الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

50/85

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état

Sujet

Comparaison d'Efficacités de Certains Systèmes de Vibro-Isolation

Proposé par :
Mr Marek KSIAZEK

Etudié par :
Mohamed TRAI

Dirigé par :
Mr Marek KSIAZEK

Promotion Juin 1985

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

»o«

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

en vue de l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état

Sujet

Comparaison d'Efficacités de Certains Systèmes de Vibro-Isolation

Proposé par :
Mr Marek KSIAZEK

Etudié par :
Mohamed TRAI

Dirigé par :
Mr Marek KSIAZEK

Promotion Juin 1985

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH - ALGER

ملخص

يتمثل هذا المشروع في مقارنة فعالية منظومة فعالة ومطاوعة لعزل الاهتزازات مع منظومات عزل الاهتزازات التي نتحصل عليها بواسطة طريقة فينرهوبف

Resumé

Ce projet, Consiste a Comparer l'efficacité des systèmes de vibro-isolation passifs et Actif et, celle des systèmes de vibro-isolation obtenus par la Methode de Wiener Hopf

Summary

In this study the quality of the passive and active systems of vibro isolation Were compared to the optimum systems of vibro isolation obtained from the W.H's équation

DEDICACES

A mes chérs parents qui se sont sacrifiés pour me voir atteindre ce but.

- freres Mansour et Abdelkader
- mes soeurs
- toute la famille trai
- mes amis en particulier Hani.

Je dedie ce modeste travail.

..Mohammed trai..

REMERCIEMENTS

Je tiens a exprimer ma profonde gratitude, et mes vifs remerciements à Mr Marek Ksiazek qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre avec une bonne attention dans cet travail, ainsi que tous les enseignents qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de prés ou de loin à la realisation de ce projet trouvent ici ma sincère gratitude.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Dans la vie courante on est souvent confronté à des vibrations dûes à des excitations à caractère aleatoire.

mais il faut avoüer que la plus part du temps elles sont nettement nefastes.

Le remède efficace à ces vibrations est d'assurer au maximum une bonne isolation vibratoire des systèmes mécaniques.

Pour le faire on applique des methodes à outil mathématique; la methode de Wiener Hopf et celle de phillips permettant de trouver des systèmes à vibroisolation bien appropriés.

1- Les differents types de vibroisolation qui peuvent exister sont :

Systemes de vibroisolation actifs actionnés par des servomécanismes (asservissements); qui sont des systemes de commandes possédent des proprietés bien spécifieés :

. Amplification de puissance de puis un signal bas vers un signal de puissance elevée

. Independance vis a vis du milieu exterieur

. Adjonction d'un retour
2. systèmes de vibro isolation passifs qui agissent par action d'un ressort et amortisseur
3. Combinaison des deux systèmes de vibroisolation ; passifs et actifs.

L'objet de cette etude est de faire Une comparaison d'efficacité de certains systèmes de vibroisolation.

Les phenomenes aleatoires ne peuvent être connus que par leurs caracteristiques statistiques.
Les methodes statistiques sont maintenant largement utilisées dans tous les domaines de la science
Pour le faire il a eté jugé utile et necessaire de consacrer Un premier chapitre à Un bref rappel sur des notions statistiques avant d'abo cette etude.

I GENERALITES

1. Notions generales sur les processus stochastiques

Dans les problèmes appliqués, on rencontre des grandeurs aleatoires dont les valeurs varient au cours du processus experimental ; par exemple des grandeurs aleatoires qui changent avec le temps.

L'indetermination du deroulement futur, de la reali-sation d'un processus, C'est à dire le fait qu'on ne puisse jamais prédire le caractère du processus pour le futur, même si le caractère est connu pour le passé, Constitué la proprieté fondamentale des processus aleatoires.

1.1 Definition d'une fonction aleatoire

On appelle fonction aleatoire Une fonction pour laquelle à chaque valeur de la variable independante corresp-ond Une valeur aleatoire

1.2 Processus stochastiques, et fonctions aleatoires

Un processus stochastique est en principe Un procedé de definition d'Une fonction aleatoire $x(t)$ du temps t, dans lequel le hasard intervient à chaque instant t C'est à dire quelque soit la valeur t_1 de t que l'on Considere et quelque soit τ petit, la connaissance de $X(t)$ depuis l'instant initial t_0 jusqu'a l'instant t_1 ne determine pas les valeurs de cette fonction dans l'intervalle $(t_1; t_1+\tau)$; Ces valeurs restent aleatoires.

3 Caracteristiques d'un processus aleatoire

Pour d'ecrire les proprietés fondamentales d'un processus aleatoire, on utilise cinq fonctions non aleatoires caracterisant ce processus:

a. l'esperance mathématique de la fonction aleatoire, qui caracterise le comportement moyen du processus en fonction du temps

b. l'esperance mathématique du carré de la fonction aleatoire (dispersion) qui caractérise en fonction du temps la dispersion des valeurs de la fonction autour de sa valeur moyenne.

b. la densité de dispersion; donne une ideé de la repartition de la fonction aleatoire à un instant donné

c. la fonction de correlation

d. la densité spectrale

Ces deux dernieres sont de nouvelles caracteristiques qui sont introduites pour étudier les processus aleatoires continus.

Moyennes statistiques.

a. Valeur moyenne

$$\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,W(x,t)\,dx$$; W(x,t) densité de probabilité du 1er ordre

b. moyenne quadratique

$$\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,W(x,t)\,dx$$

c. fonction d'auto-correlation

C'est une fonction non aleatoire, caracterise la fonction aleatoire X(t), et qui permet d'etablir le degré de dependance de deux valeurs de la fonction aleatoire; elle est definie par:

$$K_x(t_1,t_2) = \overline{X(t_1)\cdot X(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1\cdot x_2\,W(x_1,x_2,t_1,t_2)\,dx_1 dx_2$$

d. variance

$$\sigma^2_{x}(t) = \overline{\left(x(t) - \overline{x(t)}\right)^2} = \overline{x^2(t)} - \left(\overline{x(t)}\right)^2$$

2. Differents processus aleatoires

2.1 Base de la theorie des processus de Markov

Ces processus interviennent dans de nombreux phenomenes comme, cels de desintegration, radioactivité,..

dans la theorie des processus de Markov; la loi de repartition de l'ordonnée du processus à l'instant futur quelconque t_i depend seulement de la valeur de l'ordonnée à l'instant present t_{i-1}, et non des valeurs de

la fonction dans le passé ; C'est à dire que la connaissance supplementaire des valeurs de la fonction aleatoire pour $t < t_{i-1}$ ne modifie pas le caractere de repartition des ordonneés de la fonction pour $t \geqslant t_i$.
Physiquement cette particularité des processus aléatoires est équivalente aux processus sans conséquence (aux processus qui ne dependent pas de l'histoire précedente).
Mathématiquement les processus de Markov sont completement caracterisés par la seule connaissance des lois de repartition bidimensionnelle, Conformement à cette derniere on peut écrire :

$$W(x_2,t_2\,;\,x_1,t_1\,;\,x_0,t_0)=W(x_2,t_2/x_1,t_1\,;\,x_0,t_0)\cdot W(x_1,t_1,x_0,t_0)$$

de même $W(x_1,t_1\,;\,x_0,t_0)=W(x_1,t_1/x_0,t_0)\cdot W(x_0,t_0)$

Comme $W(x_2,t_2/x_1,t_1\,;\,x_0,t_0)=W(x_2,t_2/x_1,t_1)$ ceci nous donne :

$$W(x_2,t_2,x_1,t_1\,;\,x_0,t_0)=W(x_2,t_2/x_1,t_1)\cdot W(x_1,t_1/x_0,t_0)\cdot W(x_0,t_0)$$

pour Une densité de probabilité n dimensionnelle on obtient :

$$W_n(x_n,t_n,x_{n-1},t_{n-1},\dots,x_0,t_0)=W(x_n,t_n/x_{n-1},t_{n-1})\cdot W(x_{n-1},t_{n-1}/x_{n-2},t_{n-2})\cdot$$

$\dots W(x_0,t_0)$; avec :

$$W(x_i,t_i/x_{i-1},t_{i-1})\geqslant 0 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} W(x_i,t_i/x_{i-1},t_{i-1})\,dx_i=1$$

2.2 Processus aleatoires stationnaires

Les processus aleatoires qui se deroulent toujours approximativement de la même façon dans le temps, et qui presentent l'aspect de vibrations aleatoires continues relativement à une certaine valeur moyenne, avec des caracteristiques probabilistes ne variant pas sensiblement avec le temps, ont obtenu une trés large diffusion. De tels processus aleatoires sont dits stationnaires. On peut considerer un processus stationnaire comme un processus qui se deroulerait sur une dureé infiniment longue ; en ce sens, un processus stationnaire est analogue au regime de vibrations permenant lorsque les paramètres des vibrations établies ne dependent plus de l'origine du temps.

2.3 Processus ergodiques

Un processus ergodique est un processus selon laquelle un grand nombre d'observations effectueés sur un systeme unique dont le mouvement est regi par un processus aleatoire stationnaire à des instants arbitraires à les même proprietés statistiques que le même nombre d'observations effectueés en un seul et même instant, sur des systèmes homogenes au premier arbitrairement choisi ; sur cette hypothese on arrive à faire une enorme simplification d'etude presentant un grand interet pratique ; ce qui reduit le degré des études experimentales, et par conséquents, reduction des coûts materiels.

a. Moyennes temporelles du processus stationnaire ergodique

a.1. Valeur moyenne

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt$$, lorsque cette limite existe.

a.2. moyenne quadratique.

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$$

a.3 dispersion

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(x(t) - \overline{x(t)} \right)^2 dt$$

2.4 Processus gaussiens

Ces processus interviennent dans de nombreux phenomènes comme cels des effets physiques qui apparaissent par exemple avec les influences du profil de la route, ou d'une piste d'aerodrome

Mathematiquement un processus est gaussien ou normal si pour chaque ensemble fini d'instants t_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

les variables aleatoires $X_i = X(t_i)$ ont Une densité de probabilité gaussienne de la forme suivante qui depend generalement des instants t_i aux quels on observe le processus :

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

3 Fonction de densite spectrale energetique

La Densité spectrale $S(\omega)$ se definit comme la transformeé de fourier de la fonction de correlation $R(\tau)$.

Soit, $$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau \qquad (1)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$X_T(j\omega)$ est la transformeé de fourier de $x(t)$.

Soit la fonction $$R_T(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\cdot x(t+\tau)\, dt \qquad (2)$$

(1) et (2) nous donne :

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\, x_T(t+\tau)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\cdot x_T(t+\tau)\, e^{-j\omega(t+\tau)} \cdot e^{j\omega t} dt$$

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt . \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)\, e^{-j\omega(t+\tau)}\, d\tau$$

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X_T(-j\omega) . X_T(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| X_T(j\omega) \right|^2$$

4 Expression de la dispersion de la grandeur de sortie dún syste lineaire

41 Cas general

Soit $x_0(t)$ et $x(t)$ les deux grandeurs d'entreé et de sortie d'Un système lineaire.

On suppose que l'esperance mathématique $\overline{x}(t)$ est nulle

La dispersion de $x(t)$ sera donc:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} x(t) . \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \right\} dt$$

$X(j\omega)$: represente la transformeé de fourier de $x(t)$.

de même $X_x(-j\omega) = H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega)$;

$H_{\frac{x}{x_0}}$; represente la fonction de transfert du systeme linéaire, d'ou:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) . \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega \right\} dt$$

aprés permutation des deux integrales on obtient:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega) . \frac{1}{2\pi}\, d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt = H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\, X_{x_0}(j\omega)$

on obtient donc :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 \cdot \left|X_{x_0}(j\omega)\right|^2 d\omega$$

Soit :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 \cdot \lim \frac{1}{2T}\left|X_{x_0}(j\omega)\right|^2 d\omega$$

avec $S_{x_0}(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 d\omega$

d'où :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 S_{x_0}(\omega)\, d\omega$$

42 dispersion de l'acceleration de sortie

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(j\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega \qquad ; \; j\omega = s$$

43 dispersion du deplacement relatif

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(j\omega)\right|^2 S_{x_0}(\omega)\, d\omega$$

44 dispersion de la vitesse de sortie

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(j\omega)}{j\omega}\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega$$

5. systemes stables et realisables

5.1 Systemes stables

On dit qu'un système est stable si tout signal d'entré borné produit Un signal de sortie borné.
la stabilite est formulée dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.

a. Dans le domaine temporel.

La condition necessaire et suffisante pour qu'Un système soit stable est que sa fonction de ponderation soit absolument integrable

b. Dans le domaine frequentiel

La condition de stabilité definie ci dessus recquiert que le domaine de convergence de la fonction de transfert $H(P)$ contienne l'axe imaginaire $\alpha = 0$;

tel que $P = \alpha + j\omega$

$$|H(P)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| \, |e^{-pt}| \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| e^{-\alpha t} dt$$

dans le cas ou $\alpha = 0$; on a $|H(P)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \leq \infty$

5.2 systemes realisables

Un système est dit stable si l'apparition d'un signal à sa sortie ne peut preceder l'application d'un signal à son entreé.

a: Dans le domaine temporel

Un signal est realisable si la fonction de transfert $H(s)$ ait pour domaine de convergence le demi ~~plan~~ defini par $Re(s) > \alpha_0$; α_0 = nombre fini des singularités de $H(s)$ se trouvent de la droite definie par $s = j\omega + \alpha_0$

de sorte que $h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H(s)\, e^{st}\, ds$ est nulle pour $t<0$

5.3 systemes physiquement realisables

Un système est physiquement realisable s'il est à la fois stable et realisable

a: Dans le domaine temporel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \quad \text{et} \quad h(t) = 0 \quad \text{pour } t \text{ negative}$$

b: Dans le domaine fréquentiel

On applique le critère de paley. Wiener

si $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\text{Log}\, |H(j\omega)||}{1+\omega^2}\, d\omega$ est bornée ; alors $|H(j\omega)|$ est le module de la fonction de transfert d'un système physiquement realisable

si $I < \infty$; alors $|H(j\omega)|^2 = H^*(j\omega) \cdot H(j\omega)$ peut être mis en produit de facteurs et il est possible que $H(j\omega)$ soit choisi de sorte que $H(s)$ ne contienne pas de pôles dans la partie droite du plan complexe $Re\{s\}>0$, la fonction de transfert doit avoir pour domaine de convergence tout le demi plan $Re\{s\} \geqslant 0$, c'est à dire qu'elle doit être analytiquement dans le demi plan $Re\{s\}>0$ et ne pas avoir de singularités sur l'axe imaginaire.

6 Systemes lineaires stationaires

d'une façon general si la reponse d'un systeme, lorsqu'on applique à son entreé une somme de signaux, est égale à la somme des reponses qu'on aurait obtenues si chaque signal avait été appliqué seperément. et si le signal de sortie devient λ fois plus grand si le signal d'entré devient λ fois plus grand.

Mathématiquement: H est dit lineaire, ainsi que le système associe si:

$$H\{x_1(t)+x_2(t)\} = y_1(t)+y_2(t)$$

$$H\{\lambda x(t)\} = \lambda H\{x(t)\}$$

$x(t)$ et $y(t)$ sont les grandeurs d'entreé et de sorbé d'un système

H : operateur fonctionnel qui transforme l'espace du processus $x(t)$ dans l'espace du processus $y(t)$.

II Problematique de criteres

1 cas general

d'Une façon generale, pour obtenir Une meilleure vibro-isolation d'un systeme, il faut avoir :

a. Une dispersion maximale, ce qui assure la souplesse du système de vibro isolation.

b. deplacements relatifs limités, ce qui assure la rigidité du système de vibro-isolation

1.1 critere de deplacement relatif

Pour Un système donné ayant pour espace espace des signaux d'entré $x_0(t)$ et pour espace des signaux de sortie $x(t)$, On desire que le deplacement relatif $\delta(t) = x_0(t) - x(t)$ soit minimum, que l'on caracterise par sa valeur moyenne quadratique :

$$\overline{\delta^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta^2(t)\, dt$$

1.2 critere d'acceleration minimale

Pour repondre aux normes hygiéniques de confort et de securité dans le domaine de vibro-isolation, on emploie le critère d'acceleration minimale ; assurant la minimisation de la dispersion de le système de vibro-isolation ; dans le cas l'accélération du système est caractérisée par par sa valeur quadratique moyenne

$$\langle \ddot{x}^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \ddot{x}^2(t)\, dt$$

13 Recherche d'un cas optimum

Le cas optimum qui obeille aux deux critères de vibro isolation se traduit par la minimisation de la fonctionnelle C :

$$C \triangleq \int_0^{+\infty} [\delta(t)]^2 dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{+\infty} [\ddot{x}_i(t)]^2 dt$$

λ_i : multiplicateurs de lagrange

14 Forme de la fonctionnelle

On suppose que les valeurs moyennes de $\delta(t)$ et de $\ddot{x}_i(t)$ sont nulles ; on obtient alors.

$\langle \delta^2(t) \rangle = \sigma^2_{x-x_0}$; dispersion de l'écart

$\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \sigma^2_{\ddot{x}_i}$ dispersion de l'accélération

La forme de la fonctionnelle sera donc :

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \sigma^2_{\ddot{x}_i}$$

telle que :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 \cdot S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 \cdot S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds$$

Nota :

$\delta(t) = x(t) - x_0(t)$

$\ddot{x}_i(t) =$ Acceleration de la masse i

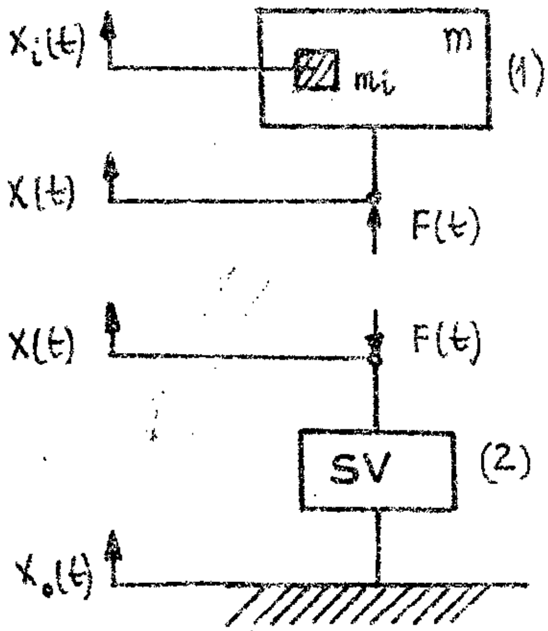
telle que : $\delta(t) = 0 \qquad t < 0$

$\ddot{x}_i(t) = 0 \qquad t < 0$

III CONSTRUCTION ANALYTIQUE DES SYSTEMES DE VIBRO-ISOLATION

1: Cas general

dans le cas general, on represente le probleme à etudier de la façon suivante :



(1) : modèle donné representant le systeme à vibro-isoler

(2) : systeme de vibro-isolation, qui peut être à structure connue ou inconnue

2: Conditions de base

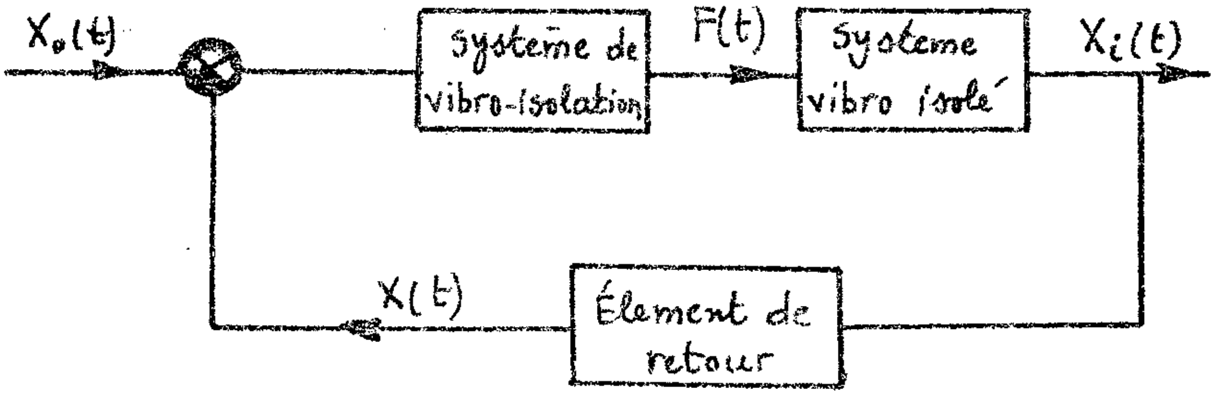
- Le systeme de vibro-isolation est un systeme lineaire
- On suppose qu'il n'existe pas de vibrations verticales
- La nature de $X_o(t)$ est un processus normal stationnaire et ergodique, sa densité spectrale

energetique est Une fonction rationnelle de ω^2

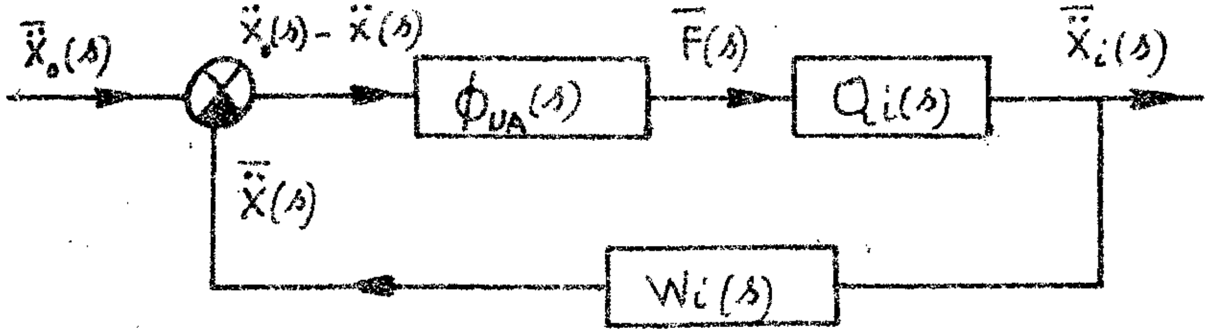
- On suppose qu'il n'ya aucune action des systèmes sur l'excitation $X_0(t)$

3 Presentation du systeme

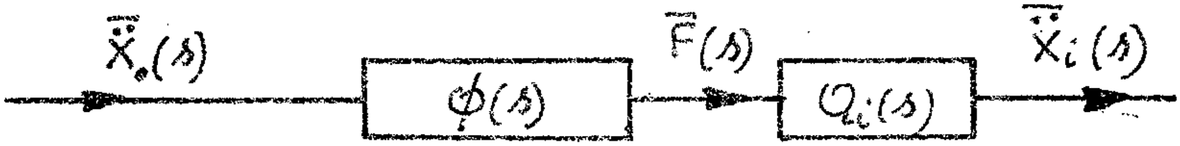
a: En boucle fermeé :



En passant par les transformations de laplace: $\ddot{\bar{X}}_0(s)$; $\ddot{\bar{X}}_i(s)$; $\ddot{\bar{X}}(s)$; on obtient le schema suivant :



b: En boucle ouvert.



c : Formulations mathematiques sur les fonctions de transferts :

- $H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \dfrac{\overline{X}(s) - \overline{X}_0(s)}{\overline{\ddot{X}}_0(s)} = \dfrac{\phi(s) \cdot G(s) - 1}{s^2}$

- $H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s) \cdot L_i(s) \cdot \phi(s)$

tels que $\phi(s) = \dfrac{\overline{F}(s)}{\overline{\ddot{X}}_0(s)}$, $G(s) = \dfrac{s^2}{L(s)}$; $L(s) = \dfrac{\overline{F}(s)}{\overline{X}(s)}$

$L_i(s) = \dfrac{\overline{X_i}(s)}{\overline{X}(s)}$

$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s)$

- $\phi(s) = \dfrac{1}{\varphi(s) \cdot R(s) \cdot G(s)} \cdot \left\{ \dfrac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$

$\phi(s)$: represente la fonction optimum du systéme de vibro-isolation pour laquelle la fonctionnelle C est minimale

$\phi(s)$ est demontreé en respectant les conditions de stabilité du systéme,

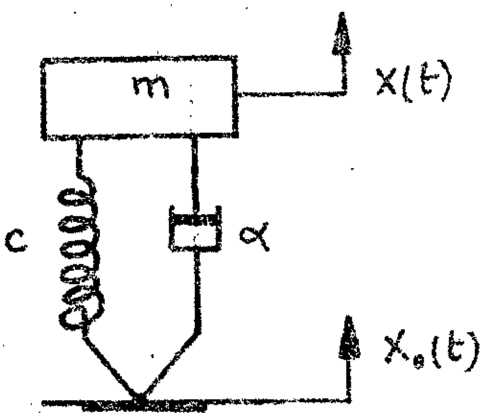
$\varphi(s)$ est calculé de l'expression suivante :

$S_{\ddot{x}_0}(s) = S_0 \, s^4 \varphi(s) \varphi(-s)$, $R(s) R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s) L_1(-s)$

$G(s) = \dfrac{s^2}{L(s)}$ où $L(s) = \dfrac{\overline{F}(s)}{\overline{X}(s)} = m s^2$, m = masse du corps

IV SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION POUR VIBRO-ISOLER UN CORPS RIGIDE

1. Systeme de vibro isolation à structure connue



C'est Un système passif representé par Un ressort de rigidité c et Un amortisseur caracterisé par la constante α
m = masse d'Un model donné, representant le corps à vibro-isoler

2. Determination de la fonctionnelle

La fonctionnelle C peut être trouvée par deux methodes: la mèthode de Wiener hopf et la methode de phillips (derivation) qui sont tout à fait differentes.
la methode de Wiener hopf elle ne se contente pas de determiner les valeurs optimales des paramètres libres d'Un système deja dessiné ou realisé ; mais elle cherche d'emblée la forme des fonctions de transfert

assurant à l'ensemble des performances optimales, par contre la méthode de phillips cherche à determiner les valeurs optimales des paramètres libres d'un système realisé, dans notre cas elle cherche à optimiser les valeurs de c et α

2.1 Deteterminaton de C_{opt} et α_{opt}

a: Excitation par un bruit blanc

Un bruit blanc est un bruit où toutes les fréquences sont presentées à la même amplitude, soit

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = \sigma_0^2 = cte$$

En basant sur notre schema.

la relation fondamentale de la dynamique nous donne:

$$m\ddot{x} = -\alpha(\dot{x}-\dot{x}_0) - c(x-x_0)$$

Faisons intervenir la transformation de fourier:

$$ms^2\bar{x}(s) = -\alpha s(\bar{x}(s)-\bar{x}_0(s)) - c(\bar{x}(s)-\bar{x}_0(s)) \text{ soit}$$

$$ms^2\bar{x}(s) = -\bar{x}(s)(c+\alpha s) + \bar{x}_0(s)(c+\alpha s) \qquad \text{d'où}$$

$$\bar{x}(s)(ms^2+\alpha s+c) = \bar{x}_0(s)(c+\alpha s) \text{ , ce qui nous donne}$$

$$\frac{\bar{x}(s)}{\bar{x}_0(s)} = H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{\alpha s + c}{ms^2+\alpha s+c}$$

la dispersion de l'accélération est definie par:

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} |H_{\frac{x}{x_0}}(s)|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} H(s)\cdot H(-s)\, S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\alpha s + c}{m s^2 + \alpha s + c}\cdot\frac{-\alpha s + c}{m s^2 - \alpha s + c}\cdot \sigma_0^2\, ds = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{C(s)}{d(s)}\,\frac{C(-s)}{d(s)}\cdot ds$$

$$= \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\alpha s + c}{m s^2 + \alpha s + c}\cdot\frac{C(-s)}{d(-s)}\, ds \;= \sigma_0^2 \cdot I_2^{(1)}$$

telle que $I_2^{(1)} =$ (table d'integration $= \dfrac{C_1^2 d_0 + C_0^2 d_2}{2 d_0 d_1 d_2}$

avec $C_0 = c$; $C_1 = \alpha$

$d_0 = c$; $d_1 = \alpha$; $d_2 = m$ d'où

$$I_2^{(1)} = \frac{\alpha^2 + cm}{2\alpha m}$$, ce qui nous donne.

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \sigma_0^2 \cdot \frac{\alpha^2 + mc}{2\alpha m}.$$

La dispersion de l'ecart est definie par :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 \cdot S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\bar{x}(s) - \bar{x}_0(s)}{\bar{\ddot{x}}_0(s)} = \frac{1}{s^2 \bar{x}_0}\left(\bar{x} - \bar{x}_0\right) = \frac{1}{s^2}\left(H\frac{x}{x_0} - 1\right);$$ d'où

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-m}{m s^2 + \alpha s + c}$$, On aura donc.

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{-m}{m s^2 + \alpha s + c}\;\frac{-m}{m s^2 - \alpha s + c}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{m^2}{2c\alpha}$$

Le critère d'optimisation est donné par la forme de la fonctionnelle suivante : $C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\, \sigma^2_{\ddot{x}_0}$, où

. λ : multiplicateur de lagrange on obtient donc

$$C = \frac{\sigma_0^2}{2}\left(\frac{m^2}{\alpha c} + \lambda \frac{\alpha^2 + mc}{m\alpha}\right) \quad (1)$$

Le système suivant $\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial c} = 0 \\ \dfrac{\partial C}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$ nous donne :

$$C_{opt} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad \alpha_{opt} = m\sqrt[4]{\frac{4}{\lambda}} \quad ; \text{ avec}$$

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \quad ; \quad \lambda_0 = 1[s^6] \; ; \; \rho \in (0 \div 1) \Rightarrow \lambda > 0$$

nous remplaçons les valeurs C_{opt} et α_{opt} dans l'expression (1) on obtient :

$$C_{PH} = \frac{2}{\sqrt{2}} \sigma_0^2 \lambda^{3/4} = \sqrt{2}\, \sigma_0^2 \lambda^{3/4}$$

C_{opt} et α_{opt} depend de la masse m et λ

C_{PH} : represente la fonctionnelle obtenue par la methode de phillips.

22 Determination de la fonctionnelle par la methode de w-hopf

La fonction optimum du système de vibro-isolation est donné par :

$$\phi(s) = \frac{1}{\varphi(s)\cdot R(s)\cdot G(s)}\cdot\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \quad \text{avec}$$

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = S_0\, s^4 \varphi(s)\cdot\varphi(-s) = \sigma_0^2 s^4 \cdot \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(-s)^2} \quad \text{d'où}$$

$$S_0 = \sigma_0^2 \; ; \quad \varphi(s) = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad G(s) = \frac{1}{m}$$

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{x}(s)} = 1$$ ce qui nous donne :

$$R(s).R(-s) = 1 + \lambda s^4 = (As^2 + Bs + C)(As^2 - Bs + C)$$; après identification on trouve :

$$A = \sqrt{\lambda} \; ; \quad B = \sqrt{2}\sqrt[4]{\lambda} \; ; \quad C = 1$$, soit

$$\phi(s) = \frac{1}{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{m}\,(As^2+Bs+C)}\cdot\left\{\frac{1/s^2}{As^2 - Bs + C}\right\}_+$$

soit $$M = \frac{1}{s^2(As^2 - Bs + C)} = \frac{Ds+E}{s^2} + \frac{Fs+G}{As^2 - Bs + C}$$

par identification on trouve :

$$D = \sqrt{2}\,\lambda^{1/4} \; , \quad E = 1 \quad ; \quad F = -\sqrt{2}\,\lambda^{3/4}$$

On s'interesse à la partie ayant des pôles à gauche de l'axe imaginaire , on prend donc

$M_+ = \frac{Ds+E}{s^2} = \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+1}{s^2}$, ce qui nous donne

$$\phi(s) = \frac{m s^2}{As^2+Bs+C} \cdot \frac{Ds+E}{s^2} = m \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-\frac{1}{4}}s + \lambda^{-\frac{1}{2}}}{s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s+\lambda^{-1/2}}$$

la dispersion de l'acceleration dans le cas sera egale à $\sigma^2_{\ddot{x}} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\,ds$ avec

$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = G(s)\cdot\phi(s)\cdot L_1(s) \quad ; \quad L_1(s) = 1$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{1}{m}\, 1\, \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-\frac{1}{4}}s+\lambda^{-1/2}}{s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s+\lambda^{-1/2}}\, m = \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{-\frac{1}{4}}s+\lambda^{-1/2}}{s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s+\lambda^{-1/2}} \quad \text{d'ou}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\lambda^{-1/2}+\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s}{(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s+\lambda^{-1/2})} \cdot \frac{\lambda^{-1/2}-\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s}{(s^2-\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s+\lambda^{-1/2})}\,ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2\, I_2^{(1)}$$

$I_2^{(1)} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\lambda^{-1/4}$ (table d'integration) d'ou

$$\sigma^2_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}\lambda^{-1/4}$$

la dispersion de l'ecart : $\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 ds$

avec $H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\phi(s)\cdot G(s) - 1}{s^2}$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-1}{s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{-1/4}s+\lambda^{-1/2}} \quad \text{d'ou}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{-1}{(s^2+\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})} \cdot \frac{-1}{(s^2-\sqrt{2}\,\lambda^{1/4}s+\lambda^{1/2})}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\, I_2^{(2)}$$

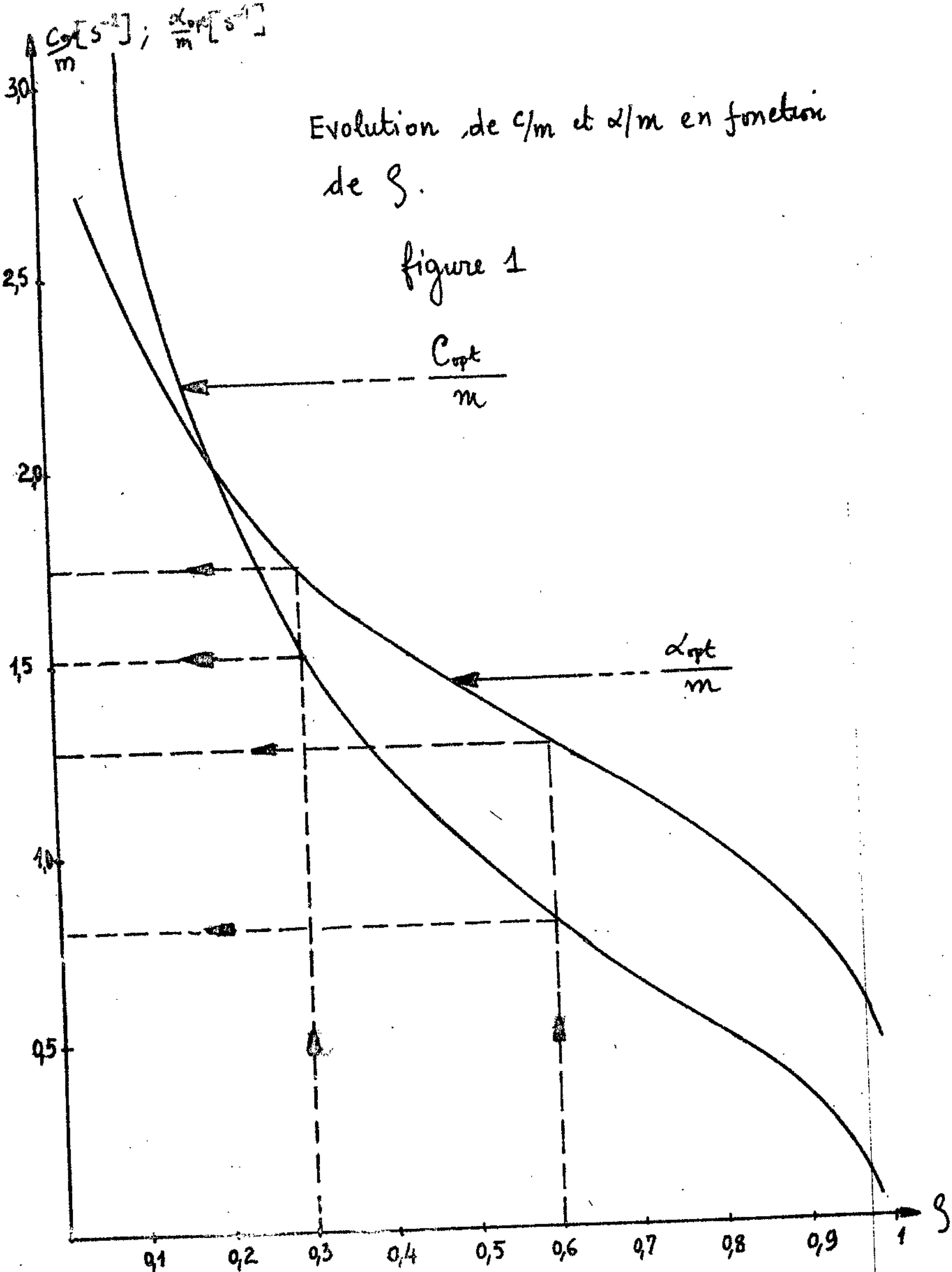
$I_2^{(2)}$ (table d'integrale) $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}\,\lambda^{-3/4}}$, soit

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\lambda^{3/4}$$, on obtient

$$C_{WH} = \frac{\sigma_0^2}{2\sqrt{2}}\lambda^{3/4} + \lambda \cdot \frac{3\sigma_0^2}{2\sqrt{2}}\lambda^{-1/4} = \frac{2\sigma_0^2\lambda^{3/4}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\sigma_0^2\,\lambda^{3/4}$$

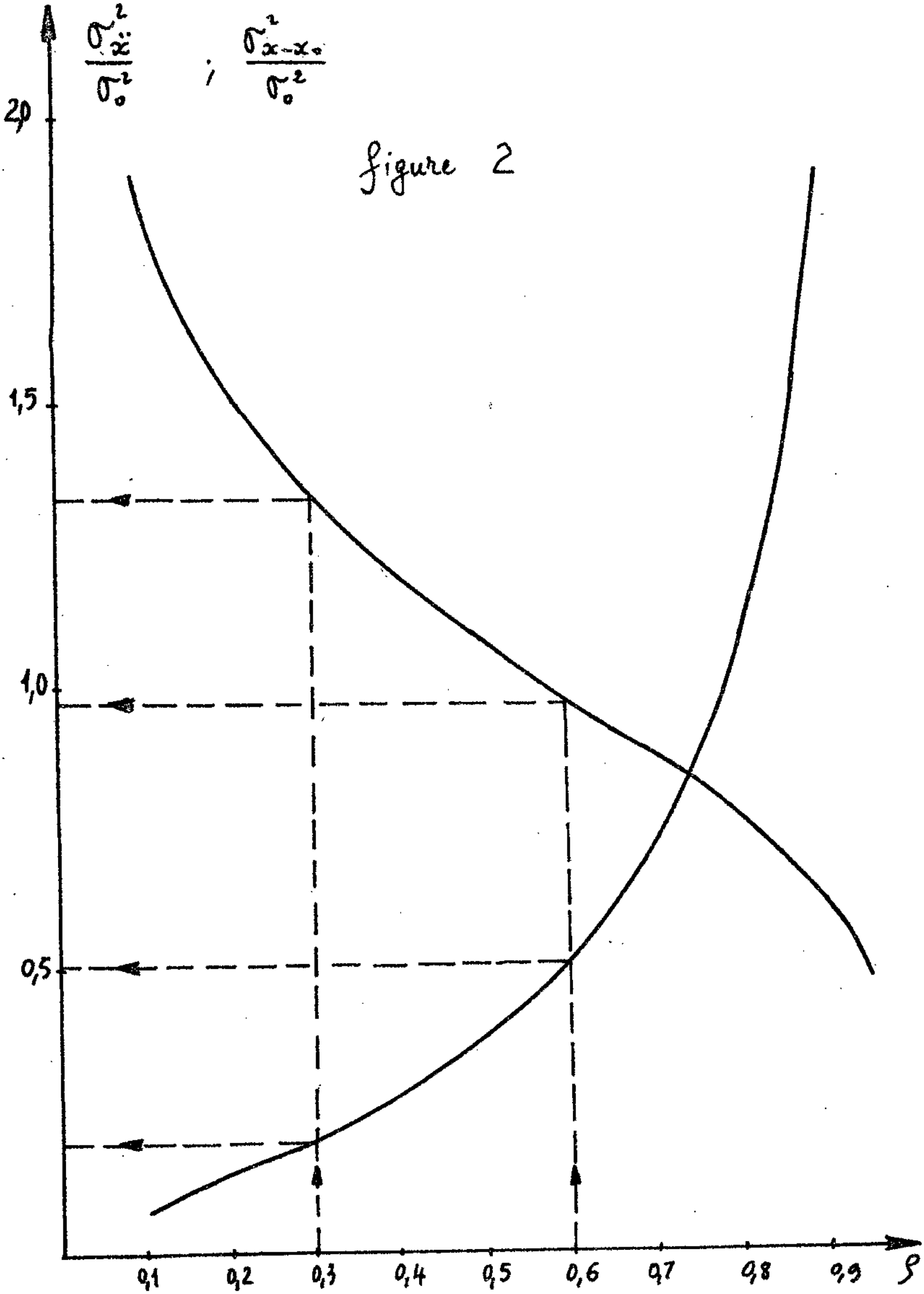
2.3 comparaison des resultats

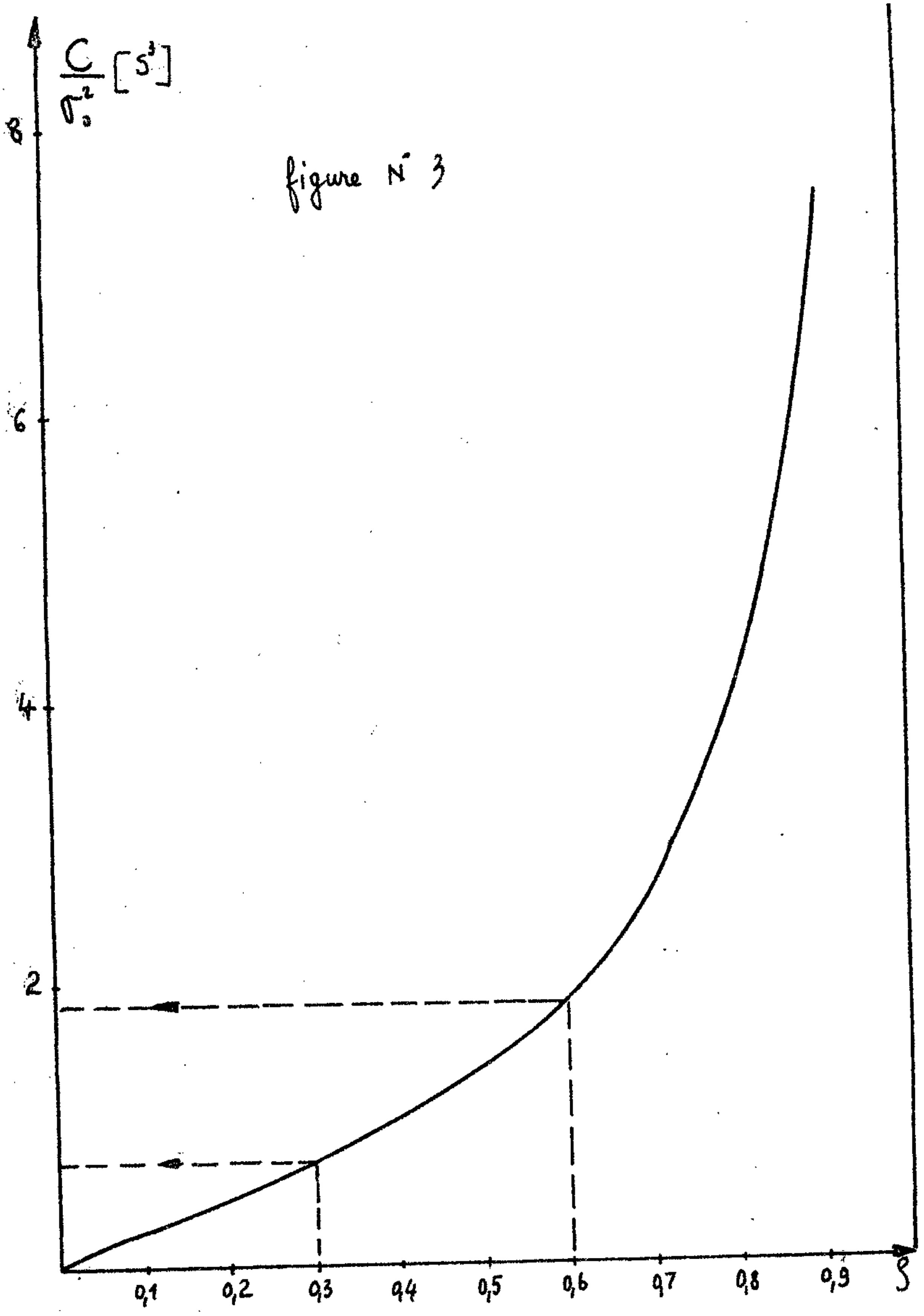
On remarque que les fonctionnelles obtenues par la méthode de phillips (C_{PH}) et la methode de Winer-hopf (C_{WH}) sont identiques. Cela implique que le système de vibro-isolation obtenu sur la base de critère de Winerhopf n'est que le Système de vibro-isolation à structure connue (ressort, amortisseur) trouvé par la méthode de phillips



Evolution de c/m et α/m en fonction de ρ.

figure 1


$\frac{\sigma_{\dot{x}}^2}{\sigma_0^2}$; $\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_0^2}$
2,0
1,5
1,0
0,5
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
ρ
figure 2



C/σ₀² [s³]
figure N° 3
8
6
4
2
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
ρ

3 Determination de c_{opt} et α_{opt}

3.1 Methode de Phillips

a. Excitation de densité spectrale énergitique

$$S_{\ddot{x}_0} = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{\omega_0^2 - s^2}$$

Calcul de la dispersion de l'acceleration

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H \frac{x}{x}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds =$$

avec $H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \dfrac{\alpha s + c}{m s^2 + \alpha s + c}$ d'ou

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\alpha s + c}{(m s^2 + \alpha s + c)} \cdot \frac{-\alpha s + c}{(m s^2 - \alpha s + c)} \cdot \frac{1}{(\omega_0 + s)} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - s)}\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\alpha s + c}{m s^3 + (m\omega_0 + \alpha) s^2 + (\alpha \omega_0 + c) s + c\omega_0} \cdot \frac{C(-s)}{d(-s)} . ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 I_3^{(1)}$$

$I_3^{(1)}$ etant égale aprés calcul sur table d'integrale.

$$I_3^{(1)} = \frac{\alpha^2 c \omega_0 + c^2 m \omega_0 + c^2 \alpha}{2\omega_0 c (m \alpha \omega_0^2 + \alpha^2 \omega_0 + c \alpha)}$$ soit;

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 . \frac{\alpha^2 c \omega_0 + c^2 m \omega_0 + c^2 \alpha}{2\omega_0 c (m \alpha \omega_0^2 + \alpha^2 \omega_0 + c \alpha)}$$

dispersion du déplacement relatif,

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 . S_{\ddot{x}_0} ds \quad ; \quad \text{avec}$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-m}{ms^2 + \alpha s + C} \quad ; \quad H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(-s) = \frac{-m}{ms^2 - \alpha s + C}$$

donc $\sigma^2_{x-x_0}$ prend la forme suivante.

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 . \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{-m}{(ms^2+\alpha s+C)(\omega_0+s)} . \frac{-m}{(ms^2-\alpha s+C)(\omega_0-s)} ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 m^2 . I_3^{(2)}$$

$I_3^{(2)}$ étant égale après calcul sur la table d'intégrale:

$$I_3^{(2)} = \frac{m\omega_0 + \alpha}{2\omega_0 C (m\alpha\omega_0^2 + \alpha^2\omega_0 + C\alpha)} \quad \text{soit}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 m^2 \frac{m\omega_0 + \alpha}{2\omega_0 C (m\alpha\omega_0^2 + \alpha^2\omega_0 + C\alpha)}$$

l'expression de la fonctionnelle sera donc:

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\ddot{x}} \quad \text{d'où}$$

$$C = \sigma_0^2 \Omega^2 \left(\frac{m^3\omega_0 + m^2\alpha}{2C\omega_0^3 m\alpha + 2C\alpha^2\omega_0^2 + 2C^2\alpha\omega_0} + \lambda \frac{\alpha^2 C\omega_0 + C^2 m\omega_0 + C^2\alpha}{2C\omega_0^3 m\alpha + 2C\alpha^2\omega_0^2 + 2C^2\alpha\omega_0} \right)$$

Par la suite, pour la détermination de α_{opt} et C_{opt} sur la base du critère de Phillips le calcul sera complexe pour cela mettons la fonctionnelle.

c sous la forme suivante :

$$C = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \left(\frac{N_1(c,\alpha)}{D(c,\alpha)} + \lambda \cdot \frac{N_2(c,\alpha)}{D(c,\alpha)} \right)$$

le systeme suivant :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial c} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial C}{\partial \alpha} = 0 & (2) \end{cases}$$

qui nous permet de déterminer c_{opt} et α_{opt} peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial N_1(c,\alpha)}{\partial c} + \lambda \frac{\partial N_2(c,\alpha)}{\partial c} \right) D(c,\alpha) - \left(N_1(c,\alpha) + \lambda N_2(c,\alpha) \right) \cdot \frac{\partial D(c,\alpha)}{\partial c} = 0$$

$$\left(\frac{\partial N_1(c,\alpha)}{\partial \alpha} + \lambda \frac{\partial N_2(c,\alpha)}{\partial \alpha} \right) D(c,\alpha) - \left(N_1(c,\alpha) + \lambda N_2(c,\alpha) \right) \cdot \frac{\partial D(c,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$

aprés calcul on trouve :

$$\begin{cases} (1) : \lambda c (c m^2 \omega_0^4 + 2 c \alpha m \omega_0^3) - m^2 (m^2 \omega_0^4 + 2 m \omega_0^3 \alpha + \alpha^2 \omega_0^2 + \\ \qquad + 2 m \omega_0^2 c + 2 \alpha c \omega_0) = 0 \\ (2) : m (-\alpha^2 - m^2 \omega_0^2 - 2 m \alpha \omega_0 - c m) - \lambda c (\alpha^2 \omega_0^2 - c^2 - 2 c \alpha \omega_0 - \\ \qquad - c m \omega_0^2) = 0 \end{cases}$$

avec $c = m\omega_0^2$; $\alpha = 2 m \omega_0 \eta$, on obtient

$$\begin{cases} (2\eta^2 + 2\eta + 1) + \lambda \omega_0^4 (2\eta^2 - 2\eta - 1) = 0 & (3) \\ (4\eta^2 + 8\eta + 3) - \lambda \omega_0^4 (1 + 4\eta) = 0 & (4) \end{cases}$$

posons $x = \omega_0^4$ et $y = \eta$

(4) nous donne $x = \dfrac{4y^2+8y+3}{\lambda(1+4y)}$; transportons cette expression de x dans (3) on obtient.

$$-y^2+4y^3+2y^4-2y-1=0$$

le seul parametre physique qui verifie cette équation $y = 0{,}7840$; soit $\eta = 0{,}7840$

$$\omega_0^4 = \frac{2{,}836}{\lambda}$$

finalement on aura

$$C_{opt} = 1{,}6840 m \lambda^{-1/2} \quad ; \quad \lambda = \frac{\rho}{1-\rho} \; ; \; \rho \in (0 \div 1)$$

$$\alpha_{opt} = 2{,}0349 m \lambda^{-1/4}$$

C_{opt} et α_{opt} depend de m et du multiplicateur de lagrange.

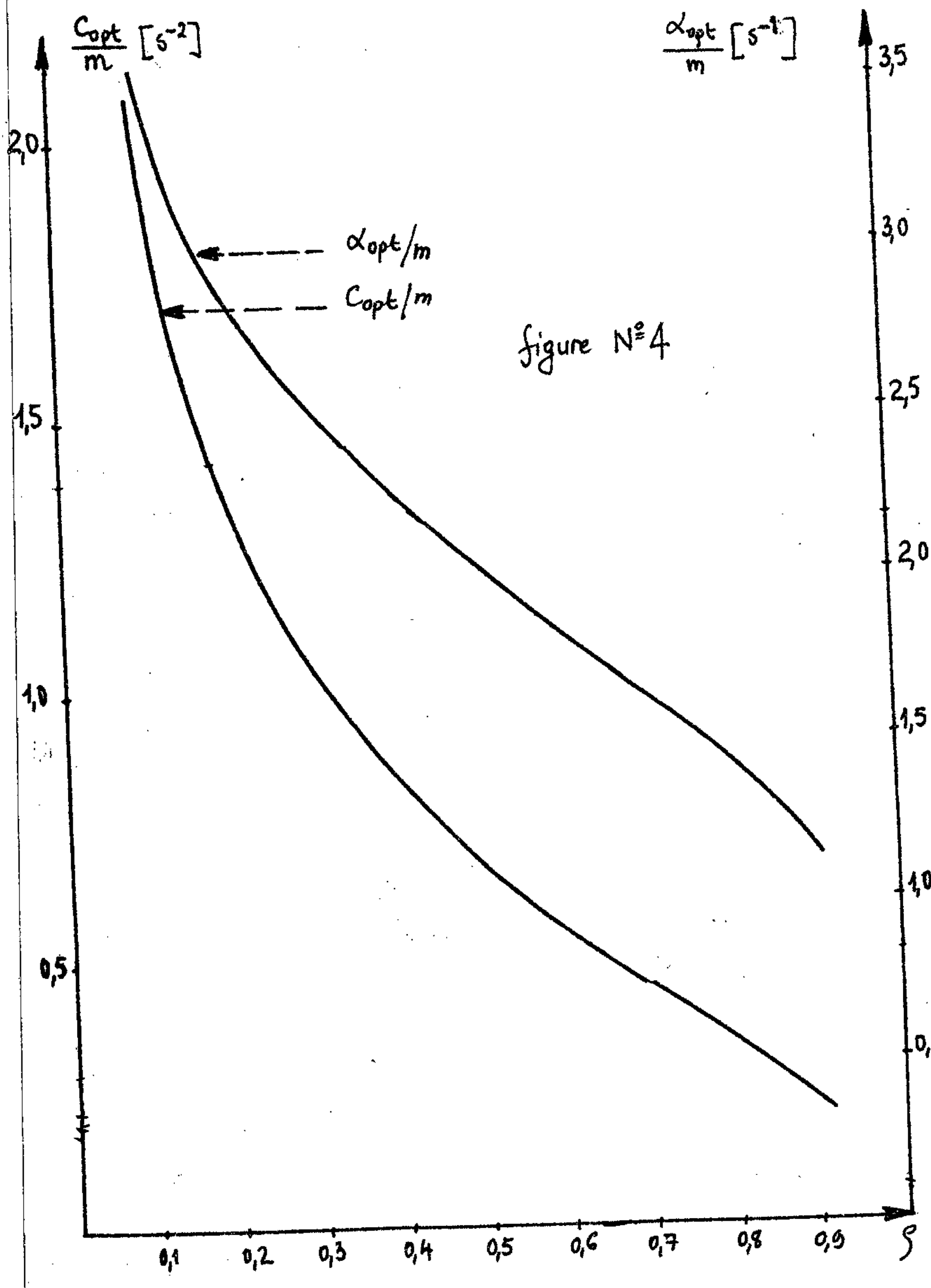
$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \sigma_0^2 \Omega^2 . 0{,}3464 \lambda^{1/4}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 . 0{,}0433 \lambda^{5/4}$$

la fonctionnelle sera donc :

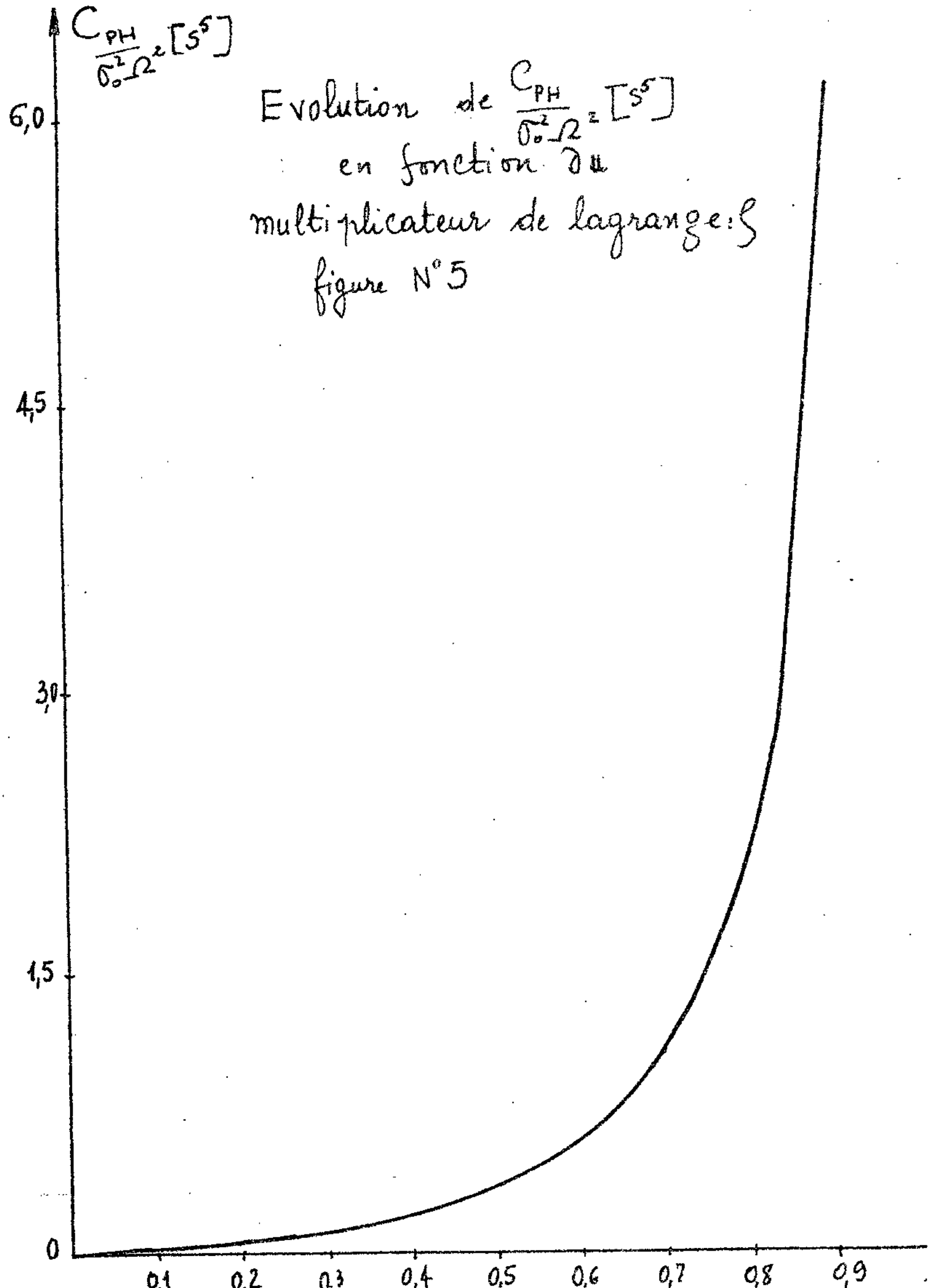
$$C_{PH} = \sigma_0^2 \Omega^2 . (0{,}0433 \lambda^{5/4} + \lambda . 0{,}3464 \lambda^{1/4})$$

$$C_{PH} = \sigma_0^2 \Omega^2 . 0{,}3897 \lambda^{5/4}.$$



$\frac{C_{opt}}{m}$ [s^{-2}]
$\frac{\alpha_{opt}}{m}$ [s^{-1}]
α_{opt}/m
C_{opt}/m
2,0
1,5
1,0
0,5
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
0,5
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
ρ

figure N°4



$\frac{C_{PH}}{\sigma_0^2 \Omega^2} [S^5]$
Evolution de $\frac{C_{PH}}{\sigma_0^2 \Omega^2} [S^5]$
en fonction du
multiplicateur de lagrange: ξ
figure N°5
6,0
4,5
3,0
1,5
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9

4 Determition de la fonctionnelle C par la methode de W-Hopf

Pour la méthode de Winer Hopf la fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donné par l'expression suivante:

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s) \cdot \varphi(s) \cdot G(s)} \cdot \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

la fonction de densité spectrale energetique $S_{\ddot{x}_0}$ peut se mettre sous la forme suivante:

$$S_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 \cdot \Omega^2 \cdot s^4 \frac{1}{(\omega_0 + s)\, s^2} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - s)\, s^2} = S_0 \cdot s^4 \cdot \varphi(s)\, \varphi(-s)$$

par identification on obtient:

$$S_0 = \sigma_0^2 \Omega^2$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{(\omega_0 + s)\, s^2} \Rightarrow \varphi(-s) = \frac{1}{(\omega_0 - s)\, s^2}$$

$R(s) \cdot R(-s) = 1 + \lambda s^4$; après calcul deja fait avec

$R(s) \cdot R(-s) = (A s^2 + B s + C)(A s^2 - B s + C)$ on a obtenu

$A = \sqrt{\lambda}$

$B = \sqrt{2}\, \sqrt[4]{\lambda}$; ce qui nous donne $R(s) = \lambda^{1/2} s^2 + \sqrt{2}\, \lambda^{1/4} s + 1$

$C = 1$

la dispersion de l'acceleration prend dans ce cas la forme suivante:

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left|H_{\frac{x}{x_0}}(s)\right|^2 \cdot S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds$$

$$H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s)\cdot\phi(s)\cdot L_1(s) \quad ;$$

$$G(s) = \frac{s^2}{L(s)} \quad \text{ou } L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = ms^2 \text{ d'où } G(s) = \frac{1}{m}.$$

m = masse du corps à vibro-isolé

$$L_1(s) = 1 \quad \text{d'où } H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{1}{m}\cdot 1\cdot\phi(s) = \frac{\phi(s)}{m}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{(As^2+Bs+C)\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{(\omega_0+s)\,s^2}}\cdot\left\{\frac{\frac{1}{(\omega_0+s)s^2}}{As^2-Bs+C}\right\}_+$$

Posons $M = \dfrac{\frac{1}{(\omega_0+s)\,s^2}}{As^2-Bs+C} = \dfrac{1}{(\omega_0+s)\,s^2\times(As^2-Bs+C)}$ (1)

$$M = \frac{Ds^2+Es+F}{(\omega_0+s)\,s^2} + \frac{Gs+H}{As^2-Bs+C} \quad (2)$$

après identification : (1) = (2) on trouve le système suivant :

$$AD + G = 0$$

$$-BD + AE + G\omega_0 + H = 0$$

$$DC - BE + AF + H\omega_0 = 0$$

$$EC - BF = 0$$

$$FC = 1$$

après résolution de ce système on trouve :

$$H = \frac{\omega_0 \lambda}{\sqrt{2}\omega_0 \lambda^{1/4} + \omega_0^2 \lambda^{1/2} + 1} \quad ; \; E = \sqrt{2}\lambda^{1/4}$$

$$D = \frac{\lambda^{1/2} + \sqrt{2}\omega_0 \lambda^{3/4}}{\sqrt{2}\lambda^{1/4} + \omega_0^2 \lambda^{1/2} + 1} \quad ; \; F = 1 \qquad \text{d'ou}$$

$$M_+ = \frac{\dfrac{\lambda^{1/2} + \sqrt{2}\omega_0 \lambda^{3/4}}{\sqrt{2}\lambda^{1/4} + \omega_0^2 \lambda^{1/2} + 1} s^2 + \sqrt{2}\lambda^{1/4} s + 1}{(\omega_0 + s)\, s^2}$$

pour le deuxieme terme $M_- = \dfrac{G s + H}{A s^2 - B s + C}$, Ces pôles ne verifiés pas la condition de stabilité. C'est à dire qu'ils ne sont pas situés dans le demi plan complexe gauche. On ne le fait pas donc on consideration.

d'ou. $$\phi(s) = \frac{m(D s^2 + E s + F)}{A s^2 + B s + C}$$

tels que A, B, D et E sont connues en fonction du multiplicateur de lagrange λ;

aprés avoir trouvé les trois fonctions $\phi(s)$, $G(s)$ et $L_1(s)$ l'expression de la fonction de transfert sera donc:

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{D s^2 + E s + F}{A s^2 + B s + C}$$

la dispersion de l'acceleration sera donc.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{Ds^2+Es+F}{As^2+Bs+C} \cdot \frac{1}{(\omega_0+s)} \frac{Ds^2-Es+F}{As^2-Bs+C} \cdot \frac{1}{\omega_0-s} \cdot ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{Ds^2+Es+F}{As^3+(B+A\omega_0)s^2+(B\omega_0+C)s+C\omega_0} \cdot \frac{C(-s)}{d(-s)} \cdot ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot I_3^{(1)}$$

$$I_3^{(1)} = \frac{C_2^2 d_0 d_1 + (C_1^2 - 2C_0C_2) d_0 d_3 + C_0^2 d_2 d_3}{2 d_0 d_3(-d_0 d_3 + d_1 d_2)}$$

avec $C_0 = F$; $C_1 = E$; $C_2 = D$;

$d_0 = C\omega_0$; $d_1 = B\omega_0 + C$; $d_2 = A\omega_0 + B$; $d_3 = A$

après calcul on trouve l'integrale $I_3^{(1)}$ sous la forme suivante :

$$I_3^{(1)} = \frac{D^2 B\omega_0^2 + (D^2 + AE^2 - 2AD + A^2)\omega_0 + AB}{2A^2 B\omega_0^3 + 2AB^2\omega_0^2 + 2AB\omega_0} \text{ ; soit}$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \frac{D^2 B\omega_0^2 + (D^2 + AE^2 - 2AD + A^2)\omega_0 + AB}{2A^2 B\omega_0^3 + 2AB^2\omega_0^2 + 2AB\omega_0}$$

Calcul de la dispersion du deplacement relatif

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 \cdot S_{\ddot{x}_0}(s) \cdot ds \text{ ; avec}$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left(H_{\frac{x}{x_0}} - 1 \right) = \frac{1}{s^2}\left(\phi(s) \cdot G(s) \cdot L_1(s) - 1 \right)$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left(\phi(s)G(s)-1\right) = \frac{D-A}{As^2+Bs+C}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{D-A}{(As^2+Bs+C)(\omega_0+s)} \cdot \frac{G(-s)}{J(-s)} \cdot ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{D-A}{As^3+(A\omega_0+B)s^2+(B\omega_0+C)s+C\omega_0} \cdot \frac{G(-s)}{J(-s)}\, ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\Omega^2\, I_3^{(2)}$$

la forme de l'expression de I_3 reste la même, ce qui change le denominateur simplement, qui a pour Coefficients :

$c_0 = D-A$; $c_1 = 0$; $c_2 = 0$

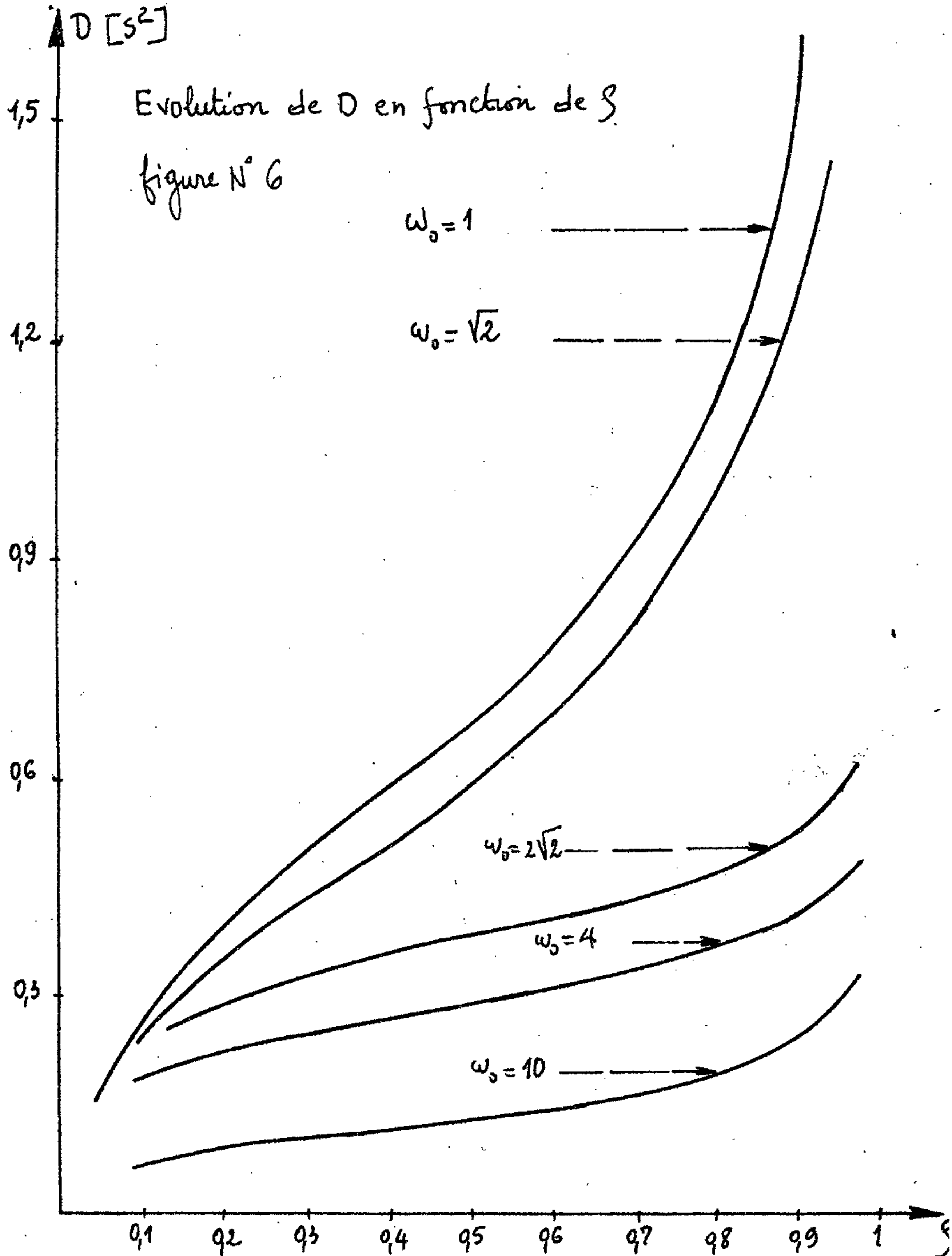
d_0 ; d_1 ; d_2 et d_3 restent les même d'ou

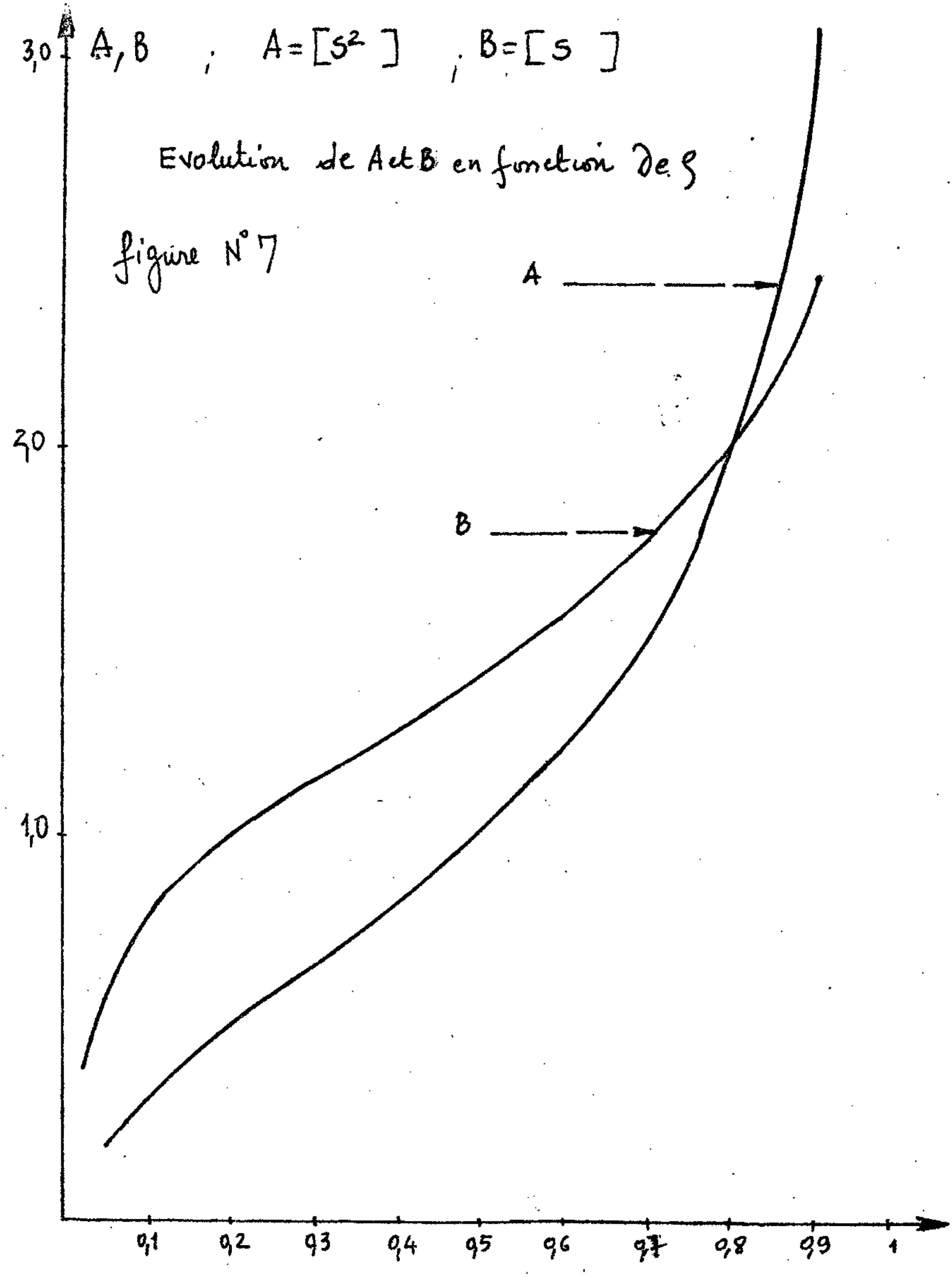
$$I_3^{(2)} = \frac{(AD-A^2)^2\omega_0 + (D-A)^2 AB}{2A^2B\omega_0^3 + 2AB^2\omega_0^2 + 2AB\omega_0} \text{ ; soit .}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\Omega^2 \cdot \frac{(AD-A^2)^2\omega_0 + (D-A)^2 AB}{2A^2B\omega_0^3 + 2AB^2\omega_0^2 + 2AB\omega_0} ;$$

l'expression globale de la fonctionnelle sera donc

$$C_{WH} = \sigma_0^2\Omega^2 \cdot \left(\frac{(AD-A^2)^2\omega_0 + (D-A)^2 AB}{2A^2B\omega_0^3 + 2AB^2\omega_0^2 + 2AB\omega_0} + \lambda \frac{D^2B\omega_0^2 + (D^2+AE^2-2AD+A^2)\omega_0 + AB}{2A^2B\omega_0^3 + 2AB^2\omega_0^2 + 2AB\omega_0}\right)$$


D [s²]
Evolution de D en fonction de ξ
figure N° 6
ω₀ = 1
ω₀ = √2
ω₀ = 2√2
ω₀ = 4
ω₀ = 10
1,5
1,2
0,9
0,6
0,3
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1


A, B ; A = [S²] ; B = [S]
Evolution de A et B en fonction de ρ
figure N° 7
A
B
3,0
2,0
1,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1

Pour la même valeur de ω_0 trouveé precedement, $\omega_0 = \sqrt{1,684}\,\lambda^{-1/4}$, on, cherche la valeur de la fonctionnelle trouveé sur la base de W.Hopf. aprés, calcul des paramètres nécessaires, constituant la fonctionnelle C on a trouvé :

$$C_{W.H} = 0,3307\,\lambda^{5/4}$$

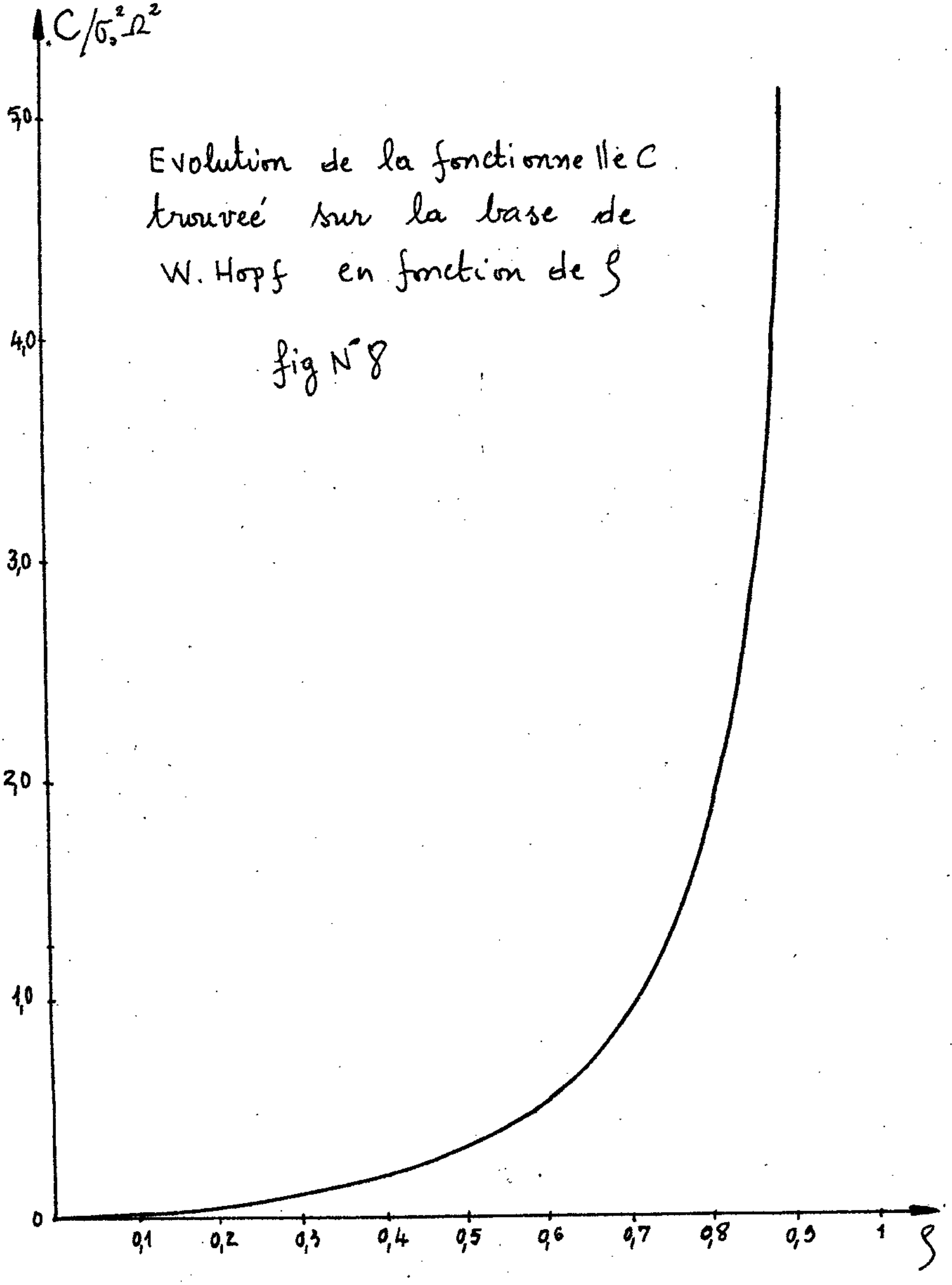
5 Comparaison des resultats

Pour avoir un système de vibro-isolation meilleur, c'est à dire un systeme qui obeit aux normes hygiéniques de confort et de securité, on fait appel à la minimisation de l'accèleration et la limitation des deplacements relatifs et ceux ci s'explique par la minimisation de la fonctionnelle C; on a trouvé :

$$C_{PH} = 0,3897\,\lambda^{5/4} \; ; \; C_{W.H} = 0,3307\,\lambda^{5/4}$$

on prendra comme critère d'efficacité le rapport : C_{WH}/C_{PH} soit.

$C_{W.H}/C_{PH} = (0,3307/0,3897) = 0,848$, donc le système de vibro-isolation obtenu sur la base de Wiener Hopf est 15,2 % meilleur que le système de vibro-isolation obtenu sur la base de PHillips.



Evolution de la fonctionnelle C trouvée sur la base de W. Hopf en fonction de ρ

fig N° 8

6 Systeme de vibro-isolation actif

C'est Un système d'isolation vibratoire, constitué par Un ou plusieurs systèmes asservis ; toute fois le système passif peut y exister aussi.
L'alimentation en energie est assurée par des Sources exterieures independantes du système en vibration.

6.1 Exemples de s.v.actif

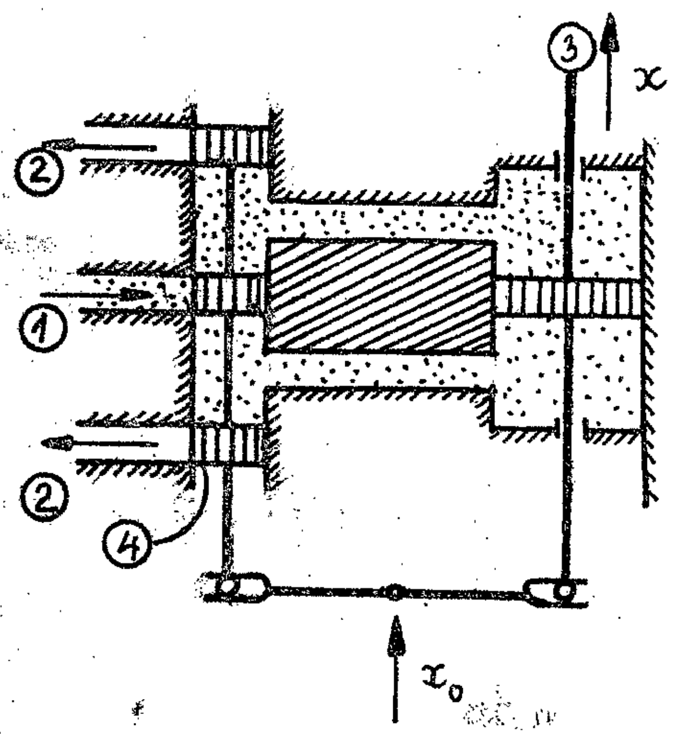


figure N° 8

les deux figures 8 et 9 representent des exemples de système de vibro-isolation actif (SVA).
La figure N°8 represente Un amplificateur mécanique (continue)

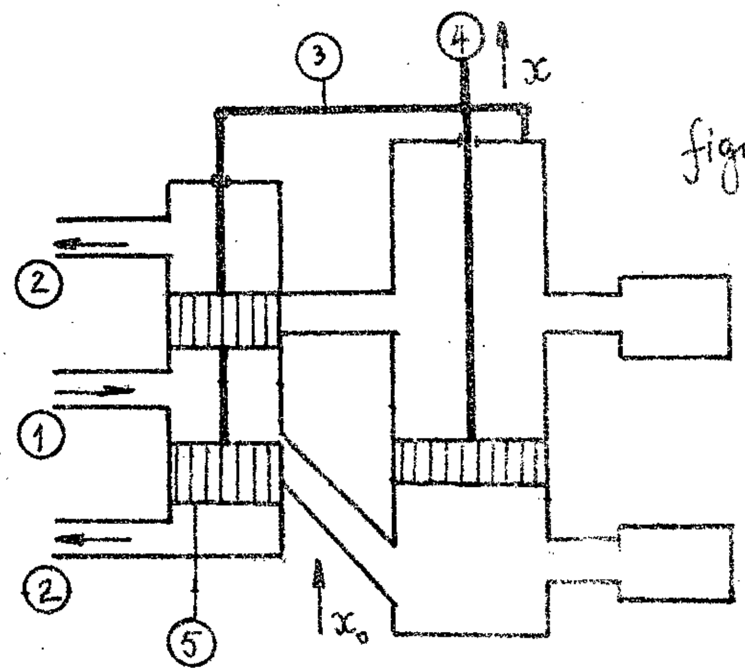


figure N°9

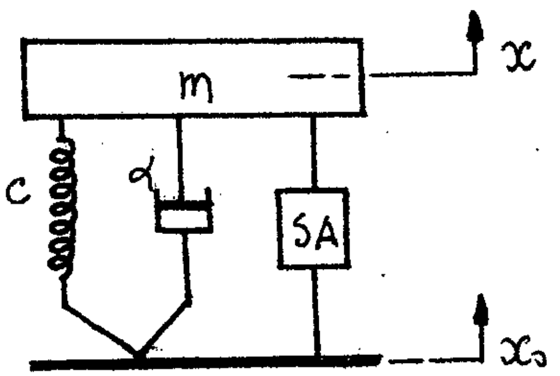
le mouvement de la servovalve ainsi que la grandeur d'entreé x_0 exige Une petite force ; la force de sortie peut être grande si le supplement de pression est elevée.
pour les deux SVA le fluide utilisé peut être liquide ou gaz.

fig N°8 : 1: entreé du fluide ; 3: position du corps
2: sortie du fluide à vibro-isolé
4: Servovalve

fig N°9 : 1: entreé du fluide
2: Sortie du fluide
3 : retour mécanique
4 : position du corps à vibro-isolé.

6.1.1 Schema bloc

dans le cas où le systeme de vibro-isolation actif existe notre systéme mécanique peut se mettre sous la forme suivante:



le schema bloc du systeme en boucle fermeé sera:

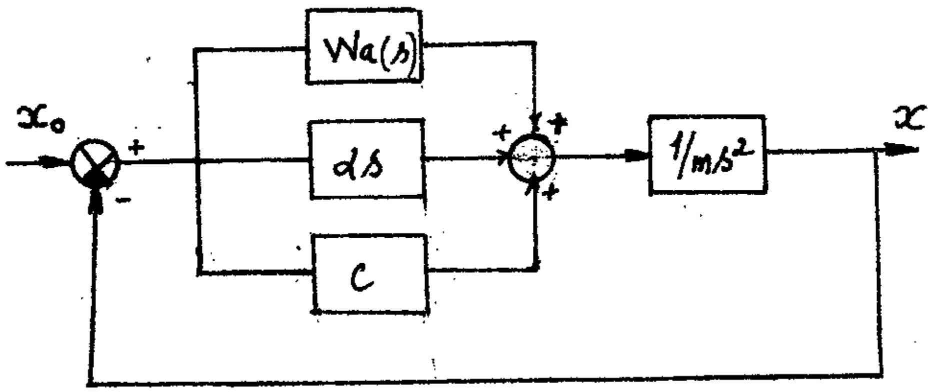


figure N° 10

$W_a(s)$: represente en général la fonction caracteristique du systéme de vibro-isolation actif

$W_a(s)$ peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle, soit:

$$W_a(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Cette relation reste valable dans le cas ou le systeme est initialement au repos: les conditions initiales à l'instant 0^- sont nulles.

$b_0, b_1, \ldots b_m$; $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont des coefficients caracterisant les proprietés fondamentales du systeme de vibro-isolation actif.

Les systèmes physiques que l'on rencontre en pratique en particulier dans les asservissements sont souvent trés complexes (les polynomes $N(s)$ et $D(s)$ ont des degrés elevés) ; le calcul complet de la reponse $x(t)$ n'est pas simple, et l'expression de $x(t)$ est difficile à exploiter.

Pour cela on prendra pour la suite des fonctions de transferts moins compliquées, pour qu'on puisse faire le calcul.

6.2 Probleme de stabilité d'un s.v

pour determiner la stabilité de notre systeme on applique la methode de Routh ;

on applique le critère en se servant d'une table de Routh defini comme suit :

$$\begin{array}{lllll}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\
\vdots & b_1 & b_2 & b_3 & \\
\cdot & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

Où $a_n, a_{n-1} \ldots$ sont les coefficients de l'equation caracteristique ; on poursuit la construction de la table; horizontalement et verticalement jusqu'a à obtenir des zeros.

Toutes les racines de l'equation caracteristiques ont leur partie reelle negative si et seulement si les elements de la première colonne de la table de Routh ont le signe positif.

$$b_1 = \frac{a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad ; \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

63 Calcul de la fonctionnelle : C_{Actif}

(dans le cas de système de vibro-isolation actif)

a: Excitation par Un bruit blanc : $S_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 = \underline{\underline{cte}}$

le système de vibro-isolation actif depend du deplacement relatif : $(x_0 - x)$.

la fonction de transfert globale du système de la figure N° 10 est :

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{(W_a(s) + \alpha s + c)\frac{1}{ms^2}}{1 + (W_a(s) + \alpha s + c)\cdot\frac{1}{ms^2}} = \frac{W_a(s) + \alpha s + c}{m s^2 + W_a(s) + \alpha s + c}$$

631 S.v.a (action proportionnelle)

la fonction de transfert $W_a(s)$ sera egale à $W_a(s)=K_o = \frac{b_o}{a_o}$

d'où: $H_{\frac{x}{x_o}}(s) = \frac{\alpha s + c + K_o}{ms^2 + \alpha s + K_o + c}$ (1)

Condition de stabilité suivant le critère de Routh, il faut que $K_o + c > 0$

Pour comparer l'efficacité de vibro-isolation actif (passif compris) et le système de vibro-isolation passif, prenons les mêmes valeurs de c et α optimisées trouvées précédement

. Cas du bruit blanc $S_{\ddot{x}_o} = \sigma_o^2 = cte$

on a trouvé $c_{opt} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$; $\alpha_{opt} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\lambda}}$; (2)

la condition de stabilité devient. $\frac{K_o}{m} > -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

sur la base (1) et (2) on aura, comme le cas d'un bruit blanc.

$$\frac{m}{\sqrt{\lambda}} = c + K_o$$

$c = c_{opt} \Rightarrow K_o = 0$

$c \neq c_{opt} \Rightarrow K_o = \frac{b_o}{a_o} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} m - c$

donc pour les valeurs de c et α optimisées trouvées sur la base de Wiener Hopf la fonction

$C_A = C_{WH} = C_{PH} = 1{,}414\, \sigma_o^2\, \lambda^{3/4}$

dans le cas où $C \neq C_{opt}$

on a $K_{opt} = K_0 + C = \dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}$ et $\alpha_{opt} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot m \sqrt[4]{\lambda}$

la fonctionnelle $C_A = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\ddot{x}}$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{m^2}{2K\alpha} = \frac{\sigma_0^2}{4} \cdot \frac{\lambda^{3/4}}{\sqrt{5/2}}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \sigma_0^2 \cdot \frac{\alpha^2 + Km}{2\alpha m} = \sigma_0^2 \frac{9}{4\sqrt{\frac{5}{2}}} \lambda^{-\frac{1}{4}}$$ d'où

$$C_A = \frac{5\sigma_0^2}{2\sqrt{\frac{5}{2}}} \cdot \lambda^{3/4} = 1{,}581 \sigma_0^2 \lambda^{3/4}$$

632 Comparaison des resultas

la fonctionnelle trouvée sur la base de Wiener-Hopf $H_{WH} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \sigma_0^2 \lambda^{3/4} = H_{PH}$

$$C_A = \frac{5\sigma_0^2 \lambda^{3/4}}{2\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

$\dfrac{C_{W.H}}{C_A} = 0{,}894$; ce rapport d'efficacité nous montre que le système de vibro-isolation obtenu par la methode de Wiener Hopf est 10,6 % meilleur que le système de vibro-isolation actif obtenu par la methode phillips.

6.3.3 S.v.actif (action integrale)

La fonction de transfert du systeme de vibro-isolation actif sera egale à $W_a(s) = \frac{b_0}{a_1 s} = \frac{K_1}{s}$; d'où

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{\left(\alpha s + c + \frac{K_1}{s}\right)\cdot\frac{1}{ms^2}}{1+\left(\alpha s + c + \frac{K_1}{s}\right)\cdot\frac{1}{ms^2}} = \frac{\alpha s^2 + cs + K_0}{ms^3 + \alpha s^2 + cs + K_1}$$

Condition de stabilité suivant le critère de Routh :

$$\begin{cases} \frac{\alpha c - K_1 m}{\alpha} > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases}$$; Ce qui nous donne : $0 < K_1 < \frac{\alpha c}{m}$.

pour les mêmes valeurs de c et α optimisées trouvées precedements

- Cas d'un bruit blanc $S_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 = cte$

on aura donc $0 < K_1 < \sqrt{2}\, m \lambda^{-3/4}$

Calcul de la dispersion de l'accélération.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x}{x_0}}(s)\right|^2 ds = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{\alpha s^2 + cs + K_1}{ms^3 + \alpha s^2 + cs + K_1}\right|^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \cdot I_3^{(1)}$$

$$I_3^{(1)} = \frac{\alpha^2 c + mc^2 - K_1 \alpha m}{2m(c\alpha - mK_1)}$$; d'où $\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \cdot \frac{\alpha^2 c + mc^2 - K_1\alpha m}{2m(c\alpha - mK_1)}$

calcul de la dispersion du deplacement relatif.

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)\right|^2 ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-ms}{ms^3+\alpha s^2+cs+K_1} \quad ; \text{ d'ou}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{-ms}{ms^3+\alpha s^2+cs+K_1}\right|^2 ds = \sigma_0^2 \cdot I_3^{(2)}$$

$I_3^{(2)} = \dfrac{m^3}{2m(c\alpha - K_1 m)}$ (table d'integrale) ;

la fonctionnelle $C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\,\sigma^2_{\ddot{x}}$ devient.

$$C_A = \sigma_0^2\left(\frac{m^3}{2mc\alpha - 2b_0 m^2} + \lambda\frac{\alpha^2 c + mc^2 - K_1\alpha m}{2mc\alpha - 2b_0 m^2}\right)$$

pour les mêmes de C et α optimisées.

$$C_{opt} = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad \text{et} \quad \alpha_{opt} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\lambda}}$$

la $\dfrac{\partial C_A}{\partial K_1} = 0$ nous donne $K_1 = 0$;

d'ou la fonction de transfert,
$W_a(s) = 0$; et par conséquent le systeme actif n'a aucune influence sur l'isolation vibratoire, ce qui explique que le systeme de vibro-isolation trouvé sur la base de Wiener Hopf est toujours meilleur (efficace) pour

l'isolation vibratoire.

6.4 Ifluence de la fonction de transfert $W_a(s)$

a : Excitation ayant pour fonction de densité spectrale energetique $S_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 / (\omega_0^2 - s^2)$

6.4.1 S.v. actif (action proportionnelle)

la fonction de transfert $W_a(s) = \frac{b_0}{a_0} = K_0$.

d'ou $H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \dfrac{\alpha s + C + K_0}{m s^2 + \alpha s + C + K_0}$

tenant toujours de la condition de stabilite du systeme : $K_0 + C > 0$; $K_0 > 1{,}684\, m \lambda^{-\frac{1}{2}}$

la fonctionnelle trouveé sur la base de phillips pour la même Excitation elle est egale :

$$C_{PH} = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{2} \left(\frac{m^2 (m\omega_0 + \alpha)}{C^2 \alpha \omega_0 + C(\alpha^2 \omega_0^2 + \alpha m \omega_0^3)} + \lambda \cdot \frac{C^2(\alpha + m\omega_0) + C\alpha^2 \omega_0}{C^2 \alpha \omega_0 + C(\alpha^2 \omega_0^2 + \alpha m \omega_0^3)} \right)$$

en presence du systeme de vibro isolation actif la fonctionnelle prend la forme suivante.

$$C_A = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{2} \left(\frac{m^2 (m\omega_0 + \alpha)}{(K_0 + C)^2 \alpha \omega_0 + (K_0 + C)(\alpha^2 \omega_0^2 + \alpha m \omega_0^3)} + \lambda \cdot \frac{(K_0 + C)^2 (\alpha + m\omega_0) + (K_0 + C)\alpha^2 \omega_0}{(K_0 + C)^2 \alpha \omega_0 + (K_0 + C)(\alpha^2 \omega_0^2 + \alpha m \omega_0^3)} \right)$$

pour les mêmes valeurs de C et α optimiseés trouveés precédement avec la même excitation, etudions la difference des fonctionnelles $C_A - C_{PH}$

posons $f_1 = m\omega_0$; $f_2 = \alpha\omega_0^2$; $f_3 = \alpha\omega_0$; $f_4 = \alpha^2\omega_0$

$$C_A - C_{PH} = \frac{\sigma_0^2\Omega^2}{2}\left(\frac{N_1}{D} + \lambda\frac{N_2}{D}\right)$$; avec

$$N_1 = -f_1f_3m^2K_0^2 - K_0(2f_1f_3m^2c + f_1^2f_2m^2$$

$$N_2 = f_1(f_3c^2 + f_1f_2c)K_0^2 + (c^2f_3 + f_1f_2c)(2cf_1 + f_4)K_0 -$$
$$- f_3(f_1c^2 + cf_4)K_0^2 - (f_1c^2 + cf_4)(2cf_3 + f_1f_2)K_0$$

$$D = (c^2f_3 + f_1f_2c)(K_0^2f_3 + c^2f_3 + 2K_0cf_3 + f_1f_2K_0 + f_1f_2c)$$; soit

$$C_A - C_{PH} = (K_0^2A_0 + K_0B_0)/D$$; avec

$$A_0 = -f_1f_3m^2 + \lambda\left(f_1(c^2f_3 + f_1f_2c) - (f_1c^2 + f_4c)f_3\right)$$

$$B_0 = -2f_1f_3m^2c - f_1^2f_2m^2 + \lambda\Big((c^2f_3 + f_1f_2c)(2cf_1 + f_4) -$$
$$- (c^2f_1 + cf_4)(2cf_3 + f_1f_2)\Big)$$

Cherchons les valeurs de K_0/m pour lesquelles $C_A - C_{PH} = 0$; on trouve :

$K_0 = A/B$ tel que :

$$A = 2f_1f_3m^2c + f_1^2f_2m + \lambda\Big((c^2f_3 + f_1f_2c)(2cf_1 + f_4) -$$
$$- (c^2f_1 + cf_4)(2cf_3 + f_1f_2)\Big)$$

$$B = f_1f_3m^2 - \lambda\left(f_1(c^2f_3 + f_1f_2c - f_3(f_1c^2 + f_4c)\right)$$

avec $c_{opt} = 1{,}684\, m\, \lambda^{-1/2}$

$\alpha\, opt = 2{,}0349\, m\, \lambda^{-1/4}$ trouvées précédement on obtient :

$\frac{K_o}{m} = -\frac{2,156}{\sqrt{\lambda}}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$; avec $\lambda = \frac{\rho}{1-\rho}$; ρ varie de 0 à 1

Ce qui implique que λ varie de 0 à ∞

En tenant compte de la condition de stabilité du système ($\frac{K_o}{m}$ superieur à tous les points appartenant à la courbe (1) de la figure N° 11), D represente les valeurs de $\frac{K_o}{m}$ pour lesquelles la fonctionnelle C_A trouveé en presence du systeme actif est superieure à la fonctionnelle C_{PH} trouveé par la méthode de phillips (avec les valeurs de c et d optimiseés) : $C_A > C_{PH}$.

C'est à dire que le système actif qui à pour action proportionnelle inverse ($K_o<0$), n'améliore pas l'isolation vibratoire ; et par conséquent le système de vibro-isolation trouvé sur la base de la méthode de Phillips pour le cas de l'excitation $S_{\ddot{x}_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 / (\omega_0^2 - s^2)$ est meilleur que le système de vibro-isolation en presence du système actif ayant l'action proportionnelle inverse.

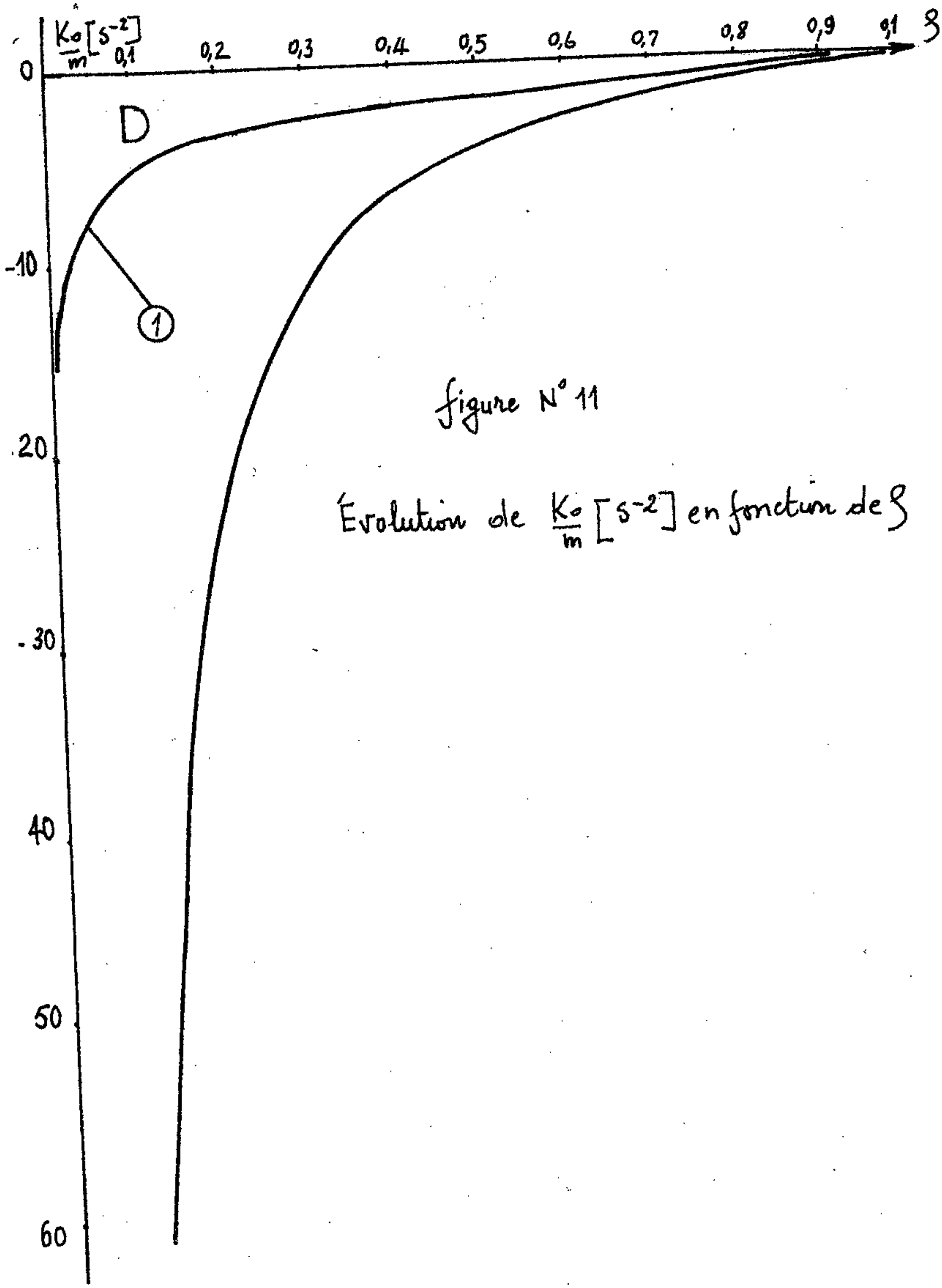


figure N° 11

Évolution de $\frac{K_o}{m}[s^{-2}]$ en fonction de ξ

6.4.2 S.v. actif (action integrale pur)

la fonction de transfert $W_a(s) = \frac{b_0}{a_1 s} = \frac{K_1}{s}$; d'ou

$$H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\alpha s^2 + cs + K_1}{ms^3 + \alpha s^2 + cs + K_1} \text{ et, } H_{\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{-ms}{ms^3 + \alpha s^2 + cs + K_1}$$

Condition de stabilité suivant le, critère de Routh:

$$\begin{cases} \frac{\alpha c - K_1 m}{\alpha} > 0 \\ K_1 > 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 < K_1 < \frac{\alpha c}{m}$$

pour $C_{opt} = 1{,}684 m \lambda^{-1/2}$; $\alpha_{opt} = 2{,}0349 m \lambda^{-1/4}$ on obtient.

$$0 < K_1 < 3{,}426 m \lambda^{-3/4}.$$

Calcul de la dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{G(s)}{J(s)} \cdot \frac{G(-s)}{J(-s)}\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sigma_0^2 \Omega^2}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\alpha s^2 + cs + K_1}{(ms^3 + \alpha s^2 + cs + K_1)} \cdot \frac{1}{(\omega_0 + s)} \frac{G(-s)}{J(-s)}\, ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\alpha s^2 + cs + b_0}{ms^4 + (m\omega_0 + \alpha) s^3 + (\alpha\omega_0 + c) s^2 + (c\omega_0 + K_1) s + k_1 \omega_0} \frac{G(-s)}{J(-s)}\, ds$$

$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 . I_4^{(1)}$; $I_4^{(1)} = \frac{N_1}{D_1}$, de la table

d'integrale on trouve :

$$N_1 = K_1 m\left(\alpha^2\omega_0^2 c + \omega_0^2 m c^2 + \omega_0 c^2\alpha - \alpha K_1 m\omega_0^2 - K_1^2 m + c\alpha K_1\right)$$

$$D_1 = 2\omega_0\left(-K_1 m^2\omega_0^3 + c\alpha m\omega_0^3 - \alpha K_1 m\omega_0^2 + c\alpha^2\omega_0^2 + c^2\alpha\omega_0 + \alpha K_1 c - mK_1^2\right)$$

Calcul de la dispersion de l'écart :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\dot{x}_0}}(s)\right|^2 S_{\dot{x}_0}(s)\,ds = \frac{\sigma_0^2\Omega^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{-ms}{(ms^3+\alpha s^2+cs+K_1)}\cdot\frac{1}{(\omega_0+s)}\cdot\frac{d(-s)}{\mathcal{D}(-s)}\,ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\Omega^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{-ms}{ms^4+(m\omega_0+\alpha)s^3+(\alpha\omega_0+c)s^2+(c\omega_0+K_1)s+K_1\omega_0}\times$$

$$\times\ \frac{d(-s)}{\mathcal{D}(-s)}\,ds$$

$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\Omega^2\, I_4^{(2)}$; $I_4^{(2)} = \dfrac{N_2}{D_2}$; de la table d'intégrale on trouve : $N_2 = m\omega_0\,(m^2\omega_0 + m\alpha)$

$$D_2 = 2\omega_0\left(-K_1 m^2\omega_0^3 + c\alpha m\omega_0^3 - \alpha K_1 m\omega_0^2 + c\alpha^2\omega_0^2 + c^2\alpha\omega_0 + \alpha K_1 c - mK_1^2\right) = D_1$$

d'où la fonctionnelle :

$$C_A = \frac{\sigma_0^2\Omega^2}{2}\left(\frac{N_1}{D_1} + \lambda\,\frac{N_2}{D_2}\right).$$

pour la même excitation on a trouvé la fonctionnelle C_{PH} sans système actif égale à :

$$C_{PH} = \frac{\sigma_0^2\Omega^2}{2}\left(\frac{N_1^*}{D_1^*} + \lambda\,\frac{N_2^*}{D_2^*}\right);$$

$N_1^* = m^2(m\omega_0 + \alpha)$; $N_2^* = c^2(\alpha + m\omega_0) + c\alpha^2\omega_0$

$$D_1^* = D_2^* = c^2\alpha\omega_0 + c\left(\alpha^2\omega_0^2 + \alpha m\omega_0^3\right)$$

étudions la différence $C_A - C_{PH}$:

après calcul on trouve $C_A - C_{PH} = \sigma_0^2 \Omega^2 \left(\frac{N}{D} + \lambda \frac{N_0}{D} \right)$

avec $N = -m^2\omega_0(m\omega_0+\alpha)\left(-b_0 m^2\omega_0^4 - \alpha K_1 m\omega_0^3 + \alpha K_1 c\omega_0 - m\omega_0 K_1^2\right)$

$$N_0 = \left(c^2\alpha\omega_0^2 + c(\alpha^2\omega_0^3 + \alpha m\omega_0^4)\right)\left(-\alpha K_1 m\omega_0^2 - K_1^2 m + c\alpha K_1\right) - \left(c\alpha^2\omega_0^2 + c^2\omega_0(\alpha+m\omega_0)\right)\left(-K_1 m^2\omega_0^4 - \alpha K_1 m\omega_0^3 + \alpha K_1 c\omega_0 - m\omega_0 K_1^2\right)$$

$D = D_1^2 \cdot D_1 =$

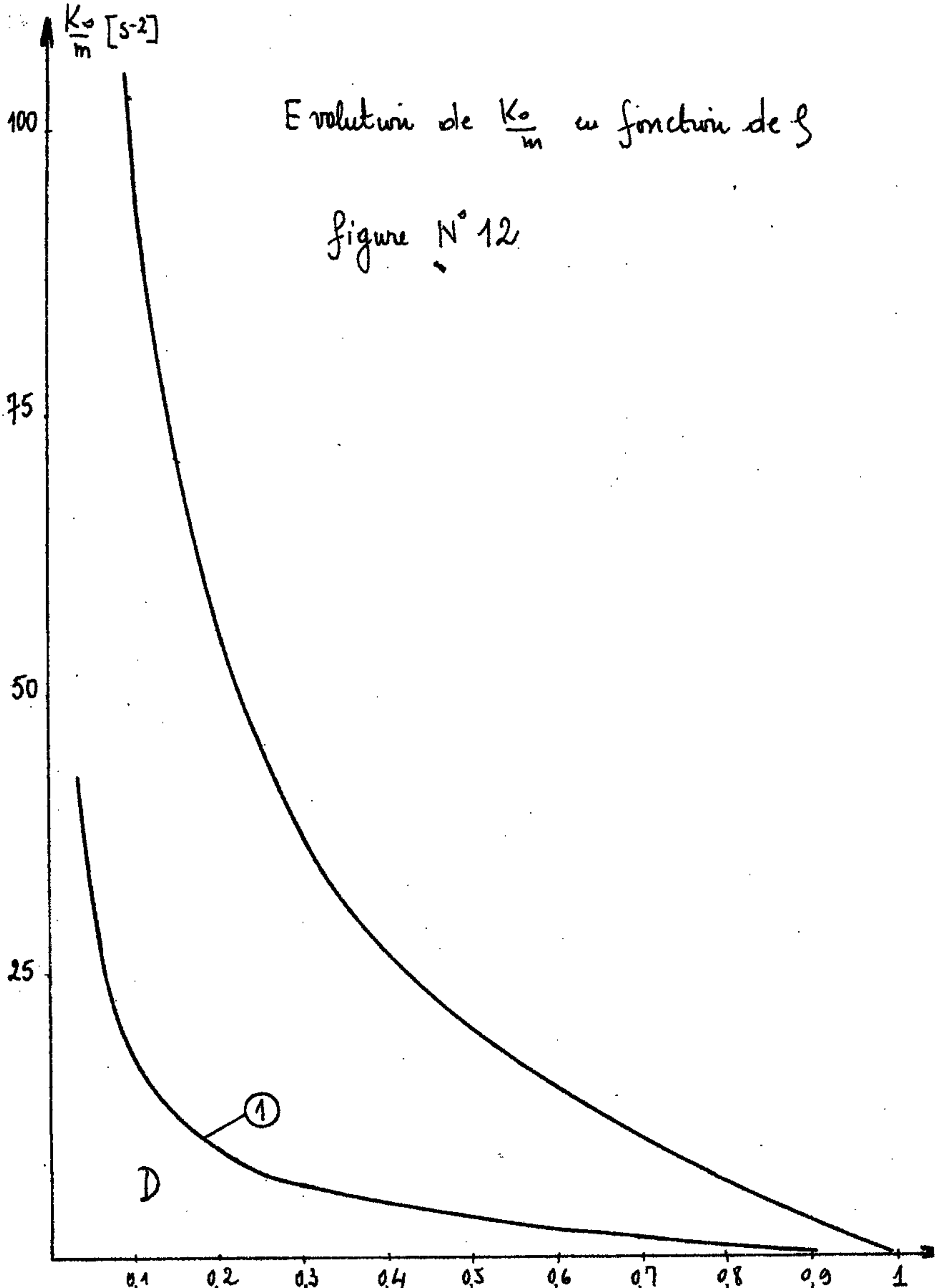
Cherchons les valeurs de $\frac{K_0}{m}$ pour lesquelles $C_A = C_{PH}$

et pour $C_{opt} = 1{,}684\, m\, \lambda^{-\frac{1}{2}}$ et $\alpha_{opt} = 2{,}0349\, m\, \lambda^{-\frac{1}{4}}$

on a $\frac{K_0}{m} = 19{,}841\, \lambda^{-3/4}$

Sur la figure N°11 ; D represente les valeurs acceptables de $\frac{K_0}{m}$ pour lesquelles on a la fonctionnelle C_A trouvée en presence du système actif inferieure à celle de C_{PH} trouvé sur la base du critère de Phillips : $C_A < C_{PH}$

Cela montre que le système actif qui a pour action integrale ; améliore l'isolation vibratoire et par conséquent le système de vibro isolation actif est meilleur que le système de vibro-isolation trouvé sur la base du critère de Phillips.



Evolution de $\frac{K_o}{m}$ en fonction de ξ

figure N° 12

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{G(s)}{D(s)} \frac{G(-s)}{D(-s)} \, ds$$

$$\frac{G(s)}{D(s)} = \frac{\alpha s^2 + (\alpha + c)s + c + K_0}{(ms^3 + (m+\alpha)s^2 + (\alpha + c)s + c + K_0)\cdot(\omega_0 + s)}$$ d'où

$$\frac{G(s)}{D(s)} = \frac{\alpha s^2 + (\alpha + c)s + c + K_0}{ms^4 + (m\omega_0 + m + \alpha)s^3 + (m\omega_0 + \alpha\omega_0 + \alpha + c)s^2 + (\alpha\omega_0 + c\omega_0 + c + K_0)s + c\omega_0 + \omega_0 K_0}$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 I_4^{(1)}$$

a cause de la complexité des équations, conservant ce type de système de vibro-isolation actif, on se limite seulement à un cas particulier, où le multiplicateur de lagrange $\lambda = 1$, $(\xi = 0{,}5)$.

$$I_4^{(1)} = \frac{-mK_0^3 + 5{,}784\, m^2 K_0^2 + 131{,}578\, m^3 K_0 + 200{,}398\, m^4}{-2{,}594\, mK_0^3 - 15{,}310\, m^2 K_0^2 + 325{,}018\, m^3 K_0 + 934{,}938\, m^4}$$

$I_4^{(1)}$ est tirée de la table d'integrale

Calcul de la dispersion du déplacement relatif

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{G(s)}{D(s)} \cdot \frac{G(-s)}{D(-s)} \, ds$$

$$\frac{G(s)}{D(s)} = \frac{-ms - m}{(ms^3 + (m+\alpha)s^2 + (\alpha + c)s + c + K_0)(\omega_0 + s)}$$

$$\frac{d(s)}{J(s)} = \frac{-ms - m}{ms^4 + (m\omega_0 + m + \alpha)s^3 + (m\omega_0 + \alpha\omega_0 + \alpha + c)s^2 + (\alpha\omega_0 + c\omega_0 + c + K_0)s + c\omega_0 + \omega_0 K_0}$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \Omega^2 \, I_4^{(2)}$$

$I_4^{(2)}$ tiré de la table d'integrale ; soit

$$I_4^{(2)} = \frac{4,618 m^3 k_0 + 36,106 m^4}{-2,594 m K_0^3 - 15,310 m^2 K_0^2 + 325,018 m^3 K_0 + 934,938 m^4}.$$

la fonctionnelle C est donneé par:

$C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\ddot{x}}$; avec $\lambda = 1$; on aura :

$$C = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \left(\frac{-mK_0^3 + 5,78 m^2 K_0^2 + 136,196 m^3 K_0 + 236,504 m^4}{-2,954 m K_0^3 - 15,310 m^2 K_0^2 + 325,018 m^3 K_0 + 934,938 m^4} \right)$$

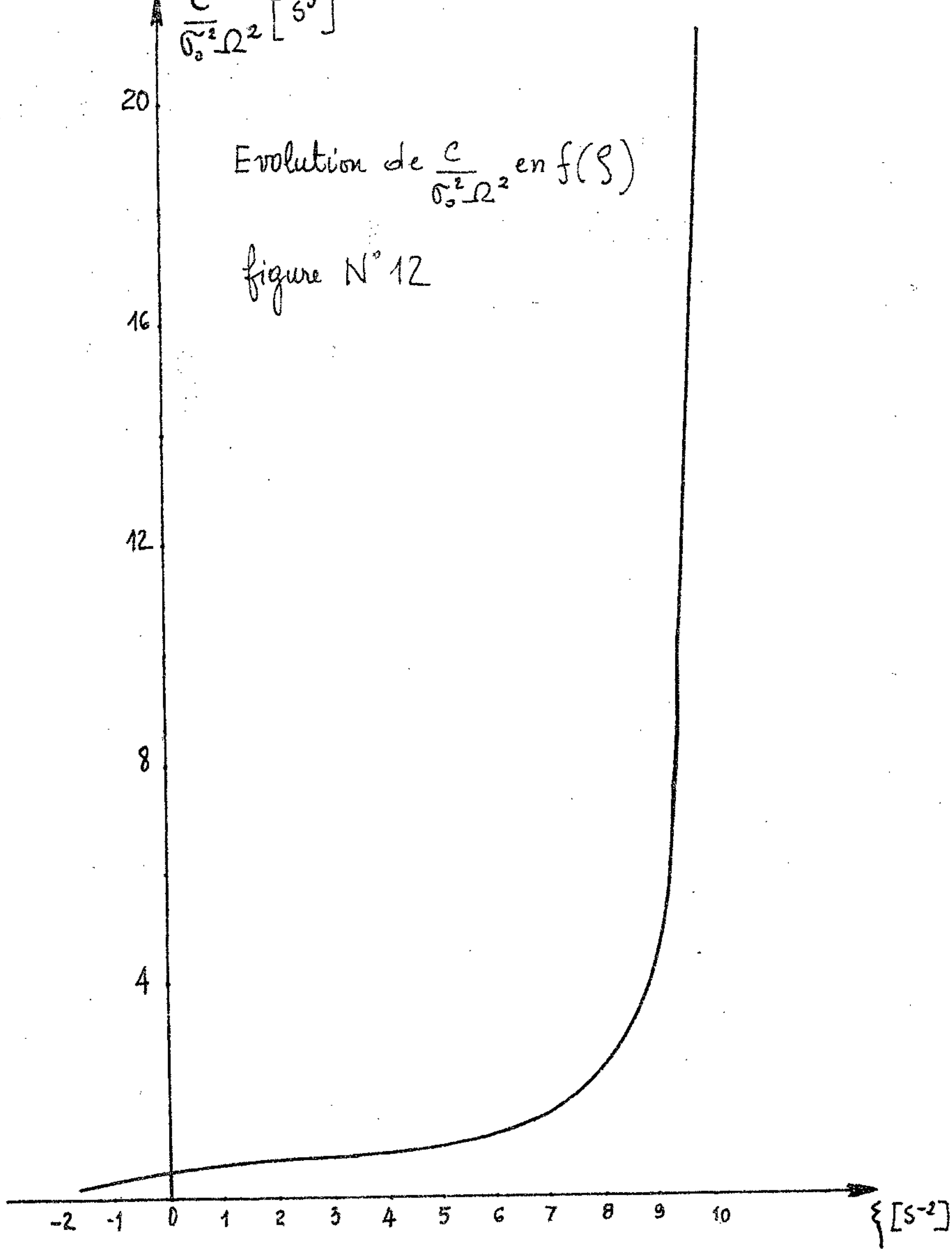
$\xi = \frac{K_0}{m}$;

$$C = \sigma_0^2 \Omega^2 \cdot \left(\frac{-\xi^3 + 5,78 \xi^2 + 136,196 \xi + 236,504}{-2,954 \xi^3 - 15,310 \xi^2 + 325,018 \xi + 934,938} \right)$$

avec :

$$-1,684 < \xi < 9,600$$

la fonctionnelle C dans le cas depend de la masse m du corps à vibro-isolé et du paramètre K_0 de la fonction de transfert du système actif.



Evolution de $\frac{C}{\sigma_0^2 \Omega^2}$ en $f(\xi)$

figure N° 12

Commentaire :

Suivant les resultats obtenus ; on a pour :

. $\xi \in (-1{,}68 \div 1{,}5)$, la fonctionnelle C_A varie de 0,096 jusqu'a 0,326

Cela montre que pour cet interval de ξ notre système de vibro-isolation en presence du système actif est meilleur que les deux systēmes de vibro-isolation trouvés precedement sur la base du critere de PHillips et Wiener Hopf

. $\xi > 1{,}5$ notre système de vibro-isolation ne convient pas mieux pour l'isolation vibratoire que les deux premiers systēmes.

Exemple :

prenons une valeur de ξ qui obeit à la stabilité du systeme est plus proche du pratique, soit $\xi = 0{,}1$ d'où $C_A = 0{,}2586$; avec

$$C_{W_H} = 0{,}3307$$

$$C_{PH} = 0{,}3897$$

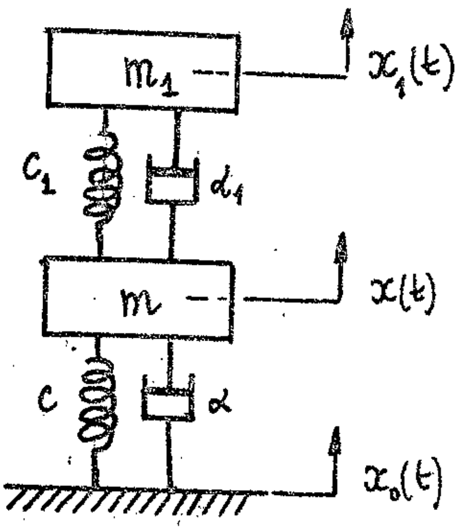
Suivant le critère d'efficacité on a :

$$\frac{C_A}{C_{WH}} = \frac{0{,}2586}{0{,}3307} = 0{,}7819 \; ; \quad \frac{C_A}{C_{PH}} = \frac{0{,}2586}{0{,}3897} = 0{,}6635.$$

Ces deux rapports d'efficacité prouvent que :
Le système de vibro-isolation en presence du système actif est :
. 21,803 % meilleur que le système de vibro-isolation trouvé sur la base du Critère de W. Hopf
. 33,650 % meilleur que le système de vibro-isolation trouvé sur la base du critère de PHillips.

V SYSTEME DE VIBRO ISOLATION POUR VIBRO-ISOLER UN SYSTEME DYNAMIQUE

1 Systeme de vibro isolation à structure connue



C'est Un système passif Constitué par Un ressort de rigiditéc et Un amortisseur, caracterisé par la Constante α

m_1 = masse du corps à vibro-isoler

1.1 Relation entre c_{opt}, α_{opt} et m

m = modele donné, representant la masse du systeme de vibro_isolation.

Excitation par Un bruit blanc : $S_{\ddot{x}_0} = \underline{\underline{cte}} = \sigma_0^2$

Determination de la dispersion de l'acceleration et de l'ecart :

La relation fondamentale de la dynamique pour ce système nous donne :

$$m_1\ddot{x}_1 = -C_1(x_1-x) - \alpha_1(\dot{x}_1-\dot{x}) \quad (1)$$

$$m\ddot{x} = -C(x-x_0) - \alpha(\dot{x}-\dot{x}_0) + C_1(x_1-x) + \alpha_1(\dot{x}_1-\dot{x}) \quad (2)$$

après transformation de fourier ($\dot{x}(t) = j\omega\, x(j\omega)$), on a :

de (1) : $\bar{x}_1(m_1 s^2 + C_1 + \alpha_1 s) = \bar{x}(C_1 + \alpha_1 s)$

de (2) : $\bar{x}(m s^2 + C + \alpha s + C_1 + \alpha_1 s) = \bar{x}_1(C_1 + \alpha_1 s) + \bar{x}_0(C + \alpha s)$

Ce système d'équations nous donne :

$$H_{\frac{x_1}{x_0}} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0} = \frac{\alpha\alpha_1 s^2 + (C\alpha_1 + \alpha C_1)s + CC_1}{m_1 m s^4 + (\alpha m_1 + m_1\alpha_1 + \alpha_1 m)s^3 + (Cm_1 + m_1 C_1 + mC_1 + \alpha\alpha_1)s^2 + (Cm_1 + m_1C_1 + mC_1 + \alpha\alpha_1)s + CC_1}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left|H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds = \sigma_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{G(s)}{D(s)} \cdot \frac{G(-s)}{D(-s)}\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = \sigma_0^2 \cdot I_4^{(1)} = \sigma_0^2 \cdot \frac{N_1}{D}$$

$$\frac{G(s)}{D(s)} = H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)$$

$$I_4^{(1)} = \frac{a_0^2 b_0 b_1 b_4 + (a_1^2 - 2a_0a_2)b_0b_3b_4 + a_0^2(-b_1b_4^2 + b_2b_3b_4)}{2b_0b_4(-b_0b_3^2 - b_1^2b_4 + b_1b_2b_3)}$$

avec $a_0 = CC_1$ $b_0 = CC_1$

$a_1 = C\alpha_1 + \alpha C_1$ $b_1 = \alpha C_1 + C\alpha_1$

$a_2 = \alpha\alpha_1$ $b_2 = mC_1 + m_1C_1 + \alpha\alpha_1 + m_1 C$

$a_3 = 0$ $b_3 = m\alpha_1 + \alpha_1 m_1 + \alpha m_1$; $b_4 = mm_1$

$$D = 2cc_1mm_1\Big(\big((m\alpha_1+\alpha_1m_1)+\alpha m_1\big)\cdot\big((mc_1+m_1c_1)+\alpha\alpha_1+m_1c\big)\cdot(\alpha c_1+c\alpha_1)-$$
$$-(\alpha c_1+c\alpha_1)^2mm_1-cc_1\cdot\big((m\alpha_1+\alpha_1m_1)+\alpha m_1\big)\Big)$$

$$D = m_1c_1^2(m+m_1)^2\alpha+\big(\alpha_1^2c_1(m+m_1)+m_1^2c_1^2\big)\alpha^2+m_1\alpha_1c_1\alpha^3+$$
$$+\big(\alpha_1^3(m+m_1)-2c_1\alpha_1mm_1\big)\alpha c+m_1\alpha_1^2c\alpha^2+m_1^2\alpha_1^2c^2+m_1^2\alpha_1\alpha c^2$$

$$N_1 = \alpha^2\alpha_1^2cc_1(\alpha c_1+c\alpha_1)mm_1+\big((c\alpha_1+\alpha c_1)^2-2c_1c\cdot\alpha\alpha_1\big)\cdot$$
$$\cdot\Big(\big((m\alpha_1+\alpha_1m_1)+\alpha m_1\big)cc_1mm_1+c_1^2c^2\big(-(\alpha c_1+c\alpha_1)m^2m_1^2+$$
$$+mm_1\cdot(mc_1+m_1c_1+\alpha\alpha_1+m_1c)(m\alpha_1+\alpha_1m_1+\alpha m_1)\big)\Big)$$

$$N_1 = (mm_1c_1^2\alpha_1^2+mm_1^2c_1^3)\,c\alpha^3+(mm_1c_1\alpha_1^3+\alpha_1m_1^2mc_1^2)\alpha^2c^2$$
$$+\big(mm_1c_1\alpha_1^3(m+m_1)+mm_1^3\alpha_1c_1^2\big)c^3+(mm_1^2c_1\alpha_1^2+mm_1^3c_1^2)\alpha c^3$$
$$+\big(mm_1c_1^3\alpha_1(m+m_1)\big)c\alpha^2+mm_1c_1^3\alpha_1(m+m_1)^2c^2+$$
$$+\big(mm_1\alpha_1^2c_1^2(m+m_1)+mm_1^3c_1^3\big)\alpha c^2$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|H_{\frac{x-x_0}{\bar{x}_0}}(s)\right|^2 ds$$

$H_{\frac{x-x_0}{\bar{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2}\left(H_{\frac{x}{\bar{x}_0}}-1\right)$; on doit chercher la fonction de transfert $H_{\frac{x}{\bar{x}_0}}$:

de l'expression (2) on obtient :

$$\bar{x}(ms^2+\alpha s+c+\alpha_1s+c_1) = \bar{x}_0(\alpha s+c)+\bar{x}_1(\alpha_1s+c_1)\cdot(1^*)$$

de l'expression (1) on obtient.

$$x_1 = \bar{x}\left(\frac{c_1+\alpha_1s}{m_1s^2+c_1+\alpha_1s}\right);\ (2^*)$$

la combinaison de (1^*) et (2^*) nous donne :

$$H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s)=\frac{m_1\alpha\, s^3+(m_1c+\alpha_1\alpha)s^2+(\alpha_1 c+c_1\alpha)s+cc_1}{mm_1 s^4+(\alpha m_1+\alpha_1 m_1+\alpha_1 m)s^3+(cm_1+\alpha\alpha_1+c_1 m+c_1m_1)s^2+s(c_1\alpha+\alpha_1 c)s+cc_1}$$

d'où :

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)=\frac{-mm_1 s^2-(m\alpha_1+\alpha_1 m_1)s-(c_1 m+c_1 m_1)}{mm_1 s^4+(\alpha m_1+\alpha_1 m_1+\alpha_1 m)s^3+(cm_1+\alpha\alpha_1+c_1 m+c_1 m_1)s^2+(c_1\alpha+\alpha_1 s)s+cc_1}$$

$$\sigma^2_{x-x_0}=\sigma_0^2\cdot\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\omega}^{j\omega}\frac{G(s)}{d(s)}\cdot\frac{G(-s)}{d(-s)}\,ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0}=\sigma_0^2\, I_4^{(2)}=\sigma_0^2\cdot\frac{N_2}{D}$$

$$\frac{G(s)}{d(s)}=H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s)$$

$$I_4^{(2)}=\frac{a_2^2 b_0 b_1 b_4+(a_1^2-2a_0a_2)b_0b_3b_4+a_0^2(-b_1b_4^2+b_2b_3b_4)}{2b_0b_4(-b_0b_3^2-b_1^2b_4+b_1b_2b_3)}$$

avec

$a_0=-c_1(m+m_1)$; b_0; b_1; b_2 ; b_3 et b_4 gardent les
$a_1=(m+m_1)\alpha_1$ mêmes valeurs que le precedent.
$a_2=-mm_1$
$a_3=0$

$$N_2=m^2m_1^2\cdot mm_1\cdot cc_1(\alpha c_1+c\alpha_1)+\left(\alpha_1^2(m+m_1)^2-2mm_1c_1(m+m_1)\right)\cdot\left(\right.$$
$$\cdot\left(mm_1cc_1(m\alpha_1+\alpha_1 m_1+\alpha m_1)\right)+c_1^2(m+m_1)^2\left(-(\alpha c_1+c\alpha_1)m^2m_1^2+\right.$$
$$\left.mm_1\cdot(mc_1+m_1c_1+\alpha\alpha_1+m_1c)(m\alpha_1+\alpha_1m_1+\alpha m_1)\right)\Big)$$

$$N_2=\left(mm_1\alpha_1^2c_1^2(m+m_1)^3+c_1^3mm_1^3(m+m_1)^2\right)\alpha+c_1^2\alpha_1m_1^2m(m+m_1)^2\alpha^2$$
$$+m^3m_1^3c_1\alpha_1c^2+mm_1c_1^3\alpha_1(m+m_1)^4$$

$\sigma_{\dot{x}}^2$ et $\sigma_{x-x_0}^2$ connues d'où l'expression de la fonctionnelle C.

$$C = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda \sigma_{\dot{x}}^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{N_1}{D} + \lambda \frac{N_2}{D} \right)$$

c_{opt} et α_{opt} seront déterminés de la manière suivante.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial c} = 0 \; : & \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial c} + \lambda \dfrac{\partial N_2}{\partial c} \right) D - (N_1 + \lambda N_2) \dfrac{\partial D}{\partial c} = 0 \quad ; (1) \\ \dfrac{\partial C}{\partial \alpha} = 0 & \left(\dfrac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \lambda \dfrac{\partial N_2}{\partial \alpha} \right) D - (N_1 + \lambda N_2) \dfrac{\partial D}{\partial \alpha} = 0 \quad ; (2) \end{cases}$$

Pour simplifier le calcul ; mettons N_1, N_2 et D sous les formes suivantes:

$$N_1 = A_1 c\alpha^3 + A_2 \alpha^2 c^2 + A_3 c^3 + A_4 \alpha c^3 + A_5 c\alpha^2 + A_6 c^2 + A_7 \alpha c^2$$

$$D = B_1 \alpha + B_2 \alpha^2 + B_3 \alpha^3 + B_4 \alpha c + B_5 c\alpha^2 + B_6 c^2 + B_7 \alpha c^2$$

$$N_2 = C_1 c + C_2 \alpha c + C_3 \alpha + C_4 \alpha^2 + C_5 c^2 + C_6$$

(1) :

$$\begin{aligned} &(2A_7 B_1 - \lambda C_2 B_1 - 2\lambda C_4 B_6 + \lambda C_2 B_4 - 2\lambda C_3 B_7)\alpha^2 c + (A_1 B_1 - \\ &- \lambda C_4 B_5 + A_5 B_2 + \lambda C_2 B_3)\alpha^4 + (A_1 B_2 + A_5 B_3)\alpha^5 + A_1 B_3 \alpha^6 \\ &+ (A_1 B_4 - A_1 B_1 - A_1 B_5 + 2A_2 B_2 + 2A_7 B_3 + A_5 B_5) c\alpha^4 + \\ &+ 2A_2 B_3 c\alpha^5 + (A_7 B_5 - A_1 B_6 - A_2 B_1 + 3A_4 B_2 + 3A_3 B_3 + 2A_2 B_4 - \\ &- 2A_5 B_7 + 2A_6 B_3 - 2A_1 B_6) c^2 \alpha^3 + (A_2 B_5 - A_1 B_7) c^2 \alpha^4 + \\ &+ (2A_2 B_1 - A_5 B_1 - \lambda C_2 B_5 + 2A_7 B_2 + 2\lambda C_5 B_3 - 2\lambda C_4 B_7 + A_5 B_4 + \\ &+ \lambda C_2 B_5 + A_5 B_7) c\alpha^3 + (3A_1 B_4 - A_4 B_1 - A_3 B_5 + 3A_3 B_5 + 2A_6 B_5)\alpha^2 c^3 + \\ &+ (2A_2 B_7 - A_4 B_5 - 2A_3 B_7 + 3A_4 B_5)\alpha^3 c^3 + (3A_3 B_1 + A_6 B_1 - \lambda C_5 B_1 - \lambda C_2 B_6 + \end{aligned}$$

[illegible]

$$+(3A_3B_2+3A_4B_4-A_7B_1-\lambda C_5B_2-A_6B_5-2A_6B_2-2A_5B_6+2A_7B_4+2\lambda C_5B_5+$$
$$+A_5B_6-\lambda C_2B_7)\alpha^2c^2+(3A_4B_6+3A_3B_4+A_3B_7+2A_6B_7)\alpha c^4+(3A_4-2A_4B_7)\alpha^2c^4$$
$$+(A_5B_1-\lambda C_3B_5+\lambda C_2B_2)\alpha^3+(2A_6B_4+2A_7B_6-2A_6B_7)\alpha c^3+(2A_6B_6+$$
$$+A_3B_6)c^4+(\lambda C_7B_1-\lambda C_6B_1)\alpha+(\lambda C_1B_4+\lambda C_2B_1-\lambda C_3B_1-\lambda C_2B_2)\alpha^2+$$
$$+(\lambda C_7B_4+2\lambda C_5B_1-\lambda C_1B_1-2\lambda_6B_7)\alpha c-\lambda C_1B_6c^2-2A_6B_6c^3=0$$

(2) :

$$(2A_1B_1-2A_1B_2-2\lambda C_2B_2-A_1B_4-2A_1B_5-A_1B_7-3A_1B_3)c\alpha^3+$$
$$+(A_2B_1-A_7B_2-3A_6B_3-3\lambda C_5B_3+A_5B_4+\lambda C_2B_5-2\lambda C_1B_5$$
$$+\lambda C_4B_7)\alpha^2c^2+(-2A_3B_2-2A_6B_5-\lambda C_1B_7+\lambda C_2B_7+2A_5B_6)\alpha c^3$$
$$+(A_3B_1-2\lambda C_3B_2+\lambda C_4B_4-\lambda C_3B_5-3\lambda C_1B_3)c\alpha^2+(\lambda C_2B_4-\lambda C_1B_4$$
$$-2A_6B_2-2\lambda C_5B_2-2\lambda C_1B_5+\lambda C_6B_2+2\lambda C_4B_6)\alpha c^2+$$
$$+(-2\lambda C_6B_5-2\lambda C_1B_2)\alpha c-2\lambda C_6B_2+(\lambda C_4B_1-\lambda C_3B_2-3\lambda C_5B_3)\alpha^2$$
$$+(-A_3B_1-\lambda C_5B_4-A_6B_4-\lambda C_1B_7+\lambda C_2B_6)c^3+(-A_6B_1-\lambda C_5B_1-$$
$$-\lambda C_7B_4-\lambda C_6B_7+\lambda C_3B_6)c^2+(-\lambda C_1B_1-\lambda C_6B_4)c+(3A_1B_6-A_7B_3)c\alpha^4$$
$$+(-2A_7B_3+3A_1B_4)c^2\alpha^3+(-A_4B_2-3A_3B_3+2A_2B_4+A_7B_5-$$
$$-2A_7B_2-2\lambda C_5B_5+A_5B_7+3A_1B_6)\alpha^2c^3-2\lambda C_3B_3\alpha^3+3A_1B_3c\alpha^5$$
$$+(-A_2B_3+3A_1B_5)c^2\alpha^4+(2A_4B_3+3A_1B_7)\alpha^3c^3-\lambda C_4B_3\alpha^4+(A_7B_6-$$
$$-A_6B_7-A_3B_4-\lambda C_5B_7)c^4+(-2A_3B_5+2A_2B_6)\alpha c^4+(-A_4B_5+$$
$$+A_2B_7)\alpha^2c^4+(A_4B_6-A_3B_7)c^5-2\lambda C_4B_2\alpha^3-\lambda C_6B_1=0\ .$$

Si on prend, l'exemple d'un conducteur d'un vehicule, tel que le modèle dynamique étant le fauteuil avec son système de vibro-isolation.

Le système à vibro-isoler a comme caractéristiques :

la masse $m_1 = 80{,}862\,kg$

le ressort $C_1 = 7961{,}05\,kg/s^2$

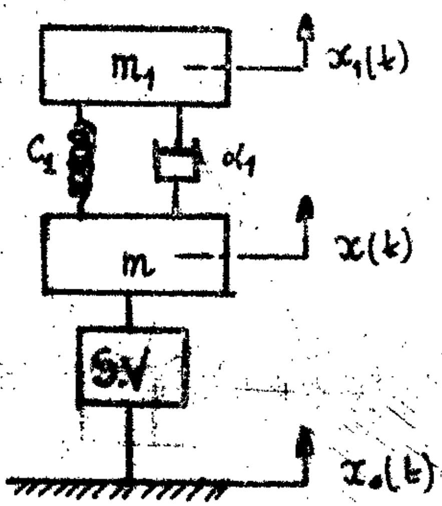
l'amortisseur $\alpha_1 = 141{,}688\,kg/s$

dans le cas C_{opt} et α_{opt} dependent seulement de la masse m du modèle dynamique (fauteuil) et du multiplicateur de lagrange λ.

On remarque que la méthode de PHillips devient plus ambitieuse dés que le degré des équations en jeu s'élève, et par conséquent la détermination de C_{opt} et α_{opt} est fastidieuse.

Avec les mêmes données du système a vibro-isoler, on applique la Méthode de Wiener Hopf pour la détermination de la fonctionnelle C.

2 Système de vibro-isolation à structure inconnue (Méthode de Wiener Hopf)



la fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par l'expression suivante:

$$\phi(s)=\frac{Z(s)}{R(s)\cdot\varphi(s)\ s^2}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}$$

$$R(s).R(-s)=1+\lambda s^4 L_1(s)L_1(-s)\ ;\ L_1(s)=\frac{\bar{X}_1(s)}{\bar{\bar{X}}(s)}=\frac{d_1 s+C_1}{m_1 s^2+d_1 s+C_1}$$

d'où $R(s).R(-s)=1+\lambda s^4\cdot\frac{d_1 s+C_1}{m_1 s^2+d_1 s+C_1}\cdot\frac{-d_1 s+C_1}{m_1 s^2-d_1 s+C_1}$ soit

$$R(s).R(-s)=\frac{-\lambda d_1^2 s^6+(m_1^2+\lambda C_1^2)s^4+(2m_1C_1-d_1^2)s^2+C_1^2}{(m_1 s^2+d_1 s+C_1)(m_1 s^2-d_1 s+C_1)}$$, que

l'on peut écrire sous la forme suivante:

$$R(s).R(-s)=\frac{As^3+Bs^2+Ds+E}{(m_1 s^2+d_1 s+C_1)}\cdot\frac{-As^3+Bs^2-Ds+E}{(m_1 s^2-d_1 s+C_1)}$$

après identification on trouve :

$A=d_1\sqrt{\lambda}$

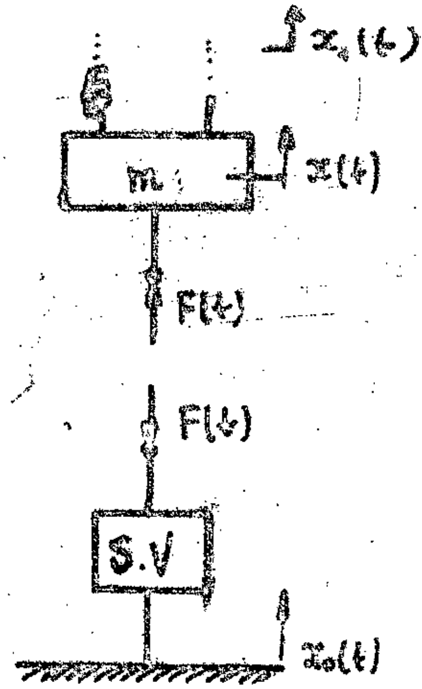
$B^2-2d_1\sqrt{\lambda}D=m_1^2+\lambda C_1^2$

$2BC_1-D^2=2m_1C_1-d_1^2$

$E=C_1$

d'où $R(s)=\frac{(As^3+Bs^2+Ds+E)}{(m_1 s^2+d_1 s+C_1)}$

Pour la détermination de l'impédance de déplacement $Z(s)$ on fait apparaître la force de liaison $F(t)$ soit le schéma suivant:



de ce système on peut écrire.

$$m\ddot{x} = F(t) + c_1(x_1 - x) + d_1(\dot{x}_1 - \dot{x})$$

après transformations de laplace et fourier on aura :

$$\bar{x}(s)\left(m s^2 + d_1 s + c_1\right) = \bar{x}_1(s)\left(d_1 s + c_1\right) + \bar{F}(s) \quad (1)$$

pour la masse m_1 on peut écrire :

$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x) - d_1(\dot{x}_1 - \dot{x})$, après transformation on obtient :

$$\frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{d_1 s + c_1}{m_1 s^2 + d_1 s + c_1} \quad (2)$$

(1) et (2) :

$$Z(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{m m_1 s^4 + (m + m_1) d_1 s^3 + (m + m_1) c_1 s^2}{m_1 s^2 + d_1 s + c_1}$$

avec $\phi(s) = \dfrac{\bar{F}(s)}{\bar{x}_0(s)}$; la fonction de transfert $H_{\frac{x}{x_0}}$ est.

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{m_1 s^2 + d_1 s + c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)\,\varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

dans le cas d'une excitation par un bruit blanc.

on a : $\sigma_0^2 = s^4 \cdot$ [illegible] $\varphi(-s)$ ce qui donne $\varphi(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$\frac{\varphi(s)}{R(-s)} = \frac{1/s^2}{\dfrac{-As^3+Bs^2-Ds+E}{m_1 s^2 - d_1 s + C_1}} = M$$

prenons la partie ayant des pôles à gauche de l'axe imaginaire ou nuls. soit $M_+ = \frac{Fs+G}{s^2}$; après identification on trouve :
$$\begin{cases} G = \dfrac{C_1}{E} \\ F = \dfrac{-d_1 E + C_1 D}{E^2} \end{cases} ; \quad M_+ = \frac{C_1 E + (d_1 E + C_1 D)s}{E^2 s^2}$$

d'où :

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{(m_1 s^2 + d_1 s + C_1)\left((C_1 D - d_1 E)s + C_1^2\right)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)E^2}$$

Calcul de la dispersion de l'accélération : $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \sigma_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) \right|^2 ds = \sigma_0^2 \cdot I_3^{(1)}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{d_1(-d_1 + C_1)\left((-d_1 C_1 + C_1 D)s + C_1^2\right)}{C_1^2(As^3 + Bs^2 + Ds + C_1)}$$

tiré de la relation suivante : $H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$

avec $H_{\frac{x_1}{x_0}} = \dfrac{d_1 s + C_1}{m_1 s^2 + d_1 s + C_1}$

$$I_3^{(1)} = \frac{D\left(d_1(D-d_1)\right)^2 + C_1^2 A\left(D^2 - 2d_1(D-d_1)\right) + C_1^3 AB}{2AC_1^2(DB - AC_1)}$$

d'où $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$

Calcul de la dispersion de deplacement relatif $\sigma^2_{x-x_0}$.

$$\sigma^2_{x-x_0} = \sigma_0^2 \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 ds = \sigma_0^2 \, I_3^{(2)} \quad , \text{ avec}$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\left(m_1(-d_1E + c_1D) - AE^2\right)s + \left(m_1c_1E + d_1(-d_1E + c_1D)^2 - BE^2\right)}{AE^2s^3 + BE^2s^2 + DE^2s + E^3}$$

soit $$I_3^{(2)} = \frac{\left(m_1(D-d_1) - Ac_1\right)^2 c_1 + \left((m_1 - B)c_1 + d_1(D-d_1)\right)^2 \cdot B}{2c_1^2\,(DB - Ac_1)}$$

d'ou $\sigma^2_{x-x_0}$.

La determination de la fonctionnelle C, ($C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\sigma^2_{\ddot{x}_1}$) necessite, en premier lieu la resolution du système d'equations en A, B, D et E suivant

$$A = d_1\sqrt{\lambda}$$
$$B^2 - 2d_1\sqrt{\lambda}D = m_1^2 + \lambda c_1^2 \quad ; (1)$$
$$2Bc_1 - D^2 = 2m_1c_1 - d_1^2 \quad ; (2)$$
$$E = c_1$$

avec $m_1 = 80{,}862$ kg

$c_1 = 7964{,}05$ kg/s²

$d_1 = 141{,}688$ kg/s

(1) et (2) : $$\begin{cases} B^2 - 2d_1\sqrt{\lambda}D - (m_1^2 + \lambda c_1^2) = 0 \\ 2Bc_1 - D^2 - (2m_1c_1 - d_1^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B^2 - 2.141,688\sqrt{\lambda}\,D - \left((80,862)^2 + \lambda.(7961,05)^2\right) = 0 \\ 2.7961,05.B - D^2 - \left(2.80,862.7961,05 - (141,688)^2\right) = 0 \end{cases}$$

la deuxième équation de ce système nous donne :

$$B = \frac{D^2 + 1267417,4}{15922,1}$$

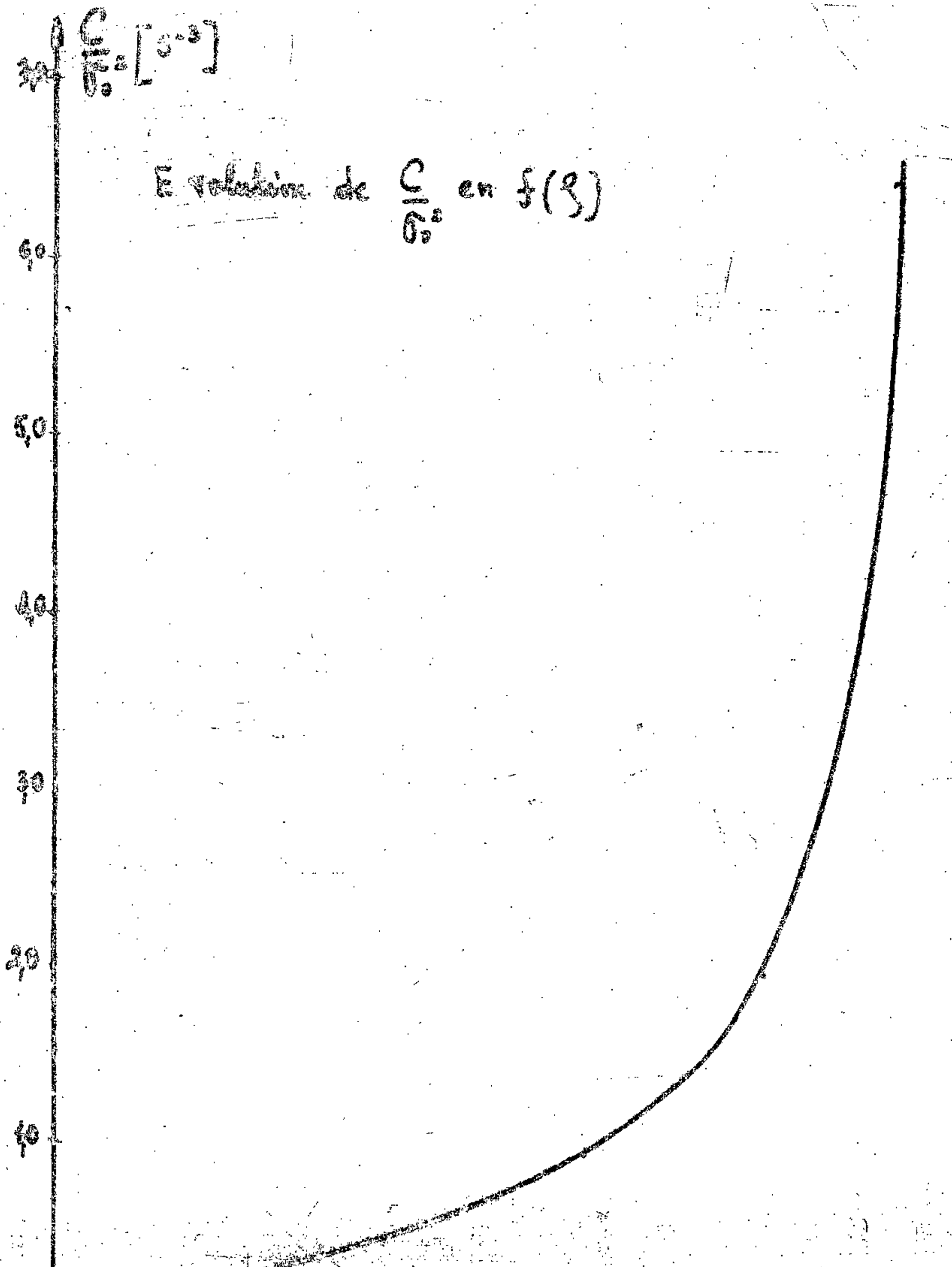
la première équation devient donc :

$$D^4 + 2534834,8\,D^2 - 7,18395.10^{10}\sqrt{\lambda}\,D - \left(1,60672.10^{16}\lambda + 5,129.10^{10}\right) = 0$$

soit

$$f(D) = D^4 + 2534834,8\,D^2 - 7,18395.10^{10}\sqrt{\lambda}\,D - \left(1,60672.10^{16}\lambda + 5,129.10^{10}\right) = 0$$

Après transformation de le système non linéaire paramétré en une équation linéaire (en D), un programme (FORTRAN) est développé pour la résolution de cette équation par la méthode d'itération successives.



$\frac{C}{\sigma_0^2}[s^{-3}]$
Evolution de $\frac{C}{\sigma_0^2}$ en $f(\rho)$
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
ρ^1

```
    ######## programme qui calcul les dispersions de
       de l'ecart et de l'acceleration ainsi que
                la fonctionnelle ########

      READ*,W1,C1,A1
      DO 60 RO=0.05,0.95,0.05
         P=RO/(1-RO)
      X1=A1*SQRT(P)
      XN=1.
   15 AN=2534834.8
      BN=7.18395E+10*SQRT(P)
      CN=1.60672E+16*P+5.129E+10
      XP=BN*XN-AN*XN**2+CN
      X3=XP**(0.25)
       Y=ABS(X3-XN)
      IF(Y.LT.0.0000000000000001) GO TO 23
      XN=X3
      GO TO 15
   23 RS=1267417.4
      RT=15922.1
      X2=(RS+X3**2)/RT
      X4=C1
      H=2.*(X3*X2-X1*C1)*(C1**3)
      TE=(C1*(W1*(X3-A1)-X1*C1)**2)/H
      T1=TE+((((W1-X2)*C1+A1*(X3-A1))**2)*X2)/H
      U=2.*X1*(C1**2)*(X3*X2-X1*C1)
      TY=X3*((A1*(X3-A1))**2)/U
      T2=TY+C1**2*X1*(D**2-2.*A1*(X3-A1))/U+(C1**3*X1*X2)/U
      FONC=T1+P*T2
      WRITE(1,*),'============================================='
      WRITE(1,*),'RO=',RO
      WRITE(1,*),'_____________________________________________'
      WRITE(1,*),X1,X2,X3,X4
      WRITE(1,*),'_____________________________________________'
      WRITE(1,*),T1,T2,FONC
   60 CONTINUE
      STOP
      END
```

valeurs de ro , A , B , D , E
dispersions de l'ecart et l'acceleration ainsi que
la fonctionnelle ######

RO= 5.0000001E-02			
32.50546	1922.069	5416.266	7961.050
3.6328182E-02	0.7523596	7.5920058E-02	
RO= 0.1000000			
47.22934	2768.872	6543.611	7961.050
6.4951673E-02	0.6207621	0.1339252	
RO= 0.1500000			
59.52087	3473.618	7351.190	7961.050
9.2771225E-02	0.5515274	0.1900936	
RO= 0.2000000			
70.84400	4121.622	8022.310	7961.050
0.1211763	0.5047067	0.2473530	
RO= 0.2500000			
81.80360	4747.956	8621.485	7961.050
0.1509817	0.4691320	0.3073591	
RO= 0.3000000			
92.75657	5373.245	9180.736	7961.050
0.1828785	0.4401636	0.3715209	
RO= 0.3500000			
103.9706	6012.850	9719.557	7961.050

RO= 0.3500000

103.9706	6012.850	9719.557	7961.050
0.2175824	0.4154413	0.4412816	

RO= 0.4000000

115.6878	6680.615	10251.93	7961.050
0.2559298	0.3935946	0.5183263	

RO= 0.4500000

128.1616	7391.011	10789.49	7961.050
0.2989741	0.3737459	0.6047663	

RO= 0.5000001

141.6880	8160.825	11343.28	7961.050
0.3481043	0.3552853	0.7033897	

RO= 0.5500001

156.6420	9011.368	11925.29	7961.050
0.4052454	0.3377510	0.8180523	

RO= 0.6000001

173.5317	9971.429	12549.85	7961.050
0.4731724	0.3207613	0.9543145	

RO= 0.6500001

193.0882	11082.43	13235.87	7961.050
0.5560891	0.3039651	1.120596	

RO= 0.7000001

RO= 0.7000001

216.4320	12407.80	14010.38	7961.050
0.6607366	0.2869969	1.330397	

RO= 0.7500001

245.4109	14052.11	14915.48	7961.050
0.7987468	0.2694202	1.607008	

RO= 0.8000001

283.3761	16204.95	16023.40	7961.050
0.9922844	0.2506300	1.994805	

RO= 0.8500001

337.2851	19259.74	17475.36	7961.050
1.290111	0.2296397	2.591404	

RO= 0.9000002

425.0644	24229.76	19609.21	7961.050
1.827675	0.2044714	3.667921	

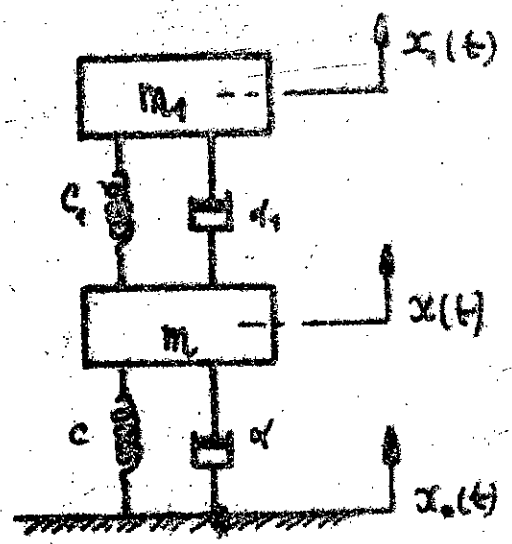
RO= 0.9500002

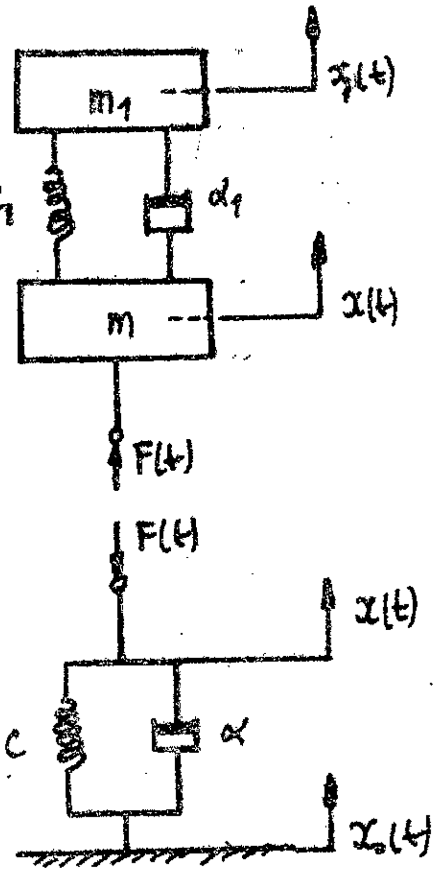
617.6048	35119.35	23620.04	7961.050
3.206141	0.1695429	6.427467	

###

3 Systeme de vibro-isolation actif

3.1 Schema bloc





La Relation fondamentale de la dynamique pour le système nous donne:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 - d_1 \dot{x}_1 + c_1 x + d_1 \dot{x}$$
$$m x = -c_1 x - d_1 \dot{x} + F(t) + c_1 x_1 + d_1 \dot{x}_1$$
$$0 = -F(t) - c x - d \dot{x} + c x_0 + d \dot{x}_0$$

après transformations de laplace et fourier on obtient : $m_1 s^2 \bar{x}_1 = -c_1 \bar{x}_1 - d_1 s \bar{x}_1 + c_1 \bar{x} + d_1 s \bar{x}$

$$m s^2 \bar{x} = -c_1 \bar{x} - d_1 s \bar{x} + s^2 \bar{F}(s) + c_1 \bar{x}_1 + d_1 s \bar{x}_1$$

$$0 = -s^2\bar{F}(s) - C\bar{\ddot{x}} - ds\,\bar{\ddot{x}}_0 + c\bar{\ddot{x}}_0 + ds\bar{\ddot{x}}_0 \; ; (3)$$

(1) :

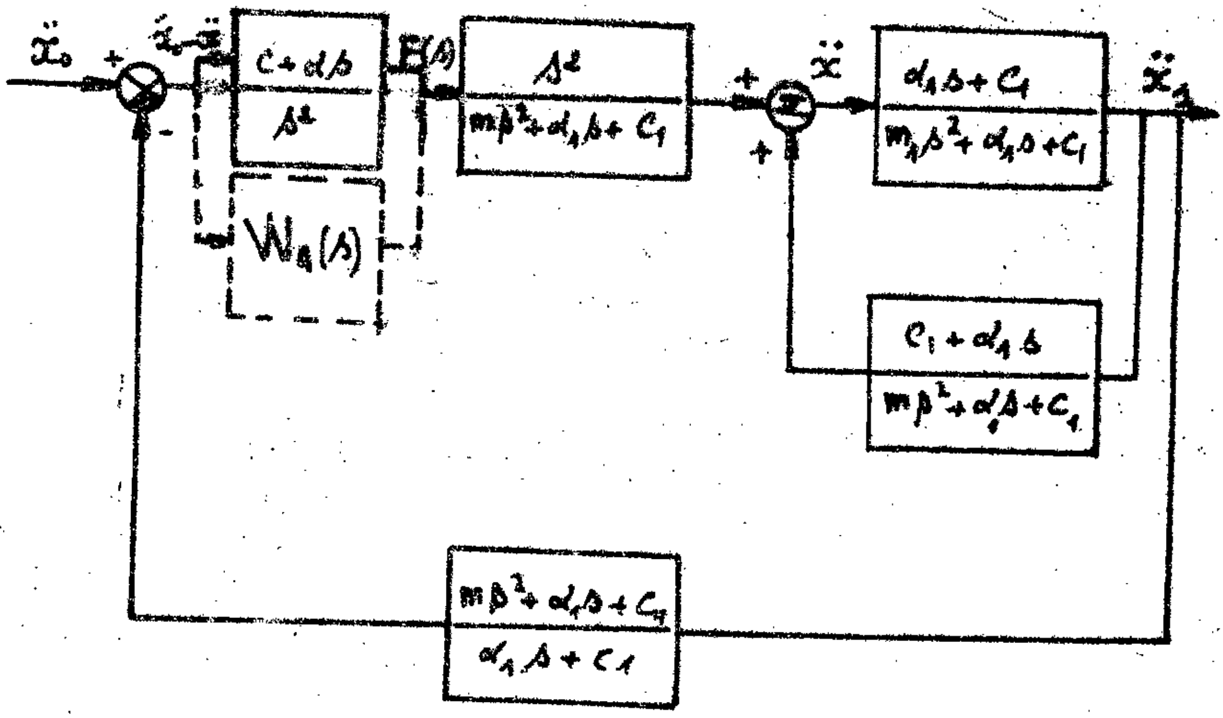
$$\ddot{x}_1 = \frac{c_1 + d_1 s}{m_1 s^2 + c_1 + d_1 s}$$

(2) :

$$\bar{\ddot{x}} = \frac{c_1 + d_1 s}{m s^2 + d_1 s + c_1}\ddot{x}_1 + \frac{s^2}{m s^2 + c_1 + d_1 s}\bar{F}(s)$$

(3) :

$$\bar{F}(s) = \frac{c + d s}{s^2}\left(\bar{\ddot{x}}_0 - \bar{\ddot{x}}\right)$$



en presence du systeme actif la fonction de transfert $W_a(s)$ devient en parallele avec la fonction de transfert ; $\frac{c+ds}{s^2}$

CONCLUSION

1. L'étude ainsi faite, concerne la vibro-isolation des systèmes à paramètres discrets ; qu'on pourra la compléter par la vibro-isolation des systèmes à paramètres continus, étude qui s'avère plus sérieuse, vu son application dans la vie courante.

2. Cette théorie nous permet de distinguer l'influence des systèmes passifs et actifs sur l'isolation vibratoire des systèmes mécaniques et de voir la comparaison d'efficacités des systèmes de vibro-isolation passif obtenus par la méthode de Phillips, et les systèmes de vibro-isolation optimum obtenus par la Méthode de Wiener Hopf, et les systèmes de vibro-isolation passifs à paramètres optimisés, en présence du système actif

3. Lors d'une excitation par un bruit blanc $S_{\ddot{x}_0}(s) = \sigma_0^2$ le système de vibro-isolation obtenu par la méthode de Phillips n'est que le système de vibro-isolation obtenu par la Méthode de Wiener Hopf. et le système actif n'a aucune amélioration sur l'isolation vibratoire du système mécanique

4. Lors d'une excitation $S_{\ddot{x}_0}(s) = \sigma_0^2 \Omega^2 / (\omega_0^2 - s^2)$, le système de vibro isolation obtenu par la Méthode de W.H est meilleur que celle obtenue par la méthode de Phillips

5. Pour le système actif, son influence sur l'isolation vibratoire dépend de son action et du multiplicateur de Lagrange.

BIBLIOGRAPHIE

1. Doebelin, Mc Graw-Hill
   "Dynamic Analysis and Feedback Control"
   New-York; San francisco, toronto; london 1962
2. V.V Solodovnikov
   Dynamic Statistique des Systèmes lineaires de Commande Automatique
   Dunod. Paris 1965.
3. Analytical Design of Linear feedback Controls
   New york. John wiley & Sons, Inc. 1957.
4. V.A. Svetlickij
   traduit du russe par Albert Coubat.
   Vibrations Aleatoires des Systèmes mecaniques
   Paris 1980
5. P. Levy
   Processus Stochastiques et Mouvement Brownien.
   Paris.
6. J Stern; J. de Barbeyrac
   Methodes pratiques, d'etude des fonctions aleatoires
   Dunod; Paris 1967
7. J-Ch. Gille P. Decaulne M. Pélegrin
   theorie et Calcul des asservissements lineaires

Bordas, Paris, 1982
8. Michel Cerr
INstrumentation industrielle
technique et vulgarisation 1976
9. Marek Ksiazek, C. Ahrikencheikh
"vibro-isolation, optimum des excitations stochastiques"
Promotion, école Nationale polytechnique d'Alger J.83