

Ecole Nationale Polytechnique  
Département d'électronique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Mémoire de **Magister**

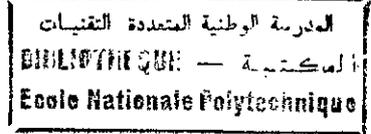
**M. Adjrad**

## **APPLICATION DU FILTRAGE DE KALMAN ETENDU A L'IDENTIFICATION D'UN CHIRP**

Jury

Président	: D.BERKANI	(Professeur ENP)
Rapporteur	: A.BELOUCHRANI	(Maître de conférence ENP)
	Z.TERRA	(Chargé de cours ENP)
	M.OUDJAOUT	(Chargé de cours ENP)
	H.BOUSBIA SALAH	(Chargé de cours ENP)

## REMERCIEMENTS



*En premier, je remercie dieu qui m'a donné la volonté de finaliser ce travail tout en étant loin de mon pays et du signal & communication laboratory.*

*En particulier, je remercie :*

*Mon promoteur, Dr. A. Belouchrani pour son orientation précieuse durant l'année théorique, pour le suivi continu de l'évolution du travail, et pour sa grande patience et sa confiance durant toute la période de préparation et finalisation de ce document,*

*Dr. A. Ouldali pour m'avoir initié à ce type de sujet,*

*The Signal & Communication laboratory team, et à sa tête le Pr. D. Berkani pour ses conseils précieux durant la Graduation et la Post-Graduation,*

*The Electrical Engineering Department team pour sa bienveillance à assurer une formation des plus réputée*

*Finalement, je suis à jamais redevable à mes parents et je leurs dois gratitude et reconnaissance, mes frères et soeurs pour leur support et aide continue .*

## SOMMAIRE

<b>REMERCIEMENTS.....</b>	<b>II</b>
<b>RESUME.....</b>	<b>III</b>
<b>Sommaire.....</b>	<b>IV</b>
<b>Liste des Acronymes.....</b>	<b>VI</b>
<b>Liste des Symboles.....</b>	<b>VII</b>
<b>Liste des Figures.....</b>	<b>VIII</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>Intro-1</b>
<b>Chapitre 1 : Généralités.....</b>	<b>1-1</b>
<b>Chapitre 2 : Le Filtre de Kalman Discret.....</b>	<b>2-1</b>
<b>Chapitre 3 : Etat de l'Art et Modélisation d'Etat.....</b>	<b>3-1</b>
3.1 Approche Paramétrique.....	3-2
3.1.1 Estimateur du Maximum de Vraisemblance.....	3-3
3.1.2 Transformée Polynomiale de Phase.....	3-6
3.1.3 Méthode de Kay-Tretter.....	3-11
3.2 Modélisation d'Etat.....	3-15
3.2.1 Première Approche.....	3-15
3.2.2 Deuxième Approche.....	3-16
3.3 Estimation des Paramètres d'un Chirp Reçu sur deux Capteurs .....	3-21

<b>Chapitre</b>	<b>4 :</b>	<b>Borne de Cramer Rao (CRLB).....</b>	<b>4-1</b>
4.1		CRLB pour des Signaux Noyés dans un Bruit Blanc Gaussien.....	4-2
4.2		Extension à un vecteur de paramètres.....	4-3
4.3		CRLB de Paramètres d'un Signal Noyé dans un Bruit Blanc Gaussien.....	4-3
4.4		Application pour le Signal Chirp.....	4-4
<b>Chapitre</b>	<b>5 :</b>	<b>Simulations.....</b>	<b>5-1</b>
5.1		Comportement dynamique du filtre.....	5-1
	5.1.1	Evolution Temporelle des Paramètres.....	5-1
	5.1.2	Observation d'une Réalisation du Signal.....	5-5
5.2		Etude Statistique.....	5-8
	5.2.1	Pourcentage de Divergence.....	5-8
	5.2.2	Comparaison du MSE au CRLB.....	5-9
<b>Conclusion.....</b>			<b>CI-1</b>
<b>Références.....</b>			<b>Ref-1</b>

## LISTE DES ACRONYMES

AWGN	Additive White Gaussian Noise
CRLB	Cramer Rao Lower Bound
EKF	Extended Kalman Filter
MLF	Modulation Linéaire de Fréquence
MSE	Mean Square Error
MV	Maximum de Vraisemblance
SNR	Signal to Noise Ratio
TF	Transformée de Fourier
TH	Transformée de Hilbert
TPP	Transformée polynômiale de Phase

## LISTE DES SYMBOLES

$x^T$	Transpose de $x$
$x^*$	Complexe Conjugue de $x$
$\hat{x}$	Estimée de $x$
$x^-$	Prédiction de $x$
$\dot{x}$	Dérivée de $x$
$ x $	Opérateur module de $x$
$arg(x)$	Opérateur Argument du complexe $x$
$I(x)$	Opérateur Intégrale de $x$
$E[x]$	Opérateur Espérance de $x$
$TFD[x]$	Opérateur Transformée de Fourier Discrète de $x$
$DP_m[x]$	Opérateur Transformée polynomiale de phase discrète de degré $m$ de $x$

## LISTE DES FIGURES

Figure 2-1 : Boucle du Filtre de Kalman.....	2-7
Figure 2-2 : Filtre de Kalman Linéarité.....	2-9
Figure 2-3 : Filtre de Kalman Etendu.....	2-11
Figure 3-1 : Surface du critère du MV.....	3-5
Figure 3-2 : Approche à Deux Capteurs.....	3-22
Figure 5-1 : Evolution Temporelle des Estimations des Paramètres Approche 1.....	5-2
Figure 5-2 : Evolution Temporelle des Estimations des Paramètres Approche 2.....	5-3
Figure 5-3 : Evolution Temporelle des Estimations des Paramètres Approche 3.....	5-4
Figure 5-4 : Observation d'une Réalisation du Signal Approche 1.....	5-5
Figure 5-5 : Observation d'une Réalisation du Signal Approche 2.....	5-6
Figure 5-6 : Observation d'une Réalisation du Signal Approche 3.....	5-7
Figure 5-10: Pourcentage de Divergence.....	5-8
Figure 5-11: Comparaison des MSE aux CRLB.....	5-9

# Introduction

Le sujet de cette thèse porte sur la modélisation et l'identification des signaux à amplitude constante et à phase polynomiale. De tels signaux se rencontrent fréquemment en physique, notamment les signaux de type radar, sonar et télécommunication.

Dans ces applications, le signal reçu présente une modulation instantanée de sa phase du fait du mouvement relatif entre le capteur et la cible pour les systèmes radar et sonar ou entre l'émetteur et le récepteur dans le cas des communications par téléphones mobiles. La modulation de phase est directement proportionnelle à la distance séparant le capteur de la cible ou l'émetteur du récepteur.

Ces signaux sont non stationnaires avec des caractéristiques fréquentielles qui évoluent continûment au cours du temps avec des vitesses de variation qui peuvent être importantes. Dans le cas des signaux stationnaires, de nombreux modèles de type AR ou ARMA ont permis de traiter des signaux bruités à bande étroite grâce à des algorithmes du type maximum de vraisemblance, moindres carrés, etc. Une vaste littérature a été consacrée à l'étude des performances statistiques de ces algorithmes ainsi qu'à leur mise en oeuvre.

L'extension de ces méthodes au cas non stationnaire a pu être menée dans un premier temps pour des signaux dont les caractéristiques varient lentement dans le temps, au regard de la fréquence instantanée de ces signaux. Ceci a été obtenu grâce à l'introduction de nombreux termes dans les algorithmes: fenêtre glissante, facteur d'oubli, etc.

Ces techniques adaptatives montrent vite leur limite lorsque la non-stationnarité s'accroît et il est alors nécessaire de développer des méthodes

spécifiques. Le modèle considéré généralement pour un signal complexe et discret  $y[n]$  est le suivant

$$y[n] = a_0 \exp \left\{ j \sum_{k=0}^M b_k (n\Delta)^k \right\}$$

Pour  $0 \leq n \leq N-1$ , ou  $N$  est le nombre d'échantillons et les coefficients  $b_k$  sont à valeurs réelles. En d'autres termes, le signal a une amplitude constante et une phase polynomiale de degré  $M$ .

Le problème qu'on veut résoudre dans ce mémoire peut être formulé comme suit. Ayant des mesures bruitées de ce signal, détecter le signal et estimer tous ses paramètres inconnus  $\{a_0, b_0, \dots, b_M\}$ . Le bruit est supposé être additif, blanc et gaussien.

Cette modélisation du signal est utilisée dans divers problèmes pratiques, incluant

- Certains signaux radar à compression d'impulsion qui ont une phase polynomiale au niveau de l'impulsion. Les systèmes électroniques intelligents passifs peuvent utiliser les paramètres de la phase estimés pour l'identification du type de radar.
- Les échos retournés par une cible en mouvement ont des caractéristiques de phase non linéaires qui dépendent du type de mouvement de la cible. Une vitesse radiale constante va produire un terme de phase linéaire. Une accélération radiale constante va introduire un terme quadratique dans la phase.
- Les chauves souris émettent des ondes pour la localisation des objets par écho. Le son généré par la chauve souris marron peut être décrit comme des impulsions de signaux à modulation quadratique de fréquence. La fréquence de répétition de l'impulsion et les paramètres du signal changent suivant la tâche réalisée par la chauve souris, par exemple, la poursuite, l'acquisition. La nature hautement non stationnaire et variable des signaux de la chauve souris rend leur analyse très difficile par les techniques conventionnelles de traitement.

Le document est organisé comme suit : En chapitre 1, on fera un choix de modélisation différent de celui cité ci-dessus, avec justification. En chapitre 2, on présente le filtrage de Kalman qui est la technique utilisée pour résoudre le problème posé. Le chapitre 3 est consacré à la présentation de quelques techniques entrants dans le cadre de l'état de l'art pour ce type de sujet, ou on présentera aussi l'approche choisie qui est la méthode de modélisation d'état. En chapitre 4, on fait la dérivation de la borne de Cramer-Rao pour les estimateurs obtenus, et on présente les résultats de simulation en chapitre 5. finalement, on donne une conclusion pour ce travail.

# CHAPITRE 1

## Généralités

On a vu en introduction que le modèle du signal sous l'approximation polynomiale de la phase est généralisé comme suit :

$$y[n] = a_0 \exp(j\phi[n]) + v[n] \quad (1.1)$$

Avec

$$\phi[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + b_3 n^3 + \dots + b_p n^M = \sum_{k=0}^M b_k n^k \quad (1.2)$$

où  $a_0$  est l'amplitude constante,  $\phi[n]$  est la phase,  $v[n]$  est un bruit complexe de variance  $\sigma^2$  et  $n=0, N-1$ .  $M$  représente le degré du polynôme phase, la sélection du degré du polynôme de phase nécessite la connaissance *a priori* des variations de la fréquence instantanée du signal : si elle est supposée avoir de lent changement, un degré inférieur peut être choisi, un degré supérieur est choisi si les changements sont rapides.

Cette modélisation du signal chirp par son signal analytique suppose que  $\sin(\phi[n])$  résulte de la transformée de Hilbert (TH) de  $\cos(\phi[n])$  [Proakis, 1995]. Ceci n'est vrai que si le signal  $\cos(\phi[n])$  est à bande étroite. La construction du signal analytique par l'application de la transformée de Hilbert équivaut à l'élimination des fréquences négatives du spectre. S'il y a un débordement signifiant des composantes spectrales positives dans la région spectrale négative, la TH ne donnera pas la composante en quadrature de phase du signal d'entrée.

Conditions sous lesquelles la TH génère exactement la composante en quadrature [Boashash, 1992]:

Considérons le signal à valeurs réelles de la forme  $a(t)\cos(\phi[t])$ , voyons sous quelles conditions l'équation suivante peut être vérifiée :

$$a(t)\cos(\phi[t]) + jH[a(t)\cos(\phi[t])] = a(t)e^{j\phi[t]} \quad (1.3)$$

$H$  : Opérateur TH.

La solution est obtenue en utilisant le théorème produit de Bedrosian (TPB) qui est résumé en ce qui suit :

*Théorème de Bedrosian pour les signaux complexes :*

Soient  $x(t)$  et  $y(t)$  deux signaux complexes à énergie finie de la variable réelle  $t$ . leurs transformées de Fourier sont  $X(f)$  et  $Y(f)$ .

Si

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad X(f) &= 0 && \text{Pour } |f| > a \text{ et} \\ Y(f) &= 0 && \text{Pour } |f| < b, \text{ où } b \geq a \geq 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

ou

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad X(f) &= 0 && \text{Pour } f < -a \text{ et} \\ Y(f) &= 0 && \text{Pour } f < b, \text{ où } b \geq a \geq 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Alors :

$$H\{x(t)y(t)\} = x(t).H\{y(t)\} \quad (1.6)$$

Equation (1.3) est valable si  $A(f) = TF\{a(t)\}$  est non nul que dans la région  $|f| < f_0$  et  $TF\{\cos(\phi[t])\}$  existe seulement hors de cette région

*Preuve :* Si la première condition de TPB est remplie, on peut écrire :

$$\begin{aligned} a(t)\cos(\phi[t]) + jH\{a(t)\cos(\phi[t])\} &= a(t)\cos(\phi[t]) + ja(t)H\{\cos(\phi[t])\} \\ &= a(t)\cos(\phi[t]) + ja(t)\sin(\phi[t]) \\ &= a(t)e^{j\phi[t]} \end{aligned} \quad (1.7)$$

*Une conséquence de ce théorème :*

Plus le signal approche la condition bande étroite, meilleure est l'approximation du signal en quadrature par la transformée de Hilbert, et plus exacte sera la modélisation du système réel par le signal analytique du signal basé sur la transformée de Hilbert.

La majeure partie de la littérature traitant le problème d'estimation des paramètres d'un chirp utilise la modélisation par son signal analytique [Benidir and Ouldali, 1999], [Barbarossa, 1995], [Shamsunder et al, 1995], [Gini et al, 2000 ], [Handel and Tichavsky, 1997], [Tichavsky and Handel, 1999]. Pour notre cas, et pour éviter toute condition restrictive sur ce problème, on utilisera la modélisation de la forme  $y(t) = a_0 \sin(\phi[t])$ . Aussi, on consacrera notre étude au cas d'une amplitude constante et d'une phase polynomiale de degré deux.

On propose une modélisation sous la forme d'un modèle d'état de dimension 4. A partir d'équations différentielles linéaires et non stationnaires, il est possible d'établir un modèle d'état dont l'équation dynamique est discrétisée exactement. On suppose que le signal de mesure est entaché d'un bruit de mesure additif.

Le problème de l'identification des paramètres du chirp (phase et amplitude) est alors ramené au problème d'estimation d'un état étendu obtenu par la mise en œuvre d'un filtre de Kalman étendu.

# Chapitre 2

## Le filtre de Kalman Discret

Les travaux de R. E. Kalman décrivant une solution récursive pour le problème du filtrage linéaire de données discrètes ont été publiés en 1960 [Kalman, 1960]. En même temps, l'avancement technologique des calculateurs numériques a rendu possible l'implémentation de sa solution récursive dans plusieurs applications en temps réel.

On suppose que le processus aléatoire à estimer peut être modélisé sous la forme

$$X_{k+1} = \phi_k X_k + w_k \quad (2.1)$$

L'observation (mesure) du processus est supposée obtenue à des points discrets dans le temps conformément à la relation linéaire.

$$y_k = G_k X_k + v_k \quad (2.2)$$

Les notations et les différents termes des équations (2.1) et (2.2) sont données ci-dessous :

$X_k$  : ( $N \times 1$ ) vecteur d'état à l'instant  $t_k$

$\phi_k$  : ( $N \times N$ ) matrice liant  $X_k$  à  $X_{k+1}$  en absence de l'innovation  $w_k$

$w_k$  : ( $N \times 1$ ) vecteur, supposé être une séquence blanche avec une structure de covariance connue

$y_k : (M \times 1)$  vecteur de mesure à l'instant  $t_k$ .

$G_k : (M \times N)$  matrice donnant la relation idéale (non bruitée) entre la mesure et le vecteur d'état à l'instant  $t_k$ .

$v_k : (M \times 1)$  erreur de mesure- supposée être une séquence blanche avec une structure de covariance connue, ayant une intercorrelation nulle avec la séquence  $w_k$ .

Les matrices de covariance pour les vecteurs  $w_k$  et  $v_k$  sont données par

$$E[w_k w_i^T] = \begin{cases} Q_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2.3)$$

$$E[v_k v_i^T] = \begin{cases} R_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (2.4)$$

$$E[w_k v_i^T] = 0, \text{ pour tous } k \text{ et } i. \quad (2.5)$$

On suppose qu'on a une estimée initiale du processus en un certain point à l'instant  $t_k$ , et que cette estimée est basée sur toute notre connaissance au sujet du processus avant l'instant  $t_k$ . Cette estimée antérieure (ou a priori) sera notée  $\hat{X}_k^-$  où le "chapeau" dénote l'estimée, et le "moins" est pour rappeler que c'est notre meilleure estimée (en termes de l'erreur quadratique moyenne) avant de prendre en considération la mesure à l'instant  $t_k$ . Aussi, on suppose qu'on connaît la matrice erreur de covariance associée à  $\hat{X}_k^-$ . Ayant cela, on définit l'erreur d'estimation par,

$$e_k^- = X_k - \hat{X}_k^- \quad (2.6)$$

et la matrice erreur de covariance associée par,

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] = E[(X_k - \hat{X}_k^-)(X_k - \hat{X}_k^-)^T] \quad (2.7)$$

(On a supposé que la moyenne de l'erreur d'estimation est nulle)

Souvent, le problème d'estimation est entamé sans avoir des mesures antérieures. Dans ce cas, si la moyenne du processus est nulle, l'estimation initiale est nulle, et la matrice erreur de covariance associée n'est autre que la matrice de covariance de  $x$ .

En supposant une estimée a priori  $\hat{X}_k^-$ , on cherche à utiliser la mesure  $z_k$  pour améliorer l'estimation a priori. On choisit un mélange linéaire de la mesure bruitée et estimée a priori conformément à l'équation

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k^- + K_k (y_k - G_k \hat{X}_k^-) \quad (2.8)$$

où

$\hat{X}_k$  : Estimée mise à jour

$K_k$  : Facteur de mélange (à déterminer).

Le problème est de trouver le facteur de mélange particulier  $K_k$  qui donne une mise à jour optimale de l'estimée selon un certain critère [Brookner, 1998]. Comme pour la solution de Wiener, on utilise la minimisation de l'erreur des moindres carrée comme critère de performance. Pour cela on forme l'expression de la matrice erreur de covariance associée aux mises à jour des estimées (a posteriori).

$$P_k = E[e_k e_k^T] = E[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)^T] \quad (2.9)$$

Ensuite, on substitue (2.2) dans (2.8) et on remplace l'expression résultante pour  $\hat{X}_k$  dans (2.9), on obtient

$$P_k = E\left\{[(X_k - \hat{X}_k^-) - K_k(G_k X_k + v_k - G_k \hat{X}_k^-)][(X_k - \hat{X}_k^-) - K_k(G_k X_k + v_k - G_k \hat{X}_k^-)]^T\right\} \quad (2.10)$$

En calculant l'espérance précédente –tout en notant que  $(X_k - \hat{X}_k^-)$ , qui est l'erreur a priori d'estimation, est decorrelée avec l'erreur de mesure  $v_k$  - on obtient

$$P_k = (I - K_k G_k) P_k^- (I - K_k G_k)^T + K_k R_k K_k^T \quad (2.11)$$

On remarque que (2.11) est une expression générale pour la matrice erreur de covariance de mise à jour, et est applicable pour tout gain  $K_k$ , sous optimal ou autre.

Revenons au problème d'optimisation. On souhaite trouver le facteur  $K_k$  particulier qui minimise les termes individuels le long de la diagonale principale de  $P_k$ , car ces termes représentent les variances de l'erreur d'estimation pour les éléments du vecteur d'état qui est estimé. L'optimisation peut être faite par plusieurs méthodes. On utilisera une approche de calcul différentiel simple. Rappelons les formules de différenciation suivantes

$$\frac{d[\text{trace}(AB)]}{dA} = B^T \quad (\text{AB doit être carrée}) \quad (2.12)$$

$$\frac{d[\text{trace}(ACA^T)]}{dA} = 2AC \quad (\text{C doit être symétrique}) \quad (2.13)$$

La dérivée d'un scalaire par rapport à une matrice est définie par:

$$\frac{ds}{dA} = \begin{bmatrix} \frac{ds}{da_{11}} & \frac{ds}{da_{12}} & \dots \\ \frac{ds}{da_{21}} & \frac{ds}{da_{22}} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On réécrit l'expression  $P_k$  en (2.11) comme suit

$$P_k = P_k^- - K_k G_k P_k^- - P_k^- G_k^T K_k^T + K_k (G_k P_k^- G_k^T + R_k) K_k^T \quad (2.15)$$

On note que le second et troisième termes sont linéaires en  $K$  et que le quatrième terme est du second degré en  $K$ . On souhaite minimiser la trace de  $P$  qui n'est autre que la somme des erreurs des moindres-carrées d'estimations des éléments du vecteur d'état. On procède maintenant à la différenciation de la trace de  $P$  par rapport à  $K$ , on note que la trace de  $P^-G^TK^T$  est égale à la trace de sa transposée  $KGP^-$ . Le résultat est donné par :

$$\frac{d(\text{trace}P)}{dK} = -2(GP^-)^T + 2K(GP^-G^T + R) \quad (2.16)$$

Le gain optimal qui annule la dérivée (2.16) est alors donné par :

$$K_k = P_k^-G_k^T(G_kP_k^-G_k^T + R_k)^{-1} \quad (2.17)$$

Ce gain  $K_k$  particulier, à savoir celui qui minimise l'erreur d'estimation des moindres-carrée, est appelé le gain de Kalman.

La matrice de covariance associée à l'estimation optimale peut maintenant être calculée. La substitution de l'expression du gain optimal (2.17), dans Eq. (2.11) conduit à

$$P_k = P_k^- - P_k^-G_k^T(G_kP_k^-G_k^T + R_k)^{-1}G_kP_k^- \quad (2.18)$$

$$P_k = P_k^- - K_k(G_kP_k^-G_k^T + R_k)K_k^T \quad (2.19)$$

$$P_k = (I - K_kG_k)P_k^- \quad (2.20)$$

Parmi les trois expressions de  $P_k$ , la dernière donnée par (2.20) est la plus simple, donc elle est utilisée plus fréquemment que les autres. On rappelle que (2.11) est valide pour tout gain sous-optimal ou autre, alors que Eqs. (2.18), (2.19) et (2.20) sont valides pour le gain de Kalman seulement (optimal).

On a maintenant un moyen d'utiliser la mesure à l'instant  $t_k$  par l'usage de (2.8) avec  $K_k$  égal au gain de Kalman donné par (2.17). On note qu'on a besoin de  $\hat{X}_k^-$  et  $P_k^-$  pour ce calcul, et on peut anticiper un prochain pas pour faire un usage optimal de la mesure  $y_{k+1}$ .

Une fois  $\hat{X}_k$  est obtenu,  $\hat{X}_{k+1}^-$  est donné par :

$$\hat{X}_{k+1}^- = \phi_k \hat{X}_k \quad (2.21)$$

où la contribution de  $w_k$  a été ignorée.

la matrice erreur de covariance associée à  $\hat{X}_{k+1}^-$  est obtenue en formant en premier l'expression de l'erreur a priori

$$\begin{aligned} e_{k+1}^- &= X_{k+1} - \hat{X}_{k+1}^- \\ &= (\phi_k X_k + w_k) - \phi_k \hat{X}_k \\ &= \phi_k e_k + w_k \end{aligned} \quad (2.22)$$

On note que  $w_k$  et  $e_k$  ont une intercorrélacion nulle, car  $w_k$  est un bruit pour les itérations avant l'instant  $t_k$ . Donc on peut écrire l'expression pour  $P_{k+1}^-$  comme suit

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= E[e_{k+1}^- e_{k+1}^{-T}] = E[(\phi_k e_k + w_k)(\phi_k e_k + w_k)^T] \\ &= \phi_k P_k \phi_k^T + Q_k \end{aligned} \quad (2.23)$$

On a maintenant les quantités dont on a besoins à l'instant  $t_{k+1}$ , les mesures  $y_{k+1}$  peuvent être calculées de la même manière que pour le pas précédent.

Les équations (2.8), (2.17), (2.20), (2.21) et (2.23) forment les équations récursives du filtre de Kalman. Il est clair qu'une fois dans la boucle, on peut aller à l'infini. La figure -2 résume ce qui est maintenant connu comme le filtre Kalman.

En analysant le processus récursif de la figure-2, on peut se demander logiquement, "pourquoi l'appellation de filtre? Il ressemble plutôt à un algorithme de calculateur ". On doit être prudent dans notre observation. Le filtre de Kalman est juste un algorithme de

calculateur pour traiter des mesures discrètes (entrées) et en ressortir des estimations optimales (sorties). Ses racines reviennent aux jours où les filtres étaient fait d'éléments électriques câblés de façon à donner des réponses fréquentielles désirées.

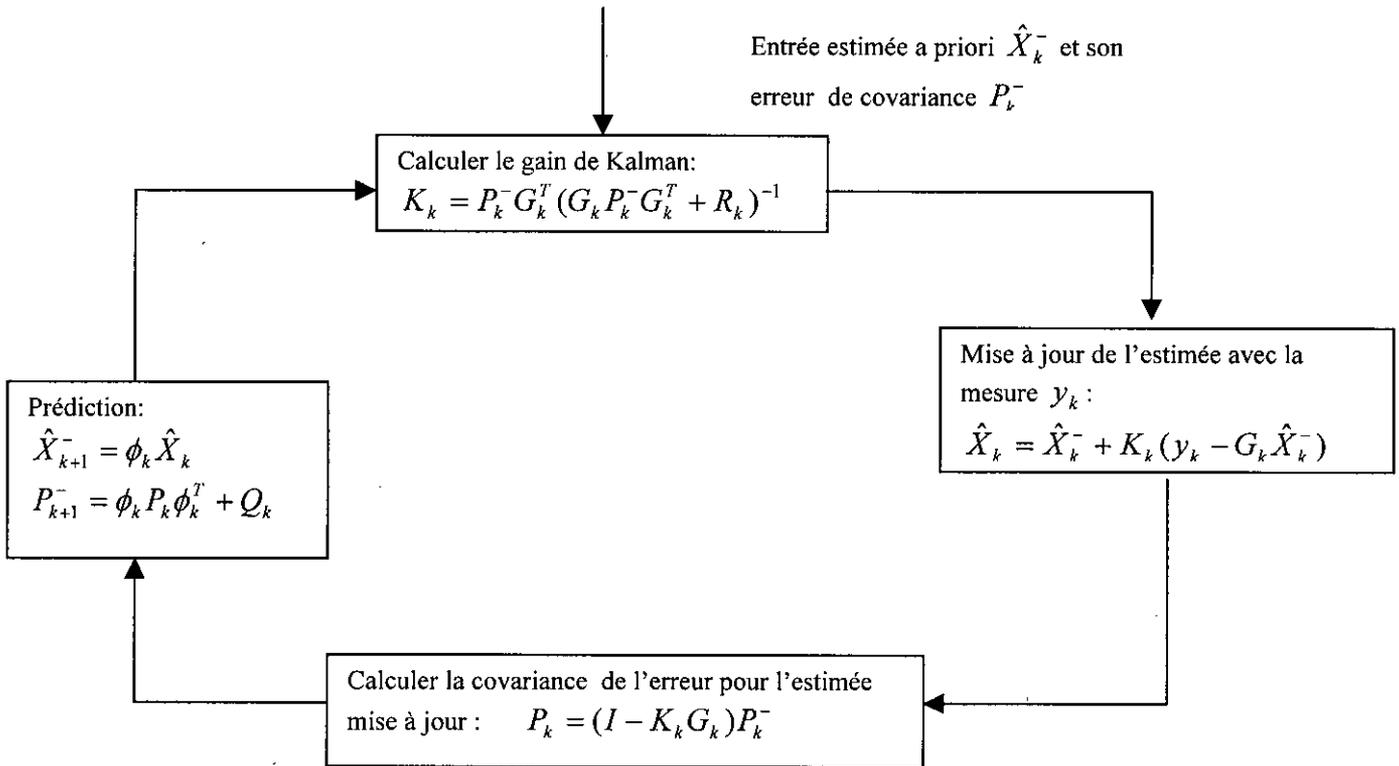


Figure 2-1: Boucle du Filtre de Kalman

Les ingénieurs se sont rendus compte que le travail de Kalman a fourni une solution pratique à plusieurs problèmes de filtrage non encore résolus; plusieurs années se sont écoulées depuis ses publications originales, et il y a encore de nombreux travaux utilisant des variantes du filtre de Kalman de base. (Il a supporté l'épreuve du temps!).

## Filtre de Kalman étendu

Parmi Les applications les plus prospères du filtre de Kalman on trouve les situations où les dynamiques sont non-linéaires et/ou dans lesquelles les relations entre mesures sont non-linéaire. On peut examiner par deux façons le problème de linéarisation. L'un est de linéariser dans l'espace état suivant une trajectoire nominale qui ne dépend pas des données de mesure. Le filtre résultant est connu sous le nom de *filtre de Kalman linearisé*. L'autre méthode concerne la linéarisation suivant une trajectoire qui est continûment mise à jour par les estimations de l'état résultantes des mesures. Dans ce cas, le filtre est appelé *filtre de Kalman étendu*. Une brève discussion de chacun de ces cas est maintenant présentée.

### *Le Filtre de Kalman linearisé*

On suppose que les équations pour les processus à estimer et les mesures associées peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= f(X(t), U_d, t) + u(t) \\ y(t) &= g(x, t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.24) - (2.25)$$

où  $\dot{X}$  est la dérivée première de  $X$  par rapport à  $t$ ,  $f$  et  $g$  sont des fonctions connues,  $U_d$  est une fonction déterministe de control,  $u$  et  $v$  sont des processus bruit blanc avec une intercorrélacion nulle. On note que les non-linéarités peuvent faire partie soit de la dynamique du processus soit des relations de mesure. Aussi, on note que les formes des équations (2.24) et (2.25) sont en quelque sorte restrictives dans la mesure où  $u$  et  $v$  sont supposés des termes additif séparés et ne sont pas inclus avec les termes  $f$  et  $g$ . Faire autrement compliquera considérablement le problème.

On suppose qu'une trajectoire approximative  $X^0(t)$  peut être déterminée par quelconques moyens. Elle sera nommée trajectoire nominale ou de référence (figure 2.2). La trajectoire réelle  $X(t)$ , s'écrit alors comme

$$X(t) = X^0(t) + \Delta x(t) \quad (2.26)$$

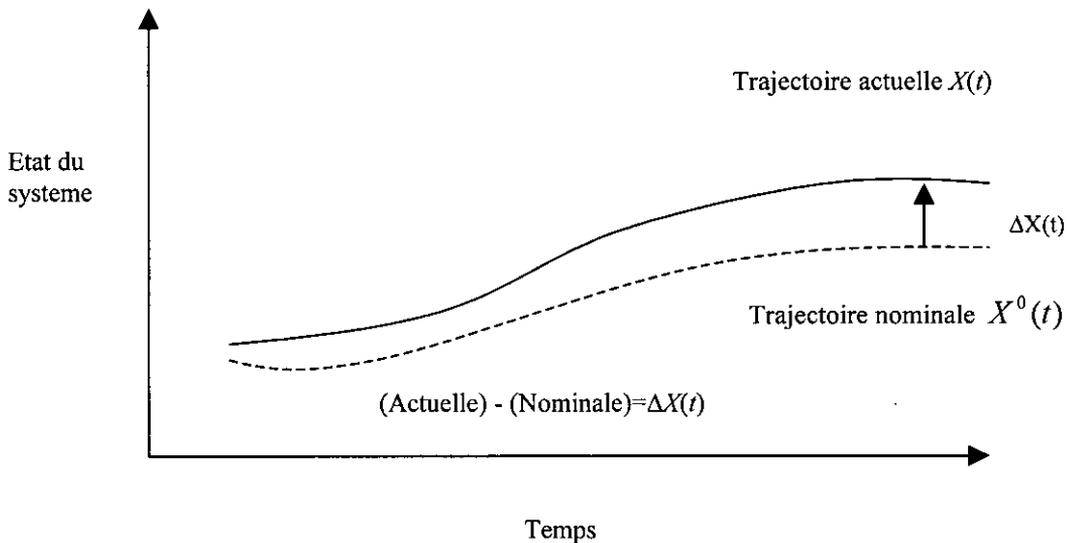


Figure 2-2 : Filtre de Kalman Linéarisé

Les équations (2.24) et (2.25) deviennent

$$\begin{aligned} \dot{X}^0 + \Delta \dot{X} &= f(X^0 + \Delta X, U_d, t) + u(t) \\ y &= g(X^0 + \Delta X, t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.27) - (2.28)$$

On suppose  $\Delta X$  petit et on approxime les fonctions  $f$  et  $g$  avec les développements en séries de Taylor, en retenant uniquement les termes de premier ordre

$$\begin{aligned}\dot{X}^0 + \Delta\dot{X} &\approx f(X^0, U_d, t) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{X=X^0} \cdot \Delta X + u(t) \\ y &\approx g(X^0, t) + \left[ \frac{\partial g}{\partial X} \right]_{X=X^0} \cdot \Delta X + v(t)\end{aligned}\quad (2.29) - (2.30)$$

où

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\quad (2.31)$$

On choisit la trajectoire nominale  $X^0(t)$  pour satisfaire l'équation différentielle déterministe :

$$\dot{X}^0 = f(X^0, U_d, t)\quad (2.34)$$

En remplaçant celle-ci dans (2.29), on obtient le modèle linearisé

$$\Delta\dot{X} = \left[ \frac{\partial f}{\partial X} \right]_{X=X^0} \cdot \Delta X + u(t)\quad (2.33)$$

$$[y - g(X^0, t)] = \left[ \frac{\partial g}{\partial X} \right]_{X=X^0} \cdot \Delta X + v(t)\quad (2.34)$$

On note que la mesure dans le modèle linéaire est la différence entre la mesure actuelle et celle prédite par la trajectoire nominale en absence de bruit. Aussi, les matrices équivalentes à  $F$  et  $G$  sont obtenues en évaluant les matrices de dérivées partielles dans (2.33) le long de la trajectoire nominale.

Le filtre de Kalman étendu est semblable au filtre de Kalman linéaire excepté que la linéarisation concerne la trajectoire estimée par le filtre, comme le montre la (figure-2.2), plutôt que la trajectoire nominale precalculée. La dérivée partielle de (2.31) est évaluée le long d'une trajectoire qui a été mise à jour avec les estimations du filtre. On note qu'elles dépendent des mesures, donc la séquence du gain du filtre dépendra de la séquence des échantillons de mesure réalisée sur une exécution particulière de l'expérience. Donc, la séquence de gain n'est pas prédéterminée par les hypothèses du modèle du processus comme c'est le cas pour le filtre de Kalman classique.

Une analyse générale du filtre de Kalman étendu est difficile à cause du retour de la séquence de mesure sur le modèle du processus. Cependant, il y a un sens qualitatif à mettre à jour la trajectoire utilisée pour la linéarisation - après tout, pourquoi utiliser l'ancienne trajectoire quand une meilleure est disponible? le défaut dans cet argument est le suivant: la trajectoire est meilleure dans le sens statistique seulement.

Un résultat net est que l'utilisation du filtre de Kalman étendu est plus risquée que celle du filtre linéarisé, spécialement dans les situations où les incertitudes initiales et les erreurs de mesure sont grandes. Il peut être meilleur que le filtre linéarisé en moyenne, mais il y a aussi une possibilité de divergence dans certaines situations [Brown and Hwang, 1997].

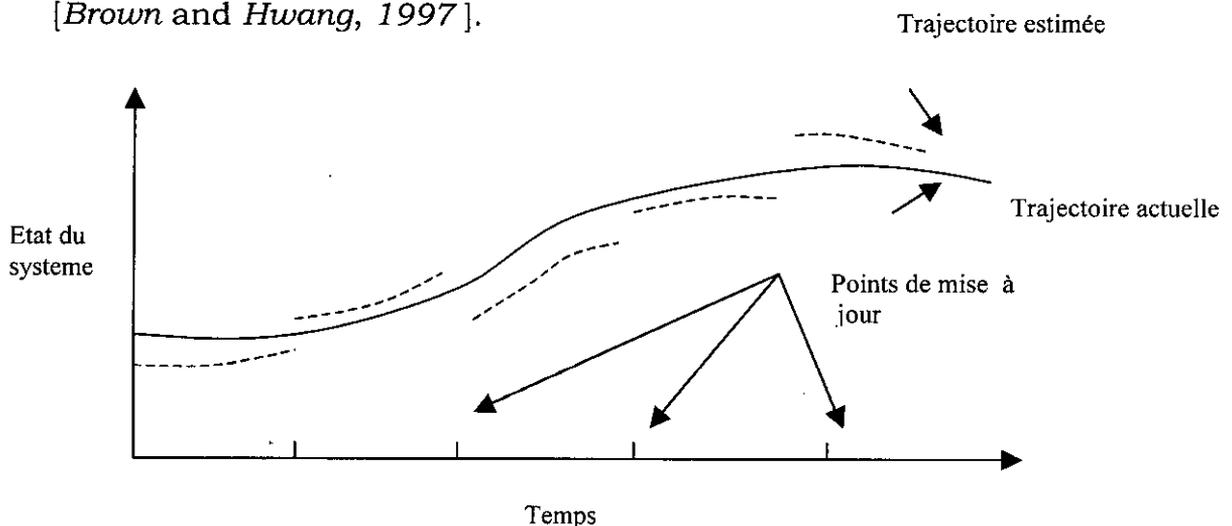


Figure 2-3 : Filtre de Kalman Etendu

## **Chapitre 3**

# **Etat de l'Art et Modélisation d'Etat**

Dans ce chapitre, on présente l'état de l'art concernant la caractérisation des signaux à amplitude constante et à phase polynomiale. Etant donné leur caractère fortement non stationnaire, ces signaux ne peuvent être traités par des techniques développées sous hypothèses stationnaires.

D'autre part, les techniques adaptatives basées sur l'hypothèse de stationnarité locale du signal à l'intérieur de la fenêtre d'analyse sont peu efficaces pour étudier ces signaux dont la fréquence instantanée peut évoluer rapidement. Par suite, l'analyse de ces signaux nécessite une approche qui prenne en compte explicitement ce caractère non stationnaire.

D'une manière identique au cas stationnaire, on trouve deux approches possibles d'analyse des signaux non stationnaires: l'approche non paramétrique et l'approche paramétrique. L'objet de ce travail est axé sur la deuxième approche qui sera présentée dans le paragraphe suivant ; et qui consiste à caractériser les signaux avec un nombre fini de coefficients. On s'intéresse plus particulièrement à la classe des signaux à amplitude constante et à phase polynomiale. La classe de ces signaux peut être considérée comme une bonne approximation d'un signal à phase variable continue.

### 3.1 Approche paramétrique

L'approche paramétrique suppose une modélisation du signal permettant ainsi de transformer le problème de caractérisation du signal en un problème d'estimation des coefficients du modèle. Bien que les méthodes paramétriques soient moins générales que les méthodes non paramétriques, elles sont toutefois plus intéressantes dans certains cas pour résoudre des problèmes spécifiques pour lesquels on peut trouver un modèle structurellement adéquat.

On considère le modèle suivant pour un signal à valeur complexe, discret, à amplitude constante et à phase polynomiale

$$\begin{aligned}
 y[n] &= a_0 \exp\{j\phi[n]\} + v[n] \\
 &= a_0 \exp\left\{j \sum_{k=0}^M b_k n^k\right\} + v[n] \\
 &= s[n] + jt[n] + v[n] \quad n = 0, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où  $a_0$  est l'amplitude constante,  $\phi[n]$  est une phase polynomiale de degré  $M$  et  $v[n]$  un bruit blanc gaussien, centré et de variance  $\sigma^2$ ,  $s[n]$  et  $t[n]$  sont les parties réelle et imaginaire (respectivement) du signal non-bruité.

La caractérisation du signal  $y[n]$  consiste alors à déterminer à partir des observations bruitées  $\{y[0], \dots, y[N-1]\}$  les estimations de l'amplitude constante et les coefficients de la phase. Parmi les méthodes d'estimation paramétrique de ces signaux, on trouve l'estimateur du maximum de vraisemblance [Boashash, 1992], [James and al, 1994], la méthode de Key-Tretter [Djuric and Kay, 1990], une méthode appelée transformée polynomiale de phase (TPP) [Peleg and Friedlander, 1995] et les méthodes basées sur la modélisation d'état

### 3.1.1 Estimateur du maximum de vraisemblance (MV)

On suppose que le signal à analyser est noyé dans un bruit blanc, complexe, gaussien de variance  $\sigma^2$ . La version analytique du signal observé (bruité) a  $x(n)$  comme partie réelle et  $z(n)$  comme partie imaginaire. Les parties réelle et imaginaire du signal non bruité sont respectivement  $s(n, \theta)$  et  $t(n, \theta)$ . Le vecteur des paramètres est donné par  $\theta = [a_0, b_0, b_1, b_2, \dots, b_p]^T$ . La fonction densité de probabilité de  $y(n)$  est

$$p(y; \theta) = \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^N} \exp \left[ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - s(n, \theta))^2 + (z(n) - t(n, \theta))^2 \right] \quad (3.2)$$

L'estimée MV de  $\theta$  nécessite que  $p$ , (ou  $\log(p)$ ), soit maximisée par rapport à  $\theta$ . Le maximum de  $p$  se produit au maximum de

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - s(n, \theta))^2 + (z(n) - t(n, \theta))^2 \right) \quad (3.3)$$

Etant donné que  $\sum x^2[n]$  et  $\sum z^2[n]$  (correspondant à l'énergie du signal observé) sont des termes indépendants de  $\theta$ , la maximisation de  $\Lambda_0$  revient à maximiser

$$\Lambda = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n]s[n, \theta] + z[n]t[n, \theta]) - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (s^2[n, \theta] + t^2[n, \theta]) \quad (3.4)$$

par rapport au vecteur des paramètres. Si on remplace  $s[n, \theta]$  et  $t[n, \theta]$  par leurs expressions données par  $s[n, \theta] = a_0 \cos[\phi(n)]$  et  $t[n, \theta] = a_0 \sin[\phi(n)]$ , on obtient

$$\Lambda = 2a_0 \Re[\exp\{-jb_0\} f(b_1, b_2, \dots, b_M)] - a_0^2 \quad (3.5)$$

où la fonction  $f$  à  $M$  variables est donnée par

$$f(b_1, b_2, \dots, b_M) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y[n] \exp\{-j(b_1 n + b_2 n^2 + \dots + b_M n^M)\} \quad (3.6)$$

la maximisation de  $\Lambda$  par rapport à la phase initiale  $b_0$  est déterminée analytiquement par l'expression suivante

$$\hat{b}_0 = \arg[f(b_1, b_2, \dots, b_M)] \quad (3.7)$$

En reportant cette expression dans (3.5) on obtient

$$\Lambda = 2a_0 |f(b_1, b_2, \dots, b_M)| - a_0^2 \quad (3.8)$$

de même, on peut déterminer l'expression analytique de l'amplitude  $a_0$  qui maximise la fonction  $\Lambda$

$$\hat{a}_0 = |f(b_1, b_2, \dots, b_M)| \quad (3.9)$$

ainsi, en reportant cette expression dans (3.8), la fonction à maximiser s'écrit alors

$$\Lambda = |f(b_1, b_2, \dots, b_M)|^2 \quad (3.10)$$

La solution de MV nécessite donc la maximisation de la fonction  $\Lambda$  de (3.10) par rapport aux  $M$  inconnues  $\{b_1, b_2, \dots, b_M\}$ . Ainsi, la dimension de l'espace de recherche a été réduite de  $(M+2)$  à  $M$ . La phase initiale et l'amplitude sont déterminées par les relations (3.7) et (3.9) respectivement. Toutefois, la fonction à maximiser est non-linéaire et par suite sa maximisation ne peut être résolue analytiquement et il faut recourir aux méthodes numériques pour obtenir l'optimum. Or, pour un critère non convexe ou non concave, la convergence des méthodes numériques vers l'optimum global n'est assurée qu'au voisinage de celui-ci. En effet, une initialisation de l'algorithme trop éloigné de la solution peut conduire la procédure d'optimisation à ne trouver qu'un maximum local de la fonction.

Pour illustrer ceci, on considère 256 points d'un signal à modulation linéaire de fréquence. Pour un rapport signal à bruit de 15 dB, on calcule par la relation (3.6) les valeurs de la fonction  $f$  à 2

variables en utilisant les observations bruitées du signal. La figure 3-1 montre le trace du critere a maximiser en fonction des 2 variables  $b_1$  et  $b_2$ . Les parametres du signal choisit pour cette illustration sont

$$[a_0 \ b_0 \ b_1 \ b_2] = [1 \ 2 \times \pi \times 0.1 \ 2 \times \pi \times 0.18 \ 2 \times \pi \times 3 \times 10^{-4}]$$

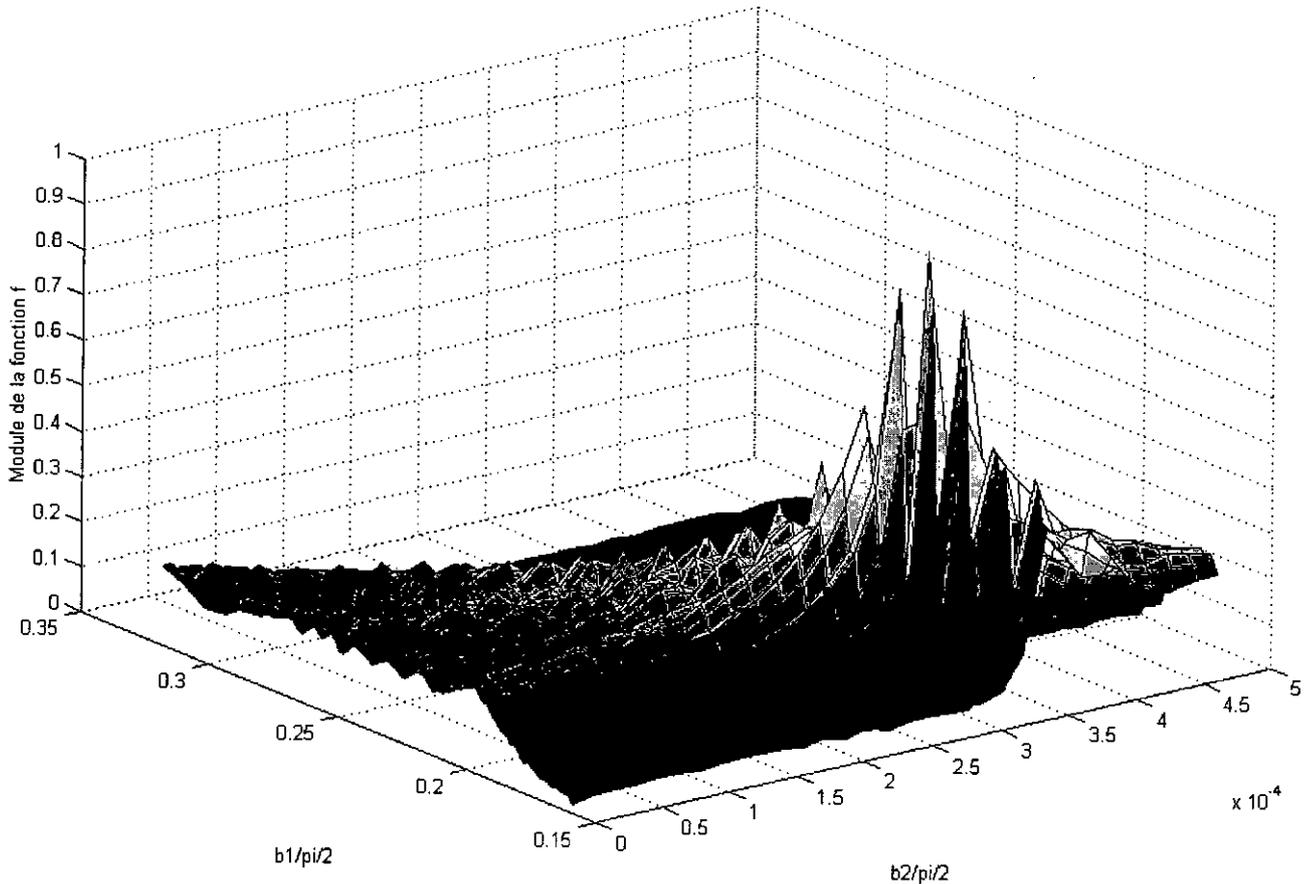


Figure 3-1 Surface du critere de MV

Cette figure montre que l'optimum global de la surface du critere est bien atteint aux valeurs recherchees des coefficients  $b_1$  et  $b_2$  qui sont respectivement  $0.18 \times 2 \times \pi$  et  $10^{-4} \times 2 \times \pi$ . On verifie aussi que la valeur atteinte par le module de la fonction  $f$  a l'optimum global fournit une estimation de l'amplitude ( $a_0 = 1$ ) du signal simule.

Toutefois, on constate la presence d'un nombre important de maxima locaux pouvant empecher la procedure d'optimisation numerique d'aboutir au maximum global. Afin d'assurer la

convergence de la procédure vers l'optimum global, il faudrait l'initialiser au voisinage de celui-ci.

### 3.1.2 Transformée polynomiale de phase (TPP)

La transformée polynomiale de phase (TPP) est une méthode séquentielle d'estimation paramétrique du signal régi par le modèle de l'équation (3.1). Son principe consiste à transformer le signal à phase polynomiale de degré  $M$  en une grandeur temporelle ne contenant plus qu'une simple harmonique dont la fréquence s'exprime uniquement en fonction du coefficient de plus haut degré. Cette grandeur ainsi obtenue étant stationnaire, l'estimation de sa fréquence s'effectue à l'aide de toute technique classique d'analyse spectrale ou temporelle. On en déduit alors une estimation du coefficient de plus haut degré de la phase puis d'une façon récursive, on peut obtenir de proche en proche les autres coefficients de la phase par la même technique. L'amplitude et la phase initiale du signal sont calculées à l'aide des formules algébriques du maximum de vraisemblance données par (3.7) et (3.9).

On introduit une famille d'opérateurs  $DP_M$ ; où  $M$  est un entier positif, on explore son effet sur les signaux discrets, complexes avec une amplitude constante et une phase polynomiale. Soit  $s(t)$  une fonction à valeur complexe de la variable réelle  $t$ . soit  $\tau$  une variable réelle; les opérateurs  $DP_1[s(t), \tau]$  et  $DP_2[s(t), \tau]$  sont définis par

$$\begin{aligned} DP_1[s(t), \tau] &= s(t) \\ DP_2[s(t), \tau] &= s(t)s^*(t - \tau) \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'opérateur d'ordre  $M$  est donné par

$$DP_M[s(t), \tau] = DP_2[DP_{M-1}[s(t), \tau], \tau] \quad (3.12)$$

où  $M$ : ordre de l'opérateur.

$\tau$ : appelé paramètre retard.

L'opérateur  $DP_M$  a les propriétés suivantes :

- *Propriete1* :

$$DP_M[s_1(t)s_2(t), \tau] = DP_M[s_1(t), \tau]DP_M[s_2(t), \tau] \quad (3.13)$$

- *Propriete2* : pour tout réel  $x$

$$DP_M[x, \tau] = x^{2^{m-1}} \quad (3.14)$$

- *Propriété 3* : pour  $K = 0, \dots, M-1$

$$DP_M \left[ \exp \left\{ j \sum_{i=0}^K b_i t^i \right\}, \tau \right] = 1 \quad (3.15)$$

- *Propriete4* :

$$DP_M \left[ \exp \left\{ j \sum_{i=0}^M b_i t^i \right\}, \tau \right] = \exp \{ j \varphi_0 \} \quad (3.16)$$

où  $\varphi_0 = M! \tau^M b_M$

Ainsi, les propriétés 3 et 4 montrent que l'application de  $DP_M$  à un signal à phase polynomiale de degré strictement inférieur à  $M$  produira une constante.

### C) Application aux signaux non bruités à phase polynomiale

Si  $y_u[t]$  est le signal utile de correspondant à la partie non bruitée du signal,

$$y_u[t] = a_0 \exp \left\{ j \sum_{k=0}^M b_k t^k \right\} \quad (3.17)$$

On montre aisément que l'application de l'opérateur  $DP_M$  sur ce signal conduit a

$$DP_M[y_u[t], \tau] = a_0^{2^{M-1}} \exp \{ j(\omega_0 t + \varphi_0) \} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad \omega_0 &= M! \tau^{M-1} b_M \\ \varphi_0 &= (M-1)! \tau^{M-1} b_{M-1} - 0.5(M-1)M! \tau^M b_M \end{aligned}$$

En d'autres termes, appliquer l'opérateur d'ordre  $M$  sur un signal à amplitude constante et à phase polynomiale du même degré transforme ce signal en une simple harmonique de pulsation  $\omega_0$  reliée uniquement au coefficient  $b_M$ .

**Remarque :** Pour tout signal à phase polynomiale de degré  $M$ , il faut imposer la condition suivante au coefficient de plus haut degré :

$$|b_M| \leq \frac{\pi}{M! \tau^{M-1}} \quad (3.19)$$

La raison pour cette restriction est d'éviter l'ambiguïté sur  $\omega_0$ . Donc la condition suivante doit être satisfaite

$$|\omega_0| = M! \tau^{M-1} |b_M| \leq \frac{\omega_s}{2} \quad (3.20)$$

avec  $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta}$  est la fréquence d'échantillonnage (on suppose  $\Delta = 1$ )

(Pour  $M=1$  ;  $|b_1| < \frac{\omega_s}{2}$  qui n'est autre que le critère de Nyquist).

On définit  $DPT_M$  la transformée polynomiale de phase discrète d'ordre  $M$  comme étant la transformée de Fourier discrète (TFD) de  $DP_M[s(n), \tau]$

$$\begin{aligned} DPT_M[s(n), \omega, \tau] &= TFD\{DP_M[s(n), \tau]\} \\ &= \sum_{n=(M-1)\tau}^{N-1} DP_M[s(n), \tau] \exp\{-j\omega n\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

De ce qui précède, on conclut que l'application de la  $DPT_M$  à un signal à phase polynomiale de même degré produit une ligne spectrale unique, en localisant cette ligne et en estimant sa fréquence, on obtient une estimation du coefficient de plus haut degré du polynôme.

Aussi, le résultat d'application de la  $DPT_M$  à un signal à phase polynomiale de degré inférieur à  $M$  aura une ligne spectrale à la fréquence 0 (DC).

On peut réduire le degré du signal en le multipliant par  $\exp\{-j\hat{b}_M n^M\}$ . Si l'estimée  $\hat{b}_M$  est exacte, le terme de plus haut ordre est effectivement enlevé, et on pourra utiliser la DPT pour estimer  $b_{M-1}$ . Cette procédure peut être répétée jusqu'à l'estimation de tous les coefficients.

L'algorithme d'estimation itératif peut être résumé comme suit [Benidir and Ouldali, 1999]:

- 1) Initialisation :  $m=M$  et  $s^{(m)}(n) = s(n)$ , pour  $0 \leq n \leq N-1$
- 2) Choisir un entier positif  $\tau_m$ . Calculer  $\hat{b}_m$  par
 
$$\hat{b}_m = \frac{1}{m! \tau_m^{m-1}} \arg \max_{\omega} \{DPT_m[s^{(m)}(n), \omega, \tau_m]\}$$
- 3) Ecrire  $s^{(m-1)}(n) = s^{(m)}(n) \exp\{-j\hat{b}_m n^m\}$ , pour  $0 \leq n \leq N-1$
- 4) Remplacer  $m=m-1$ . si  $m \geq 1$ , retour à l'étape 2)

La simplification offerte par l'algorithme basé sur la DPT, par rapport à l'algorithme de maximum de vraisemblance, est le remplacement de la recherche à M-dimension par M recherches unidimensionnelles.

Finalement, les estimées de  $a_0$  et  $b_0$  sont données par (comme dans le cas de la MV)

$$\begin{aligned} \hat{b}_0 &= \text{phase} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} s^{(0)}(n) \right\} \\ \hat{a}_0 &= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} s^{(0)}(n) \right| \end{aligned} \quad (3.22)$$

Lorsque le degré du polynôme de la phase est inconnu, on procède comme suit :

On débute l'algorithme en calculant la DPT d'ordre  $m = \tilde{M}$ , où  $\tilde{M}$  est une borne supérieure pour le degré du polynôme de la phase. Tant que  $m$  est supérieur au vrai degré, la DPT va avoir une ligne spectrale à la fréquence zéro. On fait décroître  $m$  jusqu'à ce que la DPT laisse apparaître une raie à une fréquence non nulle. La valeur correspondante de  $m$  est une estimation du degré du polynôme. Ayant déterminé cette valeur, l'algorithme procède comme décrit précédemment.

#### D) Application aux signaux bruités

En pratique, on ne dispose pas directement du signal utile mais uniquement des observations bruitées de celui-ci. Dans ce paragraphe, l'effet de la transformation non-linéaire TPP est rapporté quand on l'applique sur un signal bruité.

On considère donc le signal bruité qu'on écrit sous la forme :

$$y[t] = y_u[t] + v[t] \quad (3.23)$$

où  $v[t]$  est un bruit blanc gaussien, centré et de variance  $\sigma^2$ .

L'application de l'opérateur  $DP_2$  sur ce signal aboutit à :

$$\begin{aligned} DP_2[y[t], \tau] &= y[t]y^*[t - \tau] \\ &= y_u[t]y_u^*[t - \tau] + v_2[t] \quad t \geq \tau \end{aligned} \quad (3.24)$$

où on note  $v_2[t]$  le bruit additif donné par :

$$v_2[t] = y_u[t]v^*[t - \tau] + v[t]y_u^*[t - \tau] + v[t]v^*[t - \tau] \quad \tau \neq 0 \quad (3.25)$$

Ainsi, on constate que l'application de l'opérateur  $DP_2$  sur le signal bruité transforme celui-ci en une grandeur  $y_u[t]y_u^*[t - \tau]$  noyée dans un bruit additif  $v_2[t]$ . Cette grandeur n'est autre que la transformée du signal utile  $y_u$  par l'opérateur  $DP_2$ .

Dans [Peleg and Friedlander, 1995], une analyse statistique de l'estimation du coefficient de plus haut degré a permis de déterminer la valeur optimale du paramètre retard  $\tau$  qui assure une erreur quadratique moyenne (MSE) la moins importante. Cette MSE atteint son minimum  $\tau = \frac{N}{M}$  pour  $M=2$  et  $3$ ,  $\tau = \frac{N}{M+2}$  pour  $M \geq 4$ .

En utilisant les propriétés statistiques de  $v[t]$ , il est montré que le bruit  $v_2[t]$  est un bruit blanc centré de variance

$$\text{Var}\{v_2[t]\} = 2a_0^2\sigma^2 + \sigma^4 \quad (3.26)$$

Ainsi, la variance du bruit sur le signal transformé est bien plus importante que celle correspondante au signal mesuré. En termes de rapport signal à bruit (SNR), le signal obtenu après application de  $DP_2$  présente un SNR presque 2 fois plus petit que celui du signal de départ.

### 3.1.3 Méthode de Kay-Tretter

Djuric et Kay ont proposé une méthode d'estimation paramétrique des signaux à modulation linéaire de fréquence (MLF) basée sur l'approximation de Tretter. Le bruit additif d'un signal MLF est transformé en un bruit sur la phase

$$y[n] \approx a_0 \exp\{j(\phi[n] + w[n])\} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.27)$$

on note  $\psi[n]$  la phase bruitée du signal décrit par (3.27)

$$\psi[n] = \phi[n] + \omega[n] = b_2 n^2 + b_1 n + b_0 + \omega[n] \quad (3.28)$$

où  $\omega[n]$  est un bruit blanc réel gaussien de variance  $\frac{\sigma^2}{2a_0^2}$ .

La première étape de la méthode proposée consiste à effectuer une correcte reconstruction de la phase bruitée  $\psi[n]$  à partir des observations  $y[n]$ . Cette procédure de déroulement de la phase doit prendre en compte l'évolution de la phase entre deux instants

consécutifs. En effet, cette évolution peut être importante dans le cas d'un signal MLF et par suite on risque de sortir de l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ .

Afin de remédier à ce problème, la solution proposée dans [Djuric and Kay, 1990] consiste à utiliser l'opérateur de différence finie

$$\Delta\psi[n] = \psi[n] - \psi[n-1] \quad (3.29)$$

En appliquant cet opérateur deux fois sur la séquence  $\psi[n]$ , on obtient

$$\Delta^2\psi[n] = 2b_2 + \Delta^2\omega[n] \quad (3.30)$$

Si on suppose que le coefficient  $b_2$  vérifie

$$|b_2| < \frac{\pi}{2} \quad (3.31)$$

Alors la relation (3.30) implique que la quantité  $\Delta^2\psi[n]$  se trouve bien dans l'intervalle  $]-\pi, \pi[$  sous réserve que le bruit  $\Delta^2\omega[n]$  soit petit (*SNR* important).

On peut déterminer une estimation de  $\Delta^2\psi[n]$  tout simplement en prenant l'argument du signal défini par

$$y_2[n] = y_1[n]y_1^*[n-1] \quad n = 2, \dots, N-1 \quad (3.32)$$

où  $y_1[n]$  est donné par

$$y_1[n] = y[n]y^*[n-1] \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (3.33)$$

avec  $*$  dénotant le conjugué complexe. La phase de la séquence  $\{y_2[n]\}$  est décrite par (3.30). On peut maintenant utiliser l'opération tangente inverse sur  $\{y_2[n]\}$  et avoir les valeurs de  $\{\Delta^2\psi_n\}$ . Puisqu'on s'intéresse à la phase  $\psi[n]$  et non pas à la phase doublement différenciée, on fait une transformation inverse sur  $\{\Delta^2\psi_n\}$ . Donc on a à intégrer doublement la séquence  $\{\Delta^2\psi_n\}$

$$I^2(\Delta^2\psi_n) = I(I(\Delta^2\psi_n)) \quad (3.34)$$

où on a

$$I(\Delta^2\psi[n]) = \Delta\psi[n] = \Delta^2\psi[n] + \Delta\psi[n-1] \quad (3.35)$$

et

$$I(\Delta\psi[n]) = \psi[n] = \Delta\psi[n] + \psi[n-1] \quad (3.36)$$

La procédure pour estimer  $b_0$ ,  $b_1$  et  $b_2$  est la suivante (solution des moindres carrée)

- a) Faire un déroulement de la phase de  $\{y[n]\}$  comme décrit précédemment.
- b) Evaluer le vecteur  $\hat{\theta}$  par

$$\hat{\theta} = (G^T G)^{-1} G^T \hat{\psi} \quad (3.37)$$

Avec

$$\hat{\psi}^T = [\hat{\psi}[n_0] \hat{\psi}[n_0 + 1], \dots, \hat{\psi}[n_0 + N - 1]] \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \hat{\psi}[n] &= \Delta^2 \hat{\psi}[n] + 2\hat{\psi}[n-1] - \hat{\psi}[n-2] \\ n &= 2, \dots, n_0 + N - 1 \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{\psi}[n] &= \arg(y[n]y^*[n-1]y^*[n-1]y[n-2]) \\ n &= 2, \dots, n_0 + N - 1 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\hat{\psi}[n_0] = \arg(y[n_0]) \quad (3.41)$$

$$\hat{\psi}[n_0 + 1] = \arg(y[n_0 + 1]y^*[n_0]) + \hat{\psi}[n_0] \quad (3.42)$$

$$\hat{\theta}^T = [\hat{b}_0 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2] \quad (3.43)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & n_0 & n_0^2 \\ 1 & n_0 + 1 & (n_0 + 1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n_0 + N - 1 & (n_0 + N - 1)^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

L'estimation de  $b_2$ ,  $b_1$ , et  $b_0$  peut être obtenue séquentiellement par

$$\hat{\theta}[k+1] = \hat{\theta}[k] + P[k+1]g[k+1](\hat{\psi}[k+1] - g^T[k+1]\hat{\theta}_k) \quad (3.45)$$

et

$$P[k+1] = P[k] - \frac{P[k]g[k+1]g^T[k+1]P[k]}{(g^T[k+1]P[k]g[k+1] + 1)} \quad (3.46)$$

où  $\hat{\theta}[k]$  est l'estimée de  $\theta$  après  $k$  échantillons

$$g^T[k] = [1 \quad n_0 + k - 1 \quad (n_0 + k - 1)^2] \quad (3.47)$$

et

$$P[k] = [G^T[k]G[k]]^{-1} \quad (3.48)$$

où  $G[k]$  est une sous matrice de  $G$  ayant  $k$  lignes identiques au première  $k$  lignes de  $G$ .

Cette méthode d'estimation paramétrique d'un signal MLF atteint la borne de Cramer Rao pour un  $SNR$  supérieur à 8 dB. Cette approche peut être étendue aux signaux où le degré de la phase polynomiale est supérieur à deux. Toutefois, quand le degré de la phase augmente, les performances de la méthode se dégradent plus rapidement en fonction du  $SNR$ . En effet, la variance du bruit  $\Delta^2\omega[n]$  dans (3.30) est plus importante que celle de  $\omega[n]$  et s'exprime par

$$\text{var}(\Delta^2\omega[n]) = C_4^2\sigma^2 = 6\sigma^2 \quad (3.49)$$

avec  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Pour un signal à phase polynomiale de degré  $M$ , le bruit obtenu après  $M$  différentiations possède une variance dont l'expression est

$$\text{var}(\Delta^M \omega[n]) = C_M^2 \sigma^2 \quad (3.50)$$

La reconstruction correcte de la phase nécessite un  $SNR$  plus important quand le degré de la phase augmente. Ainsi, cette procédure n'est pas utilisée en pratique pour des signaux dont le degré de la phase est strictement supérieur à deux.

### 3.2 Modélisation d'Etat

Dans ce qui suit, on présente une méthode d'identification des paramètres des signaux chirps utilisant l'approche d'état. Cette approche est fondée sur un modèle d'état exact du signal, stationnaire mais non linéaire. L'estimation d'état est réalisée par une version étendue du filtre de Kalman, qui est non optimal puisqu'il est basé sur le modèle linéarisé. L'approximation apparaît localement au niveau de l'estimation d'état: à chaque instant, on effectue une linéarisation du modèle non linéaire sur lequel on applique la théorie de l'estimation optimale [La Scala and Bitmead, 1996], [Nishiyama, 1997].

On considère le modèle suivant pour un signal à valeur réelle, discret, à amplitude constante et à phase polynomiale:

$$\begin{aligned} y[n] &= a_0 \sin[\phi[n]] + v[n] \\ &= a_0 \sin\left\{ \sum_{k=0}^M b_k n^k \right\} + v[n] \quad n = 0, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

On peut définir plusieurs modèles non linéaires du signal suivant qu'on décide de faire apparaître la non-linéarité sur l'équation de mesure ou sur l'équation d'état

#### 3.2.1 Première Approche

Consiste à choisir comme vecteur état:

$$X(t) = [y(t) \dot{y}(t) \dot{\phi}(t) \ddot{\phi}(t)]^T \quad (3.52)$$

Il est démontré dans [Piasco et al, 1993] que ce modèle conduit à un système discret avec une non-linéarité sur l'équation d'état et une linéarité sur l'équation de mesure (ou de l'observation) :

$$\begin{cases} X(n+1) = f[X(n)] \\ y(n) = GX(n) + v(n), \quad G = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \end{cases} \quad (3.53)$$

A partir de l'estimation d'état, on obtient, à chaque instant, les estimées des paramètres:

$$\begin{cases} \theta = [a_0 \ b_0 \ b_1 \ b_2]^T \\ \hat{a}_0(n) = \left[ \hat{x}_1(n) + \frac{\hat{x}_2(n)}{\hat{x}_2(n)} \right]^{1/2} \\ \hat{b}_0(n) = \text{Arctg}\left(\frac{\hat{x}_1(n)\hat{x}_3(n)}{\hat{x}_2(n)}\right) - \Delta n \hat{x}_3(n) + \frac{1}{2}(\Delta n)^2 \hat{x}_4(n) \pm \lambda\pi \\ \hat{b}_1(n) = [0 \ 0 \ 1 - n\Delta] \hat{X}(n) \\ \hat{b}_2(n) = [0 \ 0 \ 0 \ 1/2] \hat{X}(n) \end{cases} \quad (3.54)$$

Avec  $\Delta$  : Période d'échantillonnage.

$f$  : Fonction non linéaire.

Le résultat a été amélioré en effectuant un filtrage retour du signal ou les initialisations sont les estimations finales du filtre « aller ».

### 3.2.2 Deuxième Approche

Une autre modélisation consiste à prendre comme vecteur d'état

$$X(t) = [a_0 \phi(t) \dot{\phi}(t) \ddot{\phi}(t)]^T \quad (3.55)$$

Cela conduit au modèle état suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

On suppose que le signal, entaché d'un bruit de mesure, est observé à l'instant  $t_k$

$$Y(t_k) = y(t_k) + v_k \quad (3.57)$$

où  $v_k$  est une séquence gaussienne, indépendante, centrée de variance  $R_v$ .

On dispose ainsi d'une équation dynamique continue associée à une équation de mesure discrète sur lesquelles on pourrait mettre en œuvre un filtre d'estimation d'état continu-discret.

On établit le modèle d'évolution discret équivalent au modèle continu ; pour cela on exploite les propriétés suivantes des polynômes :  
Pour tout polynôme  $\phi(x)$  de degré  $M$ , son développement de Taylor au point  $x_0$  conduit à l'expression suivante

$$\phi(x + x_0) = \sum_{k=0}^M \frac{x_0^k}{k!} \phi^{(k)}(x) \quad (3.58)$$

En mettant  $x_0 = 1$ , on obtient

$$\phi(x + 1) = \sum_{k=0}^M \frac{1^k}{k!} \phi^{(k)}(x) \quad (3.59)$$

On peut démontrer que

$$\phi^{(i)}(x + 1) = \sum_{k=i}^M \frac{1^{k-i}}{(k-i)!} \phi^{(k)}(x) \quad (3.60)$$

où  $^{(i)}$  : est l'opérateur dérivée  $i^{eme}$ .

Ayant  $\Delta$  comme période d'échantillonnage, on prend  $x = n\Delta$ , on aura

$$\begin{aligned}\phi^{(i)}(n\Delta + \Delta) &= \sum_{k=i}^M \frac{\Delta^{k-i}}{(k-i)!} \phi^{(k)}(n\Delta) \\ \phi^{(i)}(n+1) &= \sum_{k=i}^M \frac{\Delta^{k-i}}{(k-i)!} \phi^{(k)}(n) \\ \phi(n+1) &= \sum_{k=0}^M \frac{\Delta^k}{k!} \phi^{(k)}(n)\end{aligned}\quad (3.61)$$

Revenons aux composantes du vecteur état, où on a

$$\begin{aligned}x_2(k+1) &= \phi(k+1) = \phi(k) + \Delta \dot{\phi}(k) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{\phi}(k) \\ &= x_2(k) + \Delta x_3(k) + \frac{\Delta^2}{2} x_4(k)\end{aligned}\quad (3.62)$$

$$\begin{aligned}x_3(k+1) &= \dot{\phi}(k+1) = \dot{\phi}(k) + \Delta \ddot{\phi}(k) \\ &= x_3(k) + \Delta x_4(k)\end{aligned}\quad (3.63)$$

Finalement, on obtient le modèle discret suivant

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \Delta x_3(k) + \frac{\Delta^2}{2} x_4(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \Delta x_4(k) \\ x_4(k+1) = x_4(k) \end{cases}\quad (3.64)$$

On aboutit au système suivant

$$\begin{cases} x(k+1) = F \cdot x(k) \\ y(k) = g[x(k)] + v(k) \end{cases}\quad (3.65)$$

Avec

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta & \Delta^2 / 2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad g[x(k)] = x_1(k) \sin(x_2(k)) \quad (3.66)$$

On voit qu'on a obtenu un modèle d'état dont l'équation d'état est linéaire et l'équation de mesure est non-linéaire (Contrairement à l'approche précédente).

L'estimation d'état étendu est obtenue par Filtrage de Kalman Etendu (Chapitre 2). Rappelons que cette technique consiste à linéariser le modèle au premier ordre et appliquer sur celui-ci un filtre optimal d'estimation état. L'algorithme EKF consiste en une étape de prédiction suivie d'une étape d'estimation :

*\*Prédiction:*

La prédiction se résume dans le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{X}^-(n) = F \cdot \hat{X}(n-1) \\ P^-(n) = F \cdot P(n-1) \cdot F^T \end{cases} \quad (3.67)$$

Avec  $\hat{X}(n)$  : état estime

$\hat{X}^-(n)$ : état prédit

$P(n)$  : matrice de covariance d'erreur d'estimation

$P^-(n)$  : matrice de covariance d'erreur de prédiction

$(.)^T$  : opérateur transpose d'une matrice

*\*Estimation:*

On doit d'abord linéariser l'équation de mesure au premier ordre

$$g(x) = g[\hat{X}^-(n)] + J_g(\hat{X}^-(n))(X - \hat{X}^-(n)) \quad (3.68)$$

$$\text{Avec } J_g(\hat{X}^-(n)) = G(n) = [\partial g / \partial \hat{X}_1^-, \dots, \partial g / \partial \hat{X}_4^-] \quad (3.69)$$

$$G(n) = [\sin[\hat{X}_2^-(n)] \hat{X}_1^-(n) \cos[\hat{X}_2^-(n)] 0 0] \quad (3.70)$$

on aura le système

$$\begin{cases} K(n) = P^-(n).G^T(n).[G(n)P^-(n)G^T(n) + R_v]^{-1} \\ e(n) = y(n) - g[\hat{X}^-(n)] \\ \hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n)e(n) \\ P(n) = P^-(n) - K(n)G(n)P^-(n) \end{cases} \quad (3.71)$$

*\*Détermination des paramètres:*

A chaque instant, on détermine une estimation des paramètres du signal par des relations algébriques reliant ceux-ci aux composantes du vecteur d'état

Soit le vecteur des paramètres  $\theta = [a_0 \ b_0 \ b_1 \ b_2]^T$  à déterminer et  $X[0]$  le vecteur d'état correspondant à l'instant initial.

On a

$$\phi(n) = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 \quad (3.72)$$

On peut démontrer que:

$$\phi^{(i)}(n) = i! \sum_{k=i}^M C_k^i b_k n^{k-i} \quad (3.73)$$

Pour  $n=0$

$$\phi^{(i)}(0) = \begin{cases} b_0 & ; i = 0 \\ i! b_i & ; i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.74)$$

D'où:

$$\begin{aligned} \theta &= [a_0 \ \phi(0) \ \frac{\phi^{(1)}(0)}{1!} \ \frac{\phi^{(2)}(0)}{2!}]^T \\ &= [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0) \ \frac{x_4(0)}{2}]^T \end{aligned} \quad (3.75)$$

Qu'on peut écrire sous la forme vectorielle

$$\theta = AX(0) \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

On peut écrire la relation suivante

$$\hat{\theta} = A\hat{X}(0) \quad (3.77)$$

On doit donc trouver l'estimée  $\hat{X}(0)$  de  $X(0)$ . On procède comme suit en remarquant que

$$\hat{X}(n) = F\hat{X}(n-1) = F^2\hat{X}(n-2) = \dots = F^n\hat{X}(0) \quad (3.78)$$

on peut extraire  $\hat{X}(0)$  à partir de  $\hat{X}(n)$

$$\hat{X}(0) = F^{-n}\hat{X}(n) \quad (3.79)$$

et on obtient

$$\hat{\theta}(n) = AF^{-n}\hat{X}(n) \quad (3.80)$$

*\*Filtrage retour « backward »*

Comme dans la première approche, on peut améliorer le résultat en effectuant un filtrage retour du signal. Il est possible d'établir le modèle d'évolution retour comme suit

$$X(n-1) = F^{-1}X(n) \quad ; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta & \Delta^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

### 3.3 Estimation des paramètres d'un chirp reçu sur 2 capteurs

Dans ce paragraphe, l'approche d'état présentée dans le chapitre précédent est étendue au cas d'observation bidimensionnelle (utilisation de deux capteurs ; figure 3-2). On montre en simulation que cette approche donne de meilleurs résultats que les deux précédentes. Cette approche constitue une partie de notre contribution dans ce travail.

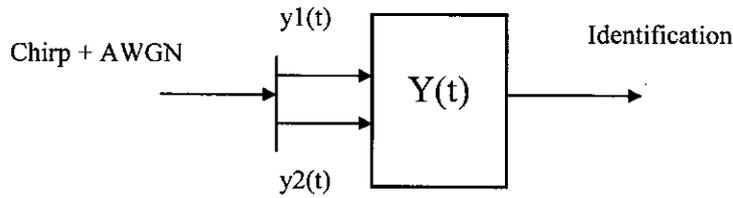


Figure 3-2 : Approche à Deux Capteurs

avec

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_0 \sin(\phi(t)) + v_1(t) \\ y_2(t) &= A_0 \sin(\phi(t - \tau)) + v_2(t) \end{aligned} \quad (3.82)$$

deux mesures indépendantes.

$v_1(t)$  et  $v_2(t)$  : AWGN décorreles et centrés.

$\tau$  : retard de réception entre capteur 1 et capteur 2.

L'idée consiste à appliquer le EKF sur  $y_1(t)$  et utiliser l'estimée résultante comme valeur de prédiction pour le EKF appliqué sur  $y_2(t)$  tout en gardant le même choix du vecteur d'état, soit  $X(t) = [a_0 \phi(t) \dot{\phi}(t) \ddot{\phi}(t)]^T$ .

L'équation dynamique reste la même que celle du cas précédent, mais on obtiendra un système à deux équations de mesure:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

En posant  $\tau = k\Delta$  ( $\Delta$  période d'échantillonnage), on obtient

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y_1(n) \\ y_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1[X(n)] \\ g_2[X(n)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \end{bmatrix} \\ g_1[X(n)] = x_1(n) \sin[x_2(n)] \\ g_2[X(n)] = x_1(n) \sin[x_2(n) - \Delta k x_3(n) + \frac{\Delta^2 k^2}{2} x_4(n)] \end{cases} \quad (3.84)$$

Donc, l'étape de prédiction reste la même que précédemment, pour l'étape d'estimation, elle s'effectue en deux étapes du fait de

l'utilisation d'une matrice d'observation bidimensionnelle avec deux mesures indépendantes:

$$\begin{cases} e_1(n) = y_1(n) - g_1(\hat{X}^-[n]) \\ K_1(n) = P^-(n)G_1(n)^T (G_1(n)P^-(n)G_1(n)^T + R_{v_1})^{-1} \\ \tilde{X}[n] = \hat{X}^-[n] + K_1(n)e_1(n) \\ \tilde{P}(n) = P^-(n) - K_1(n)G_1(n)P^-(n) \end{cases} \quad (3.85)$$

Ensuite

$$\begin{cases} e_2(n) = y_2(n) - g_2(\tilde{X}[n]) \\ K_2(n) = \tilde{P}(n)G_2(n)^T (G_2(n)\tilde{P}(n)G_2(n)^T + R_{v_2})^{-1} \\ \hat{X}[n] = \tilde{X}[n] + K_2(n)e_2(n) \\ P(n) = \tilde{P}(n) - K_2(n)G_2(n)\tilde{P}(n) \end{cases} \quad (3.86)$$

où on a les notations suivantes:

$\hat{X}, \tilde{X}$  : les états estimés pour le premier et second capteur respectivement

$\hat{X}^-$  : l'état prédit pour le premier capteur

$P, \tilde{P}$  : matrices de covariance d'erreur d'estimation pour le premier et second capteur respectivement

$P^-$  : matrice de covariance d'erreur de prédiction pour le premier capteur

$G_1$  et  $G_2$  provenant de la linéarisation au premier ordre du système d'équations de mesure autour du vecteur d'état prédit noté  $\hat{X}^- [n]$ , sont calculées comme suit

$$g_1(X) = g_1(\hat{X}^- [n]) + \left( \frac{\partial g_1}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}^- [n]} (X - \hat{X}^- [n]) \quad (3.87)$$

$$g_2(X) = g_2(\tilde{X}^- [n]) + \left( \frac{\partial g_2}{\partial X} \right)_{X=\tilde{X}^- [n]} (X - \tilde{X}^- [n]) \quad (3.88)$$

Avec

$$G_1(n) = \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}^-[n]} = \begin{bmatrix} \sin(\hat{x}_2^-[n]) & \hat{x}_1^-[n] \cos(\hat{x}_2^-[n]) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$$\begin{aligned} G_2(n) &= \left( \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial X} \right)_{X=\hat{X}^-[n]} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\varphi[\hat{X}^-]) & \hat{x}_1^-[n] \cos(\varphi[\hat{X}^-]) & -k\Delta \hat{x}_1^-[n] \cos(\varphi[\hat{X}^-]) & (k^2 \Delta^2 / 2) \hat{x}_1^-[n] \cos(\varphi[\hat{X}^-]) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\text{et} \quad \varphi[X] = x_2[n] - \tau x_3[n] + \frac{\tau^2}{2} x_4[n] \quad (3.91)$$

L'identification des paramètres et l'utilisation du filtrage retour sont effectuées de la même manière que dans la deuxième approche (Utilisation des mêmes équations), en prenant en compte les résultats du filtrage sur  $y_2(t)$ .

On teste en simulation les trois approches d'état dans le cas de signal à modulation linéaire de fréquence. On étudie aussi le comportement dynamique des différents paramètres estimés par ces approches puis on effectue une analyse statistique de leurs performances. On compare les résultats obtenus avec la borne de Cramer Rao ; pour ce dernier point, on devra calculer cette borne pour le cas de signaux à valeurs réelles à amplitude constante et à phase polynomiale, c'est le propos du chapitre 4.

# Chapitre 4

## Borne de Cramer Rao

La méthode primaire pour borner l'erreur qui peut être accomplie en estimant les paramètres du signal mesure est la Borne Inférieure de Cramer Rao. Plusieurs versions de cette borne existent pour les cas déterministes à paramètres inconnus ainsi que pour les paramètres statistiques. [*Franco and Friedlander, 1995*], [*Friedlander and Franco, 1995*], [*Peleg and Porat, 1991*], [*Ristic and Boashash, 1988*].

Dans ce chapitre on établit la dérivation de la Borne de Cramer Rao pour les signaux réels à amplitude constante et à phase polynomiale (de degré 2) ; noyés dans un bruit additif, Gaussien et blanc (AWGN). Il est intéressant d'analyser la meilleure performance possible des estimateurs potentiels de l'amplitude et des coefficients de la phase comme fonction des paramètres du signal et du SNR (rapport signal a bruit).

Pour cela, on étudie le cas général de signaux noyés dans un bruit AWGN [*Belouchrani, 2000*].

Soit l'observation  $x$  paramétrée par le paramètre  $\theta$ .

### Théorème -1

On suppose que la densité de probabilité  $P(x, \theta)$  satisfait la condition de régularité:

$$E\left(\frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta}\right) = 0, \text{ pour tout } \theta \quad (4.1)$$

Où la moyenne d'ensemble est prise par rapport à  $P(x, \theta)$ . La variance de n'importe quel estimateur non biaisé doit satisfaire l'inégalité suivante:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E\left(\frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right)}. \quad (4.2)$$

Le dénominateur dans (4.2) est appelé *Information de Fisher*  $I(\theta)$  pour les données  $x$ .

$$I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta^2}\right) \quad (4.3)$$

Il s'ensuit que quand la CRLB est atteinte, la variance est l'inverse de l'Information de Fisher. Intuitivement, plus on a d'information, plus faible est la borne.  $I(\theta)$  a les propriétés d'une mesure d'information; elle est non négative et additive pour des observations indépendantes.

#### 4.1 CRLB pour des signaux noyés dans un bruit blanc Gaussien

On suppose un signal déterministe, avec un paramètre  $\theta$  inconnu; observé dans un bruit blanc Gaussien

$$x(n) = s(n, \theta) + w(n) ; n = 0, \dots, N-1 \quad (4.4)$$

La fonction de vraisemblance est donnée par

$$P(x, \theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \text{EXP}\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - s(n, \theta))^2\right) \quad (4.5)$$

En dérivant le logarithme Népérien de cette fonction par rapport à  $\theta$ , on trouve

$$\frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(x(n) - s(n, \theta)) \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta}] \quad (4.6)$$

et

$$\frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [(x(n) - s(n, \theta)) \frac{\partial^2 s(n, \theta)}{\partial \theta^2} - (\frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta})^2] \quad (4.7)$$

d'où

$$E \left[ \frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \quad (4.8)$$

Enfin

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{\sigma^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \left( \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta} \right)^2} \quad (4.9)$$

Cette forme de la borne montre l'importance de la dépendance du signal sur  $\theta$ . Une variation rapide des signaux à la suite d'un changement du paramètre inconnu résulte dans une meilleure estimation.

## 4. 2 Extension à un vecteur des paramètres

### \*Théorème -2

On suppose que la densité de probabilité  $P(x, \theta)$  satisfait la condition de régularité:

$$E \left( \frac{\partial \ln P(x, \theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \text{ pour tout } \theta. \quad (4.10)$$

Où la moyenne d'ensemble est prise par rapport à  $P(x, \theta)$ . La matrice de covariance de n'importe quel estimateur non biaisé doit satisfaire

$$C_{\hat{\theta}} - I^{-1}(\theta) \geq 0 \text{ (La matrice est semi-définie positive)}. \quad (4.11)$$

L'information de Fisher  $I(\theta)$  est donnée par:

$$[I(\theta)]_{ij} = -E \left( \frac{\partial^2 \ln P(x, \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) \quad (4.12)$$

### 4.3 CRLB des paramètres d'un signal noyé dans un bruit blanc Gaussien

On suppose un signal déterministe avec un vecteur de paramètre  $\theta$  inconnu, observé dans un bruit blanc Gaussien.

$$x(n) = s(n, \theta) + w(n) ; n = 0, 1, k, N-1 \quad (4.13)$$

En généralisant les résultats de la section (4.1) à un vecteur de paramètres, on trouve que les éléments de la matrice de l'information de Fisher sont donnés par

$$[I(\theta)]_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial s(n, \theta)}{\partial \theta_j} \quad (4.14)$$

### 4.4 Application pour le signal Chirp

Pour un signal chirp, on a le modèle suivant

$$\begin{cases} s(n, \theta) = a_0 \sin(b_0 + b_1 n + b_2 n^2) \\ \theta = [a_0 \ b_0 \ b_1 \ b_2]^T \end{cases} \quad (4.15)$$

Le CRLB est donné par

$$CRLB_{\theta} = 1 / I(\theta) \quad (4.16)$$

Avec

$$\begin{aligned} I[\theta]_{11} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N \sin^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\ I[\theta]_{12} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N \sin(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) a_0 \cos(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\ I[\theta]_{13} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N \sin(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) a_0 n \Delta \cos(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\ I[\theta]_{14} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N \sin(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) a_0 n^2 \Delta^2 \cos(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I[\theta]_{21} &= I[\theta]_{12} \\
I[\theta]_{22} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N a_0^2 \cos^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\
I[\theta]_{23} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N a_0^2 \Delta n \cos^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\
I[\theta]_{24} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N a_0^2 \Delta^2 n^2 \cos^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\
I[\theta]_{31} &= I[\theta]_{13} \\
I[\theta]_{32} &= I[\theta]_{23} \\
I[\theta]_{33} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N a_0^2 \Delta^2 n^2 \cos^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\
I[\theta]_{34} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N a_0^2 \Delta^3 n^3 \cos^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2) \\
I[\theta]_{41} &= I[\theta]_{14} \\
I[\theta]_{42} &= I[\theta]_{24} \\
I[\theta]_{43} &= I[\theta]_{34} \\
I[\theta]_{44} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^N a_0^2 \Delta^4 n^4 \cos^2(b_0 + b_1 n \Delta + b_2 n^2 \Delta^2)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Et

$$I[\theta] = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} & I_{14} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} & I_{24} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} & I_{34} \\ I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Pour les trois approches de modélisation d'état, la borne de Cramer Rao est commune et est calculée de façon récurrente; on présentera en simulation (chapitre 5) les résultats de la comparaison de l'erreur quadratique moyenne (MSE) au CRLB, en fonction du SNR pour chaque approche et pour chaque paramètre estimé.

# Chapitre 5

## Simulations

On se propose de comparer l'efficacité des modélisations précédentes. On choisit le chirp modélisé par  $y[t] = a_0 \sin(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)$  et entaché d'un bruit de mesure  $v[t]$  gaussien, blanc et centré.

les caractéristiques du signal sont les suivantes

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \pi/2 \text{ rd}, \quad b_1 = 628 \text{ rd/s}, \quad b_2 = 1227 \text{ rd/s}^2$$

Echantillonné à  $T=1 \text{ ms}$ ; la longueur de l'échantillon est de 256 points.

Pour différents niveaux de bruit on a procédé à l'identification des paramètres. Pour chaque niveau de bruit, les filtres ont été testés sur 3000 séquences de bruit différentes. Les initialisations ont été choisies à 20 % des valeurs choisies, soit

$$a_0 = 1.2, \quad b_0 = 1.884 \text{ rd}, \quad b_1 = 753.6 \text{ rd/s}, \quad b_2 = 1472.4 \text{ rd/s}^2$$

Pour l'approche à deux capteurs, on se met dans les mêmes conditions citées ci-dessus, avec un choix du retard  $\tau = T = 1 \text{ ms}$ .

On teste les performances des trois approches proposées tant au niveau du comportement dynamique que celui de l'analyse statistique. La simulation est faite utilisant « Matlab » (version 5.3), par lequel on a généré le signal utile ainsi que le bruit de mesure.

## 5.1 Comportement dynamique du filtre

On considère le signal défini précédemment entaché d'un bruit additif blanc, gaussien et centré.

### 5.1.1 Evolution temporelle des paramètres

Les figures suivantes montrent les tracés des estimations des paramètres du signal en fonction du nombre d'échantillons obtenus par les approches utilisant le filtre de kalman étendu et un rapport signal à bruit  $SNR=15\text{ dB}$ .

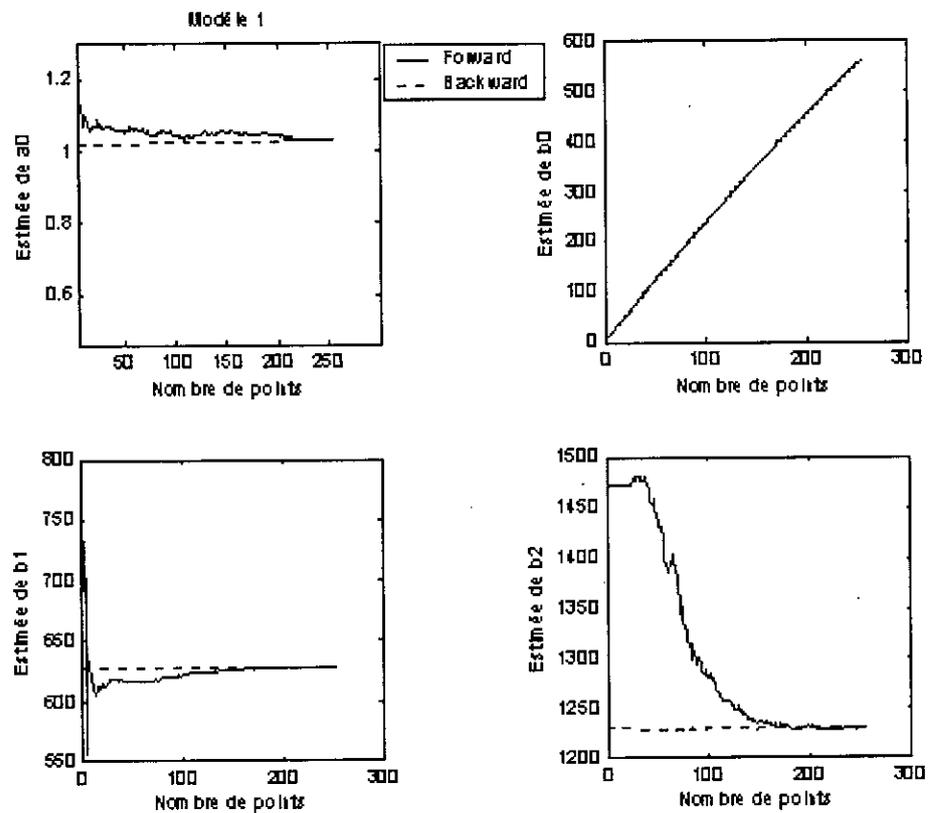


Figure 5-1: Evolution Temporelle des Estimations des Paramètres

Approche 1

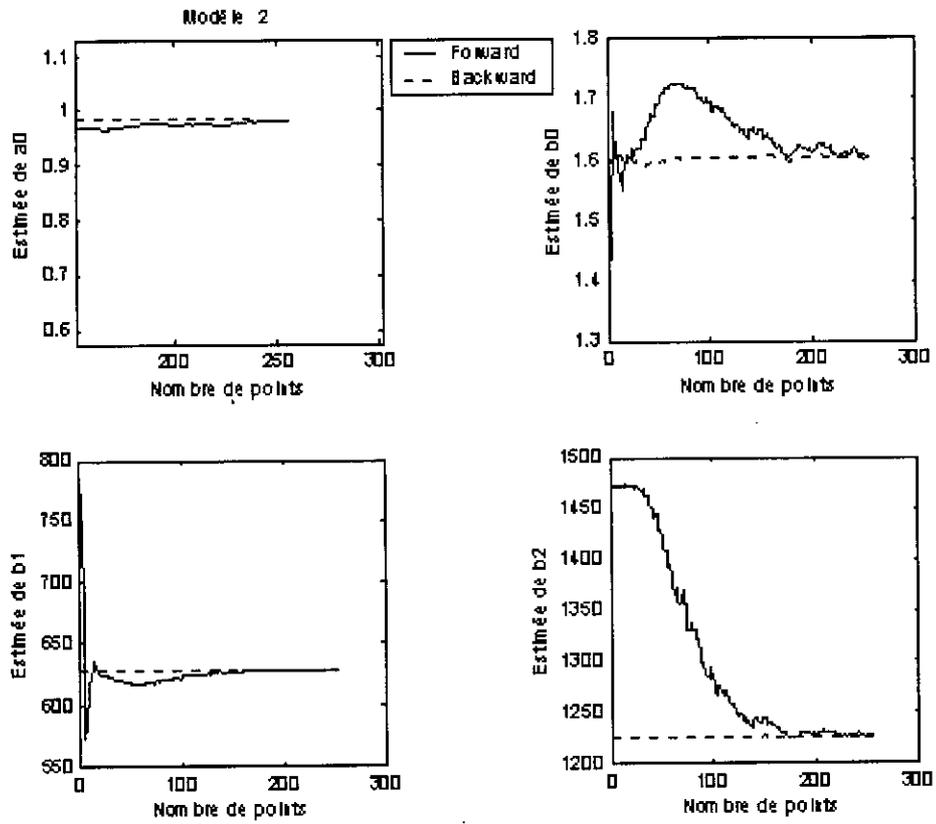


Figure 5-2: Evolution Temporelle des Estimations des Paramètres  
Approche 2

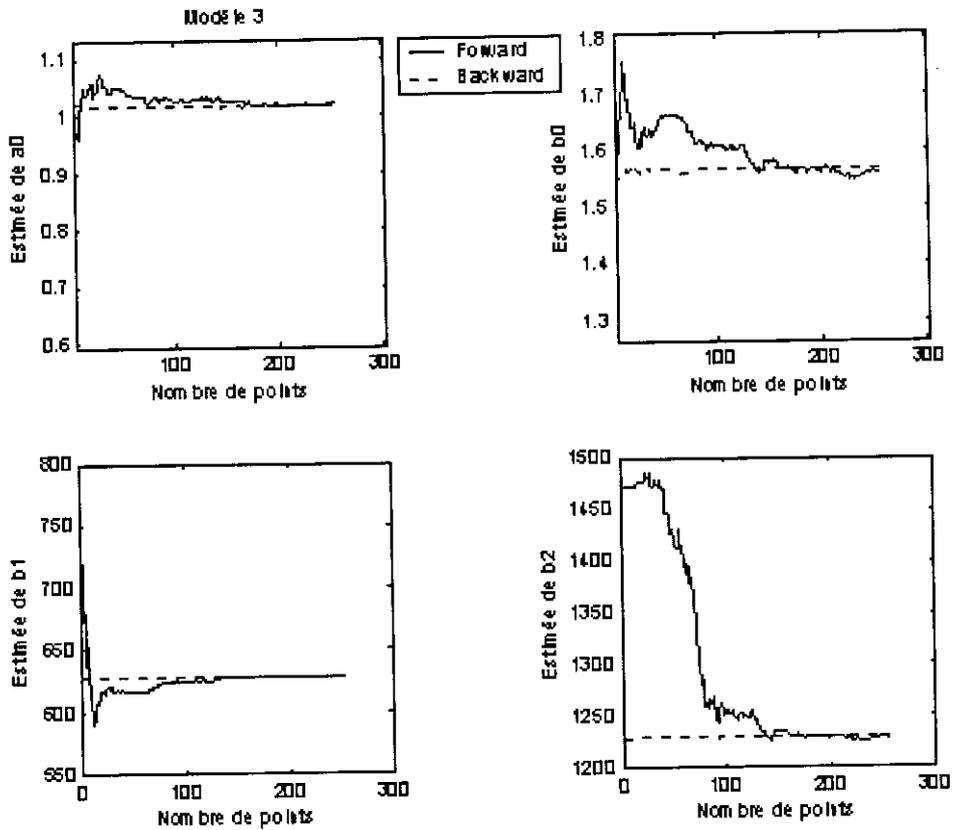


Figure 5-3: Evolution Temporelle des Estimations des Paramètres  
Approche 3

Ces figures montrent que l'estimation de la phase initiale est moins bonne que celle des autres paramètres de la phase et de l'amplitude où on constate qu'ils sont correctement estimés au bout de 200 points. On note aussi que les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  sont estimés plus rapidement que l'amplitude et la phase initiale pour les trois approches; cette remarque s'est confirmée après un nombre important de réalisations. Aussi, l'erreur relative est plus importante pour l'estimation de la phase initiale. En effet, celle-ci est calculée en utilisant les estimées des coefficients de plus haut degré et par suite les erreurs commises s'accroissent. On obtient une amélioration des résultats de convergence due au filtrage retour.

### 5.1.2 Observations d'une réalisation du signal

Les figures (5-4), (5-5) et (5-6) représentent le signal non bruité, le bruit de mesure, les observations d'une réalisation ainsi que l'écart entre les observations du signal et le signal reconstruit à partir du modèle identifié (pour un  $SNR=0\text{ dB}$ ) pour les trois approches.

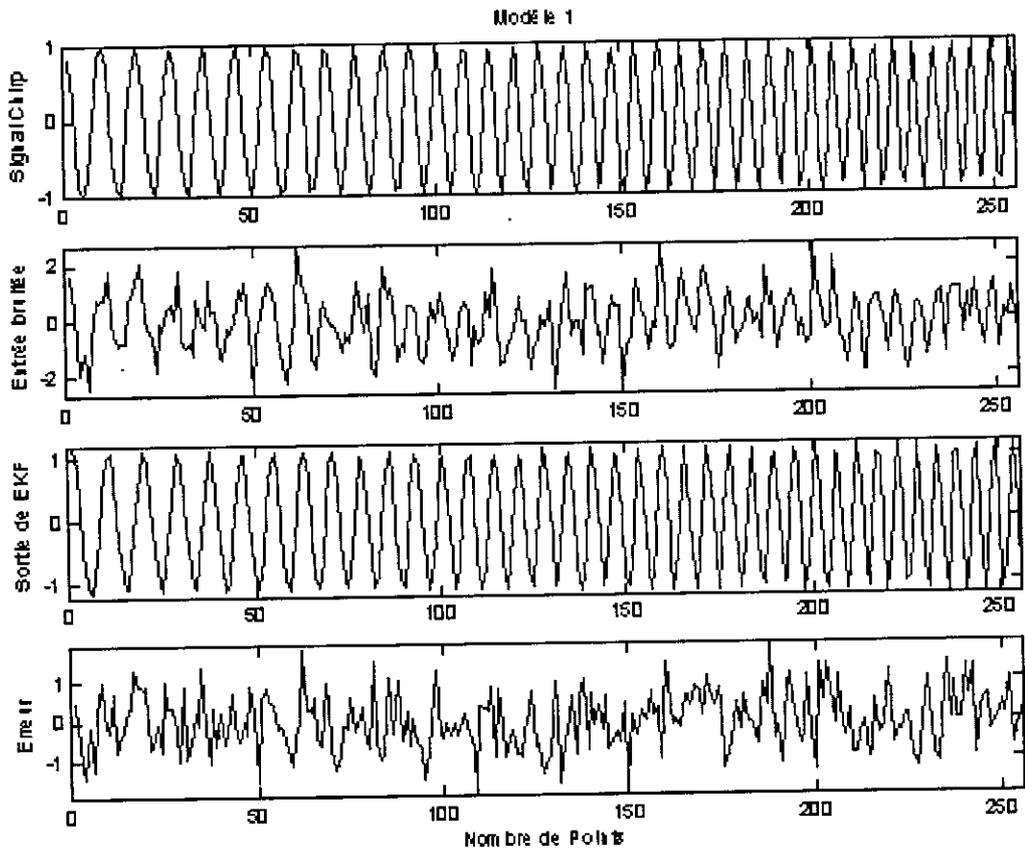


Figure 5-4: Observation d'une Réalisation du Signal  
Approche 1

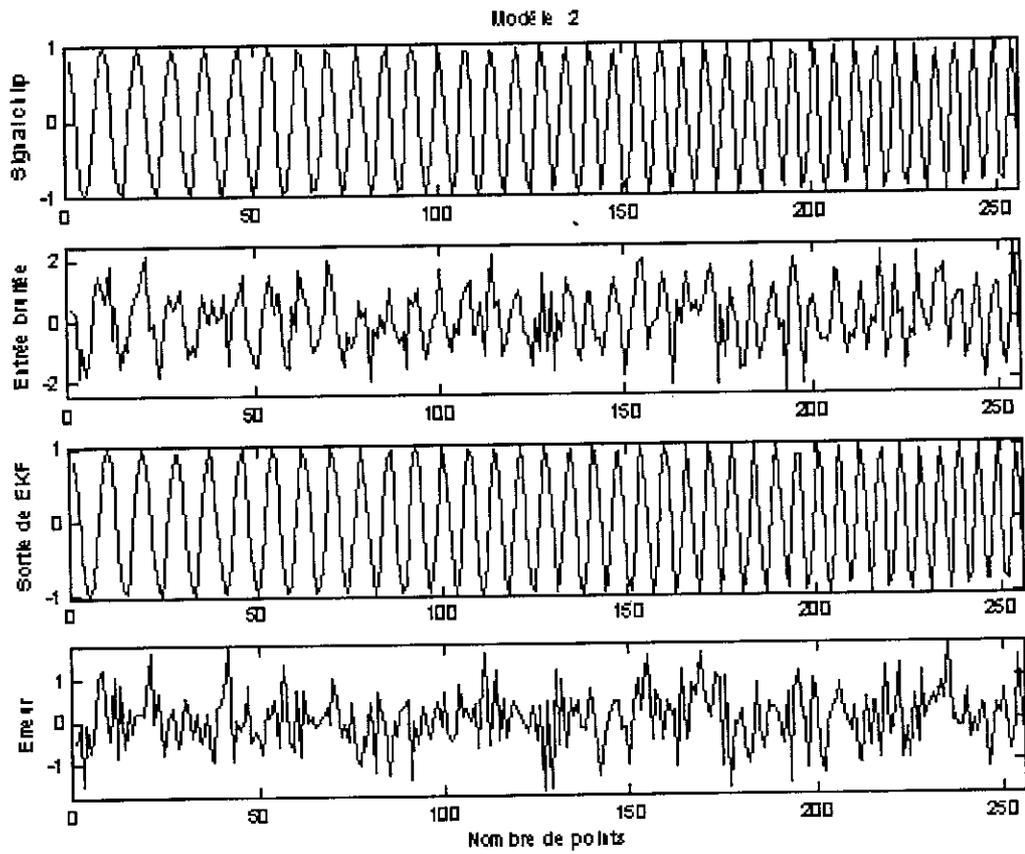


Figure 5-5: Observation d'une Réalisation du Signal  
Approche 2

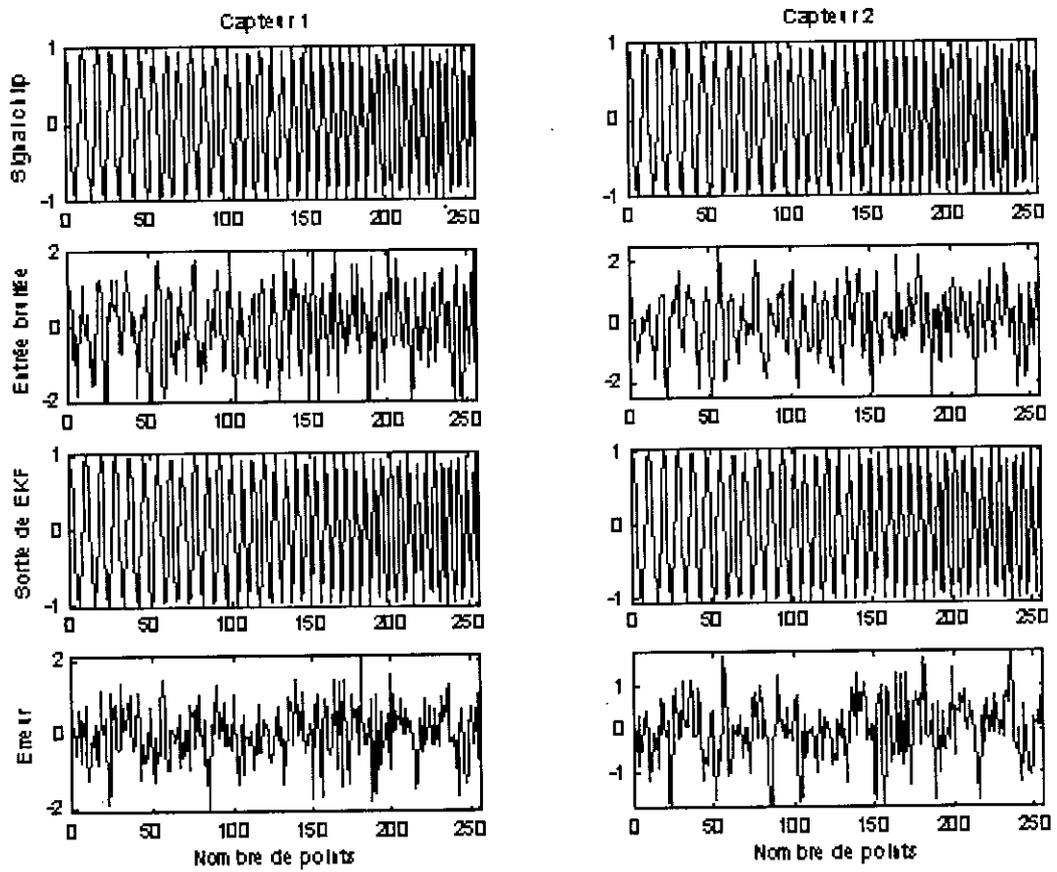


Figure 5-6: Observation d'une Réalisation du Signal

## Approche 3

De ces trois tracés, on peut voir qu'on récupère le signal utile (non bruité). Bien que cette simulation ne nous permet pas de comparer les trois estimateurs, elle nous donne une idée au préalable sur le bon fonctionnement des trois filtres.

## 5.2 Etude statistique

L'étude statistique consiste en l'évaluation du pourcentage de divergence du filtre (défini ultérieurement) ainsi que la comparaison de l'erreur quadratique moyenne ( *MSE* ) des trois estimateurs à la borne de Cramer-Rao calculée au *chapitre 4*.

### 5.2.1 Pourcentage de divergence

La figure (5.10) présente le pourcentage de divergence pour les trois approches pour un *SNR* variant de 0 à 15 *dB*. On estime que le filtre converge si la relation suivante est vérifiée :

$$\theta - \hat{\theta} \leq IC.\theta \quad (5.6)$$

Avec :  $IC = ic.\underbrace{[1, \dots, 1]}_{\text{length } \theta}$

En simulation, on étudie la convergence du filtre pour  $b_1$  et  $b_2$  avec le même intervalle de confiance  $ic = 0.01$  (soit à 99%) et la convergence pour  $a_0$  et  $b_0$  avec l'intervalle de confiance  $ic = 0.05$  (soit à 95%).

La figure V-10 représente le tracé du pourcentage de divergence pour les trois approches.

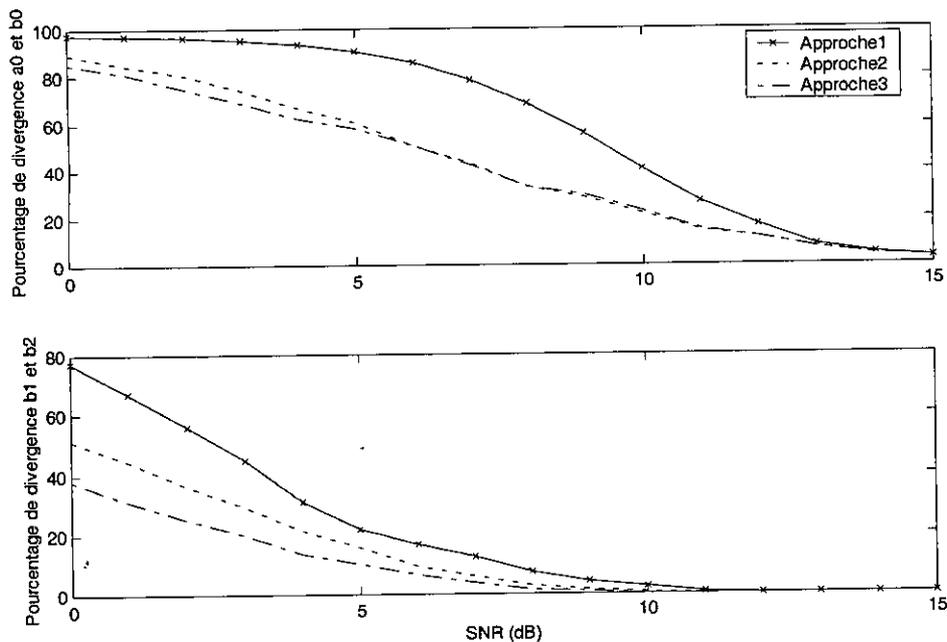


Figure 5-10: Pourcentage de Divergence

Pour l'amplitude et la phase initiale, les trois méthodes font apparaître des séquences divergentes même pour un  $SNR = 15$  dB. Cependant les approches où la non-linéarité est sur l'équation de mesure donnent de meilleurs résultats pour des  $SNR$  inférieurs à 14 dB. Pour les autres paramètres de la phase, à partir d'un  $SNR = 12$  dB, on ne constate plus aucun cas de divergence pour la première approche. Le résultat est meilleur pour la seconde approche où cette constatation est vraie à partir d'un  $SNR = 11$  dB. Le meilleur résultat est celui du cas à deux capteurs où on a une convergence à 100 % vers les vraies valeurs à partir d'un  $SNR = 10$ . Ceci confirme la supériorité de la troisième approche comparée aux deux autres.

### 5.2.2 Comparaison du MSE au CRLB

La figure (5.11) montre les traces de borne de Cramer-Rao (CRLB) qui est commune pour les trois approches) et des erreurs quadratiques moyennes (MSE au lieu de la variance car le biais de chaque estimateur est très petit) pour chaque approche.

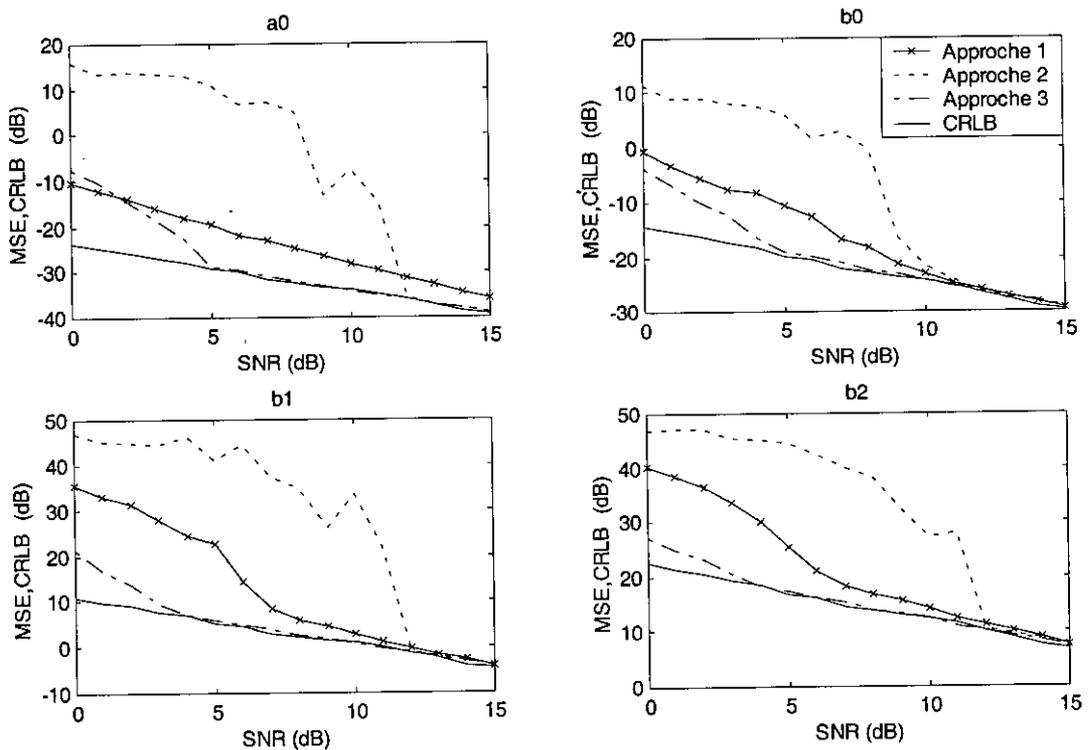


Figure 5-11 : Comparaison des MSE aux CRLB

Cette figure montre que les trois estimateurs sont efficaces, où on constate que l'estimateur de la première approche atteint la CRB pour un  $SNR$  supérieur à 12 dB, le second estimateur atteint la CRB pour un  $SNR$  supérieur à 11 dB, alors que le meilleur estimateur est celui de l'utilisation de deux capteurs où la CRB est atteinte à partir d'un  $SNR=5$  dB.

# Conclusion

Ce travail porte sur la caractérisation et l'identification des paramètres des signaux à amplitude constante et à phase polynomiale. Notre principale contribution réside dans le développement de deux algorithmes récurrents de poursuite des caractéristiques des signaux mono-composantes dont les observations sont entachées d'un bruit blanc additif. Un des avantages des techniques proposées est bien évidemment l'implémentation possible en temps réel.

En effet , après avoir réalisé un grand nombre d'essais avec des niveaux de bruit différents on peut tirer les conclusions suivantes :

Les méthodes utilisant le EKF appliquées à l'identification des paramètres d'un chirp sont efficaces. Elles assurent une convergence dans de bonne condition dans le sens où les estimateurs sont pratiquement non biaisés, l'erreur d'estimation est faible et la convergence vers les valeurs exactes est rapide (200 points suffisent en moyenne). Les deux nouvelles modélisations où la non-linéarité apparaît au niveau de l'équation de mesure ont donné de meilleurs résultats que l'approche utilisant une équation de mesure linéaire, un résultat attendu du fait que le nombre des équations à linéariser se réduisait à une seule équation contrairement à la première approche où on avait à linéariser 4 équations, ce qui signifie une réduction des approximations. Il a fallu prouver cette analyse par des simulations, ce qui a été l'objet du *Chapitre 5* venu confirmer la supériorité des deux nouvelles modélisations. L'utilisation d'une deuxième mesure permettait d'améliorer encore l'estimation des paramètres de la chirp,

ceci apparaît particulièrement du tracé des MSE en fonctions du SNR pour chaque approche.

Au vu de ces résultats, il est envisagé d'étendre ces méthodes au cas plus généraux qui sont donnés dans ce qui suit, et résumant Les perspectives de ce travail:

- Validation de ces méthodes à travers leurs applications sur des signaux réels de type radar, sonar ou télécommunications.
- L'extension des méthodes basées sur le filtre de Kalman étendu au cas des signaux multi-composantes, ceci semble faisable en augmentant la dimension du vecteur d'état, toute fois il faudra étudier le problème de l'initialisation du filtre qui devient délicate plus on monte en nombre de composantes.
- Etude des signaux dont l'amplitude n'est pas constante et la phase n'est pas nécessairement polynomiale. Si les paramètres sont analytiques, les méthodes basées sur le filtre de Kalman étendu doivent pouvoir s'étendre puisque chaque fonction peut être approchée par son développement polynomial.
- Etude de l'influence de la présence d'un bruit coloré au niveau des observations.

## Références

- [Barbarossa, 1995] Barbarossa, S.; Analysis of Multicomponent LFM Signals by a Combined Wigner-Hough Transform, *IEEE. Trans. Signal Processing*, vol. 43, no 6, June 1995.
- [Belouchrani, 2000] Belouchrani, A., Theorie de l'estimation, cours de post-graduation, *ENP*, 2000.
- [Benidir and Ouldali, 1999] Benidir, M, Ouldali, A.; Polynomial Phase Signal Analysis Based on the Polynomial Derivatives Decompositions, *IEEE. Trans. Signal Processing*, vol. 47, no. 7, July 1999.
- [Boashash, 1992] Boashash, B., Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal-Part 1: Fundamentals, *PROCEEDINGS OF THE IEEE*, VOL. 80, NO. 4, APRIL 1992.
- [Boashash, 1992] Boashash, B., Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal-Part 2: Algorithms and Applications, *PROCEEDINGS OF THE IEEE*, VOL. 80, NO. 4, APRIL 1992
- [Brookner, 1998] Brookner, E., Tracking and Kalman Filtering Made Easy, A Wiley-Interscience Publication.
- [Brown and Hwang, 1997] Brown, R.G., Hwang, P.Y.C., Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, third edition, John Wiley, 1997.
- [Djuric and Kay, 1990] Djuric, P. M, Kay, M., Parameter Estimation of Chirp Signals, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol.38, pp. 2118-2126, Dec. 1990.
- [Francos and Friedlander, 1995] Francos, J.M; Friedlander, B.; Bounds for Estimation of Multicomponent Signals with Random Amplitude and Deterministic Phase, *IEEE Trans. Signal Processing*. Vol. 43, pp. 1161-1172, May 1995.

- [Friedlander and Francos, 1995] Friedlander, B, Francos, JM.; Estimation of Amplitude and Phase Parameters of Multicomponent Signals, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol 43, pp. 917-926, Apr. 1995.
- [Gini et al, 2000] Gini, F, Montanari, M, Verrazzani, L.; Estimation of Chirp Radar Signals in Compound-Gaussian Clutter : Cyclostationary Approach, *IEEE. Trans. Signal Processing*, vol. 48, no 4, April 2000.
- [Handel and Tichavsky, 1997] Handel, P, Tichavsky, P.; Frequency Rate Estimation at High SNR, *IEEE. Trans. Signal Processing*, (SP-8752), 1997.
- [James and al, 1994] James, B, Anderson, B. D. O, and Williamson, R. C.; Conditional Mean and Maximum Likelihood Approaches to Multiharmonic Frequency Estimation, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol 42, pp. 1366-1375, June 1994.
- [Kalman, 1960] Kalman, R.E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Trans. of the ASME – J. of Basic Engr.*, 35-45 (March 1960).
- [La Scala and Bitmead, 1996] La Scala, B. F, Bitmead, R. R.; Design of an Extended Kalman Filter Frequency Tracker, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 44, pp. 739-742, March. 1996.
- [Nishiyama, 1997] Nishiyama, K.; A Nonlinear Filter for Estimating a Sinusoidal Signal and Its Parameters in White Noise: On the case of a Single Sinusoid, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 45, pp. 970-981, Apr. 1997.
- [Peleg and Friedlander, 1995] Peleg, S., Friedlander, B., The discrete Polynomial phase Transform, *IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING*, VOL. 43, NO. 8, AUGUST 1995.
- [Peleg and Porat, 1991] Peleg, S, Porat, B.; The Cramer-Rao Lower Bound for Signals with Constant Amplitude and Polynomial Phase, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol 39, pp. 749-752, March. 1991.

- [Piasco et al, 1993] Piasco, J.M ; Guglielmi, M; Durou, L .; Identification de Chirps par Filtrage de Kalman Etendu , *QUATORZIEME COLLOQUE GRETSI-JUAN-LES-PINS-DU 13 AU 16 SEPTEMBRE 1993*.
- [Proakis, 1995] Proakis, J. G.; Digital Communications, New York: Mc Graw-Hill, 1995.
- [Ristic and Boashash, 1988] Ristic, B, Boashash, B.; Comments on The Cramer-Rao Lower Bounds for Signals with Constant Amplitude and Polynomial Phase, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 46, pp. 1708-1709, June. 1988.
- [Shamsunder et al, 1995] Shamsunder, S, Giannakis, G, B, Friedlander, B.; Estimating Random Amplitude Polynomial Phase Signals: A Cyclostationary Approach, *IEEE. Trans. Signal Processing*, vol. 43, no 2, February 1995.
- [Tichavsky and Handel, 1999] Tichavsky, P, Handel, P.; Multicomponent Polynomial Phase Signal Analysis using a Tracking Algorithm, *IEEE. Trans. Signal Processing*, EDICS: 3.6.1, May 1999.

نقترح في عملنا هذا التطرق لمشكلة التعريف الوسيط لإشارة وحيدة التركيب ذات سعة ثابتة وطور علي شكل كثير حدود . نتخذ نهجا نستعمل فيه تمثيلا حاليا للإشارة. بهذا يصبح المشكل متمثلا في تقدير شعاع حالي انطلاقا من مراقبات الإشارة. ندرس تمثيلين غير خطيين. تقدير الحالة يتم بمساعدة مرشح KALMAN ممدود. عند كل لحظة نقوم بعملية تخطيط الحالة الغير خطية ؛ التي عليها نطبق نظرية التقدير المثالي. نجرب في التضاهر الطريقتين المقترحتين في حالة إشارة ذات تواتر معدل خطيا. ومسطات الإشارة يتم إستنتاجها من تقدير شعاع الحالة بعلاقات جبرية. ندرس تفاعل مختلف الوسيطات المقدر في هذه الطرق ثم نقوم بتحليل إحصائي لأدائهم. نقارن النتائج المحصل عليها بحد CRAMER-RAO ؛ كذلك نتحقق من حسن عمل المرشح بتعريف معايير تفاعل الحالة. الكلمات المفتاحية: إشارة Chirp ؛ مرشح KALMAN ممدد؛ تقدير الوسيط؛ طور متعدد الدرجات.

## ABSTRACT

The purpose of this work is the identification of a mono-component polynomial phase and constant amplitude signal. We adopt an approach using a state modelling of the signal. The problem to solve becomes the evaluation of a state vector from the observations of the signal.

We study two non-linear states models of the signal. We evaluate the states using an Extended Kalman Filter (EKF). For every instant, we do a linearization of the non-linear model and apply the theory of the optimal estimation. In the simulation, we test the two proposed methods in the case of a linear frequency modulation signal. We deduct the signal parameters from the estimation of the state vector using algebraic relations.

We study the different parameter dynamic behaviour estimated by these methods and perform a statistical analysis of their performances. We compare the obtained results to the Cramer-Rao Bound. Finally, we verify that the filter is working properly by defining a model validation criteria.

## KEYWORDS

Chirp Signal – Extended Kalman Filter - Parameters Estimation – polynomial phase.

## RESUME

Dans ce mémoire, on s'intéresse au problème de l'identification paramétrique d'un signal mono composante à amplitude constante et à phase polynomiale. On adopte une approche utilisant une modélisation d'état du signal. Le problème à résoudre devient alors celui de l'estimation d'un vecteur d'état à partir des observations du signal.

On étudie deux modèles d'état non-linéaires du signal. L'estimation de l'état se fait à l'aide d'un filtre de Kalman étendu (EKF). A chaque instant, on effectue une linéarisation du modèle non-linéaire sur lequel on applique la théorie de l'estimation optimale. On teste en simulation les deux méthodes proposées dans le cas particuliers d'un signal à modulation linéaire de fréquence. Les paramètres du signal se déduisent de l'estimation du vecteur d'état par des relations algébriques.

On étudie le comportement dynamique des différents paramètres estimés par ces méthodes puis on effectue une analyse statistique de leurs performances. On compare les résultats obtenus à la borne de Cramer Rao. Aussi on vérifie le bon fonctionnement du filtre en définissant un critère de validation du modèle.

## Mots Clefs

Signal Chirp – Filtre de Kalman étendu – Estimation des Paramètres – Phase Polynomiale.