

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

29/87

وزارة التعليم و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

100

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT GENIE - MÉCANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN
MOTEUR F4L 912 SOUS L'EFFET DES
EXCITATIONS INTERNES

Appo. par
A.

Etud pa
EPD-MEA

Dirigé par :
M. KSIĄZEK

PROMOTION JUIN 1987

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROMOTEUR : M. KSIASEK

ELEVE INGENIEUR : ABED-MERAÏM Kamel

وزارة التعليم العالي

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

دائرة الهندسة الميكانيكية

الموجه: م. كسياسك

الطالب المهندس: عبد مرأيم كمال

الموضوع: السلوك الديناميكي لمحرك من طراز F4L 912 تحت مفعول التحريضات الداخلية.

الملخص: تهدف هذه الدراسة إلى تعيين شدة الاهتزازات والقوى المطبقة من طرف المحرك على حامله بدلالة خصائص مساند الارتكاز. ومن أجل ذلك قمنا بإعداد المعادلات الديناميكية للمحرك أثناء العمل في الحالة العامة ثم حللناها في حالات خاصة.

Sujet: Le comportement dynamique d'un moteur F4L 912, sous l'effet des excitations internes.

Resumé: Cette étude consiste à déterminer les amplitudes des vibrations, et les réactions dynamiques du moteur sur son support, en fonction des caractéristiques des plots de suspension.

Pour cela, on a établi les équations dynamiques du mouvement de ce moteur au cours de son fonctionnement dans le cas général, et résolu dans certains cas particuliers.

Subject: Dynamical comportement of one engine F4L912 subjected to the internal excitations.

Abstract: This study consists on the détermination of vibrations and the dynamical réactions transmitted to truck's frame by the engine F4L912. The analysis of motions has been done and the dynamical équations have been written.

In same, the most important cases the numerical solutions have been obtained.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier vivement monsieur M. KSIASEK, docteur ingénieur en sciences techniques, maître assistant à l'école nationale polytechniques d'Alger pour l'aide précieuse et les conseils qu'il m'a prodigué tout au long de mon étude, et l'assure de ma profonde reconnaissance.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué à ma formation, tout particulièrement ceux du département de génie mécanique de l'E.N.P.A.

Enfin que tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidé à élaborer ce modeste travail trouvent à travers ces quelques lignes l'expression de mes remerciements les plus sincères.

SOMMAIRE

	Page
1. INTRODUCTION	1
2. GENERALITES	3
2.1 CAUSES DES VIBRATIONS	3
2.1.1 cas des moteurs	3
2.2 LA SUSPENSION ELASTIQUE	3
2.3 IMPORTANCE DES PLOTS DE SUSPENSION	4
2.4 LA SUSPENSION DIRECTE	4
2.5 LA SUSPENSION INDIRECTE	6
2.6 LES SUPPORTS ELASTIQUES	6
2.6.1 L'élasticité	6
2.6.2 L'amortissement	6
2.7 CHOIX DES SUPPORTS	7
2.8 NOMBRE ET EMLACEMENT DES SUPPORTS	7
3. DONNEES DE BASE	9
3.1 PRESENTATION DU MOTEUR	9
3.2 CARACTERISTIQUES DU MOTEUR	9
3.2.1 Caracteristiques internes	9
3.2.2 Caracteristiques externes	10
3.3 CARACTERISTIQUES DU SYSTEME PISTON BIELLE MANIVELLE	11

3.4 CARACTERISTIQUES DE LA BOITE DE VITESSES	
3.5 CARACTERISTIQUES DES PLOTS DE SUSPENSION	12
3.6 POSITION DU MOTEUR SUR LE VEHICULE	12
4. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES	14
4.1 DEFINITION DES REPERES DE BASE	14
4.2 MESURE DES MOMENTS D'INERTIE	16
4.2.1 Mesure des moments d'inertie du bloc moteur plus boite de vitesses	16
4.2.2 Mesure du moment d'inertie du vilebrequin	19
4.2.3 Deduction d'autres moments d'inertie	19
4.3 CALCUL DES COORDONNEES DU CENTRE DE GRAVITE	20
4.4 DETERMINATION DE LA FORCE DE RAPPEL	20
5. ANALYSE CINEMATIQUE	23
5.1 LA MANIVELLE	23
5.1.1 Accélération du centre de gravité	23
5.1.2 Vitesse du point A	24
5.1.3 Accélération du point A	24
5.2 LA BIELLE	25
5.2.1 Détermination du centre instantané des vitesses	25
5.2.2 Vitesse angulaire de la bielle	26
5.2.3 Accélération angulaire de la bielle	26
5.2.4 Accélération du centre de gravité	26

5.3	LE PISTON27
5.3.1	Calcul de la vitesse du piston28
5.3.2	Calcul de l'accélération du piston28
6. REACTIONS DYNAMIQUES DANS LE CAS DU MOTEUR IMMOBILE		
6.1 EQUATIONS DU MOUVEMENT.		
6.1.1	suivant (Oz)30
6.1.2	Autour de (Gx')31
6.1.3	Autour de (Gy')33
6.1.4	Equations des réactions34
6.2	ACTION DU MOTEUR SUR SON SUPPORT34
7. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DU MOUVEMENT		
7.1 DEPLACEMENT DES POINTS DE FIXATION PAR RAPPORT.		
AU CHASSIS		
7.2 ENERGIE DE DISSIPATION		
7.3 FORCES GENERALISEES		
7.3.1	Forces généralisées suivant (z)38
7.3.2	Force généralisée suivant (θ)38
7.3.3	Force généralisée suivant (ψ)39
7.4 ENERGIE CINETIQUE		
7.4.1	Deplacement du châssis39
7.4.2	Deplacement du moteur sur le châssis40

7.4.3 Methode de calcul.40
7.4.4 Calcul des vitesses absolues.41
7.4.5 Energie cinétique de rotation autour de (AY'')	.42
7.4.6 Energie cinétique de La manivelle.42
7.4.7 Energie cinétique du volant moteur43
7.4.8 Energie cinétique de La bielle.44
7.4.9 Energie cinétique du piston44
7.4.10 Energie cinétique du bloc vide.45
7.4.11 Energie cinétique du système46
7.4.12 Derivées de L'énergie cinétique par rapport aux coordonnées généralisées46
7.4.13 Derivées de L'énergie cinétique par rapport aux vitesses.47
7.4.14 Derivées par rapport au temps48
7.5 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT.50
8.EQUATIONS DU MOUVEMENT DANS DES CAS PARTICULIERS.51
8.1 CHASSIS IMMOBILE.51
8.1.1 $\theta=0, \psi=0, (z)$51
8.1.2 $\theta=0, z=0, (\psi)$51
8.1.3 $z=0, \psi=0, (\theta)$51
8.1.4 $(z), (\theta), (\psi)$53

8.2 CHASSIS MOBILE53
8.2.1 $\theta = 0$, $\theta_c = 0$, $\gamma_c = 0$, (z) , (z_c)53
9. RESOLUTION DANS UN CAS PARTICULIER.54
9.1 EQUATION DIFFERENTIELLE54
9.2 RESOLUTION DE L'EQUATION54
9.2.1 Resolution numerique.55
9.2.2 Presentation des resultats.59
9.2.3 Tracé des courbes.59
9.2.4 Programme du tracé.59
9.2.5 courbes obtenues.61
9.3 INTERPRETATION.74
9.3.1 Variation de l'amplitude en fonction de L'amortissement.75
9.3.2 Reactions dynamiques en fonction de L'amortissement76
10. CONCLUSION78

LEGENDE DES SYMBOLES

- r : Longueur de la manivelle
- L : Longueur de la bielle
- G_m : centre de gravité de la manivelle.
- G_b : centre de gravité de la bielle.
- W_i : accélération linéaire du point i
- $W_{i/j}$: accélération linéaire du point i par rapport au point j .
- W_i^n : accélération normale du point i .
- W_i^t : accélération tangentielle du point i .
- v_i : vitesse linéaire du point i
- $v_{i/j}$: vitesse linéaire du point i par rapport au point j .
- E_{mn} : accélération angulaire de la barre $[m, n]$.
- ω_{mn} : vitesse angulaire de la barre $[m, n]$.
- T : énergie cinétique
- φ : angle de rotation du vilebrequin.
- β : angle de rotation de la bielle
- $J_{i/j}$: moment d'inertie de l'élément i par rapport au point j .
- J_i : moment d'inertie de l'élément i par rapport à son centre de gravité
- ρ_i : rayon de giration de l'élément i par rapport à son centre de gravité.
- Q_i : force généralisée dans la direction i .
- V : énergie potentielle.
- D : énergie de dissipation.

- . δ_i : déplacement virtuel dans la direction i .
- . M : masse du bloc moteur plus boîte de vitesse
- . m_p : masse du piston.
- . m_b : masse de la bielle
- . m_m : masse de la manivelle
- . m_v : masse du volant moteur
- . M_v : masse du vilebrequin.
- . M_r : masse du bloc sans pistons, bielles et vilebrequin.

1. INTRODUCTION

Les moteurs font partie des machines qui présentent des phénomènes vibratoires, ces vibrations peuvent se présenter sous différentes formes.

Vibrations des moteurs en tant qu'ensemble, vibrations de torsion et de flexion des vilebrequins et les vibrations des autres éléments du moteur.

Considérés comme des corps rigides, donc disposant jusqu'à six degrés de liberté, les moteurs vibrent en tant qu'ensemble sur leur suspension, ce genre de vibrations peut provoquer des dégâts aux points de fixation et aux installations voisines, comme il peut annihiler le confort des passagers.

Ce genre de vibrations est dû aux forces centrifuges des masses non équilibrées se trouvant en mouvement, la valeur de ces forces n'est pas constante, mais variable en fonction du cycle pression-volume du moteur.

L'objectif de ce projet est de faire l'analyse cinématique du moteur suspendu sur une fondation mobile puis établir les équations différentielles de son comportement dynamique.

On va aussi résoudre ces équations dans des cas particuliers en tenant compte surtout des efforts communiqués par le moteur à son environnement (châssis) en fonction des caractéristiques de suspension afin de concevoir la suspension susceptible de minimiser l'effet

vibratoire dont le moteur est la source et les contraintes aux points de fixation donc susceptible d'améliorer le confort du véhicule.

2. GENERALITES

2.1 CAUSES DES VIBRATIONS

Les causes des vibrations trouvées dans les machines sont assez variées ; depuis le processus technologique de fabrication ou le mode de fonctionnement de la machine, jusqu'aux imprecisions d'exécution ou de montage, aux usures et aux défauts de fonctionnement ou d'autres facteurs extérieurs.

2.1.1 CAS DES MOTEURS

Une machine est soumise à une vibration lorsqu'elle subit des sollicitations périodiques alternées se traduisant, lorsque la machine est suspendue élastiquement par des oscillations plus ou moins importantes.

Et comme tout autre moteur, le moteur diesel est le siège d'efforts à caractères cycliques alternés lors de son fonctionnement.

Ces efforts résultent des accélérations des organes constituant le moteur.

Car comme on le sait les pistons, bielles et manivelles sont animés de mouvements alternatifs, subissant donc des accélérations périodiques qui sont la source de forces alternatives causant des vibrations.

Les vibrations résultent donc de combinaisons d'efforts périodiques agissant sur les organes mobiles.

2.2 LA SUSPENSION ELASTIQUE

La suspension élastique d'un moteur consiste à intercaler entre lui et son assise (châssis) des supports élastiques appelés aussi plots de suspension.

Le type des plots, leur nombre, leur répartition, leur disposition et leurs caractéristiques individuelles seront fonction des caractéristiques d'ensemble à donner à la suspension pour obtenir les résultats recherchés.

2.3 IMPORTANCE DES PLOTS DE SUSPENSION

Les forces et les couples nés de la combustion et de l'inertie des pièces en mouvement provoquent au sein de la structure du moteur des contraintes élevées.

Par ailleurs les irrégularités de la route et les charges supportées provoquent elles aussi au sein du châssis des contraintes importantes.

Il va donc de soi que la fixation du moteur sur ses supports ne doit introduire des contraintes venant se superposer aux contraintes propres du châssis.

On prévoit donc une suspension élastique et des points de fixation aussi peu nombreux que possible.

2.4 LA SUSPENSION DIRECTE

On appelle ainsi une suspension ayant pour but d'empêcher une machine vibrante (moteur) de transmettre ses vibrations à son environnement (châssis).

Et pour traiter un problème d'isolation vibratoire de cette façon, il faut bien considérer que celle-ci n'est efficace que contre la transmission des vibrations, elle n'empêche pas la machine de vibrer,

elle augmente même les amplitudes (car en fixation rigide l'amplitude est nulle, mais les efforts transmis sont très importants); La machine est en quelque sorte plus ou moins libérée de ses assises fixes.

Donc dans le cas d'un moteur de véhicule, une bonne suspension est celle qui empêche les vibrations de se transmettre à la caisse et aux passagers, mais moyennant la mobilité du moteur, car des amplitudes excessives ne peuvent être tolérées.

Il y'a un moyen de réduire les amplitudes sans diminuer l'efficacité de la suspension, c'est d'augmenter la masse suspendue, car pour une excitation donnée, les amplitudes sont inversement proportionnelles à la masse.

Pour certaines machines particulièrement violentes, cette façon de faire est une nécessité (moteurs et compresseurs monocylindriques lents, centrifugeuses, pilons...), ces machines sont alors fixées rigidement sur des châssis ou massifs lourds, et c'est l'ensemble qui est suspendu élastiquement.

Il est d'ailleurs toujours recommandé de faire en sorte que le poids suspendu soit le plus élevé possible (meilleure isolation vibratoire, plus faible amplitude).

C'est ainsi qu'on suspendra avantageusement des groupes complets (groupes compresseurs, groupes moto pompes, groupes électrogènes, ect) plutôt que des machines séparées.

2.5 LA SUSPENSION INDIRECTE

On appelle ainsi une suspension destinée à protéger une machine non vibrante (réctifieuse, appareils de mesure ou de contrôle, plus ou moins délicats) contre les vibrations de l'environnement.

On définit alors un coefficient de transmission des amplitudes qui est le rapport de l'amplitude maximale de la machine suspendue à l'amplitude du socle.

2.6 LES SUPPORTS ELASTIQUES

Les supports élastiques ou plots de suspension sont des organes possédant à la fois et à des degrés divers des propriétés d'élasticité et d'amortissement.

2.6.1 L'ELASTICITE

L'élasticité est la faculté pour le support de se déformer avec une amplitude sensiblement proportionnelle à la charge de manière réversible, au moins dans certaines limites.

2.6.2 L'AMORTISSEMENT

L'amortissement est un effort de freinage du mouvement dont le principal effet est la réduction des amplitudes.

2.7 CHOIX DES SUPPORTS

. En fonction des possibilités et des facilités de montage ; il existe des supports comportant des armatures métalliques adhérentes, avec des perçages permettant une fixation facile par vis ou boulons.

. En fonction des charges appliquées à chaque support. Les charges indiquées par les catalogues ne sont souvent que des charges statiques ; il faut tenir compte des surcharges dynamiques provenant de la vibration.

Ces surcharges sont faibles en régime normal puisque c'est précisément le but de la suspension élastique, mais il y'a presque toujours des régimes critiques à traverser.

Il y'a donc lieu de tenir compte d'un coefficient de sécurité qui peut varier de 1 à 5 suivant le type de machines.

2.8 NOMBRE ET EMPLACEMENT DES SUPPORTS

Le nombre et l'emplacement des supports sont souvent imposés par les pattes de fixation prévues sur les machines, mais malheureusement souvent non prévues pour des suspensions élastiques, il en résulte une répartition inégale des charges aux différents points de fixation, ce qui empêche d'utiliser des supports tous identiques.

Si l'on a toute liberté, il y'a intérêt à n'employer qu'un seul type de supports, et de disposer ceux-ci symétriquement

par rapport à la verticale du centre de gravité (ou tout au moins de manière que le centre élastique de la suspension soit sur la verticale qui le porte).

Il vaut toujours mieux utiliser un petit nombre de gros supports plutôt qu'un grand nombre de petits, mais on est limité dans voie par la rigidité des machines qui peuvent ne pas tolérer des supports trop écartés et la capacité de charge des supports.

3. DONNEES DE BASE

3.1 PRESENTATION DU MOTEUR

Notre étude va porter sur le moteur Deutz F4L912, placé sur le véhicule K66 fabriqué en Algérie.

La boîte de vitesses est rigidement fixée au moteur, et c'est l'ensemble moteur plus boîte de vitesses ainsi constitué qui vibre sur les plots de suspension.

3.2 CARACTERISTIQUES DU MOTEUR

3.2.1 CARACTERISTIQUES INTERNES

C'est un moteur diesel à quatre temps à injection directe et refroidissement à air.

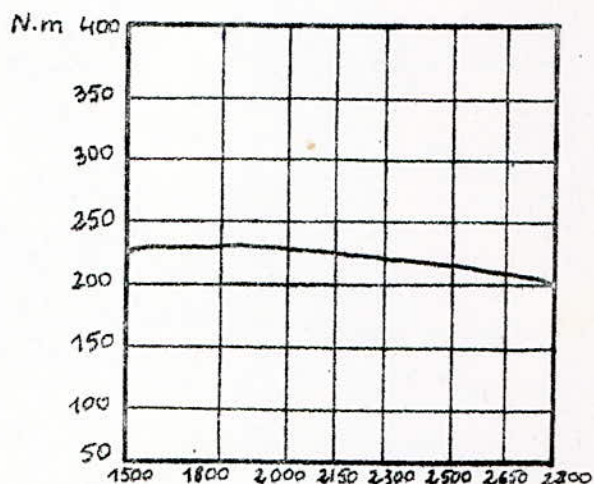
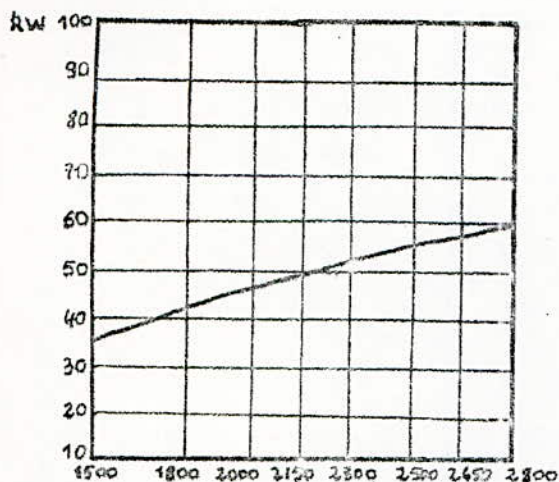
- . Nombre de cylindres : 4
- . Alésage : 100 mm
- . Course : 120 mm
- . Cylindrée : 0,942 l
- . Cylindrée globale : 3,768 l
- . Taux de compression : 17
- . Régime de fonctionnement : $n \in [1200 - 2000]$ tr/mn.
- . Vitesse moyenne de rotation : 2500 tr/mn.
- . Vitesse moyenne du piston : 9,2 m/s
- . Puissance moyenne : 46 KW

Pression moyenne : 6.43 kgF/cm².

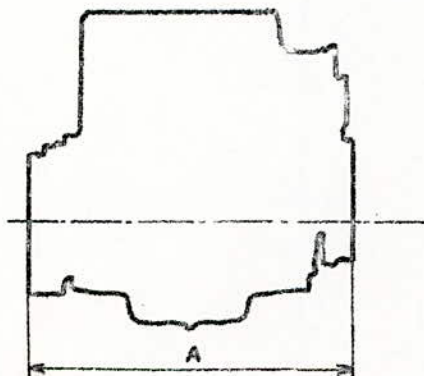
Consommation spécifique en combustible : 221 g/kw.h

Consommation en huile moteur en % de la
consommation de combustible : 1 %

Puissance et couple en fonction de la vitesse de rotation.

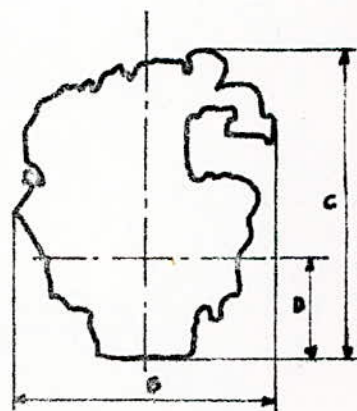


3.2.2 CARACTERISTIQUES EXTERNES



A = 800 mm

B = 612.5 mm

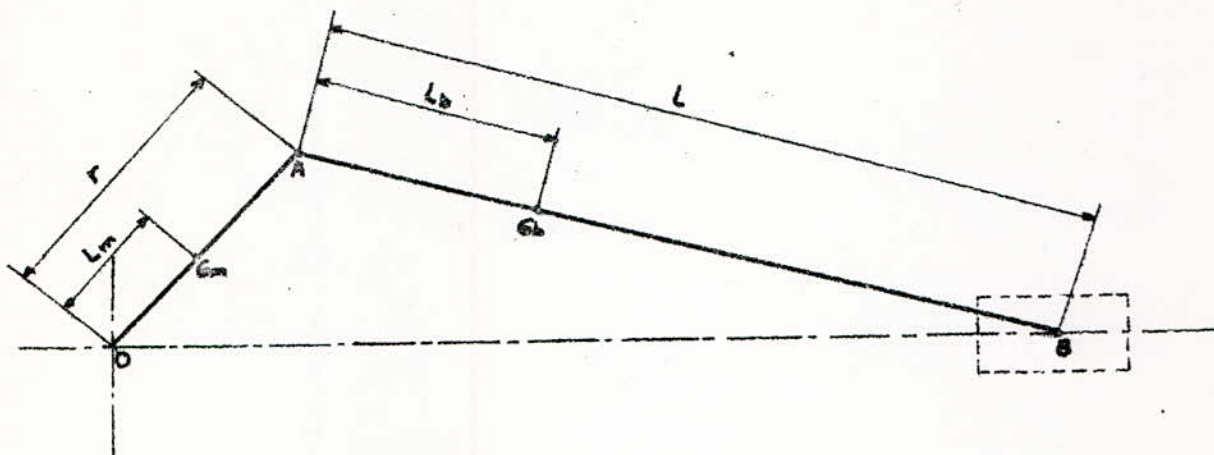


C = 237.5 mm

D = 300 mm

M = 330 kg

3.3 CARACTERISTIQUES DU SYSTEME PISTON BIELLE MANIVELLE



$m_p =$ masse du piston = 1,635 kg

$m_b =$ masse de la bielle = 1,700 kg

$m_m =$ masse de la manivelle = 2,800 kg

$m_v =$ masse du volant moteur = 32 kg

$M_v =$ masse du vilebrequin = 43,2 kg

$OA = r = 0,06$ m

$AB = l = 0,21$ m

$OG_m = L_m = 0,03$ m

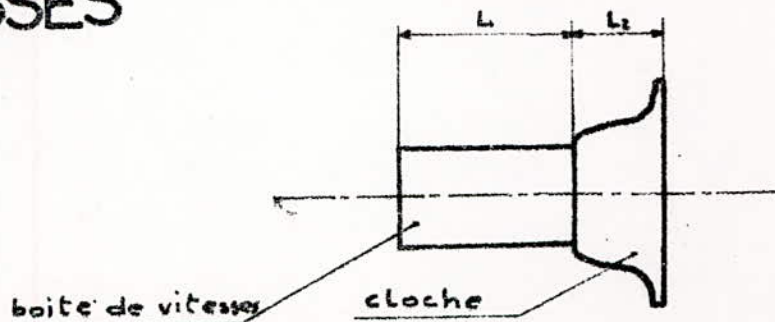
$OG_b = L_b = 0,07$ m

3.4 CARACTERISTIQUES DE LA BOITE DE VITESSES

$M_{bv} = 70$ kg

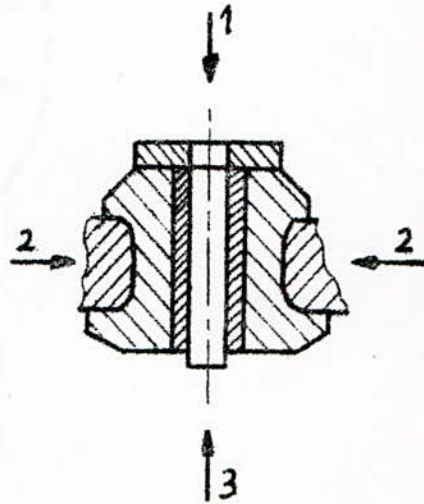
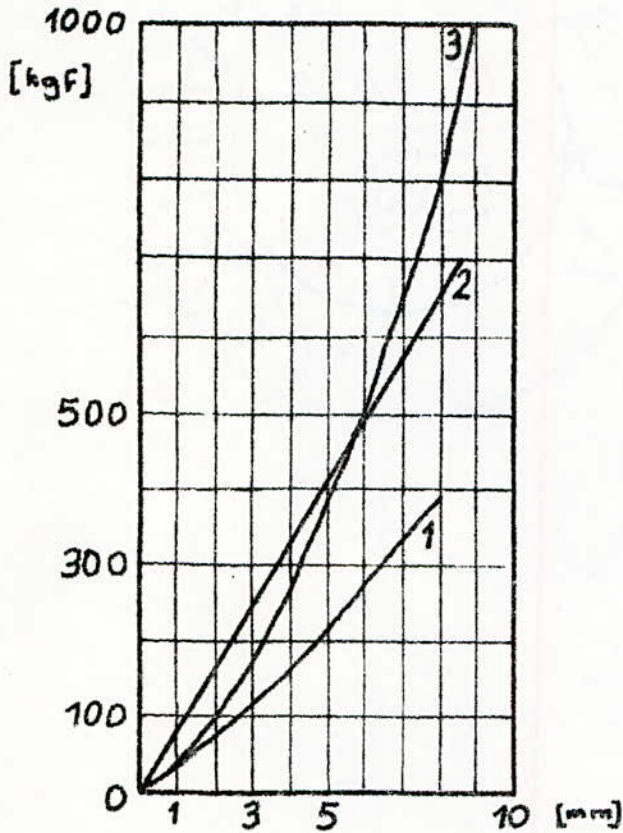
$L_1 = 420$ mm

$L_2 = 150$ mm



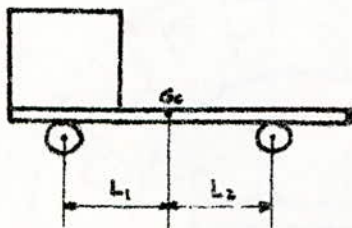
3.5 CARACTERISTIQUES DES PLOTS DE SUSPENSION

On presente ici l'abaque d'élasticité du plot.



3.6 POSITION DU MOTEUR SUR LE VEHICULE

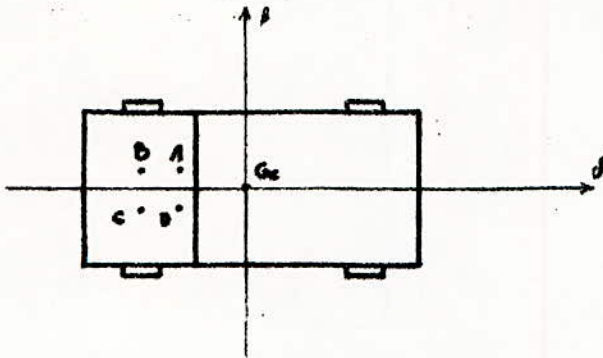
Position du centre de gravité du châssis cabine:



$$L_1 = 0,70 \text{ m}$$

$$L_2 = 1,90 \text{ m}$$

Position du moteur par rapport au centre de gravité du châssis cabine:



On positionne le moteur par rapport à ses points de suspension (A, B, C, D).

$$\delta_A = \delta_B = -1,9 \text{ m}$$

$$\delta_C = \delta_D = -2,18 \text{ m}$$

$$f_A = f_C = 0,265 \text{ m}$$

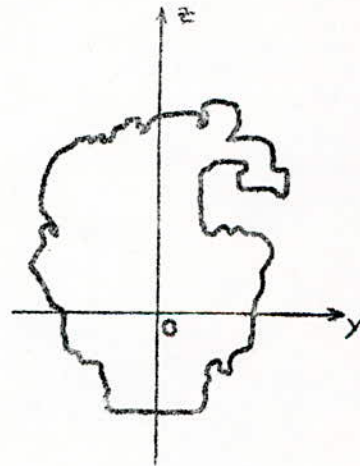
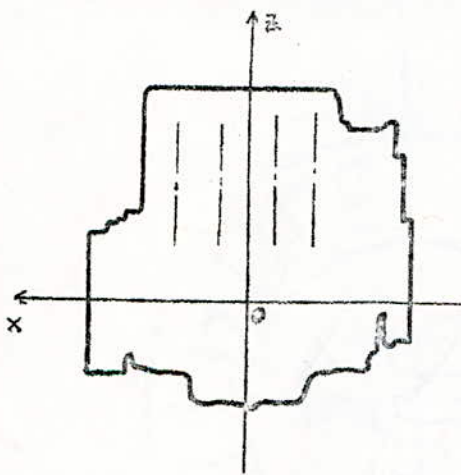
$$f_B = f_D = -0,265 \text{ m}$$

4. DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES PHYSIQUES ET GEOMETRIQUES

4.1 DEFINITION DES REPERES DE BASE

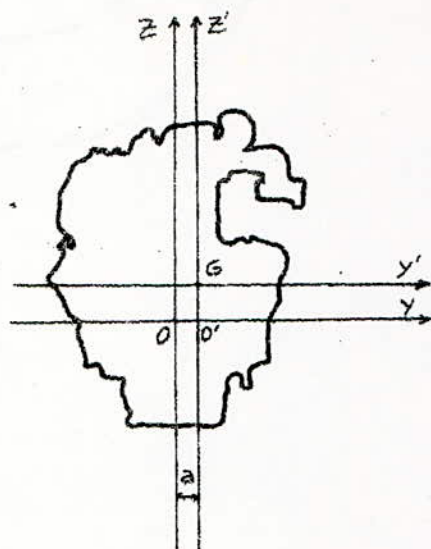
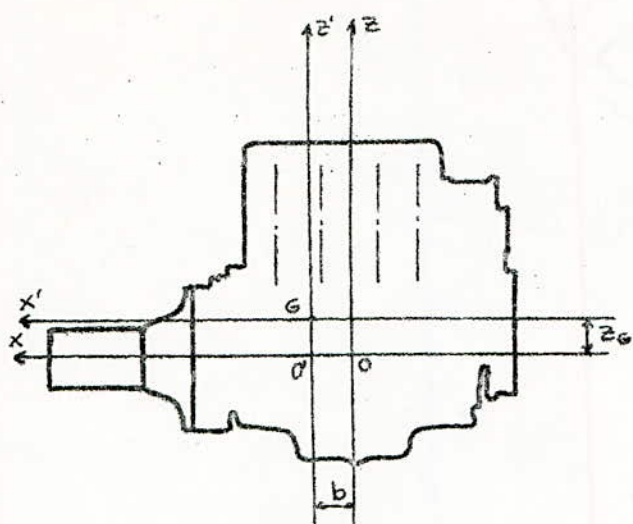
Dans un premier temps, on va considérer le moteur comme stationnaire.

On va donc travailler dans un système d'axes orthogonaux dont un est confondu avec l'axe du vilebrequin (Ox) et un autre parallèle aux axes des pistons (Oz).



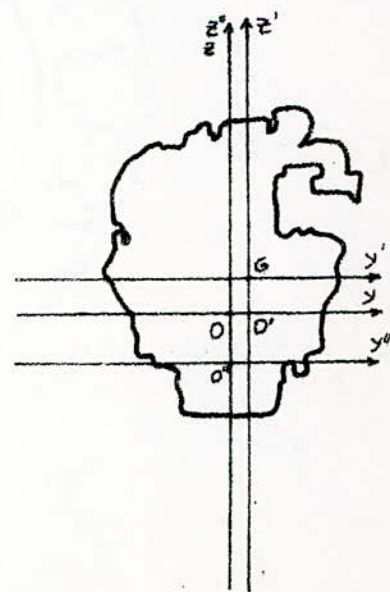
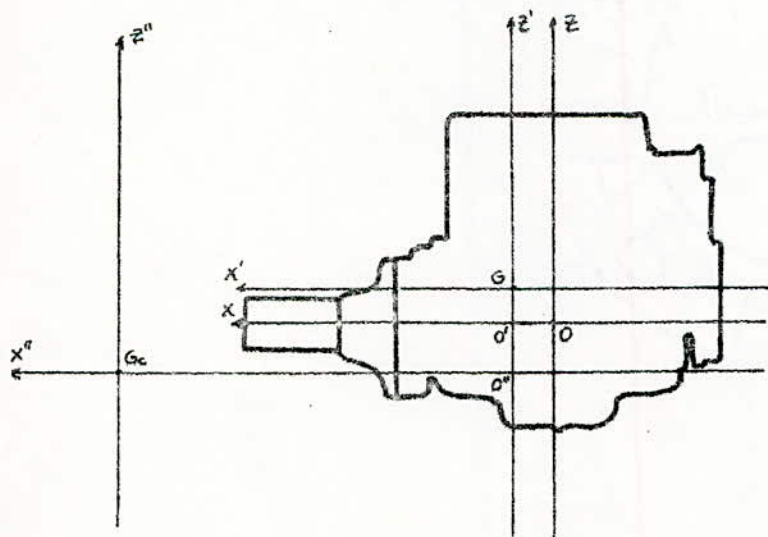
Dans un second temps on va considérer que le moteur est sur des points élastiques, et que ces derniers sont placés sur une fondation fixe (châssis immobile).

On va donc choisir un système d'axes orthogonaux parallèles aux précédents et lié au centre de gravité du système boîte de vitesse plus moteur.



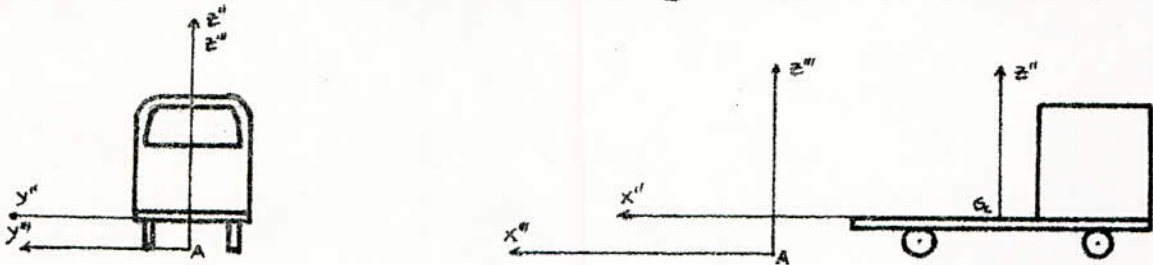
Dans un troisième temps on va établir les équations différentielles du mouvement en tenant compte des déplacements du châssis.

On va donc être obligés de considérer un autre système d'axes orthogonaux lié au centre de gravité du châssis cabine.



Et finalement pour le calcul de l'énergie cinétique on doit avoir un référentiel galiléen comme référentiel de base.

On va donc définir un repère d'axes orthogonaux dont l'un est parallèle à la route et dont l'origine est liée à la terre.



4.2 MESURE DES MOMENTS D'INERTIE

4.2.1 MESURE DES MOMENTS D'INERTIE DU BLOC MOTEUR PLUS BOITE DE VITESSES

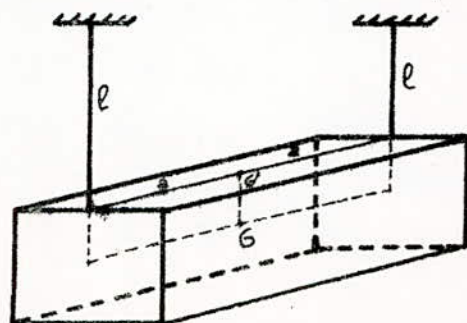
Pour notre étude, il nous fallait avoir les moments d'inertie du système (moteur, boîte) par rapport aux axes (Gx') et (Gy') .

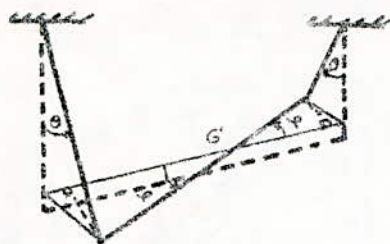
Il nous a donc fallu les mesurer.

Pour cela on a procédé par pendulation selon le modèle suivant :

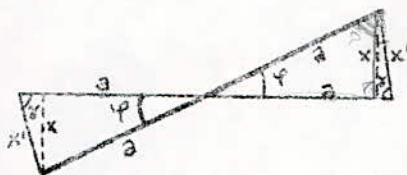
On suspend le moteur par deux points équidistants au centre de gravité et appartenants à un plan le contenant.

Puis on mesure le temps de dix oscillations de faible amplitude autour de l'axe Gx' et Gy' .

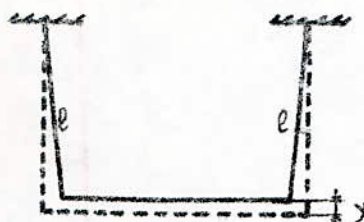




- - - - position d'équilibre
 ——— position à un instant quelconque
 ——— projections sur des plans
 verticaux.



vue de dessus



vue de face



vue de gauche

On a : $x = 2a \sin \varphi$; $x' = l \sin \theta$; $x = x' \sin \gamma$

triangle isocèle $\Rightarrow 2\gamma = \pi - \varphi$ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$

donc $2a \sin \varphi = l \sin \theta \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right)$

et comme $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) = \cos \frac{\varphi}{2}$ et que $\sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right)$

on a donc $\sin \theta = \frac{2a}{l} \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$

d'autre part on a $y = l(1 - \cos \theta)$

donc $y = l - l \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$

Equations du mouvement:

. Energie potentielle

On prend comme plan de reference, Le plan horizontal contenant
Le centre de gravité à La position d'équilibre.

$$V = mgy \Rightarrow V = mgl \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgl \frac{\frac{2a^2}{l} \sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}}$$

Energie cinétique:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2$$

$$\text{et on a } \dot{y} = \dot{\varphi} \frac{a^2}{l} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2(\frac{\varphi}{2})}}$$

$$\text{donc } T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = J_0 \ddot{\varphi} + M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})} + M \frac{a^6}{l^4} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin^3 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_0 \ddot{\varphi} + M \frac{a^4}{l^2} \ddot{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})} + M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})} + \frac{2a^2}{l^2} \frac{\sin^3 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})^2} \right]$$

Equation différentielle du mouvement:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$J_0 \ddot{\varphi} + M \frac{a^4}{l^2} \ddot{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})} + M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})} + 2 M \frac{a^6}{l^4} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin^3 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})^2} - \frac{1}{2} M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin 2\varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})} - M \frac{a^6}{l^4} \dot{\varphi}^2 \frac{\sin^3 \varphi}{(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2})^2} + m g \frac{a^2}{l} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 0$$

Comme ce sont de petites oscillations on a :

$$\sin \varphi \approx \varphi ; \quad \cos \varphi \approx 1 \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^n \approx 1 - n \frac{4a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{L'équation devient : } & J_0 \ddot{\varphi} + M \frac{a^4}{l^2} \left(\ddot{\varphi} \varphi^2 + \frac{4a^2}{l^2} \dot{\varphi} \varphi^2 \frac{\varphi^2}{4} \right) + M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \left(2\varphi + \frac{4a^2}{l^2} \cdot 2\varphi \cdot \frac{\varphi^2}{4} \right) \\ & + 2 M \frac{a^6}{l^4} \dot{\varphi}^2 \left(\varphi^3 + \frac{4a^2}{l^2} \cdot \varphi^3 \cdot \frac{\varphi^2}{4} \right) - \frac{1}{2} M \frac{a^4}{l^2} \dot{\varphi}^2 \left(2\varphi + \frac{4a^2}{l^2} \cdot 2\varphi \cdot \frac{\varphi^2}{4} \right) - M \frac{a^6}{l^4} \dot{\varphi}^2 \varphi^3 \left(1 + \frac{8a^2}{l^2} \cdot \frac{\varphi^2}{4} \right) \\ & + m g \frac{a^2}{l} \varphi \left(1 + \frac{2a^2}{l^2} \cdot \frac{\varphi^2}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

Petites oscillations, on néglige l'ordre supérieur à deux:

$$\text{on a donc } J_0 \ddot{\varphi} + m g \frac{a^2}{l} \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{m g a^2}{J_0 l} \varphi = 0 \longrightarrow \text{équation différentielle de solution}$$

sinusoïdale.

$$\text{Période du mouvement : } T = 2\pi \frac{l}{a} \sqrt{\frac{J_0}{m g l}}$$

La durée de dix oscillations suivant Gx' et Gy' est 14s et 11s

$$\text{on a } t = 10 T \quad \text{et} \quad J_0 = \frac{mg \ell T^2}{2\pi^2} \frac{g^2}{l \ell^2}$$

$$J_{ey'} = \frac{400 \cdot 9,8 \cdot (0,4)^2 \cdot (1,1)^2}{4\pi^2 \cdot 0,135} = 132,34 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

$$J_{ex'} = \frac{400 \cdot 9,8 \cdot (0,13)^2 \cdot (1,1)^2}{4\pi^2 \cdot 0,12} = 81,7 \text{ [kg} \cdot \text{m}^2\text{]}$$

4.22 MESURE DU MOMENT D'INERTIE DU VILEBREQUIN

Pour le moment d'inertie du vilebrequin on peut le mesurer par pendulation comme pour le cas précédent, ou bien en utilisant un fil de torsion dont on connaît la constante.

4.23 DEDUCTION D'AUTRES MOMENTS D'INERTIE

On a le moment d'inertie de la bielle par rapport à son centre de gravité. $J_{Gb} = 540 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

On peut donc trouver son moment d'inertie par rapport à un axe passant par A $J_{Ab} = J_{Gb} + m_b l_b^2$

On aura besoin aussi du moment d'inertie du bloc moteur plus boîte de vitesses dans le cas où les pistons, bielles et vilebrequin ne sont pas montés.

on a trouvé J_0 , d'autre part $J_0 = M \rho^2$

ρ = rayon de giration, ρ ne change pas en ayant M ou M_r

$$\text{donc } J_0^i = \frac{J_0 \cdot M_r}{M}$$

4.3 CALCUL DES COORDONNEES DU CENTRE DE GRAVITE

Théorème du centre de gravité : $\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OG}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ (1)

où O est une origine quelconque et n le nombre d'éléments constituant le système.

Prenons le point O comme étant l'origine du repère $OXYZ$.

Dans notre cas $n=2$ « moteur et boîte de vitesses »

La relation (1) est une relation vectorielle, on va la projeter sur les axes OX , OY et OZ .

On a noté $OG_x : b$; $OG_y : a$; $OG_z : z_G$

$$z_G = \frac{m_B z_B + M_m z_m}{M} = \frac{0 + 330 \cdot 0,132}{400} = 0,1082 \text{ [m]}$$

$$a = 0$$

$$b = \frac{m_B x_B + M_m x_m}{M} = \frac{70 \cdot 0,176 + 0}{400} = 0,133 \text{ [m]}$$

4.4 DETERMINATION DE LA FORCE DE RAPPEL

On dispose du graphe de l'élasticité des plots de suspension, donc d'un ensemble de couples (déplacement, force de rappel).

On va interpoler cette fonction par un polynôme du troisième degré

$$F(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$$

Comme la fonction passe par l'origine, on a déjà $d=0$

Du graphe d'élasticité on remplit le tableau suivant :

$z(\text{mm})$	-9	-8	-7	-6	-5	-4
$F(z) (\text{kgf})$	+1000	+820	+650	+500	+400	+270

-3	-2	-1	1	2	3
+170	+100	+30	-30	-70	-120

4	5	6	7	8	9
-170	-220	-270	-340	-380	-450

Cherchons (a, b, c) qui donnent la meilleure approche de la fonction c'est à dire pour lesquels R est minimum.

$$R = \sum_{z=-9}^9 (F(z) - f(z))^2$$

$$R \text{ minimum} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial a} = 0 \text{ et } \frac{\partial R}{\partial b} = 0 \text{ et } \frac{\partial R}{\partial c} = 0.$$

$$\text{on a } \frac{\partial R}{\partial a} = 2 \sum_{z=-9}^9 z^0 (F(z) - f(z)) = 2 \left(\sum_{z=-9}^9 a z^0 + \sum_{z=-9}^9 b z^1 + \sum_{z=-9}^9 c z^2 - \sum_{z=-9}^9 F(z) z^0 \right)$$

et de même pour $\frac{\partial R}{\partial b}$ et $\frac{\partial R}{\partial c}$, on obtient le système

suivant :

$$\begin{cases} a \sum_{z=-9}^9 z^0 + b \sum_{z=-9}^9 z^1 + c \sum_{z=-9}^9 z^2 = \sum_{z=-9}^9 z^0 F(z) \\ a \sum_{z=-9}^9 z^1 + b \sum_{z=-9}^9 z^2 + c \sum_{z=-9}^9 z^3 = \sum_{z=-9}^9 z^1 F(z) \\ a \sum_{z=-9}^9 z^2 + b \sum_{z=-9}^9 z^3 + c \sum_{z=-9}^9 z^4 = \sum_{z=-9}^9 z^2 F(z) \end{cases}$$

La deuxième équation nous donne directement la valeur de b

$$b = -3,3538772 \text{ kgf/mm}^2$$

La résolution du système qui reste nous donne :

$$a = -0,3840849 \text{ [kgf/mm}^3\text{]} \quad \text{et} \quad c = -50,090672 \text{ [kgf/mm]}$$

Comme a , b et c ont déjà été utilisés ailleurs on va noter dans

La suite $F(z) = k_0 z^3 + k_1 z^2 + k_2 z$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} k_0 = -3,7678729 \cdot 10^9 \text{ N/m}^3 \\ k_1 = -52,867997 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \\ k_2 = -491,32949 \cdot 10^3 \text{ N/m} \end{cases}$$

Pour les composantes horizontales de la force de rappel des plots

Le graphe de l'élasticité nous donne une droite, on a donc :

$$F(x) = F(y) = k_h d_i \quad \text{avec} \quad k_h = \frac{600}{6} = -83,333 \text{ [kgf/mm]}$$

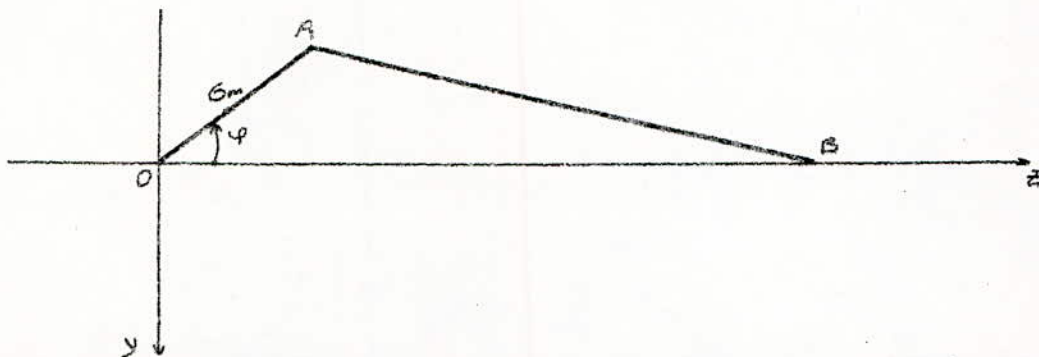
$$\text{ou bien } k_h = -817,4999 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

$$F(x) = k_h x \quad \text{et} \quad F(y) = k_h y$$

5. ANALYSE CINEMATIQUE

On va faire l'analyse cinématique du moteur stationnaire, c'est à dire sur une fondation fixe.

5.1 LA MANIVELLE



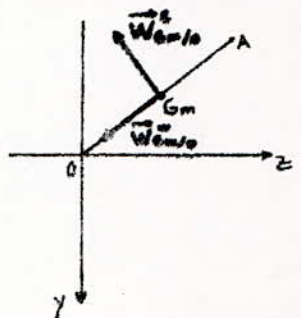
5.1.1 ACCELERATION DU CENTRE DE GRAVITE

$$\vec{W}_{Gm} = \vec{W}_0 + \vec{W}_{Gm/0}^e + \vec{W}_{Gm/0}^{tr}$$

$$\vec{W}_0 = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{Gm/0}^e &= \vec{\omega}_{0A} \wedge \vec{OG}_m = \dot{\varphi} \vec{x} \wedge l_m [\cos \varphi \vec{k} + \sin \varphi (-\vec{j})] \\ &= -l_m \dot{\varphi} [\cos \varphi (\vec{j}) + \sin \varphi (\vec{k})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{W}_{Gm/0}^{tr} &= \vec{\omega}_{0A} \wedge (\vec{\omega}_{0A} \wedge \vec{OG}_m) = \dot{\varphi} (\vec{x}) \wedge [\dot{\varphi} (\vec{x}) \wedge l_m (\cos \varphi (\vec{k}) + \sin \varphi (-\vec{j}))] \\ &= -l_m \dot{\varphi}^2 [\cos \varphi (\vec{k}) + \sin \varphi (-\vec{j})]. \end{aligned}$$

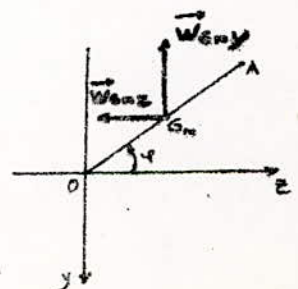


Accélérations suivant les axes :

On va projeter les accélérations trouvées sur les axes.

$$\vec{W}_{Gmz} = -l_m [\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] \vec{k}$$

$$\vec{W}_{Gmy} = -l_m [\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] \vec{j}$$



5.1.2 VITESSE DU POINT A

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{A/O}$$

$$\vec{V}_O = \vec{0}$$

$$\vec{V}_{A/O} = \vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{OA}$$

$$= \dot{\varphi}(\vec{z}) \wedge r[\cos \varphi(\vec{i}) + \sin \varphi(-\vec{j})]$$

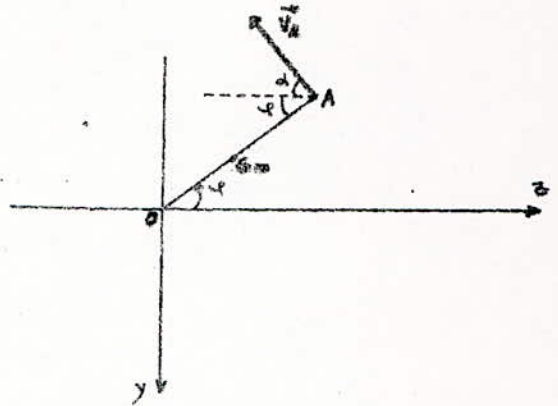
$$\vec{V}_A = -r\dot{\varphi}[\cos \varphi(\vec{j}) + \sin \varphi(\vec{i})]$$

ou bien directement

$$\vec{V}_A = r\dot{\varphi}[\cos \alpha(-\vec{i}) + \sin \alpha(-\vec{j})]$$

$$\text{et comme } \varphi + \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\text{on a } \vec{V}_A = -r\dot{\varphi}[\cos \varphi(\vec{j}) + \sin \varphi(\vec{i})]$$



5.1.3 ACCELERATION DU POINT A

$$\vec{W}_A = \frac{d}{dt} \vec{V}_A = -r[\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi](\vec{i}) - r[\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi](\vec{j})$$

$$= -r\ddot{\varphi}[\cos \varphi(\vec{j}) + \sin \varphi(\vec{i})] + r\dot{\varphi}^2[\sin \varphi(\vec{j}) - \cos \varphi(\vec{i})]$$

Accelerations normales et tangentielles du point A.

$$\vec{W}_A = \vec{W}_O + \vec{W}_{A/O}^t + \vec{W}_{A/O}^n$$

$$\vec{W}_O = \vec{0}$$

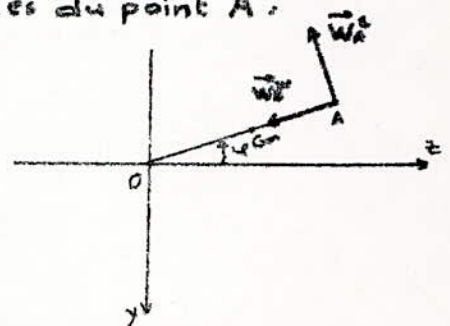
$$\vec{W}_{A/O}^n = \vec{\varepsilon}_{Oz} \wedge \vec{OA} = \ddot{\varphi}(\vec{z}) \wedge r[\cos \varphi(\vec{i}) - \sin \varphi(\vec{j})]$$

$$= -r\ddot{\varphi}[\cos \varphi(\vec{j}) + \sin \varphi(\vec{i})]$$

$$\vec{W}_{A/O}^t = \vec{\omega}_{OA} \wedge (\vec{\omega}_{OA} \wedge \vec{OA}) = \dot{\varphi}(\vec{z}) \wedge [\dot{\varphi}(\vec{z}) \wedge r(\cos \varphi(\vec{i}) - \sin \varphi(\vec{j}))]$$

$$= -r\dot{\varphi}^2(\vec{z}) \wedge (\cos \varphi(\vec{j}) + \sin \varphi(\vec{i})) = -r\dot{\varphi}^2(\cos \varphi(\vec{i}) - \sin \varphi(\vec{j}))$$

$$= -r\dot{\varphi}^2(\cos \varphi(\vec{i}) - \sin \varphi(\vec{j}))$$

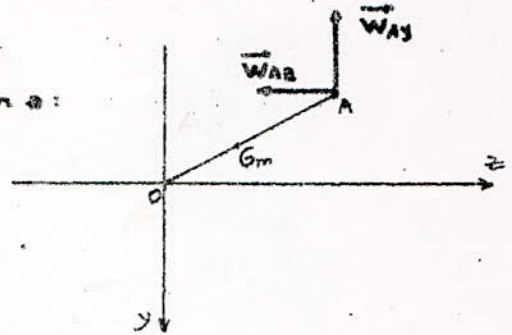


Accelerations suivent les axes :

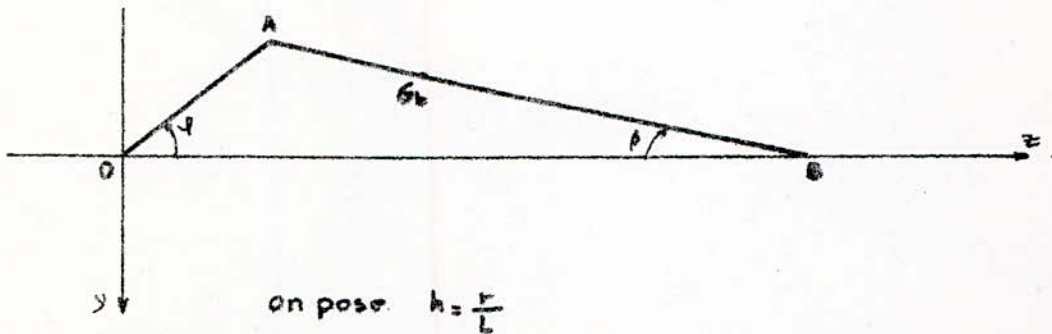
Après projection de \vec{w}_A sur les axes on a :

$$\vec{w}_{Ax} = -r [\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] (\vec{i})$$

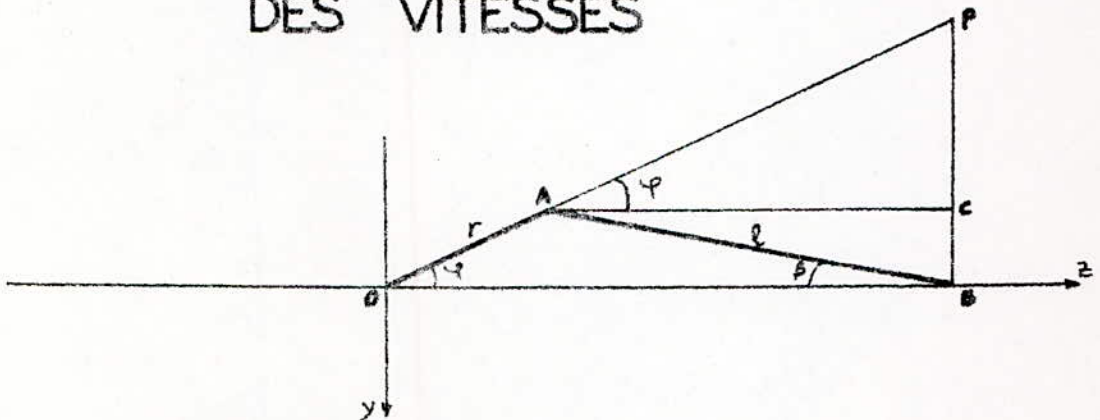
$$\vec{w}_{Ay} = -r [\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi] (\vec{j})$$



5.2 LA BIELLE



5.2.1 DETERMINATION DU CENTRE INSTANTANE DES VITESSES



Les triangles OBP et ACP sont semblables, on a donc :

$$\frac{L \cos \beta}{L \cos \beta + r \cos \varphi} = \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PA + r}$$

$$\text{donc } \frac{PA + r}{PA} = \frac{L \cos \beta + r \cos \varphi}{L \cos \beta} \Rightarrow 1 + \frac{r}{PA} = 1 + k \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} \Rightarrow PA = \frac{r \cos \beta}{k \cos \varphi}$$

$$\text{et comme on a } r \sin \varphi = l \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = k \sin \varphi$$

$$\text{donc } \cos \beta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\text{et } PA = \frac{r \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{k \cos \varphi}$$

De même, comme $PC = PA \sin \varphi$ on a $PC = L \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi$

et $PB = PC + L \sin \beta = PC + r \sin \varphi$

donc $PB = L \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi + r \sin \varphi$

5.2.2 VITESSE ANGULAIRE DE LA BIELLE

Comme la bielle a un mouvement plan (dans le plan YOZ) $\Rightarrow \vec{\omega}_{AB} = C \vec{x}$

où C est une constante à déterminer.

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{PA}$$

$$r \dot{\varphi} [\cos \varphi (-\vec{j}) + \sin \varphi (-\vec{k})] = C \vec{x} \wedge [\cos \varphi (-\vec{k}) + \sin \varphi (\vec{j})] \frac{r \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{k \cos \varphi}$$

ce qui donne $C = \frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$

$$\vec{\omega}_{AB} = \frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \vec{x}$$

5.2.3 ACCELERATION ANGULAIRE DE LA BIELLE

$$\begin{aligned} \vec{E}_{AB} &= \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_{AB}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] (\vec{x}) \\ &= \left(\frac{-k \ddot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - k \dot{\varphi}^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right) (\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\text{or } \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) = \frac{-\sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{k^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$\text{donc } \vec{E}_{AB} = \left(\frac{-k \ddot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{k \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \left(\frac{1 - k^2}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right) \right) (\vec{x})$$

$$\vec{E}_{AB} = \left[\frac{k(1 - k^2) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{k \ddot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] (\vec{x})$$

5.2.4 ACCELERATION DU CENTRE DE GRAVITE

$$\vec{W}_{Gb} = \vec{W}_R + \vec{W}_{Gb/R}^e + \vec{W}_{Gb/R}^{tr}$$

$$\text{on a } \vec{W}_{Gb/R}^e = \vec{E}_{AB} \wedge \vec{AG}_b$$

$$\text{et } \vec{AG}_b = L_b \left[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\vec{k}) + k \sin \varphi (\vec{j}) \right]$$

$$\vec{W}_{G_b/A}^z = - \frac{L_b k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)} (\vec{j}) + L_b k \ddot{\varphi} \cos \varphi (\vec{j}) + \frac{L_b k^2 (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} (\vec{k}) - \frac{L_b k^2 \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\vec{k})$$

de même pour $\vec{W}_{G_b/A}$

$$\vec{W}_{G_b/A} = \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{w}_{AB} \wedge \vec{AG}_b) = \frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\vec{j}) \wedge \left(\frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\vec{j}) \wedge L_b \left[\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\vec{k}) + k \sin \varphi (\vec{j}) \right] \right)$$

$$\vec{W}_{G_b/A} = - \frac{L_b k^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)} \left[k \sin \varphi (\vec{j}) + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\vec{k}) \right]$$

$$\vec{W}_A = -r \ddot{\varphi} \left[\cos \varphi (\vec{j}) + \sin \varphi (\vec{k}) \right] + r \dot{\varphi}^2 \left[\sin \varphi (\vec{j}) - \cos \varphi (\vec{k}) \right]$$

Accélérations suivant les axes :

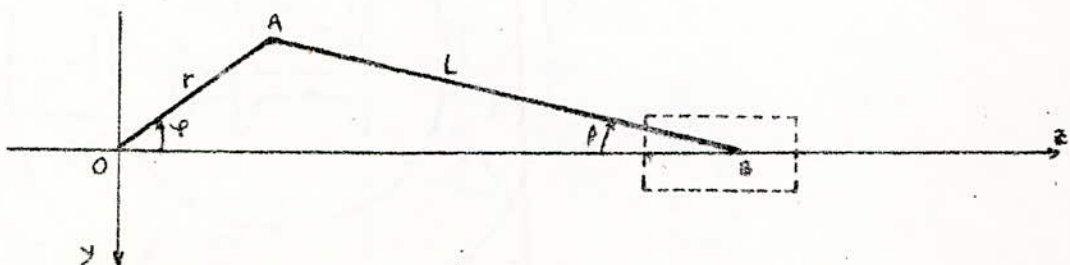
$$\vec{W}_{G_b y} = \left[- \frac{L_b k^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{L_b k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{1-k^2 \sin^2 \varphi} + L_b k \ddot{\varphi} \cos \varphi - r \ddot{\varphi} \cos \varphi + r \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \right] (\vec{j})$$

$$\vec{W}_{G_b y} = (r - k L_b) (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) (\vec{j})$$

$$\vec{W}_{G_b z} = \left[\frac{L_b k^2 (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{L_b k^2 \ddot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{L_b k^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - r \ddot{\varphi} \sin \varphi - r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right] (\vec{k})$$

$$\vec{W}_{G_b z} = \left[\frac{L_b k^2 (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \left(r + \frac{L_b k^2 \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right] (\vec{k})$$

5.3 LE PISTON

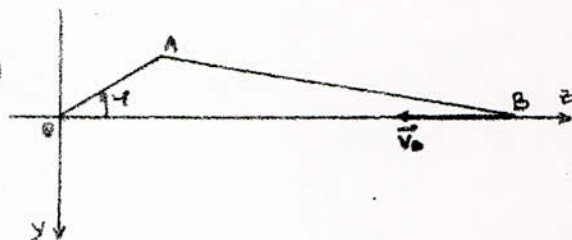


5.3.1 CALCUL DE LA VITESSE DU PISTON

$$\text{On a } \vec{V}_B = \vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{PB}$$

$$\vec{V}_B = \frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\vec{i}) + \left[\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \dot{\varphi} \vec{j} + r \dot{\varphi} \sin \varphi (\vec{j}) \right]$$

$$\vec{V}_B = \left[-r \dot{\varphi} \sin \varphi \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right] (\vec{k})$$



5.3.2 CALCUL DE L'ACCELERATION DU PISTON

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + \vec{W}_{B/A} + \vec{W}_{B/A}$$

$$\vec{W}_{B/A} = \vec{\epsilon}_{AB} \wedge \vec{AB} \quad \text{avec} \quad \vec{AB} = \ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\vec{k}) + r \sin \varphi (\vec{j})$$

$$\vec{W}_{B/A} = -\frac{r(1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} (\vec{j}) + r \ddot{\varphi} \cos \varphi (\vec{j}) + \frac{r k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} (\vec{k}) - \frac{r k \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\vec{k})$$

$$\vec{W}_{B/A} = \vec{\omega}_{AB} \wedge (\vec{\omega}_{AB} \wedge \vec{AB})$$

$$\vec{W}_{B/A} = -\frac{k \ell \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{1-k^2 \sin^2 \varphi} \left(k \sin \varphi (\vec{j}) + \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\vec{k}) \right)$$

$$\vec{W}_A = -r \ddot{\varphi} \left[\cos \varphi (\vec{j}) + \sin \varphi (\vec{k}) \right] + r \dot{\varphi}^2 \left[\sin \varphi (\vec{j}) - \cos \varphi (\vec{k}) \right]$$

et après simplification de l'expression, on a :

$$\vec{W}_B = \left[\frac{r k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \left(r \ddot{\varphi} \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) \right] (\vec{k})$$

On remarque que $\vec{W}_B = W_B \vec{k}$ et que $\vec{W}_{By} = 0$

On aurait pu également constater ceci en calculant \vec{W}_B à partir de \vec{V}_B :

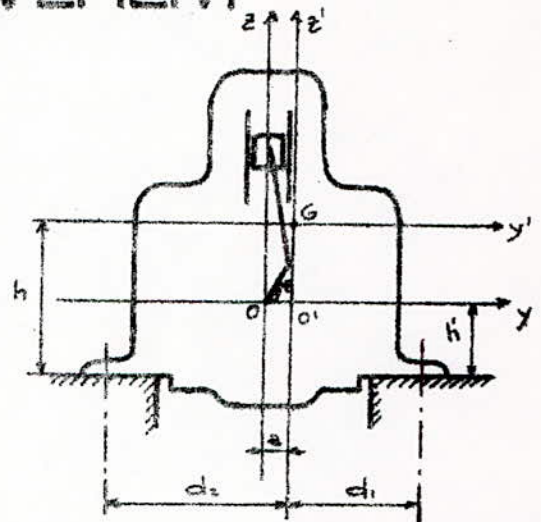
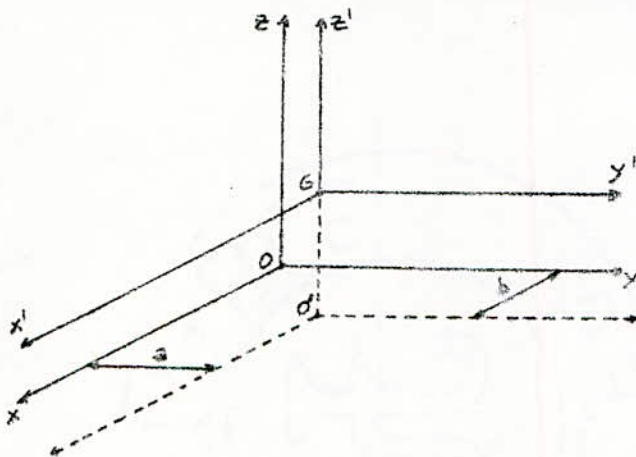
$$\vec{W}_B = \frac{d}{dt} (\vec{V}_B) = \frac{d}{dt} \left(-r \dot{\varphi} \sin \varphi \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right) (\vec{k})$$

$$\vec{W}_B = \left[\frac{r k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \left(r \ddot{\varphi} \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right) \right] (\vec{k})$$

6. REACTIONS DYNAMIQUES DANS LE CAS DU MOTEUR IMMOBILE

On va essayer de déterminer les réactions dynamiques, pour le moteur stationnaire (châssis immobile) sur des supports rigides (pas de plots de suspension), pour pouvoir ensuite comparer avec le cas du moteur sur supports élastiques.

6.1 EQUATIONS DU MOUVEMENT



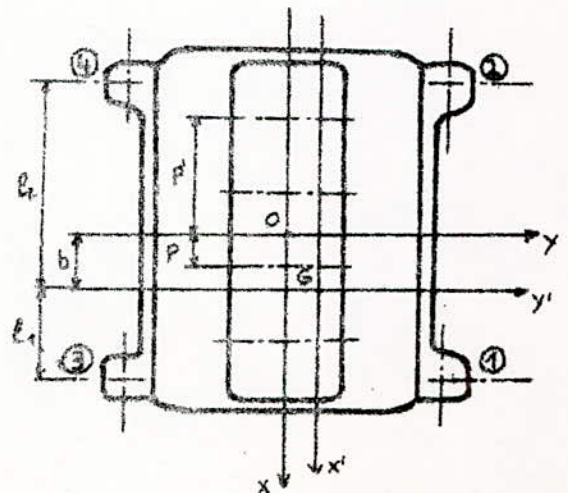
On va établir les équations sur ce modèle, alors que pour notre moteur on a :

$$h = a = 0 \quad ; \quad h - h' = 132 \text{ [mm]}$$

$$2p = 130 \text{ [mm]} \quad ; \quad 2p' = 390 \text{ [mm]}$$

$$d_1 = d_2 = 265 \text{ [mm]}$$

$$\ell_1 = 250 - b \quad ; \quad \ell_2 = 410 + b$$



Théorème du centre de gravité :

$$M \vec{r}_G = \sum m_i \vec{r}_i$$

On a donc
$$M \vec{r}_G = 2 m_p \vec{r}_p + 2 m_p \vec{r}_p' + 2 m_b \vec{r}_b + 2 m_b \vec{r}_b' + 2 m_m \vec{r}_m + 2 m_m \vec{r}_m' + M' \vec{r}_G' \quad (2)$$

Comme c'est un moteur en ligne l'ordre d'allumage est (1-3-4-2)
on a donc deux manivelles en phase, et deux autres en opposition de phase.

exp: si $\vec{r}_p = f(\varphi) \vec{k} \longrightarrow \vec{r}_p' = f(\varphi + \pi) \vec{k}$

En dérivant deux fois (2) on aura :

$$M \vec{w}_G = 2 m_p \vec{r}_p'' + 2 m_p \vec{r}_p'' + 2 m_b \vec{r}_b'' + 2 m_b \vec{r}_b'' + 2 m_m \vec{r}_m'' + 2 m_m \vec{r}_m'' .$$

d'autre part on a
$$\begin{cases} \sum \vec{F}^e + \sum \vec{F}^{in} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}(\vec{F}^e) + \sum \vec{M}(\vec{F}^{in}) + \sum \vec{M}^{in} = \vec{0} \end{cases}$$

Et on va projeter ces équations vectorielles sur les axes des coordonnées.

On va considérer une translation suivant (Oz), une rotation autour de (Ox') et une rotation autour (Oy').

6.1.1 SUIVANT (OZ)

$$\sum \vec{F}_e = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - Mg) (\vec{k})$$

et
$$-\sum \vec{F}^{in} = M \vec{w}_{Gz} = 2 m_p \vec{w}_p(\varphi) + 2 m_p \vec{w}_p(\varphi + \pi) + 2 m_b \vec{w}_b(\varphi) + 2 m_b \vec{w}_b(\varphi + \pi) + 2 m_m \vec{w}_m(\varphi) + 2 m_m \vec{w}_m(\varphi + \pi).$$

$$M \vec{w}_{Gz} = \left[\frac{4 m_p r k (1 - k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{4 m_p r k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) + \frac{4 m_b L_b k^2 (1 - k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{4 m_b L_b k^2 \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right] (\vec{k})$$

6.12 AUTOUR DE (GX')

$$\sum \vec{M}_{(GX')}(\vec{F}^e) + \sum \vec{M}_{(GX')}(\vec{F}^{in}) + \sum \vec{M}_{in} = \vec{0}$$

$$\text{ou bien } \sum \vec{M}_{(GX')}(\vec{F}^e) = -\sum \vec{M}_{in} - \sum \vec{M}_{(GX')}(\vec{F}^{in})$$

$$-\sum \vec{M}_{in} = 4 m_m \int_m^2 \ddot{\varphi}(\vec{x}) + 2 m_b \int_b^2 \left[\frac{k(1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] (\vec{x}) \\ + 2 m_b \int_b^2 \left[\frac{k(1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi+\pi)}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{k \dot{\varphi} \cos(\varphi+\pi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] (\vec{x}) + m_v \int_v^2 \ddot{\varphi}(\vec{x})$$

$$-\sum \vec{M}_{(F^{in})} = -\sum \vec{M}_{(F_m^{in})} - \sum \vec{M}_{(F_p^{in})} - \sum \vec{M}_{(F_b^{in})}$$

$$\textcircled{1} -\sum \vec{M}_{(F_m^{in})} = 2 m_m \left[\overrightarrow{GG_m} \wedge \overrightarrow{W_{mz}} + \overrightarrow{GG_m} \wedge \overrightarrow{W_{my}} \right]_{(\varphi)} + 2 m_m \left[\overrightarrow{GG_m} \wedge \overrightarrow{W_{mz}} + \right. \\ \left. + \overrightarrow{GG_m} \wedge \overrightarrow{W_{my}} \right]_{(\varphi+\pi)}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{GG_m} = \overrightarrow{GO'} - a \vec{j} - b \vec{x} + \overrightarrow{OG_m}$$

Comme c'est la projection du moment sur GX', les composantes du produit par b \vec{x} sont toutes nulles.

$$\overrightarrow{GO'} \wedge \overrightarrow{W_{mz}} = \vec{0} \quad ; \quad a \vec{j} \wedge \overrightarrow{W_{my}} = \vec{0}$$

La projection de ① sur GX' donne:

$$(\overrightarrow{GO'} \wedge \overrightarrow{W_{my}}) - (a \vec{j} \wedge \overrightarrow{W_{mz}}) + (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{W_{mz}}) + (\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{W_{my}})$$

$$(-z_0(\vec{k}) \wedge \overrightarrow{W_{my}}) - (a \vec{j} \wedge \overrightarrow{W_{mz}}) + \overrightarrow{OG} \wedge (\overrightarrow{W_{mz}} + \overrightarrow{W_{my}})$$

$$z_0 L_m (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) + a L_m (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) + L_m (\cos \varphi (\vec{k}) - \sin \varphi (\vec{j})) \wedge (\overrightarrow{W_m})$$

$$z_0 L_m (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) + a L_m (\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi} \sin \varphi) + L_m^2 \ddot{\varphi}$$

De même pour la projection de ② sur GX', qui après simplification

$$\text{donne : } z_0 L_m (\dot{\varphi}^2 (-\sin \varphi) - \ddot{\varphi} (-\cos \varphi)) + a L_m (\dot{\varphi}^2 (-\cos \varphi) + \ddot{\varphi} (-\sin \varphi)) + L_m^2 \ddot{\varphi}$$

$$\text{donc } -\sum \vec{M}_{(GX')}(\vec{F}_m^{in}) = 4 m_m L_m^2 \ddot{\varphi}(\vec{x})$$

$$\textcircled{1} - \sum \vec{M}_b(\vec{F}_p^{in}) = 2 m_p \overbrace{(\vec{G}\vec{G}_p \wedge \vec{W}_b)_{(\varphi)}}^{(1)} + 2 m_p \overbrace{(\vec{G}\vec{G}_p \wedge \vec{W}_b)_{(\varphi+\pi)}}^{(2)}$$

La projection de ① sur GX' donne :

$$- a \vec{j} \wedge \vec{W}_b(\varphi)$$

$$- a \left[\frac{r k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) (r \ddot{\varphi} \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right]$$

De même, La projection de ② sur GX' donne :

$$- a \vec{j} \wedge \vec{W}_b(\varphi+\pi)$$

$$- a \left[\frac{r k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \left(1 - \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) (r \ddot{\varphi} \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right]$$

Donc :

$$- \sum \vec{M}_{b(GX')}(\vec{F}_p^{in}) = 4 m_p a \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (r \ddot{\varphi} \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) - 4 m_p a \frac{r k (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$

$$\textcircled{2} - \sum \vec{M}_b(\vec{F}_b^{in}) = 2 m_b \overbrace{(\vec{G}\vec{G}_b \wedge \vec{W}_b)_{(\varphi)}}^{(1)} + 2 m_b \overbrace{(\vec{G}\vec{G}_b \wedge \vec{W}_b)_{(\varphi+\pi)}}^{(2)}$$

$$\text{on a } \vec{G}\vec{G}_b = \vec{G}\vec{O}' - a \vec{j} - b \vec{x} + \vec{O}\vec{A} + \vec{A}\vec{G}_b$$

$$\text{avec : } \vec{G}\vec{O}' = -z_0(\vec{k}) \quad ; \quad \vec{O}\vec{A} = r [\cos \varphi (\vec{k}) - \sin \varphi (\vec{j})]$$

$$\vec{A}\vec{G}_b = L_b \left[\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\vec{k}) + \frac{r}{L} \sin \varphi (\vec{j}) \right]$$

La projection de ① sur GX' donne :

$$z_0 W_{by} - r \cos \varphi W_{by} - r \sin \varphi W_{bz} - a W_{bz} - L_b \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} W_{by} + L_b k \sin \varphi W_{bz}$$

$$\left[z_0 - r \cos \varphi - L_b \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \right] W_{by}(\varphi) + \left[L_b k \sin \varphi - r \sin \varphi - a \right] W_{bz}(\varphi)$$

De même, La projection de ② sur GX' donne :

$$\left[z_0 - r \cos \varphi - L_b \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \right] (+ W_{by}(\varphi+\pi)) + \left[L_b k \sin \varphi - r \sin \varphi - a \right] (W_{bz}(\varphi+\pi))$$

Donc :

$$- \sum \vec{M}_{b(GX')}(\vec{F}_b^{in}) = - 4 m_b r \cos \varphi \left[(r - k L_b) (\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) \right]$$

$$- 4 m_b r \left[L_b k \sin \varphi - r \sin \varphi \right] \left[\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \right]$$

$$- 4 m_b a \left[\frac{L_b k^2 (1-k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \left(\frac{L_b k^2 \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right]$$

$$\odot \sum \vec{M}_{(Gx')}(\vec{F}^e) = (R_1 + R_2) d_1 - (R_3 + R_4) d_2$$

Remarque :

Dans les expressions des moments des forces extérieures apparaissent

Les réactions horizontales ($\sum \vec{M}_{(Gx')}(\vec{F}^e) = (R_1' + R_2' + R_3' + R_4') h + (R_1 + R_2) d_1 -$

$-(R_3 + R_4) d_2$), mais on ne les a pas fait apparaître car elles sont nulles

Projection suivant (Oy) donne $M \vec{W}_{Gy} = (R_1' + R_2' + R_3' + R_4') (J)$

$$\text{et } M \vec{W}_{Gy} = 2m_b (\vec{W}_{by}(\varphi) + \vec{W}_{by}(\varphi + \pi)) + 2m_m (\vec{W}_{my}(\varphi) + \vec{W}_{my}(\varphi + \pi)) = \vec{0}$$

De même pour la projection suivant OX $(R_1'' + R_2'' + R_3'' + R_4'') (z) = M \vec{W}_{ex} = \vec{0}$

6.1.3 AUTOUR DE (GY')

$$\text{On a } \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}^e) = \vec{0}$$

$$\text{et } - \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}_p^{in}) = m_p \left((p' - b) W_B(\varphi) - (b - p) W_B(\varphi + \pi) - (b + p) W_B(\varphi + \pi) - (b + p') W_B(\varphi) \right) (J)$$

$$\begin{aligned} - \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}_m^{in}) &= -2 m_p b (\vec{W}_B(\varphi) + \vec{W}_B(\varphi + \pi)) \\ &= -4 m_p b \left[\frac{r k (1 - k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} (r \ddot{\varphi} \sin \varphi + r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right] \end{aligned}$$

$$\text{De même pour } - \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}_m^{in}) = m_m \left((p' - b) W_{mz}(\varphi) - (b - p) W_{mz}(\varphi + \pi) - (b + p) W_{mz}(\varphi + \pi) - (b + p') W_{mz}(\varphi) \right) (J)$$

$$- \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}_m^{in}) = -2 m_m b (\vec{W}_{mz}(\varphi) + \vec{W}_{mz}(\varphi + \pi)) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} - \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}_b^{in}) &= -2 m_b b (\vec{W}_{bz}(\varphi) + \vec{W}_{bz}(\varphi + \pi)) \\ &= -4 m_b b \left[\frac{L b k^2 (1 - k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{L b k^2 \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right] (J) \end{aligned}$$

Donc

$$- \sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}^{in}) = -4 b k (r m_p + L b k m_b) \left[\frac{(1 - k^2) \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right] (J)$$

$$\sum \vec{M}_{(Gy')}(\vec{F}^e) = (R_2 + R_4) \ell_2 - (R_1 + R_3) \ell_1$$

6.1.4 EQUATIONS DES REACTIONS

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = Mg + 4k(m_p \cdot r + m_b k L_b) \left[\frac{(1-k^2)\dot{\varphi}^2 \sin^4 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{\cos \varphi (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]$$

$$(R_1 + R_2) d_1 - (R_3 + R_4) d_2 = M_{vit} \int_{vit}^2 \ddot{\varphi} + 4 m_m L_m^2 \ddot{\varphi} + 4 m_b r (r - k L_b) \ddot{\varphi}$$

$$(R_3 + R_4) l_2 - (R_1 + R_2) l_1 = -4 b k (m_p r + m_b k L_b) \left[\frac{(1-k^2)\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{\cos \varphi (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right]$$

Comme c'est un système hyperstatique, on ne peut pas déterminer chacune d'elles, mais on peut avoir leur influence sur le châssis, car toutes, appliquent un effort périodique de module calculable.

6.2 ACTION DU MOTEUR SUR SON SUPPORT

On va déterminer l'action dynamique du moteur sur son support, lors de son fonctionnement.

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 4k(m_p \cdot r + m_b \cdot k \cdot L_b) \left[\frac{(1-k^2)\dot{\varphi}^2 \sin^4 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \right]$$

« réactions dynamiques on ne considère pas le poids ».

considérons la fonction
$$F(\varphi) = \frac{(1-k^2)\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

et comme k est de l'ordre du centième, k^2 est considéré comme étant un infiniment petit,

D'autre part on se place dans le cas du régime établi et $\dot{\varphi} = 480,85 \text{ rad/s}$

donc
$$F(\varphi) = (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi - k^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi) \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \sin^2 \varphi \right) - k \cos^2 \varphi \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \varphi \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{k}$$

k est un infiniment petit, on néglige donc les ordres supérieurs à un.

$$k_f(\varphi) = \frac{k\dot{\varphi}^2}{2} (1 - \cos 2\varphi) - \frac{k\dot{\varphi}^2}{2} (1 + \cos 2\varphi) = -k\dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi$$

Le module de cette action periodique est donc

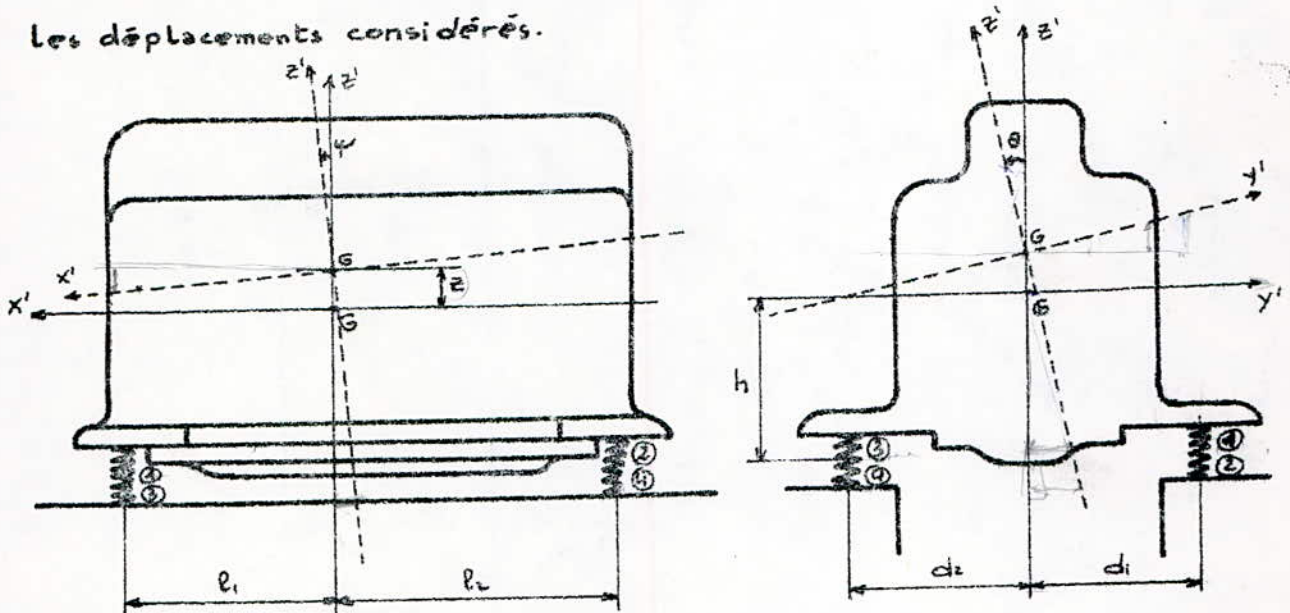
$$\begin{aligned} 4(m_p \cdot r + k m_b \cdot L_b) k \dot{\varphi}^2 &= 4 \left(1,635 \cdot 0,06 + \frac{6}{31} \cdot 1,7 \cdot 0,07 \right) \frac{6}{31} (58008,722) \\ &= 8757,6553 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 &= \text{effort dynamique appliqué sur le châssis} \\ &= 8757,66 \text{ N} \end{aligned}$$

7. ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DU MOUVEMENT

7.1 DEPLACEMENT DES POINTS DE FIXATION PAR RAPPORT AU CHASSIS

Comme le repère $Gx'y'z'$ est lié au moteur (Gx' parallèle à l'axe du vilebrequin et Gz' parallèle aux axes des pistons), on va montrer les déplacements considérés.



On va donner les déplacements de chaque point de fixation en fonction des déplacements z , θ et ψ .

$$\text{Pour } \textcircled{1}: \begin{cases} y_1 = h\theta \\ x_1 = -h\psi \\ z_1 = z + d_1\theta - l_1\psi \end{cases}$$

$$\text{Pour } \textcircled{2}: \begin{cases} y_2 = h\theta \\ x_2 = -h\psi \\ z_2 = z + d_1\theta + l_2\psi \end{cases}$$

$$\text{Pour } \textcircled{3}: \begin{cases} y_3 = h\theta \\ x_3 = -h\psi \\ z_3 = z - d_2\theta - l_1\psi \end{cases}$$

$$\text{Pour } \textcircled{4}: \begin{cases} y_4 = h\theta \\ x_4 = -h\psi \\ z_4 = z - d_2\theta + l_2\psi \end{cases}$$

7.2 ENERGIE DE DISSIPATION

Comme les plots ont un certain coefficient d'élasticité, ils ont aussi un coefficient d'amortissement.

On notera par d_v : l'amortissement vertical.

et d_H : l'amortissement horizontal.

L'énergie de dissipation est proportionnelle au carré de la vitesse relative du moteur par rapport à son support.

$$D = \frac{1}{2} d_v [(\dot{z}_1 - \dot{z}_{1c})^2 + (\dot{z}_2 - \dot{z}_{2c})^2 + (\dot{z}_3 - \dot{z}_{3c})^2 + (\dot{z}_4 - \dot{z}_{4c})^2] + \frac{1}{2} d_H [(\dot{x}_1 - \dot{x}_{1c})^2 + (\dot{x}_2 - \dot{x}_{2c})^2 + (\dot{x}_3 - \dot{x}_{3c})^2 + (\dot{x}_4 - \dot{x}_{4c})^2 + (\dot{y}_1 - \dot{y}_1c)^2 + (\dot{y}_2 - \dot{y}_2c)^2 + (\dot{y}_3 - \dot{y}_3c)^2 + (\dot{y}_4 - \dot{y}_4c)^2]$$

$$\bullet \frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = d_v [\dot{z} + d_1 \dot{\theta} - l_1 \dot{\psi} - \dot{z}_{1c} + \dot{z} - d_2 \dot{\theta} - l_1 \dot{\psi} - \dot{z}_{2c} + \dot{z} + d_1 \dot{\theta} + l_2 \dot{\psi} - \dot{z}_{3c} + \dot{z} - d_2 \dot{\theta} + l_2 \dot{\psi} - \dot{z}_{4c}]$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = d_v [4\dot{z} + 2(d_1 - d_2)\dot{\theta} + 2(l_2 - l_1)\dot{\psi} - (\dot{z}_{1c} + \dot{z}_{2c} + \dot{z}_{3c} + \dot{z}_{4c})]$$

$$\bullet \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = d_v [d_1(\dot{z} + d_1 \dot{\theta} - l_1 \dot{\psi} - \dot{z}_{1c}) - d_2(\dot{z} - d_2 \dot{\theta} - l_1 \dot{\psi} - \dot{z}_{2c}) + d_1(\dot{z} + d_1 \dot{\theta} + l_2 \dot{\psi} - \dot{z}_{3c}) - d_2(\dot{z} - d_2 \dot{\theta} + l_2 \dot{\psi} - \dot{z}_{4c})] + d_H [4h^2 \dot{\theta} - h(\dot{y}_{1c} + \dot{y}_{2c} + \dot{y}_{3c} + \dot{y}_{4c})]$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = d_v [2(d_1 - d_2)\dot{z} + 2(d_1^2 + d_2^2)\dot{\theta} + (l_2 - l_1)(d_1 - d_2)\dot{\psi} - d_1(\dot{z}_{1c} + \dot{z}_{2c}) + d_2(\dot{z}_{3c} + \dot{z}_{4c})] + d_H [4h^2 \dot{\theta} - h(\dot{y}_{1c} + \dot{y}_{2c} + \dot{y}_{3c} + \dot{y}_{4c})]$$

$$\bullet \frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}} = d_v [-l_1(\dot{z} + d_1 \dot{\theta} - l_1 \dot{\psi} - \dot{z}_{1c}) + l_2(\dot{z} + d_1 \dot{\theta} + l_2 \dot{\psi} - \dot{z}_{3c}) - l_1(\dot{z} - d_2 \dot{\theta} - l_1 \dot{\psi} - \dot{z}_{2c}) + l_2(\dot{z} - d_2 \dot{\theta} + l_2 \dot{\psi} - \dot{z}_{4c})] + d_H [4h^2 \dot{\psi} + h(\dot{x}_{1c} + \dot{x}_{2c} + \dot{x}_{3c} + \dot{x}_{4c})]$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\psi}} = d_v [2(l_2 - l_1)\dot{z} + (d_1 - d_2)(l_2 - l_1)\dot{\theta} + 2(l_1^2 + l_2^2)\dot{\psi} + l_1(\dot{z}_{1c} + \dot{z}_{2c}) - l_2(\dot{z}_{3c} + \dot{z}_{4c})] + d_H [4h^2 \dot{\psi} + h(\dot{x}_{1c} + \dot{x}_{2c} + \dot{x}_{3c} + \dot{x}_{4c})]$$

7.3 FORCES GENERALISEES

Comme toutes les forces extérieures agissant sur le moteur sont bien définies (Mg ; $F(z) = k_3 z^3 + k_2 z^2 + k_1 z$; $F(x) = k_H x$; $F(y) = k_V y$) on pourra donc définir les forces généralisées correspondantes aux déplacements considérés.

7.3.1 FORCE GENERALISEE SUIVANT (Z)

Soit un déplacement virtuel suivant z (δz).

$$\text{On a } \sum \delta(\vec{F}_{ext}) = Q_z \delta z$$

$$\text{or } \sum \delta(\vec{F}_{ext}) = -Mg \delta z + (F(z_1) + F(z_2) + F(z_3) + F(z_4)) \delta z$$

$$\text{donc } Q_z = F(z_1) + F(z_2) + F(z_3) + F(z_4) - Mg$$

$$\begin{aligned} Q_z = & k_3 \left[(z + d_1 \theta - l_1 \psi)^3 + (z + d_1 \theta + l_2 \psi)^3 + (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^3 + (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^3 \right] \\ & + k_2 \left[(z + d_1 \theta - l_1 \psi)^2 + (z + d_1 \theta + l_2 \psi)^2 + (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^2 + (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^2 \right] \\ & + k_1 \left[z + d_1 \theta - l_1 \psi + z + d_1 \theta + l_2 \psi + z - d_2 \theta - l_1 \psi + z - d_2 \theta + l_2 \psi \right] - Mg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_z = & k_3 \left[(z + d_1 \theta - l_1 \psi)^3 + (z + d_1 \theta + l_2 \psi)^3 + (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^3 + (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^3 \right] \\ & + k_2 \left[(z + d_1 \theta - l_1 \psi)^2 + (z + d_1 \theta + l_2 \psi)^2 + (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^2 + (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^2 \right] \\ & + k_1 \left[4z + 2(d_1 - d_2)\theta - 2(l_1 - l_2)\psi \right] - Mg. \end{aligned}$$

7.3.2 FORCE GENERALISEE SUIVANT (θ)

Soit un déplacement virtuel suivant θ $\delta \theta$.

$$\text{On a } \sum \delta[\mathcal{H}_{(x_i)}(\vec{F}_{ext})] = Q_\theta \delta \theta$$

$$\begin{aligned} \text{or } \sum \delta[\mathcal{H}_{(x_i)}(\vec{F}_{ext})] = & \left[(F(z_1) + F(z_2)) d_1 - (F(z_3) + F(z_4)) d_2 \right. \\ & \left. + (F(y_1) + F(y_2) + F(y_3) + F(x_1)) h \right] \delta \theta. \end{aligned}$$

Et après avoir égalisé les deux expressions on a :

$$Q_\theta = k_3 \left[(z + d_1 \theta - l_1 \psi)^3 d_1 + (z + d_1 \theta + l_2 \psi)^3 d_1 - (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^3 d_2 - (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^3 d_2 \right] \\ + k_2 \left[(z + d_1 \theta - l_1 \psi)^2 d_1 + (z + d_1 \theta + l_2 \psi)^2 d_1 - (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^2 d_2 - (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^2 d_2 \right] \\ + k_1 \left[2z(d_1 - d_2) + 2(d_1^2 + d_2^2)\theta + (l_2 - l_1)(d_1 - d_2)\psi \right] + 4h^2 k_H \theta.$$

7.3.3 FORCE GENERALISEE SUIVANT (ψ)

Suivant ψ aussi, on suppose un déplacement virtuel $\delta\psi$

$$\text{On a } \sum \delta [\vec{M}_{(y)}] (\vec{F}_{ex}) = Q_\psi \delta\psi$$

$$\text{or } \sum \delta [\vec{M}_{(y)}] (\vec{F}_{ex}) = \left[(F(z_2) + F(z_4))l_2 - (F(z_1) + F(z_3))l_1 \right. \\ \left. + (F(x_1) + F(x_2) + F(x_3) + F(x_4))h \right] \delta\psi$$

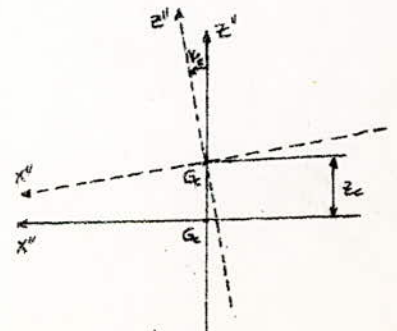
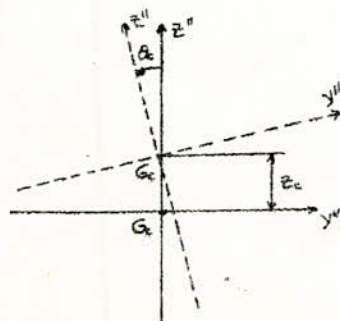
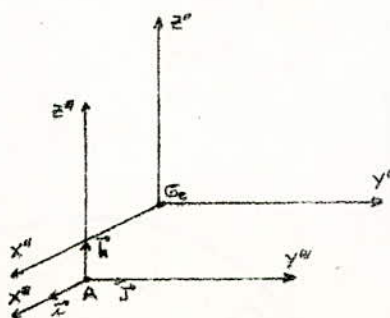
Et en égalisant les deux expressions on a :

$$Q_\psi = k_3 \left[(z + d_1 \theta + l_2 \psi)^3 l_2 + (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^3 l_2 - (z + d_1 \theta - l_1 \psi)^3 l_1 - (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^3 l_1 \right] \\ + k_2 \left[(z + d_1 \theta + l_2 \psi)^2 l_2 + (z - d_2 \theta + l_2 \psi)^2 l_2 - (z + d_1 \theta - l_1 \psi)^2 l_1 - (z - d_2 \theta - l_1 \psi)^2 l_1 \right] \\ + k_1 \left[2z(l_2 - l_1) + 2(l_2^2 + l_1^2)\psi + (d_1 - d_2)(l_2 - l_1)\theta \right] + 4h^2 k_H \psi.$$

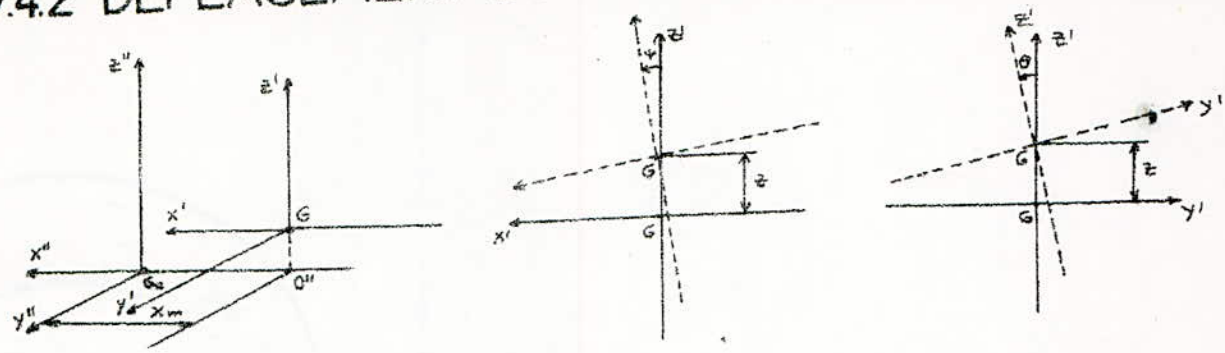
7.4 ENERGIE CINETIQUE

Comme l'énergie cinétique se calcule par rapport à un repère absolu, on va d'abord bien définir tous les déplacements.

7.4.1 DEPLACEMENT DU CHASSIS



7.4.2 DEPLACEMENT DU MOTEUR SUR LE CHASSIS



7.4.3 METHODE DE CALCUL

On sait que si un corps effectue un mouvement complexe, son énergie cinétique n'est pas égale dans le cas général à la somme des énergies cinétiques des mouvements relatif et d'entraînement.

En effet, comme $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \Rightarrow v^2 = v_e^2 + v_r^2 + 2 \vec{v}_e \cdot \vec{v}_r$

Et $T = T_e + T_r$ seulement dans le cas où $\vec{v}_e \cdot \vec{v}_r = 0$, c'est à dire lorsque le mouvement relatif est perpendiculaire au mouvement d'entraînement.

On est justement dans un cas pareil, car tous les organes du moteur se meuvent dans des plans perpendiculaires au plan de rotation Ψ .

L'énergie cinétique peut donc être découpée, une énergie cinétique due aux rotations Ψ et Ψ_c qu'on notera T_Ψ , et une énergie cinétique due au mouvement plan.

C'est un mouvement plan assez complexe, de sorte qu'on ne peut appliquer le théorème de König à cause des déplacements des repères.

On va calculer cette énergie cinétique de la façon suivante, qui est plus simple que si on avait utilisé le théorème de König.

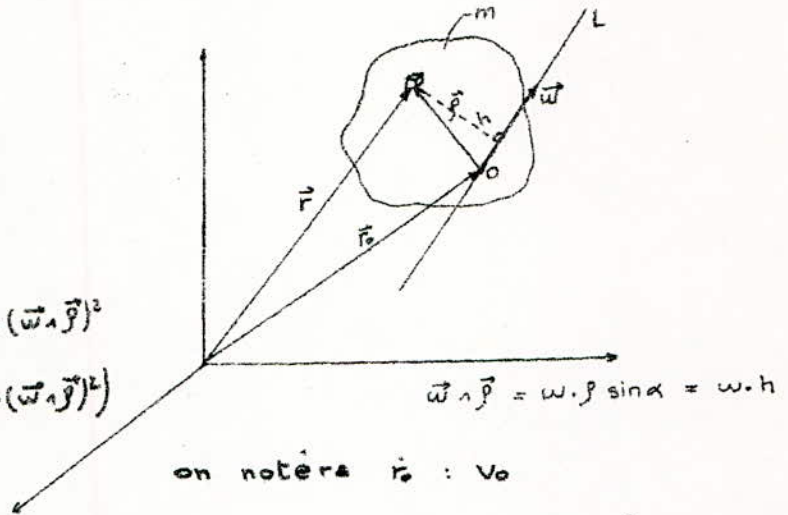
$$dT = \frac{1}{2} dm \dot{r}^2$$

$$\text{or } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{\rho}$$

$$r^2 = r_0^2 + 2\vec{r}_0 \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})^2$$

$$dT = \frac{1}{2} dm (\dot{r}_0^2 + 2\vec{r}_0 \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})^2)$$



$$\vec{\omega} \wedge \vec{\rho} = \omega \cdot \rho \sin \alpha = \omega \cdot h$$

on notera $\dot{r}_0 : v_0$

donc

$$\int dT = \frac{1}{2} \int v_0^2 dm + \vec{v}_0 \cdot \int (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) dm + \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho})^2 dm$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) dm + \frac{1}{2} \omega^2 \int_{(m)} h^2 dm \quad \text{avec } \int_{(m)} h^2 dm = J_L$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) dm + \frac{1}{2} J_L \omega^2$$

On va donc à chaque fois choisir un pôle, et travailler par rapport à ce point.

Pour cela il nous faudra la vitesse absolue de ces pôles.

7.4.4 CALCUL DES VITESSES ABSOLUES

On notera par \vec{v} la vitesse du véhicule.

$$\vec{v}_{Gc} = -v \vec{x} + \dot{z}_c \vec{h}$$

$$\vec{v}_{O''} = \vec{v}_{Gc} + \vec{v}_{O''/Gc} \quad \text{or } \vec{v}_{O''/Gc} = x_m \dot{\psi}_c [\cos \psi_c \vec{h} + \sin \psi_c \vec{x}]$$

donc $\vec{v}_{O''} = -v \vec{x} + \dot{z}_c \vec{h} + x_m \dot{\psi}_c [\cos \psi_c \vec{h} + \sin \psi_c \vec{x}]$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{O''} + \vec{v}_{G/O''} \quad \text{or } \vec{v}_{G/O''} = \dot{z} \vec{h} - O''G \dot{\theta}_c [\cos \theta_c \vec{j} + \sin \theta_c \vec{h}]$$

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{\rho}) dm + \frac{1}{2} J_L \omega^2 \quad \text{avec } O''G = O''O + OG = \dot{z} + \dot{z}_c \quad \text{avec } \int_{(m)} h^2 dm = J_L$$

donc $\vec{v}_G = -v \vec{x} + x_m \dot{\psi}_c [\cos \psi_c \vec{h} + \sin \psi_c \vec{x}] + (\dot{z} + \dot{z}_c) \vec{h} - (\dot{z} + \dot{z}_c) \dot{\theta}_c [\cos \theta_c \vec{j} + \sin \theta_c \vec{h}]$

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{v}_c + \vec{v}_{0/c} \quad \text{or} \quad \vec{v}_{0/c} = z_0 \dot{\theta} [\cos(\theta + \theta_c) \vec{j} + \sin(\theta + \theta_c) \vec{k}] + z_c \dot{\psi} [\sin \psi \vec{k} - \cos \psi \vec{i}] \\ \vec{v}_0 &= -v \vec{i} + x_m \dot{\psi}_c [\cos \psi_c \vec{k} + \sin \psi_c \vec{i}] + z_0 \dot{\psi} [\sin \psi \vec{k} - \cos \psi \vec{i}] + z_0 \dot{\theta} [\cos(\theta + \theta_c) \vec{j} + \sin(\theta + \theta_c) \vec{k}] \\ &\quad + (\dot{z} + \dot{z}_c) \vec{k} - (z + z_c) \dot{\theta}_c [\cos \theta_c \vec{j} + \sin \theta_c \vec{k}]. \end{aligned}$$

Comme on va découpler l'énergie cinétique, on ne va considérer que les composantes de ces vitesses dans les plans où elles sont perpendiculaires à ψ .

7.4.5 ENERGIE CINETIQUE DE ROTATION AUTOUR DE (AY^m)

$$\text{On a } T_\psi = \frac{1}{2} J_{\theta y} \dot{\psi}^2 + J_{\theta c y} \dot{\psi}_c^2$$

$$\text{or on a } J_{\theta c y} = J_{\theta y} + M(x_m^2 + z_c^2)$$

$$\text{d'où } T_\psi = \frac{1}{2} J_{\theta y} \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} [J_{\theta y} + M(x_m^2 + z_c^2)] \dot{\psi}_c^2$$

Donc toutes les énergies cinétiques qu'on va calculer par la suite seront des énergies de mouvement dans le plan.

7.4.6 ENERGIE CINETIQUE DE LA MANIVELLE

On prend le point O comme pôle, l'énergie cinétique d'une manivelle est:

$$T = \frac{1}{2} m_m v_0^2 + \overbrace{\vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r})}^{\text{①}} dm + \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 J_{m0}$$

$$\text{on a } J_{m0} = J_{cm} + m_m L_m^2 = m_m (J_m^2 + L_m^2).$$

de même pour la projection de \vec{v}_0 dans le plan:

$$\vec{v}_0 = (\dot{z} + \dot{z}_c) \vec{k} + z_0 \dot{\theta} [\cos(\theta + \theta_c) \vec{j} + \sin(\theta + \theta_c) \vec{k}] - (z + z_c) \dot{\theta}_c [\cos \theta_c \vec{j} + \sin \theta_c \vec{k}]$$

Soit f_v la masse de la manivelle par unité de longueur.

$$\text{donc } m_m = f_v \cdot r \Rightarrow dm = f_v dx \Rightarrow \int_{(m)} x dm = f_v \int_0^r x dx = \frac{1}{2} f_v r^2 = \frac{1}{2} m_m r$$

$$\int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm = \int_{(m)} \dot{\psi} r \wedge (z \cos \psi \vec{k} - z \sin \psi \vec{j}) dm = -\dot{\psi} [\cos \psi \vec{j} + \sin \psi \vec{k}] \int_{(m)} z dm$$

L'expression ① devient :

$$-\dot{\varphi} \left((\dot{z} + \dot{z}_c) \vec{h} + \dot{z}_c \dot{\theta} [\cos(\theta + \theta_c) \vec{j} + \sin(\theta + \theta_c) \vec{k}] - (z + z_c) \dot{\theta}_c [\cos \theta_c \vec{j} + \sin \theta_c \vec{k}] \right) \\ - \left(\frac{1}{2} m m r [\cos \varphi \vec{j} + \sin \varphi \vec{k}] \right)$$

on notera cette expression T_v

On a donc $T = \frac{1}{2} m m v_0^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 J_{m0} + T_v$

Donc l'énergie cinétique des quatre manivelles est :

$$T_m = 3 m m v_0^2 + 2(T_v + T_{v+\pi}) + 2 \dot{\varphi}^2 J_{m0}$$

or $T_v + T_{v+\pi} = 0$

$$T_m = 2 \dot{\varphi}^2 J_{m0} + 2 m m \left[((\dot{z} + \dot{z}_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{z}_c \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c))^2 \right. \\ \left. + (z_c \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \cos \theta_c)^2 \right]$$

7.4.7 ENERGIE CINETIQUE DU VOLANT MOTEUR

On prend le point O comme pôle, l'énergie cinétique du volant est :

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 J_{v0}$$

$$\text{or } \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm = \iint \dot{\varphi} r \wedge r (\cos \alpha \vec{k} - \sin \alpha \vec{j}) dm = -r \dot{\varphi} \iint (\cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k}) dm$$

$$dm = r \cdot e_j dr d\alpha \rightarrow m v = \pi R^2 e_j$$

$$\text{donc } \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm = -r \dot{\varphi} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^R r \cos \alpha e_j d\alpha dr \vec{j} + \int_0^{2\pi} \int_0^R r \sin \alpha e_j d\alpha dr \vec{k} \right) \\ = \vec{0}$$

$$\text{donc } T_v = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 J_{v0} + \frac{1}{2} m v \left[((\dot{z} + \dot{z}_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{z}_c \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c))^2 \right. \\ \left. + (z_c \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \cos \theta_c)^2 \right]$$

7.4.8 ENERGIE CINETIQUE DE LA BIELLE

On prend le point A comme pôle, l'énergie cinétique d'une bielle

s'écrit donc
$$T = \frac{1}{2} m_b V_A^2 + \vec{V}_A \cdot \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm + \frac{1}{2} \omega_{AB}^2 \int_{(m)} h^2 dm$$

$$\frac{1}{2} \omega_{AB}^2 \int_{(m)} h^2 dm = \frac{1}{2} \frac{k^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)} J_{bA} \quad \text{avec } J_{bA} = J_{bG} + m_b L^2$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_G + \vec{V}_{A/G} = (\dot{z} + \dot{z}_G + z_G \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_G) - (z + z_G) \dot{\theta}_G \sin \theta_G - r \dot{\varphi} \sin \varphi) \vec{k} + (z_G \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_G) - (z + z_G) \dot{\theta}_G \cos \theta_G - r \dot{\varphi} \cos \varphi) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_A \cdot \int_{(m)} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dm &= \vec{V}_A \cdot \int_{(m)} \frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} x \wedge (x \cos \beta \vec{k} + x \sin \beta \vec{j}) dm \\ &= \frac{-k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \vec{V}_A \cdot \int_{(m)} x \wedge (x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \vec{k} + x k \sin \varphi \vec{j}) dm \\ &= \frac{k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \vec{V}_A \cdot \left[\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \vec{j} - k \sin \varphi \vec{k} \right] \int_{(m)} x dm \\ &= \frac{1}{2} m_b L \frac{k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \left[(z_G \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_G) - r \dot{\varphi} \cos \varphi - (z + z_G) \dot{\theta}_G \cos \theta_G) \right. \\ &\quad \left. \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - k \sin \varphi (\dot{z} + \dot{z}_G + z_G \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_G) - r \dot{\varphi} \sin \varphi - (z + z_G) \dot{\theta}_G \sin \theta_G) \right] \end{aligned}$$

Et en tenant compte de $T_{\varphi+\pi}$, ($T_b = 2(T_{\varphi} + T_{\varphi+\pi})$).

$$\begin{aligned} \text{on a } T_b &= 2 \frac{k^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)} J_{bA} + m_b \left[(\dot{z} + \dot{z}_G + z_G \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_G) - (z + z_G) \dot{\theta}_G \sin \theta_G \right. \\ &\quad \left. - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (z_G \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_G) - (z + z_G) \dot{\theta}_G \cos \theta_G - r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 \right] \\ &\quad + m_b \left[(\dot{z} + \dot{z}_G + z_G \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_G) + r \dot{\varphi} \sin \varphi - (z + z_G) \dot{\theta}_G \sin \theta_G)^2 + \right. \\ &\quad \left. (z_G \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_G) + r \dot{\varphi} \cos \varphi - (z + z_G) \dot{\theta}_G \cos \theta_G)^2 \right] \\ &\quad - 2 m_b L \frac{k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \left(r \dot{\varphi} \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k \sin \varphi (\dot{z} + \dot{z}_G + \right. \\ &\quad \left. + z_G \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_G) - (z + z_G) \dot{\theta}_G \sin \theta_G) \right) \end{aligned}$$

7.4.9 ENERGIE CINETIQUE DU PISTON

Cette fois si on prend le point B comme pôle, donc $\vec{\omega} = \vec{0}$

car ω = vitesse de rotation des pistons autour du point B.

Et l'expression de l'énergie cinétique se réduit à: $T = \frac{1}{2} m p V_B^2$

\vec{V}_B = vitesse absolue du point B dans le plan ($y'z'$).

$$\vec{V}_B = \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - r \dot{\varphi} \sin \varphi \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \right] \vec{k} + \dot{\theta}_c \left[(z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right] \left[\cos(\theta + \theta_c) \vec{j} + \sin(\theta + \theta_c) \vec{k} \right] - \dot{\theta} \left[z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right] \left[\cos(\theta + \theta_c) \vec{j} + \sin(\theta + \theta_c) \vec{k} \right]$$

$$\vec{V}_B = \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - r \dot{\varphi} \sin \varphi \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c \left((z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) - \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \left(z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) \right] \vec{k} + \left[\dot{\theta}_c \cos \theta_c \left((z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) - \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \left(z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) \right] \vec{j}$$

$$T_p = m \left(\left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - r \dot{\varphi} \sin \varphi \left(1 + \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c \left((z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) - \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \left(z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) \right]^2 + \left[\dot{\theta}_c \cos \theta_c \left((z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) - \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \left(z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + r \cos \varphi) \right) \right]^2 \right) + m \left(\left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + r \dot{\varphi} \sin \varphi \left(1 - \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c \left((z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi) \right) - \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \left(z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi) \right) \right]^2 + \left[\dot{\theta}_c \cos \theta_c \left((z + z_c) + (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi) \right) - \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \left(z_c - (\ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - r \cos \varphi) \right) \right]^2 \right)$$

7.4.10 ENERGIE CINETIQUE DU BLOC VIDE

"Bloc vide" c'est à dire le moteur sans pistons, bielles et vilebrequin.

$$T_r = \frac{1}{2} M r V_0^2 + \frac{1}{2} J_{0'x'} \dot{\theta}^2$$

$$T_r = \frac{1}{2} M r \left[(\dot{z} + \dot{z}_c)^2 + (z + z_c)^2 \dot{\theta}_c^2 - 2(\dot{z} + \dot{z}_c)(z + z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] + \frac{1}{2} J_{0'x'} \dot{\theta}^2.$$

7.4.11 ENERGIE CINETIQUE DU SYSTEME

Après simplification des expressions partielles, l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 T = & 2 m_p \left[(\dot{z} + \dot{z}_0) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c (z + z_0) - \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) z_0 + \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left(\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{r \dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right]^2 + 2 m_p \left[\dot{\theta}_c \cos \theta_c (z + z_0) - \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) z_0 + \right. \\
 & \left. \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left(\dot{\theta}_c \cos \theta_c + \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \right) \right]^2 + 2 m_p \left[r^2 \cos^2 \varphi \left(\dot{\theta}_c^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\theta} \dot{\theta}_c \cos \theta \right) \right. \\
 & \left. + r^2 \varphi^2 \sin^2 \varphi - r^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi \left(\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right) \right] + \frac{1}{2} J_{Gx'} \dot{\theta}^2 \\
 & + \frac{1}{2} M r \left[(\dot{z} + \dot{z}_0)^2 + (z + z_0)^2 \dot{\theta}_c^2 - 2 (\dot{z} + \dot{z}_0)(z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] + \frac{1}{3} [J_{G0} + 4 J_{G0}] \dot{\varphi}^2 \\
 & + \frac{1}{2} [m v + 4 m m] \left[\left((\dot{z} + \dot{z}_0) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right)^2 + \left(z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (z + z_0) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right)^2 \right] + 2 \frac{k^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)} J_{Gx} + 2 m_b \left[\left((\dot{z} + \dot{z}_0) + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right)^2 + \left(z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right)^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right] \\
 & - 2 m_b L \frac{k \dot{\varphi} \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \left[r \dot{\varphi} \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + k \sin \varphi \left((\dot{z} + \dot{z}_0) + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right. \right. \\
 & \left. \left. - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right) \right] + \frac{1}{2} J_{Gy} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} [J_{Gy} + M (x_m^2 + z_c^2)] \dot{\varphi}_c^2 + \frac{1}{2} M v^2.
 \end{aligned}$$

7.4.12 DERIVEES DE L'ENERGIE CINETIQUE PAR RAPPORT AUX COORDONNEES GENERALISEES

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial z} = & 4 m_p \dot{\theta}_c \sin \theta_c \left[(\dot{z} + \dot{z}_0) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c (z + z_0) - z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) - \frac{r \dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \right. \\
 & \left. + \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left(\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right) \right] + 4 m_p \dot{\theta}_c \cos \theta_c \left[\dot{\theta}_c \cos \theta_c (z + z_0) \right. \\
 & \left. - z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) + \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \left(\dot{\theta}_c \cos \theta_c + \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \right) \right] + M r \dot{\theta}_c^2 (z + z_0) \\
 & - M r (\dot{z} + \dot{z}_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c - M v \dot{\theta}_c \sin \theta_c \left[(\dot{z} + \dot{z}_0) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right] \\
 & - M v \dot{\theta}_c \cos \theta_c \left[z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] - 4 m_b \dot{\theta}_c \sin \theta_c \left[(\dot{z} + \dot{z}_0) + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right. \\
 & \left. - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] - 4 m_b \dot{\theta}_c \cos \theta_c \left[z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ 2 m_b L \frac{k^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \dot{\theta}_c \sin \theta_c .$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} = & 4 m_p \left[\ell \dot{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cos(\theta + \theta_c) - z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \right] \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + \dot{\theta}_c (z + z_0) \sin \theta_c \right. \\ & \left. - z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) + \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c)) - \frac{r \dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \\ & + 4 m_p \left[z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) - \ell \dot{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \sin(\theta + \theta_c) \right] \left[\dot{\theta}_c \cos \theta_c (z + z_0) - z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \right. \\ & \left. + \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c \cos \theta_c + \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c)) \right] - 4 m_p r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\theta}_c \sin \theta) \\ & - 2 m_p r^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) + M_v z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right. \\ & \left. + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right] - M_v z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \left[z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] \\ & + 4 m_b z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] \\ & - 4 m_b z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \left[z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] \\ & - m_b L k^2 \frac{\dot{\varphi} \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) . \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

7.4.13 DERIVEES DE L'ENERGIE CINETIQUE PAR RAPPORT AUX VITESSES

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = & 4 m_p \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c (z + z_0) - \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) z_0 + \ell \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right. \\ & \left. + \dot{\theta}_c \sin \theta_c) - \frac{r \dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] + M_r (\dot{z} + \dot{z}_c) - M_r (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \\ & + M_v \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right] - m_b \frac{L k^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ & + 4 m_b \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + z_0 \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) - (z + z_0) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{gy} \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \theta} = & 4m_p \left[\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \sin(\theta+\theta_c) - \sin(\theta+\theta_c) z_c \right] \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + (z+z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c - \dot{\theta} z_c \sin(\theta+\theta_c) \right. \\
& + \ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta+\theta_c)) - \frac{r \dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \left. \right] + 4m_p \left[-z_c \cos(\theta+\theta_c) \right. \\
& + \ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cos(\theta+\theta_c) \left. \right] \left[\dot{\theta}_c (z+z_c) \cos \theta_c - z_c \dot{\theta} \cos(\theta+\theta_c) + \ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c \cos \theta_c \right. \\
& + \dot{\theta} \cos(\theta+\theta_c)) \left. \right] + 4m_p r^2 \cos^2 \varphi (\theta+\theta_c \cos \theta_c) - 2m_p r^2 \varphi \sin 2\varphi (\sin(\theta+\theta_c)) \\
& + J_G' \dot{\theta} + M_v z_c \sin(\theta+\theta_c) \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - (z+z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c + z_c \dot{\theta} \sin(\theta+\theta_c) \right] \\
& + M_v z_c \cos(\theta+\theta_c) \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + z_c \dot{\theta} \sin(\theta+\theta_c) - (z+z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] \\
& + 4m_b z_c \cos(\theta+\theta_c) \left[z_c \dot{\theta} \cos(\theta+\theta_c) - (z+z_c) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] \\
& - m_b L z_c \frac{k^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \sin(\theta+\theta_c) .
\end{aligned}$$

7.4.14 DERIVEES PAR RAPPORT AU TEMPS

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = & 4m_p \left[(\ddot{z} + \ddot{z}_c) + \ddot{\theta}_c \sin \theta_c (z+z_c) + \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c (z+z_c) - \ddot{\theta} z_c \sin(\theta+\theta_c) \right. \\
& - \dot{\theta}^2 z_c \cos(\theta+\theta_c) + L \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \ddot{\theta}_c \sin \theta_c + L \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c \\
& + L \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \ddot{\theta} \sin(\theta+\theta_c) + L \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \dot{\theta}^2 \cos(\theta+\theta_c) \\
& - \frac{L \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta+\theta_c)) \\
& \left. - \frac{r}{z} \left[\frac{(k \dot{\varphi} \sin 2\varphi + 2k \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi)(1-k^2 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} k^3 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right] \right] \\
& + M_r (\ddot{z} + \ddot{z}_c) - M_r (z+z_c) \ddot{\theta}_c \sin \theta_c - M_r (z+z_c) \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c - M_r \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c \\
& + M_v \left[(\ddot{z} + \ddot{z}_c) - \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c - \ddot{\theta}_c (z+z_c) \sin \theta_c - \dot{\theta}^2 (z+z_c) \cos \theta_c + z_c \ddot{\theta} \sin(\theta+\theta_c) \right. \\
& + z_c \dot{\theta}^2 \cos(\theta+\theta_c) \left. \right] + 4m_b \left[(\ddot{z} + \ddot{z}_c) + z_c \ddot{\theta} \sin(\theta+\theta_c) + z_c \dot{\theta}^2 \cos(\theta+\theta_c) \right. \\
& \left. - (z+z_c) \ddot{\theta}_c \sin \theta_c - (z+z_c) \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c - \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] \\
& - m_b L k \left[\frac{(k \dot{\varphi} \sin 2\varphi + 2k \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi)(1-k^2 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} k^3 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_G \ddot{\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = & 4 m_p \left[-(\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c) \dot{z}_c + l (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right. \\
& \left. - l \sin(\theta + \theta_c) \frac{\dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + \dot{\theta}_c \sin \theta_c (z + z_c) - \dot{\theta} z_c \sin(\theta + \theta_c) \right. \\
& \left. + l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c)) - r \frac{\dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \\
& + 4 m_p \left[\sin(\theta + \theta_c) (l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - z_c) \right] \left[(\ddot{z} + \ddot{z}_c) + \ddot{\theta} \sin \theta_c (z + z_c) \right. \\
& \left. + \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c (z + z_c) + \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c - z_c \ddot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) - z_c \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c) \right. \\
& \left. - \frac{\dot{\theta} \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} (\dot{\theta}_c \sin \theta_c + \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c)) + l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c \right. \\
& \left. + \dot{\theta}_c \sin \theta_c + \ddot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) + \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c)) - \frac{r \dot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right. \\
& \left. - \frac{r \dot{\varphi}^2 k \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{r \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \right] + 4 m_p \left[z_c (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c) \right. \\
& \left. - l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c) - l \cos(\theta + \theta_c) \frac{\dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \left[\right. \\
& \left. \dot{\theta}_c \cos \theta_c (z + z_c) - \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) z_c + l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\dot{\theta}_c \cos \theta_c + \right. \\
& \left. + \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c)) \right] + 4 m_p \left[-z_c \cos(\theta + \theta_c) + l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \cos(\theta + \theta_c) \right] \left[\right. \\
& \left. \ddot{\theta}_c \cos \theta_c (z + z_c) - \dot{\theta}_c^2 \sin \theta_c (z + z_c) + \dot{z} \dot{\theta}_c \cos \theta_c - \ddot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) z_c \right. \\
& \left. + \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c) z_c + l \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} (\ddot{\theta}_c \cos \theta_c - \dot{\theta}_c^2 \sin \theta_c \right. \\
& \left. + \ddot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c)) \right] - 4 m_p r^2 \sin 2\varphi \dot{\varphi} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c \cos \theta) \\
& + 4 m_p r^2 \cos^2 \varphi (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_c \cos \theta_c - \dot{\theta}_c^2 \sin \theta_c) - 2 m_p r^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi \sin(\theta + \theta_c) \\
& - 4 m_p r^2 \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi \sin(\theta + \theta_c) - 2 m_p r^2 \dot{\varphi} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin 2\varphi \cos(\theta + \theta_c) \\
& + J_c \dot{\theta} + M v z_c (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c) \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right. \\
& \left. + z_c \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) \right] + M v z_c \sin(\theta + \theta_c) \left[(\ddot{z} + \ddot{z}_c) - (z + z_c) \ddot{\theta}_c \sin \theta_c \right. \\
& \left. - (z + z_c) \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c - \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c + z_c \ddot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) + z_c \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c) \right] \\
& - M v z_c (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c) \left[z_c \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] \\
& + M v z_c \cos(\theta + \theta_c) \left[z_c \ddot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - z_c \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c) \right. \\
& \left. - (z + z_c) \ddot{\theta}_c \cos \theta_c + (z + z_c) \dot{\theta}_c^2 \sin \theta_c - \dot{z} \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] + 4 m_b (z_c (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \\
& \cos(\theta + \theta_c) \left[(\dot{z} + \dot{z}_c) + z_c \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \sin \theta_c \right] .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4m_b z_0 \sin(\theta + \theta_c) \left[(\ddot{z} + \ddot{z}_c) + z_0 \ddot{\theta} \sin(\theta + \theta_c) + z_0 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c) \right. \\
& - (z + z_c) \ddot{\theta}_c \sin \theta_c - \dot{z} \dot{\theta}_c \sin \theta_c - (z + z_c) \dot{\theta}_c^2 \cos \theta_c \left. \right] - 4m_b (z_0 (\ddot{\theta} + \ddot{\theta}_c) \\
& \sin(\theta + \theta_c)) \left[z_0 \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \right] + 4m_b z_0 \cos(\theta + \theta_c) \left[\right. \\
& z_0 \ddot{\theta} \cos(\theta + \theta_c) - z_0 \dot{\theta} (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \sin(\theta + \theta_c) - (z + z_c) \dot{\theta}_c \cos \theta_c \\
& \left. - \dot{z} \dot{\theta}_c \cos \theta_c + (z + z_c) \dot{\theta}_c^2 \sin \theta_c \right] - \frac{m_b L \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} z_0 \sin(\theta + \theta_c) \\
& - \frac{2m_b L \dot{\varphi}^2 k^2 \cos 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} z_0 \sin(\theta + \theta_c) + \frac{m_b L \dot{\varphi} k^3 \sin 2\varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} z_0 \sin(\theta + \theta_c) \\
& - \frac{m_b L k^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} z_0 (\dot{\theta} + \dot{\theta}_c) \cos(\theta + \theta_c).
\end{aligned}$$

7.5 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU MOUVEMENT

Comme on a considéré le système à trois degrés de liberté, on va avoir trois équations de Lagrange.

Ces équations sont des équations différentielles du second ordre contenant les trois coordonnées généralisées.

On a donc un système d'équations différentielles du second ordre

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = Q_z - \frac{\partial D}{\partial z} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta - \frac{\partial D}{\partial \theta} \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi - \frac{\partial D}{\partial \varphi}
\end{cases}$$

Ce système est trop long à écrire, on va donc écrire les équations du mouvement dans des cas particuliers, et les résoudre dans d'autres.

8. EQUATIONS DU MOUVEMENT DANS DES CAS PARTICULIERS

8.1 CHASSIS IMMOBILE

8.1.1 $\theta=0, \varphi=0, (Z)$

L'équation du mouvement se réduit dans ce cas, et devient :

$$\ddot{z} + \frac{4d_v}{M} \dot{z} - \frac{4k_1}{M} z - \frac{4k_2}{M} z^2 - \frac{4k_0}{M} z^3 = -\|g\| + \frac{(2m_p r + m_b L k)}{M} \left(\frac{k^3 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi}{2(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \frac{(k \ddot{\varphi} \sin 2\varphi + 2k \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi)}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right)$$

Dans le cas où on suppose la caractéristique linéaire, on pose $k_2 = k_3 = 0$, et on remplace k_1 par la pente tirée du graphe.

8.1.2 $\theta=0, Z=0, (\varphi)$

L'équation du mouvement devient dans ce cas :

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{J_{\text{oy}}} [2d_v (e_1^2 + e_2^2) + 4d_h k^2] \dot{\varphi} - [2k_1 (e_1^2 + e_2^2) + 4k_h k^2] \varphi - 2k_2 (e_1^3 - e_2^3) \varphi^2 - 2k_3 (e_1^4 + e_2^4) \varphi^3 = 0$$

8.1.3 $Z=0, \varphi=0, (\theta)$

L'équation du mouvement devient dans ce cas :

$$\begin{aligned} & \left[4m_p (l \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) z_0 + 4m_p (l \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) \left(l \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cos^2 \theta - \frac{2l \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2} \sin \theta \right) \right. \\ & \left. + J_{\text{e}'\text{e}'} + 4m_p r^2 \cos^2 \varphi + M_v z_0^2 + 4m_b z_0^2 \right] \ddot{\theta} - \left[4m_p \sin \theta \cos \theta (l \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) (-2z_0 \right. \\ & \left. + 3l \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{2 \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2 \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \dot{\theta}^2 + \left[2m_p \frac{l k^2 z_0 \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \sin \theta - 2m_p l^2 k^2 \sin 2\varphi \sin^2 \theta \right. \\ & \left. - 2m_p \frac{2 \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (l \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) \sin^2 \theta - 4m_p r^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi (1 + \cos \theta) \right. \\ & \left. - 2m_p \frac{2 \dot{\varphi} k^2 z_0 \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \cos \theta \right] \dot{\theta} + [2d_v (d_1^2 + d_2^2) + 4d_h k^2] \dot{\theta} - [2k_1 (d_1^2 + d_2^2) + 4k_h k^2] \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2k_2(d_1^3 - d_2^3)\theta^2 - 2k_2(d_1^4 + d_2^4)\theta^3 &= \left[\frac{r\dot{\varphi}k\sin 2\varphi}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \frac{r\dot{\varphi}^2k\cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r\dot{\varphi}k^2\sin 2\varphi}{2(1-k^2\sin^2\varphi)} \right] (l\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - z_0) 4m_p \sin\theta + 2m_p r^2 \dot{\varphi} \sin 2\varphi \sin\theta \\
 &\quad + 4m_p r^2 \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi \sin\theta - m_p \frac{lk^3\dot{\varphi}\sin^2 2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)} \sin\theta + m_b \frac{lk^2\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} (z_0 \ddot{\varphi} \sin\theta) \\
 &\quad + 2m_b \frac{lk^2\cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} (\dot{\varphi}^2 z_0 \sin\theta) - m_b \frac{lk^3\dot{\varphi}\sin 2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}} z_0 \sin\theta.
 \end{aligned}$$

8.1.4 (Z), (\theta), (\varphi)

On va écrire le système d'équations différentielles, toujours dans le cas du châssis immobile, mais en supposant les trois degrés de liberté.

$$\begin{aligned}
 \bullet M \ddot{z} + (4m_b + M_v - 4m_p + 4m_p \frac{l}{z_0} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}) z_0 \sin\theta \ddot{\theta} - M_v z \ddot{\theta}^2 - M_v z_0 \ddot{\theta}^2 \\
 + (4m_b + M_v - 4m_p + 4m_p \frac{l}{z_0} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}) z_0 \cos\theta \dot{\theta}^2 - 2m_p \frac{lk^2\dot{\varphi}\sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \sin\theta \dot{\theta} \\
 + \alpha_v [4\dot{z} + 2(d_1 - d_2)\dot{\theta} + 2(l_1 - l_2)\dot{\varphi}] \\
 - k_2 [(z + d_1\theta - l_1\varphi)^3 + (z + d_1\theta + l_2\varphi)^3 + (z - d_2\theta - l_1\varphi)^3 + (z - d_2\theta + l_2\varphi)^3] \\
 - k_2 [(z + d_1\theta - l_1\varphi)^2 + (z + d_1\theta + l_2\varphi)^2 + (z - d_2\theta - l_1\varphi)^2 + (z - d_2\theta + l_2\varphi)^2] \\
 - k_1 [z + d_1\theta - l_1\varphi + z + d_1\theta + l_2\varphi + z - d_2\theta - l_1\varphi + z - d_2\theta + l_2\varphi] = -Mg \\
 + (2m_p r + m_b L k) \left(\frac{(k\dot{\varphi}\sin 2\varphi + 2k\dot{\varphi}^2\cos 2\varphi)(1-k^2\sin^2\varphi) + (1/2)k^3\dot{\varphi}^2\sin^2 2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet J_{Oy} \ddot{\varphi} + \alpha_v [2(l_2 - l_1)\dot{z} + (d_1 - d_2)(l_2 - l_1)\dot{\theta} + 2(l_1^2 + l_2^2)\dot{\varphi}] + \alpha_H (4k^2\dot{\varphi}) \\
 - k_2 [(z + d_1\theta + l_2\varphi)^3 l_2 + (z - d_2\theta + l_2\varphi)^3 l_2 - (z + d_1\theta - l_1\varphi)^3 l_1 - (z - d_2\theta - l_1\varphi)^3 l_1] \\
 - k_2 [(z + d_1\theta + l_2\varphi)^2 l_2 + (z - d_2\theta + l_2\varphi)^2 l_2 - (z + d_1\theta - l_1\varphi)^2 l_1 - (z - d_2\theta - l_1\varphi)^2 l_1] \\
 - k_1 [(z + d_1\theta + l_2\varphi) l_2 + (z - d_2\theta + l_2\varphi) l_2 - (z + d_1\theta - l_1\varphi) l_1 - (z - d_2\theta - l_1\varphi) l_1] \\
 - k_H (4k^2)\varphi = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[4m_p (\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) z_0 + 4m_p (\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) \left(\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \cos^2 \theta - \frac{2\ell \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \sin^2 \theta \right) + J_0 \ddot{x}' + 4m_p r^2 \cos^2 \varphi + Mv z_0^2 + 4m_b z_0^2 \right] \ddot{\theta} + \left[4m_p (\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} \right. \\
& \quad \left. - z_0) \sin \theta + Mv z_0 \sin \theta + 4m_b z_0 \sin \theta \right] \ddot{z} - \left[4m_p \sin \theta \cos \theta (\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) \right. \\
& \quad \left. 3\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - 2z_0 + \frac{\ell \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \dot{\theta}^2 + \left[2m_p \ell k^2 \frac{\sin \theta \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \dot{z} \\
& \quad + \left[2Mv z_0 \cos \theta + 8m_b z_0 \cos \theta + 4m_p \cos \theta (z_0 - \ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}) \right] \dot{\theta} \dot{z} \\
& \quad + \left[2m_p \frac{\ell k^2 z_0 \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \sin \theta - 2m_p \ell^2 k^2 \sin 2\varphi \sin^2 \theta - 4m_p r^2 \sin 2\varphi (1 + \cos \theta) \dot{\varphi} \right. \\
& \quad \left. - 2m_p \sin \theta (\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) \frac{\ell \dot{\varphi} k^2 \sin \theta \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - 2m_p \ell k^2 \dot{\varphi} \frac{\sin 2\varphi \cos \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} z_0 \right] \dot{\theta} \\
& \quad + \alpha_v \left[2(d_1 - d_2) \dot{z} + 2(d_1^2 + d_2^2) \dot{\theta} + (e_2 - e_1)(d_1 - d_2) \dot{\varphi} \right] + 4\alpha_h h^2 \dot{\theta} \\
& \quad - k_3 \left[(z + d_1 \theta - e_1 \varphi)^3 d_1 + (z + d_1 \theta + e_2 \varphi)^3 d_1 - (z - d_2 \theta - e_1 \varphi)^3 d_2 - (z - d_2 \theta + e_2 \varphi)^3 d_2 \right] \\
& \quad - k_2 \left[(z + d_1 \theta - e_1 \varphi)^2 d_1 + (z + d_1 \theta + e_2 \varphi)^2 d_1 - (z - d_2 \theta - e_1 \varphi)^2 d_2 - (z - d_2 \theta + e_2 \varphi)^2 d_2 \right] \\
& \quad - k_1 \left[(z + d_1 \theta - e_1 \varphi) d_1 + (z + d_1 \theta + e_2 \varphi) d_1 - (z - d_2 \theta - e_1 \varphi) d_2 - (z - d_2 \theta + e_2 \varphi) d_2 \right] \\
& \quad - 4k_h h^2 \theta = 4m_p \sin \theta (\ell \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - z_0) \left(\frac{r \ddot{\varphi} k \sin 2\varphi}{2\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} + \frac{r \dot{\varphi}^2 k \cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right. \\
& \quad \left. - \frac{r \dot{\varphi} k^2 \sin 2\varphi}{2(1-k^2 \sin^2 \varphi)} \right) + 2m_p r^2 \ddot{\varphi} \sin 2\varphi \sin \theta + 4m_p r^2 \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi \sin \theta - m_p \frac{\ell k^3 \dot{\varphi} \sin^2 2\varphi}{1-k^2 \sin^2 \varphi} \\
& \quad \sin \theta + 2m_b \frac{\ell k^2 \cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (\dot{\varphi}^2 z_0 \sin \theta) + m_b \frac{\ell k^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} (z_0 \ddot{\varphi} \sin \theta) \\
& \quad - m_b \ell \frac{\dot{\varphi} k^3 \sin 2\varphi \sin \theta}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} z_0.
\end{aligned}$$

8.2 CHASSIS MOBILE

8.2.1 $\theta=0$; $\varphi=0$; $\theta_c=0$; $\varphi_c=0$; (Z) ; (Z_c)

L'équation du mouvement est dans ce cas :

$$\begin{aligned}
M(\ddot{z} + \ddot{z}_c) + \alpha_v [4\ddot{z} - \ddot{z}_c - \ddot{z}_{2c} - \ddot{z}_{3c} - \ddot{z}_{4c}] - 4k_1 z - 4k_2 z^2 - 4k_3 z^3 = -11\bar{g} \\
+ \frac{(k \dot{\varphi} \sin 2\varphi + 2k \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi)(1-k^2 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} k^3 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} (2m_p r + m_b L h).
\end{aligned}$$

9 RESOLUTION DANS UN CAS PARTICULIER

On va faire la résolution du cas 8.1.1, c'est à dire le cas du châssis immobile et un mouvement relatif se réduisant à une translation suivant z seulement.

9.1 EQUATION DIFFERENTIELLE

L'équation différentielle du mouvement est :

$$\ddot{z} + \frac{4k_v}{M} \dot{z} - \frac{4k_1}{M} z - \frac{4k_2}{M} z^2 - \frac{4k_3}{M} z^3 = -\|g\| + \frac{2m_p r + m_b L h}{M} \left(\frac{h^3 \dot{\varphi}^2 \sin^2 2\varphi}{2(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} + \frac{h \ddot{\varphi} \sin 2\varphi + 2k \dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right).$$

On va résoudre cette équation dans le cas du régime établi, c'est à dire pour $n = 2300$ tr/mn et dans les deux cas de la caractéristique des plots (Lineaire, et non Lineaire).

Comme on a rien sur le matériau constituant ces plots, le coefficient d'amortissement est inconnu. On va donc faire varier ce coefficient, et voir l'influence de ces variations sur l'amplitude des vibrations.

9.2 RESOLUTION DE L'EQUATION

L'équation est de la forme :

$$\ddot{z} + A \dot{z} + B z + C z^2 + D z^3 = f(\varphi) = g(t)$$

Pour passer de la fonction $f(\varphi)$ à la fonction $g(t)$ on pose $\varphi = \omega t$ avec ω celui du régime permanent.

Pour la résolution on va utiliser une méthode numérique.

9.2.1 RESOLUTION NUMERIQUE

On va utiliser la méthode de Runge-Kutta pour la résolution de cette équation différentielle du second ordre.

L'équation est de la forme $\ddot{z} + A\dot{z} + Bz + Cz^2 + Dz^3 = g(t)$

z est le déplacement relatif par rapport à la position d'équilibre car on a simplifié le terme kz_0 avec Mg .

On pose $\dot{z} = u$ et $z = v$

on a le système :

$$\begin{cases} \dot{u} = F(u, v, t) \\ \dot{v} = G(u, v, t) \\ u(t_0) = 0 \text{ et } v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$F(u, v, t) = g(t) - Au - Bv - Cv^2 - Dv^3$$

$$G(u, v, t) = u$$

$$\text{et } \begin{cases} u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6} \Delta t (H_1 + 2H_2 + 2H_3 + H_4) \\ v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6} \Delta t (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{cases}$$

avec

$$H_1 = F(u_i, v_i, t_i)$$

$$L_1 = G(u_i, v_i, t_i)$$

$$H_2 = F\left(u_i + \frac{1}{2} \Delta t H_1, v_i + \frac{1}{2} \Delta t L_1, t_i + \frac{1}{2} \Delta t\right)$$

$$L_2 = G\left(u_i + \frac{1}{2} \Delta t H_1, v_i + \frac{1}{2} \Delta t L_1, t_i + \frac{1}{2} \Delta t\right)$$

$$H_3 = F\left(u_i + \frac{1}{2} \Delta t H_2, v_i + \frac{1}{2} \Delta t L_2, t_i + \frac{1}{2} \Delta t\right)$$

$$L_3 = G\left(u_i + \frac{1}{2} \Delta t H_2, v_i + \frac{1}{2} \Delta t L_2, t_i + \frac{1}{2} \Delta t\right)$$

$$H_4 = F(u_i + \Delta t H_3, v_i + \Delta t L_3, t_i + \Delta t)$$

$$L_4 = G(u_i + \Delta t H_3, v_i + \Delta t L_3, t_i + \Delta t)$$

L'équation différentielle s'écrit aussi: $\ddot{z} + 2J\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z + D\dot{z} + Cz^2 = g(t)$

c'est à dire que: $A = 2J\omega_0$; $B = \omega_0^2$

On va donc résoudre cette équation différentielle en changeant à chaque fois la valeur de J donc la valeur de A dans le programme.

$$g(t) = 6,605 \cdot 10^{-4} \left[\frac{14085,14 \cos(481,4 t) (1 - 0,0816 \sin^2(240t)) + 287,45 \sin^2(481,4 t)}{(1 - 0,0816 \sin^2(240t))} \right]$$

$$B = \omega_0^2 = \frac{-4k_1}{M} = 4913,8949$$

$$\omega_0 = 70,099.$$

Dans les cas de la caractéristique linéaire, on posera: $C = D = 0$

Dans les cas de la caractéristique non linéaire

$$C = \frac{-4k_2}{M} = 328979,97 \quad , \quad D = \frac{-4k_3}{M} = 37678729$$

Le programme de calcul traite trois valeurs de J à la fois dans les cas linéaire et non linéaire.

Par exemple pour $J=2$, $J=4$ et $J=10$

on ne change dans le programme que les cases.

$$\text{CASE}(1,1) = A_1 = 280,39672 \quad ; \quad \text{CASE}(2,1) = A_2 = 560,79344$$

$$\text{CASE}(3,1) = A_3 = 1401,9836 \quad , \quad \text{CASE}(1,3) = \text{CASE}(1,4) = 0$$

Dans le même programme, pour les cas de la caractéristique non linéaire.

$$\text{CASE}(4,1) = 280,39672 \quad ; \quad \text{CASE}(5,1) = 560,79344$$

$$\text{CASE}(6,1) = 1401,9836 \quad , \quad \text{CASE}(4,2) = 4913,8949$$

$$\text{CASE}(4,3) = 328979,97 \quad ; \quad \text{CASE}(4,4) = 37678729$$

```

REAL H(4),L(4),U(1000),V(1000),CASE(6,4),MAT(1000,7),DELTAT,T
*****
***** INITIALISATION DES VARIABLE *****
*****
PRINT *, ' INITIALISATION
DO 100 I=1,1000
U(I)=0.0
V(I)=0.0
DO 100 J=1,3
MAT(I,J)=0.0
00 CONTINUE
DO 110 I=1,4
H(I)=0.0
10 CONTINUE
CASE(1,1)=280.39672
CASE(1,2)=4913.8949
CASE(1,3)=0.0
CASE(1,4)=0.0
CASE(2,1)=560.79344
CASE(3,1)=1401.9836
CASE(4,1)=280.39672
CASE(4,2)=4913.8949
CASE(4,3)=328979.97
CASE(4,4)=37678729.0
CASE(5,1)=560.79344
CASE(6,1)=1401.9836
DO 120 I=2,4
CASE(2,I)=CASE(1,I)
CASE(3,I)=CASE(1,I)
CASE(5,I)=CASE(1,I)
CASE(6,I)=CASE(1,I)
20 CONTINUE
DELTAT=0.001
DO 300 KAS=1,6
T=0.0
U(1)=0.0
V(1)=0.0
L1=KAS+1
00 DO 200 I=1,999
MAT(I,L1)=V(I)
A=CASE(KAS,1)
B=CASE(KAS,2)
C=CASE(KAS,3)
D=CASE(KAS,4)
H(1)=PETITG(T)-A*U(I)-B*V(I)-C*(V(I)**2)-D*(V(I)**3)
L(1)=U(I)
A1=U(I)+0.5*DELTAT*H(1)
A2=V(I)+0.5*DELTAT*L(1)
T1=T+0.5*DELTAT
H(2)=PETITG(T1)-A*A1-B*A2-C*(A2**2)-D*(A2**3)
L(2)=A1
A1=U(I)+0.5*DELTAT*H(2)
A2=V(I)+0.5*DELTAT*L(2)
H(3)=PETITG(T1)-A*A1-B*A2-C*(A2**2)-D*(A2**3)
L(3)=A1

```

```

A1=U(I)+DELTAT*H(3)
A2=V(I)+DELTAT*L(3)
T1=T+DELTAT
H(4)=PETITG(T1)-A*A1-B*A2-C*(A2**2)-D*(A2**3)
L(4)=A1
K=I+1
U(K)=U(I)+0.16667*DELTAT*(H(1)+2*H(2)+2*H(3)+H(4))
V(K)=V(I)+0.16667*DELTAT*(L(1)+2*L(2)+2*L(3)+L(4))
PRINT *, 'U(K)=', U(K)
MAT(K,L1)=V(K)
T=T+DELTAT
MAT(K,1)=T
PRINT *, 'T = ', T
CONTINUE
CONTINUE
STOP
END
FUNCTION PETITG(T)
REAL SOM1,SOM2,SOM3
SOM1=1-0.0816*(SIN(240.855*T)**2)
SOM2=14085.14*COS(481.71*T)
SOM3=287.45*(SIN(481.71*T)**2)
PETITG=6.605E-04*((SOM2*SOM1+SOM3)/(SOM1**1.5))
RETURN
END

```

200
300

9.22 PRESENTATION DES RESULTATS

Le programme de calcul (en FORTRAN IV), a été fait de sorte que les résultats soient donnés sous forme d'un tableau.

Comme l'excitation est périodique, la réponse l'est aussi. Et puisque c'est l'amplitude de ces vibrations qui nous intéresse, on prendra juste les points d'un intervalle plus grand que la période de reproduction du phénomène dans le temps.

9.23 TRACE DES COURBES

On a trouvé des difficultés pour faire le tracé sur VAX...

On était obligés de le faire sur OLIVETTI.

On a donc élaboré un autre petit programme en BASIC cette fois et pour chaque valeur de T on relève un tableau de valeurs pour le cas linéaire et un autre pour le cas non linéaire.

Chaque tableau a été introduit valeur par valeur dans le micro pour pouvoir tracer ces courbes.

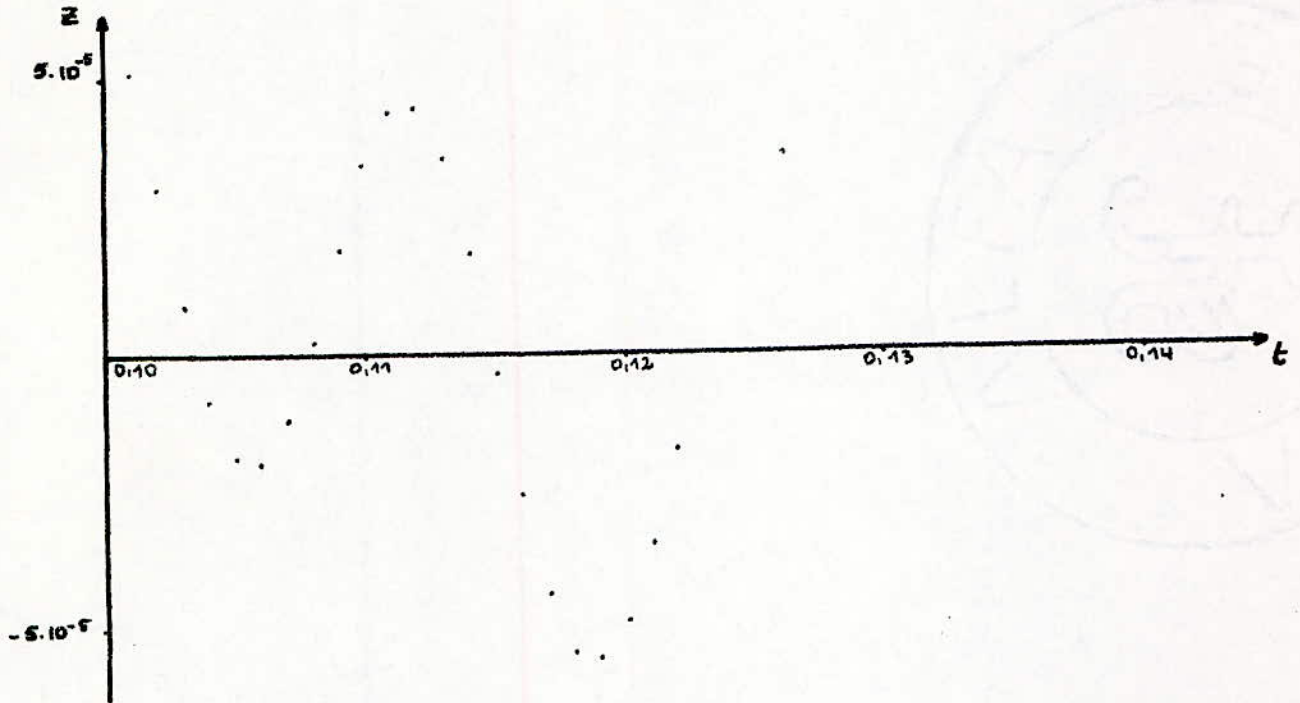
9.24 PROGRAMME DU TRACE

voir page suivante.

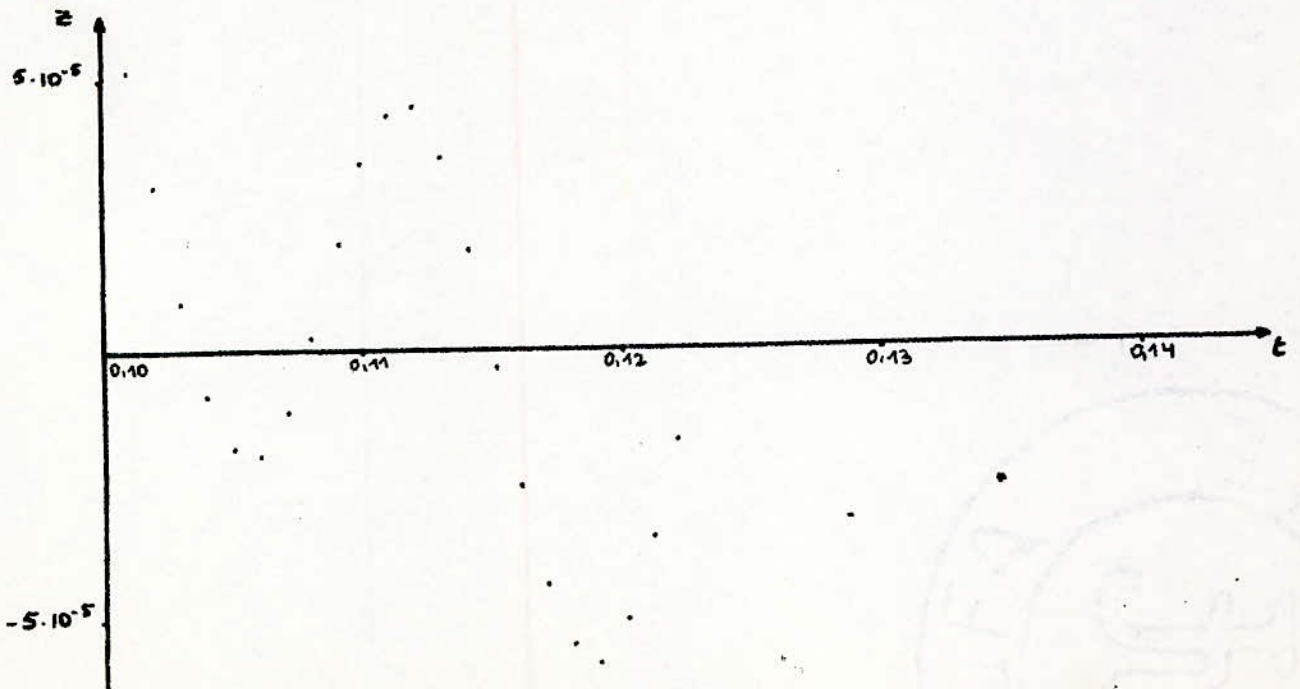
```
10 CLS
20 KEY OFF
30 DIM F(20)
35 FOR I=1 TO 20
40 PRINT "F( ";I; ")="; INPUT F(I)
45 NEXT I
48 CLS
50 SCREEN 3
60 VIEW (30,30)-(620,380)
70 WINDOW (0,-.0001)-(60,.0001)
80 FOR I=1 TO 20
90 PSET (I,F(I))
100 NEXT I
110 'FOR I=1 TO 59
120 'LINE (I,F(I))-(I+1,F(I+1))
130 'NEXT I
140 LINE (0,-.0001)-(0,.0001)
150 LINE (0,0)-(60,0)
```

$$\tau = 0$$

cas de La caractéristique Lineaire .

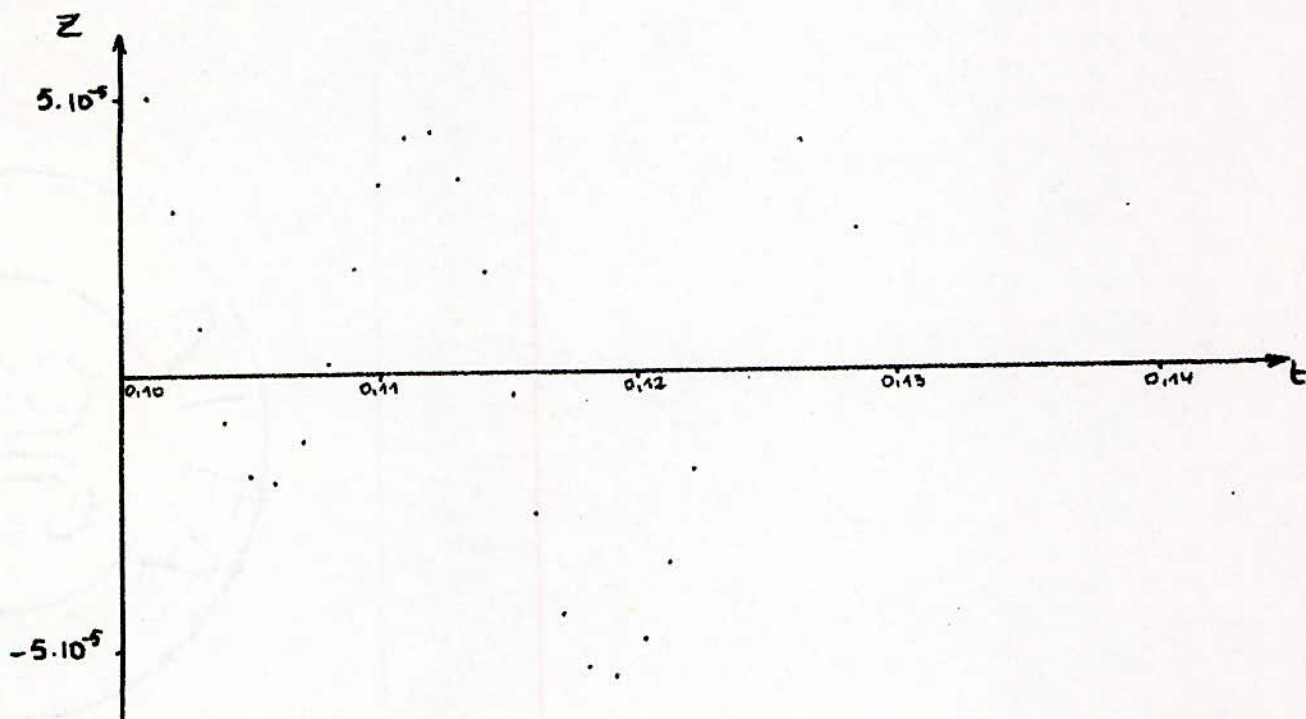


cas de La caractéristique non Lineaire .

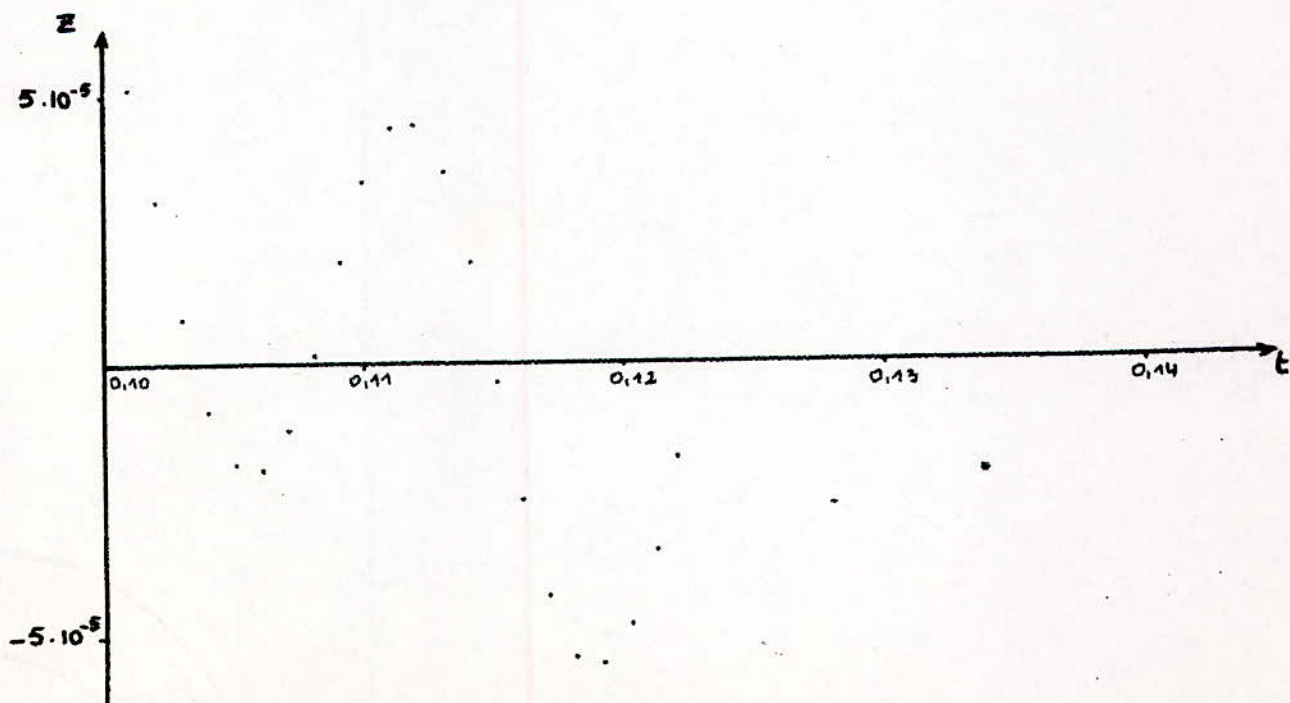


$$\tau = 0,001$$

cas de la caractéristique linéaire

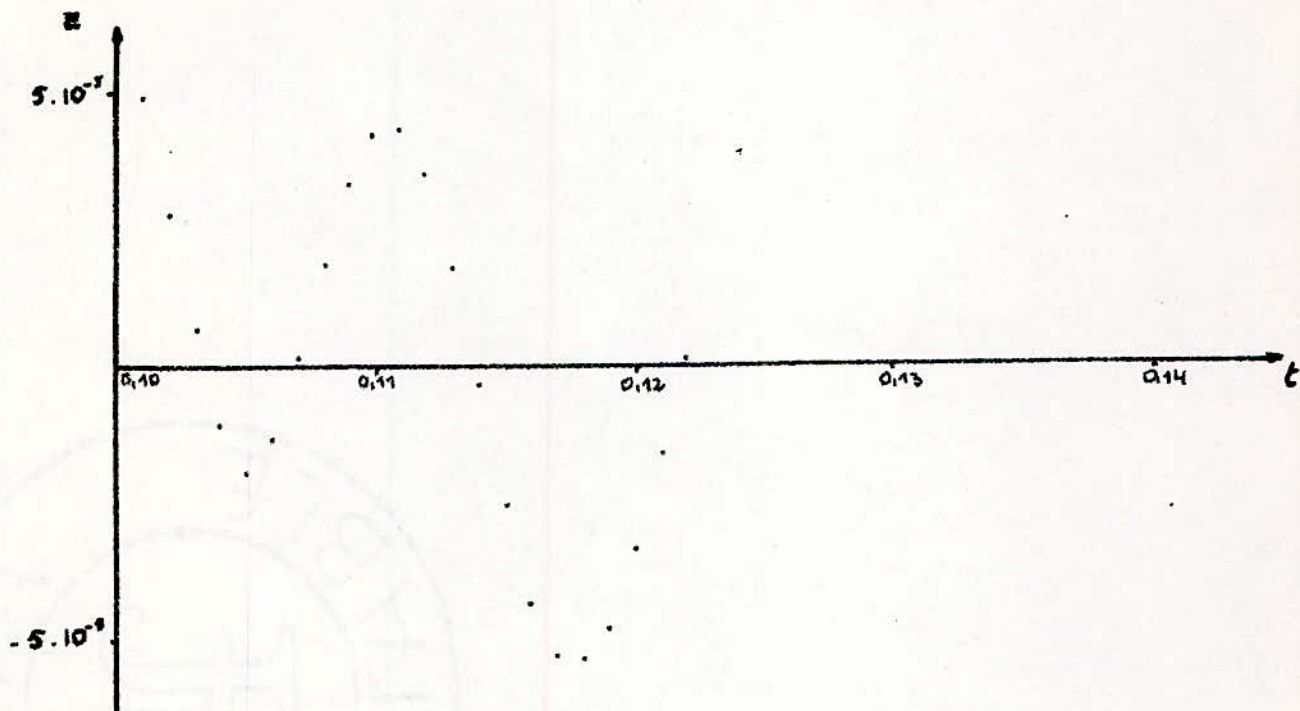


cas de la caractéristique non linéaire.

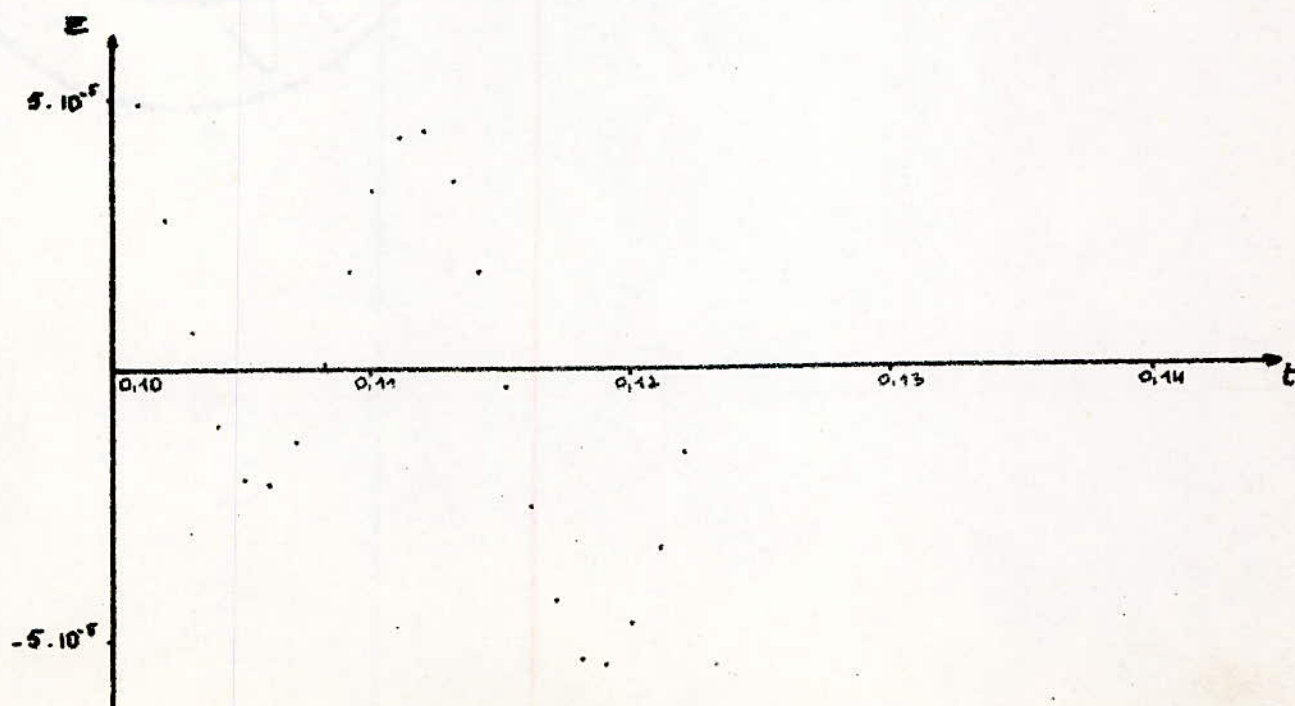


$$f = 0.01$$

cas de la caractéristique linéaire.

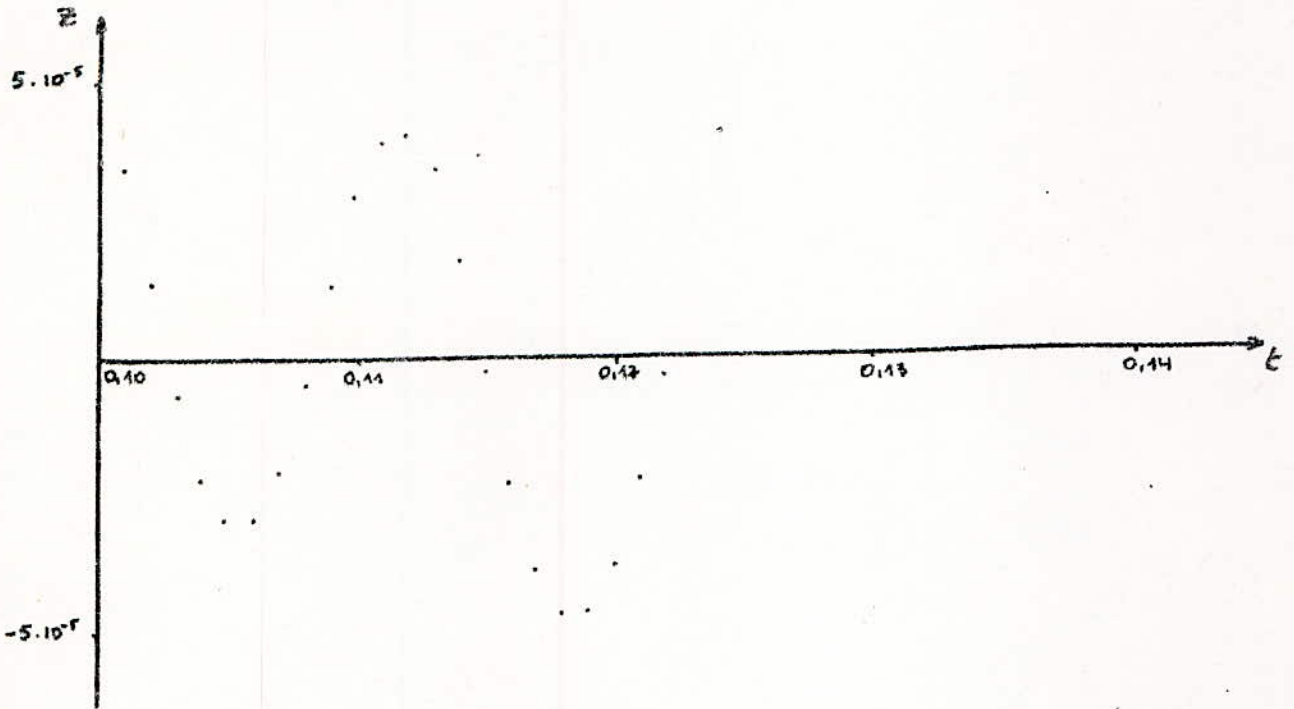


cas de la caractéristique non linéaire:

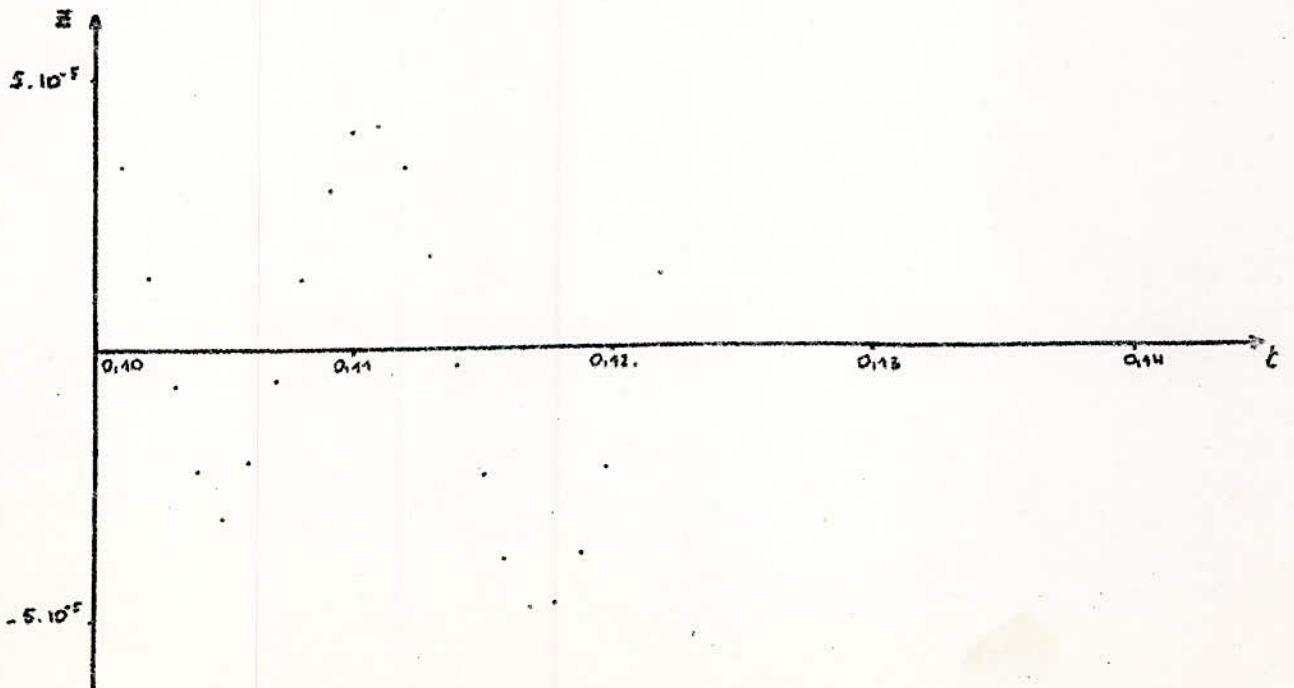


$$f = 0.1$$

cas de la caractéristique linéaire

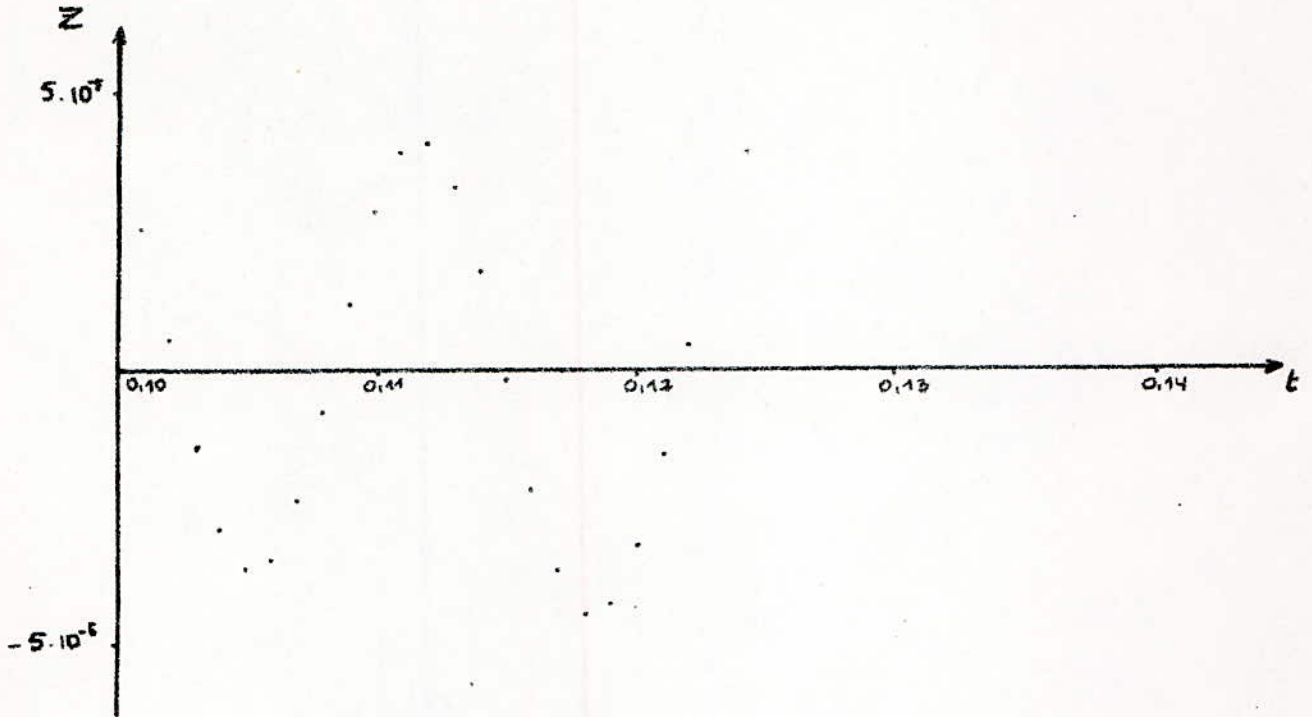


cas de la caractéristique non linéaire.

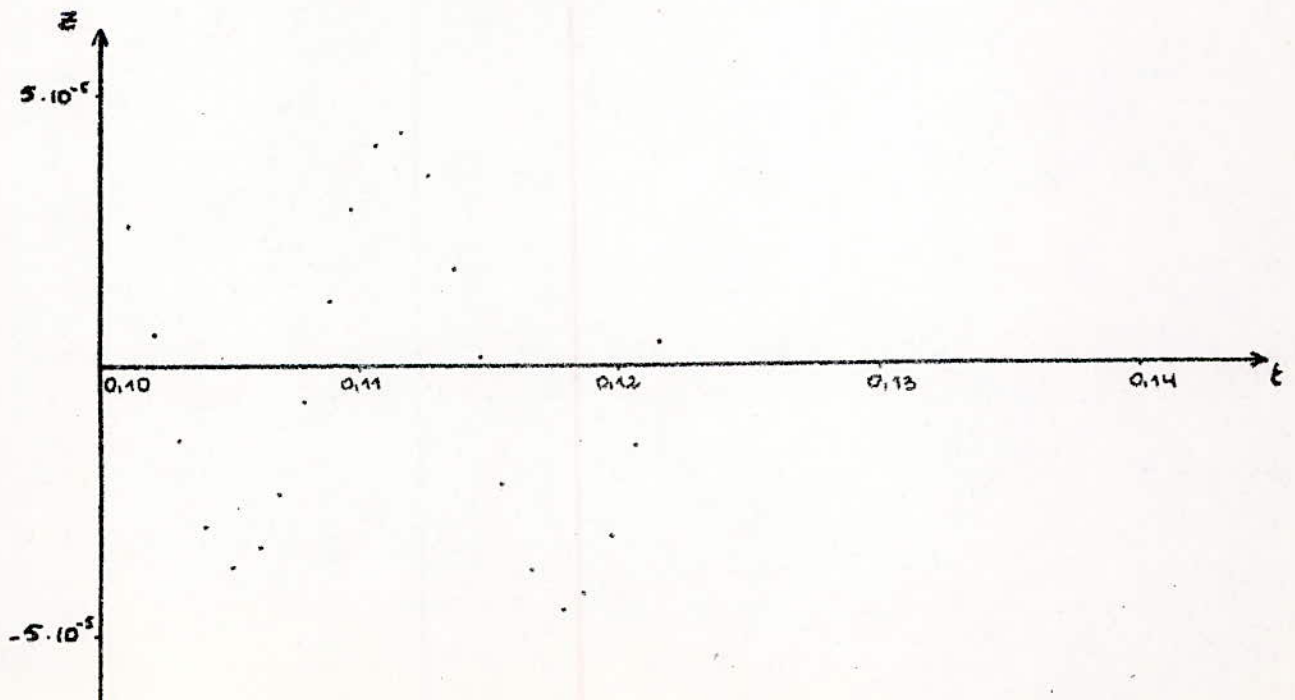


$$\tau = 0.2$$

cas de la caractéristique linéaire

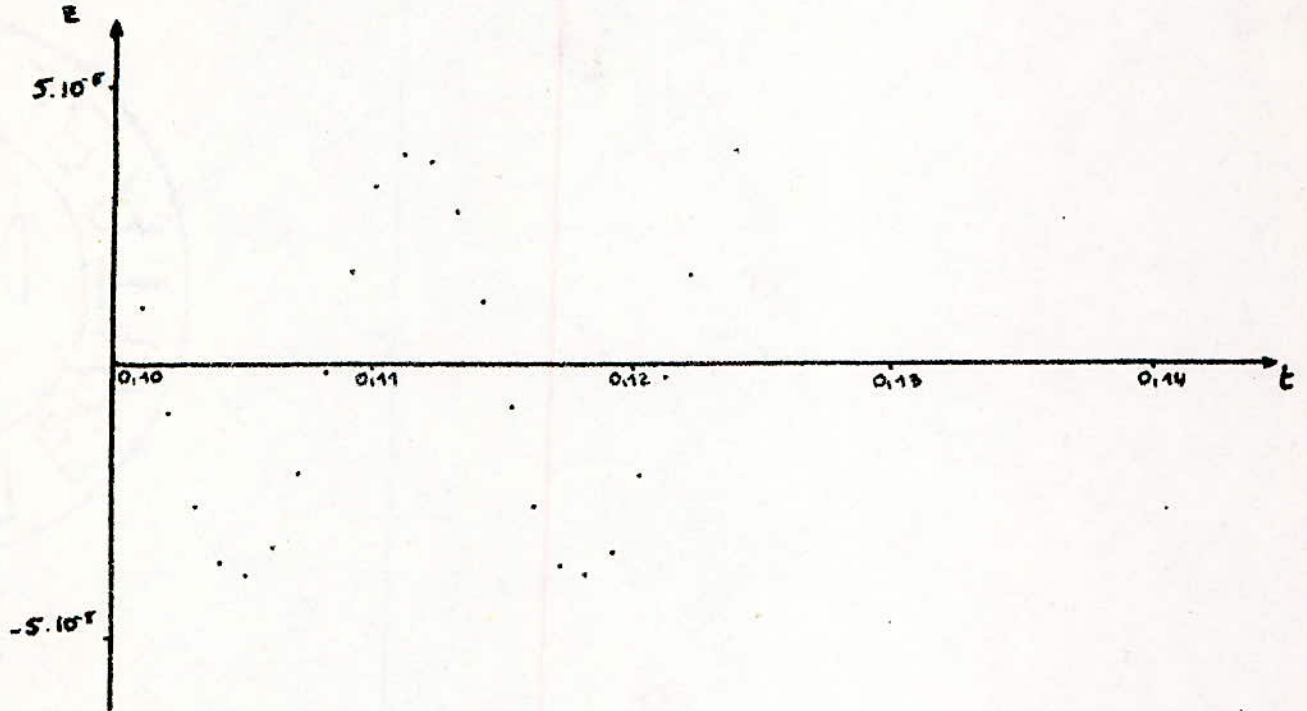


cas de la caractéristique non linéaire

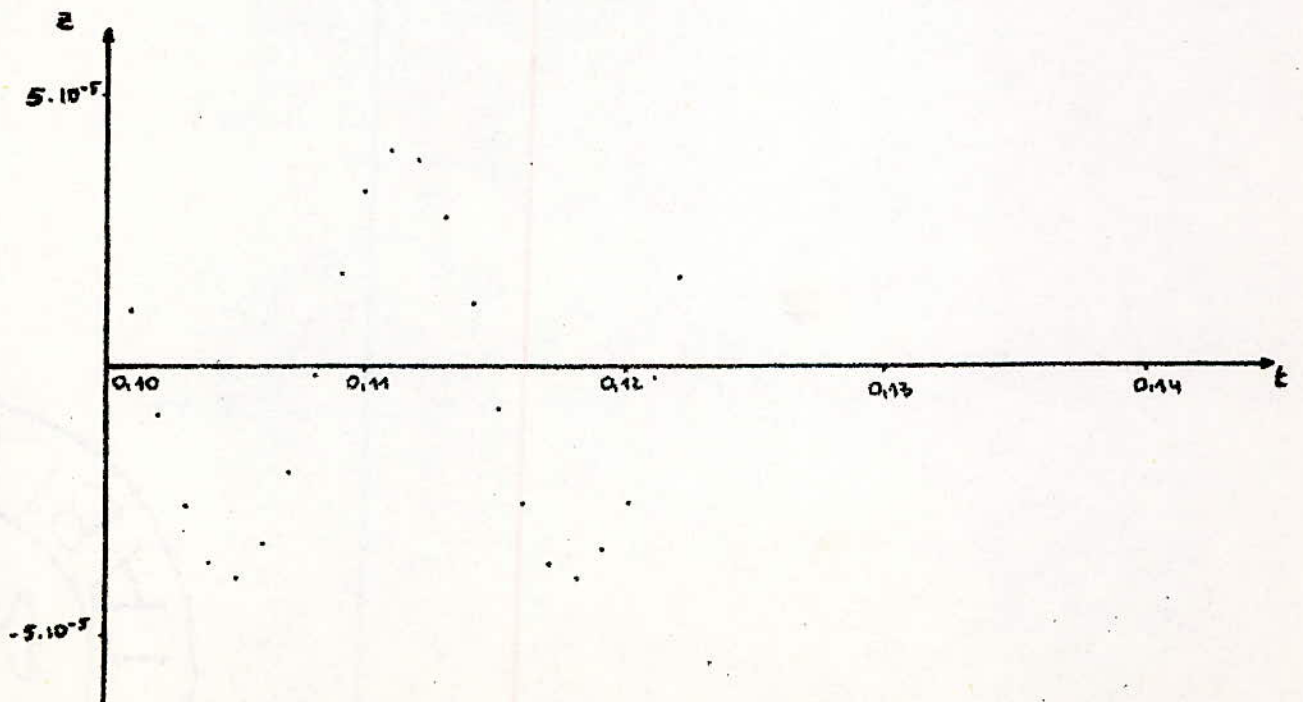


$$f = 0.9$$

cas de la caractéristique linéaire.

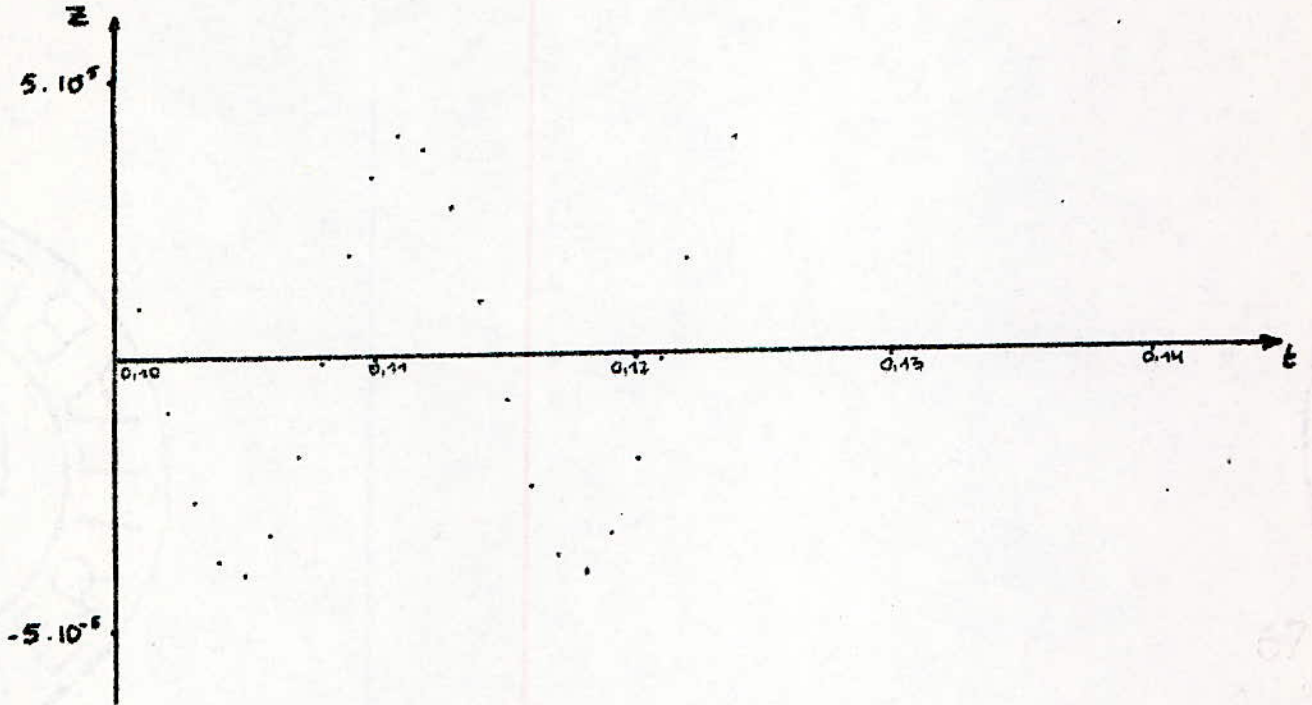


cas de la caractéristique non linéaire.

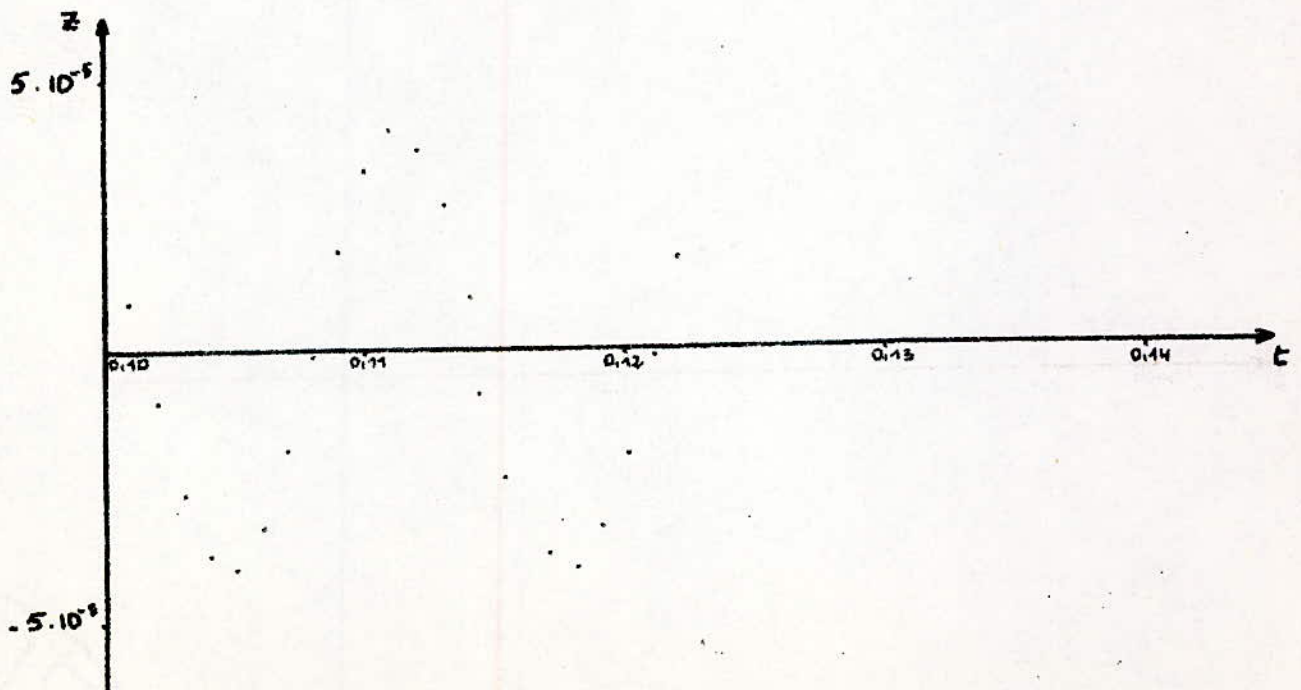


$$f = 1$$

cas de la caractéristique linéaire

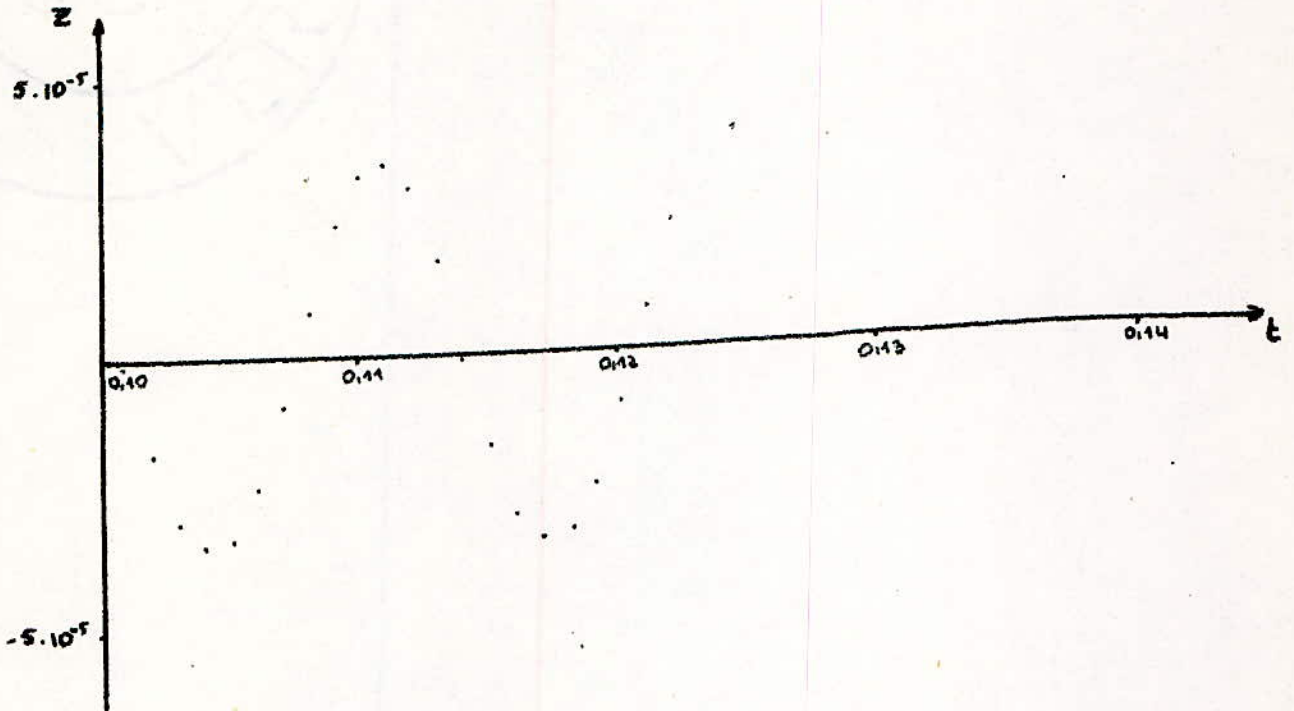


cas de la caractéristique non linéaire.

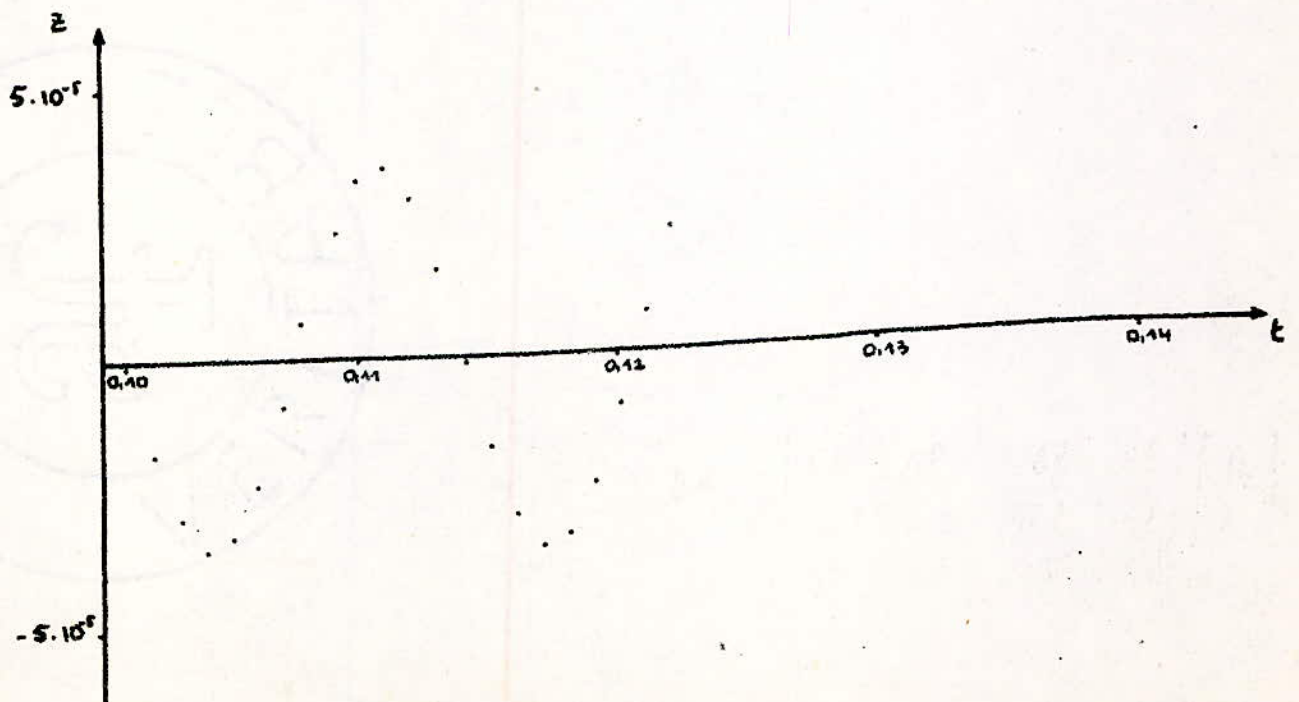


$$f = 2$$

cas de la caractéristique linéaire

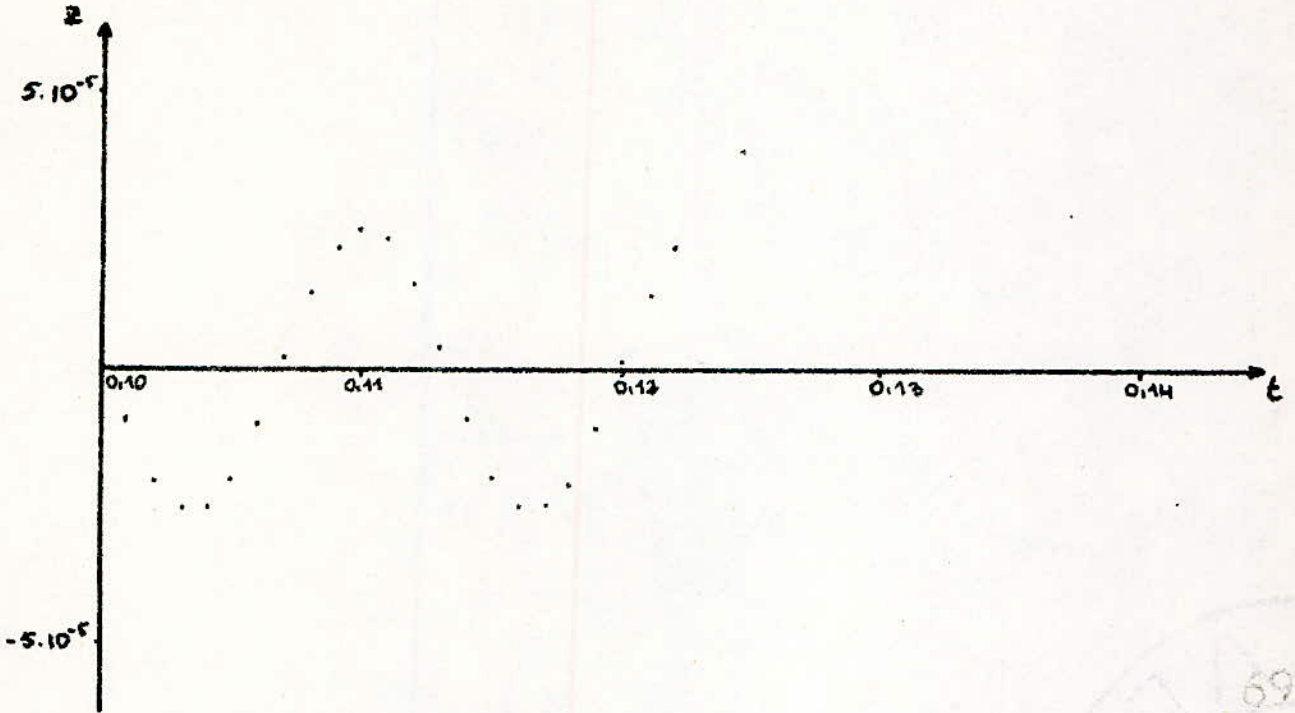


cas de la caractéristique non linéaire.



$$f = 4$$

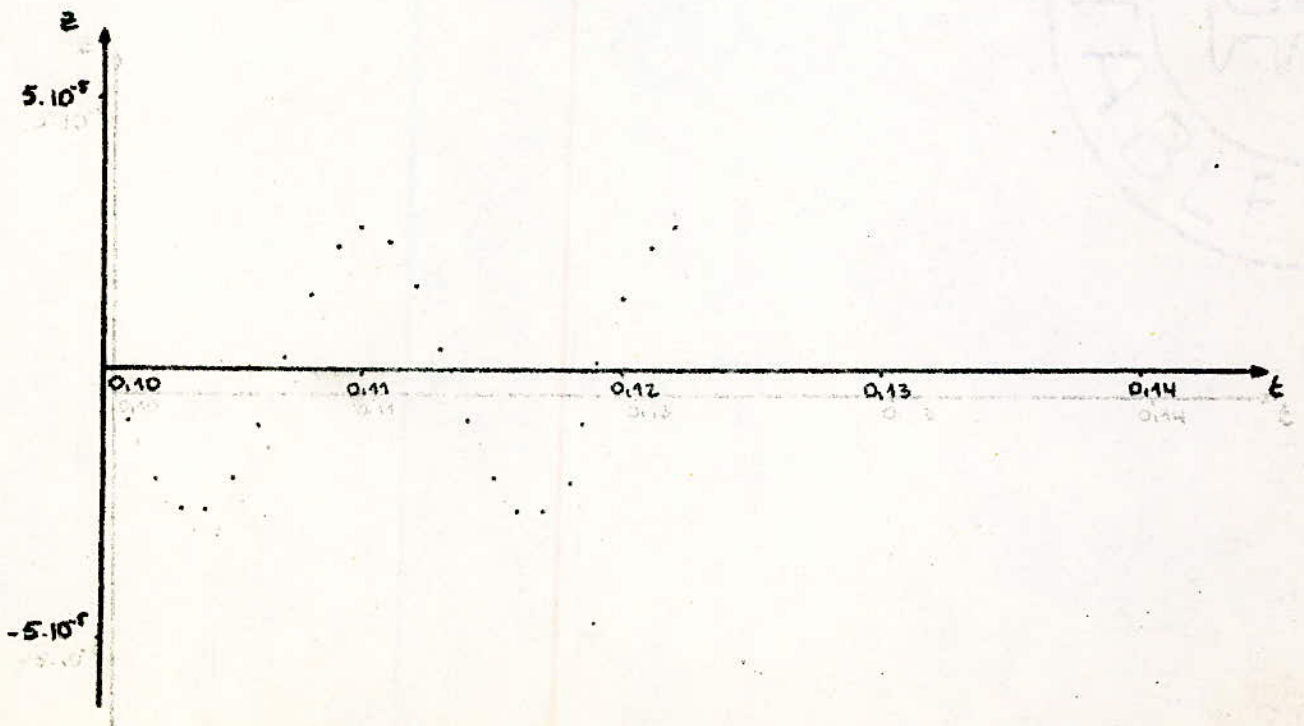
cas de la caractéristique Lineaire



$$f = 4$$

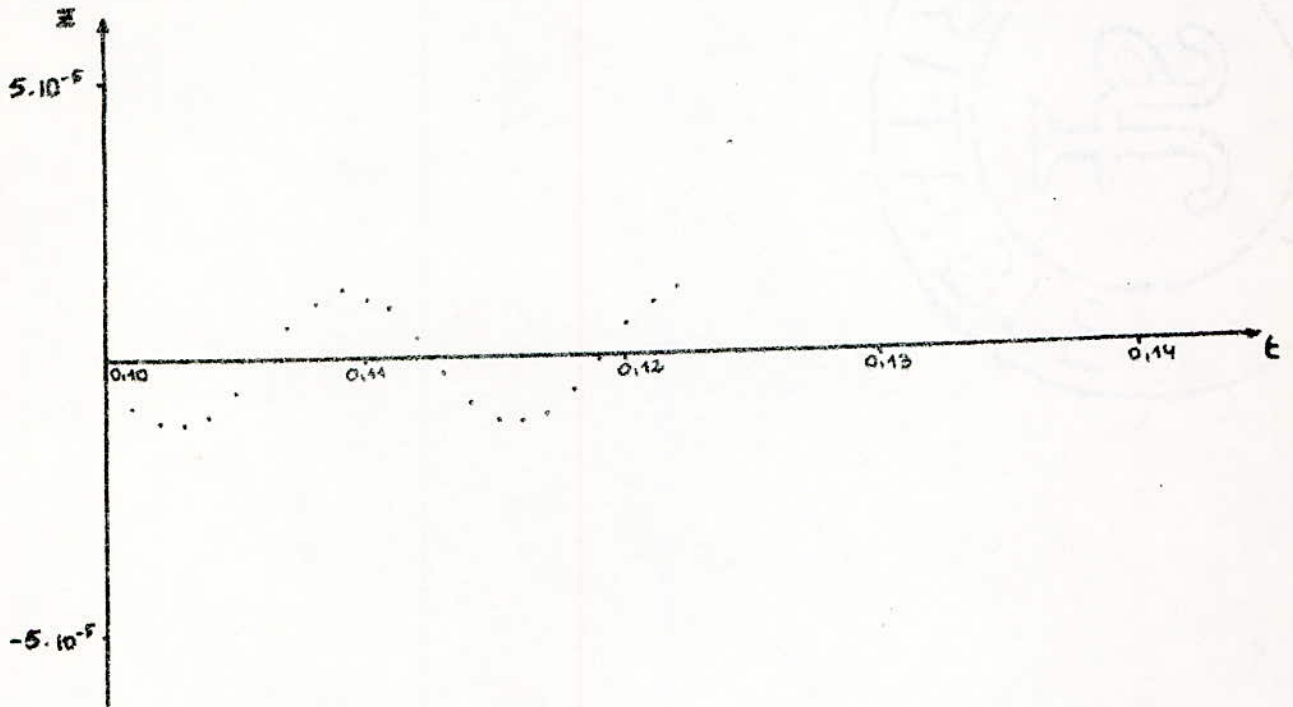
cas de la caractéristique non Lineaire

cas de la caractéristique Lineaire

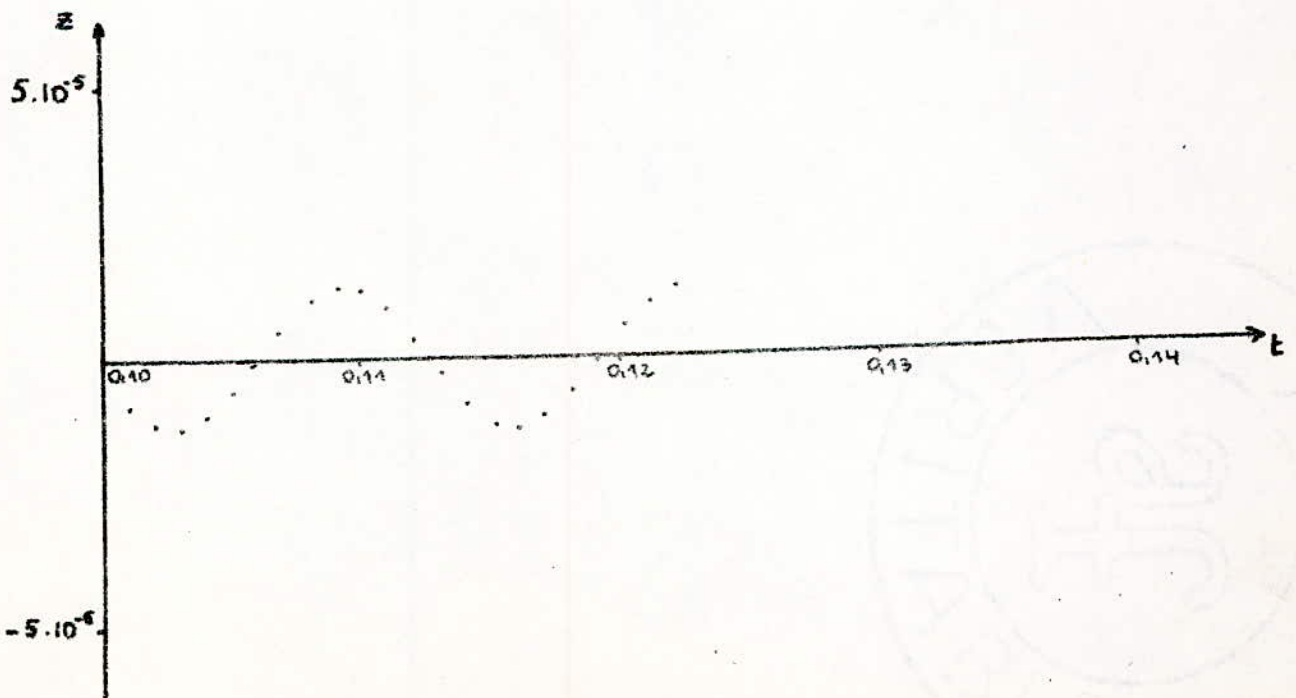


$$f = 10$$

cas de la caractéristique linéaire:

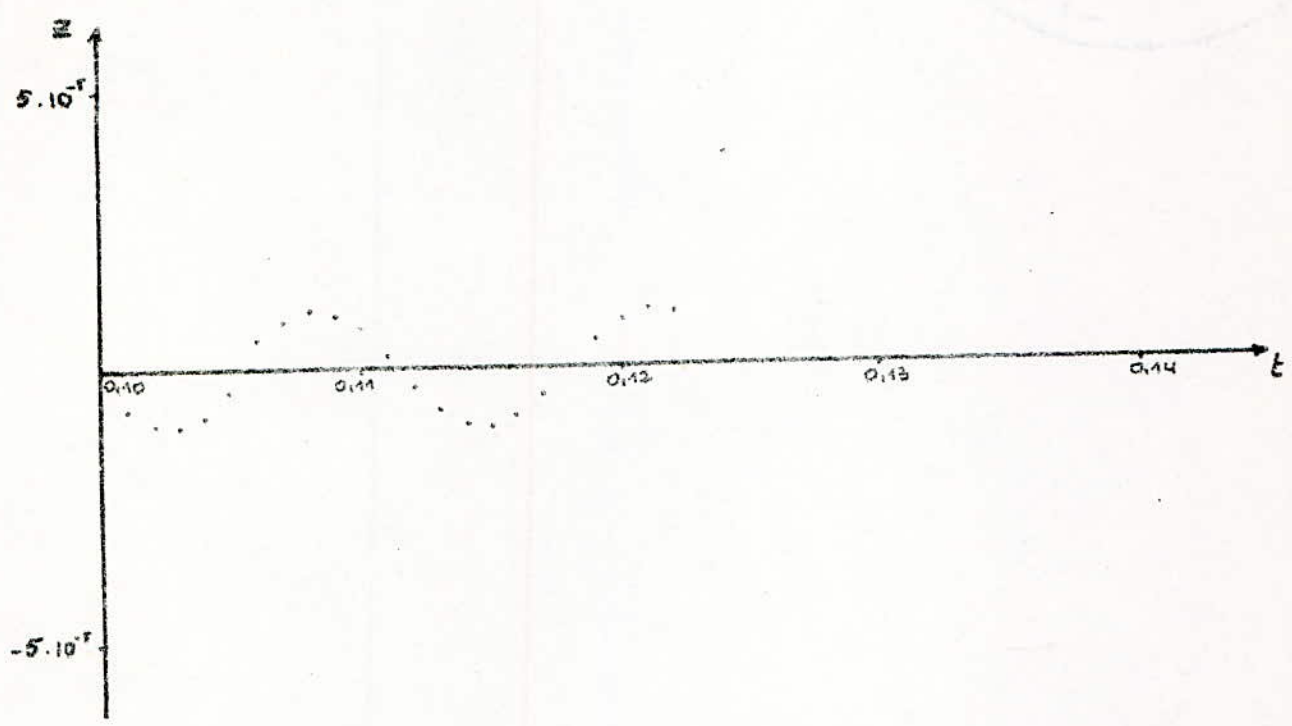


cas de la caractéristique non linéaire:

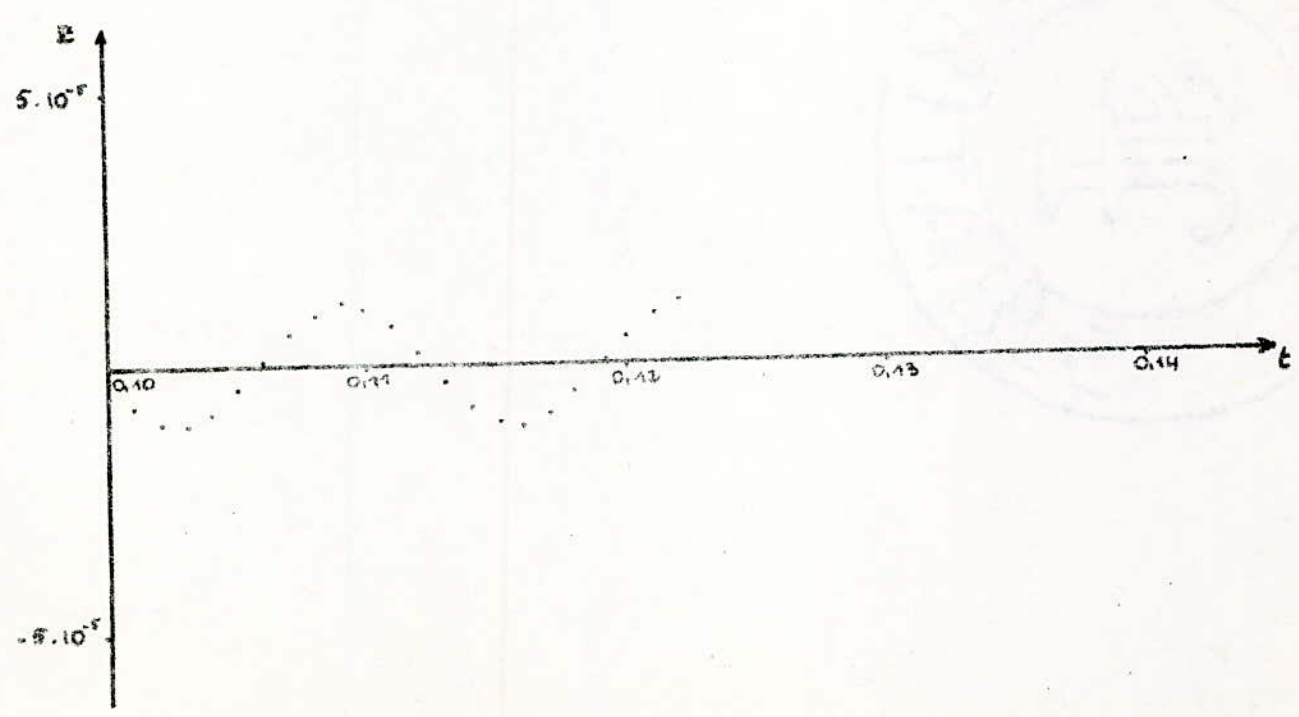


$$f = 12$$

cas de la caractéristique linéaire.

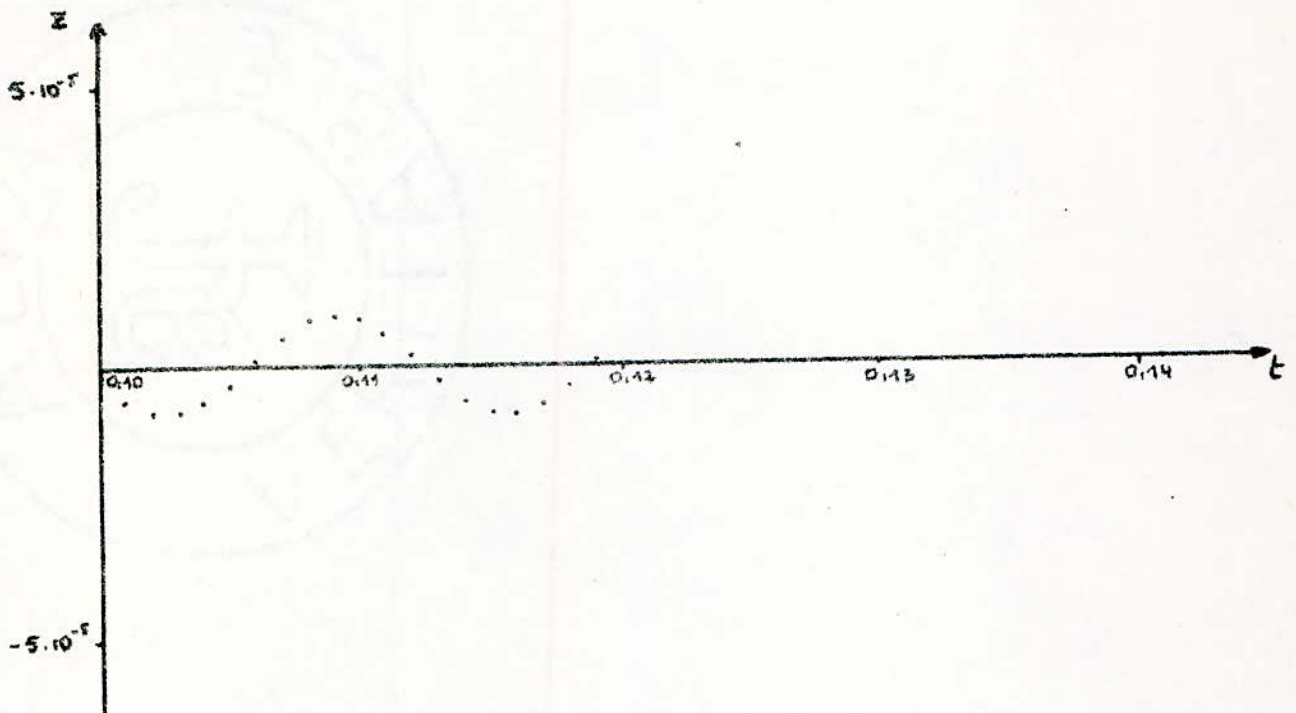


cas de la caractéristique non linéaire.

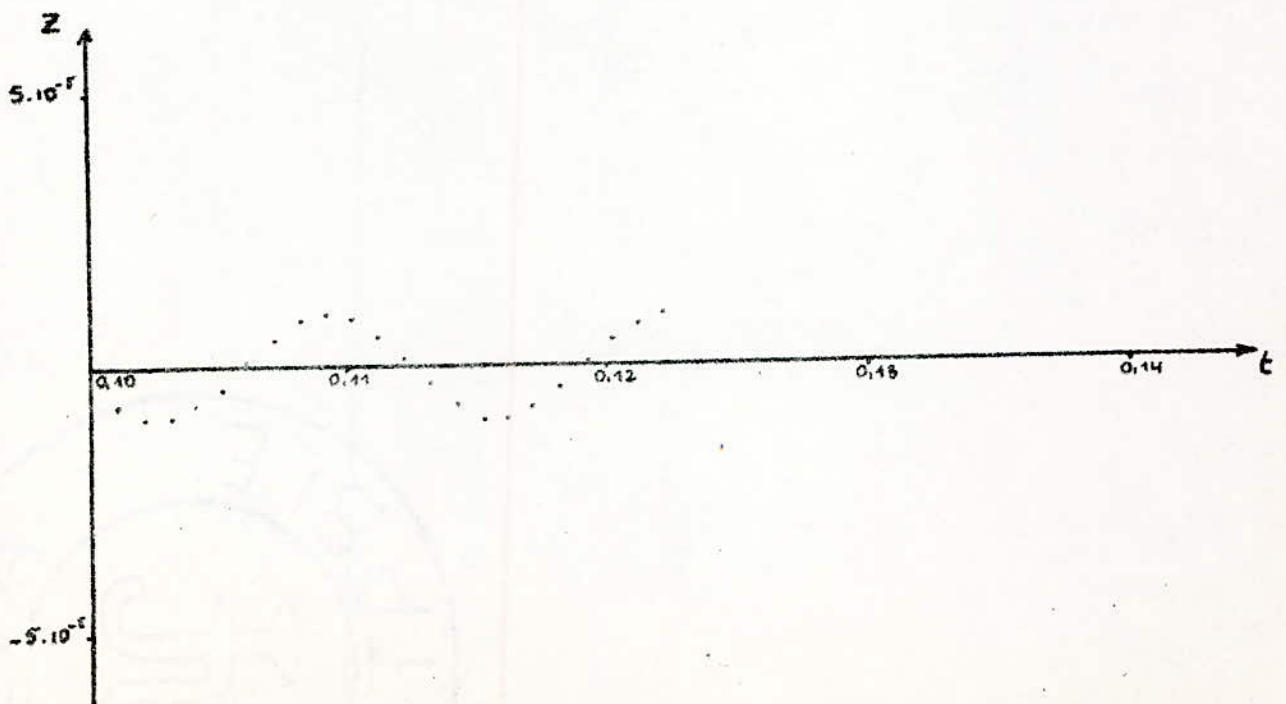


$$f = 14$$

Cas de la caractéristique Linéaire:

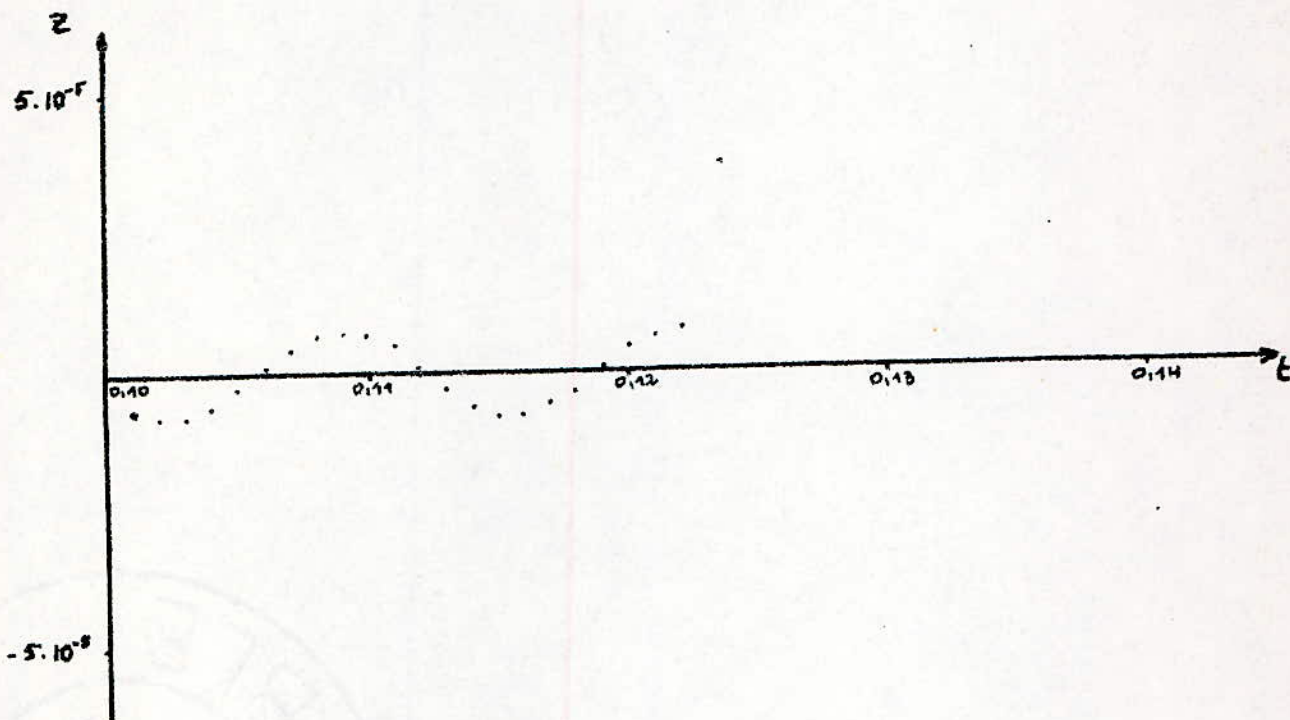


Cas de la caractéristique non Linéaire:

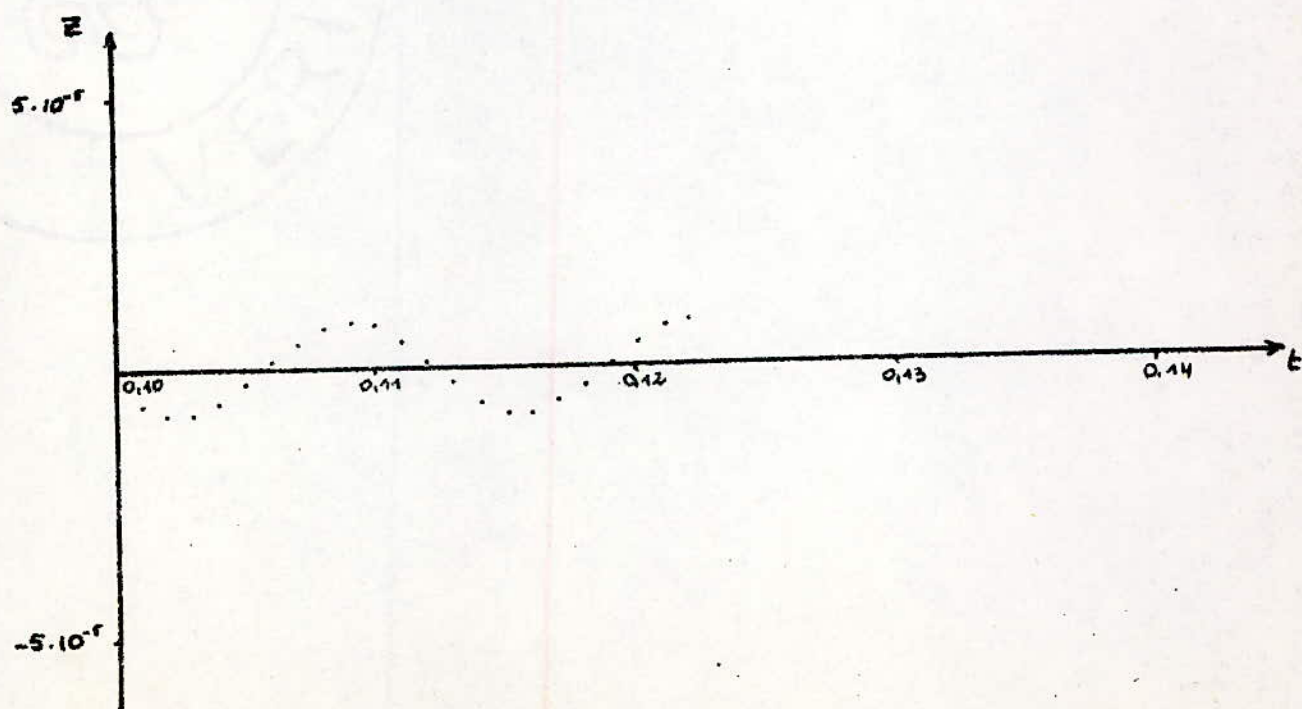


$$f = 16$$

cas de la caractéristique linéaire:



cas de la caractéristique non linéaire:

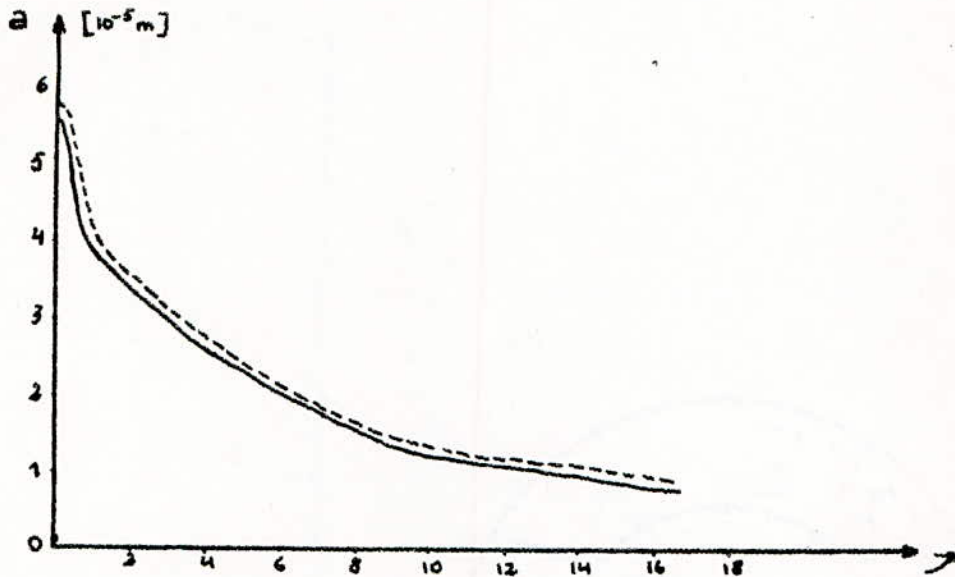


9.3 INTERPRETATION

Pour chaque valeur de J on mesure l'amplitude des vibrations dans les deux cas, linéaire et non linéaire, et on les place dans le tableau suivant pour pouvoir tirer différentes conclusions.

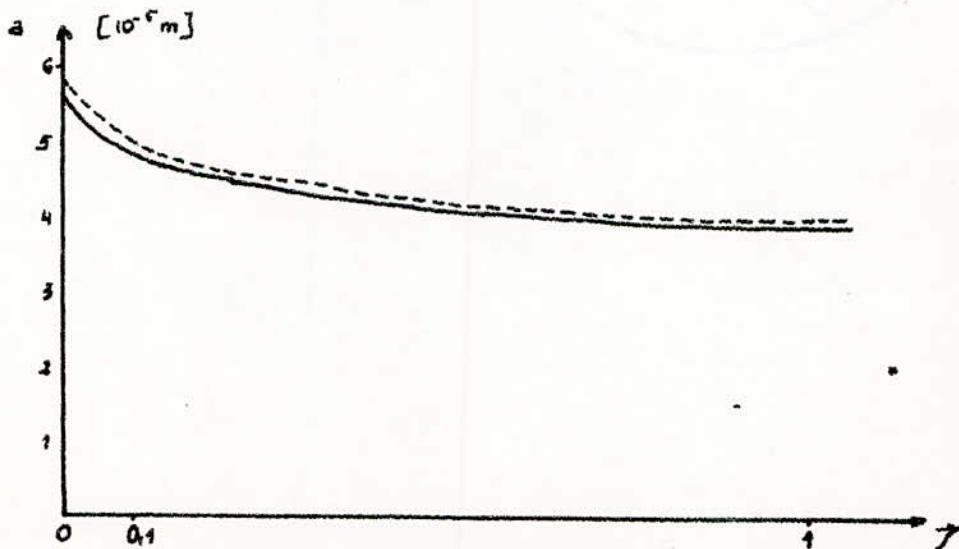
J	a [10^{-3}] m	
	cas linéaire	cas non linéaire
0	5,5944	5,8042
0,001	5,5944	5,6644
0,01	5,4545	5,5245
0,1	4,8250	4,8951
0,2	4,4755	4,5454
0,9	3,9860	4,0559
1	3,9160	3,9860
2	3,5660	3,6363
4	2,6570	2,7273
10	1,2587	1,3986
12	1,1180	1,1888
14	0,9790	1,0489
16	0,8390	0,9090

9.3.1 VARIATION DE L'AMPLITUDE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



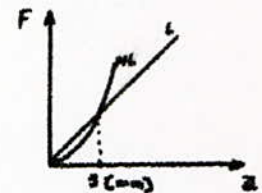
— cas linéaire
 --- cas non linéaire

Pour mieux voir ce qui se passe au voisinage de zéro, on peut rajouter la courbe suivante.



On voit que dans tous les cas choisis (différentes valeurs de γ) les amplitudes des vibrations dans le cas non linéaire sont plus importantes que dans le cas linéaire.

Ce résultat est logique puisque l'excitation n'est pas importante, ce qui donne des amplitudes dans les environs de 10^{-2} mm, et la caractéristique montre bien que $a < 5$ mm $\rightarrow F_{NL} < F_L$



9.3.2 REACTIONS DYNAMIQUES EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT

Dans le cas linéaire on a $F = -k_1 z$

Dans le cas non linéaire on a $F = -k_1 z^3 - k_2 z^2 - k_3 z$

On a le tableau suivant :

γ	cas linéaire		cas non linéaire			
	a [10^{-2}]	F [N]	a [10^{-5} m]	a^2 [10^{-10} m ²]	a^3 [10^{-15} m ³]	F [N]
0	5,5944	27,49	5,8042	33,69	195,5	28,41
0,2	4,47555	21,99	4,5454	20,66	93,9	22,61
1	3,9167	19,24	3,9863	15,86	63,2	19,63
4	2,6562	13,05	2,7272	7,43	20,3	13,42
10	1,2587	6,185	1,3986	1,95	2,7	6,87
16	0,8392	4,122	0,9091	0,82	0,7	4,47

On remarque que les réactions dynamiques diminuent avec l'augmentation de T .

Mais T ne peut pas augmenter indéfiniment car pour chaque matériau et pour chaque traitement thermique la variation de b entraîne une variation de α .

D'autre part α est compris dans un intervalle serré pour un matériau.

On ne peut pas jouer sur la masse pour varier T comme dans d'autres cas car on toucherait d'autres performances du véhicule.

Mais le plus important à remarquer est que dans le cas de la suspension les réactions dynamiques sont de l'ordre du centième de celles de la fixation rigide.

On avait trouvé: $\sum R_i = 8760 \text{ [N]}$

Alors que dans le cas de la suspension élastique

$$14,18 \leq \sum F_i \leq 114,4 \quad \text{[N]}$$

10. CONCLUSION

L'établissement des équations différentielles du mouvement, constitue l'étape principale dans le dimensionnement des plots de suspension.

Mais bien que cette étude est très importante pour l'étude de la suspension, elle doit être complétée par l'étude du déplacement du châssis en fonction de l'état de la route, et surtout par une étude métallurgique approfondie sur les variations du couple coefficient d'élasticité, coefficient d'amortissement en fonction du traitement thermique et de l'alliage.

Pour conclure, je souhaite que cette étude sera d'un apport appréciable aux étudiants qui travailleront sur cette suspension.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Dynamique de La voiture automobile
M.A. JULIEN Technip
- Mécanique des moteurs alternatifs
B. SWOBODA Technip
- Science et technique du moteur diesel
industriel et de transport
R. BRUN Technip
- Ingenieur de L'automobile « Septembre 1985 »
M. MONTAMAT SIA
- Methodes asymptotiques en théorie des oscillations
non Linéaires.
NICOLAS BOGOLIDUBOV DUNOD
- Technique de L'ingénieur : B595
Dynamique des suspensions.

