

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

المدرسة الوطنية للتكنولوجيا
BIBLIOTHEQUE - المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Alex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES.

SUJET

**CALCUL DE RESISTANCE
D'UNE MATRICE DE FILAGE
A FROID A CONTENEUR
HEXAGONAL**

Proposé et dirigé par :

ELEOD Andras

Maitre-assitant à l'E.N.P.

Etudié par :

ZEBDI Saïd

Promotion : Juin 1985

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

—»O«—

وزارة التعليم والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

—»O«—

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

—»O«—

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

**CALCUL DE RESISTANCE
D'UNE MATRICE DE FILAGE
A FROID A CONTENEUR
HEXAGONAL**

Proposé et dirigé par :
ELEOD Andras
Maître-assistant à l'E.N.P.

Etudié par :
ZEBDI Saïd

Promotion : Juin 1985

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

-à mon père grâce à qui j'ai pu poursuivre mes études
et à qui je dis MERCI du plus profond du cœur.

-à ma mère qui m'a toujours encouragé.

-à ma femme

-à ma fille dont le sourire m'a accompagné durant mon
travail.

-à mes frères et sœurs.

-à mes proches parents et aux moins proches

-à tous mes amis

Z. G. Bri

REMERCIEMENTS

Je remercie tout d'abord ALLAH sans qui nous serions peu de chose.

Mes remerciements s'adressent ensuite à M^r Eleod Andras pour l'immense aide qu'il m'a apporté pour l'accomplissement de ce travail.

Je remercie également les techniciens et responsable du Centre de calcul pour leur aide et leur gentillesse.

Je remercie tous les enseignants qui ont participé à ma formation.

Merci à tous mes amis

Merci à Abdelsalam.

Abdel

Département: Génie Mécanique

دائرة: هندسة ميكانيكية

Promoteur: ELEOD ANDRAS

موجه: ايليود اندراس

Elève Ingénieur: ZEBDI SAID

تلميذ مهندس: زبدي سعيد

الموضوع: حساب مقاومة قالب ذي ثقب مسدس لقولبة المعادن .

الملخص: تتمثل هذه الدراسة في تعيين الاجهادات المؤثرة على الحافة المسدسة

الداخلية لقالب يعمل على البارد .

و يكون حل معادلات المرونة في حالة الوضع الاجهادي المستوي ،

باستعمال طريقة موسكهيليشفيلي المطبقة ضمن دائرة مضاعفة الارتباط .

و تستدعي هذه الطريقة استخدام التحولات المطابقة في الاعداد المركبة.

متسلسلات لورونت وتكاملات كوشي .

و يتم حساب دالة التحويل و الاجهادات على الوضعية ناظمة الية عن طريق

برنامج بلغة البازيك .

Sujet: Calcul de résistance d'une matrice de filage à trou hexagonal.

Résumé: Cette étude consiste en la détermination des contraintes sur le contour intérieur hexagonal d'une matrice de filage à froid.

La résolution des équations de l'élasticité dans le cas d'un état de contrainte plan se fait par la méthode de "Muskhelishvili" appliquée ici à un domaine doublement connexe.

Cette méthode fait intervenir les transformations conformes en variables complexes, les séries de Laurent et les intégrales de Cauchy. Le calcul de la fonction de transformation et des contraintes se fait sur ordinateur à l'aide d'un programme en Basic.

Subject: Resistances calculation of an extrusions matrix with the hexagonal hole.

Abstract: This study consist of the determination of stresse on the hexagonal internal contour of a cold extrusions matrix. The resolution of the elasticity equations in the case of plane stresses is obtained by the "Muskhelishvili's" method applied to a doubly connected body.

This method uses he conformal mappings into the complex variables, the Laurent's series and the Cauchy-type integrals. The numerical calculation of the mappings fonction and the stresses was done by the computer programmed in Basic.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I : EQUATIONS DE L'ELASTICITE PLANE

- I.1 Equations fondamentales
- I.2 Introduction des fonctions d'Airy
- I.3 Utilisation des fonctions analytiques de la variable complexe.

CHAPITRE II: LA METHODE DE MUSKHELISHVILI

- II.1 Préliminaires et définitions mathématiques
 - II.1.1 Domaines simplement et doublement connexes
 - II.1.2 Transformations conformes
 - II.1.3 Séries de Laurent
 - II.1.4 Intégrales de Cauchy
 - II.1.5 Somme des efforts sur un contour
 - II.1.6 Coordonnées polaires et transformation
- II.2 La méthode de Muskhelishvili
 - II.2.1 Où interviennent les séries de Laurent
 - II.2.2 Intégration des équations (14-a) et (14-b)

CHAPITRE III: APPLICATION AU PROBLEME DE LA MATRICE A TROU HEXAGONAL.

- III.1 Enoncé et ordre des calculs
- III.2 Détermination de la fonction de transformation
- III.3 Calcul des contraintes
 - III.3.1 Equations et calculs
 - III.3.2 Interprétation des résultats

CONCLUSION

ANNEXE 1 : Intégrale de Cauchy

ANNEXE 2 : Division

ANNEXE 3 : Le programme "KOL-MUSK"

INTRODUCTION

La déformation plastique est l'un des procédés les plus économiques et les plus rapides d'usinage des métaux. Les pièces ainsi obtenues sont plus homogènes du point de vue des caractéristiques mécaniques, elles possèdent de plus un bon fi-
-brage et ne produisent aucun copeau.

Il existe plusieurs types de déformation plastique. Citons en particulier la déformation volumétrique qui elle-même compte plusieurs procédés qui tous conservent le volume initial de la pièce de métal. Parmi ces procédés il en est un, le fila-
-ge, qui nous intéresse ici et qui se déroule comme suit:

Un poinçon pénètre dans une matrice contenant le métal à déformer (sous forme d'une barre cylindrique). Au fond de cette matrice se trouve une filière à travers laquelle s'écoule le métal sous l'action du poinçon. La filière a un diamètre infé-
-rieur à celui de la matrice et de ce fait, il y a réduction de section de la barre au court de cette opération.

La matrice, dans les premiers temps cylindrique, a reçu par la suite des formes plus complexes. Il existe des matrices carrées, pentagoniques ou hexagonales (pour la fabrication des vis "H").

Notre étude porte sur la dernière forme citée et plus particulièrement sur la répartition des contraintes sur le con-
-tour intérieur de la matrice lors de l'application de la pres-
-sion P du poinçon sur le métal qu'elle contient.

Pourquoi une telle étude? Pour deux raisons princi-
-pales.

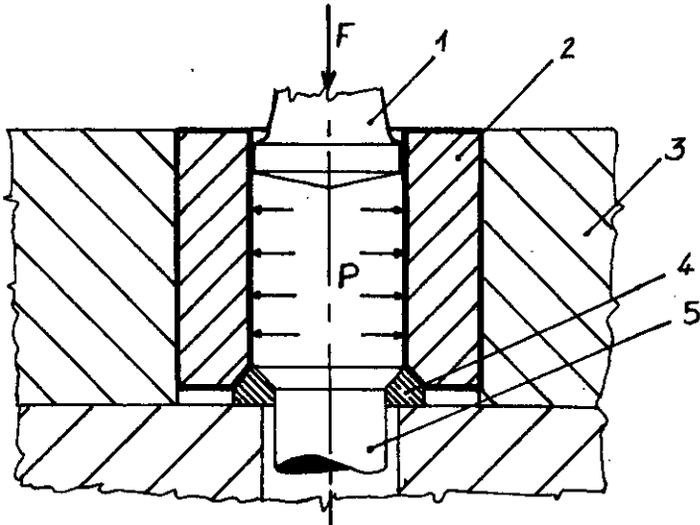
Premièrement, cette matrice est, comme les autres, fai-
-te en métal dur (à base de tungsten ou de vanadium) qui sup-
-porte très bien les efforts de compression mais qui par contre ne résiste pas à la traction, importante lors du filage. Il est

donc nécessaire de connaître la valeur de ces contraintes pour pouvoir dimensionner la frette (ou anneau de précontrainte) qui entourera la matrice.

Deuxièmement, la présence des angles de l'hexagone provoque une concentration des contraintes à ce niveau, concentration qu'il faut mesurer et si possible réduire au minimum.

Comment faire cette étude?

Tout d'abord examinons la matrice soumise à la pression intérieure P (fig.1).



- 1. poinçon
- 2. matrice
- 3. frette
- 4. filière
- 5. pièce

fig.1

Cette pression est la même sur toute la hauteur de la matrice. Donc les contraintes seront également identiques dans chaque section transversale. On peut dès lors considérer que nous sommes en présence d'un problème plan où un corps plat est soumis à une pression intérieure P (fig.2) et dont il faut déterminer les contraintes sur sa limite intérieure (là où elles sont maximales).

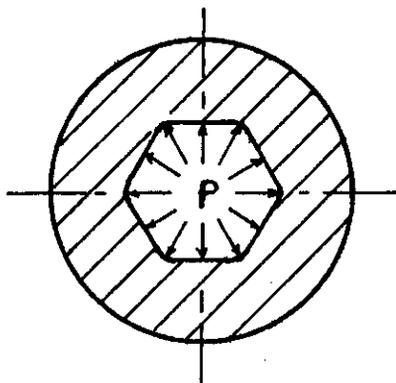


fig.2

Nous pouvons dans ce cas utiliser les équations de l'élasticité plane. Mais ces équations ne permettent pas à elles seules de

résoudre ce problème.

Pour y arriver nous utiliserons la méthode dite "de Muskhelishvili" du nom de son auteur, le physicien-mathématicien russe de la fin du siècle dernier NIKOLAI IVANOVICH MUSKHELISHVILI(*). Il s'est beaucoup intéressé aux problèmes de l'élasticité plane auxquels il a consacré plusieurs ouvrages dont le plus important: "Some basic problems of the mathematical theory of elasticity; Fundamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending" [1] où il développe cette méthode.

Voyons maintenant en quoi elle consiste. L'auteur est parti des fonctions potentiel, fonctions biharmoniques (nous expliquerons ces termes plus tard) introduite par Airy, qui sont très utilisées en élasticité et dont découlent par dérivation les différentes contraintes. Ces fonctions peuvent être facilement déterminées pour des domaines simplement connexes, c'est à dire n'ayant qu'une seule courbe frontière (par exemple une plaque de dimension finie ou une plaque "infinie" percée d'un trou). Or notre matrice (fig. 2) a deux limites, l'hexagone à l'intérieur, à l'extérieur le cercle (on dit que c'est un domaine doublement connexe).

Habituellement, les domaines simplement connexes sont appliqués grâce aux transformations conformes (que nous étudierons plus tard) sur un cercle de rayon unité sur lequel les calculs sont plus simples. Le fonction de transformation s'obtient dans ce cas assez facilement.

Pour notre problème son obtention est plus difficile. Elle nécessite l'emploi d'un ordinateur et donnera non pas un cercle mais un anneau circulaire.

Nous suivrons pour notre étude le même cheminement que celui qui vient d'être cité. Dans une première partie nous définirons les équations de l'élasticité plane. Puis dans un deuxième chapitre nous expliquerons entièrement la méthode ainsi que les principales connaissances qu'elle nécessite. Il viendra ensuite l'application à notre problème et enfin une conclusion comportant les suites possibles de cette étude.

(*) G. Kolosoff a également fait une étude similaire. La méthode porte d'ailleurs parfois le nom de "méthode de Kolosoff-Muskhelishvili".

CHAPITRE I

EQUATIONS DE L'ELASTICITE PLANE

I.1. Equations fondamentales

Si on exerce sur un corps solide un ensemble de forces, il y a apparition de contraintes sur la surface et à l'intérieur de ce corps.

Il est possible de lier ces différentes contraintes (traction, compression et cisaillement) à l'aide d'équations aux dérivées partielles. L'intégration de ces équations se fait en tenant compte des conditions aux limites que l'on exprime par des équations pouvant porter sur les contraintes ou sur les déplacements. Les premières, permettant les résolutions les plus aisées, constituent le fondement de la méthode d'Airy que nous expliquerons plus loin.

Voyons d'abord ces conditions:

1) Equilibre en volume:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + X_i = 0 \quad (i, j = x, y)$$

où σ_{ij} désigne les contraintes et X_i les composantes des forces de volume.

Ceci conduit à deux équations:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + X_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + X_y = 0$$

En notant, comme il est d'habitude de le faire, $X_x = X$; $X_y = Y$; $\sigma_{xx} = \sigma_x$; $\sigma_{yy} = \sigma_y$ et $\sigma_{yx} = \sigma_{xy} = \tau_{xy}$ le système devient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad (b)$$

2) Equations de compatibilité :

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)} \left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right] \quad (2)$$

où $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien.

I.2. Introduction des fonctions d'Airy

Nous devons tout d'abord faire une observation simplificatrice.

Les pressions rencontrées sont généralement importantes lors du filage (supérieures à la contrainte d'écoulement du métal à déformer). D'autre part X et Y sont respectivement égales à $m \cdot a_x$ et $m \cdot a_y$ où a_x et a_y sont les composantes de l'accélération de la masse m . Or le filage est une déformation dite "statique" donc les accélérations sont presque nulles et de ce fait X et Y sont négligeables.

Les équations (1) et (2) deviennent alors :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (b)$$

(1')

et

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2')$$

Les équations (1'a) et (1'b) représentent respectivement la condition nécessaire et suffisante d'existence de fonctions $B(x,y)$ et $A(x,y)$ telles que:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \sigma_y \quad ; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -\sigma_{xy}$$

et

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -\sigma_{xy} \quad ; \quad \frac{\partial B}{\partial y} = \sigma_x$$

Il y a compatibilité entre ces équations si:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

qui est également la condition d'existence d'une fonction $U(x,y)$ telle que:

$$A = \frac{\partial U}{\partial x} \quad B = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Il s'ensuit que:

$$\sigma_x = \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Nous obtenons donc le nouveau système suivant:

$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$	(a)
$\sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$	(b) (3)
$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$	(c)

La fonction U est appelée fonction potentiel ou fonction d'Airy (1862).

L'addition de (3a) et (3b) donne:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nabla^2 U$$

En remplaçant dans l'équation (2') il vient:

$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^4 U = 0$	(4)
---	-----

$\nabla^4 U = 0$ est la définition d'une fonction biharmonique.

Définition: Une fonction F est dite harmonique si son laplacien est nulle i.e. si $\nabla^2 F = 0$. Elle est biharmonique si $\nabla^2 \nabla^2 F = \nabla^4 F = 0$

Ainsi donc la résolution du problème plan par la méthode d'Airy revient à trouver une fonction biharmonique U puis à la dériver pour en tirer les contraintes.

Comment trouver U ?

On peut pour cela utiliser les variables complexes car il a été démontré qu'il est très facile de représenter une fonction biharmonique par deux fonctions de la variable complexe, fonctions dont les propriétés sont généralement mieux connues.

I.3. Utilisation des fonctions analytiques de la variable complexe

Définition: (*) Soit A un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une application f de A dans \mathbb{C} est analytique dans A si, pour tout $b \in A$, il existe un disque ouvert $D(b, \rho)$ de centre b , de rayon $\rho > 0$ et inclus dans A , tel que $f(z)$ soit, dans D , la somme d'une série entière de la variable $(z-b)$.

$$f(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-b) + \alpha_2(z-b)^2 + \dots + \alpha_n(z-b)^n + \dots$$

Il résulte de cette définition et de cette écriture que toute fonction analytique dans un domaine ouvert est indéfiniment dérivable dans ce domaine et que les dérivées successives y sont également analytiques.

Il existe une définition plus simple de l'analyticité qui nous aidera pour nos calculs:

Une fonction f est dite analytique dans A si sa dérivée existe partout dans A sauf en un nombre fini de points.

Puisque nous allons utiliser les nombres complexes il faut tout d'abord écrire le laplacien   l'aide de la variable complexe $z = x + iy$ et de son conjugué $\bar{z} = x - iy$.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}$$

(*): [3] p. 180

or $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1$ $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = i$

d'où $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (a)

(5)

$\frac{\partial}{\partial y} = i \left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]$ (b)

Nous en tirons aisément que:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

d'où

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}} \quad (6)$$

Grâce aux équations (5a) et (5b), (1'a), (1'b) et (2') deviennent

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial \bar{z}} + i \left[\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \bar{z}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \bar{z}} + i \left[\frac{\partial \sigma_y}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial \bar{z}} \right] = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

Si nous multiplions la seconde de ces équations par $-i$ et que nous l'ajoutons à la première il vient:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\sigma_y - \sigma_x + 2i \delta_{xy}) = 0 \quad (a)$$

(7)

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (b)$$

Si l'on note

$$\sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 U = \theta$$

et $\sigma_y - \sigma_x + 2i \delta_{xy} = \chi$

alors les équations (7) s'écrivent

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (a)$$

(8)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad (b)$$

Nous avons maintenant à trouver deux fonctions θ et χ , analytiques toutes deux.

Intégrons l'équation (8b). La première intégration donne:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 2 \varphi''(z) \quad (9)$$

(le 2 est introduit pour des raisons de commodité)

La deuxième intégration donne elle:

$$\theta = 2 [\varphi'(z) + C(\bar{z})] \quad \text{où}$$

φ et C sont des fonctions analytiques inconnues. Mais puisque $\theta = \sigma_x + \sigma_y$, c'est donc une fonction réelle (σ_x et σ_y réelles),

donc $\theta = \bar{\theta} \iff 2 [\varphi'(z) + c(\bar{z})] = 2 [\overline{\varphi'(z)} + \overline{c(\bar{z})}]$
 $\implies c(\bar{z}) = \overline{\varphi'(z)}$

d'où $\theta = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)]$

où $\operatorname{Re} [\varphi'(z)]$ désigne la partie réelle de $\varphi'(z)$

En tenant compte de (9) l'équation (8a) donne

$$\frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 2 \varphi''(z)$$

$$\implies \chi = 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)]$$

où ψ est une autre fonction analytique inconnue.

Nous avons donc finalement en posant $\phi(z) = \varphi'(z)$ et $\Psi(z) = \psi'(z)$

$\theta = \nabla_x + \nabla_y = 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] = 4 \operatorname{Re} [\phi(z)]$

(a)

(10)

$\chi = \nabla_y - \nabla_x + 2i \delta_{xy} = 2 [\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z)] = 2 [\bar{z} \phi'(z) + \Psi(z)]$

(b)

La résolution revient donc finalement à trouver deux fonctions ϕ et Ψ appelées fonctions potentiel complexe. Elles permettent de déterminer ((10a) (10b)) les fonctions θ et χ qui donnent directement les contraintes de la manière suivante

$\nabla_x = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\theta - \chi]$

(a) (11)

$$\boxed{v_y = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\theta + \chi]} \quad (b)$$

(11)

$$\boxed{v_{xy} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} [\chi]} \quad (c)$$

(*)

où $\operatorname{Im} [\chi]$ désigne le partie imaginaire de $\chi(z)$

C'est pour la détermination de ces deux fonctions φ et ψ qu'intervient la méthode de Muskhelishvili car les domaines de forme compliquée ou multiplement connexes ne se prêtent pas à une résolution directe de ces équations.

Mais la méthode ne peut être abordée ici directement, il sera nécessaire de définir auparavant quelques concepts mathématiques utiles.

(*) U peut aussi être déterminée directement par les fonctions φ et ψ grâce à la formule de Goursat.

$$U = \operatorname{Re} \left[\bar{z} \varphi(z) + \int \psi(z) dz \right]$$

CHAPITRE II

LA METHODE DE MUSKHELISHVILI

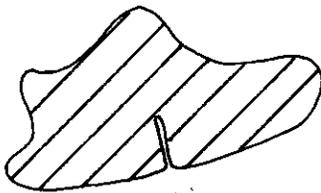
II.1. Préliminaires et définitions mathématiques.

Voici donc quelques définitions utiles pour la suite de notre étude.

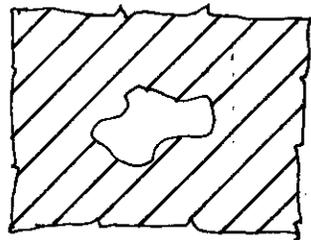
II.1.1. DOMAINES SIMPLEMENT ET MULTIPLEMENT CONNEXES.

"La connexité est la notion mathématique qui correspond à l'idée intuitive d'ensemble d'un seul tenant." (*)

Un domaine est dit simplement connexe si sa frontière forme un ensemble connexe de points (i.e. frontière en une seule partie). La figure (1) en montre deux exemples.



Domaine fermé comportant
une entaille



Plaque infinie percée d'un
trou

fig. 1

(*) : [3] p.22

Le nombre n de parties connexes qui forment la frontière d'un domaine constitue l'ordre de connexion de ce domaine. Si $n=2$ le domaine est dit doublement connexe. (Fig.2 $n=3$).

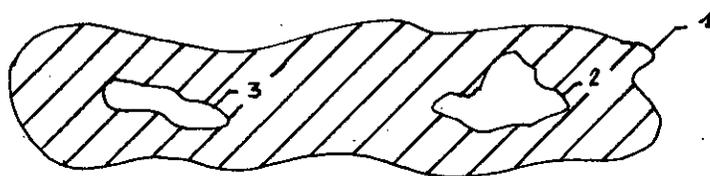


fig.2

II.1.2. TRANSFORMATIONS CONFORMES.

Ces transformations sont très importantes et très utilisées dans la physique où elles simplifient grandement les problèmes de l'hydrodynamique, de l'aérodynamique, de la théorie des champs magnétiques, électrostatique et autres et de la théorie de l'élasticité.

Soit un domaine D situé dans un plan complexe noté plan des z , $z=x+iy$, et un domaine D' situé dans un autre plan complexe noté, lui, plan des w , $w=u+iv$. On appelle transformation "l'opération" qui consiste à appliquer le domaine D sur le domaine D' par l'intermédiaire d'une fonction de transformation f telle que $w=f(z)$ (w décrivant D' quand z décrit D). D' est alors appelé "image" ou "transformé" de D par la transformation $w=f(z)$.

Si la transformation est réalisée par une fonction analytique, elle sera dite transformation ou représentation conforme.

Donnons un exemple de transformation simple: la fonction $f(z)=z^n$ transforme un cercle de rayon r en un cercle de rayon r^n en faisant faire également à un point situé sur le rayon polaire θ une rotation de $(n-1)\theta$ autour de l'origine. (Fig 3).

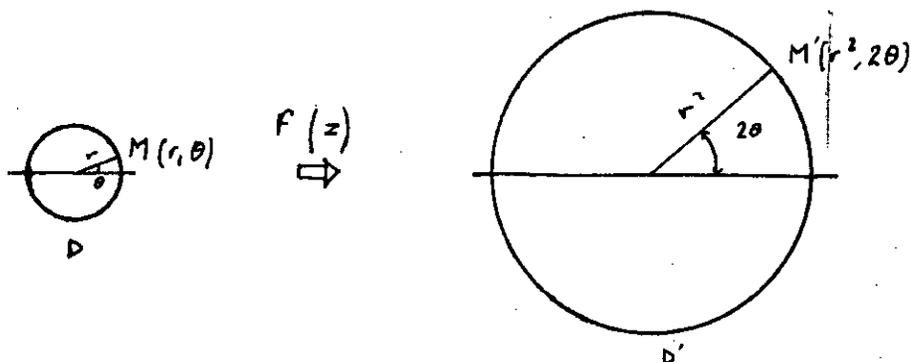


fig.3 $n=2$

La transformation de domaines simplement connexes est toujours possible et revient presque à chaque fois à la combinaison de quelques transformations élémentaires telles que rotation, symétrie, allongement et inversion.

On applique de plus ces domaines la plus part du temps sur le cercle unité ($r=1$) sur lequel les opérations et les traitements sont plus simples. Par exemple la fonction $w=f(z)=\frac{4z}{(1+z)^2}$ établit une correspondance entre les points du cercle unité (lieu de z) et ceux de la demi-droite $u > 1, v=0$ (lieu de $w=u+iv$).

Pour ce qui est des domaines doublement connexes la transformation est beaucoup plus difficile et peut rarement se ramener à une combinaison de transformations élémentaires. Mais il a été démontré le fait suivant: Tout domaine doublement connexe peut être transformé sur une couronne: $r_1 < |w| < r_2$. En outre si l'un de ces deux rayons est donné, l'autre est défini de manière unique par le domaine donné.

Cette propriété ainsi que les deux suivantes nous seront très utiles pour notre problème.

Théorème: Il existe une seule représentation conforme $w=f(z)$ d'un domaine D sur un domaine D' qui fait correspondre à trois points frontières z_k du domaine D , trois points frontières w_k de D' . Les points z_k et w_k sont donnés arbitrairement mais en conservant l'ordre de succession lorsqu'on décrit les deux frontières. (*)

Lors de la transformation d'un polygone régulier en cercle, aux sommets du polygone correspondent des points divisant la circonférence du cercle en parties égales. (**)

Revenons à notre problème un instant. D'après ces trois propriétés nous pouvons conclure que si nous arrivons à trouver une fonction (et c'est possible) qui transforme notre matrice en anneau cette transformation est unique et aux sommets de l'hexagone correspondront des points qui diviseront le cercle intérieur en six parties égales d'angle $\pi/3$.

II.1.3. SERIES DE LAURENT. (P. Laurent 1813-1854)

Théorème: (Laurent 1843) Dans toute couronne $K: r < |z-a| < R$ ($0 \leq r < \infty, 0 < R < \infty$), une fonction $f(z)$ qui y est analytique peut être représentée par sa série de Laurent uniformément convergente sur tout domaine fermé appartenant à la couronne K . La série s'écrit alors:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

où les coefficients c_n sont donnés par l'intégrale de Cauchy

(*) [4] p. 161

(**) [5] p. 165

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

γ étant une circonférence quelconque intérieur à K . (*)

Le développement en série de Laurent est unique, il ne dépend pas du procédé d'obtention, donc si l'on parvient à déterminer les coefficients c_n d'une autre manière ils auront nécessairement la même valeur que celle donnée par l'intégrale.

II.1.4. INTEGRALE DE CAUCHY.

Nous venons de rencontrer cette intégrale dont voici une définition.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un domaine D d'ordre de connexion n et continue dans D ($D=D$ muni de sa frontière), alors pour tout point z intérieur à ce domaine on a ce qu'il est convenu d'appeler la formule de Cauchy (1831):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)} d\zeta$$

où C est la frontière de D .

Cette frontière étant faite de plusieurs parties nous verrons lors de l'application à notre problème comment l'intégration se fait dans la pratique.

Nous venons d'examiner quelques définitions voyons maintenant quelques préliminaires à la méthode de Muskhelishvili

II.1.5. SOMME DES EFFORTS SUR UN CONTOUR.

Soit un domaine D limité par un contour S . On définit sur ce contour une coordonnée curviligne " s ". Considérons maintenant que ce domaine est soumis à une force extérieure répartie sur son contour, alors la somme des efforts sur S sera:

$$X_n + iY_n = \int_S (X_n + iY_n) ds$$

où (fig.4) $X_n = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m$ et $Y_n = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m$

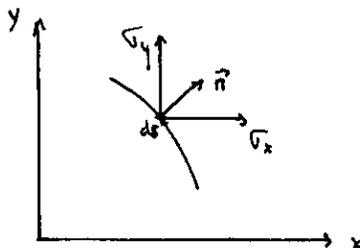


fig.4

(*) . [4] p. 76

Avec $l = \cos(x, n) = \frac{dy}{ds}$ et $m = \cos(y, n) = -\frac{dx}{ds}$

D'où $X_n + iY_n = \sigma_y \frac{dy}{ds} - \delta_{xy} \frac{dx}{ds} + i(\delta_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_y \frac{dx}{ds})$

Or $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ $dx = \frac{d(z + \bar{z})}{2}$

$y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$ $dy = -\frac{d(z - \bar{z})}{2}i$

$$X_n + iY_n = \frac{1}{2ds} \left[-i\sigma_y \cdot d(z - \bar{z}) - \sigma_{yy} \cdot d(z + \bar{z}) + \delta_{xy} \cdot d(z - \bar{z}) - i\sigma_y \cdot d(z + \bar{z}) \right]$$

Finalement:

$$X_n + iY_n = \frac{-i}{2ds} \left[(\sigma_y + \sigma_y) dz + (\sigma_y - \sigma_y - 2i\delta_{xy}) d\bar{z} \right]$$

En tenant compte des égalités (10-a) et (10-b) il vient :

$$X_n + iY_n = \frac{-i}{ds} \left\{ [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] dz + [z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\varphi'(z)}] d\bar{z} \right\}$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une dérivée totale.

$$X_n + iY_n = \frac{-i}{ds} \cdot d \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} \right]$$

Nous aurons pour tout le contour S:

$$\boxed{\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\varphi(z)} = i \int_S (X_n + iY_n) ds} \quad (12)$$

Cette équation a été écrite pour un point z du domaine D . Elle est calculable pour un domaine simplement connexe uniquement. Pour un domaine doublement connexe il faut se servir d'une transformation conforme et poser que D est l'image d'un domaine D' par la transformation $z = w(\xi)$, S sera alors l'image de S' contour de D' que l'on choisira circulaire puisque les conditions aux limites pour un cercle sont connues.

ξ sera alors donné en coordonnées polaire c'est à dire $\xi = \rho e^{i\theta}$. Il faut donc dans ce cas exprimer aussi les contraintes dans ce système de coordonnées.

II.1.6. COORDONNEES POLAIRES ET TRANSFORMATION.

Soit un vecteur A de coordonnées A_x et A_y dans le repère cartésien (x, O, y) et de coordonnées A_ρ et A_θ dans le

système polaire (ρ, θ) fig. 5. Il est alors visible que:

$$A\rho + iA_\theta = e^{i\alpha} (Ax + iAy)$$

$$\text{Mais } e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} ; dz = d(\omega(\xi)) = \omega'(\xi) d\xi$$

$$e^{i\alpha} = \frac{\omega'(\xi)}{|\omega'(\xi)|} \frac{d\xi}{|d\xi|}$$

$$\text{Avec } \frac{d\xi}{|d\xi|} = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} = \frac{\xi}{\rho} \quad \text{il vient finalement:}$$

$$e^{i\alpha} = \frac{\xi \omega'(\xi)}{\rho |\omega'(\xi)|}$$

Grâce à cette égalité les équations (10-a) et (10-b) deviennent

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} [\Phi(\xi)] \quad (a)$$

(13)

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\xi_0 = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \omega'(\xi)} [\omega(\xi)\Phi'(\xi) + \omega'(\xi)\Psi(\xi)] \quad (b)$$

$$\text{où } \Phi(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} \quad \text{et} \quad \Psi(\xi) = \frac{\psi'(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

$$\text{puisque } \varphi(z) = \varphi[\omega(\xi)] \text{ donc } \varphi'(z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

Avec cette dernière écriture nous pouvons réécrire l'équation (12)

$$\varphi(\xi) + \omega(\xi) \frac{\overline{\varphi'(\xi)}}{\omega'(\xi)} + \overline{\psi(\xi)} = i \int_S (X_n + iY_n) ds = f_1 + if_2 = f \quad (14-a)$$

On utilise également l'équation conjuguée de celle-ci:

$$\overline{\varphi(\xi)} + \overline{\omega(\xi)} \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \psi(\xi) = f_1 - if_2 = \overline{f} \quad (14-b)$$

II.2. La méthode de Muskhelishvili

II.2.1. OU INTERVIENNENT LES SERIES DE LAURENT.

L'auteur considère que les fonctions harmoniques φ et ψ se composent de deux parties, l'une indicée 1 définie les contraintes sur un contour circulaire et que l'on détermine par les conditions aux limites (13-a) et (13-b) appliquées à un cercle. La seconde partie ajoutée à la première les modifications apportées par le fait de la "non circularité" du contour. On indice cette seconde partie par 0 et elle est prise comme étant une série de Laurent de termes de puissance positive seulement!

$$\varphi_0(\xi) = \sum_1^{\infty} a_n \xi^n \quad \psi_0(\xi) = \sum_0^{\infty} b_n \xi^n$$

Mais comment déterminer ces coefficients a_n et b_n ? C'est là qu'intervient l'intégrale de Cauchy.

II.2.2 INTEGRATION DES EQUATIONS (14-a) ET (14-b).

Prenons l'une des deux et multiplions la par le facteur

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \xi}$$

en tenant compte que $\varphi \equiv \varphi_0$ et $\psi \equiv \psi_0$, et intégrons sur le contour à étudier car ainsi nous le décrivons entièrement et φ_0 et ψ_0 définiront parfaitement l'effet de la non "circularité" comme nous l'avons déjà dit.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi_0(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi_0'(\sigma)} d\sigma}{\omega'(\sigma) (\sigma - \xi)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\psi_0(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} \quad (15-a)$$

(σ est la variable d'intégration et ξ un point du contour)
Nous sommes bien en présence d'une intégrale de type Cauchy et il est possible d'obtenir une forme identique avec la seconde équation.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\overline{\varphi_0(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \xi} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\omega(\sigma) \varphi_0'(\sigma) d\sigma}{\omega'(\sigma) (\sigma - \xi)} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_0(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} \quad (15-b)$$

Nous trouverons en annexe 1 la méthode détaillée de l'intégration sur le contour intérieur d'un domaine doublement connexe.

CHAPITRE III

APPLICATION AU PROBLEME DE LA MATRICE A TROU HEXAGONAL

III.1 ENONCE et ordre des calculs

Nous avons vu que si nous arrivons à déterminer les fonction φ et ψ , alors les contraintes seront connues. Mais pour cela il faut tout d'abord connaître la fonction de transformation $w(\xi)$. Grâce à elle nous pourrions déterminer (13) ρ_1 et ψ_1 (les 1^{ers} membres) puis, par (14), f et enfin les coefficients a_n et b_n par (15).

Nous venons de donner l'ordre des calculs, mais nous devons d'abord définir plus en détail le problème.

Nous avons, fig. 1, une matrice de filage à trou hexagonal sur lequel nous voulons déterminer les contraintes produites par une pression P . Nous voulons faire le calcul pour des dimensions a, r et R variables ainsi que pour des pressions différentes. Ceci nous conduit à utiliser un ordinateur. Nous avons choisi d'utiliser le langage Basic (le plus simple et qui nous suffit ici) et d'utiliser le micro-ordinateur Rainbow 100 (Digital). Nous allons voir petit à petit dans ce chapitre le

contenu du programme que nous avons élaboré et dont un listing complet se trouve en annexe.

Première étape donc du calcul: la fonction de transformation.

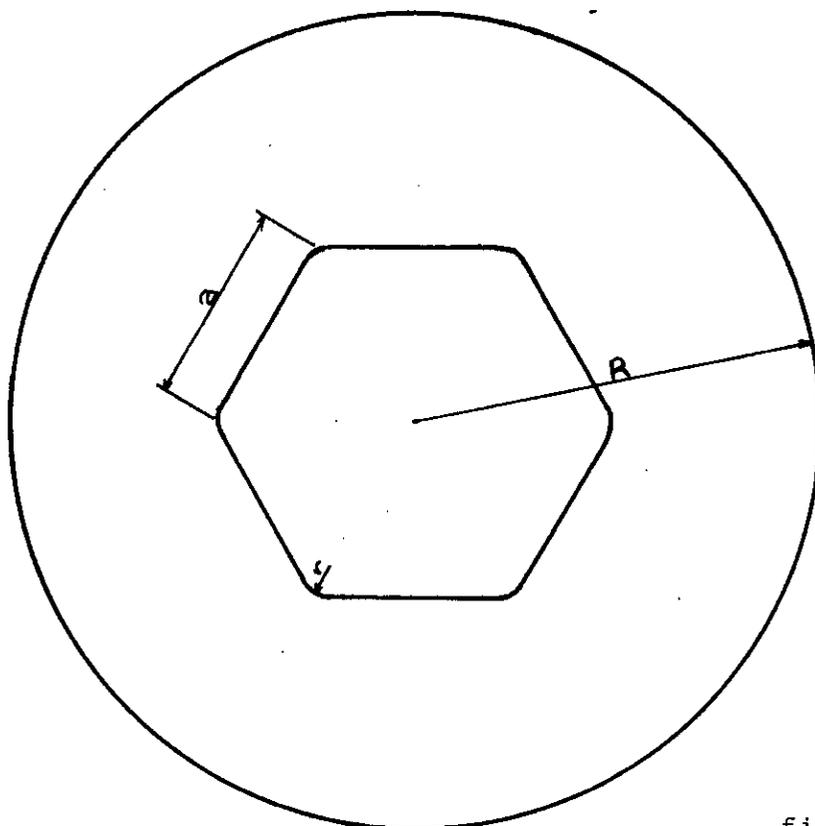


fig.1

III.2. Détermination de la fonction de transformation

Nous avons choisi pour déterminer notre fonction d'utiliser une méthode que nous avons trouvée dans un livre hongrois qui traite ~~de~~ de ces problèmes de transformation de domaines de forme plus ou moins complexes (6).

Cette méthode est purement numérique. Elle établit une relation entre un anneau et un domaine doublement connexe quelconque. L'anneau a un rayon extérieur égal à 1 et un rayon intérieur ρ_1 dépendant des dimensions du domaine, ici de la matrice. (ceci avait été prévu en p.15).

Voyons maintenant cette transformation:

$$z = \omega(\xi) = \sum_{k=-2m}^{2m-1} C_{(qk+1)} \cdot \xi^{qk+1} \quad (16)$$

$\xi = e^{i\theta_j}$ pour le cercle extérieur qui sera projeté sur celui de la matrice
 $\xi' = \rho_1 e^{i\theta_j}$ pour le cercle intérieur qui sera lui projeté sur l'hexagone.

Avec de plus:

$$\theta_j = \frac{\pi}{2qm} (2j-1) \quad (j=1, \dots, m)$$

$$C_k = \frac{1}{m(1-\rho_1^{2qm})} \sum_{j=1}^m \left\{ x_j \cdot \cos \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} + y_j \cdot \sin \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} - \rho_1^{2qm-k} \left[x_j' \cdot \cos \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} + y_j' \cdot \sin \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} \right] \right\} \quad (17)$$

$$(k = 1, q+1, \dots, (2m-1)q+1).$$

$$C_{-k} = \frac{1}{m(1-\rho_1^{2qm})} \sum_{j=1}^m \left\{ \rho_1^k \left[x_j' \cdot \cos \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} - y_j' \cdot \sin \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} \right] - \rho_1^{2qm} \left[x_j \cdot \cos \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} - y_j \cdot \sin \frac{\pi k(2j-1)}{2qm} \right] \right\} \quad (18)$$

$$(k = q-1, \dots, 2mq-1).$$

$$\rho_1 \frac{\sum_{j=1}^m \left[x_j' \cdot \cos \frac{\pi(2j-1)}{2qm} + y_j' \cdot \sin \frac{\pi(2j-1)}{2qm} \right]}{\sum_{j=1}^m \left[x_j \cdot \cos \frac{\pi(2j-1)}{2qm} + y_j \cdot \sin \frac{\pi(2j-1)}{2qm} \right]} \quad (19)$$

Où q est le nombre d'axes de symétrie du domaine. $q=3$ dans notre cas.

La transformation se fait point par point et m représente le nombre de ces points que nous choisissons d'après a et r .

$z=x+iy$ sont les points du cercle extérieur de la matrice images des points ξ du cercle extérieur de l'anneau.

$z'=x'+iy'$ sont eux les points de l'hexagone images des points ξ' du cercle intérieur de l'anneau.

Puisque le nombre des symétries est de 3 nous pouvons faire l'étude complète sur un seul des pans de l'hexagone, c'est à dire sur un angle de $\pi/3$ (fig.2)

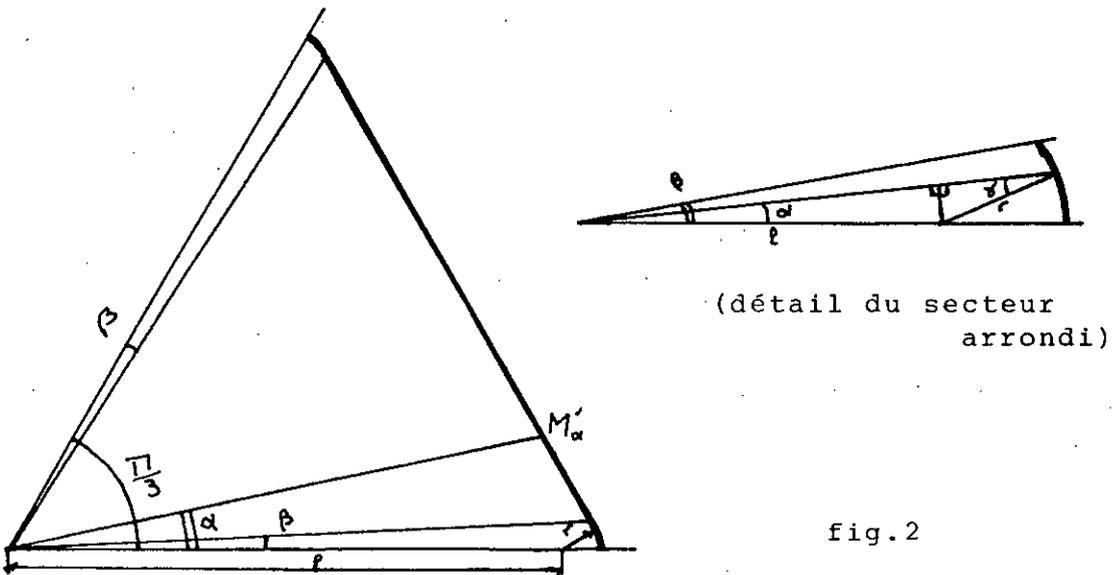


fig.2

Il faut donner maintenant les coordonnées des m points de l'hexagone puis du cercle (z et z') en fonction de l'angle α . Puisqu'il y a une partie arrondie de rayon r il faut qu'au moins deux points soient situés dans ce secteur pour que la transformation soit suffisamment précise. Les m points découpant le pan en $(m-1)$ parties, il faudra donc que:

$$\frac{\pi}{3(m-1)} < \theta \quad \text{soit} \quad m > \frac{\pi}{3\beta} + 1$$

Avec $\beta = \text{Arctg} \frac{3r}{6a - r\sqrt{3}}$

Notons également que (fig.2) $l = a - \frac{2r}{\sqrt{3}}$

D'après la figure 1 nous voyons qu'il faut partager le coté en trois parties:

1/Pour $0 \leq \alpha \leq \beta$

$$x'_j = r \cdot \cos \alpha \cdot \left[\cos \gamma + \frac{1}{r} \cdot \cos \alpha \right]$$

$$x'_j = r \cdot \sin(\gamma + \alpha)$$

$$\text{avec } \gamma = \arcsin \left[\frac{1}{r} \cdot \sin \alpha \right]$$

$$x_j = R \cdot \cos \alpha$$

$$y_j = R \cdot \sin \alpha$$

2/Pour $\beta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} - \epsilon$

$$x'_j = \frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3}}$$

$$y'_j = \frac{a\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3}}$$

$$x_j = R \cdot \cos \alpha$$

$$y_j = R \cdot \sin \alpha$$

3/Pour $\frac{\pi}{3} - \beta \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$

$$x'_j = r \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \right] \cdot \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$$

$$y'_j = \frac{x'_j \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = x'_j \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$x_j = R \cdot \cos \alpha$$

$$y_j = R \cdot \sin \alpha$$

Nous pouvons maintenant écrire la première partie du programme qui donnera les valeurs numériques des coordonnées des points initiaux (r, a, R et m étant choisis en début de programme) puis des coefficients C_R et C_{-R} , du rayon ρ_1 et enfin des coordonnées des points de l'anneau pour permettre une vérification graphique. Nous avons également ajouté une vérification directe par

l'application de la transformation à l'anneau afin de voir si l'on trouve bien notre matrice de départ.

LE PROGRAMME:

Notations: x_j^i ——— $XI(I)$; y_j^i ——— $YI(I)$
 x_j ——— $XJ(I)$; y_j ——— $YJ(I)$
 C_k ——— $CK(J)$; C_{-k} ——— $CMK(J)$
 ——— $RH1=NUM/DEN$

Pour la vérification: $z_j^i(x_j^i; y_j^i)$ ——— $(ZXI; ZYI)$
 $z_j(x_j; y_j)$ ——— $(ZXJ; ZYJ)$

*Lignes 200 à 280: Introduction des dimensions a, r et R et de m.

*Lignes 340 à 730: Calcul des coordonnées XI, XJ, YI et YJ et simultanément du numérateur et du dénominateur de ρ , (NUM, DEN)

*Lignes 670 et 790: Impression

```

200 INPUT "Cote de l'hexagone a = ";A0
210 INPUT "Rayon de courbure des coins r = ";R0
220 INPUT "Rayon exterieur de la matrice R = ";R1
230 PI=3.14159265359*
240 BE=ATN(R0/2/(A0-R0*3^.5/6))
250 PRINT "Beta=";BE
260 MMIN=PI/3/BE+1
270 PRINT "le nombre de points m doit etre superieur ou egal a ";INT(MMIN+1)
280 INPUT "Nombre de points consideres m = ";M;PRINT
340 DIM XI(M),YI(M),XJ(M),YJ(M),CK(40),CMK(40),COK(40),COMK(40)
350 REPERE=0
360 GOTO 390
370 R0=A0*3^.5/2
380 BE=ATN(R0/2/(A0-R0*3^.5/6))
390 L=A0-2*R0/3^.5
400 RA=L/R0
410 IF REPERE=1 THEN 440
420 PRINT "1 = ";L;PRINT;PRINT
430 PRINT TAB(5);"XI(1)";TAB(20);"YI(1)";TAB(35);"XJ(1)";TAB(50);"YJ(1)"
440 NUM=0
450 DEN=0
460 FOR I=1 TO M
470 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
480 IF AL>BE THEN 490 ELSE 530
490 IF AL<(PI/3-BE) THEN 500 ELSE 570
500 XI(1)=A0*3^.5/(TAN(AL)+3^.5)
510 YI(1)=XI(1)*TAN(AL)
520 GOTO 640
530 GA=ATN(RA*SIN(AL)/SQR(1-(RA*SIN(AL))^2))
540 XI(1)=R0*COS(AL)*(COS(GA)+RA*COS(AL))
550 YI(1)=R0*SIN(AL+GA)
560 GOTO 640
570 IF AL=PI/3 THEN 620 ELSE 580
580 GA=ATN(RA*SIN(PI/3-AL)/SQR(1-(RA*SIN(PI/3-AL))^2))
590 XI(1)=R0*(SIN(PI/3-AL)*COS(GA)+SIN(GA)*COS(PI/3-AL))*COS(AL)/SIN(PI/3-AL)
600 YI(1)=XI(1)/COS(AL)*SIN(AL)
610 GOTO 640
620 XI(1)=(L+R0)*COS(AL)
630 YI(1)=(L+R0)*SIN(AL)
640 XJ(1)=R1*COS(AL)
650 YJ(1)=R1*SIN(AL)
660 IF REPERE=1 THEN 710
670 PRINT I;TAB(5);XI(1);TAB(20);YI(1);TAB(35);XJ(1);TAB(50);YJ(1)
710 NUM=NUM+XI(1)*COS(PI*(2*I-1)/6/M)+YI(1)*SIN(PI*(2*I-1)/6/M)
720 DEN=DEN+XJ(1)*COS(PI*(2*I-1)/6/M)+YJ(1)*SIN(PI*(2*I-1)/6/M)
730 NEXT I

```

```

820 REM "*****"
830 REM " COEFFICIENTS DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION "
840 REM "*****"
850
860 PRINT "Calcul en cours"
870 PRINT TAB(20);"CK(J)";TAB(45);"CMK(J)"
880 FOR J=1 TO (6*M-2) STEP 3
890 IF J>28 THEN 1080 ELSE 900
900 S1=0:S2=0:S3=0:S4=0
910 FOR I=1 TO M
920 P1=COS(PI*J*(2*I-1)/6/M)
930 P2=SIN(PI*J*(2*I-1)/6/M)
940 S1=S1+XJ(I)*P1+YJ(I)*P2
950 S2=S2+XI(I)*P1+YI(I)*P2
960 P1=COS(PI*(J+1)*(2*I-1)/6/M)
970 P2=SIN(PI*(J+1)*(2*I-1)/6/M)
980 S3=S3+XI(I)*P1-YI(I)*P2
990 S4=S4+XJ(I)*P1-YJ(I)*P2
1000 NEXT I
1010 IF REPERE=1 THEN 1050
1020 CK(J)=S1-S2*RH1^(6*M-J)
1030 CMK(J+1)=S3*RH1^(J+1)-S4*RH1^(6*M)
1040 GOTO 1070
1050 COK(J)=S1-S2*RH2^(6*M-J)
1060 COMK(J+1)=S3*RH2^(J+1)-S4*RH2^(6*M)
1070 NEXT J
1080 IF REPERE=1 THEN 1480 ELSE 1090
1090 FOR H=1 TO 28 STEP 3
1100 PRINT H;TAB(15);CK(H);TAB(35);(H+1);TAB(40);CMK(H+1)
1110 NEXT H
1120 PRINT:PRINT
1130
1140 REM "*****"
1150 REM " VERIFICATION DE LA FONCTION "
1160 REM "*****"
1170
1180 PRINT "Verification":PRINT
1190 PRINT TAB(5);"XI";TAB(20);"YI";TAB(35);"XJ";TAB(50);"YJ"
1200 FOR I=1 TO M
1210 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
1220 ZXI=0:ZYI=0:ZXJ=0:ZYJ=0
1230 FOR H=1 TO 7 STEP 3
1240 ZXI=ZXI+CK(H)*COS(H*AL)*RH1^H
1250 ZYI=ZYI+CK(H)*SIN(H*AL)*RH1^H
1260 ZXJ=ZXJ+CK(H)*COS(H*AL)
1270 ZYJ=ZYJ+CK(H)*SIN(H*AL)
1280 NEXT H
1290 ZXI=ZXI/M+CMK(5)*COS(5*AL)/RH1^5/M
1300 ZYI=ZYI/M-CMK(5)*SIN(5*AL)/RH1^5/M
1310 ZXJ=ZXJ/M+CMK(5)*COS(5*AL)/M
1320 ZYJ=ZYJ/M-CMK(5)*SIN(5*AL)/M
1330 PRINT I;TAB(5);ZXI;TAB(20);ZYI;TAB(35);ZXJ;TAB(50);ZYJ
1340 NEXT I

```

Vous voyez là que nous n'avons calculé que 20 coefficients et conservé seulement 3 pour la fonction de transformation w . Pourquoi?

Nous allons expliquer ce choix en étudiant un exemple de matrice que nous conserverons également dans la suite.

Soit donc une matrice dont les dimensions sont les suivantes $a=10$; $r=2$; $R=30$ (l'unité est le millimètre)

Avec ces dimensions le nombre de points minimal est 12. Des essais avec 12 points puis 24 et plus ont montré la chose suivante Plus m est proche de 12 plus la transformation de l'hexagone est meilleur, plus il s'en éloigne plus la transformation du cercle ($R=30$) est meilleur. Comme c'est l'hexagone qui nous intéresse nous prendrons $m=12$ et plus généralement nous prendrons le nombre minimum.

Si $m=12$ w devra comporter 48 termes donc 48 coefficients. Or le calcul montre (tableau 1 page suivante) qu'à partir du 5^{ème} ils sont tous en valeur absolue inférieure à 10^{-5} . L'influence de ces termes est vraiment très faibles par rapport aux premiers et même parmi ces 5 premiers des essais ont montré que $CK(2)$ et $CK(4)$ n'amènent aucune précision appréciable aux résultats de la vérification (tableau 2) que l'on ne fait donc qu'avec 3 coefficients $CK(1)$, $CK(7)$ et $CK(5)$ soient C_1 , C_7 et C_5 .

Pour vérifier que les ordres de grandeur des coefficients ne dépendaient pas de la matrice, des essais ont été fait avec d'autres dimensions. Les résultats ont donné la même chose C_1 , C_7 et C_5 sont les seuls à devoir être conservés.

La fonction s'écrira alors finalement:

$$Z = w(\xi) = C_1 \xi + C_7 \xi^7 + \frac{C_5}{\xi^5} \quad (20)$$

quelles qu'il soit les dimensions de la matrice.

OK(J)

CMK(J)

1	359.8651	2	-5.725063E-07
4	-3.242493E-05	5	1.259673E-02
7	-5.898162	8	-3.469265E-10
10	-9.536743E-06	11	2.907397E-06
13	-2.874654	14	-2.186392E-13
16	4.196167E-05	17	1.06341E-09
19	-2.036782	20	4.951837E-16
22	-3.623962E-05	23	5.573281E-13
25	-1.652085	26	1.865656E-19
28	3.194809E-05	29	4.078933E-16

Tableau 1

Points de la matrice

	XI(I)	YI(I)	XJ(I)	YJ(I)
1	9.690599	0	30	0
2	9.474288	.9046848	29.86416	2.851681
3	8.998671	1.734952	29.45786	5.677538
4	8.550477	2.510647	28.78479	8.451977
5	8.122578	3.25179	27.85104	11.14987
6	7.706269	3.972858	26.66506	13.7468
7	7.29373	4.687396	25.23761	16.21923
8	6.877422	5.408464	23.5816	18.54477
9	6.449523	6.149608	21.71202	20.70237
10	6.001328	6.825903	19.64582	22.67249
11	5.520622	7.752632	17.4017	24.43728
12	4.8453	8.392305	15	25.98076

Tableau 2-a

Rho 1= 109.3637 / 359.8651 = .3039019

Verification

	XI	YI	XJ	YJ
1	9.518486	0	29.52329	0
2	9.432224	.3806752	29.48719	2.561751
3	9.183816	1.39479	29.33744	5.22119
4	8.802151	2.166672	28.96795	8.023411
5	8.328461	3.004462	28.25491	10.93093
6	7.807554	3.89668	27.11239	13.82921
7	7.278401	4.813201	25.53264	16.56542
8	6.766172	5.710428	23.59393	19.004
9	6.277469	6.539551	21.43246	21.07527
10	5.799832	7.256024	19.19041	22.79638
11	5.305594	7.82821	16.96214	24.25579
12	4.759243	8.243251	14.76165	25.56793

Tableau 2-b

III.3. Calcul des contraintes

Nous avons dit en introduction de ce projet que la contrainte dangereuse était la contrainte de traction pour laquelle il apparaît une concentration aux coins de l'hexagone. La compression elle reste à peu près constante et en tout cas inférieure à P. La contrainte de cisaillement est elle nulle pour un cercle; nous pouvons donc conclure qu'elle le restera pour l'hexagone ou qu'elle sera négligeable.

Nous avons établi au § II.1.6 et II.2.1 les équations (13), (14) et (15) qui doivent nous permettre de déterminer les différentes contraintes (nous étudierons essentiellement la traction). Mais il faut, maintenant que nous connaissons les écritures des différentes fonctions, développer ces équations en détail pour en tirer nos inconnues.

D'après Muskhelishvili (13) doit donner φ_1 , donc nous pouvons écrire:

$$\boxed{\sigma_0 + \sigma_p = 4 \cdot \operatorname{Re} \frac{\varphi_1'(\rho)}{\omega'(\rho)}} \quad (21)$$

Hypothèse : $\frac{\varphi_1'}{\omega'}$ est réelle. Si par cette hypothèse des termes ont été omis ils réapparaîtront nécessairement dans φ_0 .

Pour résoudre l'équation (21) nous devons utiliser l'équation d'équilibre en coordonnées polaires:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \sigma_r] - \sigma_\theta = 0$$

En y remplaçant σ_0 par sa valeur il vient:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \sigma_r] + \sigma_r - 4 \frac{\varphi_1'(\rho)}{\omega'(\rho)} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma_r + \rho \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} - 4 \frac{\varphi_1'(\rho)}{\omega'(\rho)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma_r}{\sigma_r - 2 \frac{\varphi_1'(\rho)}{\omega'(\rho)}} = -2 \frac{d\rho}{\rho}$$

dont l'intégration donne:

$$\ln \left(\sigma_e - 2 \frac{\varphi_1'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right) = \ln \frac{C}{\rho^2}$$

soit:

$$\sigma_e = \frac{C}{\rho^2} + 2 \frac{\varphi_1'(\xi)}{\omega'(\xi)}$$

φ_1 correspond au tube épais donc pour $\rho = \rho_1$, $\sigma_e = -p$ et pour $\rho = 1$, $\sigma_e = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -p = \frac{C}{\rho_1^2} + 2 \frac{\varphi_1'(\xi)}{\omega'(\xi)} \\ 0 = C + 2 \frac{\varphi_1'(\xi)}{\omega'(\xi)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = -\frac{p \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\Rightarrow \varphi_1'(\xi) = \frac{p \rho_1^2}{2(1 - \rho_1^2)} \omega'(\xi)$$

d'où finalement:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{p \rho_1^2}{2(1 - \rho_1^2)} \omega(\xi)$$

(22)

Soustrayons maintenant l'équation (13-b) de (13-a) et prenons la partie réelle, nous obtenons:

$$\sigma_e = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{\varphi_1'(\xi)}{\omega'(\xi)} - \frac{\rho^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\xi)} \left[\bar{\omega}(\xi) \left(\frac{\varphi_1'(\xi)}{\omega'(\xi)} \right)' + \psi_1'(\xi) \right] \right\}$$

Le terme $\frac{\varphi_1'}{\omega'}$ étant constant sa dérivée sera nulle et en faisant

comme seconde hypothèse que $\frac{\psi'}{\bar{\omega}'}$ est réelle alors il restera :

$$\sigma_p = 2 \frac{\varphi'(\varrho)}{\omega'(\varrho)} - \frac{\varrho^2}{\rho^2} \frac{\psi'(\varrho)}{\bar{\omega}'(\varrho)}$$

De la même façon, à $\rho = \rho_1$, $\sigma_p = -p$ implique

$$-p = 2 \frac{\varphi'(\varrho)}{\omega'(\varrho)} - \frac{\varrho^2}{\rho^2} \frac{\psi'(\varrho)}{\bar{\omega}'(\varrho)}$$

$$-p = \frac{\rho \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} - \frac{\varrho^2 \psi'(\varrho)}{\rho^2 \bar{\omega}'(\varrho)}$$

soit :

$$\psi'(\varrho) = \frac{\rho}{1 - \rho_1^2} \frac{\rho_1^2 \bar{\omega}'(\varrho)}{\varrho^2}$$

Voyons à quoi correspond le terme

$$\frac{\rho_1^2 \bar{\omega}'(\varrho)}{\varrho^2}$$

$$\omega(\varrho) = C_1 \varrho + C_7 \varrho^7 + \frac{C_5}{\varrho^5}$$

$$\Rightarrow \omega'(\varrho) = C_1 + 7C_7 \varrho^6 - \frac{5C_5}{\varrho^6}$$

$$\varrho = \rho_1 e^{i\theta} \quad \text{donc} \quad \bar{\varrho} = \rho_1 e^{-i\theta} = \frac{\rho_1}{e^{i\theta}} = \frac{\rho_1^2}{\rho_1 e^{i\theta}} = \frac{\rho_1^2}{\varrho}$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}'(\varrho) = C_1 + \frac{7C_7 \rho_1^{12}}{\varrho^6} - \frac{5C_5 \rho_1^6}{\rho_1^{12}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1^2 \bar{\omega}'(\varrho)}{\varrho^2} = C_1 \frac{\rho_1^2}{\varrho^2} + \frac{7C_7 \rho_1^{14}}{\varrho^8} - \frac{5C_5 \rho_1^4}{\rho_1^{10}}$$

Or
$$\bar{\omega}(\varrho) = \frac{C_1 \rho_1^2}{\varrho} + \frac{C_7 \rho_1^{14}}{\varrho^7} + \frac{C_5 \rho_1^4}{\rho_1^{10}}$$

$$\text{et } (\overline{\omega}(\varrho))' = -\frac{C_1 \rho_1^2}{\varrho^2} - \frac{7C_7 \rho_1^{14}}{\varrho^8} + \frac{5C_5 \varrho^4}{\rho_1^{10}}$$

Nous pouvons donc constater que:

$$(\overline{\omega}(\varrho))' = -\frac{\rho_1^2 \overline{\omega}'(\varrho)}{\varrho^2}$$

Ce qui donne alors:

$$\Psi_1'(\varrho) = \frac{-P}{1-\rho_1^2} (\overline{\omega}(\varrho))'$$

et finalement:

$$\boxed{\Psi_1(\varrho) = \frac{-P}{1-\rho_1^2} \overline{\omega}(\varrho)} \quad (23)$$

Déterminons maintenant la fonction $f(\varrho)$ avec l'équation (14-a) en utilisant les deux fonctions que l'on vient de trouver

$$\Psi_1(\varrho) + \frac{\omega(\varrho)}{\overline{\omega}'(\varrho)} \overline{\Psi_1'(\varrho)} + \overline{\Psi_1}(\varrho) = f(\varrho)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P \rho_1^2}{2(1-\rho_1^2)} \omega(\varrho) + \frac{\omega(\varrho)}{\overline{\omega}'(\varrho)} \frac{P \rho_1^2}{2(1-\rho_1^2)} \overline{\omega}'(\varrho) - \frac{P}{1-\rho_1^2} \omega(\varrho) = f(\varrho)$$

$$\boxed{f(\varrho) = -P \omega(\varrho)} \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \overline{f}(\varrho) = -P \overline{\omega}(\varrho) \quad \text{par l'équation (14-b)}$$

Il faut maintenant trouver les seconds membres des fonction φ_0 et ψ_0 et ceci en intégrant les équations (15-a) ou (15-b) sur la courbe intérieure (voir annexe 1).

Mais pour pouvoir intégrer il faut que tous les termes soient écrits sous forme de série, ce qui n'est pas le cas de

$$\frac{\omega}{\omega'} \bar{\varphi}_0 \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\omega'} \varphi'_0.$$

Les deux équations étant conjuguées, elles donnerons nécessairement le même résultat, nous n'utiliserons donc qu'une des deux seulement. Muskhelishvili conseil de prendre la seconde, soit:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\varphi}_0(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\varphi'_0(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi_0(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{F}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi}$$

Intégrons tout d'abords le terme de droite:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{F}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{-P}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\omega}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} = \frac{-P}{2\pi i} \int_C \left[\frac{C_1 \rho^2}{\sigma} + \frac{C_2 \rho^4}{\sigma^7} + \frac{C_3 \rho^5}{\sigma^{10}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \xi}$$

L'intégrations (annexe 1) donne aisément:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{F}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} = -P \left[\frac{C_1 \rho^2}{\xi} + \frac{C_2 \rho^4}{\xi^7} + \frac{C_3 \rho^5}{\xi^{10}} \right]$$

Dans ce terme nous remarquons qu'il n'y a aucun terme constant et que les seules puissances de ξ existantes sont -1, -7 et +5. Nous nous arrangerons donc pour ne conserver dans le membre de gauche uniquement ces puissances là.

1^{er} terme: Nous avons supposé que $\varphi_0(\xi) = \sum_1^{\infty} a_n \xi^n$ donc il ne restera comme coefficient seulement a_1 et a_7 :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\varphi}_0(\sigma) d\sigma}{\sigma - \xi} = a_1 \bar{\xi} + a_7 \bar{\xi}^7 = - \left(\frac{a_1 \rho^2}{\xi} + \frac{a_7 \rho^4}{\xi^7} \right)$$

Ceci ne signifie pas que l'intégration des autres éléments de la série donne 0 mais ces éléments ne seront pas conservés par la suite, nous préférons donc les supprimer dès maintenant.

2^d terme: Comme nous l'avons dit, il faut tout d'abord l'écrire sous forme de série. Pour cela faisons la division de $\bar{\omega}(\sigma)$ par $\omega'(\sigma)$ suivant les puissances décroissantes.

$$\text{Nous avons déjà vu que: } \bar{\omega}(\sigma) = \frac{C_1 \rho^2}{\sigma} + \frac{C_7 \rho^{14}}{\sigma^7} + \frac{C_{-5} \sigma^5}{\rho^{10}}$$

$$\text{et que: } \omega'(\sigma) = C_1 + 7C_7 \sigma^6 - \frac{5C_{-5}}{\sigma^6}$$

d'où

$$\frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{\frac{C_1 \rho^2}{\sigma} + \frac{C_7 \rho^{14}}{\sigma^7} + \frac{C_{-5} \sigma^5}{\rho^{10}}}{C_1 + 7C_7 \sigma^6 - \frac{5C_{-5}}{\sigma^6}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{\frac{C_{-5}}{\rho^{10}} \sigma^{12} + C_1 \rho^2 \sigma^6 + C_7 \rho^{14}}{7C_7 \sigma^{13} + C_1 \sigma^7 - 5C_{-5} \sigma}$$

La division (annexe 2) donne:

$$\boxed{\frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{N_1}{\sigma} + \frac{N_2}{\sigma^7} + \frac{N_3}{\sigma^{13}} + \dots} \quad (25)$$

Les termes suivants de puissances trop faibles ne seront pas conservés pour les mêmes raisons que précédemment.

$$\left[\begin{aligned} N_1 &= \frac{C_{-5}}{7C_7 \rho^{10}} \\ N_2 &= \frac{C_1 \rho^2}{7C_7} - \frac{C_{-5} C_1}{49C_7^2 \rho^{10}} \\ N_3 &= \frac{\rho^{14}}{7} + \frac{5C_{-5}^2}{49C_7^2 \rho^{10}} - \frac{C_1^2 \rho^2}{49C_7^2} + \frac{C_{-5} C_1^2}{343C_7^3 \rho^{10}} \end{aligned} \right.$$

Il faut faire maintenant le produit avec $\varphi_0(\sigma)$ qui s'écrit:

$$\varphi_0(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sigma^{n-1}$$

Le produit donne, en ne gardant que les puissances $-1, -7$ et $+5$:

$$\frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0(\sigma) = \frac{N_1 a_1 + 7a_7 N_2 + 13a_{13} N_3}{\sigma} + \frac{N_2 a_1 + 7a_7 N_3}{\sigma^7} +$$

$$+ (7a_7 N_1 + 13a_{13} N_2 + 19a_{19} N_3) \sigma^5$$

Dont l'intégration donne:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \xi} = - \frac{N_1 a_1 + 7a_7 N_2 + 13a_{13} N_3}{\xi} + \frac{N_2 a_1 + 7a_7 N_3}{\xi^7} +$$

$$+ (7a_7 N_1 + 13a_{13} N_2 + 19a_{19} N_3) \xi^5$$

3^{ème} terme:

$$\Psi_0(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sigma^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi_0(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n \sigma^n}{\sigma - \xi} d\sigma$$

L'intégration donne puisque la seule puissance qu'il restera est $+5$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi_0(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = b_5 \xi^5$$

Mais cette fois-ci nous pouvons affirmer que les autres coefficients de $\Psi_0(\sigma)$ sont car cette fonction n'intervient qu'une seule fois dans cette équation.

Nous obtenons finalement l'égalité suivante:

$$\left(\frac{a_1 \rho_1^2}{\xi} + \frac{a_7 \rho_1^{14}}{\xi^7} + \frac{N_1 a_1 + 7a_7 N_2 + 13a_{13} N_3}{\xi} + \frac{N_2 a_1 + 7a_7 N_3}{\xi^7} \right) +$$

$$+ (7a_7 N_1 + 13a_{13} N_2 + 19a_{19} N_3) \xi^5 + b_5 \xi^5 = +\rho \left(\frac{C_1 \rho_1^2}{\xi} + \frac{C_7 \rho_1^{14}}{\xi^7} + \frac{C_T \rho_1^{10}}{\xi^{10}} \right) \quad (26)$$

Ce qui conduit à 3 équations à 5 inconnues.

$$\left[\begin{array}{l} \textcircled{1} \quad a_1 (\rho_1^2 + N_1) + 7a_7 N_2 + 13a_{13} N_3 = -\rho C_1 \rho_1^2 \\ \textcircled{2} \quad a_1 N_2 + a_7 (7N_3 + \rho_1^{14}) = -\rho C_1 \rho_1^{14} \\ \textcircled{3} \quad b_5 + 7a_7 N_1 + 13a_{13} N_2 + 19a_{19} N_3 = -\frac{\rho C_5}{\rho_1^{10}} \end{array} \right. \quad (27)$$

Muskhelishvili a montré que l'intégration de $\psi_0(\sigma)$ se réduisait à un terme constant or il n'existe pas d'autre terme constant dans l'équation complète donc cette constante est nulle ainsi que b_5 . L'équation $\textcircled{3}$ devient alors:

$$7a_7 N_1 + 13a_{13} N_2 + 19a_{19} N_3 = -\frac{\rho C_5}{\rho_1^{10}}$$

Il reste tout de même 4 inconnues pour trois équations. transformons tout d'abord ces équations.

$$\textcircled{2} \Rightarrow a_7 = \frac{-\rho C_1 \rho_1^{14} - a_1 N_2}{7N_3 + \rho_1^{14}} \quad (28)$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow a_{13} = \frac{-\frac{\rho C_5}{\rho_1^{10}} - 7a_7 N_1 - 19a_{19} N_3}{13 N_2} \quad (29)$$

En remplaçant ces deux valeurs dans $\textcircled{1}$ il vient:

$$a_1 (\rho_1^2 + N_1) - \frac{N_2}{7N_3 + \rho_1^{14}} \left(7N_2 - \frac{7N_1 N_3}{N_2} \right) a_1 = -\rho C_1 \rho_1^2 + \frac{\rho C_5 N_3}{N_2 \rho_1^{10}} + \frac{19N_3^2}{N_2} a_{13} + \frac{\rho C_1 \rho_1^{14}}{7N_3 + \rho_1^{14}} \left[7N_2 - \frac{7N_1 N_3}{N_2} \right]$$

Si nous calculons le terme $(7N_2 - \frac{7N_1 N_3}{N_2})$ pour différents exemples de matrices nous constatons qu'il est à peu près nul. Il est alors possible de simplifier la dernière égalité en considérant de plus que $\rho_1^2 N_1 \approx N_1$ (vérifié par des exemples).

$$\Rightarrow a_1 N_1 = -\rho C_1 \rho_1^2 + \frac{\rho C_{-5} N_3}{\rho_1^{10} N_2} + \frac{19 N_3^2}{N_2} a_{13} \quad (30)$$

Pour réduire le nombre des inconnues nous pouvons utiliser la condition aux limites suivante: $a_1 \xi$ est le terme qui jouera le plus d'importance dans la fonction $\varphi(\xi)$ car c'est lui qui tient compte de "l'héxagonalité" du conteneur, c'est à dire que pour un contour intérieur circulaire (cas des tubes épais) a_1 serait nul, les autres coefficients ayant une influence beaucoup plus faible peuvent conserver une valeur non nulle. Mais comment transformer l'héxagone en cercle sans changer toute les données du problème. C'est possible en prenant que $r = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ à ce moment l'héxagone disparaît et nous serons en présence d'un anneau de rayons r et R transformé en un anneau de rayon ρ_2 et 1. (fig 3) avec $\rho_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2R}$. Bien sur les coefficients C_k et N_1, N_2, N_3 n'ont pas les même valeur que pour l'héxagone. Nous les distinguerons par l'indice $^{\circ}$. Nous obtenons donc:

$$0 = -\rho C_1^{\circ} \rho_2^2 + \frac{\rho C_{-5}^{\circ} N_3^{\circ}}{\rho_2^{10} N_2^{\circ}} + \frac{19(N_3^{\circ})^2}{N_2^{\circ}} a_{13}$$

$$\Rightarrow a_{13} = \frac{N_2^{\circ}}{19(N_3^{\circ})^2} \left[\rho C_1^{\circ} \rho_2^2 - \rho \frac{C_{-5}^{\circ} N_3^{\circ}}{\rho_2^{10} N_2^{\circ}} \right] \quad (31)$$

Nous avons ainsi supprimé une inconnue.

Nous pouvons maintenant à partir de a_{13} calculer par les équations (30) puis (28) puis (29) les coefficients a_1, a_2 et a_{13} .

Les fonctions $\varphi_0(\xi)$ et $\psi_0(\xi)$ s'écrivent alors.

$$\varphi_0(\xi) = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_{13} \xi^{13} + a_{13} \xi^{19} ; \quad \psi_0(\xi) = 0$$

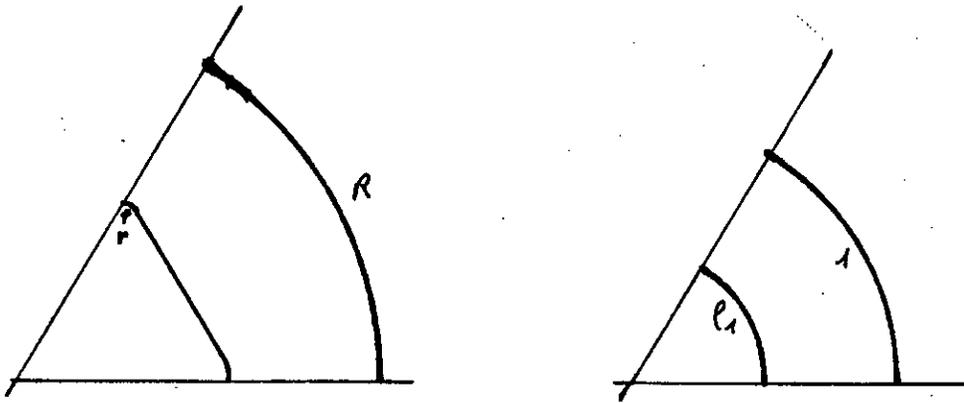


fig.3.a:matrice de départ hexagonale

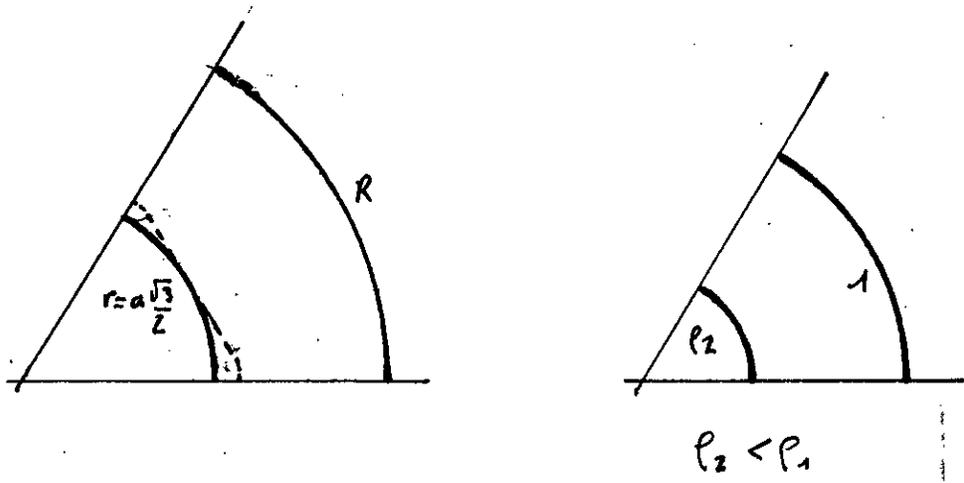


fig.3.b:matrice de départ circulaire

fig.3

Finalement:

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) + \varphi_0(\xi)$$

$$\psi(\xi) = \psi_1(\xi) + \psi_0(\xi)$$

Ce qui donne:

$$\varphi(\xi) = \frac{p s_1^2}{2(1-s_1^2)} \omega(\xi) + a_1 \xi + a_7 \xi^7 + a_{13} \xi^{13} + a_{19} \xi^{19}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\xi) = \left[\frac{p s_1^2 C_1}{2(1-s_1^2)} + a_1 \right] \xi + \left[\frac{p s_1^2 C_7}{2(1-s_1^2)} + a_7 \right] \xi^7 + \frac{p s_1^2 C_5}{2(1-s_1^2)} \xi^5 + a_{13} \xi^{13} + a_{19} \xi^{19}$$

(32)

Que l'on note pour simplifier l'écriture:

$$\varphi(\xi) = U_1 \xi + V_1 \xi^7 + \frac{W_1}{\xi^5} + a_{13} \xi^{13} + a_{19} \xi^{19} \quad (32)'$$

Nous avons également:

$$\psi(\xi) = \frac{-p}{1-s_1^2} \bar{\omega}(\xi) + 0$$

$$\Leftrightarrow \psi(\xi) = \frac{-p}{1-s_1^2} \left[\frac{C_1 s_1^2}{\xi} + \frac{C_7 s_1^{14}}{\xi^7} + \frac{C_5}{s_1^{10}} \xi^5 \right] \quad (33)$$

Que l'on note:

$$\psi(\xi) = \frac{U_2}{\xi} + \frac{V_2}{\xi^7} + W_2 \xi^5 \quad (33)'$$

Nous avons utilisé les équations (13-a) et (13-b) sur le contour intérieur pour le cas du cercle pour trouver les fonctions $\varphi_1(\varrho)$ et $\varphi_2(\varrho)$. Ayant déterminé les fonctions complètes $\varphi(\varrho)$ et $\bar{\varphi}(\varrho)$ nous pouvons réutiliser ces équations pour trouver les valeurs des contraintes réelles totales sur l'héxagone.

Prenons ces deux équations une à une pour les développer en fonction des résultats déjà obtenus. Commençons par (13-a).

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\varrho)}{\omega'(\varrho)} \right]$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\varphi'(\varrho) \cdot \bar{\omega}'(\varrho)}{\omega'(\varrho) \bar{\omega}'(\varrho)} \right]$$

or $\omega'(\varrho) \cdot \bar{\omega}'(\varrho) = |\omega'(\varrho)|^2 = |\bar{\omega}'(\varrho)|^2$ module de

$$\Rightarrow \sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\varrho) \cdot \bar{\omega}'(\varrho)}{|\bar{\omega}'(\varrho)|^2} = 4 \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\varrho) \cdot \bar{\omega}'(\varrho)}{|\omega'(\varrho)|^2}$$

Nous pouvons partager les différents termes en partie imaginaire et partie réelle:

$$\varphi'(\varrho) = \operatorname{Re}[\varphi'(\varrho)] + i \operatorname{Im}[\varphi'(\varrho)]$$

$$\bar{\omega}'(\varrho) = \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(\varrho)] + i \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(\varrho)]$$

$$|\omega'(\varrho)|^2 = |\bar{\omega}'(\varrho)|^2 = \left(\operatorname{Re}[\bar{\omega}'(\varrho)] \right)^2 + \left(\operatorname{Im}[\bar{\omega}'(\varrho)] \right)^2$$

$\Rightarrow |\bar{\omega}'(\varrho)|^2$ est réel et nous garderons donc cette écriture.

$\sigma_r + \sigma_\theta$ est alors égal à:

$$\sigma_p + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \left\{ \frac{[\operatorname{Re}[\varphi'(q)] + i \operatorname{Im}[\varphi'(q)]] \cdot [\operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] + i \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)]]}{|\bar{\omega}'(q)|^2} \right\}$$

Le développement du terme supérieur de la parenthèse donne:

$$\left\{ \operatorname{Re}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] - \operatorname{Im}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)] \right\} + \\ + i \left\{ \operatorname{Re}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)] + \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] \cdot \operatorname{Im}[\varphi'(q)] \right\}$$

Et comme il ne faut conserver que la partie réelle il restera finalement:

$$\sigma_p + \sigma_\theta = \frac{4 \operatorname{Re}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] - \operatorname{Im}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)]}{|\bar{\omega}'(q)|^2} \quad (34)$$

Voyons maintenant comment s'écrivent les différentes parties réelles et imaginaires de cette égalité:

$$\varphi'(q) = U_1 + 7V_1 \xi^6 - \frac{5W_1}{\xi^6} + 13a_{13} \xi^{12} + 13a_{13} \xi^{18}$$

En sachant que $\xi^n = \rho_1^n [\cos n\theta + i \sin n\theta] \quad n \geq 0$

et $\xi^{-n} = \rho_1^{-n} [\cos n\theta - i \sin n\theta] \quad n \geq 0$

d'après la formule de Moivre, nous pouvons écrire que:

$$\Rightarrow \operatorname{Re}[\varphi'(q)] = U_1 + \left(7V_1 \rho_1^6 - \frac{5W_1}{\rho_1^6}\right) \cos 6\theta + 13a_{13} \rho_1^{12} \cos 12\theta + 19a_{19} \rho_1^{18} \cos 18\theta$$

$$\operatorname{Im}[\varphi'(q)] = \left(7V_1 \rho_1^6 + \frac{5W_1}{\rho_1^6}\right) \sin 6\theta + 13a_{13} \rho_1^{12} \sin 12\theta + 19a_{19} \rho_1^{18} \sin 18\theta$$

Nous avons vu que: $\bar{\omega}'(q) = C_1 + \frac{7C_7 \rho_1^{12}}{q^6} - \frac{5C_5 q^6}{\rho_1^{12}}$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] = C_1 + \left(7C_7 \rho_1^6 - \frac{5C_5}{\rho_1^6}\right) \cos 6\theta$$

et $\operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)] = \left(-7C_7 \rho_1^6 - \frac{5C_5}{\rho_1^6}\right) \sin 6\theta$

Considérons maintenant l'équation (13-b) et prenons uniquement la partie réelle des membres de gauche et de droite, soit:

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2q^2}{\rho_1^2 \bar{\omega}'(q)} \left[\bar{\omega}(q) \left(\frac{\varphi'(q)}{\omega'(q)} \right)' + \psi'(q) \right] \right\}$$

Appelons par **H** le terme entre parenthèses :

$$H = \frac{2q^2}{\rho_1^2 \bar{\omega}'(q)} \left[\bar{\omega}(q) \left(\frac{\varphi'(q)}{\omega'(q)} \right)' + \psi'(q) \right]$$

Pour pouvoir prendre sa partie réelle il est nécessaire de développer ce terme.

Toutes les fonctions utilisées ici ne dépendant que de ξ nous omettrons pour simplifier l'écriture de le mentionner, ainsi nous écrirons ψ' au lieu de $\psi'(\xi)$ etc....

$$H = \frac{2\xi^2}{\rho_1^2 \bar{\omega}'} \left[\bar{\omega} \left(\frac{\psi''}{\omega'} \right)' + \psi' \right]$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{2\xi^2}{\rho_1^2 \bar{\omega}'} \left[\bar{\omega} \frac{\psi'' \omega' - \psi' \omega''}{(\omega')^2} + \psi' \right]$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{2\xi^2}{\rho_1^2 \bar{\omega}' (\omega')^2} \left[\bar{\omega} (\psi'' \omega' - \psi' \omega'') + (\omega')^2 \psi' \right]$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{2\xi^2}{\rho_1^2 \bar{\omega}' \omega' \omega' \bar{\omega}'} \left[\bar{\omega} \bar{\omega}' (\psi'' \omega' - \psi' \omega'') + \bar{\omega}' \omega' \omega' \psi' \right]$$

$$\bar{\omega}' \omega' = |\omega'|^2 = |\bar{\omega}'|^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{2\xi^2}{\rho_1^2 |\bar{\omega}'|^4} \left[\bar{\omega} \bar{\omega}' (\psi'' \omega' - \psi' \omega'') + |\bar{\omega}'|^2 \omega' \psi' \right]$$

$$\Leftrightarrow H = \frac{2}{\rho_1^2 |\bar{\omega}'|^4} \left[\bar{\omega} \bar{\omega}' \cdot \xi^2 (\psi'' \omega' - \psi' \omega'') + |\bar{\omega}'|^2 \cdot \xi^2 \omega' \psi' \right]$$

Notons $|\overline{\omega'}|^2 = K_1$ $\frac{2}{\rho^2 |\overline{\omega'}|^4} = K_2$

Notons également:

$$\overline{\omega} \overline{\omega'} = R_2 + i I_2$$

R pour partie réelle

I pour partie imaginaire

$$\varphi^2 (\varphi'' \omega' - \varphi' \omega'') = R_3 + i I_3$$

$$\xi^2 \omega' \psi' = R_4 + i I_4$$

H s'écrit alors :

$$H = K_2 [(R_2 + i I_2)(R_3 + i I_3) + K_1 (R_4 + i I_4)]$$

$$H = K_2 [(R_2 R_3 - I_2 I_3 + K_1 R_4) + i (I_2 R_3 + I_3 R_2 + K_1 I_4)]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_0 - \sigma_e = \operatorname{Re}(H) = K_2 (R_2 R_3 - I_2 I_3 + K_1 R_4)} \quad (35)$$

et $\delta_{e0} = \frac{\operatorname{Im}(H)}{2} = \frac{K_2}{2} (I_2 R_3 + I_3 R_2 + K_1 I_4)$

Car l'équation (13-b) s'écrit en fonction de H :

$$\sigma_0 - \sigma_e + 2i \delta_{e0} = \operatorname{Re}(H) + i \operatorname{Im}(H)$$

Il faut maintenant déterminer les différents éléments constituant H :

$$a) R_2 + i I_2 = \bar{\omega}(\varrho) \cdot \overline{\omega'}(\varrho)$$

$$\text{avec } \bar{\omega}(\varrho) = \frac{C_1 \rho_1^2}{\varrho} + \frac{C_7 \rho_1^{14}}{\varrho^7} + \frac{C_5 \rho_1^5}{\rho_1^{10}}$$

$$\text{et } \overline{\omega'}(\varrho) = C_1 + \frac{7C_7 \rho_1^{12}}{\varrho^6} - \frac{5C_5 \rho_1^6}{\rho_1^{12}}$$

Le produit donne après simplification :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(\varrho) \cdot \overline{\omega'}(\varrho) &= (C_1 + 2C_7 C_5) \frac{\rho_1^2}{\varrho} + \frac{8C_1 C_7 \rho_1^{14}}{\varrho^7} + \frac{7C_7^2 \rho_1^{26}}{\varrho^{13}} - \\ &\quad - \frac{4C_1 C_5 \rho_1^5}{\rho_1^{10}} - \frac{5C_5^2 \rho_1^{11}}{\rho_1^{22}} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} R_2 &= (C_1 + 2C_7 C_5) \rho_1 \cos \theta + 8C_1 C_7 \rho_1^7 \cos 7\theta + \\ &\quad + 7C_7^2 \rho_1^{13} \cos 13\theta - \frac{4C_1 C_5}{\rho_1^5} \cos 5\theta - \frac{5C_5^2}{\rho_1^{11}} \cos 11\theta \end{aligned} \quad (36)$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= -(C_1 + 2C_7 C_5) \rho_1 \sin \theta - 8C_1 C_7 \rho_1^7 \sin 7\theta - \\ &\quad - 7C_7^2 \rho_1^{13} \sin 13\theta - \frac{4C_1 C_5}{\rho_1^5} \sin 5\theta - \frac{5C_5^2}{\rho_1^{11}} \sin 11\theta \end{aligned} \quad (37)$$

$$b) R_3 + iI_3 = \xi^2 [\varphi''(\xi) \cdot \omega'(\xi) - \varphi'(\xi) \cdot \omega''(\xi)]$$

Nous avons déjà vu que :

$$\varphi'(\xi) = U_1 + 7V_1 \xi^6 - \frac{5W_1}{\xi^5} + 13a_{13} \xi^{12} + 19a_{19} \xi^{18}$$

$$\text{et } \omega'(\xi) = C_1 + 7C_7 \xi^6 - \frac{5C_5}{\xi^5}$$

$$\Rightarrow \varphi''(\xi) = 42V_1 \xi^5 + \frac{30W_1}{\xi^7} + 156a_{13} \xi^{11} + 342a_{19} \xi^{17}$$

$$\text{et } \omega''(\xi) = 42C_7 \xi^5 + \frac{30C_5}{\xi^7}$$

Le produit total donne en négligeant les termes de puissance supérieure à 13 ($\xi^{14} = 5,73 \cdot 10^{-8}$ pour la matrice de notre exemple)

$$\begin{aligned} R_3 + iI_3 = & 420 [C_7 W_1 - C_5 V_1] \cdot \xi + \frac{30}{\xi^5} [W_1 C_1 - U_1 C_5] + \\ & + [42C_1 V_1 - 42U_2 C_7 - 1170 a_{13} C_5] \cdot \xi^7 + \\ & + [156 a_{13} C_1 - 2280 a_{19} C_5] \cdot \xi^{13} \end{aligned}$$

D'où finalement:

$$\begin{aligned}
 R_3 = & 420 [C_7 W_1 - C_{-5} V_1] \rho_1 \cos \theta + \frac{30}{\rho_1^5} [W_1 C_1 - U_1 C_{-5}] \cos 5\theta + \\
 & + [42 (C_1 V_1 - U_1 C_7) - 1170 a_{13} C_{-5}] \rho_1^7 \cos 7\theta + \\
 & + [156 a_{13} C_1 - 2280 a_{13} C_{-5}] \rho_1^{13} \cos 13\theta
 \end{aligned} \quad (38)$$

et:

$$\begin{aligned}
 I_3 = & 420 [C_7 W_1 - C_{-5} V_1] \rho_1 \sin \theta - \frac{30}{\rho_1^5} [W_1 C_1 - U_1 C_{-5}] \sin 5\theta + \\
 & + [42 (C_1 V_1 - U_1 C_7) - 1170 a_{13} C_{-5}] \rho_1^7 \sin 7\theta + \\
 & + [156 a_{13} C_1 - 2280 a_{13} C_{-5}] \rho_1^{13} \sin 13\theta
 \end{aligned} \quad (39)$$

$$c) \quad R_4 + i I_4 = \rho^2 \omega'(\rho) \cdot \psi'(\rho)$$

Nous savons déjà que:

$$\psi(\rho) = \frac{U_2}{\rho} + \frac{V_2}{\rho^7} + W_2 \rho^5$$

$$\text{et} \quad \omega'(\rho) = C_1 + 7C_4 \rho^6 - \frac{5C_{-5}}{\rho^6}$$

$$\Rightarrow \psi'(\rho) = -\frac{U_2}{\rho^2} - \frac{7V_2}{\rho^8} + 5W_2 \rho^4$$

Le produit donne:

$$\begin{aligned}
 R_4 + iI_4 = & -(U_2 C_1 + 49 V_2 C_7 + 25 W_2 C_{-5}) + \\
 & + (5 W_2 C_1 - 7 U_2 C_7) \xi^6 + (5 C_{-5} U_2 - 7 V_2 C_1) \frac{1}{\xi^5} + \\
 & + 35 W_2 C_7 \xi^{12} + 35 V_2 C_{-5} \cdot \frac{1}{\xi^{12}}
 \end{aligned}$$

Qué l'on sépare en partie réelle R_4 et partie imaginaire I_4 :

$$\begin{aligned}
 R_4 = & -(U_2 C_1 + 49 V_2 C_7 + 25 W_2 C_{-5}) + \\
 & + \left[(5 W_2 C_1 - 7 U_2 C_7) \xi_1^6 + \frac{5 C_{-5} U_2 - 7 V_2 C_1}{\xi_1^6} \right] \cos 6\theta + \\
 & + 35 \left[\frac{V_2 C_{-5}}{\xi_1^{12}} + W_2 C_7 \xi_1^{12} \right] \cos 12\theta
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 = & \left[(5 W_2 C_1 - 7 U_2 C_7) \xi_1^6 - \frac{5 U_2 C_{-5} - 7 V_2 C_1}{\xi_1^6} \right] \sin 6\theta + \\
 & + 35 \left[W_2 C_7 \xi_1^{12} - \frac{V_2 C_{-5}}{\xi_1^{12}} \right] \sin 12\theta
 \end{aligned} \tag{41}$$

Nous avons ainsi déterminé tous les membres de droite des deux équations (34) et (35). Tous ces termes seront calculables facilement et rapidement par l'ordinateur car leur écriture est prête pour la programmation, c'est à dire que l'on peut les introduire comme elles sont écrites ici en changeant seulement par endroit le nom d'une variable. Grâce à ces deux équations on peut directement tirer $\sqrt{\theta}$ (la contrainte qui nous intéresse le plus).

Faisons (34)+(35) et divisons par 2, il vient:

$$\sigma_0 = 2 \cdot \frac{\operatorname{Re}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] - \operatorname{Im}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)]}{\kappa_1} + \frac{\operatorname{Re}[H]}{2} \quad (42)$$

Rappelons que nous avons noté: $|\bar{\omega}'(q)|^2 = |\omega'(q)|^2 = \kappa_1$

Dans notre calcul (programme) nous n'utiliserons pas cette formule mais la formule approchée suivante, car $\frac{\operatorname{Re}[H]}{2} \approx p$

$$\sigma_0 = 2 \cdot \frac{\operatorname{Re}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Re}[\bar{\omega}'(q)] - \operatorname{Im}[\varphi'(q)] \cdot \operatorname{Im}[\bar{\omega}'(q)]}{\kappa_1} + p \quad (42')$$

L'équation (35) permet de tirer pour chaque valeur de σ_0 calculée, la valeur de σ_p au même point:

$$\rightarrow \sigma_p = \sigma_0 - \operatorname{Re}[H] \quad (43) \quad \text{Nous avons déjà} \quad \sigma_{e0} = \frac{\operatorname{Im}[H]}{2} \quad (44)$$

En quels points allons nous calculer σ_0 ?

Il serait judicieux d'utiliser les mêmes points que pour la détermination de la fonction de transformation. C'est à dire que nous aurons m valeurs de σ_0 sur un pan de l'hexagone. Le programme peut enfin être achevé (annexe 3 : programme complet) et il sera prêt pour des essais.

Mais un problème se pose à nous maintenant. Comment vérifier que l'équation (42') donnera des valeurs correctes? Ou autrement dit, n'avons nous fait aucune faute de principe ou de calcul?

La vérification est possible en revenant aux tubes épais. Nous avons vu lors du calcul du coefficient a_{10} qu'il était possible en introduisant comme valeur du rayon r , $r = a \frac{\sqrt{3}}{2}$ l'hexagone devient un cercle et ainsi la matrice d'origine n'est plus hexagonale mais annulaire (tube épais) de rayon intérieur r et extérieur R que nous transformerons, par le calcul, en un second anneau de rayons p et 1. Or il existe une formule toute simple qui permet d'obtenir directement σ_0 , elle s'écrit:

$$\sigma_0 = p \cdot \frac{r^2}{R^2 - r^2} \cdot \left[1 + \frac{R^2}{r^2} \right] \quad r \leq x \leq R$$

Pour trouver la contrainte sur le cercle intérieur nous prendrons $x=r$. Nous comparerons ensuite cette valeur à celle de l'ordinateur. Nous utiliserons notre "matrice exemple": $a=10$, $r = a \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,660254$, $R=30$ et nous prendrons $p=700$ MPa.

Remplaçons ces valeurs dans la formule précédente.

Il faut maintenant utiliser ce programme pour des matrices réellement hexagonales, ce pourquoi il a été conçu tout d'abord.

Nous faisons deux séries d'essais.

1^{ère} série: A pression constante nous faisons varier le rayon r
 2^{ème} série: A rayon r constant nous faisons varier la pression p .

Ces deux variations devraient nous permettre de voir les effets respectifs de r et de p sur la concentration de la contrainte aux coins de l'hexagone (il est à prévoir qu'elle est indépendante de p).

1^{ère} série:

$r=4$ $p=700$

1	852.9223
2	852.2875
3	850.9981
4	849.8692
5	849.1511
6	848.8165
7	848.8165
8	849.1511
9	849.8692
10	850.9981
11	852.2875
12	852.9223

$r=2$ $p=700$

1	858.5809
2	857.5519
3	855.621
4	854.0853
5	853.1749
6	852.7669
7	852.7669
8	853.1748
9	854.0853
10	855.621
11	857.5519
12	858.5809

$r=1$ $p=700$

1	862.8842
2	862.5726
3	861.7498
4	860.6664
5	859.5596
6	858.5742
7	857.7694
8	857.153
9	856.7123
10	856.4802
11	856.2929
12	856.2929
13	856.4802
14	856.7123
15	857.153
16	857.7694
17	858.5742
18	859.5596
19	860.6664
20	861.7498
21	862.5726
22	862.8842

$r=1E-20$ $p=700$

1	863.7825
2	863.4448
3	862.5578
4	861.4001
5	860.2294
6	859.1972
7	858.3609
8	857.7249
9	857.2722
10	856.9834
11	856.8431
12	856.8431
13	856.9834
14	857.2722
15	857.7249
16	858.3609
17	859.1972
18	860.2294
19	861.4001
20	862.5578
21	863.4448
22	863.7825

2^{de} série:

r=2 p=900

1	1103.891
2	1102.568
3	1100.085
4	1098.111
5	1096.94
6	1096.415
7	1096.415
8	1096.94
9	1098.111
10	1100.085
11	1102.568
12	1103.891

r=2 p=1100

1	1349.198
2	1347.581
3	1344.547
4	1342.134
5	1340.703
6	1340.062
7	1340.062
8	1340.703
9	1342.134
10	1344.547
11	1347.581
12	1349.198

r=2 p=1300

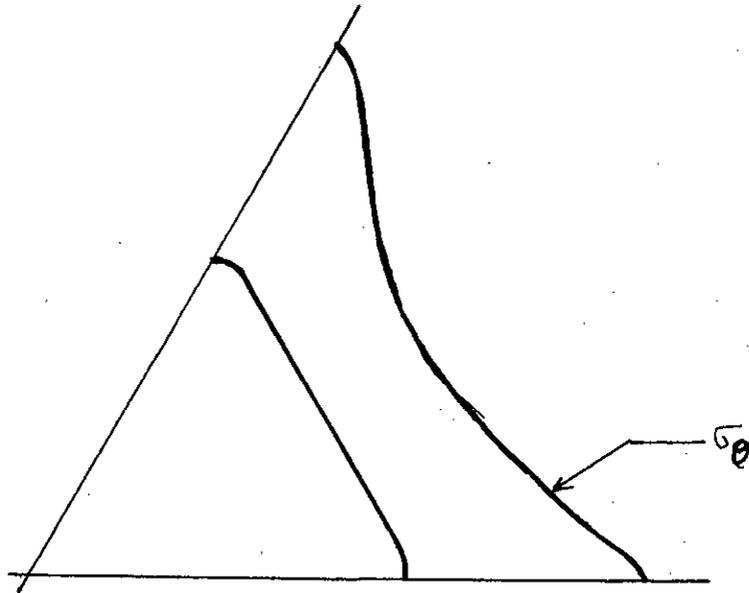
1	1594.508
2	1592.597
3	1589.011
4	1586.159
5	1584.468
6	1583.71
7	1583.71
8	1584.468
9	1586.159
10	1589.011
11	1592.597
12	1594.508

r=2 p=1500

1	1839.817
2	1837.612
3	1833.474
4	1830.183
5	1828.232
6	1827.358
7	1827.358
8	1828.232
9	1830.183
10	1833.474
11	1837.612
12	1839.817

III.3.2 INTERPRETATION DES RESULTATS.

1^{ère} série: Nous constatons que σ_{θ} est maximale aux coins de l'hexagone et minimale au milieu du pan (fig:4) ce qui correspond bien comme prévu à une concentration de la contrainte, et ceci quel que soit le rayon r.



r a une influence sur la valeur maximale. Plus r diminue plus ce maximum est grand. On peut évaluer la concentration à l'aide d'un coefficient dit "facteur de concentration" et qui est défini par:

$$c = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{moyen}}}$$

Si nous le calculons pour les 4 exemples nous obtenons:

Pour $r=4$, $c=1,0026428$
 $r=2$, $c=1,0038397$
 $r=1$, $c=1,004279$
 $r=10$, $c=1,0047229$

Nous constatons que sa valeur n'est pas importante ($\ll 1,5$) mais nous voyons qu'elle augmente quand r diminue c'est à dire quand les coins deviennent plus marqués plus "anguleux". Ce fait est bien connu des mécaniciens qui utilisent habituellement les arrondis pour diminuer la concentration des contraintes sur les pièces.

2^{de} série: Nous pouvons y incorporer l'essai précédent à $r=2$ et $p=700$ MPa

Pour	$p=700$	$c=1,0038397$
	$p=900$	$c=1,0038399$
	$p=1100$	$c=1,0038396$
	$p=1300$	$c=1,0038398$
	$p=1500$	$c=1,0038399$

Nous voyons que la concentration est indépendante de la pression. Ceci était à prévoir car le fait de la concentration est dû à la forme de la pièce et non de facteur extérieur.

Nous constatons aussi que la contrainte de traction est toujours supérieur à p et l'écart entre les deux augmente avec cette pression. Les pressions habituellement utilisées vont de 600 à 1500 MPa .

CONCLUSION

Cette étude a permis de déterminer 3 choses.

Premièrement: La possibilité d'utilisation de la méthode de Muskhelishvili pour un domaine doublement connexe. Elle nous a donné des résultats satisfaisant du point de vu de la précision (voir le contrôle à l'aide du cercle) et le programme que nous avons élaboré est utilisable pour n'importe quelle dimension de matrice hexagonale ou même circulaire si l'on prend pour r la valeur :

$$r = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Deuxièmement: La détermination des contraintes le long d'un pan de l'hexagone, ainsi l'on peut savoir quelle dimension il faut donner à la frette pour que la pression qu'elle créera puisse contrecarrer la traction calculée.

Troisièmement: L'évaluation de la concentration de la contrainte de traction en fonction du rayon des coins de l'hexagone. Nous constatons que ce rayon doit être supérieur à 2 pour que sont influence apparaisse clairement.

Dans tout les cas cette concentration est faible et ne semble pas être un danger pour la pièce.

Ces constatations nous mènent à prévoir deux suites possibles à notre étude.

La première serait de calculer la contrainte de traction sur l'hexagone après la pose de la frette en fonction de la pression qu'elle créera et de la pression intérieur toujours présente.

La seconde serait une généralisation de la méthode à des formes de conteneur variées telles que pentagone, carré, triangle ou autre. Nous pouvons prévoir dès à présent que plus le nombre de cotés est petit plus la concentration sera grande. Notre matrice avait pour sa part une forme qui était encore trop prôche du cercle et c'est pour celà que la concentration

était faible.

Nous espérons que cette étude sera une contribution positive à la résistance des matériaux et la mécanique en général.

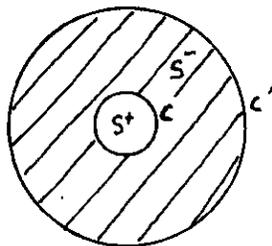
ANNEXE 1

Intégrale de Cauchy

Soit une fonction $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n z^n$ régulière sur S^- (domaine annulaire) et soit $G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n$

L'intégration de $f(z)$ sur le contour C se

(fz)



se fait en 2 fois

1) Si $|z| > \rho_1$ (ρ_1 rayon de C)

alors $z \in S^-$ et

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} = -f(z) + G(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n \quad \text{on ne}$$

conserve que les puissances négatives.

2) Si $|z| < \rho_2 \Rightarrow z \in S^+$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} = G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n \quad (\text{on ne garde}$$

que les puissances positives)

On peut réunir les deux intégrales en une seule c'est à dire

$$\forall z \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sigma - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n$$

ANNEXE 2

Division $\frac{\bar{\omega}(\varphi)}{\omega'(\varphi)}$

$$\frac{\bar{\omega}(\varphi)}{\omega'(\varphi)} = \frac{\frac{C-5}{\beta^{10}} \sigma^{12} + C_1 \beta^2 \sigma^6 + C_7 \beta^{14}}{7C_7 \sigma^{13} + C_1 \sigma^7 + 5C_7 \sigma} = \frac{a\sigma^{12} + b\sigma^6 + c}{d\sigma^{13} + e\sigma^7 + f\sigma}$$

$ \begin{array}{r} a\sigma^{12} \quad + b\sigma^6 \quad + c \\ -a\sigma^{12} \quad - \frac{ae}{d}\sigma^6 \quad - \frac{af}{d} \\ \hline \left(\frac{b-ae}{d}\right)\sigma^6 \quad + \left(c - \frac{af}{d}\right) \\ - \left(\frac{b-ae}{d}\right)\sigma^6 \quad - \left(\frac{be}{d} - \frac{ae^2}{d^2}\right) \\ \hline = \frac{\left(c - \frac{af}{d} - \frac{be}{d} + \frac{ae^2}{d^2}\right) - \left(c - \frac{af}{d} - \frac{be}{d} + \frac{ae^2}{d^2}\right) \cdot \frac{K}{\sigma^6}}{0 - \frac{K}{\sigma^6}} \end{array} $	$ \begin{array}{r} d\sigma^{13} + e\sigma^7 + f\sigma \\ \hline \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{\sigma} + \left(\frac{b}{d} - \frac{ae}{d^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^7} + \\ + \left(\frac{c}{d} - \frac{af}{d^2} - \frac{be}{d^2} + \frac{ae^2}{d^3}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^{13}} \end{array} $
--	---

$$\Rightarrow \frac{\bar{\omega}(\varphi)}{\omega'(\varphi)} = \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{\sigma} + \left(\frac{b}{d} - \frac{ae}{d^2}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^7} + \left(\frac{c}{d} - \frac{af}{d^2} - \frac{be}{d^2} + \frac{ae^2}{d^3}\right) \cdot \frac{1}{\sigma^{13}}$$

$$\frac{a}{d} = N_1 = \frac{C-5}{7C_7 \beta^{10}} ; \frac{b}{d} - \frac{ae}{d^2} = N_2 = \frac{C_1 \beta^2}{7C_7} - \frac{C-5 C_1}{49C_7^2 \beta^{10}}$$

$$\frac{c}{d} - \frac{af}{d^2} - \frac{be}{d^2} + \frac{ae^2}{d^3} = N_3 = \frac{\beta^{14}}{7} + \frac{5C_7^2}{49C_7^2 \beta^{10}} - \frac{C_7 \beta^2}{49C_7^2} + \frac{C-5 C_1^2}{343C_7^3 \beta^{10}}$$

ANNEXE 3

LE PROGRAMME "KOL-MUSK"

Le nom de ce programme est une abréviation des deux noms :
Kolossof et Muskelishvili.

NOTATIONS:

=====

Dimensions de la matrice

=====

a → A0 ; r → R0 ; R → R1
 π → PI ; β → BE ; m → M

=====

Coordonnées des points de la matrice (un seul pan)

=====

Nous allons plus loin l'utilité de REPERE.

l → L ; α → AL ; ρ₁ → RH1 = $\frac{NUM}{DEN}$
 γ → GA

XI, YI: points de l'hexagone

XJ, YJ: points du cercle extérieur

RH2: rayon du cercle intérieur de la matrice circulaire servant au calcul de a_{13} . Ce calcul nécessitant la réutilisation de presque tout le programme dans lequel seuls changent r, donc nous avons créé un repère, REPERE, qui est égale à 0 lors du premier déroulement (normal) du programme et qui est changé en 1 (ligne 1430) pour le second passage.

ρ₂ → RH2

Nous avons utilisé (lignes 530, 580) arctg (ATN) au lieu de arcsin que nous avons écrit dans la formule (page 24) car l'ordinateur ne connaît pas cette fonction mais uniquement arctg. Or:

$$\arcsin(x) = \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Ce qui nous a permis de l'utiliser sans problèmes.

=====
Coefficients de la fonction de transformation
=====

$$C_k \longrightarrow CK(J) \quad ; \quad C_{-k} \longrightarrow CMK(J)$$

$$C_k^\circ \longrightarrow COK(J) \quad ; \quad C_{-k}^\circ \longrightarrow COMK(J)$$

P1, P2, S1, S2, S3 et S4 sont des facteurs qui ont servi à décomposer le calcul de ces coefficients.

=====
Vérification de la fonction
=====

ZXI, ZYI : points de l'hexagone calculés par la fonction
ZXJ, ZYJ : points du cercle extérieur calculés par la fonction

=====
Calcul des contraintes
=====

$$N_1 \longrightarrow N1 \quad ; \quad N_2 \longrightarrow N2 \quad ; \quad N_3 \longrightarrow N3$$

$$N_1^\circ \longrightarrow N02 \quad ; \quad N_2^\circ \longrightarrow N03$$

$$a_{19} \longrightarrow A19 \quad ; \quad a_1 \longrightarrow A1 \quad ; \quad a_7 \longrightarrow A7$$

$$a_{13} \longrightarrow A13$$

$$U_1 \longrightarrow U1 \quad ; \quad V_1 \longrightarrow V1 \quad ; \quad W_1 \longrightarrow W1$$

$$U_2 \longrightarrow U2 \quad ; \quad V_2 \longrightarrow V2 \quad ; \quad W_2 \longrightarrow W2$$

$$Re[w'(q)] \longrightarrow I \quad ; \quad Im[w'(q)] \longrightarrow J$$

$$K_1 \longrightarrow K1 \quad ; \quad K_2 \longrightarrow K2$$

$$R_2, I_2 \longrightarrow R2, I2 \quad ; \quad R_3, I_3 \longrightarrow R3, I3 \quad ; \quad R_4, I_4 \longrightarrow R4, I4$$

$$Re[H] \longrightarrow RH \quad ; \quad Im[H] \longrightarrow IH$$

$$Re\psi', Im\psi' \longrightarrow RI, II \quad ; \quad Re\bar{w}', Im\bar{w}' \longrightarrow II, IO$$

$$\sigma_0 \longrightarrow ST$$

$$\sigma_e \longrightarrow SN$$

$$\sigma_{e0} \longrightarrow T$$

PROGRAMME KOL-HUSK

```

10 REM "*****"
20 REM "  CALCUL DE RESISTANCE D'UNE MATRICE DE FILAGE A FROID "
30 REM "                A CONTENEUR HEXAGONAL "
40 REM "*****"
50 "
60 REM "Le programme permet de determiner par la methode de"
70 REM "MUSKELISVILI les contraintes de compression  $\sigma_c$ ,"
80 REM "de traction  $\sigma_t$  et de cisaillement  $\tau$  produites par "
90 REM "une pression  $P$  sur le contour interieur d'une "
100 REM "matrice de filage a trou hexagonal en fonction"
110 REM "de ses dimensions  $a, r, R$  (variables). "
120 REM "Le calcul se faisant point par point il sera possible"
130 REM "de choisir leur nombre,  $m$ ."
140 REM "P peut egalement varier.":PRINT:PRINT
150 "
160 REM "*****"
170 REM "                DIMENSIONS DE LA MATRICE "
180 REM "*****"
190 "
200 INPUT "Cote de l'hexagone a= ";A0
210 INPUT "Rayon de courbure des coins r= ";R0
220 INPUT "Rayon exterieur de la matrice-Ra=";R1
230 PI=3.14159265359#
240 BE=ATH(R0/2*(A0-R0)*.5/6)
250 PRINT "Beta=";BE
260 MMIN=PI/3/BE+1
270 PRINT "le nombre de points m doit etre superieur ou egal a ";INT(MMIN+1)
280 INPUT "Nombre de points consideres m= ";M:PRINT
290 "

```

```

300 REM "*****"
310 REM " COORDONNEES DES POINTS DE LA MATRICE (UN SEUL PAN) "
320 REM "*****"
330
340 DIM XI(M);YI(M),XJ(M),YJ(M),CK(40),CMK(40),COK(40),COMK(40)
350 REPERE=0
360 GOTO 390
370 R0=A0*3^.5/2
380 BE=ATN(R0/2/(A0-R0*3^.5/6))
390 L=A0-2*R0/3^.5
400 RA=L/R0
410 IF REPERE=1 THEN 440
420 PRINT "1= ";L;PRINT;PRINT
430 PRINT TAB(5);"XI(I)";TAB(20);"YI(I)";TAB(35);"XJ(I)";TAB(50);"YJ(I)"
440 NUM=0
450 DEN=0
460 FOR I=1 TO M
470 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
480 IF AL>BE THEN 490 ELSE 530
490 IF AL<(PI/3-BE) THEN 500 ELSE 570
500 XI(I)=A0*3^.5/(TAN(AL)+3^.5)
510 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
520 GOTO 640
530 GA=ATN(RA*SIN(AL)/SQR(1-(RA*SIN(AL))^2))
540 XI(I)=R0*COS(AL)*(COS(GA)+RA*COS(AL))
550 YI(I)=R0*SIN(AL+GA)
560 GOTO 640
570 IF AL=PI/3 THEN 620 ELSE 580
580 GA=ATN(RA*SIN(PI/3-AL)/SQR(1-(RA*SIN(PI/3-AL))^2))
590 XI(I)=R0*(SIN(PI/3-AL)*COS(GA)+SIN(GA)*COS(PI/3-AL))*COS(AL)/SIN(PI/3-AL)
600 YI(I)=XI(I)/COS(AL)*SIN(AL)
610 GOTO 640
620 XI(I)=(L+R0)*COS(AL)
630 YI(I)=(L+R0)*SIN(AL)
640 XJ(I)=R1*COS(AL)
650 YJ(I)=R1*SIN(AL)
660 IF REPERE=1 THEN 710
670 PRINT I;TAB(5);XI(I);TAB(20);YI(I);TAB(35);XJ(I);TAB(50);YJ(I)
680
690 REM " RAYON DU CERCLE INTERIEUR DE L'ANNEAU "
700
710 NUM=NUM+XI(I)*COS(PI*(2*I-1)/6/M)+YI(I)*SIN(PI*(2*I-1)/6/M)
720 DEN=DEN+XJ(I)*COS(PI*(2*I-1)/6/M)+YJ(I)*SIN(PI*(2*I-1)/6/M)
730 NEXT I
740 IF REPERE=0 THEN 770
750 RH2=NUM/DEN
760 GOTO 880
770 PRINT;PRINT
780 RH1=NUM/DEN
790 PRINT "Rho 1= ";NUM;"/";DEN;"=" ";RH1
800 PRINT;PRINT
810

```

```

820 REM "*****"
830 REM " COEFFICIENTS DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION "
840 REM "*****"
850
860 PRINT "Calcul en cours"
870 PRINT TAB(20);"CK(J)";TAB(45);"CMK(J)"
880 FOR J=1 TO (6*M-2) STEP 3
890 IF J>28 THEN 1080 ELSE 900
900 S1=0;S2=0;S3=0;S4=0
910 FOR I=1 TO M
920 P1=COS(PI*J*(2*I-1)/6/M)
930 P2=SIN(PI*J*(2*I-1)/6/M)
940 S1=S1+XJ(I)*P1+YJ(I)*P2
950 S2=S2+XI(I)*P1+YI(I)*P2
960 P1=COS(PI*(J+1)*(2*I-1)/6/M)
970 P2=SIN(PI*(J+1)*(2*I-1)/6/M)
980 S3=S3+XI(I)*P1-YI(I)*P2
990 S4=S4+XJ(I)*P1-YJ(I)*P2
1000 NEXT I
1010 IF REPERE=1 THEN 1050
1020 CK(J)=S1-S2*RH1^(6*M-J)
1030 CMK(J+1)=S3*RH1^(J+1)-S4*RH1^(6*M)
1040 GOTO 1070
1050 CCK(J)=S1-S2*RH2^(6*M-J)
1060 COMK(J+1)=S3*RH2^(J+1)-S4*RH2^(6*M)
1070 NEXT J
1080 IF REPERE=1 THEN 1480 ELSE 1090
1090 FOR H=1 TO 28 STEP 3
1100 PRINT H;TAB(15);CK(H);TAB(35);(H+1);TAB(40);CMK(H+1)
1110 NEXT H
1120 PRINT;PRINT
1130
1140 REM "*****"
1150 REM " VERIFICATION DE LA FONCTION "
1160 REM "*****"
1170
1180 PRINT "Verification";PRINT
1190 PRINT TAB(5);"XI";TAB(20);"YI";TAB(35);"XJ";TAB(50);"YJ"
1200 FOR I=1 TO M
1210 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
1220 ZXI=0;ZYI=0;ZXJ=0;ZYJ=0
1230 FOR H=1 TO 7 STEP 3
1240 ZXI=ZXI+CK(H)*COS(H*AL)*RH1^H
1250 ZYI=ZYI+CK(H)*SIN(H*AL)*RH1^H
1260 ZXJ=ZXJ+CK(H)*COS(H*AL)
1270 ZYJ=ZYJ+CK(H)*SIN(H*AL)
1280 NEXT H
1290 ZXI=ZXI/M+CMK(5)*COS(5*AL)/RH1^5/M
1300 ZYI=ZYI/M-CMK(5)*SIN(5*AL)/RH1^5/M
1310 ZXJ=ZXJ/M+CMK(5)*COS(5*AL)/M
1320 ZYJ=ZYJ/M-CMK(5)*SIN(5*AL)/M
1330 PRINT I;TAB(5);ZXI;TAB(20);ZYI;TAB(35);ZXJ;TAB(50);ZYJ
1340 NEXT I
1350 PRINT;PRINT
1360

```

```

1170 REM "*****"
1180 REM " CALCUL DES CONTRAINTES "
1190 REM "*****"
1400 '
1410 INPUT "Pression interieur p = ";P;PRINT:PRINT
1420 PRINT "Calcul en cours"
1430 REPERE=1
1440 N1=CMK(5)/7/CK(7)/RH1^10
1450 N2=CK(1)*RH1^2/7/CK(7)-CMK(5)*CK(1)/49/CK(7)^2/RH1^10
1460 N3=RH1^14/7+5*CMK(5)^2/49/CK(7)^2/RH1^10-CK(1)^2*RH1^2/49/CK(7)^2+
+CMK(5)*CK(1)^2/343/CK(7)^3/RH1^10
1470 GOTO 1370
1480 N02=CK(1)*RH2^2/7/CK(7)-CMK(5)*CK(1)/49/CK(7)^2/RH2^10
1490 N03=RH2^14/7+5*CMK(5)^2/49/CK(7)^2/RH2^10-CK(1)^2*RH2^2/49/CK(7)^2+
+CMK(5)*CK(1)^2/343/CK(7)^3/RH2^10
1500 A19=N02/N03^2.79*(P*RH2^2*CK(1)-P*CMK(5)*N03/RH2^10/N02)
1510 A1=-(-P*CK(1)*RH1^2+P*CMK(5)*N3/N2/RH1^10+19*N3^2*A19/N2)/N1
1520 A7=-(-P*CK(7)*RH1^14-N2*A1)/(7*N3+RH1^14)
1530 A13=(-P*CMK(5)*RH1^10-7*N2*A7-19*N3*A19)/13/N2
1540 U1=P*CK(1)*RH1^2/(1-RH1^2)/2+A1
1550 V1=P*CK(7)*RH1^2/(1-RH1^2)/2+A7
1560 W1=P*CMK(5)*RH1^2/(1-RH1^2)/2
1570 U2=-P*CK(1)*RH1^2/(1-RH1^2)
1580 V2=-P*CK(7)*RH1^14/(1-RH1^2)
1590 W2=-P*CMK(5)/(1-RH1^2)/RH1^10
1600 PRINT TAB(20);"Sn";TAB(35);"St";TAB(50);"T"
1610 FOR H=1 TO M
1620 HL=PI/2-((H-1)*A)/H-1
1630 I=CK(1)+7*CK(7)*RH1^6-5*CMK(5)/RH1^6)*COS(6*AL)
1640 J=(7*CK(7)*RH1^6+5*CMK(5)/RH1^6)*SIN(6*AL)
1650 K1=I^2+J^2
1660 K2=2*RH1^2/K1^3
1670 R2=CK(1)/2+2*CK(7)*CMK(5)*RH1*COS(AL)+8*CK(1)*CK(7)*RH1^7*COS(7*AL)
1680 R2=R2-4*CK(1)*CMK(5)/RH1^5*COS(5*AL)+7*CK(7)^2*RH1^13*COS(13*AL)
1690 R2=R2-5*CMK(5)^2/RH1^11*COS(11*AL)
1700 I2=-((CK(1)^2+2*CK(7)*CMK(5))*RH1*SIN(AL)-8*CK(1)*CK(7)*RH1^7*SIN(7*AL)
1710 I2=I2-4*CK(1)*CMK(5)/RH1^5*SIN(5*AL)-7*CK(7)^2*RH1^13*SIN(13*AL)
1720 I2=I2-5*CMK(5)^2/RH1^11*SIN(11*AL)
1730 R3=(42*(V1*CK(1))-U1*CK(7))-1170*A13*CMK(5)*RH1^7*COS(7*AL)
1740 R3=R3-90/RH1^5*(U1*CMK(5)-W1*CK(1))*COS(5*AL)
1750 R3=R3+420*RH1*(CK(7)*W1-V1*CMK(5))*COS(AL)
1760 R3=R3+(150*A13*CK(1)-2280*A19*CMK(5))*RH1^13*COS(13*AL)
1770 I3=(42*(V1*CK(1))-U1*CK(7))-1170*A13*CMK(5)*RH1^7*SIN(7*AL)
1780 I3=I3+90/RH1^5*(U1*CMK(5)-W1*CK(1))*SIN(5*AL)
1790 I3=I3+420*RH1*(CK(7)*W1-V1*CMK(5))*SIN(AL)
1800 I3=I3+(150*A13*CK(1)-2280*A19*CMK(5))*RH1^13*SIN(13*AL)
1810 R4=8*CK(1)*N2*RH1^6-7*U2*CK(7)*RH1^6+5*CMK(5)*U2/RH1^6-7*V2*CK(1)/RH1^6
1820 R4=R4*COS(6*AL)
1830 R4=R4-(CK(1)*U2+49*CK(7)*V2+25*W2*CMK(5))
1840 R4=R4+35*(CK(7)*W2*RH1^12+CMK(5)*U2/RH1^12)*COS(12*AL)
1850 I4=((5*CK(1)*W2-7*U2*CK(7))*RH1^6-(5*CMK(5)*U2-7*V2*CK(1))/RH1^6)*SIN(6*AL)
1860 I4=I4+35*(CK(7)*W2*RH1^12-CMK(5)*U2/RH1^12)*SIN(12*AL)
1870 RH=K2*(R2*R3-I2*I3+K1*R4)
1880 IH=K2*(R2*I3+I2*R3+K1*I4)
1890 RI=U1+7*V1*RH1^6-5*W1/RH1^6)*COS(6*AL)+13*A13*RH1^12*COS(12*AL)
1900 RI=RI+19*A19*RH1^18*COS(18*AL)
1910 I1=(7*V1*RH1^6+5*W1/RH1^6)*SIN(6*AL)+13*A13*RH1^12*SIN(12*AL)
1920 I1=I1+19*A19*RH1^18*SIN(18*AL)
1930 R0=CK(1)+7*CK(7)*RH1^6-5*CMK(5)/RH1^6)*COS(6*AL)
1940 I0=(-7*CK(7)*RH1^6-5*CMK(5)/RH1^6)*SIN(6*AL)
1950 ST=4*(RI*RD-TI*TO)/K1+P
1960 SN=ST-RH
1970 T=IH/2
1980 PRINT TAB(5);H;TAB(20);SN;TAB(35);ST;TAB(50);T
1990 NEXT H
2000 END

```

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.I.MUSKHELISHVILI "Some Basic problems of the mathematical theory of elasticity; Fondamental equations, plane theory of elasticity, torsion and bending"

Ltd Gröningen Nordhoff

[2] D^r FRANCOIS et L.JOLY "La rupture des Métaux"

Ecole d'été de la Colle-sur-Loup
Sept 70

[3] A.DONEDDU "Mathématiques supérieures et spéciales mp1, mp2: compléments d'analyse 4 "

Ed; DUNOD Paris

[4] M.LAVRENTIEV et CHABAT "Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe"

Ed. MIR Moscou 1977

[5] V.SMIRNOV "Cours de mathématiques supérieures T.III"

Ed. MIR Moscou 1972

[6] A.G.UGODCSIKOV et A.E.SZTYEPANOV : "Résolution des problèmes de l'élasticité plane sur ordinateur analogique et digital "

Moscou 1970

(traduit en hongrois par Elter Pálné, Budapest 1978)

