X(1)**2*X(2)+C*X(1)**2
      DF(2,1)=6.*B*X(1)**2*X(2)-3.*C*X(1)**2
      DF(2,2)=2.*B*X(1)**3
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE NEWR(M,CALCUL,XO,EPS,NMAX,IANA,X,IR)
      DIMENSION X(20),XO(20),F(20),DF(20,21),DX(20),XC(20)
      EPS2=EPS/2.
      DO 1 K=1,M
1     X(K)=XO(K)
      N=1
      IR=0
      IF(IANA.NE.0) PRINT 100
2     CALL CALCUL(M,X,F,DF,IR)
      IF(IR.EQ.2) GO TO 13
      IF(IANA.EQ.0) GO TO 4
      IF(MOD(N,IANA).NE.0) GO TO 4
      PRINT 101,N
      DO 3 K=1,M
3     PRINT 102,K,X(K),K,F(K)
4     DO 5 K=1,M
5     DF(K,M+1)=-F(K)
      CALL RSLG(DF,20,M,IRES)
      IF(IRES.NE.0) GO TO 12
      DO 6 K=1,M
      DX(K)=DF(K,M+1)
6     XC(K)=X(K)+DX(K)
C
C     TEST D'ARRET
C
      DO 7 K=1,M
      IF(ABS(DX(K)).GT.EPS) GO TO 8
7     CONTINUE
      GO TO 10
8     DO 9 K=1,M
9     X(K)=XC(K)
```

```
      N=N+1
      IF(N.LE.NMAX) GO TO 2
      IR=1
      PRINT 105,NMAX
      GO TO 2000
10    IR=0
      PRINT 103
      DO 11 K=1,M
11    PRINT 104,K,XC(K)
      GO TO 2000
12    IR=2
      PRINT 106
      GO TO 2000
13    PRINT 107
100   FORMAT(1H1,'ANALYSE NEWTON'//)
101   FORMAT(/10X,2HN=,I3,5X,'INCONNUES CALCULEES',19X,
     1 'VALEURS DES FONCTIONS')
102   FORMAT(21X,2HX(,I2,2H)=,E12.5,10X,1HF,I2,1H=,E12.5)
103   FORMAT(1H0,4X,'SOLUTION TROUVEE')
104   FORMAT(6X,2HX(,I2,2H)=,E12.5)
105   FORMAT('SS PROG NEW,SOL NON TROUVEE AU BOUT DE',
     1 I14,2X,'ITERATIONS'/)
106   FORMAT('SS PROG NEW,CALCUL DES DX .SYST DEGENERE'/)
107   FORMAT('SS PROG NEW.POINT REFUSE'/)
2000  RETURN
      END
C
C     SOUS PROGRAMME RSLG
C
      SUBROUTINE RSLG(DF,NC,M,IRES)
      DIMENSION DF(20,1)
      IRES=2
      IF(20.LT.M.OR.M.LT.1) GO TO 3000
      IRES=1
      NP1=M+1
      DO 5 I=1,M
      IP1=I+1
C
C     RECHERCHE DU PIVOT MAXIMAL
C
      AMAX=0.
      L=I
      DO 1 K=1,M
      IF(AMAX.GE.ABS(DF(K,I))) GO TO 1
      L=K
      AMAX=ABS(DF(K,I))
1     CONTINUE
      IF(AMAX.EQ.0.) GO TO 3000
C
C     PERMUTATION EVENTUELLE
C
      IF(L.EQ.I) GO TO 3
      DO 2 J=I,NP1
      AUX=DF(I,J)
      DF(I,J)=DF(L,J)
2     DF(L,J)=AUX
C
C     DIVISION PAR LE PIVOT
C
3     DO 4 J=IP1,NP1
4     DF(I,J)=DF(I,J)/DF(I,I)
      IF(I.EQ.M) GO TO 6
```

```
C
      DO 5 K=IP1,M
      DO 5 J=IP1,NP1
5     DF(K,J)=DF(K,J)-DF(K,I)*DF(I,J)
C
C     REMONTEE
C
6     IF(M.EQ.1)GO TO 8
      DO 7 L=2,M
      I=M-L+1
      IP1=I+1
      DO 7 K=IP1,M
7     DF(I,NP1)=DF(I,NP1)-DF(K,NP1)*DF(I,K)
8     IRES=0
3000  CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
***********CARACTERISTIQUE DE L'AMORTISSEUR DYNAMIQUE************
C                    ******************** LINEAIRE **********************
C                      ************ POUR DIFFERENTS R=M2/M1 **********

C                ALFA2[N.S/M] ****************   K2[N./M]


C        *************************   R=0.025  *************************

C         ******ALFA2=3.845 ***     ***********    K2=301.16  **********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       **************************   R=0.05   *************************
C
C         ******ALFA2=10.584 ***    ***********    K2=581.07  **********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       **************************   R=0.075  *************************
C
C          *****ALFA2=18.939 ***    ***********    K2=841.67  ***********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       *************************    R=0.10   *************************
C
C          *****ALFA2=28.419 ***    ***********  . K2=1084.70  **********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       *************************    R=0.125  *************************

C         ******ALFA2=38.734 ***    ***********    K2=1311.70  ***********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       *************************    R=0.15   *************************

C         ******ALFA2=49.687 ***    ***********    K2=1524.10  ************
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       *************************    R=0.175   *************************

C         ******ALFA2=61.134 ***    ***********    K2=1723.10  ***********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       *************************    R=0.20    *************************

C         ******ALFA2=72.966 ***    ***********    K2=1909.70   ***********
C
      ---------------------------------------------------------------------
C       *************************    R=0.30    *************************

C         ******ALFA=122.710 ***    ***********    K2=2551.80   **********
C
      ---------------------------------------------------------------------
```

```
C       ***************** POUR UN BRUIT BLANC S=N**2 **********
C        *************** EN FONCTION DE R=M1/M2 ***************

      XM=80.
      XK=12500.
      ACCEPT*, A,B,R
      XN1=XM*XK**2*(1.+R)*A**3+XM**2*XK*(1.+R)**2*A*B**2
     1 -XM**2*XK**2*(R**2+2.*R)*A*B+XM**2*XK**3*R**2*A
      XD=2.*R**2*XM**2*XK**2*A**2
      XN2=XM*XK**2*(1.+R)*A**3+XM**2*XK*(1.+R)**2*A*B**2+
     1 XM**2*XK**2*R**2*A*B
      Z1=XN1/XD
      Z2=XN2/XD
      PRINT*,Z1,Z2
      STOP
      END

C     ***********RESULTATS OBTENUS POUR LES DISPERSIONS***********
C     **************** DE L'AMORTISSEUR DYNAMIQUE ****************
C        ***************** EN FONCTION DE R=M1/M2 ***************
C        ***** SIGMA1*************************** SIGMA2 ******
C              [M**2]                            [M**2]

C     ***********************   R=0.025   ***********************

C     *** SIGMA1=78.81   ****************  *** SIGMA2=1664.66 ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.050   ***********************

C     *** SIGMA1=55.56   ****************  *** SIGMA2=618.18  ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.075   ***********************

C     *** SIGMA1=45.24   ****************  *** SIGMA2=352.23  ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.100   ***********************

C     *** SIGMA1=39.07   ****************  *** SIGMA2=239.00  ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.125   ***********************

C     *** SIGMA1=34.13   ****************  *** SIGMA2=178.28  ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.150   ***********************

C     *** SIGMA1=31.74   ****************  *** SIGMA2=141.12  ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.175   ***********************

C     *** SIGMA1=29.32   ****************  *** SIGMA2=116.33  ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.200   ***********************

C     *** SIGMA1=27.36   ****************  *** SIGMA2=98.74   ***
C     -----------------------------------------------------------
C     ***********************   R=0.300   ***********************

C     *** SIGMA1=22.15   ****************  *** SIGMA2=61.34   ***
C     -----------------------------------------------------------
```



[m2]
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
σ_{x2}^2
σ_{x1}^2
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30

Intérprétation des Resultats:

1- L'étude de l'amortisseur non linéaire où la non linéarité est donnée par $f(z) = C_1 z + C_2 z^3$, on constate qu'on ne peut amortir réellement le systeme que dans le cas où $C_2 = 0$ ce qui nous conduit à l'amortisseur linéaire

2. Pour l'amortisseur linéaire les resultats obtenuesexigent que pour obtenir un amortissement efficace;ou encore;un bon absorbeur de vibrations. on doit choisir les caracteristiques pour $\mu \in [0,1 \div 0,2]$

c.a.d on doit avoir les caracteristiques verifiant

$M_2 \in [8 \div 16]$ [Kg]

$\alpha_2 \in [28,42 \div 73]$ [N.s/m]

$K_2 \in [108,7 \div 1909,7]$ [N/m]

de la on a les dispersions

$\sigma^2_{x_1} \in [39,07 \div 27,36]$ [m^2]

$\sigma^2_{x_2} \in [239 \div 98,74]$ [m^2]

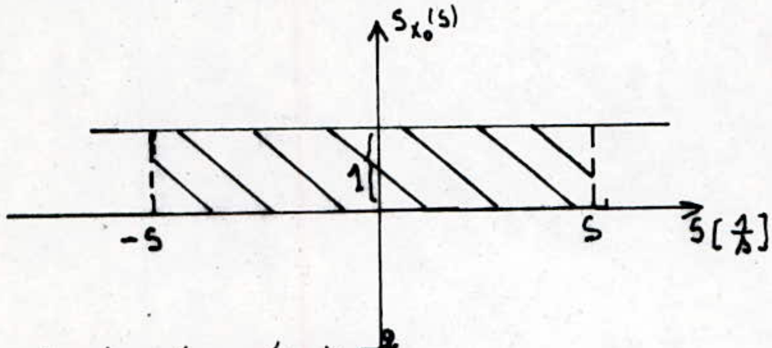
Remarque:

L'étude du systéme avec un bruit blanc comme excitation signifie que la dispersion du signal d'entrée est ∞

car : $\sigma_0^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} N^2\, ds = \frac{1}{2\pi j} N^2 \left[S \Big|_{-j\infty}^{j\infty} \right] = \infty$

d'où on peut dire qu'on doit limiter le signal d'entrée dans un domaine de frequences approprié

c.a.d pour $S_{x_0}(s) = 1\,[m^2.s]$ on a



le domaine hachuré représente σ_0^2

d'où $\sigma_0^2 = 2S\,[m^2]$

d'ici on peut comparer $\sigma_{x_1}^2$, $\sigma_{x_2}^2$ obtenues lors de l'étude avec σ_0^2 qui depend de la frequence imposée.

CONCLUSION

1° de cette étude on constate que la linéarisation-statististique contribue éfficacement dans l'étude des systémes non linéaire, cependant, elle ne peut que donner des résolutions approchées des problémes relatifs à la dynamique des systémes non linéaires, résolution valable moyennant un ensemble de réstrictions sur la pérturbation introduite et sur le systéme mecanique. Par exemple, l'approximation du processus aléatoire d'entrée par un processus normal se rattache à de telles réstrictions, ces limitations réduisent de façon éssentielle l'information relative au processus aléatoire.

Neanmoins l'apport de la méthode de la linéarisation-statistique dans notre étude consiste en l'étude des systémes non linéaires avec une simplification considérable.

2- Aprés avoir linéarisé les differents signaux d'entrées dans cette étude, on constate qu'on peut obtenir les coefficients de transmissions de n'importe quelle non linéarité pourvu qu'elle soit linéaire par partie à partir des coefficients de transmissions de l'hystérisis.

3- de l'étude de l'amortisseur non linéaire avec la non linéarité $f(z) = C_1 z + C_2 z^3$ on peut conclure qu'on ne peut utiliser un tel ressort dans un tel systéme qu'on cherche à amortir. car l'amortissement optimum exige que C_2 soit nul

En fin l'étude de l'amortisseur non linéaire ayant pour non linéarité l'hystérisis exige l'étude de la dérivabilité de $\int_{-\infty}^{c} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m_z}{\sigma_z}\right)^2\right\} dz$ par rapport à (m_z, α_2) car σ_z est fonction de α_2 comme on l'a démontré ; car cette intégrale apparait comme un facteur dans les expressions de h_0, h_1.

BIBLIOGRAPHIE

1. G.C Newton, Jr. L.A.Gould, J.F. Kaiser.
"Analytical Design of linear Feedback controls"
New-york, John wiley. & sons, Inc. London 1957

2. "Random processes in non linear control systems"
A.A Pervozvanski Academic press (New.york - London)

3. "Theorie des vibrations à l'usage des ingenieurs"
S. Timoshenko - young Librairie polytechnique Beranger

4. "Mecanical Vibrations"
William W. seto Schaum's outline series
Mc Graw-Hill Book Company

5. Marek Ksiazek et C. Ahri Kencheikh
"vibro-isolation optimum des excitation stochastiques"

6. Marek Ksiazek et Z. Boutaghou
"vibro-isolation optimum d'une structure mecanique"

7. "Vibration Aleatoir des systéme mecanique"
V.A. Svetlichij Technique et documentation

8. "Methode Numeriques Appliquées"
M. Boumahrat et A. Gourdin Edition OPU