

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département d'Automatique

*Mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention
du diplôme de Master en automatique*

Approche structurelle du diagnostic et de la localisation de capteurs

Etudié par :
Soulaïmane BERKANE
Amine BOUKABOUS

Proposé et dirigé par :
PR. D. BOUKHETALA

Promotion 2013

Remerciement

Tout d'abord, nous remercions الله ,le tout puissant de nous avoir accordé le savoir, le droit chemin, l'opportunité de poursuivre nos études et la force pour réaliser ce travail.

Le présent travail de ce mémoire a été effectué sous la direction de Monsieur D.Boukhetala que nous remercions pour son encadrement, son aide, ses directives, ses conseils précieux et surtout la confiance qu'il nous a accordée.

Notre sincère remerciement et notre profonde gratitude vont également à toute l'équipe de l'Ecole Nationale Polytechnique pour les connaissances et le savoir faire qu'ils nous ont transmis pendant les cinq années de notre formation.

Enfin, nous remercions les membres du jury qui ont accepté d'évaluer notre travail.

Nous dédions ce travail à tous ce qui nous aimons,

ملخص

في هذه المذكرة طرحنا مشكل كشف الأخطاء و عزلها بالنسبة للأنظمة الخطية المهيكلة. التحليل الهيكلي سمح بتحديد أماكن أجهزة الاستشعار و التي تضمن أن المشكل يقبل حل.
الكلمات المفتاحية: التحليل الهيكلي، الأخطاء، الأنظمة الخطية المهيكلة.

Résumé

Dans ce travail on considère le problème de détection et localisation de défauts pour une classe générale de systèmes linéaires dépendant de paramètres : les systèmes linéaires structurés. À partir de l'analyse structurelle on peut facilement, sur ce procédé ayant un défaut et une perturbation, montrer qu'un capteur supplémentaire est nécessaire pour résoudre le problème de diagnostic considéré, indépendamment de la valeur des paramètres du système. L'analyse du graphe associé au système permet de déterminer les variables que le capteur doit mesurer.

Mots clés : système linéaire structuré, propriété générique, graphe orienté, placement de capteurs.

Abstract

In this work, we have considered the problem of fault detection and isolation for linear structured systems. Using structural method, we could place additional sensor that ensure that the FDI problem has a solution.

Key words : model-based diagnosis, faults, residus, structural analysis, sensor placement, wastewater treatment process.

Contents

1	Systèmes linéaires structurés	5
1.1	Introduction	5
1.2	Système linéaire structuré	5
1.2.1	Définition	5
1.2.2	Propriétés génériques	7
1.2.3	Graphe associé	8
	Graphe Orienté	9
	Graphe orienté associé à un système linéaire structuré	10
1.3	Rang générique d'une matrice de transfert	12
1.3.1	Rang générique d'une matrice	12
1.3.2	Rang générique d'une matrice de transfert	12
1.4	La commandabilité	13
	Définitions	14
	La commandabilité générique	14
	Exemples	15
1.5	L'observabilité générique	17
	L'observabilité générique	18
1.6	Le problème du découplage par retour d'état	19
1.7	Conclusion	21
2	Détection et localisation de défauts -Fault Detection and Isolation(FDI) à l'aide de l'analyse structurelle	23
2.1	Introduction	23
2.2	Formulation du problème	24
2.3	Solubilité générique du problème FDI	26
2.4	Application au Problème de la Localisation de Capteurs	28
2.5	Conclusion	30

List of Figures

- 1.1 Graph orienté $G(\sum_{\Lambda})$ de l'exemple (2) 11
- 1.2 $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 13
- 1.3 $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 1 16
- 1.4 $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 2 16
- 1.5 $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 3 17
- 1.6 $G(\Sigma_{\Lambda})$ des systèmes 1,2 et 3 19
- 1.7 $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 20

- 2.1 Le schéma de la banque d'observateurs 25
- 2.2 $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 29

Introduction Générale

Le travail que nous présentons dans ce mémoire concerne l'application de l'approche des systèmes linéaires structurés à l'étude des problèmes de localisation de capteurs pour la solubilité du problème FDI. Les systèmes linéaires structurés sont une classe générale de systèmes linéaires multi-variables dépendant de paramètres. Dans un système linéaire structuré on ne prend en compte que l'existence ou l'absence de relations entre les différentes variables sans s'intéresser à la valeur précise des paramètres [6, 3]. Ces systèmes sont décrits par des équations d'état dont les paramètres sont soit fixés à zéro, soit libres. L'existence de paramètres libres correspond aux relations non nulles entre les variables. L'intérêt de cette approche est qu'elle prend en compte la structure du système et donc permet d'étudier des propriétés du système qui ne dépendent que de sa structure. De plus, grâce à la simplicité et à la clarté pédagogique des résultats graphiques, cette approche est un outil approprié pour traiter des problèmes de grande dimension. Pour les systèmes linéaires structurés on étudie des propriétés dites "génériques" (ou "structurelles"). Ces propriétés sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Un graphe orienté peut être associé à un système linéaire structuré : chaque variable du système est représentée par un sommet et chaque relation non nulle entre deux variables est représentée par un arc reliant les sommets correspondants. Ce graphe associé est un outil très efficace pour analyser les propriétés génériques des systèmes considérés. De nombreux résultats concernant l'approche des systèmes linéaires structurés sont disponibles dans la littérature [6]. Dans le contexte structurel, il existe aussi d'autres approches telles que l'approche structurelle utilisant des graphes bipartis pour les problèmes de diagnostic [13] ou l'approche Bond-graph [2]. Tous les problèmes étudiés dans ce travail sont centrés sur l'approche structurelle avec la notion de systèmes linéaires structurés et de graphe orienté associé.

Chapter 1

Systemes linéaires structurés

1.1 Introduction

Les systèmes physiques sont souvent représentés par des modèles d'état. Des études sur ces systèmes requièrent des approches de modélisation. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter la notion de système linéaire structuré, qui est une classe assez générale de systèmes linéaires multi-variables. Ces systèmes sont décrits par des matrices d'état dont les paramètres sont soit fixés à zéro soit libres, mais les positions des paramètres nuls et non nuls dans les matrices sont connues. Les paramètres non nuls représentent l'existence de relations entre variables. Avec ces systèmes, on étudie des propriétés génériques (ou structurelles) c'est-à-dire des propriétés qui sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Des graphes orientés peuvent être associés aux systèmes structurés, où les sommets du graphe correspondent aux différentes variables du système et les arcs représentent les paramètres libres. L'approche graphique est un outil très efficace pour étudier et vérifier des propriétés génériques d'un système structuré.

1.2 Système linéaire structuré

1.2.1 Définition

Le premier concept des systèmes linéaires structurés a été introduit initialement par Lin en 1974 [10], la définition des systèmes structurés en terme de "matrice structurée", où apparaissent des paramètres soit nuls soit algébriquement indépendants, a été proposée dans [11], Schématiquement, un système linéaire structuré est un système linéaire pour lequel la seule information connue est l'existence ou l'absence de relation entre variables.

Définition 1. Soit \sum_{Λ} un système linéaire décrit par la représentation d'état:

$$\sum_{\Lambda} : \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\Lambda}x(t) + B_{\Lambda}u(t) \\ y(t) = C_{\Lambda}x(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $x(t) \in R^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in R^m$ est le vecteur d'entrée et $y(t) \in R^p$ est le vecteur de sortie. A_{Λ}, B_{Λ} et C_{Λ} sont des matrices de dimensions appropriées. Le système est appelé système linéaire structuré si la matrice:

$$J = \begin{pmatrix} A_{\Lambda} & B_{\Lambda} \\ C_{\Lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice structurée, c'est-à-dire que les éléments de cette matrice sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres.

La structure du système est donnée par les positions des paramètres nuls fixes et des paramètres indépendants. Les éléments nuls indiquent une absence de relation entre les variables alors que des paramètres libres représentent les différentes relations entre les variables. $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \in R^k$ contient l'ensemble des paramètres indépendants de la matrice J . Pour chaque valeur de Λ , le système est complètement défini.

Exemple 1. Considérons les deux systèmes linéaires représentés par les matrices d'état suivantes:

$$\begin{aligned} (I) : A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & C_1 &= [0 \ 1 \ 0] \\ (II) : A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1.5 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} & C_2 &= [0 \ -0.5 \ 0] \end{aligned}$$

Les deux systèmes ci-dessus ont la même répartition des termes nuls/non-nuls dans les matrices d'état. On dit alors que ces deux systèmes ont **la même structure**. Ces systèmes peuvent donc être représentés par le modèle structuré \sum_{Λ} suivant:

$$A_{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 \end{bmatrix} \quad C_{\Lambda} = [0 \ \lambda_6 \ 0] \quad (1.2)$$

La matrice composite s'écrit:

$$J = \begin{pmatrix} A_\Lambda & B_\Lambda \\ C_\Lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ou les zéros sont fixés et $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\} \in R^6$ est le vecteur des paramètres libres. Ce modèle représente donc une classe de systèmes linéaires qui ont la même structure que les systèmes (I) et (II). Ici, les paramètres λ_2 et λ_3 indiquent que la dynamique de l'état x_3 dépend des états x_1 et x_2 . Le paramètre λ_4 indique que la dynamique de l'état x_1 dépend de la commande u_1 , etc.

1.2.2 Propriétés génériques

Etudions la commandabilité du système structuré \sum_Λ de l'exemple(1.2). La matrice de commandabilité s'écrit:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1\lambda_4 & 0 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & \lambda_2\lambda_4 & 0 & \lambda_1\lambda_3\lambda_4 \end{bmatrix}$$

On peut conclure que la matrice de commandabilité \mathcal{C} est de rang plein ssi $\lambda_1\lambda_4\lambda_5 \neq 0$. Le système \sum_Λ est donc commandable pour presque toute valeur de $\Lambda \in R^5$.

L'exemple précédent montre qu'il y a des propriétés, pour un système linéaire structuré donné, qui sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres libres. Ce concept a été présenté de manière théorique, sous le nom "propriété générique" ou "propriété structurelle", en particulier par [Wonham, 1974 [18]], [Murota, 1987[14]] et [Reinschke,1988[16]].

Définition 2. Une variété algébrique $\mathbf{V} \subset \mathbb{R}^\tau$ est définie comme l'hypersurface caractérisée par les racines communes d'un nombre fini de polynômes p_1, p_2, \dots, p_k :

$$\mathbf{V} = \{\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau\} | p_i(\Lambda) = 0, i = 1, \dots, k\}$$

\mathbf{V} est propre si $\mathbf{V} \neq \mathbb{R}^\tau$. La notion de généricité peut être définie dans le contexte des systèmes structurés comme suit :

Définition 3. Soit \sum_Λ un système linéaire structuré avec l'ensemble des paramètres indépendants $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$. Une propriété \mathcal{P} est dite générique si \mathcal{P} est vraie pour toute valeur de Λ qui n'appartient pas à une variété algébrique propre de \mathbb{R}^τ .

Dans l'exemple ci-dessus, la propriété *le système structuré $\sum \Lambda$ est commandable* est vraie pour toute valeur des paramètres $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6\} \in R^5$ excepté celles appartenant à la variété algébrique \mathbf{V} :

$$\mathbf{V} = \{\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7\} | \lambda_1 \lambda_4 \lambda_5 = 0\}$$

De nombreuses propriétés génériques dans le cadre des systèmes linéaires structurés ont été étudiées. La première propriété est la commandabilité structurelle des systèmes linéaires mono-entrée [10]. Cette étude a été généralisée aux systèmes linéaires multi-entrées dans [Shields,[17]]; [Glover, [9]] et après dans [Linnemann,[11]] avec des démonstrations simplifiées. L'observabilité, la propriété duale de la commandabilité, a aussi été étudiée pour les systèmes linéaires singuliers structurés [Boukhobza et al., 2006] et pour les systèmes linéaires structurés avec entrée inconnue [Boukhobza and Hamelin, 2007b]. Des recherches portant sur d'autres propriétés génériques ont également été effectuées. Le rang générique de la matrice de transfert d'un système structuré a été étudié par [Ohta et Kodama, [15]]. L'étude de la structure à l'infini [van der Woude, 1991b; Commault et al., 1991] a permis de donner des conditions génériques de solubilité à différents problèmes de commande tels que le découplage statique [Dion et Commault, 1993] qui simplifient un premier résultat donné par [Linnemann, 1981] ou le rejet de perturbation par retour d'état [Commault et al., 1991]. Le problème de rejet de perturbation par retour de sortie a été étudié par [van der Woude, 1994; Commault et al., 1993; Commault et al., 1997; Bahar et al., 1996]. Le problème de détection et localisation de défauts, qui a reçu beaucoup d'attention dans les années récentes [Frank,1996; Chen et Patton, 1999], a été étudié aussi dans le cadre des systèmes linéaires structurés [Commault, Dion, Sename et Motyeian, 2002]. Beaucoup d'autres références peuvent être consultées dans [Murota, 2000; Dion et al., 2003]. Quelques propriétés seront illustrées et étudiées plus tard dans ce mémoire.

1.2.3 Graphe associé

La théorie des graphes est un outil efficace tant au niveau du calcul que de la pédagogie. En effet, un système linéaire structuré sera modélisé par un graphe approprié qui contient toute l'information du modèle structuré.

L'étude des propriétés génériques revient alors à vérifier certaines conditions graphiques. Celles-ci nous donnent de meilleures intuitions sur la nature structurelle des propriétés considérées. Si la propriété désirée est vérifiée, des paramètres indépendants peuvent être considérés comme degrés de liberté dans des étapes suivantes (conception, optimisation,...). De plus, grâce à la caractérisation graphique, on peut suggérer des modifications sur le système pour avoir la propriété désirée. D'autre part, avec des algorithmes classiques de la théorie des graphes, l'approche graphique est adaptée pour l'étude des systèmes de grandes dimensions (Complex and Large Scale Systems).

Le graphe associé utilisé dans ce travail est un graphe orienté. Il existe d'autres types de graphes dans le cadre de l'analyse structurelle d'un système. Par exemple, [Staroswiecki Cassar, 1996; Staroswiecki et al., 2000; Staroswiecki, 2007; Assad, 2002] ont utilisé des graphes bipartis pour étudier les problèmes de diagnostic et de tolérance aux défauts. Ce type de graphe est exploité pour représenter des relations existantes entre contraintes et variables. Par conséquent, il permet de traiter les systèmes constitués d'un ensemble de composants reliés par un ensemble de contraintes. Un autre type de graphe utilisé est le Bond-graph [Sueur Dauphin-Tanguy, 1991; Bouamama et al., 2000; Rahmani Dauphin-Tanguy, 2006]. L'approche Bond-graph est basée essentiellement sur la caractérisation des phénomènes d'échange d'énergie au sein du système. Cette approche a été utilisée pour analyser des propriétés génériques telles que la commandabilité, l'observabilité [Sueur Dauphin-Tanguy, 1989] ou pour le problème de diagnostic [Bouamama et al., 2000; Rahmani Dauphin-Tanguy, 2006]. L'intérêt du bond-graph est de décrire de manière graphique tous les échanges énergétiques. Les modèles développés permettent de conserver un lien avec les phénomènes physiques. La difficulté est que la représentation par bond-graph n'est pas toujours simple à aborder pour des non spécialistes. Plus d'informations sur les bond-graphs peuvent être trouvées dans le livre [Dauphin-Tanguy, 2000].

Graphe Orienté

Définition 4. *Un graphe orienté $G = (V, W)$ est un couple d'ensembles:*

- *un ensemble $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ dont les éléments sont appelés sommets (vertex),*
- *un ensemble $W = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ dont les éléments sont appelés arcs(edges).*

Un arc $w_h \in E$ est défini par $w_h = (v_i, v_j)$ où $v_i \in V$ est appelé sommet initial, $v_j \in V$ est appelé sommet terminal de l'arc w_h

Pour un graphe orienté $G = (V, W)$, on a les définitions et notations suivantes:

- S'il existe un arc (v_i, v_j) , le sommet v_j est dit **un successeur** du sommet v_i et le sommet v_i est dit **un prédécesseur** du sommet v_j .
- Un **chemin** du sommet v_{μ_0} au sommet v_{μ_q} est une séquence d'arcs $(v_{\mu_{i-1}}, v_{\mu_i}) \in W$ pour $i = 1, \dots, q$ et il est noté par $R = v_{\mu_0} \rightarrow v_{\mu_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{\mu_q}$.
- Le chemin est dit **simple** lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- La **longueur** d'un chemin est le nombre de ses arcs, chaque arc étant compté autant de fois qu'il apparaît dans le chemin.
- Un chemin R tel que $v_{\mu_0} \equiv v_{\mu_q}$ est appelé un **circuit**. Si de plus il ne rencontre qu'une fois le même sommet, le circuit est dit un **cycle**.

- Considérons V_1, V_2 deux sous-ensemble non vides de V . Un chemin R est appelé un chemin $V_1 - V_2$ si son sommet initial appartient à V_1 et son sommet terminal appartient à V_2 . De plus, s'il n'y a que le sommet de départ du chemin R qui appartient à V_1 et que le sommet de fin qui appartient à V_2 , alors le chemin R est appelé chemin $V_1 - V_2$ **direct**.
- Des chemins sont **disjoints** s'ils n'ont aucun sommet commun.
- Un **couplage** de taille k entre V_1 et V_2 est un ensemble de k chemins $V_1 - V_2$ simples et disjoints.
- Un **couplage maximal** entre V_1 et V_2 est un ensemble maximal de chemins $V_1 - V_2$ simples et disjoints. Sa taille est notée $\rho(V_1, V_2)$.
- La **longueur d'un couplage** entre V_1 et V_2 est la somme des longueurs de tous ses chemins. On note $l(V_1, V_2)$ la longueur minimale d'un couplage maximal entre V_1 et V_2 .
- Un sous ensemble S de V est appelé un $V_1 - V_2$ **séparateur** si tous les chemins $V_1 - V_2$ contiennent un sommet dans S . La taille d'un séparateur est le nombre de ses sommets.
- Un **séparateur minimal** est un séparateur de taille minimale. Un résultat classique (Théorème de Menger) est que la taille minimale d'un $V_1 - V_2$ séparateur est $\rho(V_1, V_2)$ [Murota, 1987].
- L'ensemble des sommets qui appartiennent à tous les couplages maximaux entre V_1 et V_2 est appelé $V_1 - V_2$ **sommets essentiels** et noté $V_{ess}(V_1, V_2)$.
- Le **séparateur minimal d'entrée**, $S^*(V_1, V_2)$, est l'ensemble de tous les sommets terminaux de tous les chemins directs $V_1 - V_{ess}(V_1, V_2)$.

Graphes orientés associés à un système linéaire structuré

Soit un système linéaire structuré \sum_{Λ} . Un graphe orienté $G(\sum_{\Lambda}) = (V, W)$ peut être associé à \sum_{Λ} tel que l'ensemble des sommets $V = U \cup X \cup Y$ où:

- $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ est l'ensemble de sommets d'entrée et correspond aux m entrées du système.
- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble de sommets d'état et correspond aux n états du système.
- $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie et correspond aux p sorties du système.

L'ensemble des arcs $W = W_{UX} \cup W_{XX} \cup W_{XY}$ où :

- $W_{UX} = \{(u_j, x_i) | b_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles entrées-états.
- $W_{XX} = \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-états.
- $W_{XY} = \{(x_j, y_i) | c_{ij} \neq 0\}$ correspond aux relations non nulles états-sorties.

où a_{ij} (resp. b_{ij}, c_{ij}) est l'élément (i, j) de la matrice A_Λ (resp. B_Λ, C_Λ).

Pour illustrer le graphe orienté proposé, nous utilisons un exemple simple de système structuré :

Exemple 2. Soit le système structuré avec les matrices d'états suivantes :

$$A_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix}$$

Ce système a 3 entrées, 4 états et 3 sorties. Son graphe $G(\sum_\Lambda)$ a donc l'ensemble de sommets $V = \{u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3\}$. Les arcs du graphe correspondent aux paramètres non-nuls λ_i dans les matrices d'état. Par exemple, l'arc (u_1, x_1) (resp. (x_1, x_2)) correspond au paramètre λ_4 (resp. λ_1). Le graphe $G(\sum_\Lambda)$ est présenté Figure 2.3.

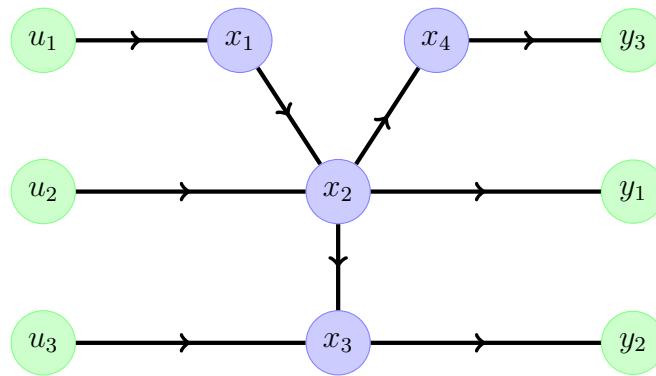


Figure 1.1: Graph orienté $G(\sum_\Lambda)$ de l'exemple (2)

Définition 5. Soit un système linéaire structuré \sum_Λ du type avec son graphe associé $G(\sum_\Lambda)$:

- Un sommet d'état $x_i \in X$ est dit connecté à la sortie s'il existe un chemin de ce sommet vers un sommet de sortie. Ce type de chemin est appelé un **chemin état-sortie**.

- Un sommet d'état $x_i \in X$ est dit *connecté à l'entrée* s'il existe un chemin d'un sommet d'entrée vers ce sommet. Ce type de chemin est appelé **un chemin entrée-état**.
- un chemin d'un sommet d'entrée vers un sommet de sortie est appelé un **chemin entrée-sortie** ou un chemin $U - Y$.

Dans le graphe de l'exemple (2), tous les sommets d'état sont connectés à l'entrée et à la sortie. Il existe des chemins entrée-sortie tels que $(u_1, x_1, x_2, x_4, y_3)$, (u_2, x_2, y_1) ou (u_3, x_3, y_2) . L'ensemble $S = \{x_2, x_3\}$ est un $U - Y$ séparateur. Nous pouvons montrer que ce $U - Y$ séparateur est un séparateur minimal. En effet, sur le graphe, on peut voir que tous les chemins entrée-sortie passent soit par le sommet x_2 soit par le sommet x_3 . De plus, dans ce cas, cet ensemble est aussi le séparateur minimal d'entrée $S^*(U, Y)$. Par conséquent, le nombre maximal de chemins disjoints entrée-sortie est égal à 2, c'est-à-dire que la taille d'un couplage maximal entre U et Y est $\rho(U, Y) = 2$.

1.3 Rang générique d'une matrice de transfert

1.3.1 Rang générique d'une matrice

Suite à la Définition précédente sur la propriété générique, on peut donner la définition du rang générique d'une matrice :

Définition (Rang générique) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré ayant pour matrice de transfert $T_\Lambda(s)$, avec $V \subset \mathbb{R}^\tau$. Le rang générique de $T_\Lambda(s)$, noté $g\text{-rang}[T_\Lambda(s)]$ est défini comme le rang maximal de toutes les matrices admissibles $T(s)$ par rapport à $T_\Lambda(s)$:

$$g\text{-rang}[T_\Lambda(s)] = \max\text{rang}[T(s)]$$

1.3.2 Rang générique d'une matrice de transfert

Conformément à la définition de la généricité, nous pouvons définir le rang générique d'une matrice de transfert :

Définition 6. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré ayant la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$, avec $\Lambda \in \mathbb{R}^\tau$. Le rang générique de $T_\Lambda(s)$, noté $g\text{-rang}[T_\Lambda(s)]$ est défini comme le rang de $T_\Lambda(s)$ pour presque toutes les valeurs de Λ .

Sur le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$, le rang générique d'une matrice de transfert peut être calculé de la manière suivante :

Théorème 1. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré avec le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Le rang générique de la matrice de transfert $T_\Lambda(s)$ est égal au nombre maximum de chemins entrées-sorties sommets disjoints sur $G(\Sigma_\Lambda)$.

Exemple 3. Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par le triplet $(A_\Lambda, B_\Lambda, C_\Lambda)$ suivant :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_4 & \lambda_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_7 \\ \lambda_8 & 0 & 0 \end{pmatrix}; C_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \end{pmatrix}$$

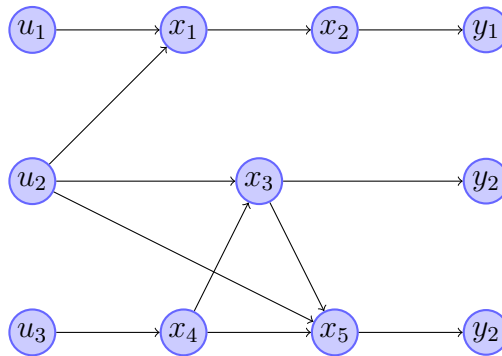


Figure 1.2: $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple

Sur $G(\Sigma_\Lambda)$, le nombre maximal de chemins entrées-sorties sommets disjoints est égal à 3. Par l'exemple on a les 3 chemins (u_1, x_1, x_2, y_1) , (u_2, x_3, y_2) et (u_3, x_4, x_5, y_2) . On a donc

$$g\text{-rang}[T_\Lambda(s)] = 3$$

1.4 La commandabilité

Dans cette partie nous allons aborder la notion de commandabilité pour les systèmes linéaires structurés.

Définitions

La notion de commandabilité pour le système linéaire Σ de type (*) est bien connue. Rappelons maintenant la définition :

Définition 7. (Commandabilité) Soit Σ un système linéaire de type (*). Σ est dit commandable si quel que soit $x(t_i)$ l'état à l'instant initial, et quel que soit $x(t_f)$ l'état à l'instant final, il existe une commande $u(t)$, appliquée sur l'intervalle de temps fini $[t_i; t_f]$, qui permet de rejoindre l'état final partant de l'état initial.

Pour vérifier la commandabilité d'un système linéaire, on utilise le plus souvent le critère de Kalman :

Théorème 2. Soit Σ un système linéaire de type (*). Σ est commandable si et seulement si :

$$\text{rang}[Co] = n \text{ où } Co = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

Co est appelée la matrice de commandabilité du système Σ

Il existe aussi le test de PBH développé par Popov - Belevitch - Hautus dans les années soixante :

Théorème 3. Soit Σ un système linéaire de type (*). Σ est commandable si et seulement si pour toute valeur de s :

$$\text{rang}[sI - AB] = n$$

La commandabilité générique

Pour un système linéaire structuré Σ_Λ , avec chaque choix de $\lambda_i \in \Lambda$, on obtient un système linéaire admissible de type (*). En conséquence, on peut vérifier si chaque système linéaire admissible est commandable ou non. Si la commandabilité est vérifiée pour presque tous les systèmes linéaires admissibles, on dit que le système linéaire structuré Σ_Λ est génériquement commandable.

Pour vérifier graphiquement la commandabilité d'un système linéaire structuré, C.T. Lin a proposé la notion de *dilatation*.

Définition 8. (Dilatation) Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de et $G(\Sigma_\Lambda) = (V, W)$ son graphe associé. On considère S un ensemble de k_S sommets d'état. Notons $T(S)$ l'ensemble de sommets $v_i \in V$ pour $i = 1, 2, \dots, k_T$ tels qu'il existe un arc $(v_i, v_j) \in W$ où $v_j \in S$. S est une dilatation si :

$$k_S - k_T = d_S > 0$$

d_S est appelé défaut de dilatation S .

Les conditions de la commandabilité générique peuvent s'exprimer comme suit :

Théorème 4. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré et $G(\Sigma_\Lambda)$ son graphe associé. Σ_Λ est génériquement commandable si et seulement si :

1. Le système Σ_Λ est connecté à l'entrée,
2. Il n'existe pas de dilatation dans $G(\Sigma_\Lambda)$.

Physiquement, s'il existe dans le graphe associé un sommet d'état qui n'est pas connecté à l'entrée, ce sommet représente un état qui n'est pas atteignable par des commandes. D'un autre côté, la dilatation représente un ensemble de sommets d'état qui est piloté directement par un autre ensemble plus petit en nombre d'éléments. Dans ces deux cas, le système n'est pas commandable. Nous allons clarifier ces notions par quelques petits exemples.

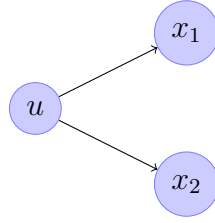
Exemples

Exemple 4. Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par la paire (A_Λ, B_Λ) suivante (matrice C_Λ quelconque de dimension appropriée) :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure (1.3)

Avec cet exemple, en prenant $S = \{x_1, x_2\}$, on trouve $T(S) = \{u\}$ donc S est une dilatation. Avec cette dilatation, le système Σ_Λ dans l'Exemple 1 n'est pas commandable. Vérifions le rang de la matrice de commandabilité :

Figure 1.3: $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 1

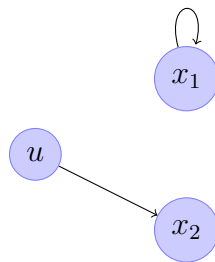
$$g\text{-rang}[Q_{\Lambda C}] = g\text{-rang} [B_\Lambda \quad A_\Lambda B_\Lambda] = g\text{-rang} = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Pour toutes les valeurs de λ_5 et λ_6 , le $g\text{-rang}[Q_{\Lambda C}]$ est inférieur à 2, le nombre d'états. Cela confirme la non commandabilité du système.

Exemple 5. Considérons le système structuré Σ_Λ décrit par la paire (A_Λ, B_Λ) suivante (matrice C_Λ quelconque de dimension appropriée) :

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B_\Lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure

Figure 1.4: $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple 2

Dans ce cas, il n'existe pas de dilatation sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$. Par contre, le sommet x_1 n'est pas connecté à l'entrée. Le système Σ_Λ dans cet exemple n'est pas commandable. Le rang de la matrice de commandabilité vaut clairement :

$$g\text{-rang}[Q_{\Lambda C}] = g\text{-rang} [B_\Lambda \quad A_\Lambda B_\Lambda] = g\text{-rang} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Le $g\text{-rang}[Q_{\Lambda C}]$ est inférieur à 2 quelle que ce soit la valeur de λ_6 . Cela confirme la non commandabilité du système.

Exemple 6. Considérons le système structuré Σ_{Λ} décrit par la paire $(A_{\Lambda}, B_{\Lambda})$ suivante (matrice C_{Λ} quelconque de dimension appropriée) :

$$A_{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; B_{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix}$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure

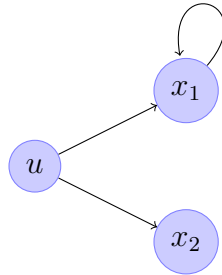


Figure 1.5: $G(\Sigma_{\Lambda})$ de l'Exemple 3

Le système Σ_{Λ} est connecté à l'entrée et $G(\Sigma_{\Lambda})$ ne contient aucune dilatation, donc Σ_{Λ} est commandable. Le rang de la matrice de commandabilité dans ce cas :

$$g\text{-rang}[Q_{\Lambda C}] = g\text{-rang} [B_{\Lambda} \quad A_{\Lambda}B_{\Lambda}] = g\text{-rang} = \begin{pmatrix} \lambda_5 & \lambda_1\lambda_5 \\ \lambda_6 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Pour presque toutes les valeurs de λ_1 , λ_5 et λ_6 , $g\text{-rang}[Q_{\Lambda C}]$ est égal à 2 sauf pour les cas suivants : $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_5 = 0$ ou $\lambda_6 = 0$. En effet, avec $\lambda_1 = 0$, on retrouve le système non commandable de l'Exemple 1. Avec $\lambda_5 = 0$, on retrouve le système non commandable de l'Exemple 2. Avec $\lambda_6 = 0$, on a aussi un système non commandable avec le sommet d'état x_2 qui n'est pas connecté à l'entrée.

1.5 L'observabilité générique

Pour exploiter les résultats sur l'observabilité générique on a besoin de quelques définitions. La notion d'observabilité pour le système linéaire Σ de type (1.1) est bien connue. Rappelons

maintenant la définition :

Définition 9. (*observabilité*) Soit Σ un système linéaire de type (*). Σ est dit **observable** si pour chaque état initial $x(t_i)$, il existe un temps fini t_f tel que la connaissance de la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[t_i; t_f]$, suffit pour déterminer de manière unique l'état initial, Dans le cas contraire le système est dit non observable .

On utilise le plus souvent le critère de Kalman :

Théorème 5. Soit Σ un système linéaire de type (*). Σ est si et seulement si :

$$\text{rang}[Obs] = n$$

où

$$Obs = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^n \end{pmatrix}$$

est appelée la matrice d'observabilité du système Σ .

L'observabilité générique

Pour un système linéaire structuré Σ_Λ de type (1.1), avec chaque choix de $\lambda_i \in \Lambda$, on obtient un système linéaire admissible de type (*). En conséquence, on peut vérifier si chaque système linéaire admissible est observable ou non. Si l'observabilité est vérifiée pour presque tous les systèmes linéaires admissibles, on dit que le système linéaire structuré Σ_Λ est génériquement observable .

Pour vérifier graphiquement l'observabilité d'un système linéaire structuré, on définit le dual de la notion de *contraction* définie dans l'observabilité générique.

Théorème 6. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré de type (1.1) et $G(\Sigma_\Lambda)$ son graphe associé. Σ_Λ est **génériquement observable** si et seulement si :

1. Le système Σ_Λ est connecté à l'entrée,
2. Il n'existe pas de contraction dans $G(\Sigma_\Lambda)$.

Physiquement, s'il existe dans le graphe associé un sommet d'état qui n'est pas connecté à l'entrée, ce sommet représente un état qui n'est pas atteignable par des commandes. D'un autre côté, la contraction représente un ensemble de sommets d'état qui est piloté directement par un autre ensemble plus petit en nombre d'éléments. Dans ces deux cas, le système n'est pas observable. Nous allons clarifier ces notions par quelques petits exemples.

Exemple 7. Considérons les systèmes structurés Σ_Λ qui sont les duales des systèmes des exemples (4,5 et 6) donné dans la section commandabilité. Les graphes associés à ces systèmes peuvent être obtenus en remplaçant la commande u par la sortie y et en inversant le sens des arcs sur les graphes de ces exemples. Les graphes associés à ces systèmes seront alors :

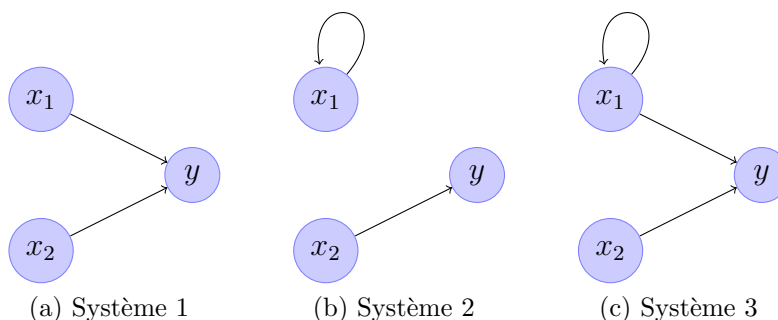


Figure 1.6: $G(\Sigma_\Lambda)$ des systèmes 1, 2 et 3

- **Système 1:** Avec cet exemple, en prenant $S = \{x_1, x_2\}$, on trouve $T(S) = \{y\}$ donc S est une contraction. Avec cette contraction, le système Σ_Λ dans l'exemple 1 n'est pas observable.
 - **Système 2:** Dans ce cas, il n'existe pas de contraction sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$. Par contre, le sommet x_1 n'est pas connecté à la sortie. Le système Σ_Λ dans cet exemple n'est pas observable.
 - **Système 3:** Le système Σ_Λ est connecté à l'entrée et $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient aucune contraction, donc Σ_Λ est observable.
-

1.6 Le problème du découplage par retour d'état

Soit Σ un système linéaire du type (*) tel que le nombre de sorties soit égal au nombre d'entrée ($m = p$). Le problème du découplage par retour d'état consiste à déterminer une commande

$u(t) = Fx(t) + Jv(t)$, G inversible, de telle sorte que le transfert $C(sI - A - BF)^{-1}BJ$ soit diagonal et non singulier, c'est-à-dire que chaque sortie peut être pilotée indépendamment des autres et de la matrice de transfert du système en boucle fermé soit. Dans le contexte des systèmes structurés, on a le résultat suivant []:

Théorème 7. Soit Σ_Λ un système linéaire structuré tel que $m = p$ et son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Le problème du découplage est génériquement soluble si et seulement si sur le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$:

- Il existe m chemin dans G de U vers Y et
- $L_m(U, Y) = \sum_{i=1}^m L_i(U, Y(i))$, $L_m(U, Y)$ est la longueur minimale d'un couplage maximal entre U et Y , $L_i(U, Y(i))$ est la longueur minimale d'un chemin $U - Y(i)$

Exemple 8. soit le système structuré suivant

$$A_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 & 0 \end{pmatrix}; B_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_6 & 0 \\ 0 & \lambda_7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; C_\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 0 \end{pmatrix};$$

Le graphe associé à ce système est présenté sur la Figure

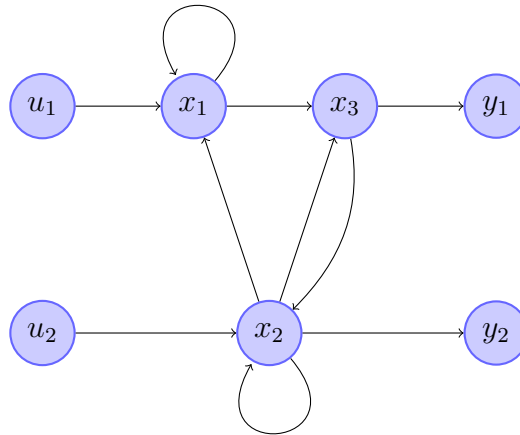


Figure 1.7: $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple

Dans cet exemple, on n'a que deux chemins entrée-sortie disjoints: (u_1, x_1, x_3, y_1) et (u_2, x_2, y_2) . Le couplage maximal entre U et Y est de taille 2 et égal au nombre de sorties.

La longueur minimale de ce couplage est $L_2(U, Y) = 5$. La longueur minimale d'un chemin d'une entrée à y_1 est $L_1(U, y_1) = 3$. La longueur minimale d'un chemin d'une entrée

à y_2 est $L_1(U, y_2) = 2$.

Alors, la condition $L_m(U, Y) = \sum_{i=1}^m L_i(U, Y(i))$ est vérifiée. Le problème du découplage par retour d'état du système Σ_Λ est donc génériquement soluble.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, les systèmes linéaires structurés ont été présentés. Ils représentent une classe particulière de systèmes linéaires. La notion de généricité a été abordée puisqu'elle joue un rôle important dans l'étude de tels systèmes. Comme l'approche graphique est un outil intéressant pour l'étude des propriétés génériques des systèmes structurés, nous avons montré comment associer un graphe orienté à ces systèmes. Des illustrations sur le rang générique d'une matrice de transfert, l'observabilité générique et le problème du découplage par retour d'état ont été présentées.

Chapter 2

Détection et localisation de défauts -Fault Detection and Isolation(FDI) à l'aide de l'analyse structurelle

2.1 Introduction

Les systèmes conçus et fabriqués par l'homme (avions, véhicules, systèmes de production...) sont de plus en plus complexes à cause du grand nombre de composantes constituant ces systèmes. Malgré la progression rapide des nouvelles technologies, ces systèmes ne sont pas à l'abri de défaillances. L'exigence de sécurité et de maîtrise de la disponibilité des équipements rend le diagnostic (détection et localisation de défauts...) très important. Bénéficiant des outils existants en automatique, plusieurs approches de diagnostic ont été développées par différentes communautés de recherche, donnant des solutions au problème de détection et localisation de défauts. En fonction du type de connaissances dont nous disposons, ces approches peuvent être des méthodes à base des modèles quantitatifs, modèles qualitatifs ou des méthodes à base de l'historique du procédé. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI - Fault Detection and Isolation) a reçu une attention considérable dans les dernières années [12, 1]. Ce problème consiste à mesurer des données au cours du fonctionnement réel du système afin de déterminer si le fonctionnement du système est normal ou défaillant. Dans ce but, des signaux indicateurs de défauts nommés résidus sont construits à partir des données disponibles et ensuite utilisés pour localiser les défauts dès que possible. Le principe est que la valeur des résidus est nulle lorsque le système est en fonctionnement normal et différente de zéro en cas de défaillance. Dans la suite de cette section, nous rappelons le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs et les conditions pour sa solubilité générique. Les résidus sont générés en utilisant cette banque d'observateurs afin d'avoir un transfert défauts-résidus diagonal indépendamment des perturbations.

Dans ce chapitre, nous considérons un système linéaire sujet à des défauts additifs et affecté par des perturbations et nous abordons le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Dans un premier temps, nous rappelons les conditions de solubilité générique de ce problème qui ne dépendent que de la structure interne du système et pas de valeurs spécifiques des paramètres. Dans notre étude, le problème de détection et localisation de défauts est envisagé d'un point de vue structurel. L'avantage de cette approche structurelle est que les conditions de solubilité peuvent être représentées de manière assez simple sur le graphe et donc peuvent être vérifiées en utilisant des algorithmes standard de l'optimisation combinatoire. Cette approche est utile principalement à un niveau d'analyse. Si les conditions de solubilité sont satisfaites, il est nécessaire d'utiliser des méthodes existantes afin d'obtenir une solution pratique.

2.2 Formulation du problème

Considérons un système linéaire représenté par les équations d'état suivantes:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lf(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) + Mf(t) + Hd(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec:

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$; Le vecteur d'état,
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$; Le vecteur d'entrée (commande),
- $f(t) \in \mathbb{R}^r$; Le vecteur de défaut,
- $d(t) \in \mathbb{R}^q$; Le vecteur de perturbation,
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$; Le vecteur de sortie mesurée,

Les matrices A, B, L, E, C, M et H sont des matrices de dimensions appropriées.

Un ensemble de résidus dédiés est généré en utilisant une banque de r observateurs pour le système (2.1), selon le schéma [Chen et Patton, 1999], voir Figure (2.1). Chaque résidu est conçu pour être sensible à un seul défaut et reste insensible aux autres défauts et aux perturbations.

Le $i^{\text{ème}}$ observateur de cette banque de r observateurs est construit comme suit:

$$\dot{\hat{x}}^i(t) = A\hat{x}^i(t) + K^i(y(t) - C\hat{x}^i(t)) + Bu(t), \quad (2.2)$$

où $\hat{x}^i(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état de $i^{\text{ème}}$ observateur et K^i , le gain de l'observateur conçu tel que $\hat{x}^i(t)$ converge asymptotiquement vers $x(t)$ quand il n'existe pas de défaut ($f(t) = 0$) ni de perturbation ($d(t) = 0$).

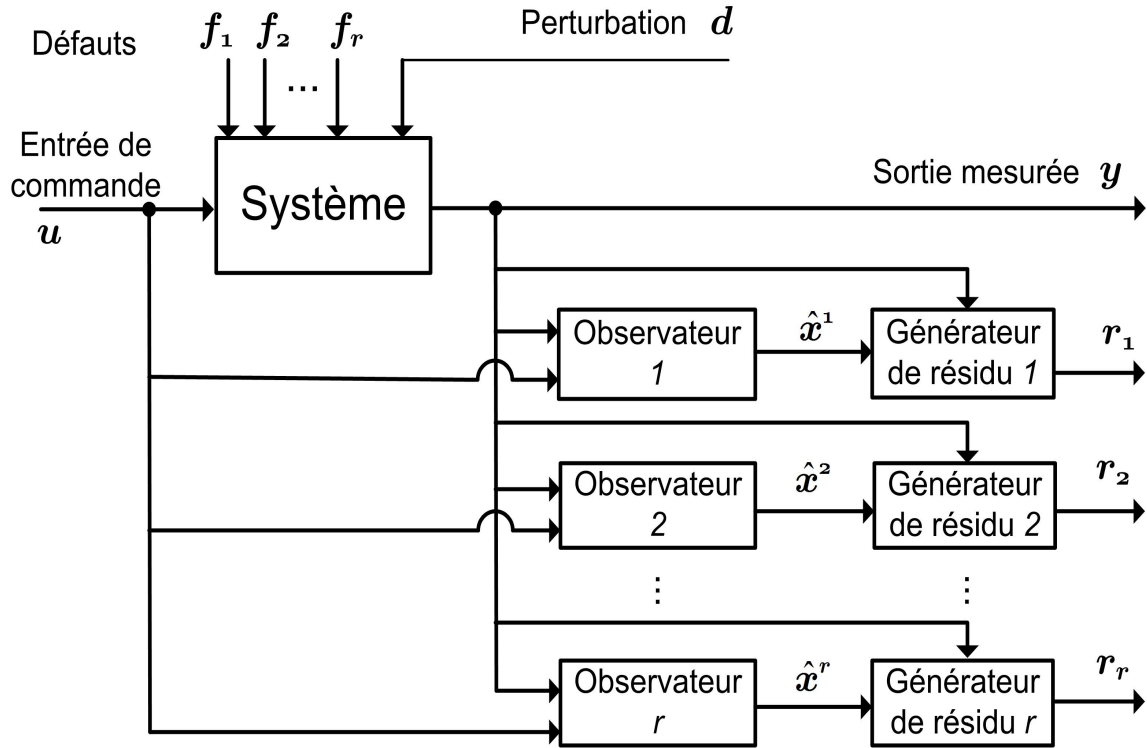


Figure 2.1: Le schéma de la banque d'observateurs

Dans ce cas, les résidus sont définis comme:

$$r_i(t) = Q^i(y(t) - C\hat{x}^i(t)), \text{ pour } i = 1, \dots, r \quad (2.3)$$

où Q^i est une matrice de dimension $1 \times p$.

Le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs pour le système du type (2.1) consiste à trouver, si possible, les matrices K^i et Q^i telles que pour $i = 1, 2, \dots, r$:

- $A - K^i C$ est stable,
- la matrice de transfert entre les perturbations et les résidus est nulle,
- la matrice de transfert entre les défauts et les résidus est non singulière, propre et diagonale.

Le transfert des perturbations et des défauts aux résidus s'écrit alors sous la forme:

$$r(s) = T(s) \begin{pmatrix} d(s) \\ f(s) \end{pmatrix}$$

avec

$$T(s) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & t_{11}(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{22}(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & t_{rr}(s) \end{pmatrix}$$

où $t_{ii}(s) \neq 0$ pour $i = 1, 2, \dots, r$.

2.3 Solubilité générique du problème FDI

Comme présenté dans le Chapitre 1, la notion de système structuré est un outil puissant pour étudier certaines propriétés du système qui en général ne dépendent que la structure interne du système et pas de la valeur des paramètres. Dans [Commault, Dion, Sename et Motyeian, 2002; Commault et Dion, 2007], les auteurs ont utilisé les systèmes structurés pour l'étude du problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs. Ces modèles prennent en compte les relations entre les variables internes sans fixer la valeur exacte des paramètres.

Considérons maintenant un système linéaire comme décrit dans (2.1), mais avec des coefficients paramétrés, noté \sum_{Λ}^{fd} :

$$\sum_{\Lambda}^{fd} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\Lambda}x(t) + B_{\Lambda}u(t) + L_{\Lambda}f(t) + E_{\Lambda}d(t) \\ y(t) = C_{\Lambda}x(t) + M_{\Lambda}f(t) + H_{\Lambda}d(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

Le graphe associé $G(\sum_{\Lambda}^{fd}) = (V, W)$ du système \sum_{Λ}^{fd} est construit de la même façon que dans la section 1.2.3, c'est-à-dire:

- L'ensemble des sommets : $V = U \cup X \cup Y \cup D \cup F$ où:
 - $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ est l'ensemble de sommets d'entrée et correspond aux m entrées du système.
 - $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble de sommets d'état et correspond aux n états du système.
 - $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie et correspond aux p sorties du système.
 - $D = \{d_1, d_2, \dots, d_q\}$ est l'ensemble de sommets de perturbation et correspond aux q perturbations du système.
 - $F = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ est l'ensemble de sommets de défaut et correspond aux r défauts du système.

• L'ensemble des arcs $W = W_{UX} \cup W_{XX} \cup W_{DX} \cup W_{FX} \cup W_{XY} \cup W_{FY} \cup W_{DY}$ où:

- $W_{UX} = \{(u_j, x_i) | b_{ij} \neq 0\}$,
- $W_{XX} = \{(x_j, x_i) | a_{ij} \neq 0\}$,
- $W_{XY} = \{(x_j, y_i) | c_{ij} \neq 0\}$,
- $W_{DX} = \{(d_j, x_i) | e_{ij} \neq 0\}$,
- $W_{FX} = \{(f_j, x_i) | l_{ij} \neq 0\}$,
- $W_{DY} = \{(d_j, y_i) | h_{ij} \neq 0\}$,
- $W_{FY} = \{(f_j, y_i) | m_{ij} \neq 0\}$,

où a_{ij} (resp. $b_{ij}, c_{ij}, e_{ij}, l_{ij}, h_{ij}, m_{ij}$) est l'élément (i, j) de la matrice A_Λ (resp. $B_\Lambda, C_\Lambda, E_\Lambda, L_\Lambda, H_\Lambda, M_\Lambda$).

Nous présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour que le problème de détection et localisation de défauts avec une banque d'observateurs soit génériquement soluble [Commault, Dion, Sename et Motyeian, 2002].

Théorème 8. Soit \sum_{Λ}^{fd} un système linéaire structuré du type (2.4) et son graphe associé

$G(\sum_{\Lambda}^{fd})$. Le problème de détection et localisation de défauts (FDI) avec un banque d'observateurs est **génériquement soluble** si et seulement si:

1. \sum_{Λ}^{fd} est génériquement observable,

2. $\rho(F \cup D, Y) = \rho(D, Y) + r$ où:

- $\rho(F \cup D, Y)$ et $\rho(D, Y)$ sont respectivement la taille d'un couplage maximal entre $F \cup D$ et Y , et la taille d'un couplage maximal entre D et Y ,
- r est le nombre de défauts.

La première condition nous permet d'avoir des observateurs stables pour le problème FDI.

La deuxième condition signifie qu'il existe, pour tout $i = 1, \dots, q$, un chemin $f_i - Y$ disjoint dans chaque lien $F \cup D - Y$ maximal. Il est possible de distinguer un chemin f_i -racine parmi tous les chemins. Le fait de pouvoir discerner un chemin à partir du sommet f_i signifie qu'il est possible de générer un résidu permettant de localiser le défaut f_i (reste à expliquer).

Dans le cas particulier en absence de perturbation ($D = \emptyset$), la condition de solubilité du problème FDI devient $k = r$ avec $k = \rho(F, Y)$ est la taille du couplage maximal dans $G(\sum_{\Lambda})$.

2.4 Application au Problème de la Localisation de Capteurs

Le problème de localisation de capteurs : quand une propriété considérée n'est pas satisfaite avec les capteurs initiaux du système, combien de nouveaux capteurs ajouter et où les placer pour vérifier cette propriété. Par exemple, dans le cas où le problème FDI n'est pas génériquement soluble avec les mesures disponibles, quel est le nombre minimal de capteurs à ajouter et où les placer ?

La réponse a été donné dans ([5]). Donnant d'abord les définitions suivantes:

Définition 10. *Considérons un système structuré Σ_Λ avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Soit S un séparateur de $G(\Sigma_\Lambda)$ comme définit dans (1.2.3). On associe à S l'ensemble T_S définit comme l'ensemble de tous les sommets dans n'importe quel chemin direct de F vers S à l'exception des sommets de S .*

On peut formuler alors le théorème donné dans ([5]):

Théorème 9. *Le nombre minimal de nouveaux capteurs à ajouter pour résoudre le problème FDI est égal à $r - k$. Ces capteurs doivent mesurer des variables dans T_{S^*} .*

- k : la dimension de S^* qui égale à la taille du couplage maximal dans $G(\Sigma_\Lambda)$.
- S^* est le séparateur d'entrée minimal. (Voir 1.2.3).

Théorème 10. *Le problème FDI a une solution si et seulement si pour tout séparateur d'entrée S de $G(\Sigma_\Lambda)$ avec son ensemble T_S associé, il y a au moins $r - d$ nouveaux capteurs qui mesurent des sommets dans T_S , avec d la dimension de S .*

Pour expliquer ces principaux résultats, on donne l'exemple suivant:

Exemple 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_5 + f_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + x_3 + x_4 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 + x_5 + f_2 \\ \dot{x}_4 = -4x_1 + x_5 + f_3 \\ \dot{x}_5 = -5x_5 + u + f_4 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

La taille d'un couplage maximal, par exemple $(f_1, x_1, y_1), (f_3, x_3, x_2, y_2)$, est égal à $\rho(F, Y) = 2$ (il n'existe pas 3 chemins simple disjoints $F - Y$).

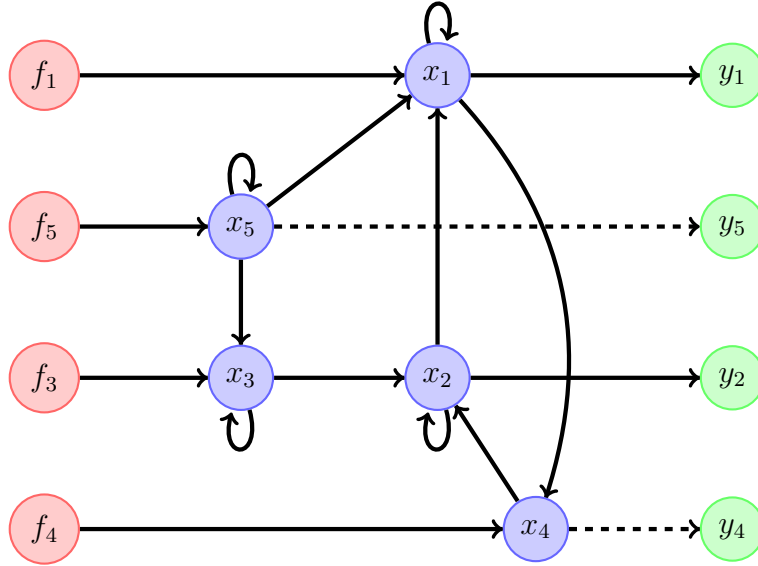


Figure 2.2: $G(\Sigma_\Lambda)$ de l'Exemple

La deuxième condition du théorème (8) n'est pas vérifiée car $\rho(F, Y) = 2 \neq r = 4$ ce qui implique que le problème FDI n'est pas soluble. Pour résoudre le problème, le théorème (9) permet de calculer le nombre minimal de capteurs à ajouter afin de rendre le problème FDI génériquement soluble. On trouve

$$r - k = r - \rho(F, Y) = 4 - 2 = 2$$

Cela veut dire qu'il faut ajouter deux nouveaux capteurs mesurant des variables de T_{S^*} . Cherchons maintenant le séparateur d'entrée minimal S^* qui est d'ordre 2. On peut vérifier que $S^* = \{x_1, x_2\}$ est le séparateur d'entrée minimal car tout chemin $F - Y$ a au moins un sommet dans S^* et de plus on peut pas trouver un séparateur d'ordre égale ou inférieur à 2 entre les fautes F et le séparateur S^* . L'ensemble T_{S^*} associé est:

$$T_{S^*} = \{x_3, x_4, x_5, f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

Le séparateur d'entrée d'ordre 3 est $S = \{x_1, x_3, f_3\}$ et son ensemble associé $T_S = \{x_5, f_1, f_2, f_3\}$. D'après le théorème (10) au moins un capteurs (parmi les deux à ajouter) doit mesurer $r - d = 4 - 3 = 1$ variables dans T_S .

Choisissons, par exemple un capteur $y_5 = x_5 \in T_S$. L'autre capteur doit mesurer une variable dans T_{S^*} . La solution envisagée est de choisir $y_4 = x_4$ (ou bien $y_3 = x_3$). Ainsi avec le nouveau couple de capteur ($y_4 = x_4, y_5 = x_5$) le problème FDI devient soluble. Il faut remarquer que le couple (x_3, x_4) ne permet pas de résoudre le problème FDI malgré que $x_3, x_4 \in T_{S^*}$ car aucun de ces variables n'appartient à T_S .

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité l'approche de l'analyse structurelle pour déterminer les conditions de solubilité du problème FDI. Ensuite, une analyse de placement de capteur a été effectuée pour déterminer le nombre et les capteurs qui assure la solubilité du problème FDI.

Conclusion générale et perspectives

Les systèmes linéaires structurés sont une classe générale de systèmes linéaires multi-variables dépendant de paramètres. Dans un système linéaire structuré on ne prend en compte que l'existence ou l'absence de relations entre les différentes variables sans s'intéresser à la valeur précise des paramètres.

Dans le premier chapitre, les systèmes linéaires structurés ont été présentés. Nous avons également montré comment associer un graphe orienté à ces systèmes. Des illustrations sur le rang générique d'une matrice de transfert, l'observabilité générique, la commandabilité générique et le problème du découplage par retour d'état ont été présentées.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné les algorithmes de l'analyse structurelle pour la solubilité du problème FDI et la localisation des capteurs.

Finalement, ce travail, qui était une continuation de notre travail de mémoire de fin d'étude [7], nous a permis d'étudier les propriétés génériques des systèmes structurés en utilisant les techniques de l'analyse structurelle.

Comme perspective, nous envisageons de continuer notre travail sur les méthodes structurelles pour étudier la reconfiguration structurelle.

Bibliography

- [1] Jan Åslund Ramon Sarrate Albert Rosich, Erik Frisk and Fatiha Nejjari. Fault diagnosis based on causal computations. *IEEE transactions on systems, man and cybernetics.*, (42), 2:371–381., 2012.
- [2] B. OULD BOUAMAMA. modélisation et supervision des systèmes en génie des procédés – approche bond graphs. Technical report, Habilitation à diriger des recherches, Laboratoire d’Automatique et Informatique Industrielle de Lille, 2002.
- [3] Djamel BOUKHETALA. Mémoire de magistère. Technical report, Ecole Nationale Polytechnique, 1983.
- [4] Perret J. M. Duchene P. et Cotteux E. Canler, J. P. Aide au diagnostic des stations d’épuration par l’observation microscopique des boues activées. Technical report, Cemagref, 1999.
- [5] Christian Commault, Jean-Michel DION, and Sameh Yakoub Agha. Location of additional sensors for fdi. *Laboratoire d’Automatique de Grenoble. LAG-CNRS*, 2006.
- [6] Jean-Michel Dion, ChristianCommault, and Jacob vander Woude. Generic properties and control of linear structured systems: a survey. *Automatica*, 39:1125 – 1144, 2003.
- [7] Soulaïmane BERKANE et Amine BOUKABOUSS. Conception à l’aide d’approches d’analyse structurelle d’un système de diagnostic -application sur un procédé biologique de traitement des eaux usées. Technical report, Ecole Nationale Polytechnique, 2013.
- [8] Jean-Michel DION et Christian COMMAULT. Approche structurelle des systèmes, de la géométrie à la théorie des graphes.
- [9] & Silverman L. M. Glover, K. Characterization of structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21:534–537, 1976.
- [10] C. T. Lin. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19:201–208, 1974.
- [11] A. Linnemann. Decoupling of structured systems. *Systems & Control Letters*, 1:79–86, 1981.

-
- [12] J. Lunze M. Blanke, M. Kinnaert and M. Staroswiecki. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer, 2006.
- [13] Jan Aslund Mattias Krysander and Mattias Nyberg. An efficient algorithm for finding over-constrained sub-systems for construction of diagnostic tests. *Linkopings universitet, Dept. of Electrical Engineering SE - 581 83 Linkoping, Sweden fmatkr, jaasl, matnyg@isy.liu.se*, 2008.
- [14] K. Murota. *Matrices and Matroids for Systems Analysis, ser. Algorithms and Combinatorics*. Springer, 2000.
- [15] & Kodama S. Ohta, Y. Structural invertibility of transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30:818– 819, 1985.
- [16] K. J. Reinschke. *Multivariable control, a graph-theoretic approach*. Berlin: Springer., 1988.
- [17] & Pearson J. B. Shields, R. W. Structural controllability of multi-input linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21:203–212, 1976.
- [18] W. M.Berlin Wonham. *Linear multivariable control: A geometric approach*. Springer., 1985.