

15/87  
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

### SUJET

# **Etude de la Distribution Bidimensionnelle des Températures dans une Plaque Plane Finie**

Proposé par :

Mr Z. AIDOUN

Etudié par :

K. RAHMANI

Dirigé par :

Mr Z. AIDOUN

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacem Badi - EL-HARRACH — ALGER



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المكتبة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention d'un diplôme d'ingénieur d'Etat

### SUJET

**Etude de la Distribution  
Bidimensionnelle  
des Températures  
dans une Plaque Plane Finie**

Proposé par :

Mr Z. AIDOUN

Etudié par :

K. RAHMANI

Dirigé par :

Mr Z. AIDOUN

PROMOTION : JANVIER 1987

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - EL-HARRACH — ALGER

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المصطنبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

100

والله اعلم  
بما كنا  
نعم الله  
ومحمد  
صلى الله  
عليه  
وسلم

— صلوات الله على النبي الحبيب —

— صلوات الله على النبي الحبيب —

Ministère de l'enseignement supérieur  
Ecole nationale Polytechnique  
Département: Genie-Mécanique  
Promoteur: AIDOUN  
Élève Ingénieur: Rahmani-Kouider

وزارة التعليم العالي  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
إدارة: الميكانيكا  
المشرف: عيدون  
الطالب المهندس: رحمانى اقويدر

الموضوع: دراسة تغيرات درجات الحرارة على صفيحة مستوية  
للخلاصة :-

يهدف هذا المشروع إلى دراسة تغيرات درجات الحرارة على صفيحة مستوية وذلك انطلاقاً من المبادئ الأساسية للحرارة، ولهذا الغرض عملنا على إيجاد معادلة "لابلاس" التي تعطي تغيرات الحرارة على الصفيحة، وقد لجأنا إلى الطرق العددية لحل هذه المعادلة.

Sujet: Etude de la distribution bidimensionnelle des températures dans une plaque plane finie.

Resumé: Dans ce projet on se pose d'étudier la distribution de températures dans une plaque finie. A partir des notions fondamentales du transfert thermique dont l'essentiel est exposé dans ce projet on aboutit à l'équation de LAPLACE dont la solution donne la variation de température dans la plaque. Pour résoudre cette équation on a fait appel aux méthodes numériques.

Subject: A study of two dimensional temperature distribution in a finite plane surface.

Abstract: The purpose of this project is to determine the temperature distribution in finite plane surface. Using the fundamental principles of heat transfer of which a concise summary is given here we get the temperature distribution in the form of LAPLACE equation. To solve this equation recourse is made to numerical methods.

## ...{ REMERCIEMENTS }...

Ma reconnaissance et ma gratitude s'adressent à ALLAH le tout puissant.

Je réitere mes remerciements et ma reconnaissance à M<sup>r</sup> AIDOUN.Z ; Enseignant à L'E.N.P.A pour ses conseils et son suivi continu durant le long de mon travail.

A tous les professeurs et en particulier ceux du département de GENIE-MECANIQUE, qui ont contribué à ma formation d'ingénieur.

Enfin, je remercie, professeurs, collègues, amis qui m'ont apporté un soutien inestimable durant toute la durée de ma formation.

## —•— { DEDICACES } —•—

Je dedie ce modeste travail à :

- Mes parents , surtout ma mère
- Mes frères et sœurs
- Mes amis
- A tout ceux qui témoignent qu'il n'y a Dieu qu'ALLAH et MOHAMMED est son envoyé et son prophète.

TABLE DES MATIERES

	PAGE
Introduction.....	1
CHAPITRE I GENERALITES.....	3
I.1 - Conduction.....	6
I.2 - Loi fondamentale de la conduction.....	6
I.3 - Equation générale de la conduction.....	8
I.4 - Differents types de la conduction.....	9
I.4.1 - Conduction unidimensionnelle.....	10
I.4.2 - Conduction bidimensionnelle.....	10
I.4.3 - Conduction tridimensionnelle.....	12
CHAPITRE II POSITION DU PROBLEME.....	13
II.1 - Equation de la distribution de la température dans la plaque.....	14
CHAPITRE III METHODES NUMERIQUES.....	17
III.1 - Introduction.....	17
III.2 - Methodes numériques utilisées.....	17
III.3 - Methode de Southwell.....	18
III.3.1 - Application de la méthode.....	18
III.3.2 - Equation par nœud.....	19
III.3.3 - Equation des résidus.....	21
III.4 - Methode de Gauss-Seidel.....	22

III.5 - Méthode de Relaxation Successive .....	25
III.5.1 - Définition .....	25
III.5.2 - Principe .....	25
III.5.3 - Algorithmes .....	26
III.6 - Méthode de Gauss .....	27
CHAPITRE IV ECRITURE D'UN PROGRAMME	33
IV.1 - Etablissement des équations .....	34
IV.2 - Programme .....	37
IV.2.1 - Les données principales du programme ..	37
IV.2.2 - Structure du programme .....	38
IV.3 - Exemples .....	44
CHAPITRE V DISCUSSION .....	46
V.1 - Introduction .....	46
V.2 - Le programme .....	46
V.3 - Procédure utilisée dans le programme ..	48
CONCLUSION .....	51
ANNEXE .....	52

## NOTATIONS UTILISEES

SYMBOLES	UNITES
$q$ : Flux de chaleur	W
$T$ : Temperature	$^{\circ}\text{C}$
$\rho$ : Masse volumique	$\text{kg}/\text{m}^3$
$c$ : Chaleur spécifique	$\text{Kcal}/\text{kg}^{\circ}\text{C}$
$\theta$ : Temps	s
$k$ : Conductivité thermique	$\text{W}/\text{mk}$
$A$ : Surface d'échange	$\text{m}^2$

## INTRODUCTION

Les lois de la transmission de la chaleur sont d'une importance déterminante pour l'étude et le fonctionnement de nombreuses formes de générateurs de chaleur, de fours, de réchauffeurs, d'échangeurs et de condenseurs utilisés communément dans l'industrie.

C'est ainsi que dans ce projet nous nous proposons d'étudier la distribution de température dans une plaque comme étant un cas simple du transfert de chaleur pouvant avoir lieu dans chacun de ces appareils.

Dans l'étude de la distribution des températures, le succès de la solution du problème dépend des hypothèses et des simplifications consenties.

Il est presque impossible de décrire parfaitement un phénomène physique, et, quelques approximations sont nécessaires pour mettre un problème sous forme d'équations pouvant être résolues.

De ce fait, nous allons exposer les notions de conduction de façon générale, et à partir de ces notions fondamentales nous allons établir une équation qui donne la distribution de température dans la plaque considérée.

Cette équation pourra alors être traitée par des méthodes analytiques ou numériques selon le cas.

L'approche analytique est recommandée pour les problèmes relatifs aux systèmes dont la forme géométrique et les conditions aux limites sont simples.

Toutefois lorsque la forme géométrique ou les conditions aux limites sont complexes, la méthode analytique devient trop compliquée. Dans tels cas, recours est fait habituellement aux méthodes numériques dont les solutions sans pour autant être exactes peuvent avoir un degré de précision fixé au préalable.

# GENERALITES

IL n'y a pas tellement longtemps, que l'étude systématique de transmission de la chaleur, autant que telle, n'existait pas.

Au paravant, ce n'est qu'à l'occasion de l'étude des chaudières, de fours, des chauffages et des ventilations, qu'a été abordée le transfert thermique. Avec le développement prodigieux des techniques modernes, le champs d'application du problème de transfert thermique c'est considérablement étendu.

Le transfert de chaleur peut être défini comme la transmission de l'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température.

Comme les écarts de températures existent dans tout l'univers, les phénomènes d'écoulement de chaleur sont aussi universels que ceux associés aux attractions de gravitation. Cependant, contrairement à la pesanteur, l'écoulement de chaleur est régi non seulement par une relation

Unique, mais plutôt par une combinaison de différentes lois physiques indépendantes.

On distingue généralement trois modes de transmission de la chaleur :-

- Conduction
- Convection
- Rayonnement

#### 1. Conduction :

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu (solide, liquide, gaz), ou encore deux milieux mis en contact, il n'y a pas de déplacement appréciable des molécules.

#### 2 - Convection :

La convection implique le transport de la chaleur par le mélange d'une partie d'un fluide avec une autre partie de ce dernier. Le mouvement du fluide peut être entièrement dû à la différence de densité résultant des différences de température ou être produit

par des moyens mécaniques.

L'énergie est aussi transportée simultanément par conduction moléculaire et, pour les milieux transparents par rayonnement.

### 3. Rayonnement :

Le rayonnement est le mécanisme par lequel la chaleur se transmet d'un corps à haute température vers un autre à basse température, lorsque ces corps sont séparés dans l'espace ou même lorsqu'un vide existe entre eux.

Le terme « Rayonnement » est généralement appliqué à toutes sortes de phénomènes d'onde électromagnétique, mais dans la transmission de chaleur les seuls phénomènes qui ont de l'intérêt sont ceux qui résultent d'une différence de température et qui peuvent transporter de l'énergie à travers un milieu transparent ou à travers l'espace.

Dans plusieurs cas se présentant dans la nature, l'attention sera portée sur le fait que non seulement un seul, mais plusieurs mécanismes sont mis simultanément en jeu.

## I-1- Conduction ..

Le mode le plus rencontré dans l'industrie est la conduction, car celle-ci est définie comme l'écoulement de la chaleur à l'intérieur d'un milieu (solide, liquide, ou gaz) d'une région à haute température vers une autre à basse température ou différents milieux mis en contact sans déplacement appréciable des particules.

La conduction implique le transfert d'énergie cinétique d'une molécule à une autre molécule adjacente, c'est le seul mécanisme d'écoulement calorifique dans un solide opaque.

Pour certains solides transparents tels le verre et le quartz une partie de l'énergie est transmise par rayonnement aussi bien que par conduction, avec les gaz et les liquides la convection et le rayonnement peuvent s'ajouter à la conduction.

## I.2 Loi Fondamentale de la Conduction.

En régime permanent, le mécanisme de transmission

de la chaleur par conduction dans une seule direction est donné par la relation simple de Fourier :

$$q = -KA \frac{dT}{dx}$$

$q$  : étant la quantité de chaleur s'écoulant dans la direction de l'axe des  $x$ .

$A$  : l'aire de la section à travers laquelle s'écoule la chaleur par conduction, cette section étant mesurée perpendiculairement à la direction du flux thermique.

$K$  : conductivité thermique du matériau, qui peut varier d'un point à l'autre d'un corps, soit directement dans les solides non homogènes  $K = K(x, y, z)$ , soit indirectement à travers la température  $K = K(T)$ .

$-\frac{dT}{dx}$  = le gradient thermique le long du trajet parcouru par ce flux calorifique.

Nous conviendrons que le sens des  $x$  croissant serait le sens positif de l'écoulement de chaleur, en outre, comme le deuxième principe de la thermodynamique implique, que la chaleur s'écoule des points les plus chauds vers les points les plus froids, le flux serait donc

positif lorsque le gradient de température est négatif.

### I-3- L'équation Générale de la Conduction.

L'équation complète exprimant la continuité de l'écoulement de la chaleur à travers un solide s'écrit:-

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_i = \rho c \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (1.1)$$

L'obtention de cette équation repose sur trois hypothèses:

- les échanges de chaleur ne produisent que des variations de température.
- l'hypothèse de FOURIER, qui peut s'écrire:-

$$q = -kA \frac{\partial T}{\partial x}$$

- dans le cas où le système, ou une partie de celui-ci est composée par un fluide, ce dernier ne subira pas de mouvement spontané de la chaleur.

Le terme  $q_i$  est la quantité de chaleur produite par l'unité de volume et par unité de temps en tout point du système, par des sources

de chaleur internes .

La conductivité thermique  $-k-$  est une caractéristique locale du matériau considéré .

Elle s'exprime en  $\text{Watt}/\text{m}\cdot\text{K}$  et varie essentiellement avec la température .

Dans certains corps anisotropiques (comme le bois)  $k$  dépend de la direction .

- Si le système ne contient pas de source, l'équation -1.1- se réduit à l'équation de Fourier pour un corps homogène :-

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{k} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \quad (1.2)$$

Dans le cas d'un régime permanent et en absence de sources de chaleur, la répartition des températures pour un corps homogène doit satisfaire à l'équation de LAPLACE :-

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.3)$$

#### I.4 Différents Types de la Conduction .

Dans la pratique, on rencontre plusieurs cas de conduction tels que la conduction unidimensionnelle, bidimensionnelle et

tridimensionnelle, selon ces cas la température et le flux de chaleur varient en fonction de la géométrie.

#### I-4-1. Conduction Unidimensionnelle :-

Dans ce type de conduction le flux de chaleur se propage dans une seule direction, et la température ne varie que selon l'axe "Ox", Comme le montre l'équation suivante:-

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (1.4)$$

Le calcul du flux de chaleur se calcule selon la Loi de Fourier :

$$q = -KA \frac{dT}{dx}$$

Le cas le plus simple de l'écoulement de chaleur unidimensionnelle est la conduction à travers un mur plan, des cylindres creux et infinis .. etc...

#### I-4-2 - Conduction Bidimensionnelle :-

Le flux de chaleur se propage

dans deux directions:-

- L'une suivant l'axe "x", alors l'équation du flux de chaleur s'écrit:-

$$q_x = -KA_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

- L'autre suivant l'axe "y": l'équation du flux de chaleur est: Voir Fig-I.1

$$q_y = -KA_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

- La température aussi, varie en fonction de x, y c'est à dire  $T = T(x, y)$  d'où l'équation de LAPLACE:-

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

le Flux résultant:

$$\vec{q} = \vec{q}_x + \vec{q}_y$$

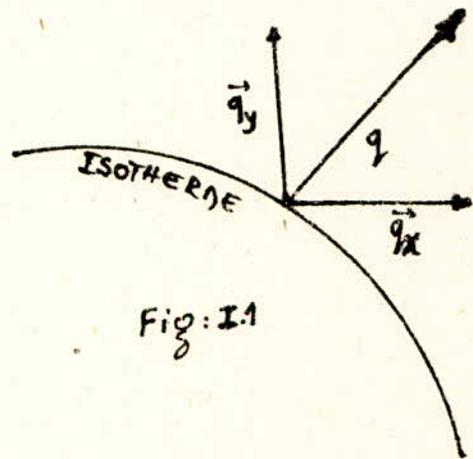


Fig: I.1

On peut prendre, comme exemple :

les parois d'un cylindre creux de faible hauteur,  
ou la conduction à travers une surface formée  
par l'intersection de deux murs ..etc...

### I-4.3 Conduction Tri-dimensionnelle

La température varie suivant trois directions  $x$ ,  $y$  et  $z$  et de même pour le flux de chaleur.

d'où l'équation de Laplace s'écrit:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (1.6)$$

Comme exemple illustrant le 3<sup>e</sup> cas de conduction, on distingue entre autre la conduction de chaleur à travers une surface formée par l'intersection de trois murs.

## II. POSITION DU PROBLEME

Notre problème consiste à déterminer la distribution des températures dans une plaque plane finie.

Différentes configurations peuvent être choisies. Entre autre la plaque peut être prise pleine ou creuse avec des géométries variées.

Ici considérons un cas intermédiaire où la plaque est carrée (ou rectangulaire) avec une cavité de forme géométrique simple (carrée ou rectangle).

Les hypothèses considérées dans notre étude sont les suivantes:

- 1 - les températures aux frontières extérieures ainsi qu'au centre de la plaque sont constantes et connues.
- 2 - les deux autres modes de transmission (rayonnement et convection) sont négligés

## II-1. Equation de la Distribution de la Température dans la Plaque.

Considérons une plaque percée à l'intérieur, celle-ci est dépourvue de sources de chaleur fig:II-1. On désigne par  $\Gamma_i$  = le contour interne de la plaque  
 $\Gamma_e$  = le contour externe de la plaque.

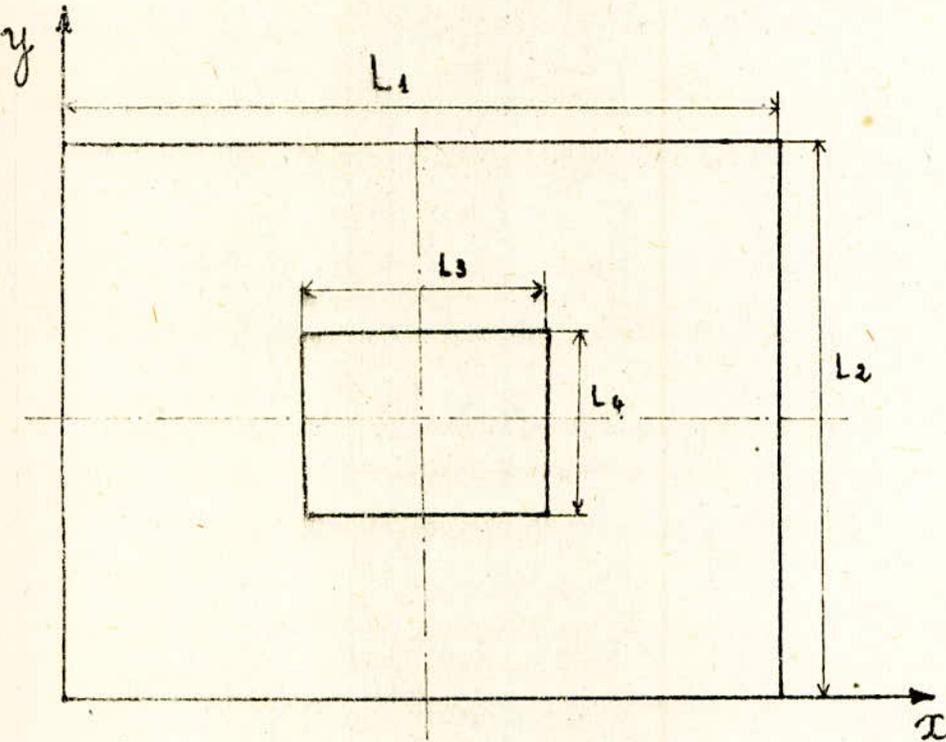


Fig: II-1-

les dimensions de la plaque sont :

$L_1$  : La longueur de la plaque

$L_2$  : La largeur de la plaque

$L_3$  : La longueur de la cavité

$L_4$  : La largeur de la cavité .

En désignant par  $e$  : l'épaisseur de la plaque

Les conditions aux limites sont :

$$T(x, y) = T_i \quad \text{sur le contour } \Gamma_i$$

$$T(x, y) = T_e \quad \text{sur le contour } \Gamma_e$$

Pour une plaque finie  $\frac{\partial T}{\partial z}$  est négligeable et la température est alors fonction de  $x, y$  c'est à dire  $T = T(x, y)$ .

Si, en outre, la conductivité thermique  $K$  est uniforme, la répartition de températures dans la plaque doit satisfaire à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

Quant au flux de chaleur, il se propage dans deux directions :

- L'une suivant l'axe  $-ox-$ , correspondant à l'équation de Fourier :

$$q_x = -K A_x \frac{\partial T}{\partial x}$$

- L'autre suivant l'axe  $-oy-$  son équation est :

$$q_y = -K A_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

La solution de l'équation 2.1 peut se faire par plusieurs méthodes mathématiques.

Les plus convenables parmi celles-ci sont :

- la méthode numérique

- la méthode analytique, cependant, cette dernière ne peut pas être utilisée dans notre cas, car les conditions aux limites du système à étudier ne nous permettent pas d'obtenir des équations suffisamment simples à traiter analytiquement par conséquent on est contraint de tenter de résoudre ce problème en passant par le biais des méthodes numériques.

### III METHODES NUMERIQUES

#### III-1 Introduction:-

Compte tenu de ce qui précède la solution du problème qu'on se propose de résoudre doit faire appel aux méthodes du calcul numérique. Les méthodes analytiques sont de façon générale, restreintes à des géométries et à des conditions aux limites relativement simples.

Souvent dans les cas complexes, on a recours aux méthodes numériques qui permettent de résoudre de façon approchée (mais le plus souvent avec le degré de précision qu'on s'est choisi au préalable) un nombre beaucoup plus grand de problèmes de conduction. Ceci est rendu possible par les progrès enregistrés dans le domaine de l'informatique.

#### III-2 Méthodes Numériques Utilisées.

Il existe plusieurs méthodes permettant de résoudre des systèmes composés d'un grand nombre d'équations. Les méthodes les plus couramment utilisées pour résoudre le problème de conduction sont:

a) Méthode de Southwell :

Relaxation ...

b) Méthodes Indirectes :

Gauss-Seidel

Relaxation Successive etc....

c) Méthodes Directes :

Elimination de Gauss

Gauss-Jordan etc....

### III-3 Méthode de Southwell

La méthode de Southwell ou de Relaxation est une méthode numérique, qui sert à résoudre un système d'équations algébriques ou une équation différentielle telle que :

L'équation de conduction de la chaleur.

Elle était employée par sir Southwell pour résoudre les problèmes des ossatures, depuis ce temps, elle est devenue un outil puissant de plusieurs autres types de problèmes techniques.

#### III-3.1 Application de la Méthode :

La méthode consiste à diviser le système en un nombre de nœuds, en chacun des nœuds s'applique

une équation algébrique obtenue en effectuant :

a) Bilan thermique ..

b) Méthode des différences finies .

On obtient ainsi pour  $N$  nœuds,  $N$  systèmes de  $N$  équations algébriques - Ceci pour les nœuds intérieurs. Pour les nœuds situés sur les frontières, on applique une équation algébrique qui tient compte des conditions aux limites .

### III-3-2 Équation par Nœud

Considérons un solide à deux dimensions, sans source, et dont la température  $T = T(x, y)$  satisfait à l'équation de Laplace :-

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3-1)$$

En utilisant les différences finies - l'équation 3-1 s'écrit :

$$\frac{\Delta^2 T}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta^2 T}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (3-2)$$

Le premier terme de : 3-2 vaut :

$$\left( \frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_j = \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}$$

et :

$$\Delta \frac{(\Delta T / \Delta x)_j}{\Delta x} = \frac{(T_{i-1,j} - T_{ij}) - (T_{ij} - T_{i+1,j})}{(\Delta x)^2} \quad (3-3)$$

Le second terme de 3-2 vaut :

$$\left( \frac{\Delta T}{\Delta y} \right)_i = \frac{(T_{i,j-1} - T_{ij})}{\Delta y}$$

et :

$$\Delta \frac{(\Delta T / \Delta y)_i}{\Delta y} = \frac{(T_{i,j-1} - T_{ij}) - (T_{ij} - T_{i,j+1})}{(\Delta y)^2} \quad (3-4)$$

D'où en ajoutant terme à terme :

$$\frac{\Delta^2 T}{(\Delta x)^2} + \frac{\Delta^2 T}{(\Delta y)^2} = \frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{ij}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 2T_{ij}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (3-5)$$

Si, on choisit  $(\Delta x = \Delta y)$ , l'équation 3-5 s'écrit :

$$T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 4T_{ij} = 0 \quad (3-6)$$

Si, on utilise la méthode du bilan thermique, on trouve la même que l'équation 3-5, mais la première se complique lorsque se présente des difficultés telle que :

- Un nœud aux frontières.
- Un nœud sur une frontière courbe, etc....

### III-3.3 . Equation des Résidus :

En écrivant 3.6 sous la forme 3.7 on peut faire correspondre à chaque nœud intérieur du solide, une relation telle que 3.7, qui doit être satisfaite par la température du nœud en question et par celle des quatre nœuds voisins.

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij} = R_{ij} = 0 \quad (3.7)$$

d'où le but final de la méthode est de "relaxer", c'est à dire de rendre le résidu  $R_{ij}$  nul, ou à peu près nul, en tout point, simultanément.

En pratique, le procédé se déroulera comme suit:

- a) En attribuant à chaque nœud une température initiale.
- b) Calculons le résidu en chaque nœud au moyen de l'équation (3.7).
- c) Le nœud qui a le plus grand résidu en valeur absolue, se verra attribuer une nouvelle température de façon que son résidu devienne nul, ou à peu près nul.
- d) On refait le calcul pour tous les nœuds en tenant compte du changement de température.

On s'arrêtera en principe quand le plus grand résidu de tout les points du système devient nul, ou à peu près nul, remarquons que pour un nœud intérieur, un résidu égal à 4 signifie une erreur en température égale à 1° seulement.

### III.4 Méthode de Gauss-Seidel

Dans les méthodes où de nombreux éléments matriciels sont nuls.

C'est souvent le cas en conduction, on peut utiliser les méthodes itératives (GAUSS-SEIDEL, NEWTON....)

Dans la méthode de GAUSS-SEIDEL, on part d'une solution approchée estimée aux mieux, et on répète un certain nombre de cycles de calcul, jusqu'au moment où on obtient la précision qu'on désire obtenir.

A titre indicatif, nous allons illustrer cette méthode par un exemple simple.

Considérons le système suivant:-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad (a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad (b)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad (c)$$

(3,8)

De ces trois équations, on tire l'expression de

$x_1, x_2, x_3$  :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3] \quad (a)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3] \quad (b) \quad 3.9$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2] \quad (c)$$

On suppose que  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  différents de zéro pour assurer la convergence de l'algorithme de GAUSS-SEIDEL, quelles que soient les valeurs choisies pour l'approximation initiale  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$

Dans le cas général d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues pour le système.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

la méthode de GAUSS-SEIDEL converge vers la solution unique de ce système, quelque soit le choix de l'approximation initiale, si les inégalités.

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|; \quad [i=1, 2, \dots, n] \text{ soit vérifiées}$$

pour tout  $i$  fixe.

Si cette condition n'est pas remplie, on permute de lignes ou de colonnes de façon à installer

les plus grands éléments en valeur absolue sur la diagonale.

On choisit arbitrairement des valeurs initiales  $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ . On porte ces valeurs dans 3.9.a

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12} x_2^{(0)} - a_{13} x_3^{(0)}]$$

puis, on porte  $x_1^{(1)}$  dans 3.9.b

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21} x_1^{(1)} - a_{23} x_3^{(0)}]$$

et enfin, on porte  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$  dans 3.9.c

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31} x_1^{(1)} - a_{32} x_2^{(1)}]$$

Jusqu'ici on a effectué une première itération, on recommence en prenant  $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$  comme valeurs pour  $x_1, x_2, x_3$  et on continue le processus jusqu'à ce que.

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$$

$k$ : le nombre d'itérations

C'est à dire les deux dernières valeurs de  $x_i$  ne diffèrent plus d'une certaine  $\varepsilon$  (supposons que  $\varepsilon = 0,001$ ). Si on prend des approximations plus proches de la solution, la convergence sera plus rapide.

### III-5 Méthode de Relaxation Successive

#### III-5-1 Définition:

Dans un procédé qui fait passer d'un vecteur estimé  $X^{(k)}$  à l'estimé  $X^{(k+1)}$ , si  $X^{(k)}$  et  $X^{(k+1)}$  n'ont qu'une composante différente d'un pas  $k$  à l'autre  $k+1$ , on dit que le procédé est une relaxation.

#### III-5-2 Principe:

Soit une constante scalaire réelle non nulle  $\omega$ , le vecteur  $X^{(k+1)}$  estimé à l'itération  $(k+1)$  par la méthode de relaxation est:

$$\bar{X}^{(k+1)} = X^{(k)} + \omega (X^{(k+1)} - X^{(k)}) \quad (3.10)$$

Où  $X^{(k+1)}$  : est le vecteur estimé par la méthode Gauss-Seidel

Si  $\omega = 1$ , On retrouve la méthode de Gauss-Seidel

Si  $\omega > 1$ , On détermine la méthode de sur-relaxation

Si  $\omega < 1$ , On détermine la méthode de sous-relaxation

L'algorithme de Gauss-Seidel nous donne:

$$X_i^{(k+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} X_j^{(k)}) / a_{ii} \quad (3.11)$$

$$i = 1, n$$

L'équation-3.10-nous permet alors d'écrire:

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left\{ \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) / a_{ii} - x_i^{(k)} \right\} \quad (3.12)$$

$i = 1, n$

Soit :

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left\{ \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} - a_{ii} x_i^{(k)} \right) / a_{ii} \right\} \quad (3.13)$$

$i = 1, n$

ou :

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (3.14)$$

$i = 1, n$

### III.5.3 Algorithmes

En résumé, l'algorithme de relaxation s'écrit :

$$1 - x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad (3.15)$$

$i = 1, n$

2 - On arrête si la condition suivante est vérifiée :

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon_1$$

## III-6 Méthode de Gauss

Parmi les méthodes directes, on distingue plusieurs méthodes telles que:

- Elimination de Gauss
- Gauss-Jordan ... etc...

Méthode de Gauss:

Cette méthode consiste à réduire un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues à un système triangulaire, qui peut être ensuite résolu facilement par substitution.

Considérons le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \quad (3.16)$$

Le but de l'algorithme de Gauss est de transformer le système (3.16) en un système triangulaire supérieur selon le principe suivant:

- de la première équation on tire l'expression de  $x_1$  en fonction des autres inconnues; puis dans

- toutes les équations suivantes on remplace  $x_1$  par cette expression. On obtient alors un système linéaire d'ordre  $n$  dans lequel tous les coefficients de  $x_1$  sont nuls sauf dans la première équation;
- En répétant ce processus sur les  $n-1$  dernières équations on obtient finalement un système linéaire triangulaire;
- De la dernière équation, on tire directement la valeur de  $x_n$ ;
- En remontant ce système, on obtient successivement les valeurs de toutes les inconnues.
- Un exemple expliquant le principe de cet algorithme en l'appliquant à la résolution d'un système linéaire d'ordre 3.
- Le système s'écrit sous la forme:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \quad (a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \quad (b) \quad 3.17$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \quad (c)$$

les phases successives de la résolution sont les suivantes:

a. Substitution de  $x_1$ :

- On divise la première équation par le coefficient de  $x_1$ , soit  $a_{11}$ , qui est appelé - le premier pivot -

On obtient:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{a_{14}}{a_{11}} \quad (3.18)$$

en posant:

$$a_{12}^{(2)} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad a_{13}^{(2)} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad a_{14}^{(2)} = \frac{a_{14}}{a_{11}}$$

On obtient:

$$x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 = a_{14}^{(2)}$$

qui peut également s'écrire:

$$x_1 = -a_{12}^{(2)}x_2 - a_{13}^{(2)}x_3 + a_{14}^{(2)}$$

En remplaçant  $x_1$  par cette expression dans les équations 3.17 (b et c) on obtient:

$$(a_{22} - a_{21}a_{12}^{(2)})x_2 + (a_{23} - a_{21}a_{13}^{(2)})x_3 = a_{24} - a_{21}a_{14}^{(2)}$$

$$(a_{32} - a_{31}a_{12}^{(2)})x_2 + (a_{33} - a_{31}a_{13}^{(2)})x_3 = a_{34} - a_{31}a_{14}^{(2)}$$

en posant :

$$a_{22}^{(2)} = a_{22} - a_{21} a_{12}^{(2)}$$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32} - a_{31} a_{12}^{(2)}$$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23} - a_{21} a_{13}^{(2)}$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33} - a_{31} a_{13}^{(2)}$$

$$a_{24}^{(2)} = a_{24} - a_{21} a_{14}^{(2)}$$

$$a_{34}^{(2)} = a_{34} - a_{31} a_{14}^{(2)}$$

On obtient un système linéaire dont les coefficients de  $x_1$  dans les deux dernières équations sont nuls.

$$x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3 = a_{14}^{(2)}$$

$$a_{22}^{(2)} x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = a_{24}^{(2)}$$

$$a_{32}^{(2)} x_2 + a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)}$$

b. Substitution de  $x_2$ :

la première équation est inchangée.

On divise la deuxième équation par le coefficient  $x_2$ , soit  $a_{22}^{(2)}$ , qui est appelé - deuxième pivot. On obtient :

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} x_3 = \frac{a_{24}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \quad (3.19)$$

en posant :

$$a_{23}^{(3)} = \frac{a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

$$a_{24}^{(3)} = \frac{a_{24}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$$

On obtient:

$$x_2 + a_{23}^{(3)} x_3 = a_{24}^{(3)}$$

qui peut également s'écrire:

$$x_2 = -a_{23}^{(3)} x_3 + a_{24}^{(3)}$$

En remplaçant  $x_2$  par cette expression dans la dernière équation, on obtient:

$$(a_{33}^{(2)} - a_{32}^{(2)} a_{23}^{(3)}) x_3 = a_{34}^{(2)} - a_{32}^{(2)} a_{24}^{(3)}$$

En posant comme précédemment:

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{32}^{(2)} a_{23}^{(3)}$$

et

$$a_{34}^{(3)} = a_{34}^{(2)} - a_{32}^{(2)} a_{24}^{(3)}$$

On obtient le système linéaire triangulaire suivant:

$$x_1 + a_{12}^{(2)} x_2 + a_{13}^{(2)} x_3 = a_{14}^{(2)}$$

$$x_2 + a_{23}^{(3)} x_3 = a_{24}^{(3)}$$

$$a_{33}^{(3)} x_3 = a_{34}^{(3)}$$

c- Calcul de  $x_3$ :

On divise la dernière équation par le coefficient de  $x_3$ , soit  $a_{33}^{(3)}$ , qui est appelé - dernier pivot -

On obtient ainsi la valeur de  $x_3$  :

$$x_3 = \frac{a_{34}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} \quad (3.20)$$

en reportant la valeur de  $x_3$  dans la deuxième équation on obtient la valeur de  $x_2$ , soit :

$$x_2 = a_{24}^{(3)} - a_{23}^{(3)} x_3$$

En remplaçant les valeurs de  $x_2$  et  $x_3$  dans la première équation, on obtient la valeur de  $x_1$ , soit :

$$x_1 = a_{14}^{(2)} - a_{12}^{(2)} x_2 - a_{13}^{(2)} x_3$$

## IV

## ÉCRITURE D'UN PROGRAMME

Dans ce qui suit nous allons adapter un certain nombre de notations de façon à mettre notre problème sous forme d'équations programmables. Pour cela nous allons représenter notre plaque selon le schéma ci-dessous : fig IV-1

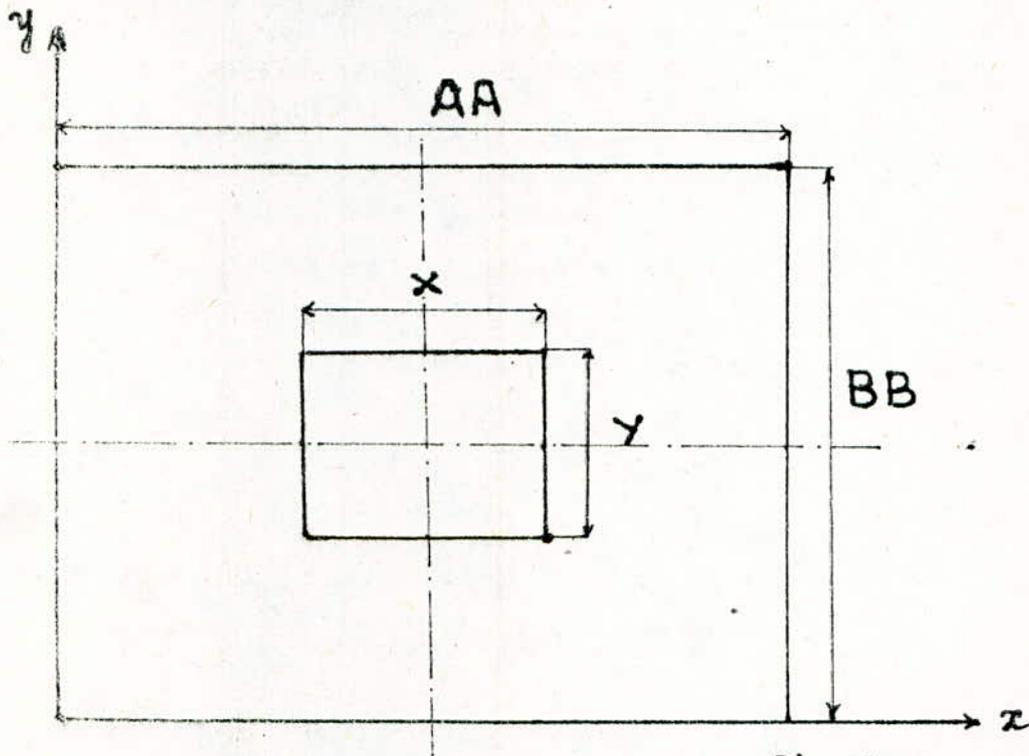


fig: IV.1

AA : longueur de la plaque

BB : largeur de la plaque

x : longueur de la cavité

y : largeur de la cavité

les conditions aux limites sont représentées sur la fig IV.2,

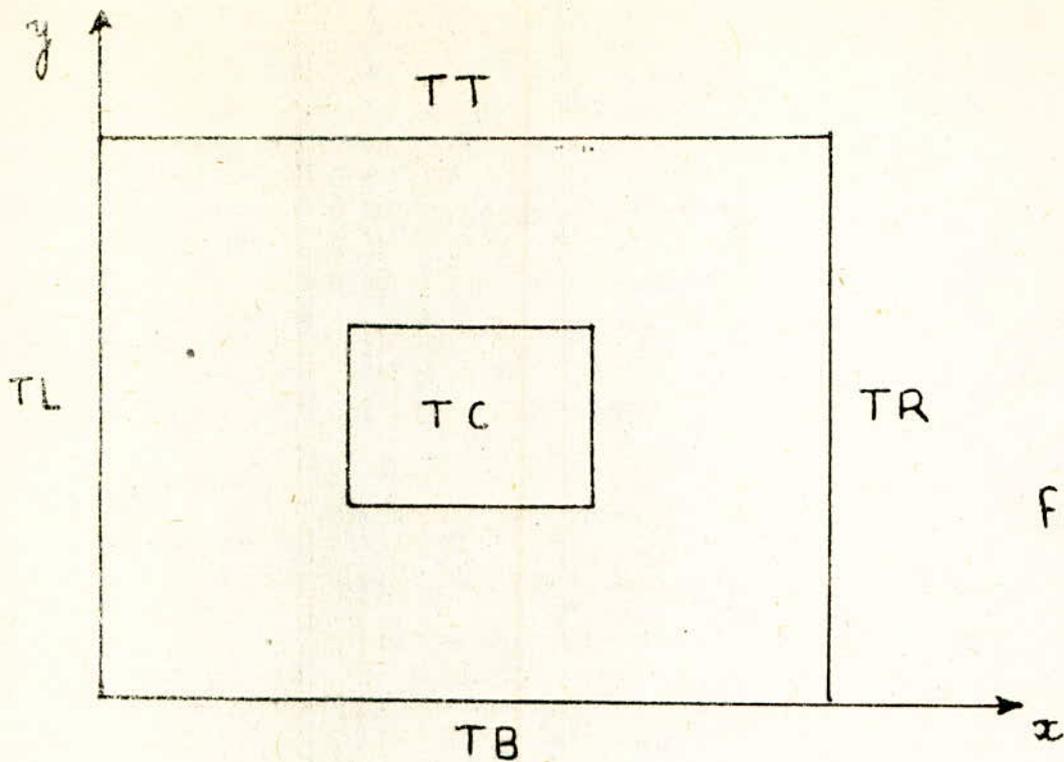


Fig IV.2

TT: La température sur le côté supérieur

TB: La température sur le côté inférieur

TL: La température sur le côté gauche

TR: La température sur le côté droit

TC: La température sur les côtés de la cavité

#### IV-1 Établissement des Equations.

On subdivise le système en un nombre de nœuds.

En remplaçant le matériau entre deux nœuds par une barre fictive ayant la même conductance que le matériau présent voir (fig IV-3 a & b), le bilan thermique, en régime permanent, en un point intérieur tel que A s'écrit:

$$q_{1-A} + q_{2-A} + q_{3-A} + q_{4-A} = 0 \quad (4.1)$$

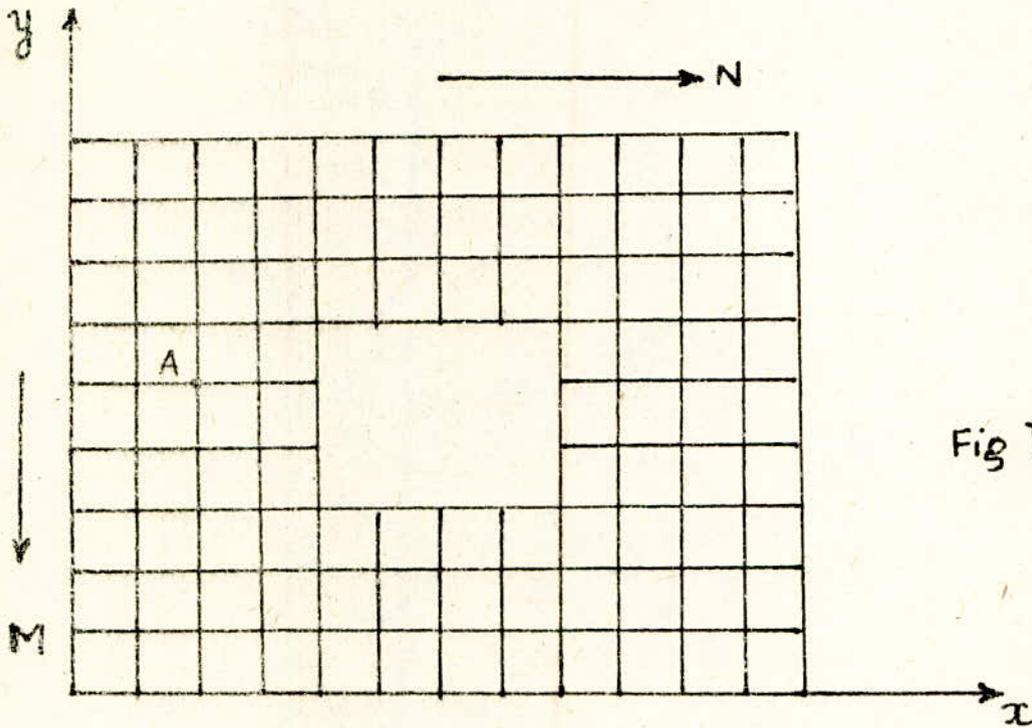


Fig IV.3.a

N: Nombre d'intervalles selon l'axe -ox-

M: Nombre d'intervalles selon l'axe -oy-

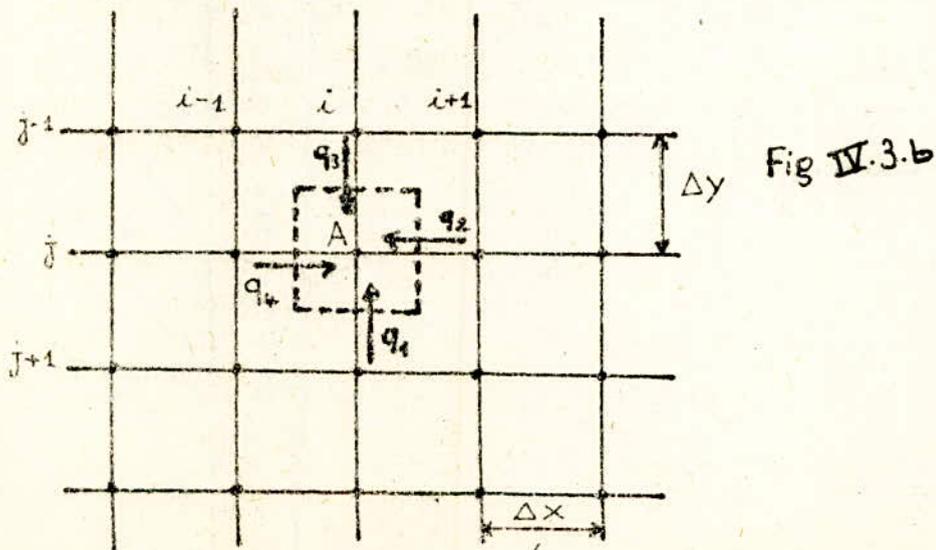


Fig IV.3.b

En appliquant la loi de Fourier :

$$q_{1-A} = -Ke \frac{\Delta x}{\Delta y} [T_{ij} - T_{i,j+1}]$$

$$q_{2-A} = -Ke \frac{\Delta y}{\Delta x} [T_{ij} - T_{i+1,j}]$$

$$q_{3-A} = -Ke \frac{\Delta x}{\Delta y} [T_{ij} - T_{i,j-1}]$$

$$q_{4-A} = -Ke \frac{\Delta y}{\Delta x} [T_{ij} - T_{i-1,j}]$$

d'où l'équation 4-1 s'écrit :

$$-2T_{ij} \left[ \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{\Delta y} \right] + \frac{\Delta y}{\Delta x} [T_{i+1,j} + T_{i-1,j}] + \frac{\Delta x}{\Delta y} [T_{i,j+1} + T_{i,j-1}] = 0 \quad (4-2)$$

En multipliant l'équation (4-2) par  $\frac{\Delta x}{\Delta y}$  on aura :

$$-2T_{ij} \left[ 1 + \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 \right] + [T_{i+1,j} + T_{i-1,j}] + \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)^2 [T_{i,j+1} + T_{i,j-1}] = 0 \quad (4-3)$$

posons :  $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta y}$

d'où l'équation 4-3 s'écrit :

$$-2T_{ij} [1 + \lambda^2] + \lambda^2 [T_{i,j+1} + T_{i,j-1}] + [T_{i+1,j} + T_{i-1,j}] = 0 \quad (4-4)$$

La forme générale des équations précédentes peut se mettre sous la forme matricielle suivante :-

$$A * T = B$$

où : A : matrice carrée de coefficients ( $a_{ij}$ )

T: le vecteur de températures dans la plaque

B: le vecteur du second membre..

Nous allons nous efforcer d'écrire un programme, pour résoudre notre équation matricielle.

## II.2 Programme

Ce programme consiste à calculer la distribution des températures dans une plaque plane avec ou sans cavité interne, les températures sur les frontières sont connues, et l'algorithme de l'élimination de Gauss est utilisé pour résoudre le système d'équations linéaires ainsi obtenu.

Ce programme comporte la partie principale (ou programme principal), et il fait appel à un sous programme utilisant la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre le système ainsi constitué.

## III.1 Les Données Principales du Programme :

AA: La longueur de la plaque

BB: La largeur de la plaque

x: La longueur de la cavité

y: La largeur de la cavité

N: Le nombre d'intervalles selon la longueur AA

M: Le nombre d'intervalles selon la largeur BB.

$TT_1, TB_1, TR_1, TL_1$ , sont les températures sur les côtés extérieurs de la plaque,  $T_c$  : la température sur les côtés de la cavité.

## II.2.2 Structure du programme.

Les opérations sont faites dans l'ordre suivant :

- a) lecture des données.
- b) On initialise une matrice  $A$  et un vecteur  $B$  à zéro, puis on fait introduire un compteur qui sert à numérotter les nœuds dans la grille considérée.
- c) On commence à remplir la matrice  $A$  et le vecteur  $B$  étape par étape, en entrant les coefficients ligne par ligne et en faisant suivre chaque ligne par le terme écrit dans le second membre.
- d) Après avoir rempli la matrice et le vecteur, on fait appel à un sous-programme pour résoudre l'équation matricielle formée dans le programme principal.
- e) Ce sous-programme consiste à rendre l'équation matricielle :  $A * T = B$  sous la forme  $A' * T = B'$  où  $A'$  : est une matrice triangulaire supérieure ; c'est à dire il forme un système triangulaire qui peut être ensuite résolu facilement par substitutions.
- f) Impression des résultats se fait dans un vecteur qui lit les températures de la plaque ligne par ligne.

```

#####
#CE PROGRAMME CALCULE LA DISTRIBUTION DE TEMPERATURE DANS UNE #
#FORME RECTANGULAIRE(CARREE) AVEC OU SANS CAVITE INTERNE LES #
#TEMPERATURES SUR LES COTES SONT CONNUES ET LA METHODE DE #
#"GAUSS" EST UTILISEE POUR RESOUDRE LE SYSTEME D'EQUATIONS #
# LINEAIRES AINSI OBTENU #
#####

```

```

REAL KK,LAMBDA
COMMON A(100,100),B(100),T(100)
DIMENSION TT(100),TB(100),TL(100),TR(100)
DIMENSION NOEUD(100,100),TP(100)
OPEN(UNIT=6,NAME='RAHMANI',STATUS='NEW')
NMAX=100
MMAX=100

```

```

$$$DONNEES SUR LA LONGUEUR DE LA PLAQUE(AA),LA LARGEUR(BB),$$$
$$$ LA LONGUEUR DE LA CAVITE(X),LA LARGEUR DE LACAVITE(Y)$$$

```

```

READ*,AA,BB,X,Y

```

```

$$$DONNEES SUR LA NOMBRE D'INTERVALLES DE LA GRILLE $$$
$$$ DANS LA DIRECTION DES X (N) $$$
$$$ ET NOMBRE D'INTERVALLES DE LA GRILLE DANS LA $$$
$$$ DIRECTION DES Y (M) $$$

```

```

READ*,N,M
$$$DONNEES SUR LES TEMPERATURES SUR LA FRONTIERE $$$
$$$ EXTERIEURE TT1,TB1,TL1,TR1 $$$

```

```

READ*,TT1,TB1,TL1,TR1

```

```

$$$DONNEE SUR LA TEMPERATURE DE LA CAVITE SI CELLE CI $$$
$$$ EXISTE $$$

```

```

IF(X.NE.C.O) READ*,TC
HH=AA/N
KK=BB/M
LAMBDA=KK/HH

```

```

$$$LOCALISER LES POSITIONS DE LA GRILLE SI NECESSAIRE$$$

```

```

IF(X.EQ.C.O) GO TO 100
IL=IINT((AA-X)/(2*HH))
IR=N-IL
JT=IINT((BB-Y)/(2*KK))
JS=M-JT

```

```

C      $$$$$$$$ METTRE A ZERO LA MATRICE DE COEFFICIENTS &      $$$$$$$$
C      $$$$$$$$ VECTEUR DES COTES DROITS      $$$$$$$$

100    DO 110 I=1,NMAX
      DO 110 J=1,MMAX
      NOEUD(I,J)=0
110    A(I,J)=0.0
      DO 115 I=1,NMAX
115    B(I)=0.0

C      $$$$$$ INITIER LE COMPTEUR DE NOEUDS      $$$$$$

      IF(X.EQ.C.0) GO TO 140
      K=0
      DO 130 J=1,M-1
      DO 130 I=1,N-1
      IF(J.LT.JT) GO TO 120
      IF(J.GT.JB) GO TO 120
      IF(I.LT.IL) GO TO 120
      IF(I.GT.IR) GO TO 120
      GO TO 130
120    K=K+1
      NOEUD(I,J)=K
130    CONTINUE
      GO TO 160

C      $$$$$$$$$$$$$$ SI PAS DE CAVITE,NUMEROTER CHAQUE NOEUD $$$$$$$$

140    DO 150 J=1,M-1
      DO 150 I=1,N-1
150    NOEUD(I,J)=I+(J-1)*(N-1)

C      $$$$$$ GENERER CHAQUE COLONNE DANS LA MATRICE A AVEC LE TERME $$$$
C      $$$$$$ CORRESPONDANT DU VECTEUR B      $$$$

160    II=0
      DO 290 J=1,M-1
      DO 290 I=1,N-1
      IF(X.EQ.C.0) GO TO 170
      IF(I.LT.IL) GO TO 170
      IF(I.GT.IR) GO TO 170
      IF(J.LT.JT) GO TO 170
      IF(J.GT.JB) GO TO 170
      GO TO 290
170    II=II+1
      JJ=NOEUD(I,J)
      AKII,JJ)=-2*(1+LAMBDA**2)

C      $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ NOEUD A GAUCHE $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$

```

```

IF(I.EQ.1) GO TO 180
IF(X.NE.C.O.AND.I.EQ.(IR+1).AND.J.GE.JT.AND.J.LE.JB) GO TO 190
A(II,JJ-1)=LAMBDA**2
GO TO 200

```

```

C      $$$$$$ FRONTIERE EXTERNE GAUCHE      $$$$$$

```

```

180    B(II)=B(II)-(LAMBDA**2)*TL1
GO TO 200

```

```

C      $$$$$$ FRONTIERE INTERIEURE DROITE $$$$$$

```

```

190    B(II)=B(II)-LAMBDA**2*TC

```

```

C      $$$$$$ NOEUD A DROITE      $$$$$$

```

```

200    IF(I.EQ.(N-1)) GO TO 210
IF(X.NE.C.O.AND.I.EQ.(IL-1).AND.J.GE.JT.AND.J.LE.JB) GO TO 220
A(II,JJ+1)=LAMBDA**2
GO TO 230

```

```

C      $$$$$$ FRONTIERE EXTERNE DROITE $$$$$$

```

```

210    B(II)=B(II)+LAMBDA**2*TR1
GO TO 230

```

```

C      $$$$$$ FRONTIERE INTERIEURE GAUCHE $$$$$$

```

```

220    B(II)=B(II)-LAMBDA**2*TC

```

```

C      $$$$$$ NOEUD SUPERIEUR      $$$$$$

```

```

230    IF(J.EQ.1) GO TO 240
IF(X.NE.C.O.AND.J.EQ.(JB+1).AND.I.GE.IL.AND.I.LE.IR) GO TO 250
JJ=NOEUD(I,J-1)
A(II,JJ)=1.0
GO TO 260

```

```

C      $$$$$$ FRONTIERE EXTERNE SUPERIEURE $$$$$$

```

```

240    B(II)=B(II)-TT1
GO TO 260

```

```

C      $$$$$$ FRONTIERE INTERNE INFERIEURE $$$$$$

```

```

250    B(II)=B(II)-TC

```

```

C      $$$$$$ NOEUD INFERIEUR      $$$$$$

```

```

260 IF(J.EQ.(M-1)) GO TO 270
   IF(X.NE.C.D.AND.J.EQ.(JT-1).AND.I.GE.IL.AND.I.LE.IR) GO TO 280
   JJ=NOEUD(I,J+1)
   A(II,JJ)=1.
   GO TO 290

C     $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$ FRONTIERE EXTERNE INFERIEURE $$$$$$$$$$$$

270  B(II)=B(II)-TB1
   GO TO 290

280  B(II)=B(II)-TC

C     $$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$$      NOEUD SUIVANT      $$$$$$$$$$$$

290  CONTINUE

C     $$$$$$$$ RESOUDRE LES EQUATIONS A*T=B EN UTILISANT LA $$$$$$$$
C     $$$$$$$$      METHODE DE GAUSS      $$$$$$$$

   CALL GELIM(A,B,T,II)

C     $$$$$$$$ IMPRESSION DE GRILLE COMPRENANT LES $$$$$$$$
C     $$$$$$$$      TEMPERATURES AUX FRONTIERES      $$$$$$$$

   DO 4 I=1,N+1
   TT(I)=TT1
   CONTINUE
   WRITE(6,3) (TT(I), I=1,N+1)
   FORMAT(1X,12(F6.1,1X))
   DO 360 J=1,M+1
   TP(1)=TL1
   C     TL(J+1)=TL1
   K=NOEUD(1,J)
   DO 350 I=2,N
   1  IF(X.NE.C.D.AND.(I-1).GE.IL.AND.(I-1).LE.IR.AND.J.GE.JT.
   AND.J.LE.JB) GO TO 345
   TP(I)=T(K)
   K=K+1
   GO TO 350
345  TP(I)=TC
350  CONTINUE
   TP(N+1)=TR1
   C     TR(J+1)=TR1
   WRITE(6,3) (TP(I),I=1,N+1)
360  CONTINUE
   DO 5 I=1,N+1
   TB(I)=TB1
   5  CONTINUE
   WRITE(6,3) (TB(I),I=1,N+1)
   STOP
   END

```

C ##### RESOLUTION DE L'EQUATION (A\*T=B) PAR LA METHODE DE GAUSS####

```
SUBROUTINE GELIM(A,B,T,N)
DIMENSION A(100,100),B(100),T(100)
K=1
260 I=K+1
270 A1=A(I,K)/A(K,K)
B(I)=B(I)-B(K)*A1
J=K
310 A(I,J)=A(I,J)-A(K,J)*A1
IF(J.GE.N) GO TO 350
J=J+1
GO TO 310
350 IF(I.GE.N) GO TO 380
I=I+1
GO TO 270
380 IF(K.GE.(N-1)) GO TO 550
K=K+1
GO TO 260
```

C ##### SUBSTITUTION #####

```
550 L=N
600 SUM=0.0
IF(L.LT.N) GO TO 700
620 T(L)=(B(L)-SUM)/A(L,L)
IF(L.LE.1) GO TO 903
L=L-1
GO TO 600
700 J=L+1
710 SUM=SUM+A(L,J)*T(J)
IF(J.GE.N) GO TO 620
J=J+1
GO TO 710
903 RETURN
END
```



=====  
=====  
AA=100. AB=99. X=20. Y=10. N=10 M=9  
-----

TT1=45. TL1=50. TB1=45. TR1=50. TC=1300.  
-----

\*\*\*\*\*  
\* 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 \*  
\* 50.0 104.4 161.3 216.8 260.6 276.2 260.6 216.8 161.3 104.4 50.0 \*  
\* 50.0 161.5 278.9 400.3 504.5 538.6 504.5 400.3 278.9 161.5 50.0 \*  
\* 50.0 212.7 392.5 601.1 818.6 869.0 818.6 601.1 392.5 212.7 50.0 \*  
\* 50.0 246.7 477.3 792.8 1300.0 1300.0 1300.0 792.8 477.3 246.7 50.0 \*  
\* 50.0 246.7 477.3 792.8 1300.0 1300.0 1300.0 792.8 477.3 246.7 50.0 \*  
\* 50.0 212.7 392.5 601.1 818.6 869.0 818.6 601.1 392.5 212.7 50.0 \*  
\* 50.0 161.5 278.9 400.3 504.5 538.6 504.5 400.3 278.9 161.5 50.0 \*  
\* 50.0 104.4 161.3 216.8 260.6 276.2 260.6 216.8 161.3 104.4 50.0 \*  
\* 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 45.0 \*  
\*\*\*\*\*

45

## V. Discussion

### V.1 Introduction:

Le programme présenté dans le chapitre précédent est écrit en Fortran (Formula-Translation). Le Fortran est un langage de calcul par comparaison au BASIC par exemple qui est plutôt un langage d'interprétation théoriquement plus facile à utiliser. Le BASIC cependant est plus lent que le Fortran en particulier quand il s'agit d'un travail comportant beaucoup de calcul. Le Fortran permet d'utiliser plus directement des fonctions mathématiques complexes (comme par exemple les fonctions trigonométriques) rencontrées couramment dans les problèmes d'engineering. Le Fortran a donc été choisi pour résoudre le problème qui nous a été posé et un programme a été ainsi écrit pour le calcul de la température par la méthode de Gauss.

### V.2 Le programme

Celui-ci est principalement conçu, pour résoudre le problème d'une plaque rectangulaire (ou carrée) mais peut-être généralisé au cas où la plaque comporte une cavité rectangulaire (ou carrée).

Une telle solution peut-être appliquée par exemple au cas du problème classique de la cheminée.

Un paramètre de forme de la grille a été introduit de manière à pouvoir jouer sur la géométrie de celle-ci ainsi que sur la précision du résultat final.

Evidemment une grande précision dans le calcul demande plus de capacité de stockage de la machine ainsi que le temps de calcul.

Dans l'exemple choisi la température interne pour le cas où il y a une cavité a été imposée constante et la même sur les quatre côtés, il en est de même pour les températures extérieures.

Cette contrainte peut bien sûr être levée et on peut alors choisir non seulement des températures différentes sur chaque côté mais aussi même des températures variables mais répondant à une fonction connue.

On peut élargir les possibilités de ce programme aux cas où il existe des nœuds isolés ou l'existence de coefficients de transfert de chaleur par convection, à la surface. Une autre possibilité serait l'inclusion d'un terme tenant compte de la génération de puissance à l'intérieur de la plaque auquel cas

le programme serait utilisable dans de nombreux autres domaines d'un grand intérêt pour l'ingénieur. Une fois les nœuds extérieurs définis les températures inconnues seront celles des nœuds intérieurs.

### I-3 Procédure utilisée dans le Programme :

Les dimensions linéaires de la plaque sont lues successivement suivies de celles de la cavité intérieure s'il y a lieu. Ensuite la géométrie de la grille employée est introduite.

Les températures sur les frontières extérieures sont spécifiées à tour de rôle. A ce niveau si les températures ainsi introduites sont variables de manière connue, on serait alors contraint d'inclure un sous programme pour le calcul de ces températures avant de les injecter dans le programme principal.

Les nœuds sont numérotés de 1 à N sur les faces : supérieure et inférieure, de la même sur les faces : gauche et droite.

Si la cavité interne existe alors, sa position est précisée sinon les nœuds sont numérotés en série sur chaque ligne de gauche à droite et de haut en bas.

Ces "numéros" sont stockés dans la colonne "Nœud(IJ)"  
Si la cavité existe, les numéros de colonne (IL) et (IR) sont  
calculés. Il en est de même de (JT) et (JB).

La numérotation utilisée n'inclut pas les nœuds sur  
la frontière ou ceux situés à l'intérieur de la cavité  
centrale.

La relation de température entre les nœuds permet  
de faire le calcul en établissant la matrice des  
températures sous la forme:  $A \times T = B$

La matrice des coefficients A ainsi que le vecteur B  
sont d'abord mis à zéro. Si un ou plusieurs nœuds  
entourant le point considéré est sur la frontière  
(de température connue) alors ces termes sont  
transférés à droite et accumulés dans B.

Pour chaque nœud interne le numéro de série JJ est  
déterminé à partir du nœud (I,j) et son coefficient de  
température est placé dans la colonne correspondante  
de la matrice A.

Le nœud d gauche, c'est à dire JJ-1 peut être soit  
sur la frontière gauche extérieure ou la frontière  
droite intérieure ou simplement être un nœud intérieur.  
A chacun de ces cas correspond un coefficient déterminé

de la matrice A.

La même procédure est appliquée, le nœud à droite de numéro  $JJ+1$ .

Une fois la matrice est constituée selon le procédé décrit ci-dessus, alors on fait appel à un sous-programme contenant la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre le système d'équations:

$$A \times T = B$$

## CONCLUSION

Notre étude se resume à l'étude de la distribution de températures dans une plaque plane finie .

A partir des notions fondamentales de la conduction, on a établi une équation donnant la distribution de températures dans la plaque considérée .

pour résoudre cette équation, on a fait appel aux méthodes numériques , en outre , la méthode de Gauss est utilisée pour la résolution à partir de l'algorithme de Gauss on a élaboré un programme de calcul.

Nous nous sommes proposés des conditions aux limites simples que nous avons injectées dans le programme établi :

Ce programme nous a permis de déterminer la température en tout point de la plaque avec un ensemble des données et des hypothèses considérées.

D'autres conditions peuvent être imposées à la plaque et le programme pourra les exécuter pour trouver la nouvelle distribution des températures.

## ANNEXE

La méthode pour laquelle le programme a été établi utilise l'élimination de Gauss, méthode pouvant utiliser des matrices de grandes dimensions.

À titre de comparaison on donne ici une méthode dite de relaxation successive qui résoud le problème pour la plaque.

C ##### METHODE DE RELAXATION SUCCESSIVE #####

REAL L1,L2,L3,L4  
DIMENSION T(120,120)  
OPEN(UNIT=6,NAME='KOUIDER',STATUS='NEW')

READ\*,L1,L2,L3,L4,TI,T1,T2,EPS,DX,KMAX,OM  
PRINT\*,L1 =',L1,L2 =',L2,L3 =',L3,L4 =',L4  
PRINT\*,TI =',TI,T1 =',T1,T2 =',T2  
PRINT\*,EPS =',EPS,DX =',DX,KMAX =',KMAX,OM=' ',OM

N=IINT(L1/DX)+1  
M=IINT(L2/DX)+1  
N1=IINT((L1-L3)/2/DX)+1  
N2=N1+IINT(L3/DX)  
M1=IINT((L2-L4)/2/DX)+1  
M2=M1+IINT(L4/DX)

DO 10 I=1,N  
DO 10 J=1,M  
T(I,J)=100.  
10 CONTINUE

C #####TEMPERATURES\_LIMITES#####

DO 20 I=1,N  
T(I,1)=T1  
T(I,M)=T1  
20 CONTINUE

DO 30 J=1,M  
T(1,J)=T2  
T(N,J)=T2  
30 CONTINUE

DO 40 I=N1,N2  
T(I,M1)=TI  
T(I,M2)=TI  
40 CONTINUE

DO 50 J=M1,M2  
T(N1,J)=TI  
T(N2,J)=TI  
50 CONTINUE

CCCCCCCCCCCCCCCCCCMETHODE\_DE\_RELAXATION-SUCCESSIVE CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

DO 100 K=1,KMAX  
RM=1.

DO 60 I=2,N1-1  
DO 60 J=2,M-1  
R=T(I+1,J)+T(I-1,J)+T(I,J+1)+T(I,J-1)-4\*T(I,J)  
T(I,J)=T(I,J)+.25\*OM\*R  
IF(ABS(R).GT.RM) RM=ABS(R).

60 CONTINUE

DO 70 I=N1,N2  
DO 70 J=2,M1-1  
R=T(I+1,J)+T(I-1,J)+T(I,J+1)+T(I,J-1)-4\*T(I,J)  
T(I,J)=T(I,J)+.25\*OM\*R  
IF(ABS(R).GT.RM) RM=ABS(R)  
70 CONTINUE

DO 80 I=N1,N2  
DO 80 J=M2+1,M-1  
R=T(I+1,J)+T(I-1,J)+T(I,J+1)+T(I,J-1)-4\*T(I,J)  
T(I,J)=T(I,J)+.25\*OM\*R  
IF(ABS(R).GT.RM) RM=ABS(R)

80 CONTINUE

DO 90 I=N2+1,N-1  
DO 90 J=2,M-1  
R=T(I+1,J)+T(I-1,J)+T(I,J+1)+T(I,J-1)-4\*T(I,J)  
T(I,J)=T(I,J)+.25\*OM\*R  
IF(ABS(R).GT.EM) RM=ABS(R)

90 CONTINUE

IF(RM.LT.EPS) GO TO 145

140 CONTINUE

C #####IMPRESSION\_DES\_RESULTATS#####

100 CONTINUE

145 WRITE(6,123) ((T(I,J),I=1,N),J=1,M )  
123 FORMAT(1X,11(F6.1,1X))  
STOP  
END



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. MC, ADAMS

La transmission de la chaleur, 2<sup>e</sup> Edition, DUNOD, PARIS 1964

2. KREITH, F.

Transmission de la chaleur, MASSON, 1967

3. JAKOB, M. 1

Heat transfer, John, W & Sons Inc - 1949

4. CARSLAW, M

Conduction of Heat in Solids. London University press. 19

5. ANDRE, B.

Transmission de la chaleur ESKA S.A.R.L 1984

6. BOUMAHRAT, M.

Méthodes Numériques appliquées O.P.U 1983

7. LAPORTE, M.

Algorithmes numériques Technip 1982

8. FLOREN, P.

Outil et modèles mathématiques Paris: Vuibert 1977

9. BASS, J.

Cours de mathématiques MASSON 1961

