

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

22/87
Tex

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE - MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE COMPARATIVE DE METHODES
DE CALCUL DES ELEMENTS
PROPRES DES STRUCTURES

Proposé Par :

M. TAZI

Etudié par :

A. BENTEBICHE

Dirigé par :

M. TAZI

PROMOTION : JANVIER 1987

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : DE GENIE-MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE COMPARATIVE DE METHODES
DE CALCUL DES ELEMENTS
PROPRES DES STRUCTURES

Proposé Par :
M.TAZI

Etudié par :
Abdelhalim.BENTEBBICHE

Dirigé par :
M.TAZI

PROMOTION : JANVIER 1987

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
مكتبة
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

— REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à monsieur TAZI qui a eu l'aimable sollicitation de vouloir me suivre le long de cette étude , en me consacrant tout son temps.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet trouvent ici ma sincère gratitude.

— 0 —

— DEDICACES —

Je dedie ce modeste travail:

- A tous ceux qui témoignent qu'il n'y a DIEU qu'ALLAH et que MOHAMMED est son prophète.
- A mon père et ma mère qui m'ont montré le chemin du savoir.
- A mes grands mères
- A mes frères et sœurs
- A mon oncle OMAR
- A toute ma grande famille
- A tous mes amis .

Abdelhalim

Ministère de l'enseignement supérieur

وزارة التعليم العالي

Ecole nationale polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département : Mécanique

البنية الوطنية للتقنيات
المكتبة - BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Promoteur : Tazi Mohamed

الموجه : تازي محمد

Elève ingénieur : Bentebiche A

الطالب المهندس : بن طيبش عبد الحليم

العنوان : دراسة مقارنة لطرق حساب العناصر الذاتية للبنىات

الملخص : يهدف عملنا هذا إلى دراسة ديناميكية الهياكل المركبة من العتبات . إعتبرنا في دراستنا هذه ثلاثة طرق مختلفة : طريقة ستودولا ، طريقة رايلي-ريتز ، وطريقة العناصر المحددة . وقد أعدنا بالنسبة لكل طريقة برنامجا معلوماتيا لحساب الترددات والأشعة الذاتية ، وذلك عن طريق الناحية الإلكترونية .

Sujet : ETUDE COMPARATIVE DE METHODES DE CALCUL DES ELEMENTS PROPRES DES STRUCTURES

Resumé : L'objet de notre travail consiste en l'étude dynamique des structures composées d'éléments poutres . Cette étude est faite par trois méthodes : Méthode de STODOLA , méthode de RAYLEIGH-RITZ , et la méthode des éléments finis . Chacune de ces méthodes est suivie par un logiciel permettant le calcul de fréquences et vecteurs propres sur ordinateur .

Subject : THE COMPARATIVE STUDY OF THE NATURAL ELEMENTS OF STRUCTURES CALCULATION METHODS .

Abstract : The object of this study consists, in calculating the dynamics of structures compound by beam éléments . This study is treated by three methods : STODOLA method, RAYLEIGH-RITZ method, and finite éléments method ; Each one of these methods is accompanied by a program allowing for the calculation of natural frequencies and Natural vectors by computer

TABLE DES MATIERES

→ Introduction

ch: I — GENERALITES

- I.1 - Intéret et but du calcul des élément propre des structure.. 3
- I.2 - Principe fondamental 4
- I.3 - Recherche bibliographique sur les différentes méthodes 6
- I.4 - Méthodes choisisés et leurs intérêts . 8
- I.5 - Exemple d'application 8

ch: II — METHODE DE STODOLA

- II.1 - Introduction 9
- II.2 - Principe
- II.3 - Organigramme 15
- II.4 - Application et Résultats . 19

Ch. III — METHODE DE RAYLEIGH-RITZ

- III.1 - Introduction 21
- III.2 - Principe de la méthode 21
- III.3 - Organigramme 25
- III.4 - Application et Résultats 29

ch. IV — METHODE DES ELEMENTS FINIS

- IV.1 - Introduction 31

| | |
|---|-----|
| IV. 2 - Principes généraux | 32 |
| 2.1 - Principe | 32 |
| 2.2 - types d'éléments. | 33 |
| 2.3 - Calcul dynamique par éléments finis | 34 |
| IV.3 - Ecriture des matrices élémentaires | 34 |
| 3.1 - matrice rigidité | 34 |
| 3.2 - matrice masse | 42 |
| 3.3 - Matrices élémentaires dans le repère global | 47 |
| IV.4 - Assemblage | |
| 4.1 - Assemblage de la matrice rigidité | 48 |
| 4.2 - Influence des conditions aux limites | 50 |
| 4.3 - Assemblage de la matrice masse | 50 |
| IV.5 - Programmation | 52 |
| IV.6 - Application et résultats | 59 |
| ch V - Application de la M.E.F | 61 |
| CONCLUSION | 67 |
| ANNEXE | |
| - Méthode de Jacobi | A1 |
| - Programme de STODOLA | A4 |
| - Programme de RAYLEIGH-RITZ | A8 |
| - Programme de la M.E.F. | A14 |

INTRODUCTION

Depuis qu'on s'est rendu compte des phénomènes physiques produits par des charges qui agissent sur un système mécanique et qui varient pendant le temps, on s'est dérangé vers l'étude de la "dynamique des structures", qui a pour rôle la détermination du comportement des structures lors du fonctionnement, en déterminant les paramètres tels que les fréquences propres, amplitudes, et formes des vibrations.

Malgré de nombreuses méthodes analytiques, permettant le calcul dynamique des structures, le recours à l'ordinateurs est bien souvent inévitable.

Il permet en effet d'effectuer le calcul des structures très complexes formées de plusieurs milliers de degrés de libertés. Des méthodes très récentes, et qui sont encore dans le stade de développement donnent des résultats très concluants.

Parmi ces différentes méthodes, la méthode des éléments finis s'impose comme la méthode la plus efficace et la plus générale dans l'étude des structures.

Elle permet de calculer les modes propres des vibrations des différentes structures en considérant tous les degrés de libertés qui les forment.

D'autres méthodes qui sont actuellement utilisées pour le

calcul des structures de nombre de degrés de liberté moins élevés (une douzaine) et qui sont des méthodes analytiques et pouvant être programmer sur ordinateurs on site :

- la méthode de STODOLA
- la méthode de RAYLEIGH-RITZ .

L'object de cette étude consiste de faire une étude comparative sur les différentes méthodes (trois) déjà citées avec la considération que pour la méthode des éléments finis les structures dont on développe les calculs sont formées en éléments poutres .

Chacune de ces trois méthodes sera suivie d'un programme de calcul des fréquences et vecteurs propres sur ordinateurs.

Ch. I - GENERALITES

I.1 - Intérêts et buts du calcul des éléments Propres des structures .

Les structures généralement, caractérisées par une masse et une élasticité peuvent effectuer des mouvements relatifs, sous l'action des sollicitations dynamiques .

On comprend par "actions dynamiques", les sollicitations produites par des charges qui varient rapidement pendant le temps . Les vibrations produites peuvent avoir des causes assez variées, dont certaines sont liées au processus de fonctionnement du système .

Ces vibrations peuvent être très dangereuses aux modes de fonctionnement, en particulier lorsqu'il y a coïncidence entre une fréquence propre du système, et la fréquence d'excitation, ce qui donne lieu à la résonance .

Le problème fondamental de la dynamique des structures est d'éviter le domaine de résonance par une étude préalable des vibrations libres, dont le but est de déterminer les fréquences propres .

Connaissant les différentes fréquences propres, on peut déterminer les modes propres de la structure et éviter ainsi les problèmes qui apparaissent lors du fonctionnement

au préalable, ce qui explique l'intérêt du calcul de ces éléments propres.

I.2 - Principe fondamental (vibrations libres):

Les équations qui régissent les vibrations d'un système à plusieurs degrés de liberté, non amorti en vibrations libres sont données par :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

en supposant que le mouvement oscillatoire est harmonique, on peut écrire la formule

$$\{q\} = \{q_0\} \cos \omega t$$

où, $[M]$ représente la matrice masse

$[K]$ " " de rigidité

$\{\ddot{q}\}$ vecteur accélération

$\{q\}$ les déplacements généralisés

ω la pulsation

l'équation (1) pourra s'écrire :

$$[[K] - \omega^2 [M]] \{q_0\} = 0$$

la résolution de cette équation constitue un problème de valeur propre.

la recherche des solutions non triviales revient à la recherche des solutions du polynôme $P(\lambda)$ défini tel que

$$P(\lambda) = \det [[K] - \lambda [M]] = 0$$

λ est la valeur propre définie telle que :

$$\lambda = \omega^2$$

Il existe, en général, n valeurs propres distinctes positives solution de cette équation, $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$$\text{avec } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$$

si, on remplace les différentes valeurs de λ_i dans l'équation (2), on obtient les vecteurs propres correspondant à chaque mode. On définit la matrice associée aux vecteurs propres la matrice modale (matrice des modes) telle que :

$$[q] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} q_1 & q_2 & \dots & \begin{array}{c} q_{1j} \\ q_{2j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{array} & \dots \end{array} \right]$$

↑
Vecteur colonne q_j

$\{q_j\}$ vecteur propre du $j^{\text{ème}}$ mode

I.3 - Recherche bibliographique sur les différentes méthodes

Au début du siècle dernier, Alors que les théories de la Résistance des matériaux (RDM) connaissait de jour en jour un développement remarquable, les calculs des structures restait longtemps liée aux méthodes statiques. mais cette théorie a connue un autre élan lors de l'apparition des théorèmes énergétiques de l'élasticité, qui permettent l'étude des systèmes hyperstatiques basés sur l'application des conditions d'équilibres et de compatibilités.

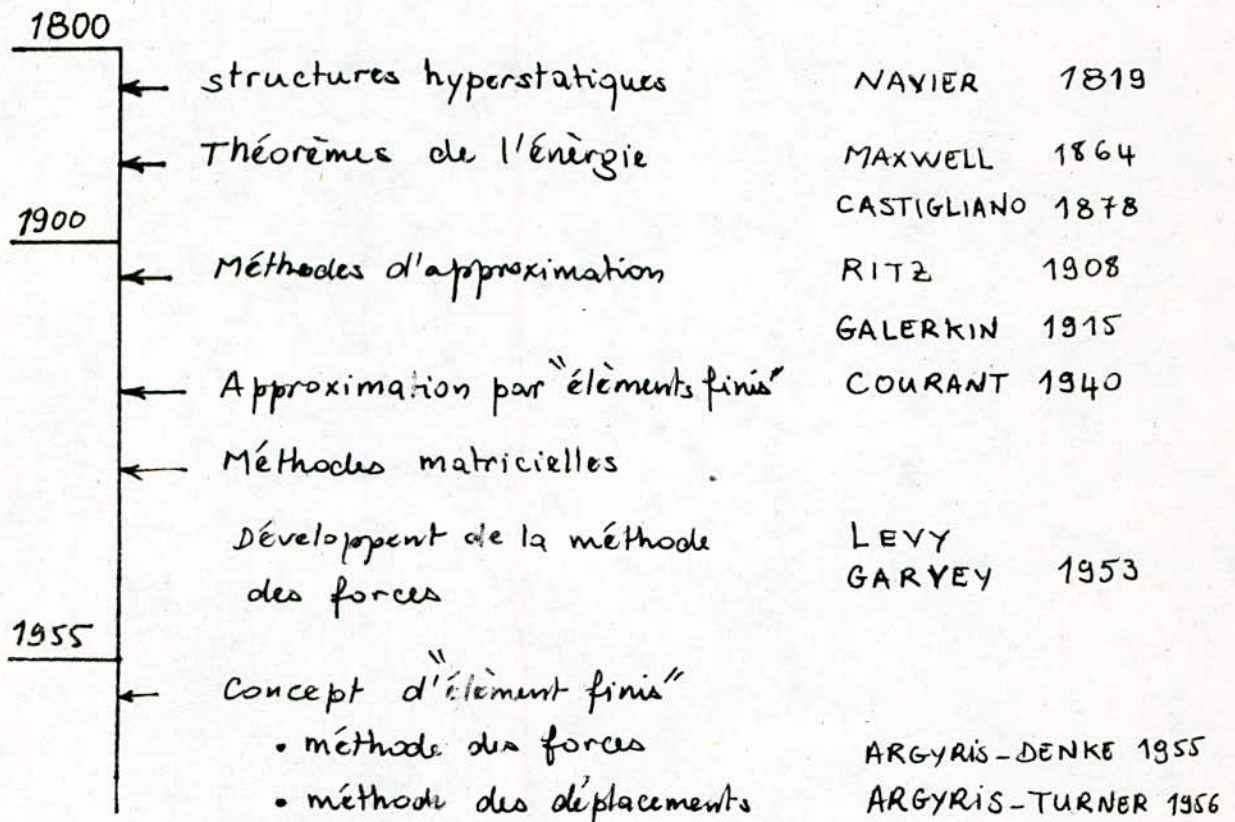
D'autres chercheurs (MAXWELL et CASTIGLIANO) ont établi d'une façon générale et complète les théorèmes de l'énergie.

Il faut préciser aussi que ces méthodes étaient insuffisantes pour le calcul des structures complexes vu l'inexistence de moyen de calcul performant.

D'autres méthodes ont été mise en évidence pour l'analyse des structures en poutre avec les moyen disponible de l'époque (CROSS). Cependant ces méthodes sont insuffisantes jusqu' alors pour la résolution des problèmes des milieux continus.

La discrétisation des problèmes des milieux continus et leurs résolution par Approximation adéquate est le fruit de nombreuse recherche de notre siècle (RITZ et GALERKIN).

Ensuite, COURANT a montré que la résolution des problèmes des milieux continus est possible, en utilisant une discrétisation spatiale du milieu en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles (méthode des éléments finis).
 A partir de la seconde guerre mondiale la méthode des éléments finis a connue un développement intense sur l'impulsion de l'industrie dans divers domaines.



Historique des méthodes modernes d'analyse des structures.
 synoptique des principaux développements jusqu'en 1956.

I.4 - Méthodes choisies et leurs intérêts.

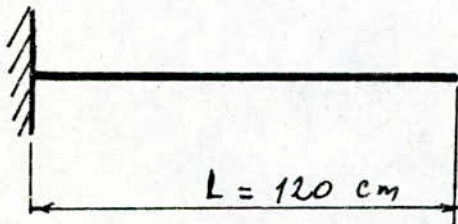
Nous développons dans les chapitres suivants les méthodes de STODOLA et RAYLEIGH-RITZ et particulièrement la méthode des éléments finis.

les deux premières méthodes permettent de calculer les modes de vibrations analytiquement et pour des structures très simples.

la méthode des éléments finis est choisie suivant l'importance et le type de la structure analysée, de la précision désirée et du nombre de modes propres à déterminer.

I.5 - Exemple d'application

Soit une console représentée par la figure



on prendra :

$$E \text{ (module de young)} = 2,1 \text{E}9 \text{ gr/cm}^2$$

$$\rho \text{ (masse volumique)} = 9,008 \text{ gr-se}^3/\text{cm}^3$$

$$I \text{ (Inertie)} = 104 \text{ cm}^4$$

la console a une section transversale $A = 12 \text{ cm}^2$

Rq : On appliquera cette exemple pour chacune de ces différentes méthodes.

Ch. II. / METHODE DE STODOLA

II.1. Introduction

La méthode de STODOLA est une méthode simple pour le calcul des formes et pulsations propres des systèmes ayant plusieurs degrés de libertés dynamiques (une douzaine de degrés de liberté).

La détermination des formes propres sont à la base d'un processus itératif, qui permet d'effectuer à chaque itération une amélioration des solutions correspondentes (vecteurs propres) à un mode de vibration qui approche les modes exactes de fonctionnement

II.2. Principe

Le principe de la méthode de STODOLA consiste à faire une hypothèse initiale sur l'allure du mode à approcher, donc se donner initialement une déformée quelconque, soit le vecteur X_0 définit telque : $X_0 = \sum_{i=1}^n a_i q_i$

l'équation régissant le système en vibration libre est

$$[[K] - \lambda [M]] \{X\} = 0 \quad \text{--- (1)}$$

où, $[M]$ est la matrice masse

$[K]$ est la matrice rigidité

$\{X\}$ est le vecteur de déplacement généralisés

λ est la valeur propre

L'équation (1) devient

$$K X_i = \lambda_i M X_i \quad \text{--- (2)}$$

la détermination des solutions de l'équation (2), revient à trouver les différentes valeurs propres λ_i supposées distinctes en fixant les X_i .

la méthode de STODOLA consiste à faire des itérations sur les vecteurs X_i en fixant initialement X_0 .

a - Recherche de la première valeur propre λ_1 (1^{er} mode).

La relation (2) donne

$$X_i = \lambda_i K^{-1} \cdot M \cdot X_i \quad \text{--- (3)}$$

Posons $D = K^{-1} \cdot M$

D est la matrice dynamique

L'équation (3) devient

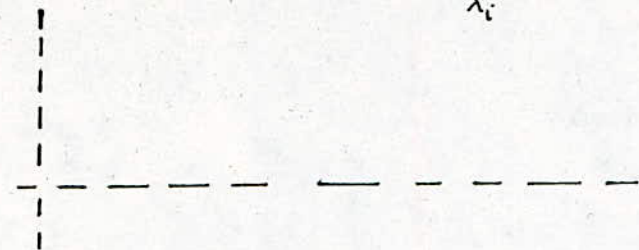
$$\frac{X_i}{\lambda_i} = D X_i \quad \text{--- (4)}$$

Cette dernière équation ne sera satisfaite que par les vecteurs qui présentent un mode de vibration vrai (approchant le mode exacte). il existe n modes et le but de cette méthode est d'en déterminer un certain nombre.

prenant l'équation (4), et faisant des transformations sur les vecteurs jusqu'à l'ordre r tels que :

$$DX_0 = \frac{X_0}{\lambda_1} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{q_i}{\lambda_1} = X_1$$

$$D^2 X_0 = DX_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{q_i}{\lambda_1^2} = X_2$$



$$D^r X_0 = DX_{r-1} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{q_i}{\lambda_1^r} = X_r$$

Donc, en tirant X_r , on obtient :

$$X_r = \frac{1}{\lambda_1^r} \left\{ a_1 q_1 + a_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^r q_2 + \dots + a_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^r q_n \right\}$$

or, $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1} \right)^r = 0$ pour $(p = 1, 2, \dots, n)$

Donc :

$$\left. \begin{array}{l} X_r \text{ converge vers } a_1 \frac{q_1}{\lambda_1^r} \\ X_{r+1} \text{ converge vers } a_1 \frac{q_1}{\lambda_1^{r+1}} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{X_r}{X_{r+1}} \equiv \lambda_1$$

si la déformée supposée, était un mode vrai, la même fréquence serait obtenue en faisant le rapport $\frac{X_r}{X_{r+1}}$ pour n'importe quelle coordonnée de la structure.

En règle générale, la déformée X_1 différera de X_0 , et un résultat différent sera obtenu pour chacune des coordonnées. La vraie fréquence du 1^{er} mode sera alors, située entre les valeurs maximums et minimums obtenues, à partir de :

$$\left(\frac{x_r}{x_{r+1}} \right)_{\min} < \omega_1^2 < \left(\frac{x_r}{x_{r+1}} \right)_{\max}$$

il en résulte de cette propriété une meilleure approximation de la fréquence en utilisant les valeurs moyennes avec l'utilisation de la répartition massique comme facteur de pondération

On a :

$$\omega_1^2 = \frac{x_1^t m x_0}{x_1^t m x_1}$$

b - recherche de la valeur propre maximale λ_n .

la relation (2) peut donner aussi, en posant $K = M^{-1}K$

$$M^{-1}K x_i = \lambda_i x_i$$

$$K x_i = \lambda_i x_i$$

Par suite :

$$K x_0 = \sum_{i=1}^n a_i K q_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i q_i = x_1$$

$$K^2 x_0 = K x_1 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^2 q_i = x_2$$

$$K^r x_0 = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^r q_i = x_r$$

Donc :

$$x_r = \lambda_n^r \left\{ a_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^r q_1 + \dots + a_n q_n \right\}$$

$$\text{or, } \left. \begin{array}{l} x_r \text{ converge vers } a_n \lambda_n^r q_n \\ x_{r+1} \text{ " " } a_n \lambda_n^{r+1} q_n \end{array} \right\} \frac{x_r}{x_{r+1}} \neq \frac{1}{\lambda_n}$$

Ainsi une approximation de l'inverse de la valeur propre maximale est fournie par le rapport des composantes de même rang de deux itérations successives.

c - Recherche des valeurs propres intermédiaires.

Supposons λ_1 et q_1 sont connus, et donnons-nous X_0 de la forme $X_0 = \sum_{i=1}^n b_i q_i$.

Construisons une déformée Y_0 telle que :

$$Y_0 = X_0 - a_1 q_1 \quad \text{où } a_1 \text{ est à déterminer}$$

En multipliant à gauche par $q_1^t M$, il vient :

$$q_1^t M Y_0 = q_1^t M X_0 - a_1 q_1^t M q_1$$

On impose $q_1^t M Y_0 = 0$, alors on a :

$$a_1 = \frac{q_1^t M X_0}{q_1^t M q_1}$$

$$Y_0 = \sum_{i=1}^n b_i q_i - a_1 q_1 = (b_1 - a_1) q_1 + \sum_{i=2}^n b_i q_i$$

$$q_1^t M Y_0 = (b_1 - a_1) q_1^t M q_1 + q_1^t M \left\{ \sum_{i=2}^n b_i q_i \right\} = 0$$

$$\text{D'où } b_1 = a_1$$

$$\text{par suite } Y_0 = \sum_{i=2}^n b_i q_i$$

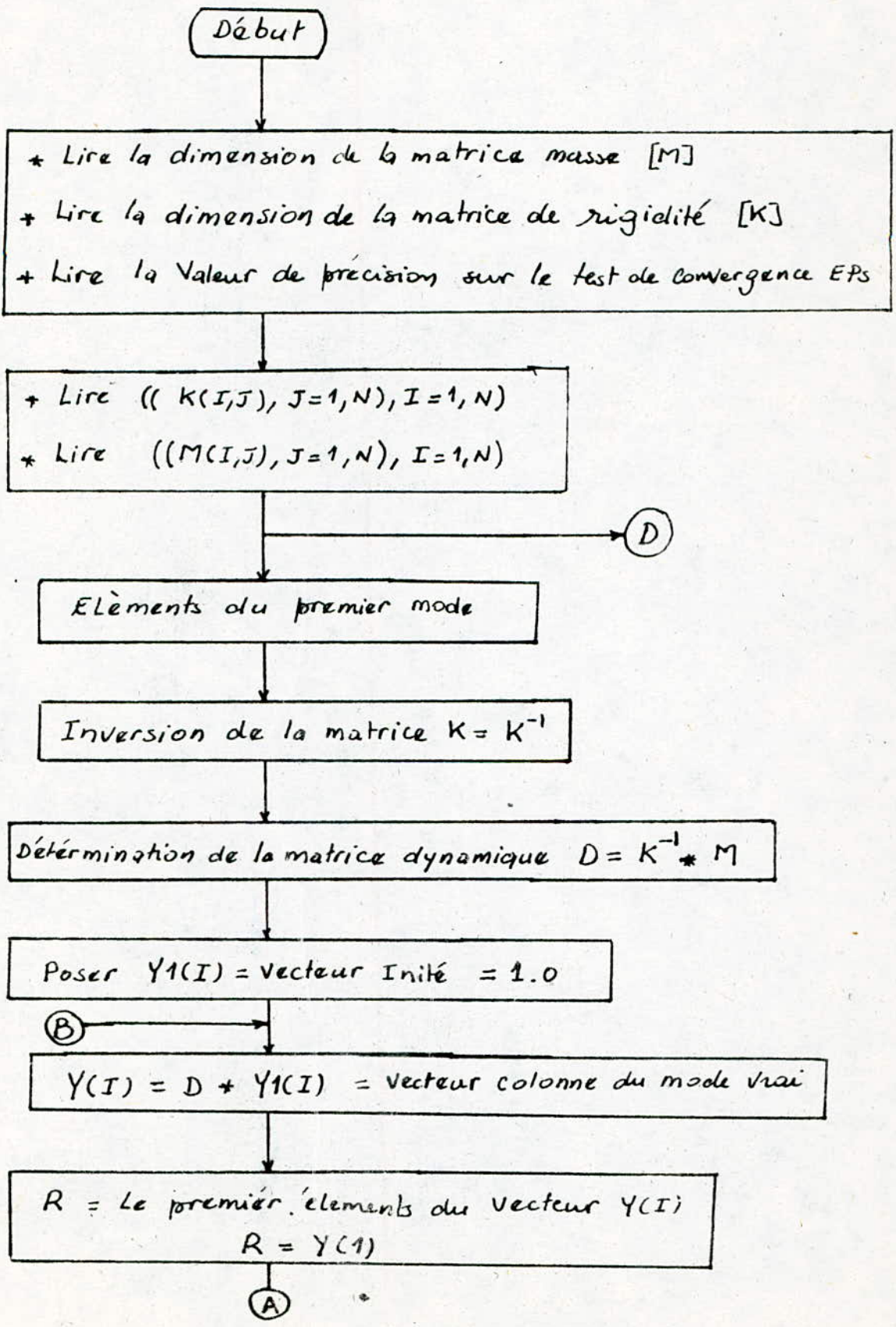
Finalement, si on construit des itérés à partir de Y_0 , on converge vers q_2 . Alors, on peut calculer λ .

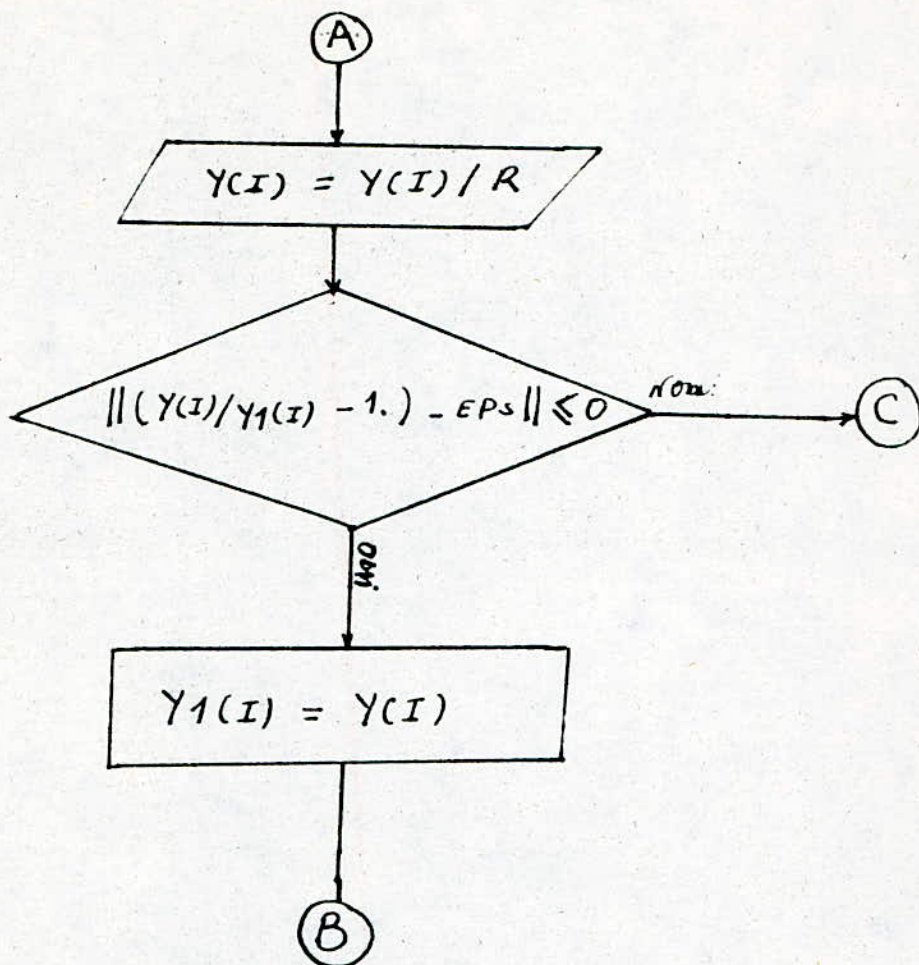
En Principe, la méthode peut être utilisée de façon analogue pour calculer λ_3, q_3, \dots ; mais il faut noter que ce procédé reste très sensible aux erreurs d'arrondis dues à chaque stade d'itération.

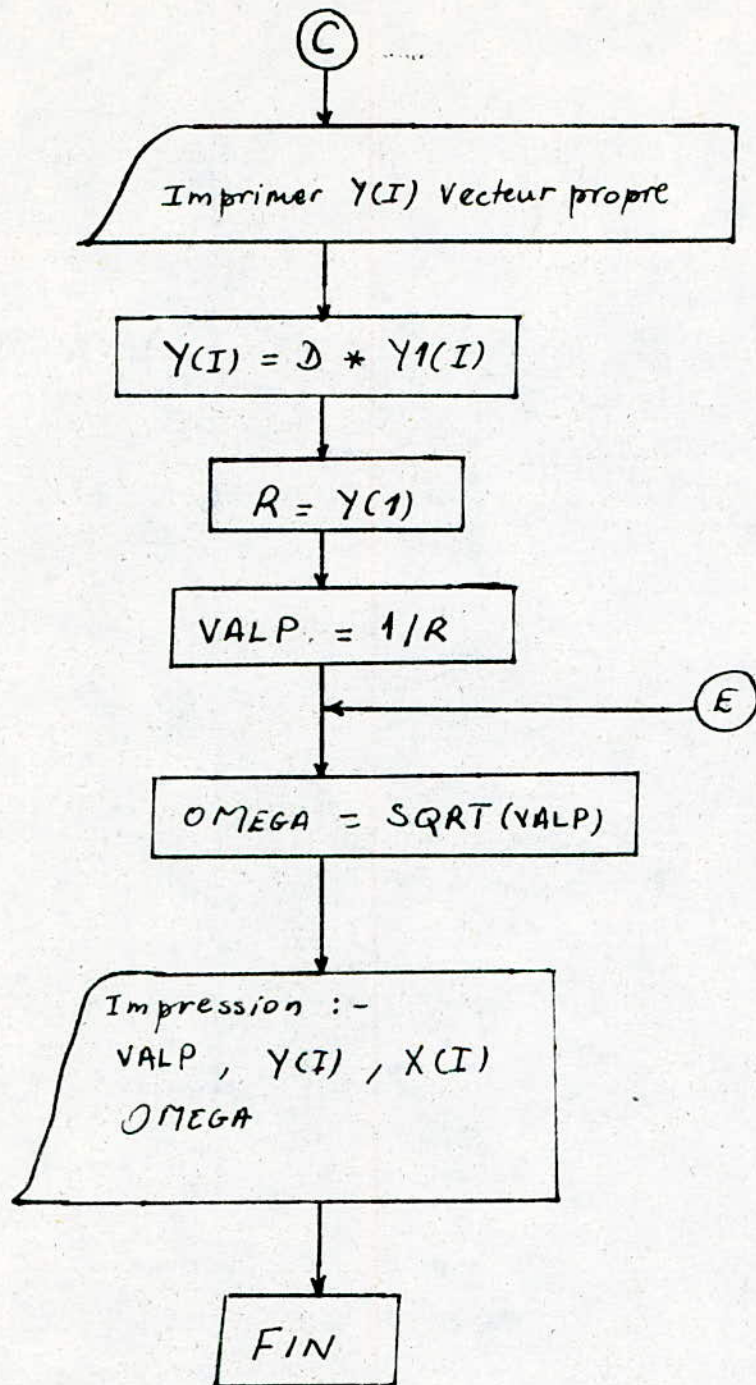
Remarque :

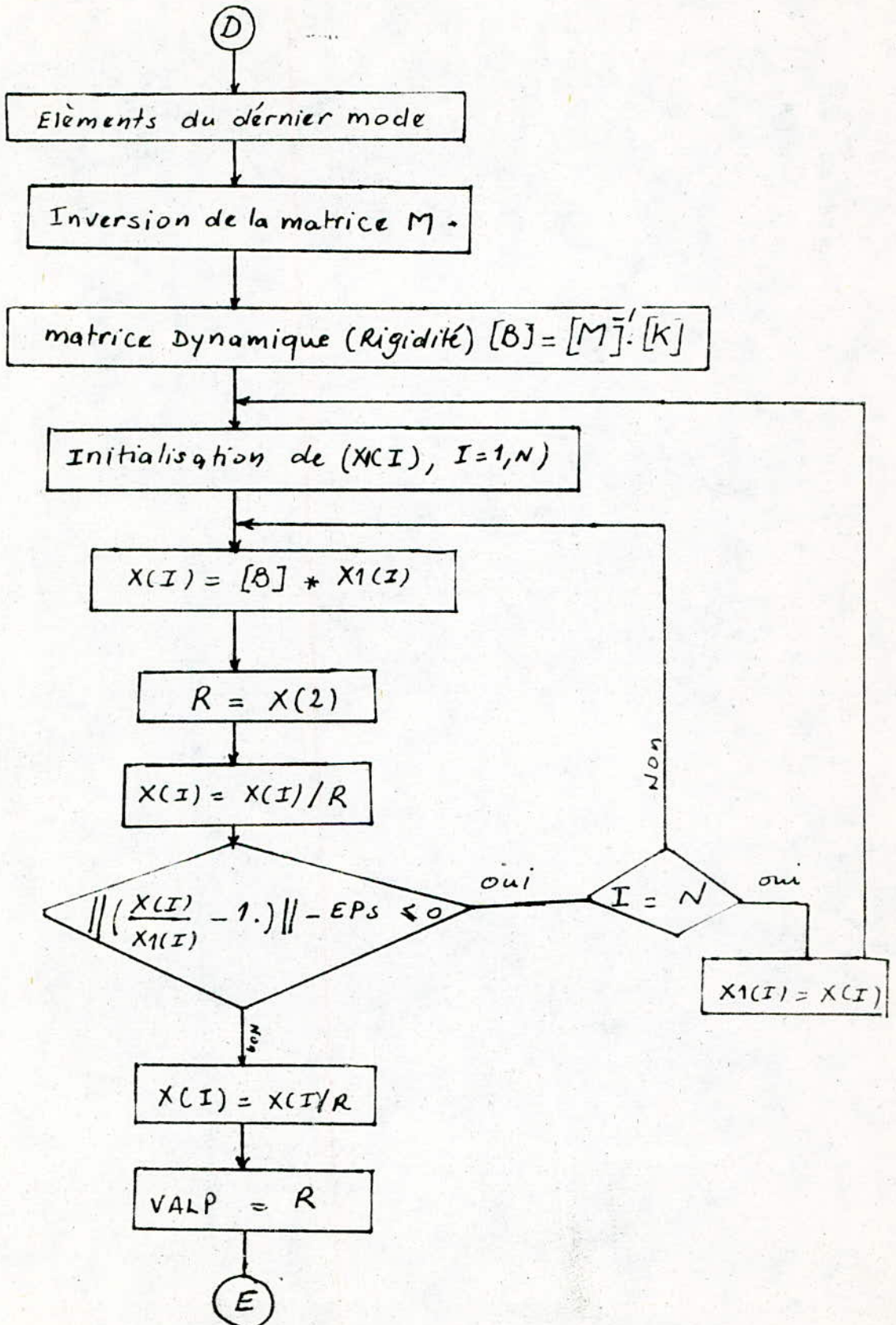
La méthode de STODOLA n'est utilisée généralement, que pour le calcul du premier mode, et on sait aussi qu'il suffit de déterminer la première valeur propre λ_1 , qui correspond à la période la plus élevée ($T = \frac{2\pi}{\omega}$), pour voir le mode qui lui correspond, on se limitera dans nos calculs à n'approcher que les premiers modes de la structure étudiée.

II-3 - ORGANIGRAMME DE Programme De STODOLA









II.4 - Application et Résultats.

Nous avons Appliquer pour la méthode de STODOLA, l'exemple du paragraphe I.5, dont On a :

La matrice de rigidité (*) en $[\text{gr/cm}]$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1E8 & 0 & 0 \\ 0 & 15.16E5 & 9.1E7 \\ 0 & 9.1E7 & 7.3E9 \end{bmatrix}$$

La matrice masse (*) en $[\text{gr-sec}^2/\text{cm}]$

$$[M] = 92 \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & & \\ 0 & \frac{156.L}{420} & \text{sym} \\ 0 & \frac{22.L^2}{420} & \frac{4.L^3}{420} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,84 & 0 & 0 \\ 0 & 4,28 & 72,4 \\ 0 & 72,4 & 1,58E3 \end{bmatrix}$$

(*) (Voir Ecriture des matrices masse et rigidité § IV)

CARACTERISTIQUE DU PREMIER MODE

=====

LA MATRICE DE SOUPLESSE F(I,J)

| | | |
|------------|----------|----------|
| 4.7619E-05 | 0.0 | 0.0 |
| 3.7795 | 15.16E+5 | 0.0 |
| 0.0 | 9.1E+07 | 1.37E-10 |

LA MATRICE DYNAMIQUE D(I,J)

| | | |
|------------|------------|-----------|
| 1.8236E-03 | 0.0 | 0.0 |
| 14.513 | 64.865E+05 | 1.097E+08 |
| 0.0 | 3.59E+03 | 6.588E+09 |

LE VECTEUR PROPRE DU 1ER MODE

| | |
|--------|------------|
| Y(1)= | 1.0 |
| Y(2)= | 6.35725E15 |
| Y(3)= | 6.9770E09 |

LA VALEUR PROPRE LAMBDA1= 5.46875E+07

LA PULSATION PROPRE OMEGA1= 7395.100

CARACTERISTIQUE DU DERNIER MODE

=====

LA MATRICE MASSE INVERSEE SM(I,J)

| | | |
|-------------|-------|-----------|
| 0.260 | 0.00 | 0.00 |
| -4.0125E-35 | 4.26 | 0.0 |
| 0.0 | 72.40 | 6.329E-04 |

MATRICE DYNAMIQUE (RIGIDITE) B

| | | |
|------------|-----------|-----------|
| 5.468E+07 | 0.0 | 0.0 |
| -6.428E-27 | 6486461. | 3.294E+08 |
| 0.0 | 1.098E+08 | 6.592E+09 |

LE VECTEUR PROPRE DU DERNIER MODE

| | |
|--------|----------|
| X(1)= | 1.30E-12 |
| X(2)= | 5.90E-02 |
| X(3)= | 1.0 |

LA VALEUR PROPRE LAMBDA2= 6.4831E+09

LA PULSATION PROPRE OMEGA2= 80515.27

Ch. III / METHODE DE RAYLEIGH-RITZ

III. 1. Introduction :

La méthode de RAYLEIGH-RITZ peut être considérée comme une généralisation de la méthode de RAYLEIGH qui fournit une approximation satisfaisante pour le premier mode de vibration, or, il est souvent nécessaire d'inclure plus d'un mode si on veut obtenir des résultats précis. L'extension de la méthode de RAYLEIGH par RITZ permet d'avoir un nombre de modes de vibrations plus élevé.

III. 2 - Principe de la méthode :

L'idée fondamentale de cette méthode est d'approcher les modes propres d'une structure à l'aide d'une base incomplète de vecteurs linéairement indépendants, en superposant un certain nombre de fonctions au lieu d'une seule (méthode de RAYLEIGH).

Donc, on transforme un problème de valeurs propres de grande dimension en un problème de dimension plus réduite, nous pouvons alors calculer toutes les valeurs et vecteurs propres du système réduit.

soit la combinaison linéaire de p vecteurs indépendants φ_i .

tel que p soit inférieur à n (n nombre de degré de liberté du système global).

la combinaison linéaire est définie telle que :

$$\{X\} = a_1 \{q_1\} + a_2 \{q_2\} + \dots + a_p \{q_p\}$$

où, $\{X\}$ est dit vecteur de RITZ de dimension n

$\{q_i\}$ vecteur des déplacements généralisés de dimension n

a_i Coefficients d'ajustement de façon que la superposition des vecteurs q_i donne la meilleure approximation des modes propres.

sous la forme matricielle :

$$\{X\} = \left[\begin{array}{cccc} \{q_1\} & \{q_2\} & \dots & \{q_p\} \end{array} \right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix}$$

posons $[Q] = [\{q_1\} \{q_2\} \dots \{q_p\}]$

Alors, $\{X\} = [Q] \{a\}$

cherchons les coefficients $\{a\}$ tels que le vecteur $\{X\}$ soit aussi proche que possible d'un vecteur propre de la relation :

$$\det [[K] - \lambda [M]] = 0$$

Pour cela cherchons à rendre stationnaire le quotient de RAYLEIGH (c'est à dire le rendre extremum) défini par :

$$R = \frac{[X]^t [K] [X]}{[X]^t [M] [X]} \quad \text{--- (1)}$$

Posons $[\bar{K}] = [Q]^t [K] [Q]$

$$[\bar{M}] = [Q]^t [M] [Q]$$

la relation (1) devient

$$R = \frac{[a]^t [\bar{K}] [a]}{[a]^t [\bar{M}] [a]}$$

la condition de stationnarité $\partial R = 0$ pour tout $\partial [a]^t$ s'écrit :

$$[[\bar{K}] - R[\bar{M}]] \{a\} = 0$$

cette expression définit un problème de valeurs propres de dimension P , dont les p vecteurs propres $\{A_i\}$ et valeurs propres $\bar{\lambda}_i$ vérifient :

$$[\bar{K}][A] = [\bar{M}][A][\bar{\lambda}]$$

où :

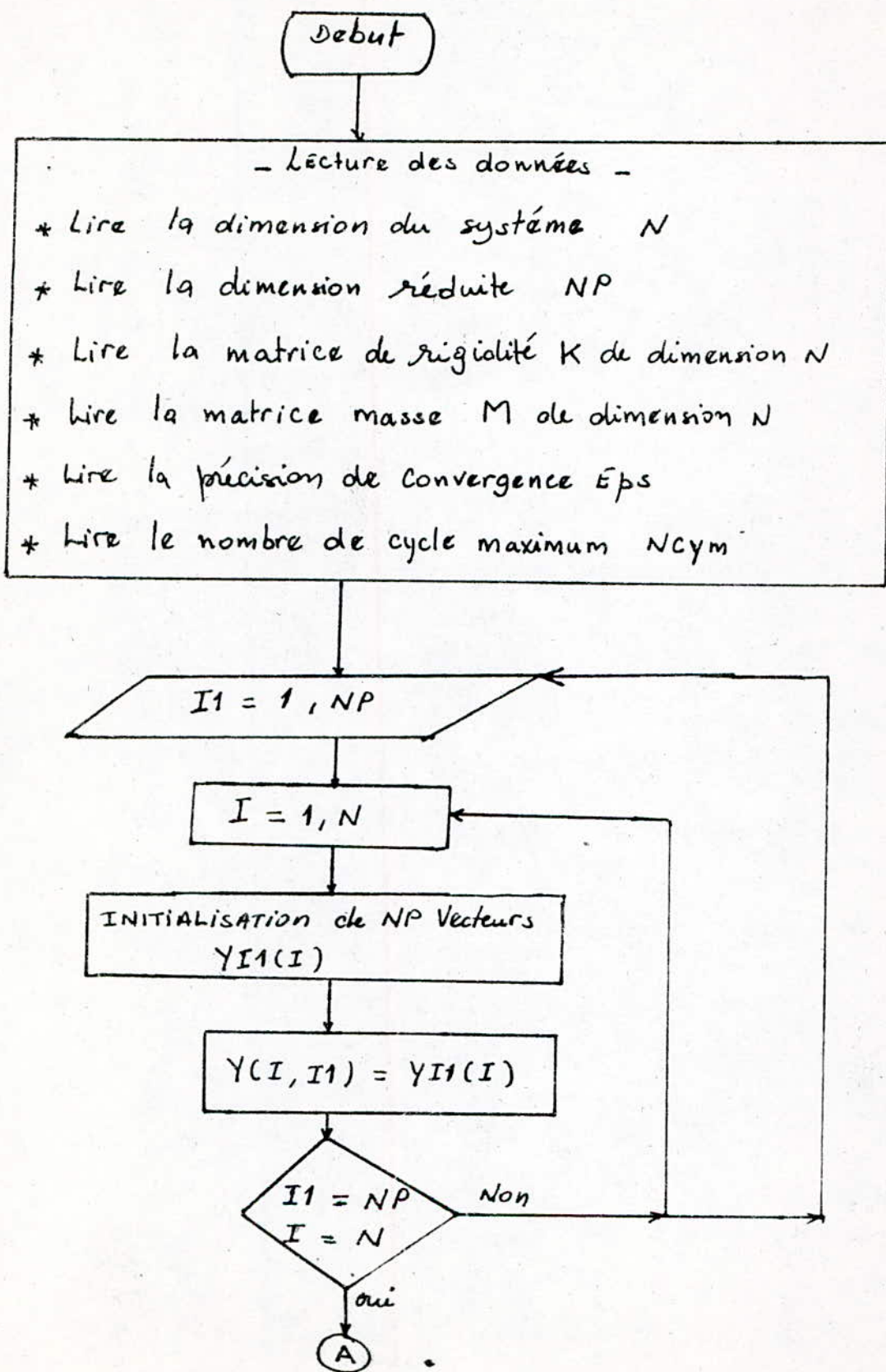
$$[A] = [\{A_1\} \{A_2\} \dots \{A_p\}], \quad [\bar{\lambda}] = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \bar{\lambda}_p \end{bmatrix}$$

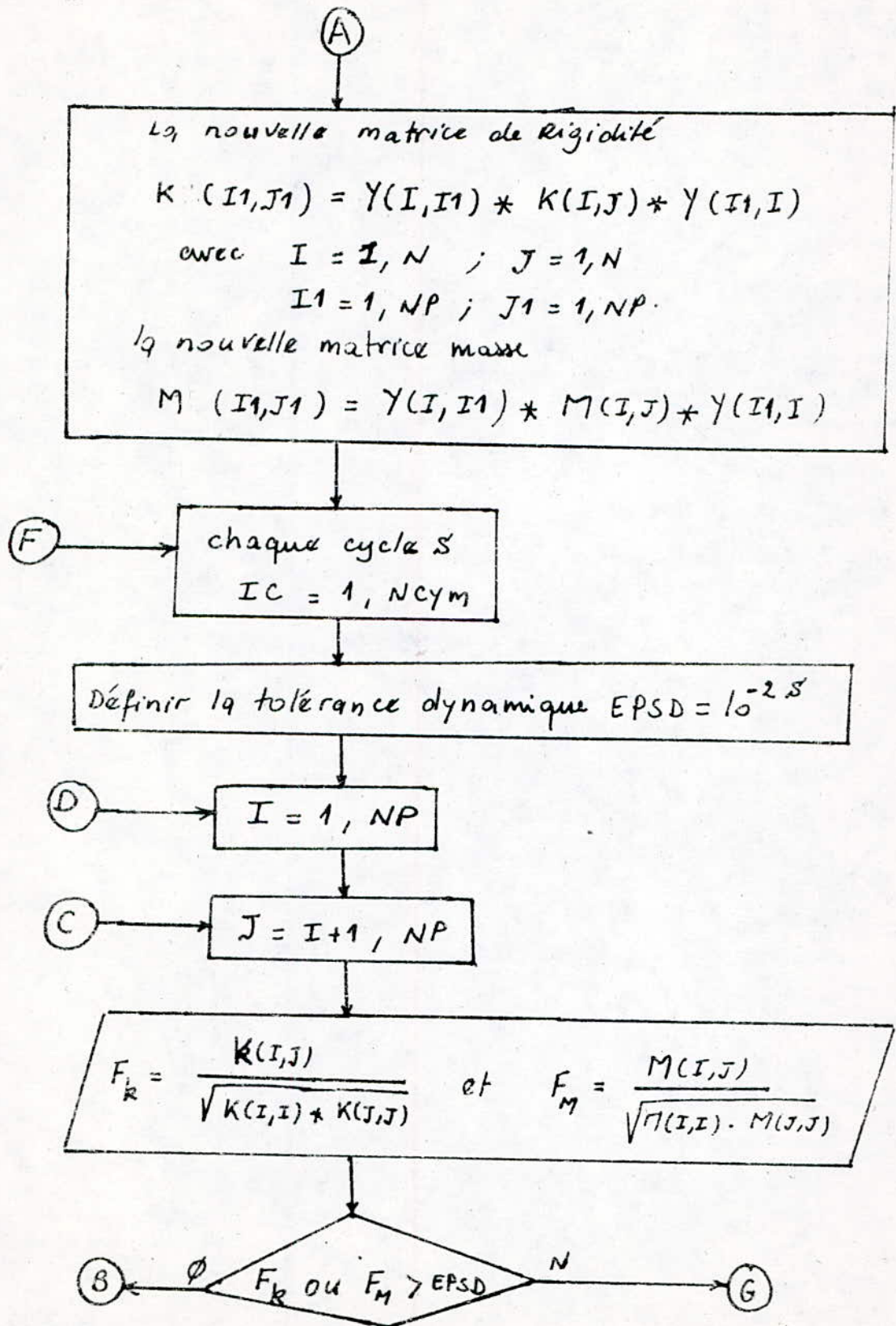
Les valeurs propres $\bar{\lambda}_i$ constituent des approximations des valeurs propres du système original.

Ces approximations sont d'autant meilleures que les vecteurs q_i génèrent un sous-espace qui contient les vecteurs propres cherchés. De plus, les valeurs propres approchées $\bar{\lambda}_i$ et exactes λ_i vérifient la relation :

$$\lambda_1 \leq \bar{\lambda}_1 ; \lambda_2 \leq \bar{\lambda}_2 ; \dots ; \lambda_p \leq \bar{\lambda}_p \leq \lambda_n .$$

III.3 - Organigramme du Programme de RAYLEIGH-RITZ





(B)

$$c_1 = K(I, I) \cdot M(I, J) - M(I, I) \cdot K(I, J)$$

$$c_2 = K(J, J) \cdot M(I, J) - M(J, J) \cdot K(I, J)$$

$$c_3 = K(I, I) \cdot M(J, J) - M(I, I) \cdot K(J, J)$$

$$d = \frac{c_3}{2} + \text{signe}(c_3) \cdot \sqrt{\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + c_1 \cdot c_2}$$

$$a = c_2 / d$$

$$b = -c_1 / d$$

transformation de [K] et [M]

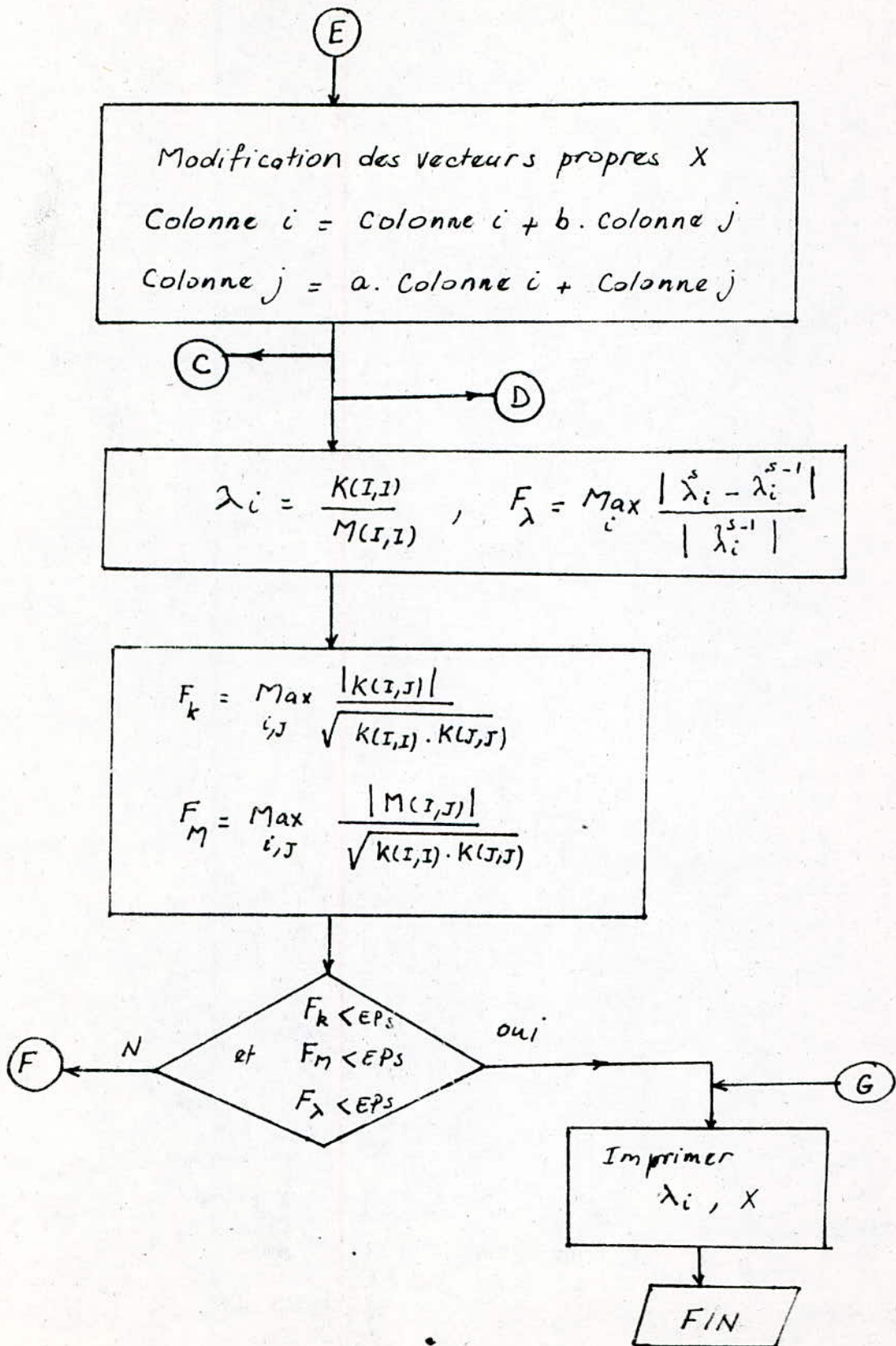
Colonne i = Colonne i + b . Colonne j

Colonne j = a . Colonne i + colonne j

Ligne i = ligne i + b . ligne j

ligne j = a . ligne i + ligne j

(E)



III.4 - Application et Résultats :

On applique à la méthode de RAYLEIGH-RITZ l'exemple de I-5

On trouve :

la matrice de rigidité

$$[K] = \begin{bmatrix} 2.1E8 & 0 & 0 \\ 0 & 15.16E5 & 9.1E7 \\ 0 & 9.1E7 & 7.3E9 \end{bmatrix} \quad (\text{gr/cm})$$

la matrice masse

$$[M] = \begin{bmatrix} 3.84 & 0 & 0 \\ 0 & 4.28 & 72.4 \\ 0 & 72.4 & 1.58E3 \end{bmatrix} \quad (\text{gr-sec}^2/\text{cm})$$

LES DONNEES :-

DONNER LA DIMENSION N = 3

DONNER LA DIMENSION REDUITE NP= 2

LA MATRICE RIGIDITE RK(I,J)

| | | |
|--------|----------|---------|
| 21.E+7 | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | 15.15E+5 | 91.8E+5 |
| 0.0 | 91.8E+5 | 72.8E+5 |

LA MATRICE MASSE

| | | |
|------|------|---------|
| 3.84 | 0.0 | 0.0 |
| 0.0 | 4.23 | 72.4 |
| 0.0 | 72.4 | 1579.88 |

LA MATRICE Y(I,I1)

| | | |
|-------|------|-------|
| 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| -1.00 | 1.00 | -1.00 |

LA NOUVELLE MATRICE DE RIGIDITE DE DIM NP

| | |
|----------|-----------|
| 76.73E+3 | -72.53E+3 |
| -72.5E+3 | 76.73E+3 |

LA NOUVELLE MATRICE MASSE DE DIM NP

| | |
|----------|----------|
| 1732.3 | -1725.12 |
| -1725.12 | 1732.3 |

VK(1)= 7673516667.
VM(1)= 1732.3

VK(2)= -7253516667.
VM(2)= -1725.12

VK(3)= 7673516667.
VM(3)= 1732.3

VALEURS PROPRES, CYCLE 1
0.54667E+08 0.43168E+07

VALEURS PROPRES, CYCLE 2
0.54667E+08 0.43168E+07

CONVERGENCE EN 20CYCLES ET 1TRANSFORMATIONSDANS JACOBI

VALEUR PROPRE (1)= 54.66E+6

VECTEUR PROPRE (1, 1)= 0.255
VECTEUR PROPRE (1, 2)= -1.202E-02

VALEUR PROPRE (2)= 43.16E+5

VECTEUR PROPRE (2, 1)= 0.255
VECTEUR PROPRE (2, 2)= 1.202E-02

Ch. IV / METHODE DES ELEMENTS FINIS

FINIS

IV-1. Introduction.

Ces dernières années, la méthode des éléments finis s'est imposée progressivement à tous les ingénieurs et spécialistes des différents domaines, comme une technique de grande valeur.

Elle permet d'obtenir des solutions satisfaisantes pour un grand nombre de problèmes jusqu'à être considérée comme la plus adaptée pour des structures complexes (plusieurs milliers de degrés de liberté).

Les efforts intenses qui lui sont consacrés permettent d'envisager un élargissement rapide de son champ d'application.

La méthode des éléments finis présente un éventail d'application très large, dans diverses disciplines, en raison de son caractère assez général d'analyse des milieux. Cette méthode peut être utilisée aussi bien en structure (calcul statique et dynamique), qu'en Hydraulique (mécanique des fluides), ou en Aéronautique, ou pour des problèmes de conductivité thermique.

IV. 2. Principes généraux de la méthode des éléments finis et Cas du Calcul dynamique

2.1. Principe :

La méthode des éléments finis permet de résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus en discrétisant le milieu à étudier, c'est à dire en le considérant composé d'un grand nombre de petites parties dites éléments finis, possédant chacune ses propres fonctions pour décrire les contraintes et déformations, dont l'assemblage représente au mieux la structure.

On choisit les fonctions de façon qu'elles assurent la continuité des comportements dans l'ensemble du milieu.

Il existe deux formulations en méthode des éléments finis :

- la méthode des déplacements
- la méthode des forces

Le choix de chacune de ces méthodes est en fonction de l'inconnu recherché.

La méthode des déplacements est la plus utilisée, car elle présente certains avantages par rapport à la méthode des forces.

Après décomposition de notre structure en un certain nombre d'éléments, suivant un maillage adéquat, nous

considérons les déplacements aux noeuds de ce maillage comme inconnues du problème et nous approchons au sein de chaque éléments le champ des déplacements par des fonctions d'interpolations aussi simple que possible, assurant la continuité des déplacements généralisés, qui permettent d'effectuer l'étape d'assemblage et de résolution du problème. Cette étape occupe généralement le plus de temps et de calcul, ce qui explique l'appel de la méthode des éléments finis à des méthodes numériques pour faire l'assemblage et la résolution.

2.2 - Types d'éléments :

La discrétisation des structures se fait en éléments de différents types, on cite essentiellement :

- L'élément poutre (ou barre) à 1, 2, ou 3 dimensions
- l'élément plaque (triangulaire ou rectangulaire) à 2 dim
- l'élément solide (3 dimensions)

Notre cas se limite à l'élément barre qui sert à décrire des poutres en treillis ou en ossatures à deux dimensions.

2.3 - Calcul dynamique par éléments finis :

Le calcul dynamique des structures traité par la méthode des éléments finis en vibrations libres, revient à déterminer les fréquences propres et les déformées modales par la résolution du système d'équations algébriques donné par l'équation fondamentale du mouvement

$$[M] \{ \ddot{q} \} + [K] \{ q \} = 0$$

où, M et K sont respectivement la matrice masse et la matrice de rigidité du système.

q et \dot{q} sont les déplacements généralisés et l'accélération. La résolution de cette équation revient à déterminer les valeurs propres du système à la condition

$$\det [[K] - \omega^2 [M]] = 0$$

IV.3 - Ecriture des matrices masse et rigidité élémentaire

3.1 - Matrice rigidité.

Après la modélisation de la structure par un maillage composé d'éléments finis, on procède à calculer la matrice de rigidité de chacun de ces éléments.

La matrice de rigidité $[K]$ relie les forces appliquées aux

noeuds de l'élément, aux déplacements de ces noeuds, tel que :

$$\{F\} = [K]^e \{u\}$$

Autrement,

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

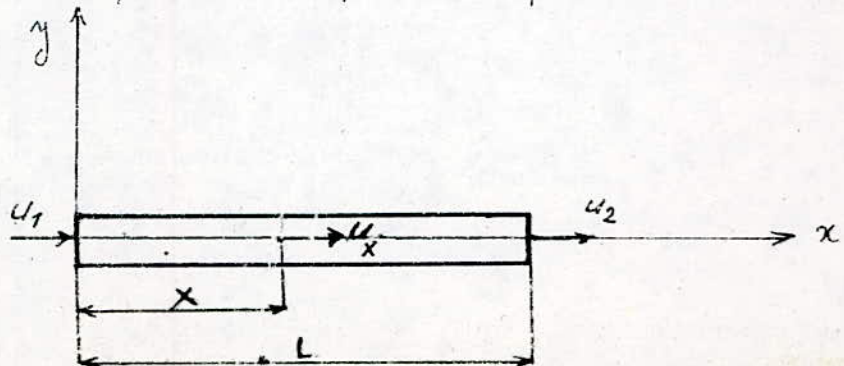
où,

$[K]^e$ matrice rigidité élémentaire de dimension n (nombre de degrés de liberté par élément).

La matrice de rigidité élémentaire $[K]^e$ est donnée (dans le cas d'élément poutre qui fait l'objet de notre étude) par l'expression des énergies de déformations dues à la traction-compression, à la flexion, et à la sollicitation composée.

3-1-a - traction - compression .

soit l'élément poutre représenté par :



fixons un champ de déplacement

$$u_x = a + b x$$

Remplaçons par les conditions aux limites

$$x = 0 \quad u_x = a = u_1$$

$$x = L \quad u_x = u_1 + b \cdot L = u_2$$

$$\Rightarrow b = (u_2 - u_1) / L$$

d'où u_x devient

$$u_x = u_1 \left(1 - \frac{x}{L} \right) + u_2 \frac{x}{L}$$

Posons $\xi = x/L$

Alors, $u_x = u_1 (1 - \xi) + \xi u_2$ --- (*)

l'équation (*) peut s'écrire en forme matricielle

Par :

$$u_x = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

on a la déformation ϵ_{xx} qui s'écrit

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

l'énergie de déformation est définie par :

$$w = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \, dv$$

dans le domaine d'élasticité, on a :

$$\sigma_{ij} = E \epsilon_{ij} \quad \text{tel que } \sigma \text{ est la contrainte}$$

E est le module de Young

Aussi on peut écrire

$$dv = \Omega \cdot dx \quad \text{avec } \Omega = \text{section transversale}$$

Alors l'énergie w devient

$$w = \frac{1}{2} E \Omega \int \epsilon_{xx}^2 dx$$

$$w = \frac{1}{2} E \Omega \int \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx$$

$[K]$ est par définition la forme quadratique de cette énergie

passons,

$$[N] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

L'énergie de déformation par unité de longueur

$$w_t = \frac{1}{2} E \Omega [U]^t [N]^t [N] [U]$$

Pour un élément de longueur L

$$w_T = \frac{1}{2} U^t K_E U$$

où,

$$K_E = E \Omega \int_0^L N^t \cdot N dx$$

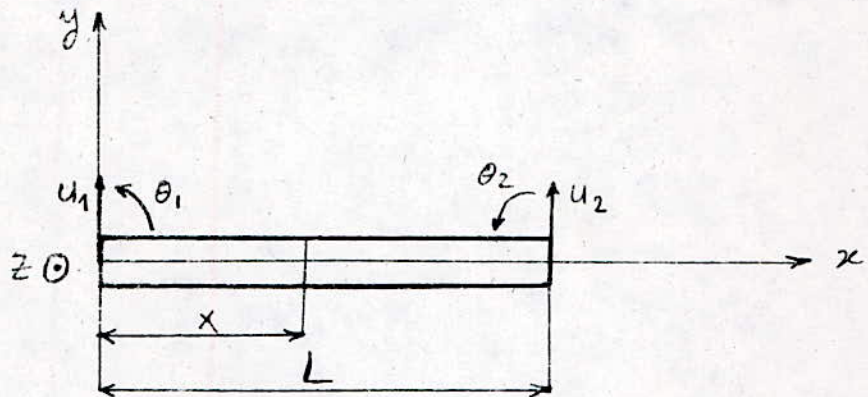
sous forme matricielle :

$$K_E = \frac{E \Omega}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

K_E est la matrice de rigidité pour un élément en traction - compression.

3.1-b - la flexion :

Nous nous limiterons à la flexion dans le plan xoy
 fixons un champ de déplacement u_y dans l'axe de y
 et en chaque extrémité.



Posons, $u_y = q_1 + q_2 \xi + q_3 \xi^2 + q_4 \xi^3$

avec $\xi = x/L$

Aux sections d'extrémité, on a :

$$\xi = 0 ; \quad u_{y1} = u_1 = q_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

$$\xi = 1 ; \quad u_{y2} = u_2 = [1 \ 1 \ 1 \ 1] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

fixons aussi un champ de déplacement autour de l'axe z

$$\theta_3 = - \frac{du_y}{dx} = - \frac{1}{L} (q_2 + 2q_3 \xi + 3q_4 \xi^2)$$

Aux sections d'extrémité on a,

$$\xi = 0 ; \quad \theta_{31} = -q_2/L = -\frac{1}{L} [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix}$$

$$\xi = 1 ; \quad \theta_{32} = -1/L (q_2 + 2q_3 + 3q_4) = -\frac{1}{L} [0 \ 1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

finalment la matrice des déplacement généralisés s'écrit

$$\begin{bmatrix} u_{y_1} \\ u_{y_2} \\ L\theta_{31} \\ L\theta_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

on inverse et on tire les déplacement

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y_1} \\ u_{y_2} \\ L\theta_{31} \\ L\theta_{32} \end{bmatrix}$$

L'énergie de flexion est donnée par :

$$W_F = \frac{1}{2} E \int_0^L I_3 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

on a , $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{2}{L^2} q_3 + \frac{6q_4}{L^2} \xi$

sous la forme matricielle .

$$L^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

$$\left(L^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

Pour tirer les inconnus q_i , on transpose

$$\begin{aligned} \left(L^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12\xi \\ 0 & 0 & 12\xi & 36\xi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'intégrale conduit à :

$$\int_0^L \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 12L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

L'énergie de déformation à la flexion devient, en remplaçant les déplacements généralisés

$$W_F = \frac{1}{2} E I_3 \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} u_{y1} & u_{y2} & L\theta_{31} & L\theta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 12L \end{bmatrix}$$

$$X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y1} \\ u_{y2} \\ L\theta_{31} \\ L\theta_{32} \end{bmatrix}$$

$$W_F = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_{y1} & \theta_{31} & u_{y2} & \theta_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{y1} \\ \theta_{31} \\ u_{y2} \\ \theta_{32} \end{bmatrix}$$

où, K_F la matrice rigidité élémentaire à la flexion d'un élément poutre

$$K_F = \begin{bmatrix} \frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} & -\frac{12EI_3}{L^3} & -\frac{6EI_3}{L^2} \\ & \frac{4EI_3}{L} & \frac{6EI_3}{L^2} & \frac{2EI_3}{L} \\ & & \frac{12EI_3}{L^3} & \frac{6EI_3}{L^2} \\ & & & \frac{4EI_3}{L} \end{bmatrix}$$

Sym

3.1.c - Sollicitation composée :

Dans le cas d'une poutre plane, et le cas d'une sollicitation composée (effort normal, l'effort tranchant, et la flexion), l'énergie de déformation totale est la somme des énergies de déformations des effets de traction - compression et de la flexion .

$$W_T = \frac{1}{2} [U]^t [K] [U] = \frac{1}{2} \left[[U]^t [K_t] [U] + [U]^t [K_F] [U] \right]$$

Pour un ordre donné des déplacements, la matrice de rigidité à sollicitation composée pourra s'écrire

$$[K]_c = \begin{bmatrix} K_E & 0 \\ 0 & K_F \end{bmatrix}$$

Donc, on peut déduire la matrice $[K]_c$ telle que :

$$[K]_c = \begin{bmatrix} \frac{E\Omega}{L} & & & & & \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & & & & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & & \\ -\frac{E\Omega}{L} & 0 & 0 & \frac{E\Omega}{L} & & \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

sym

3.2 - Matrice masse

Tout comme la détermination de la matrice de rigidité du système discrétisé il est préférable de calculer la matrice masse $[m]$ pour chaque éléments dans les axes locaux, puis de constituer la matrice masse $[M]$ de la structure complète.

la matrice masse est donnée à partir de l'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

$$E_c = \frac{1}{2} [\dot{u}_x]^t [m] \{\dot{u}_x\}$$

la masse élémentaire

$$[m]_e = \int_V \rho [d]^t [d] dv$$

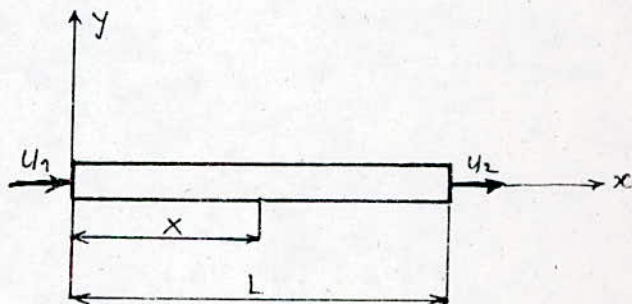
où, ρ est la densité massique, et $[d]$ est un terme de proportionnalité entre les déplacements $\{u\}$ et les déplacements généralisés $\{q\}$ tel que

$$\{u\} = [d] \{q\}$$

la difficulté réside dans la détermination de la matrice $[d]$ dont l'exactitude peut être instable du mode de discrétisation.

3.2.a - Matrice masse en traction-compression

fixons comme le cas de la matrice rigidité un champ de déplacement u_x tel que :



$$u_x = \begin{bmatrix} (1-\xi) & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [d] \{q\}$$

$$\text{avec } [d] = \begin{bmatrix} (1-\xi) & \xi \end{bmatrix}$$

$$\xi = x/L$$

nous avons la matrice masse

$$\begin{aligned}
 [m] &= \int_V \rho [d]^t [d] dv \\
 &= \rho \Omega L \int_0^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & (1-\xi)\xi \\ (1-\xi)\xi & \xi^2 \end{bmatrix} d\xi
 \end{aligned}$$

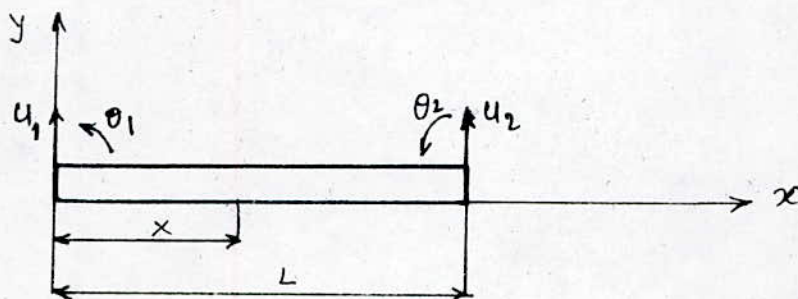
$$[m] = \begin{bmatrix} \frac{\rho \Omega L}{3} & \frac{\rho \Omega L}{6} \\ \frac{\rho \Omega L}{6} & \frac{\rho \Omega L}{3} \end{bmatrix}$$

on aura, alors la matrice masse en traction - compression est :

$$[m]_t^e = \frac{\rho \Omega L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

3.2.b - matrice masse en flexion :

On considère seulement les déplacements transversaux et les rotations dans le plan oxy .



en posant, $\xi = \frac{x}{L}$ et $\eta = \frac{y}{L}$

$$\text{on a : } \{u\} = [d] \{q\}$$

En forme matricielle

$$\begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} = \begin{bmatrix} 6\xi\eta(1-\xi) & (1-\xi)(3\xi-1)\eta L & -6\xi\eta(1-\xi) \\ (\xi-1)^2(2\xi+1) & \xi(1-\xi)^2 L & \xi^2(3-2\xi) \\ \xi\eta(2-3\xi) & & \\ -\xi^2(1-\xi)L & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

calcul fait, la matrice masse s'écrit :

$$[m]_f^e = \frac{\rho \Omega L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

3.2.c - Matrice masse en sollicitation composée :

Dans le cas d'une sollicitation composée, l'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques des effets de traction-compression et de la flexion telle que :

$$\bar{E}_{c_T} = \bar{E}_{c_F} + \bar{E}_{c_t}$$

Pour un ordre donné des déplacements la matrice masse composée pourra s'écrire :

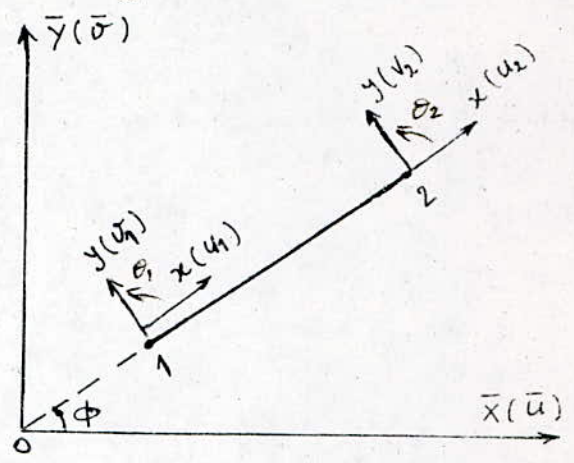
$$[M]^e = \begin{bmatrix} [m]_t^e & | & 0 \\ \hline 0 & | & [m]_f^e \end{bmatrix}$$

on déduit la matrice masse élémentaire en sollicitation composée :

$$[m_e] = \begin{bmatrix} \frac{\rho \Omega L}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{156 \rho \Omega L}{420} & & & & \\ 0 & \frac{22 \rho \Omega L^2}{420} & \frac{4 \rho \Omega L^3}{420} & & & \\ \frac{\rho \Omega L}{6} & 0 & 0 & \frac{\rho \Omega L}{3} & & \\ 0 & \frac{54 \rho \Omega L}{420} & \frac{13 \rho L^2 \Omega}{420} & 0 & \frac{156 \rho \Omega L}{420} & \\ 0 & -\frac{13 L^3 \rho \Omega}{420} & -\frac{3 L^3 \rho \Omega}{420} & 0 & -\frac{22 \rho \Omega L^2}{420} & \frac{4 \rho \Omega L^3}{420} \end{bmatrix} \quad \text{sym}$$

3.3 - Matrices élémentaires de rigidité et masse dans le repère de coordonnées globales

soient le repère $o\bar{x}\bar{y}$, système de coordonnées global et le système de coordonnées local oxy qui est incliné d'un angle ϕ dans le système global.



On détermine la relation entre les axes généraux et locaux tel que : (Pour le noeud (1))

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \bar{u}_1 \cos \phi + \bar{v}_1 \sin \phi \\
 v_1 &= -\bar{u}_1 \sin \phi + \bar{v}_1 \cos \phi \\
 \theta_1 &= \bar{\theta}_1
 \end{aligned}$$

sous la forme matricielle on a :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Donc, le passage du système local au système global se fait à l'aide de la matrice orthogonale P (matrice de passage).

$$P = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'un problème plan, et d'une matrice d'ordre (6x6) la matrice de passage s'écrit

$$P = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix}$$

Alors, les matrices masse et rigidité s'écrivent dans le repère global

$$[K]_G^e = [P]^t [K]_l^e [P]$$

$$[M]_G^e = [P]^t [M]_l^e [P]$$

où, $[K]_G^e$ et $[M]_G^e$ sont respectivement la rigidité et la masse élémentaire dans le repère global

$[K]_l^e$ et $[M]_l^e$ sont la rigidité et la masse dans le repère local.

IV - 4 - Assemblage des matrices

4.1 - Assemblage de la matrice de rigidité

Lorsqu'on détermine les matrices de rigidité élémentaires de la structure étudiée dans le repère global, on procède au calcul de la matrice de rigidité globale du système

qui vérifie

$$[F] = [K][u]$$

où, $[F]$ et $[D]$ sont respectivement formés par les sous-matrices des forces F_i et par les sous-matrices des déplacements des nœuds u_i pour chaque élément.

$[K]$ est la matrice de rigidité globale construite par l'addition des matrices de rigidités élémentaires $[K]^e$

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [K]^e$$

Cette addition se fait bloc à bloc en respectant la numérotation des nœuds de chaque élément, ce qui donne une structure assez particulière de la matrice globale $[K]$. Cette matrice est définie positive ; tous les termes diagonaux sont positifs, et parmi eux se trouvent les coefficients les plus grands en valeur absolue.

Une bande de largeur variable s'étale autour de cette diagonale et rend compte du couplage existant entre les éléments. Ce couplage dépend de la nature de l'élément (uni-, bi-, ou tridimensionnel) et de ses nœuds de connexion.

4.2. Influence des conditions aux limites géométriques:

L'influence des conditions géométriques de la structure (Les appuis par exemple) permettent de réduire la matrice de rigidité en éliminant les lignes et les colonnes qui correspondent aux déplacements nuls.

Cela revient à dire que tous les nombres représentant la totalité de nombre de degrés de liberté imposé à la structure pour la rendre cinématiquement déterminée (une structure dont les inconnus sont déterminées par exemple nulles).

4.3 - Assemblage de la matrice masse:

L'obtention de la matrice masse globale se fait de même façon que l'établissement de la matrice de rigidité globale.

On fait l'addition des matrices masses élémentaires dans le système des axes global de bloc en bloc en respectant toujours la numérotation des nœuds,

la matrice masse globale vérifie la relation:

$$[M] = \sum_{\text{éléments}} [m]^e$$

On introduit en suite, les conditions aux limites géométriques de façons identiques que pour la matrice rigidité $[K]$.

* Remarque :

Une présentation simplifiée de la matrice masse peut s'obtenir en faisant l'hypothèse que les masses, au lieu d'être réparties le long de l'élément considéré, sont concentrées aux points nodaux (nœuds) de la structure, et agissant dans la direction de degrés de liberté supposés de l'élément.

Cette présentation qui simplifie le calcul numérique puisqu'on exclut les couplages entre les différents déplacements d'un élément, la matrice masse prend la forme diagonale :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & m_2 & & & 0 & | \\ | & & & & & | \\ | & & & & & | \\ | & & & & & | \\ 0 & - & - & - & - & m_n \end{bmatrix}$$

où, m_i représente la masse concentrée associée au point d'application et à la direction du déplacement généralisé q_i .

IV.5 - Programmation

L'aspect général de la méthode des éléments finis permet de concevoir un programme d'ordinateur unique, capable de résoudre tous les problèmes sus-cités.

On peut décomposer la structure d'un tel programme en quatre (4) parties essentielles :

1 - Entrée des données

- + Définition de la géométrie (coordonnées des noeuds et connectivités de chaque élément).
- + Définition des paramètres connus liés aux propriétés de chaque élément
- + Définition des conditions aux limites

2 - Bibliothèque d'éléments

Généralisation des modèles mathématiques des éléments de la structure.

3 - Assemblage et Résolution

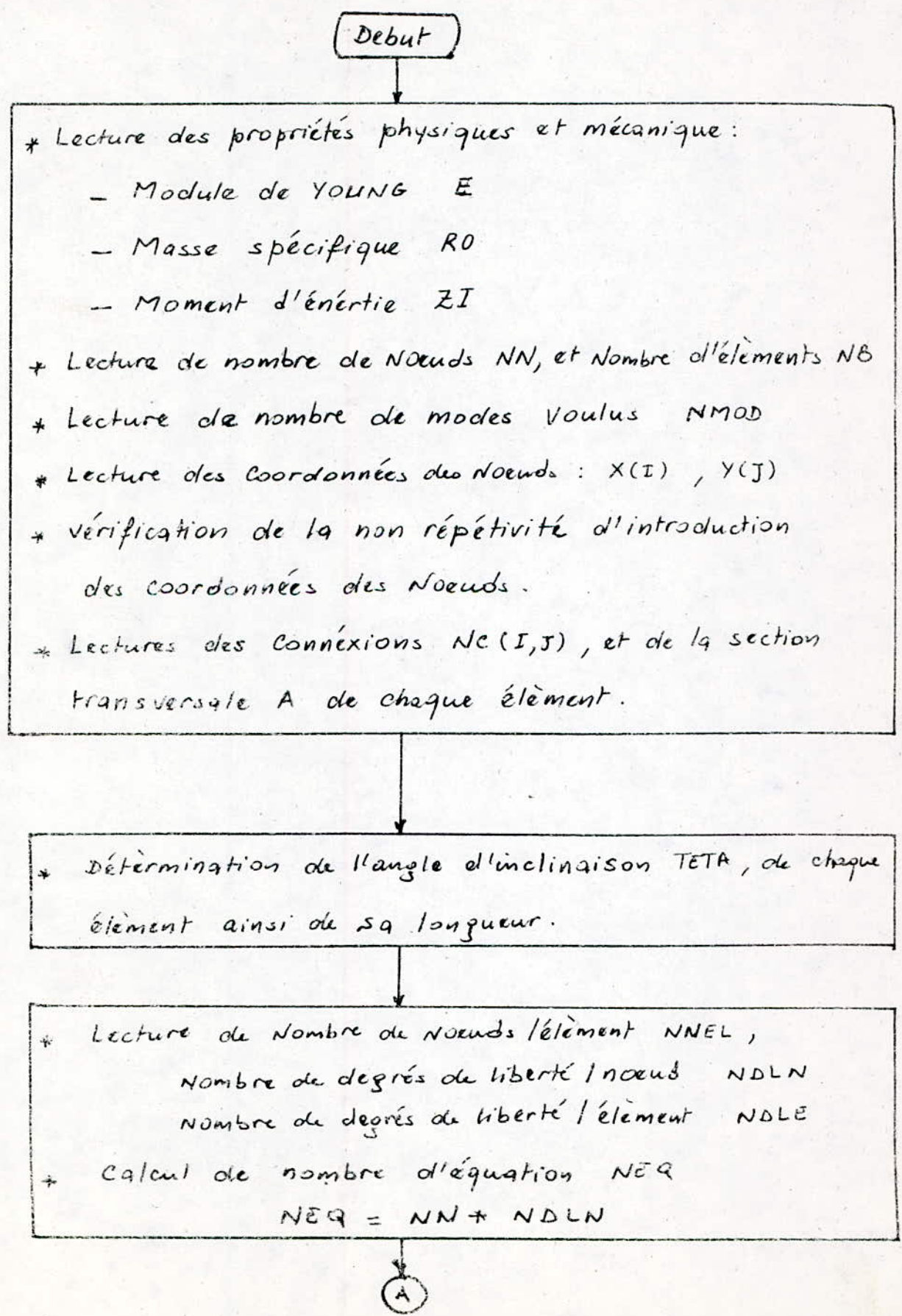
Construction des matrices globales et la résolution du modèle mathématique représentant le système entier

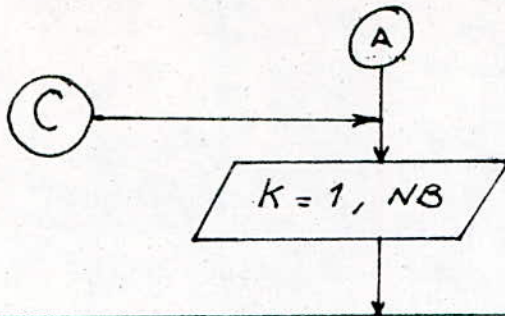
4 - Résultats

présentation des valeurs, fréquences, et vecteurs propres etc, calculées.

Remarque: La résolution du système algébrique (équation en valeurs propres) est faite dans notre cas par la méthode de Jacobi.

IV.5.1- Organigramme du Programme des éléments finis

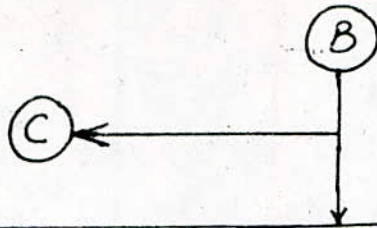




- * Construction de la matrice Rigidité globale :
- Construction de la table de localisation
 - Construction de la matrice rigidité élémentaire $VKE(I, J)$
 - Introduction de la matrice de transformation R .
- $$[VKE] = [R]^t * [VKE] * [R]$$
- Placer la matrice de rigidité élémentaire dans la matrice Rigidité Globale.
 - obtention de la matrice Rigidité globale VKG (Assemblage)

- * Construction de la matrice Masse globale :
- Construction de la matrice masse élémentaire $VME(I, J)$
 - Introduction de la matrice de transformation R
- $$[VME] = [R]^t * [VME] * [R]$$
- Placer la matrice masse élémentaire dans la matrice masse globale
 - obtention de la matrice masse globale VMG





Introduction des Conditions aux limites

- lecture de nombre de conditions aux limites NCL
- lecture de l'indice du déplacement imposé nul I

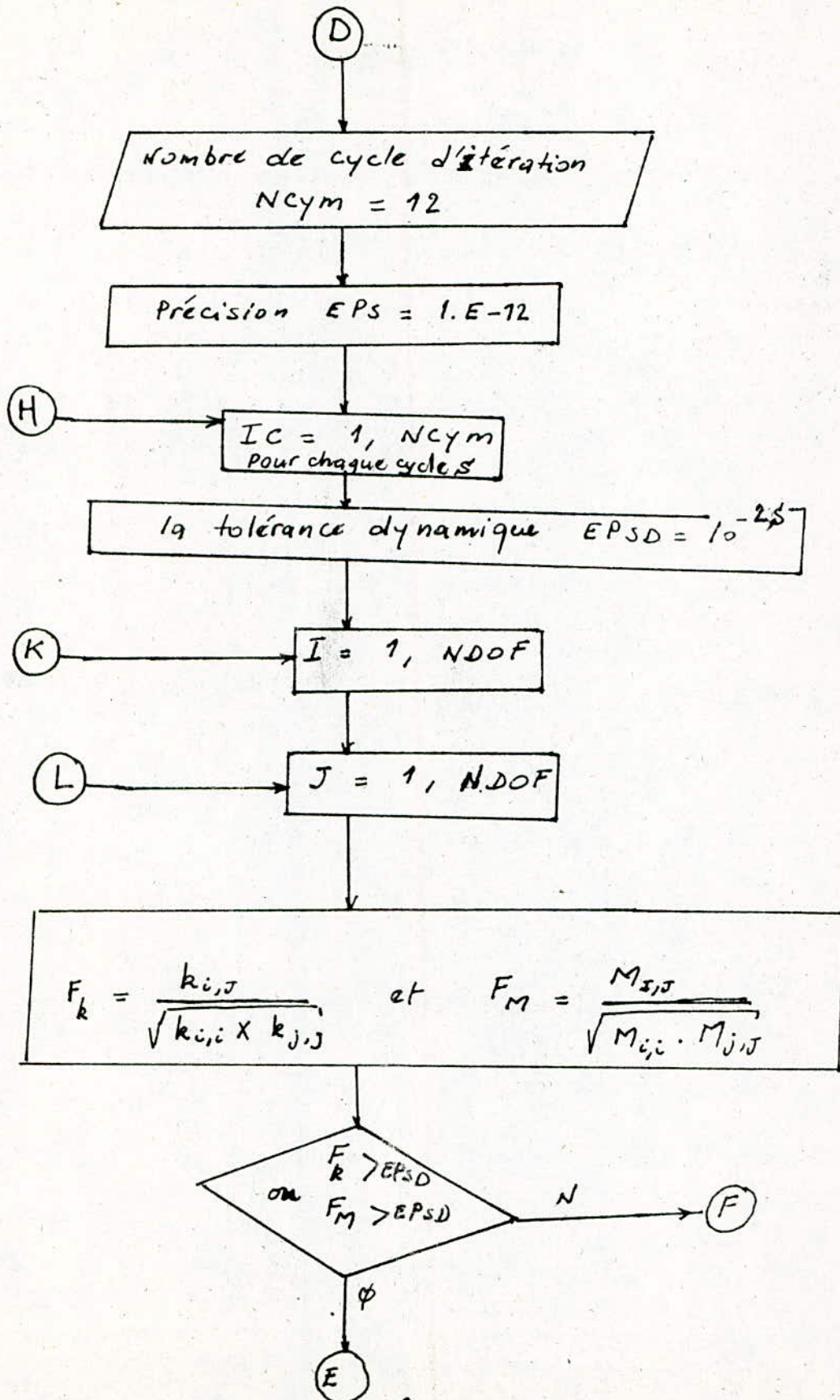
- extraction de tous les degrés de libertés nuls des matrices rigidité et Masse, globales.
- obtention des matrices globales, de rigidité et de masse dans le sous-espace de travail $NDOF$

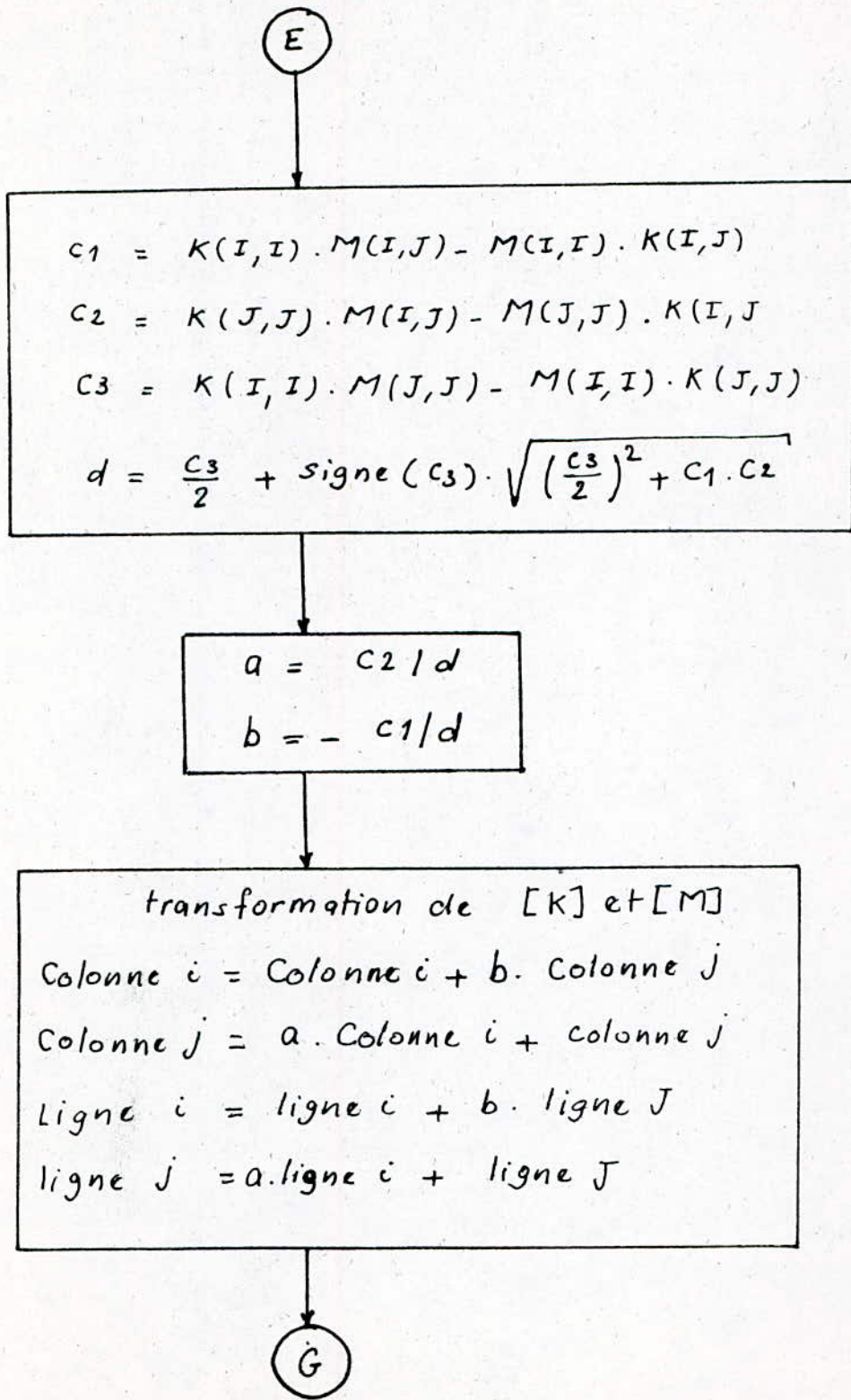
la dimension du sous-espace de degrés de libertés libres
 $NDOF = NEQ - NCL$

transposition des éléments des matrices rigidité et masse en vecteurs rigidité, et vecteur masse en triangle supérieur pour colonnes descendantes

$$VK(II) = VKG(I, J) \quad ; \quad VM(II) = VMG(I, J)$$







- 10.6 - Application et résultats :

Application de l'exemple I.5.

----- FILE OUTPUT -----

RESULTATS DES CALCULS

=====

| | | | |
|--|--------|---|---|
| NOMBRE DE NOEUDS TOTAL | (NN) | = | 2 |
| NOMBRE D ELEMENT | (NB) | = | 1 |
| NOMBRES DE NOEUDS PAR ELEMENT | (NNEL) | = | 2 |
| NOMBRES DE DEGRES DE LIBERTE PAR NOEUD | (NDLN) | = | 3 |
| NOMBRES DE DEGRES DE LIBERTE PAR ELEMENT | (NDLE) | = | 6 |

| NOEUD | COORD-X(CM) | COORD-Y(CM) |
|-------|-------------|-------------|
| 1 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 |
| 2 | 0.1200E+03 | 0.0000E+00 |

LES POINTS DE CONNECTIONS DES ELEMENTS

| ELEMENT | CON(I) | CON(J) |
|---------|--------|--------|
| 1 | 1 | 2 |

VALEURS PROPRES, CYCLE 1
 0.54687E+08 0.70629E+06 0.76445E+07

VALEURS PROPRES, CYCLE 2
 0.54687E+08 0.70629E+06 0.76445E+07

CONVERGENCE EN 2CYCLES ET 1TRANSFORMATIONS DANS JACOBI

VALEURS FREQUENCES ET VECTEURS PROPRES

VALEUR PROPRE (2) 706290.6
 FREQUENCE PROPRE (2) 840.4110

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|----------|----------|-----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.000000 | 0.288638 | -0.978956 |

VALEUR PROPRE (3) 7644518.
 FREQUENCE PROPRE (3) 2764.872

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|----------|----------|-----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.000000 | 0.010902 | -0.051984 |

VALEUR PROPRE (1) 5.4687496E+07
 FREQUENCE PROPRE (1) 7395.100

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|----------|----------|----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.510310 | 0.000000 | 0.000000 |

- Comparaison des résultats :

Après application de l'exemple (I-5), aux différents programmes des méthodes étudiées, nous avons obtenu les résultats suivants :

| | 1 ^o mode | 2 ^o mode | 3 ^o mode |
|---------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| STODOLA | $\lambda_{1S} = 5,46 \cdot 10^7$ | $\lambda_{2S} = -$ | $\lambda_{3S} = 6,48 \cdot 10^9$ |
| RAYLEIGH-RITZ | $\lambda_{1R} = 5,46 \cdot 10^7$ | $\lambda_{2R} = 43,1 \cdot 10^5$ | $\lambda_{3R} = -$ |
| M.E.F | $\lambda_{1M} = 7,06 \cdot 10^5$ | $\lambda_{2M} = 7,6 \cdot 10^6$ | $\lambda_{3M} = 5,4 \cdot 10^7$ |

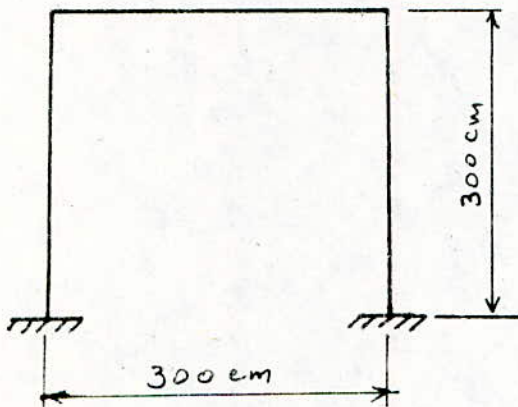
D'après ces résultats, on constate que les valeurs propres trouvées présentent une approche pour le premier mode dans la méthode de STODOLA et la méthode de RAYLEIGH-RITZ, la même valeur propre est retrouvée au 3^o mode par la méthode des éléments finis.

Chacune des premières méthodes présente une limitation dans le nombre de mode retrouvés car elles présentent seulement 2 modes dans un problème de dimension 3.

Par contre la méthode des éléments finis permet de donner les 3 seules car qui existe dans cet exemple avec une précision dans les 2 premiers modes de valeurs propres, (car généralement on s'intéresse qu'au premiers modes, où on a les valeurs propres les moins élevées).

Ch. V - APPLICATION DE LA M.E.F

Nous utiliserons comme application pour le programme de la méthode des éléments finis une structure simple à savoir : le portique de la figure ci-dessous.

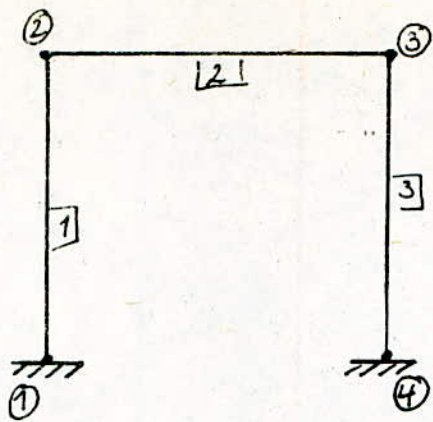


On prendra pour chaque élément :

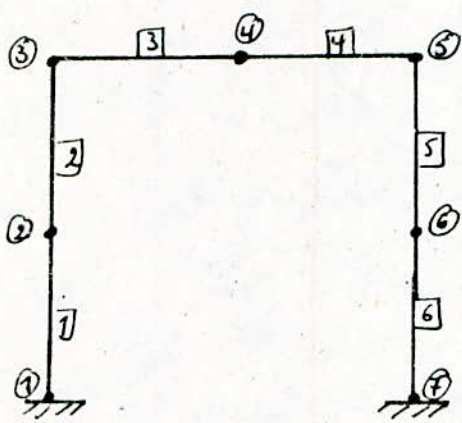
- le module de young $E = 2,1 \cdot 10^9 \text{ gr/cm}^2$
- la masse spécifique $\rho = 0,008 \text{ gr-sec}^2/\text{cm}^4$
- le moment d'inertie $I = 104 \text{ cm}^4$
- La section transversale $A = 12 \text{ cm}^2$.

Ce portique (ou poutre) sera discretisé :

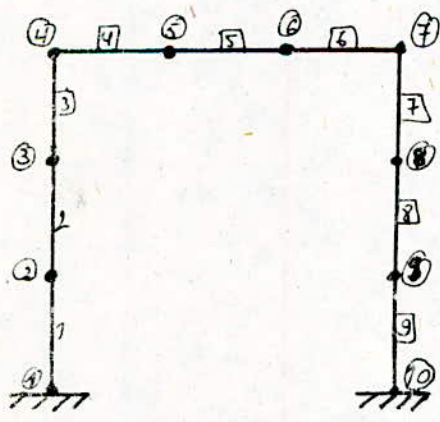
- En 4 nœuds et 3 éléments
- En 7 nœuds et 6 éléments
- et En 10 nœuds et 9 éléments.



portique en 4 noeuds
et 3 élément



portique en 7
noeuds et 6 éléments



portique en 10 noeuds
et 9 éléments

On tracera pour ce dernier cas (cas où on a le plus de points nodaux c.à.d rapprochement au mode vrai) la déformée modale pour les 3 premiers modes (grossièrement et en négligeant la rotation)

Les résultats obtenus pour le premier mode avec les 3 (trois) modèles ont été les suivants :

Portique à 3 éléments : $\omega_1 = 28,597 \text{ rd/s}$

Portique à 6 éléments : $\omega_1 = 86,23 \text{ rd/s}$

Portique à 9 éléments : $\omega_1 = 434,92 \text{ rd/s}$

où, ω est la pulsation propre.

On constate une augmentation de la pulsation ω qui tend vers la valeur exacte du système.

Dans les pages suivantes on donne le listing intégral des résultats de l'exécution pour le portique à 10 nœuds et 9 éléments. A partir des vecteurs propres obtenus, on a tracé les 3 premiers modes de vibration du portique qui sont donnés à la page (66).

----- FILE OUTPUT -----

RESULTATS DES CALCULS

NOMBRE DE NOEUDS TOTAL (NN) = 10
 NOMBRE D ELEMENT (NE) = 9
 NOMBRES DE NOEUDS PAR ELEMENT (NNEL) = 2
 NOMBRES DE DEGRES DE LIBERTE PAR NOEUD (NDLN) = 3
 NOMBRES DE DEGRES DE LIBERTE PAR ELEMENT (NOLE) = 6
 NOMBRE DE MODES REQUIS (NMOD) = 4

| NOEUD | COORD-X(CM) | COORD-Y(CM) |
|-------|-------------|-------------|
| 1 | 0.0000E+00 | 0.0000E+00 |
| 2 | 0.0000E+00 | 0.1000E+03 |
| 3 | 0.0000E+00 | 0.2000E+03 |
| 4 | 0.0000E+00 | 0.3000E+03 |
| 5 | 0.1000E+03 | 0.3000E+03 |
| 6 | 0.2000E+03 | 0.3000E+03 |
| 7 | 0.3000E+03 | 0.3000E+03 |
| 8 | 0.3000E+03 | 0.2000E+03 |
| 9 | 0.3000E+03 | 0.1000E+03 |
| 10 | 0.3000E+03 | 0.0000E+00 |

LES POINTS DE CONNECTIONS DES ELEMENTS

| ELEMENT | CON(I) | CON(J) |
|---------|--------|--------|
| 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 3 | 4 |
| 4 | 4 | 5 |
| 5 | 5 | 6 |
| 6 | 6 | 7 |
| 7 | 7 | 8 |
| 8 | 8 | 9 |
| 9 | 9 | 10 |

VALEURS PROPRES, CYCLE 9

| | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.19308E+09 | 0.49350E+08 | 0.81957E+07 | 0.18921E+06 | 0.15780E+09 |
| 0.23953E+08 | 0.26293E+07 | 0.29115E+08 | 0.27742E+07 | 0.44643E+07 |
| 0.74769E+07 | 0.41797E+07 | 0.64882E+07 | 0.12223E+08 | 0.21933E+07 |
| 0.21447E+09 | 0.49883E+07 | 0.54387E+07 | 0.45948E+08 | 0.32212E+07 |
| 0.22848E+08 | 0.15270E+07 | 0.97859E+08 | 0.69307E+07 | |

CONVERGENCE EN 9 CYCLES ET 2192 TRANSFORMATIONS DANS JACOBI

VALEUR PROPRE = 189210.1
 FREQUENCE PROPRE = 434.9829

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | -0.022403 | 0.003690 | 0.004852 |
| 3 | -0.039109 | 0.000271 | 0.188859 |
| 4 | -0.090031 | 0.009004 | 0.053854 |
| 5 | 0.241693 | 0.031049 | -0.013229 |
| 6 | -0.216339 | 0.015046 | 0.039417 |
| 7 | -0.000395 | 0.067999 | 0.033742 |
| 8 | 0.004334 | -0.099097 | 0.093142 |
| 9 | -0.082204 | -0.000273 | -0.034911 |
| 10 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

VALEUR PROPRE = 1526966.
 FREQUENCE PROPRE = 1235.704

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.130066 | -0.004405 | -0.173080 |
| 3 | -0.000065 | 0.001442 | 0.008570 |
| 4 | -0.015005 | -0.125725 | 0.004180 |
| 5 | 0.021871 | 0.234586 | -0.166600 |
| 6 | 0.052098 | 0.037089 | 0.021313 |
| 7 | -0.009206 | -0.056290 | 0.038529 |
| 8 | -0.010760 | 0.017134 | -0.012596 |
| 9 | -0.011254 | 0.051106 | -0.039758 |
| 10 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

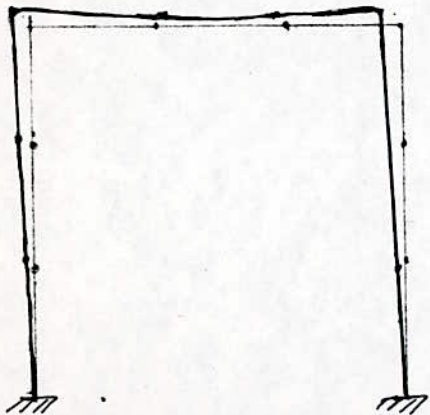
VALEUR PROPRE = 2193348.
 FREQUENCE PROPRE = 1480.99

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | 0.000508 | 0.004856 | -0.004203 |
| 3 | 0.000389 | -0.000392 | 0.001131 |
| 4 | -0.001835 | 0.003145 | -0.002607 |
| 5 | -0.000633 | -0.001508 | 0.000942 |
| 6 | -0.001667 | -0.005022 | -0.001062 |
| 7 | 0.005158 | -0.002408 | 0.003343 |
| 8 | 0.004364 | 0.002050 | -0.000844 |
| 9 | 0.001287 | 0.001457 | -0.001327 |
| 10 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

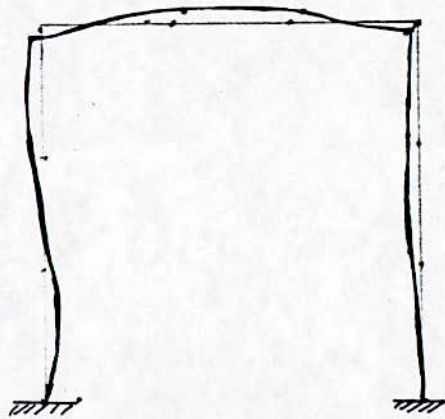
VALEUR PROPRE = 2629831.
 FREQUENCE PROPRE = 1621.675

| NOEUD | DEPL-X | DEPL-Y | ROTA |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 2 | -0.358721 | -0.014956 | -0.010135 |
| 3 | -0.226115 | 0.005003 | 0.098068 |
| 4 | 0.182805 | -0.232739 | -0.034218 |
| 5 | -0.103705 | 0.042027 | 0.014672 |
| 6 | -0.064970 | 0.110803 | -0.108265 |
| 7 | -0.020424 | -0.069827 | 0.055340 |
| 8 | -0.029629 | 0.103708 | -0.036931 |
| 9 | -0.040081 | 0.013888 | -0.115402 |
| 10 | 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |

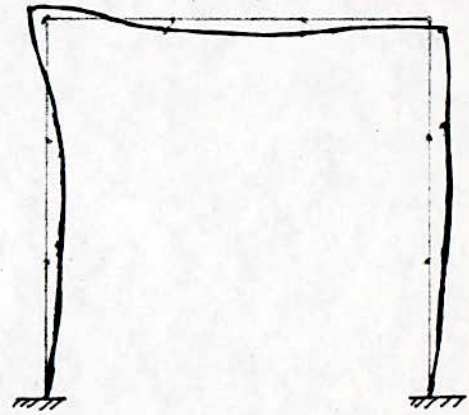
1^{er} mode



2^o mode



3^o mode



tracé de l'allure des déformées modales
Pour le portique à 10 nœuds.

CONCLUSION

Nous voudrions, dans cette Conclusion, revenir ^{sur} l'intérêt qu'on porte pour cette étude qui nous a été très bénéfique pour la connaissance des différentes méthodes de calcul dynamique des structures. Nous avons constaté, que :

Les méthodes de STODOLA, et de RAYLEIGH-RITZ restent limitées à des structures simples, et imposent le choix de vecteurs à initialiser au préalable ; ce qui influe directement sur les résultats. La méthode de STODOLA comporte aussi l'inversion de matrices qui est source d'erreurs et augmente considérablement le temps de calcul, elle n'est utilisée au fait que pour obtenir le premier mode.

La méthode des éléments finis, par contre, est d'une utilisation beaucoup plus aisée et permet d'étudier les structures les plus compliquées moyennant un maillage adéquat. Elle permet d'obtenir les différents modes significatifs avec une précision d'autant plus meilleure qu'on augmente le nombre de noeuds. Elle reste limitée cependant par la capacité de la machine et des limites du programme utilisées.

La méthode des éléments finis s'impose comme la plus générale et la plus efficace pour l'étude des structures les plus diverses.

Nous recommandons, aussi que ce travail soit continué par les tâches suivantes :

- Etendre cette étude aux structures spatiales et aux autres types d'éléments .
- Optimiser le choix des algorithmes numériques utilisés et l'allocation de l'espace mémoire du calculateur pour une plus grande efficacité et une meilleure utilisation de la machine .
- appliquer cette même étude à des structures mécaniques telles que grues , treillis des Chassis de véhicules , etc...

ANNEXE

METHODE DE JACOBI

- Généralités :

La méthode générale de JACOBI permet de calculer les n valeurs et vecteurs propres d'un système de dimensions limitées ($n \leq 100$) dont les matrices sont symétriques et définies positives.

Elle consiste à transformer les matrices $[K]$ et $[M]$ en des matrices diagonales en utilisant des transformations successives

$$[K^1] = [K]$$

$$[M^1] = [M]$$

$$[K^2] = [Q^1]^t [K^1] [Q^1]$$

$$[M^2] = [Q^1]^t [M^1] [Q^1]$$

$$[K^{k+1}] = [Q^k]^t [K^k] [Q^k]$$

$$[M^{k+1}] = [Q^k]^t [M^k] [Q^k] \dots (**)$$

Les matrices $[K^{k+1}]$ et $[M^{k+1}]$ tendent vers des matrices diagonales $[K^d]$ et $[M^d]$ lorsque k tend vers l'infini.

Les valeurs et vecteurs propres sont alors :

$$[\lambda] = [K^d] [M^d]^{-1}$$

ou $\lambda_i = K_{ii}^d / M_{ii}^d$

$$[X] = [Q^1] [Q^2] \dots [Q^k] [Q^{k+1}] \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{M_{ii}^d}} & \\ & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

- Matrices de transformation

chaque matrice $[Q^k]$ est choisie de manière à ce qu'un terme (i,j) non diagonal et non nul de $[K^k]$ (et $[M^k]$) soit nul après la transformation (**). La matrice $[Q^k]$ a la structure suivante :

$$[Q^k] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & a & \\ & b & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{--- ligne } i \\ \text{--- ligne } j \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} | & | \\ \text{colonne } i & \text{colonne } j \end{array}$$

Les coefficients a et b sont calculés en écrivant que :

$$K_{ij}^{k+1} = M_{ij}^{k+1} = 0$$

soit, en supprimant par simplicité l'indice $k+1$ sur les termes de chaque matrice :

$$a K_{ii} + (1+ab) K_{ij} + b K_{jj} = 0$$

$$a M_{ii} + (1+ab) M_{ij} + b M_{jj} = 0$$

Dans le cas particulier où :

$$\frac{K_{ii}}{M_{ii}} = \frac{K_{jj}}{M_{jj}} = \frac{K_{ij}}{M_{ij}}$$

les valeurs de a et b sont :

$$a = 0 \quad \text{et} \quad b = - \frac{K_{ij}}{K_{jj}}$$

Dans le cas général notons :

$$c_1 = K_{ii} M_{ij} - M_{ii} K_{ij}$$

$$c_2 = K_{jj} M_{ij} - M_{jj} K_{ij}$$

$$c_3 = K_{ii} M_{jj} - M_{ii} K_{jj}$$

$$d = \frac{c_3}{2} + \text{signe}(c_3) \sqrt{\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + c_1 c_2}$$

Alors :

$$a = \frac{c_2}{d}$$

$$b = -\frac{c_1}{d}$$

lorsque $[M]$ est définie positive, le coefficient $\left(\frac{c_3}{2}\right)^2 + c_1 c_2$ est positif.

lorsque $d=0$, a et b sont :

$$a = 0$$

$$b = -\frac{K_{ii}}{K_{jj}}$$

Généralement, on utilise la méthode Jacobi dans la résolution du système d'équation de vibrations libres, car cette méthode converge rapidement avec un nombre assez petit d'itération.


```

C----- HYPOTHESE : INITIATION DU VECTEUR Y1(I) EN VECTEUR UNITE
C
18 DO 18 I=1,N
   Y1(I) = 1.
   CONTINUE
C----- PRODUIT DE LA MATRICE DYNAMIQUE PAR Y1(I)
19 DO 20 I=1,N
   Y(I) = 0
   DO 20 J=1,N
   Y(I) = Y(I) + D(I,J) * Y1(J)
C----- R EST LE PLUS GRAND TERME DU VRAI MODE
R = Y(1)
DO 26 I=1,N
Y(I) = Y(I) / R
C----- TEST DE CONVERGENCE
IF ((ABS(Y(I)/Y1(I))-1)-EPS).LE.(0.0) GO TO 26
CONTINUE
DO 27 I=1,N
Y1(I) = Y(I)
GO TO 19
C----- VECTEUR PROPRE DU VRAI MODE EST FORME
28 WRITE(10,*) ' LE VECTEUR PROPRE DU 1ER MODE '
DO 320 I=1,N
WRITE(10,*) ' Y(',I,') = ',Y(I)
CONTINUE
C----- CALCUL DES VALEURS PROPRES
VALP1 = 1/R
OMEGA1 = SQRT(VALP1)
WRITE(10,*) ' LA VALEUR PROPRE LAMBDA1 = ',VALP1
WRITE(10,*) ' LA PULSATION PROPRE OMEGA1 = ',OMEGA1
C----- RECHERCHE DE LA DERNIERE VALEUR PROPRE VALP(N)
=====
C----- INVERSION DE LA MATRICE MASSE M(I,J)
DO 40 I=1,N
DO 40 J=1,N
VP(I,J) = M(I,J)
CONTINUE
CALL INVERS(VP,N,100,K,DET)
DO 41 I=1,N
DO 41 J=1,N
RM(I,J) = VP(I,J)
CONTINUE
WRITE(10,*) ' CARACTERISTIQUE DU DERNIER MODE '
WRITE(10,*) ' ===== '
WRITE(10,*) ' LA MATRICE MASSE INVERSEE EST RM(I,J) '
DO 330 I=1,N
WRITE(10,*) (RM(I,J),J=1,N)
CONTINUE
330

```



```

C----- LA MATRICE M EST INVERSE EN RM
C----- LA MATRICE B(I,J) = M-1 >> K
C
DO 43 I=1,N
DO 43 J=1,N
B(I,J)=0
DO 43 JJ=1,N
B(I,J) = B(I,J)+RM(I,JJ)*RK(JJ,J)
43 CONTINUE
WRITE(10,*) ' MATRICE DYNAMIQUE (RIGIDITE) B '
DO 340 I=1,N
WRITE(10,*) (B(I,J),J=1,N)
340 CONTINUE
C----- LA MATRICE B EST FORMEE
C----- HYPOTHESE: INITIALISATION
C----- LA LECTURE DE X1(I) SE FAIT DU FICHER INPUT
C----- PRODUIT DE LA MATRICE B *Y1(I)
C
50 DO 52 I=1,N
X(I) = 0
DO 52 J=1,N
52 X(I) = X(I) + B(I,J)*X1(J)
C----- LE PLUS GRAND TERME DU VRAI MODE = R1
R1 = X(3)
DO 54 I=1,N
X(I) = X(I)/X(3)
IF ((ABS(X(I)/X1(I)-1)-EPS).LE.(0.0)) GO TO 54
GO TO 58
54 CONTINUE
DO 56 I = 1,N
56 X1(I) = X(I)
GO TO 50
C----- LE VECTEUR PROPRE EST
58 DO 59 I=1,N
59 X(I)=X(I)/R1
WRITE(10,*) ' LE VECTEUR PROPRE DU DERNIER MODE '
DO 350 I=1,N
350 WRITE(10,*) 'X(',I,')=',X(I)
C----- VALEUR PROPRE W2
VALP2=R1
OMEGA2=SQRT(VALP2)
WRITE(10,*) ' LA VALEUR PROPRE LAMBDA2=',VALP2
WRITE(10,*) ' LA PULSATION PROPRE OMEGA2=',OMEGA2
STOP
END

```



```

SUBROUTINE INVERS(VP,N,IVP,K,DET)
=====
INVERSION D'UNE MATRICE NON SYMETRIQUE AVEC RECHERCHE DE PIVOT
NON NUL SUR UNE COLONNE
ENTREES
VP      MATRICE A INVERSER
N      ORDRE DE LA MATRICE A INVERSER
IVP    DIMENSION DE LA MATRICE DANS LE PROGRAMME D'APPEL
K      VECTEUR DE TRAVAIL ENTIER DE LONGUEUR N
SORTIES
VP      MATRICE INVERSEE
DET     DETERMINANT
=====
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION VP(IVP,IVP),K(N)
DATA ZERO/C.00/,UN/1.00/,EPS/1.D-13/
ABS(X)=DABS(X)
C-----
DET=UN
DO 5 I=1,N
  K(I)=I
C-----
  DEBUT DE L'INVERSION
DO 30 II=1,N
  C-----
  RECHERCHE D'UN PIVOT NON NUL SUR LA COLONNE II
DO 10 I=II,N
  PIV=VP(I,II)
  IF(ABS(PIV).GT.EPS) GO TO 20
  CONTINUE
  DET=ZERO
  GOTO 140
C-----
  ECHANGER LA LIGNE II ET LA LIGNE I
20  DET=DET*PIV
  IF(I.EQ.II) GO TO 40
  I1=K(II)
  K(II)=K(I)
  K(I)=I1
  DO 30 J=1,N
  C=VP(I,J)
  VP(I,J)=VP(II,J)
  VP(II,J)=C
  DET=-DET
30
C-----
  NORMALISER LA LIGNE DU PIVOT
40  C=UN/PIV
  VP(II,II)=UN
  DO 50 J=1,N
  VP(II,J)=VP(II,J)*C
C-----
  ELIMINATION
DO 70 I=1,N
  IF(I.EQ.II) GO TO 70
  C=VP(I,II)
  VP(I,II)=ZERO
  DO 60 J=1,N
  VP(I,J)=VP(I,J)-C*VP(II,J)
60  CONTINUE
70  CONTINUE
80  CONTINUE
C-----
  REORDONNER LES COLONNES DE L'INVERSE
DO 120 J=1,N
  C-----
  CHERCHER J1 TEL QUE K(J1)=J
DO 90 J1=J,N
  JJ=K(J1)
  IF(JJ.EQ.J) GO TO 100
90  CONTINUE
100 IF(J.EQ.J1) GO TO 120
C-----
  ECHANGER LES COLONNES J ET J1
  K(J1)=K(J)
  DO 110 I=1,N
  C=VP(I,J)
  VP(I,J)=VP(I,J1)
110 VP(I,J1)=C
120 CONTINUE
  RETURN
140 END

```



```

DO 18 I1=1,NP
Y(I1,I)=Y(I,I1)
18 CONTINUE
DO 22 I1=1,NP
DO 22 J1=1,NP
RMB(I1,J1)=0
RKB(I1,J1)=0
DO 19 KK=1,N
19 RKB(I1,J1)=RKB(I1,J1)+Y(I1,KK)*RK1(KK,J1)
DO 21 KK=1,N
21 RMB(I1,J1)=RMB(I1,J1)+Y(I1,KK)*RM1(KK,J1)
22 CONTINUE
WRITE(7,*)' LA NOUVELLE MATRICE DE RIGIDITE DE DIM NP'
WRITE(7,*)((RKB(I1,J1),J1=1,NP),I1=1,NP)
WRITE(7,*)' LA NOUVELLE MATRICE MASSE DE DIM NP'
WRITE(7,*)((RMB(I1,J1),J1=1,NP),I1=1,NP)
II=0
DO 24 J1=1,NP
DO 24 I1=1,J1
II=II+1
VK(II)=RKB(I1,J1)
VM(II)=RMB(I1,J1)

WRITE(7,*)'VK(' ,II,')=' ,VK(II)
WRITE(7,*)'VM(' ,II,')=' ,VM(II)
CONTINUE
NCYM=15
EPS=1.D-12
*****
C CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES DE K-LAMBDA.M PAR LA
C METHODE GENERALE DE JACCOBI.
C ENTREES
C VK MATRICE K (TRIANGLE SUPERIEUR PAR COLONNES
C DESCENDANTES)
C VM MATRICE M (TRIANGLE SUPERIEUR PAR COLONNES
C DESCENDANTES)
C NP DIMENSION DES MATRICES K ET M
C NCYM NOMBRE DE CYCLES MAXIMUM (15)
C EPS PRECISION REQUISE (1.D-12)
C TRAVAIL
C VALPO TABLE DE TRAVAIL DE DIMENSION NP
C SORTIES
C VALP VALEURS PROPRES
C VECT VECTEURS PROPRES
C -----
EPS2=EPS*EPS
ITR=0
C VERIFIER QUE LES TERMES DIAGONAUX SONT POSITIFS, ET
C INITIALISER LES VALEURS PROPRES
II=0
DO 20 I=1,NP
II=II+1
IF(VK(II).GT.ZERO.AND.VM(II).GT.ZERO) GO TO 10
WRITE(7,2000) I
2000 FORMAT(' **ERREUR, TERME DIAGONAL NEGATIF, DANS JACCOBI, LISNE',
1 I5)
STOP

```



```

10 VALP(I)=VK(II)/VM(II)
20 VALPO(I)=VALP(I)
C   INITIALISER LES VALEURS PROPRES
DO 40 I=1,NP
DO 30 J=1,NP
30 VECT(I,J)=ZERO
40 VECT(I,I)=UN

C   POUR CHAQUE CYCLE
DO 250 IC=1,NCYM
C   TOLERANCE DYNAMIQUE
EPSD=EPSD0**IC
C   BALAYAGE DU TRIANGLE SUPERIEUR PAR LIGNES
IMAX=NP-1
II=0
DO 180 I=1,IMAX
IO=II+1
II=II+I
IP1=I+1
IJ=II+I
JJ=II
DO 180 J=IP1,NP
JP1=J+1
JM1=J-1
JO=JJ+1
JJ=JJ+J
J3=JJ-1

C   CALCUL DES FACTEURS DE COUPLAGE
FK=(VK(IJ)*VK(IJ))/(VK(II)*VK(JJ))
FM=(VM(IJ)*VM(IJ))/(VM(II)*VM(JJ))
IF(FK.LT.EPSD.AND.FM.LT.EPSD)GO TO 180

C   CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA TRASFORMATION
ITR=ITR+1
C1=VK(II)*VM(IJ)-VM(II)*VK(IJ)
C2=VK(JJ)*VM(IJ)-VM(JJ)*VK(IJ)
C3=VK(II)*VM(JJ)-VM(II)*VK(JJ)
DET=(C3*C3/QUATR)+(C1*C2)
IF(DET.GE.ZERO) GO TO 50
WRITE(7,2005) I,J
2005 FORMAT(' ** ERREUR,TRANSFORMATION DE JACOBI SINGULIERE I=',IS,
1 ' J=',IS)
STOP
50 DET=SQRT(DET)
D1=C3/DEUX+DET
D2=C3/DEUX-DET
D=D1
IF(ABS(D2).GT.ABS(D1))D=D2
IF(D.EQ.ZERO)GO TO 60
A=C2/D
B=-C1/D
GO TO 65
60 A=ZERO
B=-VK(IJ)/VK(JJ)
C   MODIFIER LES COLONNES DE K ET M
65 IF(I.EQ.1) GO TO 80
IK= IO
J1=IJ-1
DO 70 JK=JC,J1

```



```

C1=VK(IK)
C2=VK(JK)
VK(IK)=C1+B*C2
VK(JK)=C2+A*C1
C1=VM(IK)
C2=VM(JK)
VM(IK)=C1+B*C2
VM(JK)=C2+A*C1

```

```

70  IK=IK+1
80  IF(I.EQ.JM1) GO TO 100
    IK=II+I
    J2=IJ+1
    IM=I
    DO 90 JK=J2,J3
    C1=VK(IK)
    C2=VK(JK)
    VK(IK)=C1+B*C2
    VK(JK)=C2+A*C1
    C1=VM(IK)
    C2=VM(JK)
    VM(IK)=C1+B*C2
    VM(JK)=C2+A*C1
    IM=IM+1
90  IK=IK+IM
100 IF(J.EQ.NP) GO TO 120
    IK=IJ+J
    JK=JJ+J
    IM=J
    DO 110 JJK=JP1,NP
    C1=VK(IK)
    C2=VK(JK)
    VK(IK)=C1+B*C2
    VK(JK)=C2+A*C1
    C1=VM(IK)
    C2=VM(JK)
    VM(IK)=C1+B*C2
    VM(JK)=C2+A*C1
    IM=IM+1
110 IK=IK+IM
    JK=JK+IM
120 C1=VK(II)
    C2=VK(IJ)
    C3=VK(JJ)
    B2=B*B
    BB=DEUX*B
    A2=A*A
    AA=DEUX*A
    VK(II)=C1+BB*C2+B2*C3
    VK(IJ)=ZERC
    VK(JJ)=C3+AA*C2+A2*C1
    C1=VM(II)
    C2=VM(IJ)
    C3=VM(JJ)
    VM(II)=C1+BB*C2+B2*C3
    VM(IJ)=ZERC
    VM(JJ)=C3+AA*C2+A2*C1

```

```

C      METTRE A JOUR LES VECTEURS PROPRES
DO 170 IJ1=1,NP
C1=VECT(IJ1,I)
C2=VECT(IJ1,J)
VECT(IJ1,I)=C1+B*C2
170  VECT(IJ1,J)=C2+A*C1
180  IJ=IJ+J
C      METTRE A JOUR LES VALEURS PROPRES
II=0
DO 190 I=1,NP
II=II+I
IF(VK(II).GT.ZERO.AND.VM(II).GT.ZERO) GO TO 190
WRITE(7,2000) I
STOP

190  VALP(I)=VK(II)/VM(II)
WRITE(7,2010) IC,(VALP(I),I=1,NP)
2010  FORMAT(/' VALEURS PROPRES, CYCLE ',I4/(1X,10E12.5))
C      TEST DE CONVERGENCE DES VALEURS PROPRES
DO 200 I=1,NP
IF(ABS(VALP(I)-VALPO(I)).GT.(EPS*VALPO(I))) GO TO 230
200  CONTINUE
C      TEST DE CONVERGENCE SUR LES TERMES NON DIAGONAUX
JJ=1
DO 210 J=2,NP
JJ=JJ+J
JM1=J-1
II=0
DO 210 I=1,JM1
II=II+I
IJ=JJ-J+I
FK=VK(IJ)*VK(IJ)/(VK(II)*VK(JJ))
FM=VM(IJ)*VM(IJ)/(VM(II)*VM(JJ))
IF(FK.GT.EPS2.OR.FM.GT.EPS2) GO TO 230
210  CONTINUE
C      NORMALISER LES VECTEURS PROPRES
JJ=0
DO 220 J=1,NP
JJ=JJ+J
C1=SQRT(VM(JJ))
DO 220 I=1,NP
220  VECT(I,J)=VECT(I,J)/C1

C      CONVERGENCE ATTEINTE
WRITE(7,2020) IC,ITR
2020  FORMAT(15X,'CONVERGENCE EN',I4,'CYCLES ET',I5,'TRANSFORMATIONS
1DANS JACOBI')
GO TO 32

```



```
.....  
C          RECOPIER VALP DANS VALPO  
130      DO 240 I=1,NP  
240      VALPO(I)=VALP(I)  
250      CONTINUE  
C          NON CONVERGENCE  
WRITE(7,2030) NCYM  
2030      FORMAT('**ERREUR, NON CONVERGENCE DANS JACOBI EN',I4,' CYCLES')  
34      DO 31 I=1,NP  
        DO 31 J=1,NP  
  
PRINT*, 'VALEUR PROPRE (' ,I,')', VALP(I)  
WRITE(7,*) 'VALEUR PROPRE (' ,I,')', VALP(I)  
PRINT*, 'VALPO', VALPO(I)  
PRINT*, 'VECTEUR PROPRE (' ,I,J,')', VECT(I,J)  
WRITE(7,*) 'VECTEUR PROPRE (' ,I,J,')', VECT(I,J)  
31      CONTINUE  
        STOP  
        END
```


C CONTROLE D'ENTREE DE DONNEES

C
104 IF(X(I).EQ.X(J).AND.Y(I).EQ.Y(J)) GOTO 105

J=J+1
IF(J.LE.L) GOTO 104
GOTO 20

105 PRINT 106

106 FORMAT (1X, 'CE NOEUD A DEJA ETE DONNE')

GOTO 107

20 CONTINUE

WRITE(17,89)

FORMAT(5X,5HNOEUD,16X,11HCOORD-X(CM),11X,11HCOORD-Y(CM))

DO 35 I=1,NN

WRITE(17,84)I,X(I),Y(I)

FORMAT(5X,I3,15X,E14.4,8X,E14.4)

WRITE(17,*) ' LES POINTS DE CONNECTIONS DES ELEMENTS'

WRITE(17,*) ' ELEMENT CON(I) CON(J)

C ----- LECTURE DES CONNECTIONS I ET J DES BARRES ET LA SECTION A

DO 30 K=1,NB

C ----- DONNER I=?, J=?, A=?

READ(16,7)NC(1,K),NC(2,K),A(K)

FORMAT(2(I3),E14.6)

WRITE(17,91)K,NC(1,K),NC(2,K)

FORMAT(7X,I3,10X,I3,9X,I3)

I=NC(1,K)

J=NC(2,K)

C CALCUL DE L'ANGLE D'INCLINAISON DE LA BARRE " TETA "

AA=X(I)-X(J)

BB=Y(I)-Y(J)

XL(K)=SQRT(AA*AA+BB*BB)

PRINT 302,K,XL(K)

302 FORMAT(1X,'XL(',I3,')=',E14.6)

IF(X(J)-X(I)) 25,28,26

25 TETA=ATAN((Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I)))+PI

GOTO 27

28 IF(Y(J).GT.Y(I)) GOTO 301

TETA=-DEMIPI

GOTO 27

26 TETA=ATAN((Y(J)-Y(I))/(X(J)-X(I)))

GOTO 27

301 TETA=DEMIPI

27 TETA1(K)=TETA

PRINT 300,K,TETA

300 FORMAT(1X,'TETA(',I3,')=',E14.6)

30 CONTINUE

077 DO 40 K=1,NB

-----CONSTRUCTION DE LA TABLE DE LOCALISATION

J=0

-----BOUCLE SUR LES NNEL NOEUDS DE L'ELEMENT

DO 9 IN=1,NNEL

IDO=(NC(IN,K)-1)*NDLN

-----BOUCLE SUR LES NDLN DEGRES DE LIBERTES

DO 9 ID=1,NDLN

J=J+1

KLOC(J)=ID+IDO

CONTINUE

----- CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE EN TENANT
 COMPTE DE LA MATRICE DE TRANSFORMATION (ROTATION) [R]
 TELQUE [K]E =[R]T * [K] * [R]

EI= E*ZI

----- INITIALISER VKE

DO 310 I1=1,6

DO 310 J1=1,6

310 VKE(I1,J1)=ZERO

I=NC(1,K)

J=NC(2,K)

AA1=X(J)-X(I)

BB1=Y(J)-Y(I)

AA=AA1/XL(K)

BB=BB1/XL(K)

A1=A(K)

XL2(K)=XL(K)*XL(K)

XL3(K)=XL(K)*XL2(K)

VKE(1,1)=(12.*EI*BB*BB/XL3(K))+E*A1*AA*AA/XL(K)

VKE(1,2)=((E*A1/XL(K))-12.*EI/XL3(K))*AA*BB

VKE(2,2)=((E*A1*BB*BB/XL2(K))+12.*EI*AA*AA/XL3(K))

VKE(3,1)=-6.*EI*BB/XL2(K)

VKE(3,2)=6.*EI*AA/XL2(K)

VKE(3,3)=4.*EI/XL2(K)

VKE(4,1)=-((12.*EI*BB*BB/XL3(K))+(E*A1*AA*AA/XL(K)))

VKE(4,2)=((12.*EI/XL3(K))-E*A1/XL(K))*AA*BB

VKE(4,3)=6.*EI*BB/XL2(K)

VKE(4,4)=((12.*EI*BB*BB/XL3(K))+(E*A1*AA*AA/XL(K)))

VKE(5,1)=((12.*EI/XL3(K))-E*A1/XL(K))*AA*BB

VKE(5,2)=-((E*A1*BB*BB/XL(K))+12.*EI*AA*AA/XL3(K))

VKE(5,3)=-6.*EI*AA/XL2(K)

VKE(5,4)=((E*A1/XL(K))-12.*EI/XL3(K))*AA*BB

VKE(5,5)=((E*A1*BB*BB/XL(K))+12.*EI*AA*AA/XL3(K))

VKE(6,1)=-6.*EI*BB/XL2(K)

VKE(6,2)=6.*EI*AA/XL2(K)

VKE(6,3)=2.*EI/XL(K)

VKE(6,4)=6.*EI*BB/XL2(K)

VKE(6,5)=-6.*EI*AA/XL2(K)

VKE(6,6)=4.*EI/XL(K)


```

VKE(1,2)=VKE(2,1)
VKE(1,3)=VKE(3,1)
VKE(2,3)=VKE(3,2)
VKE(1,4)=VKE(4,1)
VKE(1,5)=VKE(5,1)
VKE(1,6)=VKE(6,1)
VKE(2,4)=VKE(4,2)
VKE(2,5)=VKE(5,2)
VKE(2,6)=VKE(6,2)
VKE(3,4)=VKE(4,3)
VKE(3,5)=VKE(5,3)
VKE(3,6)=VKE(6,3)
VKE(4,5)=VKE(5,4)
VKE(4,6)=VKE(6,4)
VKE(5,6)=VKE(6,5)

```

```

C----- ASSEMBLAGE DES MATRICES RIDITES ELEMENTAIRES / GLOBALE
C
C
C
DO 11 ID=1,NDLE

```

```

I=KLOCCE(ID)
DO 11 JD=1,NDLE
J=KLOCCE(JD)
11 VKG(I,J)=VKG(I,J)+VKE(ID,JD)

```

```

C----- # CLALCUL DE LA MATRICE MASSE GLOBALE #
C
C
C

```

```

C----- CALCUL DE LA MATRICE MASSE ELEMENTAIRE EN TENANT
C          COMPTE DE LA MATRICE DE TRANSFORMATION (ROTATION) [R]
C          TELQUE [M]E =[R]T * [M] * [R]
C
C
C

```

```

I=NC(1,K)
J=NC(2,K)
VME(1,1)=RO*A1*XL(K)*((13.*BB*BB/35.))+AA*AA/3.)
VME(1,2)=-4.*RO*A1*XL(K)*AA*BB/105.
VME(2,2)=RO*A1*XL(K)*((13.*AA*AA/35.))+BB*BB/3.)
VME(3,1)=-11.*RO*A1*XL2(K)*BB/210.
VME(3,2)=11.*RO*A1*XL2(K)*AA/210.
VME(3,3)=RO*A1*XL3(K)/105.
VME(4,1)=RO*A1*XL(K)*((9.*BB*BB/70.))+AA*AA/6.)
VME(4,2)=4.*RO*A1*XL(K)*AA*BB/105.
VME(4,3)=-13*RO*A1*XL2(K)*BB/420.
VME(4,4)=RO*A1*XL(K)*((13.*BB*BB/35.))+AA*AA/3.)
VME(5,1)=4.*RO*A1*XL(K)*AA*BB/105.
VME(5,2)=RO*A1*XL(K)*((9.*AA*AA/70.))+BB*BB/6.)
VME(5,3)=13.*RO*A1*XL2(K)*AA/420.
VME(5,4)=-4.*RO*A1*XL(K)*AA*BB/105.
VME(5,5)=RO*A1*XL(K)*((13.*AA*AA/35.))+BB*BB/3.)
VME(6,1)=13.*RO*A1*XL2(K)*BB/420.
VME(6,2)=-13.*RO*A1*XL2(K)*AA/420.
VME(6,3)=-RO*A1*XL3(K)/140.
VME(6,4)=11.*RO*A1*XL2(K)*BB/210.
VME(6,5)=-11.*RO*A1*XL2(K)*AA/210.
VME(6,6)=RO*A1*XL3(K)/105.

```



```

VME(1,3)=VME(3,1)
VME(2,3)=VME(3,2)
VME(1,4)=VME(4,1)
VME(1,5)=VME(5,1)
VME(1,6)=VME(6,1)
VME(2,4)=VME(4,2)
VME(2,5)=VME(5,2)
VME(2,6)=VME(6,2)
VME(3,6)=VME(6,3)
VME(3,5)=VME(5,3)
VME(5,6)=VME(6,5)
VME(4,5)=VME(5,4)
VME(4,6)=VME(6,4)
VME(3,4)=VME(4,3)

```

-----ASSEMBLAGE DES MATRICES MASSES ELEMENTAIRES /GLOBALE

```

DO 101 ID=1,NDLE
I=KLOCCE(ID)
DO 101 JD=1,NDLE
J=KLOCCE(JD)
101 VMG(I,J)=VMG(I,J)+VME(ID,JD)
CONTINUE

```

..... CALCUL DE LA MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE / AUX CONDITIONS AUX LIMITES

```

PRINT 253
253 FORMAT(1X,'LECTURE DE NOMBRE DE CONDITIONS AUX LIMITES NULLES?')
READ(16,254)NCL
254 FORMAT(I3)
DO 255 I=1,NEQ
LC(I)=I
255 CONTINUE
DO 258 K=1,NCL
PRINT 256
256 FORMAT(1X,'INDICE DE LA CONDITION IMPOSE NUL I ?')
READ(16,257)I
257 FORMAT(I3)
LC(I)=0
258 CONTINUE
II=0
JJ=0
DO 400 I=1,NEQ
IF(LC(I).EQ.ZERO) GO TO 400
II=II+1
DO 415 J=I,NEQ
IF(LC(J).EQ.ZERO) GO TO 415
JJ=JJ+1
VKG(II,JJ)=VKG(I,J)
VMG(II,JJ)=VMG(I,J)
415 CONTINUE
400 CONTINUE

```


C ----- NOMBRE DE DEGRES DE LIBERTES NON NULS NDOF
C

```
NDOF=NEQ-NCL
II=0
DO 24 J1=1,NDOF
DO 24 I1=1,J1
II=II+1
VK(II)=VKG(I1,J1)
VM(II)=VMG(I1,J1)
CONTINUE
NCYM=12
EPS=1.0-12
```

C *****

C CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES DE K-LAMBDA.M PAR LA
C METHODE GENERALE DE JACCOBI.
C ENTREES

C VK MATRICE K (TRIANGLE SUPERIEUR PAR COLONNES
C DESCENDANTES)
C VM MATRICE M (TRIANGLE SUPERIEUR PAR COLONNES
C DESCENDANTES)
C NDOF DIMENSION DES MATRICES K ET M
C NCYM NOMBRE DE CYCLES MAXIMUM (15)
C EPS PRECISION REQUISE (1.0-12)
C TRAVAIL
C VALPO TABLE DE TRAVAIL DE DIMENSION NDOF
C SORTIES
C VALP VALEURS PROPRES
C VECT VECTEURS PROPRES

C =====

```
EPS2=EPS*EPS
ITR=0
```

C VERIFIER QUE LES TERMES DIAGONAUX SONT POSITIFS, ET
C INITIALISER LES VALEURS PROPRES

```
II=0
DO 22 I=1,NDOF
II=II+1
IF(VK(II).GT.ZERO.AND.VM(II).GT.ZERO) GO TO 12
WRITE(17,2000) I
```

2000 FORMAT(' **ERREUR, TERME DIAGONAL NEGATIF, DANS JACCOBI, LIGNE',
1 I3)

```
STOP
12 VALP(I)=VK(II)/VM(II)
```

```
22 VALPO(I)=VALP(I)
```

C INITIALISER LES VALEURS PROPRES

```
DO 44 I=1,NDOF
DO 34 J=1,NDOF
34 VECT(I,J)=ZERO
44 VECT(I,I)=UN
```



```

C      POUR CHAQUE CYCLE
DO 250 IC=1,NCYM
C      TOLERANCE DYNAMIQUE
EPSD=EPSDD**IC
C      BALAYAGE DU TRIANGLE SUPERIEUR PAR LIGNES
IMAX=NDOF-1
II=0
DO 180 I=1,IMAX
IO=II+1
II=II+I
IP1=I+1
IJ=II+I
JJ=II
DO 180 J=IP1,NDOF
JP1=J+1
JM1=J-1
JO=JJ+1
JJ=JJ+J
J3=JJ-1

```

CALCUL DES FACTEURS DE COUPLAGE

```

FK=(VK(IJ)*VK(IJ))/(VK(II)*VK(JJ))
FM=(VM(IJ)*VM(IJ))/(VM(II)*VM(JJ))
IF(FK.LT.EPSD.AND.FM.LT.EPSD)GO TO 180

```

CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA TRASFORMATION

```

ITR=ITR+1
C1=VK(II)*VM(IJ)-VM(II)*VK(IJ)
C2=VK(JJ)*VM(IJ)-VM(JJ)*VK(IJ)
C3=VK(II)*VM(JJ)-VM(II)*VK(JJ)
CC1=(C3/1.E20)*C3
CC2=(C1/1.E20)*C2
DET=(CC1/4.)+CC2
IF(DET.GE.ZERO) GO TO 50

```

```

2005 WRITE(17,2005) I,J
1   FORMAT(' ** ERREUR,TRANSFORMATION DE JACOBI SINGULIERE I=',I5,
          ' J=',I5)

```

```

STOP
50  DET=1.E10*SQRT(DET)
    D1=C3/DEUX+DET
    D2=C3/DEUX-DET
    D=D1

```

```

IF(ABS(D2).GT.ABS(D1))D=D2
IF(D.EQ.ZERO)GO TO 60

```

```

A2=C2/D
B=-C1/D
GO TO 65

```

```

60  A2=ZERO
    B=-VK(IJ)/VK(JJ)

```

MODIFIER LES COLONNES DE K ET M

```

65  IF(I.EQ.1) GO TO 80
    IK= IO

```



```

J1=IJ-1
DO 70 JK=J0,J1
C1=VK(IK)
C2=VK(JK)
VK(IK)=C1+B*C2
VK(JK)=C2+A2*C1
C1=VM(IK)
C2=VM(JK)
VM(IK)=C1+B*C2
VM(JK)=C2+A2*C1

70  IK=IK+1
80  IF(I.EQ.JM1) GO TO 100
    IK=II+I
    J2=IJ+1
    IM=I
    DO 90 JK=J2,J3
    C1=VK(IK)
    C2=VK(JK)
    VK(IK)=C1+B*C2
    VK(JK)=C2+A2*C1
    C1=VM(IK)
    C2=VM(JK)
    VM(IK)=C1+B*C2
    VM(JK)=C2+A2*C1
    IM=IM+1
90  IK=IK+IM
100 IF(J.EQ.NDOF) GO TO 120
    IK=IJ+J
    JK=JJ+J
    IM=J
    DO 110 JJK=JP1,NDOF
    C1=VK(IK)
    C2=VK(JK)
    VK(IK)=C1+B*C2
    VK(JK)=C2+A2*C1
    C1=VM(IK)
    C2=VM(JK)
    VM(IK)=C1+B*C2
    VM(JK)=C2+A2*C1
    IM=IM+1
    IK=IK+IM
110 JK=JK+IM
120 C1=VK(II)
    C2=VK(IJ)
    C3=VK(JJ)

    B2=B*B
    BB=2*B
    A3=A2*A2
    AA1=2*A2
    VK(II)=ABS(C1+BB*C2+B2*C3)
    VK(IJ)=ZER
    VK(JJ)=ABS(C3+AA1*C2+A3*C1)
    C1=VM(II)

```

- BIBLIOGRAPHIE -

- 1 - M. ALBIGES , A. COIN , M. JOURNET
Etude des structures par les méthodes matricielles .
EYROLLES - Paris 1969
- 2 - PING-CHUN WANG
Calcul des structures par les méthodes numériques
et matricielles. , DUNOD - Paris 1969
- 3- R.W. CLOUGH , J. PENZIEN
Dynamique des structures, Tome 1, FLURALIS - 1980
- 4 - CH. MASSONNET , G. DEPEREZ
Calcul des structures sur ordinateur, Tome 1 et 2
EYROLLES - MASSON - Paris 1972
- 5- B. ASANCHEYEV
Calcul des structures en BASIC, EYROLLES - Paris 1984
- 6- GOURI DHATT , G. TOUZOT
Une présentation de la méthode des éléments finis, 2^e Ed
MALOINES.A - Paris 1984
- 7- M.C; ROCKEY , H.R. EVANS
Introduction à méthode des éléments finis, EYROLLES - Paris 1984
- 8- J.F. IMBERT
Analyse des structures par éléments finis, CEPADUES - Toulouse
1979
- 9- Cours de monsieur DAMOU , ENITA

