

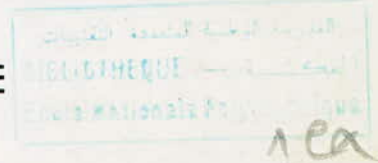
وزارة التعليم و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

MÉCANIQUE



# PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

S U J E T

## ETUDE DYNAMIQUE DU CHASSIS DE CAMION K 120

par la Méthode des éléments finis

Proposé par :

S N V I

Etudié par :

A. BENMACHICHE

Dirigé par :

M. TAZI

PROMOTION : JUIN 1987

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

DEPARTEMENT MÉCANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

**ETUDE DYNAMIQUE DU CHASSIS  
DE CAMION K 120**

par la Méthode des éléments finis

Proposé par :

S N V I

Etudié par :

A. BENMACHICHE

Dirigé par :

M. TAZI

PROMOTION JUIN 1987

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

وَالصَّلَاةِ  
وَالسَّكِينِ  
وَمَا تَنْزَلُ  
رَبِّ الْعَالَمِينَ

صِدْقِ اللَّهِ الْعَظِيمِ

Ministère de l'enseignement supérieur  
Ecole national polytechnique  
Département : Mécanique  
Promoteur : Mohamed Tazi  
Elève ingénieur : BENMACHICHE Abdelmouméne Hakim

المندوبية الوطنية للتقنيات  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

وزارة التعليم العالي

الدراسة الوطنية المتعددة التخصصات  
قسم الهندسة الميكانيكية  
الموجه : محمد تازي  
الطالب المهندس : بن موشيش عبد المؤمن حكيم

العنوان : دراسة ديناميكية لهيكل شاحنة K120

الغرض : يهدف عملنا هذا إلى دراسة ديناميكية لهيكل المركبة من العتبات. وقد أعدنا برنامجا معلو ماتيا للعناصر المحدودة الذي يسمح بحساب الترددات الذاتية والأشعة الذاتية المرافقة للهيكل. وحددنا بذلك، الترددات الذاتية لهيكل شاحنة K120 الموضوع من طرف الشركة الوطنية للسيارات الصناعات، وكذلك ترددات هذا الأخير وهو محمل

Sujet : ETUDE DYNAMIQUE DU CHASSIS DE CAMION K120

Resumé : L'objet de notre travail consiste en l'étude dynamique des structures composées d'éléments poutres. On a développé un logiciel d'éléments finis permettant le calcul de fréquences propres et vecteurs propres de telles structures. On a déterminé ainsi les fréquences propres et les vecteurs propres du chassis du camion K120 à vide et chargé modélisé par éléments finis

Subject : DYNAMIC STUDY OF THE FRAME OF THE VEHICLE K120

Abstract : The goal of our work consists on the dynamics study of structures composed of beam éléments. We have développé a finite élément program witch permits the computation of naturel fréquences and mode shapes of such structures. Then, we have détermined the naturel fréquences and shapes of frame of the véhicule K120 loaded and unloaded. modeled by finite éléments.

# DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

-Mes parents qui ont beaucoup consenti pour moi.

-Mes frères

-Mes soeurs.

-Toute ma grande famille.

-Tous mes amis

-Tous ceux qui témoignent qu'il n'y a de dieu qu'ALLAH  
et que Mohammed est son envoyé et son prophète.

B. Abdelhakim

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon promoteur Monsieur Mohammed Tozi pour son aide et son suivi durant cette étude ainsi qu'à Monsieur S. Rechak, professeur au département de Génie mécanique, pour ces précieuses aides.

Que tous qui ont contribué à ma formation trouvent ici l'expression de mes remerciements.

A. Benmachiche

# TABLE DE MATIERES

1 - INTRODUCTION .....	1
CH1 GENERALITE .....	2
1.1) Intéret de l'étude dynamique du chassis .....	2
1.2 - Métho de calcul utilisée .....	4
1.2.1 - Historique .....	5
1.3 - Description du véhicule .....	6
1.3.1 - Analyse du chassis .....	9
CH2 DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS .....	11
2.1 - Principe .....	11
2.2 - Discrétisation .....	12
2.3 - Etablissement des différents termes du problème dynamique .....	13
2.4 - Détermination de la matrice de rigidité élémentaire .....	13
2.4.1 - Hypothèses et procédure de calcul .....	14
2.4.2 - Matrice de rigidité élémentaire en traction - compression .....	16
2.4.3 - Matrice de rigidité en flexion autour de Oz .....	18
2.4.4 - Matrice de rigidité en flexion autour de Oy .....	21
2.4.5 - Matrice de rigidité élémentaire en torsion .....	22

2.4.6 - Matrice de rigidité élémentaire générale ..... 24

2.5. Matrice masse élémentaire ..... 26

2.5.1 - Matrice masse élémentaire en traction-compression... 27

2.5.2 - Matrice masse en torsion ..... 27

2.5.3 - Matrice masse en flexion autour de OZ ..... 28

2.5.4 - Matrice masse élémentaire en flexion autour de OY... 29

2.6. Matrice de passage ..... 31

2.6.1 - Formulation ..... 31

2.6.2 - Calculs des cosinus directeurs en fonction des coordonnées des noeuds ..... 34

2.6.3 - Matrice de rigidité et masse dans le repère global... 35

2.7 - Assemblage des matrices ..... 37

2.7.1 - Expansion des matrices élémentaires ..... 37

2.7.2 - Principe d'assemblage ..... 37

2.7.3 - Conditions des déplacements aux noeuds ..... 39

CH 3 MODELISATION DU CHASSIS ..... 40

3.1 - Introduction ..... 40

3.2 - Discrétisation ..... 41

3.2.1 - Choix des noeuds ..... 41

3.2.2 - Numérotation ..... 41

3.3 - Masses concentrées ..... 42

3.4 - Caractéristiques mécaniques et géométriques du châssis modèle ..... 44



3.4.1.	Construction du chassis .....	44
3.4.2.	Moments d'inerties et sections .....	44
CH4	CALCULS ET RESULTATS .....	50
4.1.	Méthode de Jacobi .....	50
4.2.	Programmation .....	52
4.3.	Résultats .....	53
4.3.1.	Chassis non chargé .....	53
4.3.2.	Chassis chargé .....	54
	CONCLUSION .....	56
	ANNEXE .....	57
	- Organigramme .....	57
	- Programme .....	58

# INTRODUCTION

L'application des forces variables dans le temps sur une structure provoque des vibrations de celle-ci. Ces vibrations sont en générale nuisibles au bon fonctionnement des machines et à la résistance des différents organes mécaniques.

Les engins roulant sont ainsi soumis au différentes sources d'excitations tel que le moteur, l'état de chaussée, etc.... Le châssis de camion qui supporte les différents organes mécaniques (moteur, boîte à vitesses, cabine, réservoirs, etc....) est la structure principale qui doit être construite de façon fiable.

Pour cela le calcul des vibrations mécaniques est essentiel pour vérifier la résistance du châssis et prévoir l'influence sur les différents organes et le confort du conducteur.

Notre projet consiste en l'étude dynamique du châssis de camion K120 fabriqué par la SNVI de Rouiba. Cette étude a pour objet la détermination des fréquences propres et des vecteurs propres du châssis.

La méthode utilisée est une méthode moderne à large champs d'application qui permet d'effectuer le calcul des structures très complexes formées d'un grand nombre de degré de liberté et donne des résultats très concluants. La méthode concerné est la méthode des élément finis

# CH 1 GENERALITE

## 1.1) Intéret de l'étude dynamique du chassis

Il existe de nombreux problèmes d'analyse des structures où l'on ne peut négliger les forces d'inertie et d'amortissement résultants de la variation des forces appliquées. Ces structures nécessitent des études dynamiques.

La perturbation de l'état d'équilibre des structures donne naissance à un mouvement oscillatoire appelé vibrations. Ainsi les structures comprenant des masses liées par des éléments de différentes rigidités sont soumises aux vibrations sous l'action des sollicitations dynamiques. Celles-ci provoquent parfois l'apparition du phénomène de résonance lorsqu'il y a égalité d'une fréquence propre du système avec la fréquence d'excitation.

Pour le cas du chassis de camion R120, dont les forces excitatrices sont à titre d'exemple, le mouvement ascendant-déscendant des roues dans les chaussées déformées, les vibrations transmises par le moteur et les chocs, l'étude dynamique a pour but de déterminer les fréquences propres, la connaissance de ces valeurs nous permet de nous éloigner des fréquences d'excitations du système, ce qui explique l'intéret de l'étude dynamique du chassis.

Le problème se ramène à la résolution du système différentiel du second ordre des équations de mouvement, soit :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = F(t)$$

où :  $[M]$  matrice masse

$[C]$  matrice d'amortissement interne

$[K]$  matrice de rigidité

$\{\ddot{q}\}$  vecteur accélération du système

$\{q\}$  vecteur déplacement du système

Les solutions du système homogène ci-dessus s'obtiennent à partir de l'étude des vibrations libres, c'est à dire par la superposition des solutions du système sans second membre. Et comme l'amortissement interne du châssis est faible, alors on cherche les solutions du système

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \dots\dots\dots (1.1)$$

donc on se ramène à la résolution du problème aux valeurs propres.

Les systèmes des équations différentielles (1.1) admet des solutions ayant la forme matricielle suivante.

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{x\} e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \{\ddot{q}\} &= -\omega^2 \{x\} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Les solutions remplacés dans le système (1.1) conduisent à :

$$[K] - \omega^2 [M] \{x\} = 0 \dots\dots\dots (1.2)$$

Les inconnues du système ci-dessus sont les amplitudes représentées par le vecteur  $\{x\}$

Comme la solution  $\{x\} = \{0\}$  représente l'état d'équilibre statique, on s'intéresse à la solution où les amplitudes sont différentes de zéro  $\{x\} \neq 0$ , c'est la solution où le système peut exécuter des vibrations.

La condition nécessaire et suffisante est donc:

$$\det[K - \lambda M] = 0 \dots\dots\dots (1.3)$$

$\lambda$  la valeur propre définie telle que:

$$\lambda = \omega^2$$

En résolvant l'équation (1.3), les racines réelles positives

$$\lambda_1 = \omega_1^2 ; \lambda_2 = \omega_2^2 ; \dots\dots\dots ; \lambda_n = \omega_n^2$$

représentent les valeurs propres du système. A l'aide des pulsations  $\omega_i$  on détermine les fréquences  $f_i = \omega_i / 2\pi$

A chaque valeur propre  $\lambda_i$  correspond une solution propre  $\{x_i\}$  qui est le mode propre de vibration du système.

Les vecteurs propres  $\{x_i\}$  s'obtiennent, en remplaçant les différentes valeurs de  $\lambda_i$  dans l'équation (1.2).

On appelle matrice modale  $[\phi]$ , la matrice  $(n \times n)$  dont les colonnes sont constituées par les  $n$  vecteurs propres

$$\phi = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots\dots\dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots\dots\dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots\dots\dots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots\dots\dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

### 1.2) Méthode de calcul utilisée

L'apparition des ordinateurs et les besoins des industries ont provoqué un développement rapide de la mécanique des structures.

Ainsi la méthode des éléments finis est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie, cette méthode repose d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation qui permettent la discrétisation d'un milieu continu. C'est cette discrétisation qui fait l'utilité et l'intérêt de la méthode.

## 1.2.1) Historique

Au début du 19<sup>ème</sup> siècle, Navier définit une méthode d'étude des systèmes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et la compatibilité. Viennent ensuite les travaux de Maxwell et Castigliano qui établissent de façon complète les théorèmes de l'énergie. Mais l'indisponibilité des moyens de calculs bloque les applications de cette formulation, puis Cross établit avec les moyens de l'époque l'analyse des structures en poutres. Cependant, ces techniques ne résolvaient pas jusqu' alors des problèmes de milieu continu rendues possibles uniquement par la discrétisation du problème continu à l'aide de méthodes d'approximation adéquates.

C'est en 1943, que Courant établit les bases de la méthode des éléments finis. Il réalisa une discrétisation spatiale du milieu en utilisant les méthodes d'approximation variationnelles.

En 1956, Argyris introduit le concept d'élément fini et présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces.

Les applications de la méthode des éléments finis s'étendent progressivement à la dynamique linéaire sous l'impulsion notamment de Archer.

Dès 1960 le développement de la méthode des éléments finis est suivi par le développement des programmes généraux de calcul, parmi les programmes actuels, citons : Nastran, Aka, Sop, Marc, Ansys, Samcef, Titus, Adina, Stordyne, Sesam, Asas.

Dans le cadre de notre étude, le développement de la méthode et l'écriture des différentes relations utilisées seront établis dans le chapitre suivant. Ces calculs seront établis pour le cas de l'élément poutre qui servira à modéliser le châssis.

Pour les besoins du calcul, un programme d'élément fini sera établi pour mettre en œuvre la méthode et obtenir des résultats numériques ; ce qui sera donné en chapitre IV.

### 13) Description du véhicule

C'est un camion fig (I.1) destiné au transport de matières "en sac" pour les moyens trajets ayant les spécifications suivantes.

- Poids du chassis et cabine en ordre de marche 4000 [kg]
- Charge totale : charge utile + (carrosserie, conducteur, roue de secours) est 8000 [kg]

- Poids totale autorisé en charge du véhicule isolé:

$$12000 \text{ [kg]} \left\{ \begin{array}{l} \text{maximum sur avant } 4200 \text{ [kg]} \\ \text{maximum sur arrière } 8400 \text{ [kg]} \end{array} \right.$$

Les organes du camion qui influent sur le chassis du point de vue charges sont :

- Le moteur du type F6L912 dont les caractéristiques sont : puissance = 110 [ch. d'ignis] ; vitesse = 2800 [tr/mn] et couple = 33 [m. daa]

- La boîte à vitesse est du type BXSL, le poids de la boîte à vitesses et le moteur assemblé avec les huiles est 640 [kg].

- La cabine est fixé sur le chassis avec 4 supports, son poids est 480 [kg].

- Le poids de la roue de secours est 120 [kg]

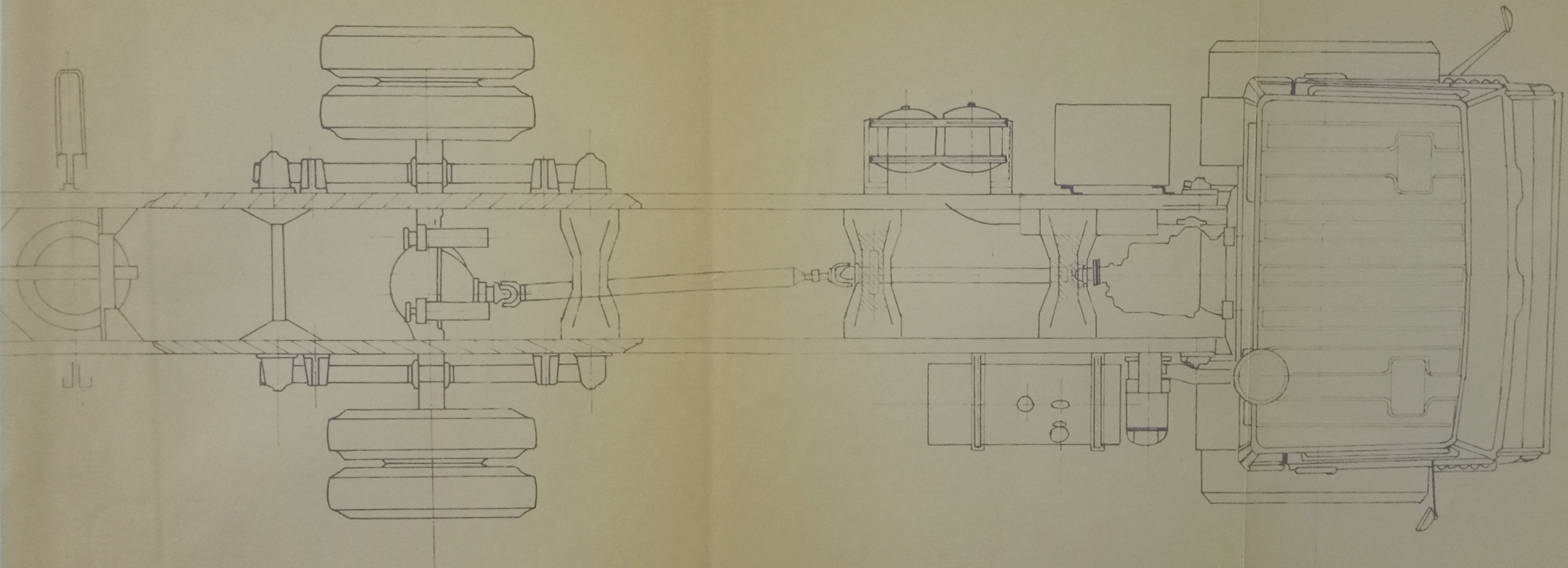
- Le plateau est fixé sur les 2 longerons du chassis, dont sa charge qui est repartié sur les longerons est 558 [kg]

- Le poids du réservoir à combustible avec le combustible est 165 [kg].

- Le poids du coffre à batterie et le réservoir à air est 90 [kg]

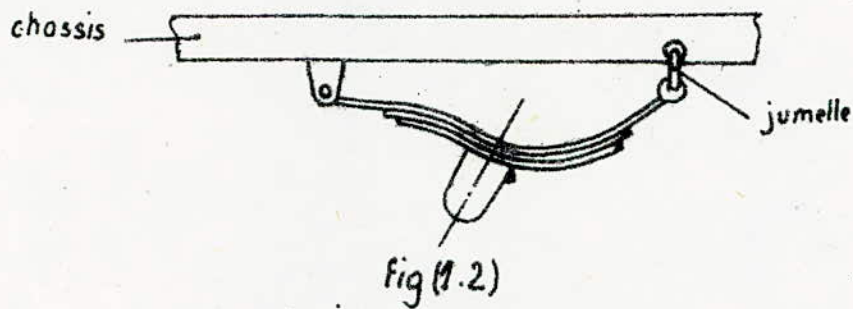
- Le poids du conducteur et passagers est estimé à 300 [kg].





P1104487  
Avant p. 9

La suspension du camion est fait avec des ressorts à lames fig(1.2) disposés longitudinalement, assemblés rigidement à l'essieu, et articulés au chassis à chaque extrémité, ou une des articulation est à jumelle et permet leur libre déformation, les lames travail lent à la flexion et au flambage dans leurs parties avant, tandis qu'à l'arrière, elles ont une tendance au baillement.



### 1.3.1) Analyse du chassis

Le chassis à étudier est de conception structurale [fig(1.3)].

Il est constitué par deux longerons en tôle d'acier doux laminé à chaud emboutis en formes de U.

Les deux longerons sont reliés par huit traverses en tôle d'acier doux, laminé à chaud, la liaison entre les longerons et les traverses est rigide indémontable, assurée par rivetage.

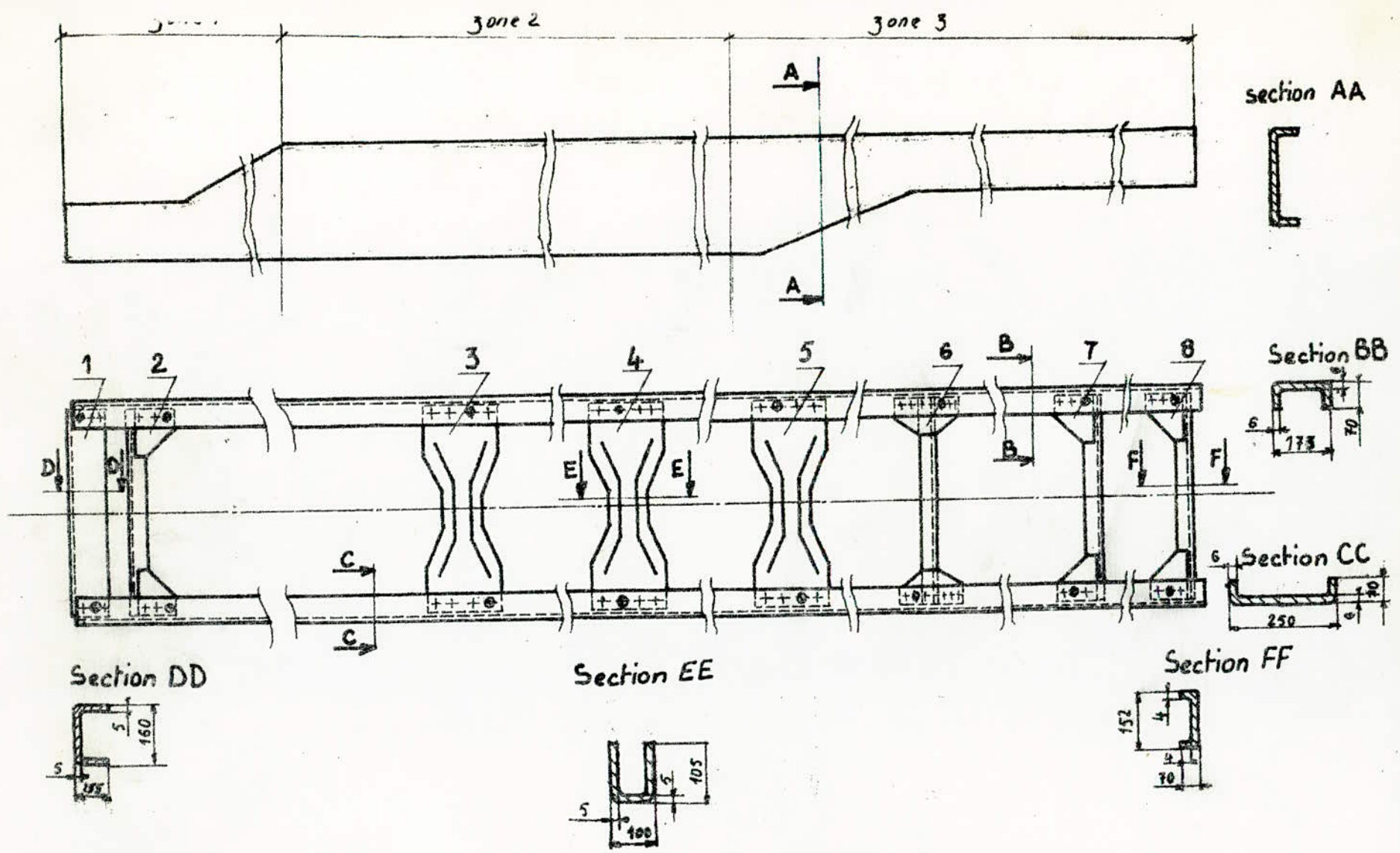


Fig (1-3)

# CH2 DEVELOPPEMENT DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

## 2.1) Principe

La méthode des éléments finis permet de résoudre des problèmes de mécanique des milieux continus, son principe de base est de discrétiser le milieu à étudier en petites parties simples appelées éléments finis, possédant chacune ses propres fonctions pour décrire les contraintes et déformations, dont l'assemblage représente au mieux la structure.

Le choix des fonctions se fait de façon qu'elles assurent la continuité des comportements dans l'ensemble du milieu.

Il existe deux formulations en méthode des éléments finis :

- La méthode des déplacements.
- La méthode des forces.

Le choix de chacune de ces méthodes est en fonction de l'inconnue recherchée, la méthode des déplacements est la plus utilisée, car elle présente certains avantages par rapport à la méthode des forces.

Dans la méthode des déplacements, après décomposition de notre structure en un certain nombre d'éléments, suivant un maillage adéquat, nous formulons le problème en fonction des déplacements aux nœuds

12

de ce maillage. On approche au sein de chaque élément. le champ des déplacements par des fonctions d'interpolations aussi simples que possible, assurant la continuité des déplacements généralisés, qui permettent d'effectuer l'étape d'assemblage et de résoudre le problème. Cette étape occupe généralement le plus de temps et de calcul, ce qui explique l'appel de la méthode des éléments finis à des méthodes numériques pour la résolution.

La méthode des force dans laquelle les paramètres inconnus sont les forces

## 2.2) Discrétisation

Suivant la géométrie de la structure à étudier, celle-ci est discrétisée en éléments finis de type le plus appropriés.

Dans le cas de structures complexes, différents types d'éléments peuvent être utilisés en même temps. Les éléments les plus courants sont les suivants:

- **Éléments unidimensionnels**: Tels que les poutres et les barres qui permettent de modéliser les éléments linéaires soumis à la flexion ou à des contraintes axiales.

- **Éléments tridimensionnels**: pour modéliser des volumes.

Dans le cas du châssis, comme il est précisé en chapitre 3, on a adopté l'élément poutre qui permet de prendre en compte toutes les sollicitations auxquelles est soumis le châssis.

## 2.3) Etablissement des différents termes du problèmes dynamique

La relation (1.3) nous donne l'équation aux valeurs propres à savoir:

$$[K] - \omega^2 [M] \{x\} = 0$$

où  $[K]$  : matrice de rigidité de l'ensemble de la structure .

$[M]$  : matrice masse de l'ensemble de la structure

$\omega^2$  : carré de la pulsation

$\{x\}$  : vecteur déplacement cherché.

Pour l'établissement des différents termes matriciels, la méthode procède à la formation des matrices rigidité et masse pour chaque élément à part, ensuite ces matrices élémentaires sont assemblées pour donner les matrices globales.

## 2.4) Détermination de la matrice de rigidité élémentaire

On appelle la matrice de rigidité d'une structure, la matrice  $[K]$  permettant d'exprimer l'énergie de déformation sous une forme quadratique des déplacements nodaux.

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\}$$

où  $\{q\}$  : vecteur déplacement nodal

$\{q\}^t$  : vecteur transposé de  $\{q\}$

Comme l'application du théorème de Castigliano permet de donner la relation entre les forces appliquées aux noeuds de l'élément et ces déplacements tel que

$$\nabla_q U = [K] \{q\} = \{Q\}$$

où  $\nabla_q = \frac{\partial}{\partial q}$

$\{Q\}$ : vecteur charges appliquées aux noeuds.

La matrice  $[K]$  est de dimension  $(n \times n)$ , tel que:

$n$ : nombre de degrés de liberté de l'élément.

Pour une étude complète et générale, on considère 12 degrés de liberté pour chaque élément poutre fig(2.1)

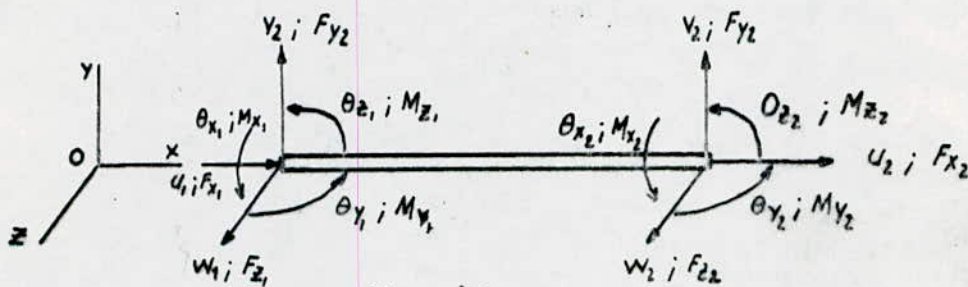


Fig (2.1)

On a : - vecteur déplacement aux noeuds:

$$\{q\}^t = \{u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}\}$$

$$\{Q\}^t = \{F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}\}$$

### 2.4.1) Hypothèses et procédure de calcul

Pour calculer la matrice de rigidité de cet élément on suppose que:

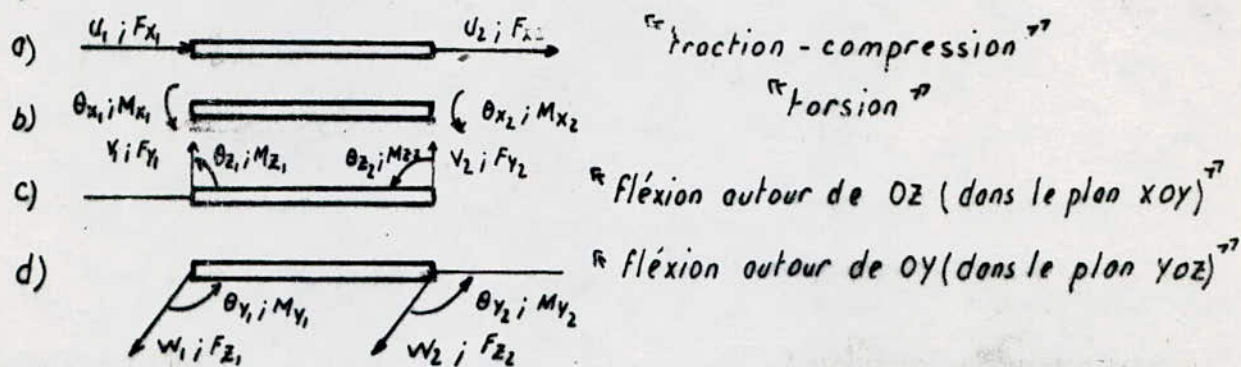
- La section droite est identique le long de  $Ox$

-  $Oy, Oz$  sont les axes principaux de la section transversale de la poutre.

-  $O$  centre d'inertie

- Comme la flèche due à l'effet de l'effort tranchant est faible par rapport au moment fléchissant, les effets d'effort tranchant ne seront pas pris en compte dans l'étude.

Avec ces hypothèses, le calcul de la matrice de rigidité de l'élément poutre dans le cas générale peut se faire, on superpose les quatre cas suivants :



Pour choqu'un de ces cas, on suit les étapes suivantes:

1) Choix de la fonction de déplacement:

Après la détermination du vecteur déplacement nodal  $\{q\}$  et le vecteur charge nodale  $\{F_e\}$ , et connaissant le nombre de degrés de liberté correspondants à chaque cas, on peut représenter la fonction de déplacement de tous les points de l'élément par une expression polynomiale qui donne le déplacement  $q(x)$  de n'importe quel point. Elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de



liberté de l'élément.

$$q(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$$

où,  $n^{\text{e}}$  degré de liberté correspond à un des cas

2) Condition aux limites :

En appliquant les conditions aux limites, on peut déterminer les coefficients inconnus de la fonction de déplacement.

3) Détermination de l'énergie de déformation :

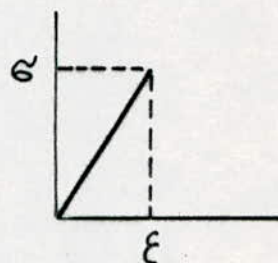
On reste toujours dans le domaine élastique du matériau (cas des petits déplacements). on a alors

$$\sigma = E \varepsilon \quad (\text{loi de Hooke})$$

où  $\sigma$  : la contrainte en un point de la poutre.

$\varepsilon$  : la déformation au même point.

$E$  : module d'Young



le potentiel de déformation est défini par.

$$W = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

or l'énergie de déformation est donné par

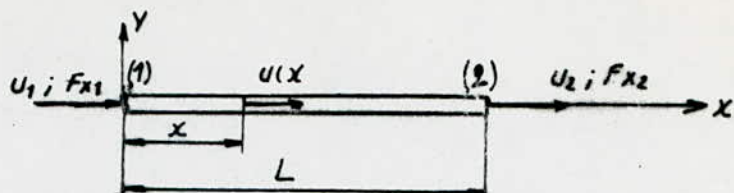
$$U = \frac{1}{2} \int_V w \, dV = \int_V \sigma \cdot \varepsilon \cdot dV$$

où,  $V$  : est le volume de la poutre.

Appliquant le théorème de Castigliano pour déterminer le vecteur charges nodales en fonction du déplacement nodales.

$$\nabla_q U = Q = [K] \{q\}$$

2.4.2) Matrice de rigidité élémentaire en traction-compression.



Nous avons deux degrés de liberté par élément, donc la fonction de déplacement peut s'écrire sous la forme :

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

Appliquons les conditions aux limites

$$x=0 \Rightarrow u(x) = u_1 \Rightarrow a_1 = u_1$$

$$x=L \Rightarrow u(x) = u_2 \Rightarrow a_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

En remplaçant les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  dans la fonction de déplacement on trouve

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L} x \Rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

Elle est sous la forme

$$u(x) = f_1(x) u_1 + f_2(x) u_2$$

Or l'énergie de déformation est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma \epsilon \, dV \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

D'après la loi de Hooke

$$\sigma = E \epsilon \Rightarrow U = \int_0^L \frac{ES}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1'(x) u_1 + f_2'(x) u_2 = -\frac{1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2$$

$$\Rightarrow U = \frac{ES}{2} \int_0^L \left(-\frac{1}{L} u_1 + \frac{1}{L} u_2\right)^2 dx = \frac{ES}{2} [-u_1 + u_2]^2$$

Appliquons le théorème de Castigliano :

La charge appliquée au noeud (1) est :

$$F_{x1} = \frac{\partial U}{\partial u_1} = ES \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

$$\text{Or, } \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right) = f_1'(x)$$

$$\Rightarrow F_{x_1} = ES \int_0^L \{ [f_1'(x)] u_1 + [f_1'(x) \cdot f_2'(x)] u_2 \} dx \dots\dots\dots (2.1)$$

De même pour la charge appliquée au nœud (2)

$$F_{x_2} = \frac{\partial U}{\partial u_2} = ES \int_0^L \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) dx$$

$$\text{où, } \frac{\partial}{\partial u_2} \left[ \frac{\partial U}{\partial x} \right] = f_2'(x)$$

$$\Rightarrow F_{x_2} = ES \int_0^L \{ [f_1'(x) \cdot f_2'(x)] u_1 + [f_2'(x)] u_2 \} dx$$

$$\Rightarrow F_{x_2} = ES \left( -\frac{u_1}{L} + \frac{u_2}{L} \right) \dots\dots\dots (2.2)$$

On écrit les résultats (2.1) et (2.2) sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.0)$$

que représente  $[F_e] = [K_e] \{q_e\}$

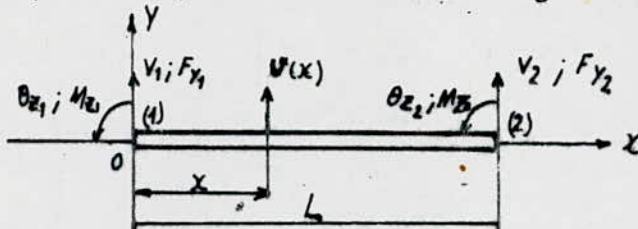
où  $[F_e] = \begin{bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{bmatrix}$  et  $[q_e] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

donc la matrice de rigidité en extension-compression est

$$[K_e] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.4.3) Matrice de rigidité en flexion autour de Oz

Soit l'élément représenté dans la figure ci-dessous.



L'élément possède quatre degrés de liberté, donc on peut écrire la fonction de déplacement sous la forme.

$$U(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

$$\text{Or, } \theta_z(x) = \frac{dU}{dx}$$

$$\Rightarrow \theta_z(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

appliquons les conditions aux limites.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} U(x) = U_1 = a_1 \\ \theta_z(x) = \theta_{z1} = a_2 \end{cases}$$

$$x=L \Rightarrow \begin{cases} U(x) = U_2 \\ \theta_z(x) = \theta_{z2} = a_2 \end{cases}$$

donc on a :

$$\begin{cases} v_1 = a_1 \\ \theta_{z1} = a_2 \\ v_2 = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 \\ \theta_{z2} = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 \end{cases}$$

On écrit ces résultats sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Après le calcul de la matrice inverse on trouve

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & -L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

En remplaçant les coefficients  $a_1$ ;  $a_2$ ;  $a_3$ ;  $a_4$  dans la fonction

de déplacement on trouve.

$$v(x) = v_1 + x \theta_{z_1} - \frac{3x^2}{L^2} v_1 - \frac{2x^2}{L} \theta_{z_1} + \frac{3x^2}{L^2} v_2 - \frac{x^2}{L} \theta_{z_2} + \frac{2x^3}{L} v_1 + \frac{x^3}{L^2} \theta_{z_1} - \frac{2x^3}{L^3} v_2 + \frac{x^3}{L^2} \theta_{z_2}$$

La fonction  $v(x)$  est sous la forme.

$$v(x) = f_1(x)v_1 + f_2(x)\theta_{z_1} + f_3(x)v_2 + f_4(x)\theta_{z_2}$$

L'énergie de déformation est donnée par.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \epsilon \, dV$$

On néglige l'effet de l'effort tranchant dans l'énergie de déformation est :

$$U = \frac{EJ_z}{2} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx$$

Appliquons le théorème de Castiglione pour trouver la charge  $Q_i$  correspond au déplacement  $q_i$  du noeud (i).

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{EJ_z}{2} \int_0^L \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right] dx \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\text{Or, } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(-\frac{6}{L^2} + 12x\right) v_1 + \left(-\frac{4}{L} + \frac{6}{L^2}x\right) \theta_{z_1} + \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x\right) v_2 + \left(-\frac{2}{L} + \frac{6}{L^2}x\right) \theta_{z_2}$$

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  est sous la forme :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = h_1(x) \cdot v_1 + h_2(x) \theta_{z_1} + h_3(x) v_2 + h_4(x) \theta_{z_2}$$

on a encore.

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right] = h_i(x)$$

En remplaçant dans (2.3) on aura:

$$F_y = EJ_z \int_0^L \{ [h_1(x)]^2 v_1 + h_1 h_2 \theta_{z_1} + h_1 h_3 v_2 + h_1 h_4 \theta_{z_2} \} dx$$

$$M_{z_1} = EJ_z \int_0^L (h_1 h_2 v_1 + h_2 h_2 \theta_{z_1} + h_2 h_3 v_2 + h_2 h_4 \theta_{z_2}) dx$$

$$F_y = EJ_z \int_0^L (h_1 h_3 v_1 + h_3 h_2 \theta_{z_1} + h_3^2 v_2 + h_3 h_4 \theta_{z_2}) dx$$

$$M_{z_2} = EJ_z \int_0^L (h_1 \cdot h_4 v_1 + h_4 h_2 \theta_{z_1} + h_3 h_4 v_2 + h_4^2 \theta_{z_2}) dx$$

On écrit ces résultats sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} F_{y_1} \\ M_{z_1} \\ F_{y_2} \\ M_{z_2} \end{bmatrix} = \frac{EJ_z}{L} \int_0^L h_i h_j dx \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix}$$

Après le calcul des intégrales on trouve.

$$\begin{bmatrix} F_{y_1} \\ M_{z_1} \\ F_{y_2} \\ M_{z_2} \end{bmatrix} = \frac{EJ_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix}$$

Elle est de la forme  $[F_e] = [K_e][q_e]$

où,  $[K_e]$  est la matrice de rigidité élémentaire en flexion

2.4.4) La matrice de rigidité élémentaire en flexion autour de Oy

La flexion autour de Oy est identique à la flexion autour de Oz, En faisant la correspondance suivante pour trouver la matrice de rigidité élémentaire autour de Oy.

	fléxion autour de Oz	fléxion autour de Oy
fonction de déplacement	$\vartheta(x)$	$w(x)$
Moment d'inertie autour de l'axe principale	$J_z$	$J_y$
La rotation	$\theta_z$	$\theta_y$
Vecteur charges appliquées aux noeuds (1 et 2)	$[F_{y_1}; M_{z_1}; F_{y_2}; M_{z_2}]$	$[F_{z_1}; M_{y_1}; F_{z_2}; M_{y_2}]$
Vecteur déplacement des noeuds (1 et 2)	$[v_1; \theta_{z_1}; v_2; \theta_{z_2}]$	$[w_1; \theta_{y_1}; w_2; \theta_{y_2}]$

- Tableau (2.1) -

Apartir de cette correspondance on a :

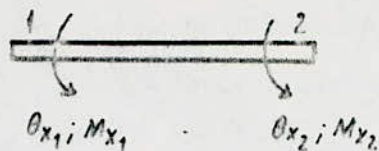
$$\begin{bmatrix} F_{z_1} \\ M_{y_1} \\ F_{z_2} \\ M_{y_2} \end{bmatrix} = \frac{EJ_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{y_2} \end{bmatrix}$$

don

$$\Rightarrow K_e = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

2.4.5) Matrice de rigidité élémentaire en torsion.

Chaque élément possède deux degré de liberté.



L'énergie de déformation en torsion s'exprime sous la forme suivante

$$U_T = \frac{GJ}{2} \int_0^L \left[ \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \right] dx$$

où,  $J$ : moment d'inertie polaire

$G$ : module de cisaillement transversal.

On remarque que l'énergie de déformation en torsion est analogue à l'énergie de déformation en extension si on établit la correspondance suivante.

	Extension	Torsion
Fonction de déplacement	$u(x)$	$\theta(x)$
Modules d'élasticités	$E$	transversal " $G$ "
Caractéristique géométrique	section " $S$ "	Moment d'inertie polaire " $J$ "
Vecteur charges appliquées aux nœuds (1 et 2)	$[F_{x1} ; F_{x2}]$	$[M_{x1} ; M_{x2}]$
Vecteur déplacements des nœuds (1 et 2)	$[u_1 ; u_2]$	$[\theta_{x1} ; \theta_{x2}]$

- Tableau (2.2) -

Donc on peut facilement trouver la matrice de rigidité élémentaire en torsion, qui est identique à la matrice de rigidité en extension.



$$K_e = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.4.6) Matrice de rigidité élémentaire générale.

Des matrices de rigidité élémentaires des différents cas, on peut déterminer la matrice de rigidité élémentaire dans le cas général de façon que le vecteur charges, et le vecteur déplacement soient liés par:

$$[Q] = [K][q]$$

$$\text{où ; } \{Q\}^t = [F_{x_1} ; F_{y_1} ; F_{z_1} ; M_{x_1} ; M_{y_1} ; M_{z_1} ; F_{x_2} ; F_{y_2} ; F_{z_2} ; M_{x_2} ; M_{y_2} ; M_{z_2}]$$

$$\{q\}^t = [u_1 ; v_1 ; w_1 ; \theta_{x_1} ; \theta_{y_1} ; \theta_{z_1} ; u_2 ; v_2 ; w_2 ; \theta_{x_2} ; \theta_{y_2} ; \theta_{z_2}]$$

Ce qui nous donne:

$K_e =$

$\frac{ES}{L}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{ES}{L}$	0	0	0	0	0	0
	$\frac{12EJ_z}{L^3}$	0	0	0	0	$\frac{6EJ_z}{L^2}$	0	$-\frac{12EJ_z}{L^3}$	0	0	0	0	$\frac{6EJ_z}{L^2}$
		$\frac{12EJ_y}{L^3}$	0	0	$\frac{6EJ_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EJ_y}{L^3}$	0	$\frac{6EJ_y}{L^2}$	0	0
			$\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	0	0	0	$-\frac{GJ}{L}$	0	0
				$\frac{4EJ_y}{L}$	0	0	0	0	$-\frac{6EJ_y}{L^2}$	0	$\frac{2EJ_y}{L}$	0	0
					$\frac{4EJ_z}{L}$	0	0	$-\frac{6EJ_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EJ_z}{L}$	0
						$\frac{ES}{L}$	0	0	0	0	0	0	0
							$\frac{12EJ_z}{L^3}$	0	0	0	0	$-\frac{6EJ_z}{L^2}$	0
								$\frac{12EJ_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EJ_y}{L^2}$	0	0	0
									$\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0
										$\frac{4EJ_y}{L}$	0	0	0
											$\frac{4EJ_z}{L}$	0	0

Symétrique

## 2.5) Matrice masse élémentaire

La matrice masse élémentaire, permet d'écrire l'énergie cinétique sous la forme quadratique des vitesses, aux noeuds.

$$E_c = \frac{1}{2} [\dot{q}]^t [M_e] [\dot{q}_e]$$

où,  $\{\dot{q}\}$  : vecteur vitesse des noeuds.

$[M_e]$  : matrice masse élémentaire.

La matrice masse élémentaire peut être obtenue à partir de l'énergie de déformation.

L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V [\dot{u}_e(x)]^t [\dot{u}_e(x)] dV$$

où,  $u(x)$  : fonction de déplacement. Elle s'exprime sous la forme matricielle suivante

$$[u_e(x)] = [A_e] [q_e] \dots \dots \dots (2.4)$$

En remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique

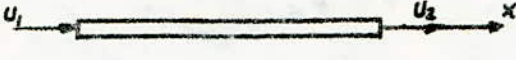
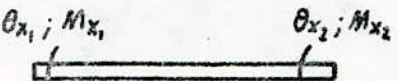
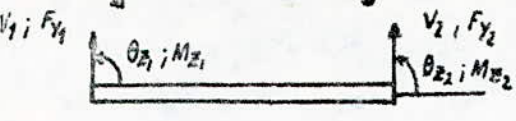
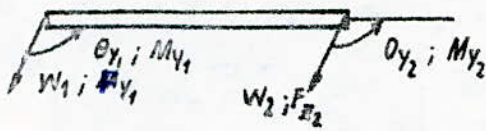
$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int [\dot{q}]^t [A_e] [A_e] [\dot{q}_e] dV = \frac{1}{2} \int_0^L [\dot{q}]^t [A] [A] [\dot{q}_e] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L [\dot{q}_e] [A]^t [A] dx [\dot{q}_e] \end{aligned}$$

$$\text{or, } E_c = \frac{1}{2} [\dot{q}_e]^t [M_e] [\dot{q}_e]$$

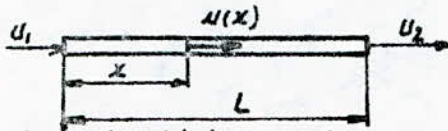
$$\Rightarrow [M_e] = \int_0^L [A]^t [A] dx \dots \dots \dots (2.5)$$

Tout comme la détermination de la matrice de rigidité, on considère les 12 degrés de liberté pour chaque élément de la structure.

Pour cela on fait la superposition des quatre cas suivants.

- a)  "traction - compression"
- b)  "Torsion"
- c)  "flexion autour de OZ"
- d)  "flexion autour de Oy"

### 2.5.1) Matrice masse élémentaire traction - compression.



La fonction de déplacement (2.4) est:

$$u(x) = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [A][q]$$

$$\Rightarrow A = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right]$$

Utilisons la relation (2.1)

$$\Rightarrow Me = \begin{bmatrix} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx & \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{x}{L} dx \\ \int_0^L \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx & \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx \end{bmatrix}$$

Après le calcul des intégrales on aboutit aux résultats suivants.

$$Me = \frac{SSL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

### 2.5.2) Matrice masse en torsion



Les équations des vibrations de torsion des poutres sont identiques aux équations relatives aux vibrations longitudinales si l'on établit la correspondance entre les vibrations de torsion et les vibrations en traction-compression.

Utilisons le tableau de correspondance [Tableau (2.2)], la matrice masse en torsion qui correspond à la matrice masse en compression-traction est.

$$M_e = \frac{SSL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

où,  $J$ : moment d'inertie polaire

### 2.5.3) Matrice masse élémentaire en flexion autour de Oz

La fonction de déplacement  $v(x)$  est donnée au paragraphe (2.4.3)

par: 
$$v_e(x) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{z_1} \\ v_2 \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix}$$

Elle est sous la forme

$$[v_e(x)] = [A_e][q_e]$$

où,  $[A_e] = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)]$

remplaçons  $[A]$  dans l'expression de la matrice masse (2.5)

$$\Rightarrow M_e = SS \begin{bmatrix} \int_0^L f_i f_j dx \dots \end{bmatrix}_i$$

On remarque que les termes de la matrice masse sont calculés à partir des intégrales suivantes

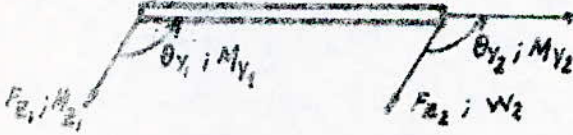
$$m_{ij} = \rho \int_0^L f_i(x) \cdot f_j(x) dx$$

Après le calcul des intégrales on aboutit au résultat suivant

$$M_e = \frac{35L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L \\ \text{Symétrique} & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

#### 2.5.4) Matrice masse élémentaire en flexion autour de Oy.

La flexion autour de Oy est analogue à la flexion autour de Oz. En faisant la correspondance entre les paramètres des deux cas (flexion autour de Oz et flexion autour de Oy) [Tableau (2.1)], on aura la matrice masse pour la flexion autour de Oy suivante



$$M_e = \frac{35L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \text{symétrique} & & 156 & -22L \\ & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

De la même façon que pour la matrice de rigidité élémentaire générale, on établit la matrice masse élémentaire générale suivante.

$u_1$	$v_1$	$w_1$	$\theta_{x_1}$	$\theta_{y_1}$	$\theta_{z_1}$	$u_2$	$v_2$	$w_2$	$\theta_{x_2}$	$\theta_{y_2}$	$\theta_{z_2}$
$\frac{SSL}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{SSL}{6}$	0	0	0	0	0
	$\frac{156 SSL}{420}$	0	0	0	$\frac{22 SSL^2}{420}$	0	$\frac{54 SSL}{420}$	0	0	0	$-\frac{13 SSL^2}{420}$
		$\frac{156 SSL}{420}$	0	0	0	0	0	$\frac{54 SSL}{420}$	0	$-\frac{13 SSL^2}{420}$	0
			$\frac{87L}{3}$	0	0	0	0	0	$\frac{87L}{6}$	0	0
				$\frac{4 SSL^2}{420}$	0	0	0	$\frac{13 SSL^2}{420}$	0	$-\frac{38 SSL^3}{420}$	0
					$\frac{4 SSL^2}{420}$	0	$\frac{13 SSL^2}{420}$	0	0	0	$-\frac{38 SSL^3}{420}$
						$\frac{87L}{3}$	0	0	0	0	0
							$\frac{156 SSL}{420}$	0	0	0	$-\frac{22 SSL^2}{420}$
								$\frac{156 SSL}{420}$	0	$-\frac{22 SSL^2}{420}$	0
									$\frac{87L}{3}$	0	0
										$\frac{4 SSL^2}{420}$	0
											$\frac{4 SSL^2}{420}$

$M_e =$

Symétrique

# 26) Matrice de passage

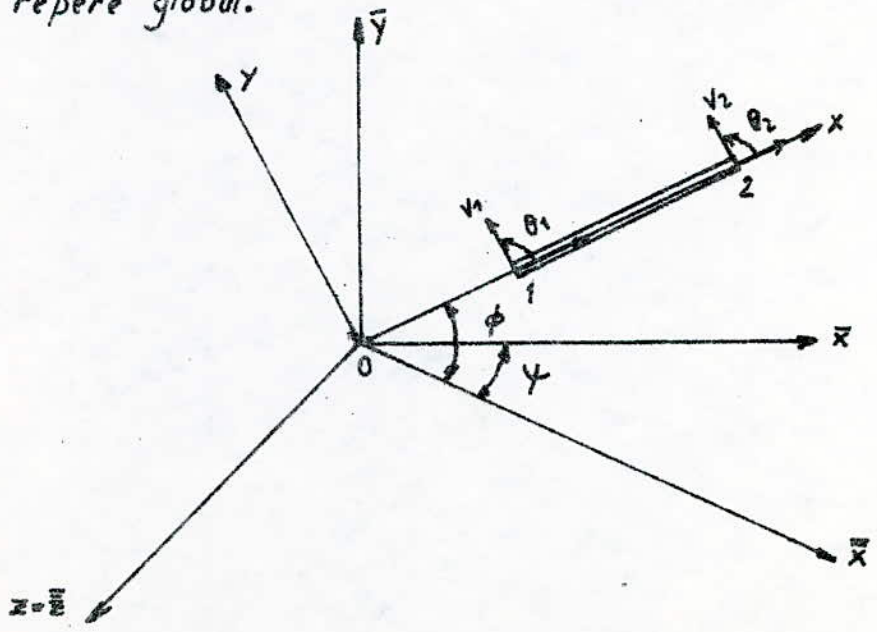
## 2.6.1) Formulation.

En générale les treillis sont habituellement formés par des ensembles de poutres faisant des angles entre eux, c'est le cas du châssis.

Pour déterminer les matrices de rigidité et masse de la structure, il est nécessaire d'écrire celle de chaque élément dans le système globale de coordonnées adopté pour la structure et non celui de cet élément.

Avant de passer aux coordonnées globales on écrit les matrices de rigidité et matrice masses dans le repère local, puis on fait un changement de base.

Pour cela, on fait les projections des charges appliquées aux noeuds dans le repère global.



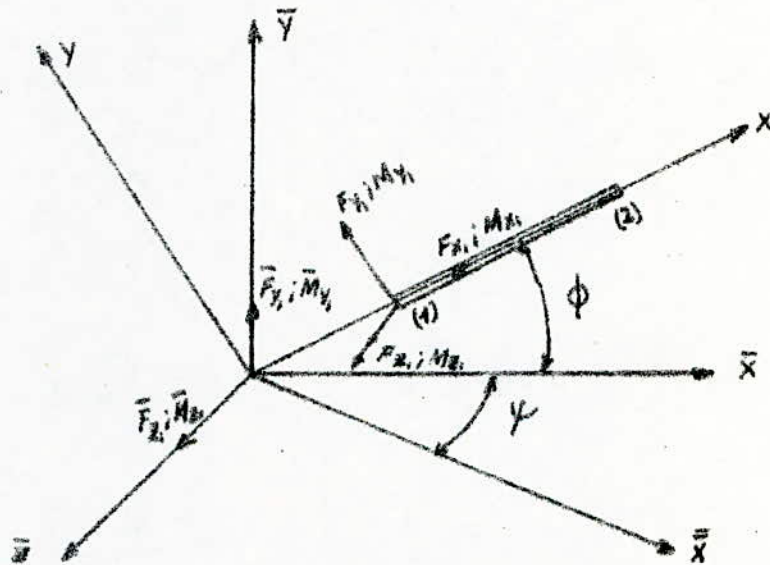


Dans la figure ci dessus : Le repère  $oxyz$  représente le système local de la poutre.

Le repère  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  représente le système global.

Pour faciliter la transformation, on choisit le repère local de telle façon que  $oz$  soit parallèle au plan  $\bar{x}\bar{o}\bar{z}$ .

Les charges agissant au nœud (1) dans le repère local peuvent s'exprimer en fonction des charges agissant à ce nœud dans le repère global, en projetant ces dernières dans le repère local.



On aura les expressions suivantes.

$$F_{x1} = \bar{F}_{x1} \cos \psi \cos \phi + \bar{F}_{z1} \sin \psi \cos \phi + \bar{F}_{y1} \sin \phi$$

$$F_{y1} = -\bar{F}_{x1} \cos \psi \sin \phi - \bar{F}_{z1} \sin \psi \sin \phi + \bar{F}_{y1} \cos \phi$$

$$F_{z1} = -\bar{F}_{x1} \sin \psi + \bar{F}_{z1} \cos \psi$$

$$M_{x1} = \bar{M}_{x1} \cos \psi \cos \phi + \bar{M}_{z1} \sin \psi \sin \phi + \bar{M}_{y1} \cos \phi$$

$$M_{y_1} = -\bar{M}_{x_1} \cos \psi \sin \phi - \bar{M}_{z_1} \sin \psi \sin \phi + \bar{M}_{y_1} \cos \phi$$

$$M_{z_1} = -\bar{M}_{x_1} \sin \psi + \bar{M}_{z_1} \cos \psi$$

de même pour le noeud (2), on trouve:

$$F_{x_2} = \bar{F}_{x_2} \cos \psi \cos \phi + \bar{F}_{z_2} \sin \psi \cos \phi + \bar{F}_{y_2} \sin \phi$$

$$F_{y_2} = -\bar{F}_{y_2} \cos \psi \sin \phi - \bar{F}_{z_2} \sin \psi \sin \phi + F_{y_2} \cos \phi$$

$$M_{x_2} = \bar{M}_{x_2} \cos \psi \cos \phi + \bar{M}_{z_2} \sin \psi \cos \phi + \bar{M}_{y_2} \sin \phi$$

$$F_{z_2} = -\bar{F}_{x_2} \sin \psi + \bar{F}_{z_2} \cos \psi$$

$$M_{z_2} = -\bar{M}_{x_2} \sin \psi + \bar{M}_{z_2} \cos \psi$$

On écrit ces résultats sous forme matricielle

$$\{\Phi\} = [T][\bar{Q}] \dots \dots \dots (2.6)$$

où,  $\{\Phi\}$ : est le vecteur des charges agissant aux noeuds (1) et (2) dans le repère locale

$[\bar{Q}]$ : vecteur des charges agissant aux noeuds (1) et (2) dans le repère global.

Alors, le passage du système local au système global se fait à l'aide de la matrice  $[T]$ .

Considérons la sous matrice suivante.

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \psi \cdot \cos \phi & \sin \phi & \cos \phi \cdot \sin \psi \\ -\sin \phi \cdot \cos \psi & \cos \phi & -\sin \phi \cdot \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

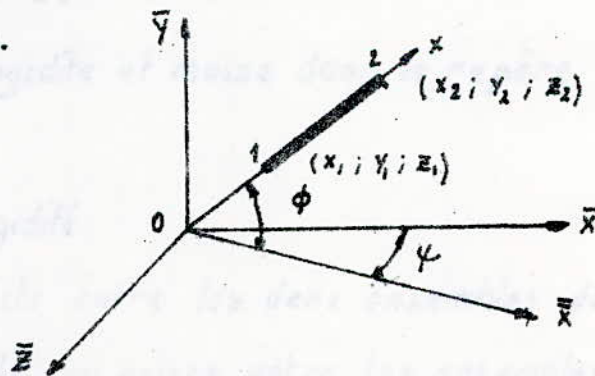
donc, la matrice de passage [T] est:

$$T = \begin{bmatrix} u_1 v_1 w_1 & \theta_{1x} & \theta_{1y} & \theta_{1z} & u_2 v_2 w_2 & \theta_{2x} & \theta_{2y} & \theta_{2z} \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut démontrer facilement que la matrice de passage [T] est orthogonale, c'est à dire:

$$[T][T]^t = [T][T]^{-1} = [I]$$

### 2.6.2) Calculs des cosinus directeurs en fonction des coordonnées des noeuds.



Soit l'élément poutre (1-2), qui fait un angle  $\phi$  avec le plan  $xoz$ , et délimité par les noeuds (1) et (2) qui ont respectivement les coordonnées  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ .

Donc on a :

La longueur de la poutre est :

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\cos \phi = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{L}$$

$$\sin \phi = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

$$\cos \psi = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\sin \psi = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Pour le cas du châssis, il suffit d'annuler l'axe  $Oz$  dans le calcul, c'est à dire

$$z_1 = z_2 = \psi = 0$$

$$\text{d'où : } \cos \psi = 1$$

$$\sin \psi = 0$$

### 2.6.3) Matrice de rigidité et masse dans le repère global.

a) Matrice de rigidité :

La relation qui existe entre les deux ensembles des déplacements est la même que celle qui existe entre les ensembles des forces

$$[q] = [T][\bar{q}]$$

où,  $[q]$  : Le vecteur déplacement dans le repère local de la poutre.

$[\bar{q}]$  : Le vecteur déplacement dans le repère global de la structure.

or, on a :

$$[Q] = [K][q] \quad \text{dans le repère local}$$

$$[\bar{Q}] = [\bar{K}][\bar{q}] \quad \text{dans le repère global.}$$

Remplaçons ces deux équations dans la relation (2.6)

$$\Rightarrow [K][q] = [T][\bar{K}][\bar{q}]$$

En multipliant les deux membres par  $[T]^t$ , et remplaçant  $[q]$  par  $[T][\bar{q}]$

$$\text{On aura } [T]^t [K] [T] [\bar{q}] = [\bar{K}][\bar{q}]$$

$$\text{donc } [\bar{K}] = [T]^t [K] [T]$$

b) matrice masse :

L'énergie cinétique est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} [\dot{q}]^t [M] [\dot{q}]$$

$$= \frac{1}{2} [\dot{q}]^t [\bar{M}] [\dot{\bar{q}}] \dots \dots \dots (2.7)$$

$$\text{or, } [\dot{q}] = [T][\dot{\bar{q}}] \dots \dots \dots (2.8)$$

Remplaçons (2.8) dans l'égalité (2.7) on aura.

$$[\bar{M}] = [T]^t [M] [T]$$

## 2.7) Assemblage des matrices

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire les matrices globales masse et rigidité à partir des matrices masse et rigidité élémentaires écrites dans le repère global.

Comme l'énergie globale de la déformation et l'énergie cinétique de la structure sont les sommes des énergies respectives élémentaires.

Puisque une variable nodale (vitesse ou déplacement apparaît) souvent dans plusieurs vecteurs élémentaires, et comme un nœud peut appartenir à plusieurs éléments, il est donc nécessaire qu'une telle variable nodale soit exprimée dans le même repère pour tous les éléments.

### 2.7.1) Expansion des matrices élémentaires

Les matrices masse  $[M_e]$  et rigidité  $[K_e]$  sont constantes par expansion des matrices respectives  $[m_e]$  et  $[k_e]$  grâce à des insertions de lignes et de colonnes de zéros.

$[k_e]$  et  $[m_e]$  ont pour dimensions le nombre de degré de liberté de l'élément,  $[K_e]$  et  $[M_e]$  ont pour dimensions le nombre de degrés de liberté total de la structure.

### 2.7.2) Principe d'assemblage

Soit  $W_e$  l'énergie de déformation, pour l'élément ayant  $I, J$  les numéros de ses nœuds dans la structure.

$W_e$  s'écrit :

$$W_e = [U_I \quad U_J] \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_I \\ U_J \end{bmatrix}$$

Exprimons l'énergie de déformation élémentaire  $W_e$  dans le vecteur déplacement global.

$$U = [U_1, U_2, \dots, U_I, \dots, U_J, \dots, U_n]$$

$$W_e = [U_1, \dots, U_I, \dots, U_J, \dots, U_n] \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & K_{11} & \dots & K_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & K_{21} & \dots & K_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_I \\ \vdots \\ U_J \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

$\uparrow$  colonne I       $\uparrow$  colonne J

Pour obtenir la matrice de rigidité assemblée globale, on utilise le fait que l'énergie de déformation totale de la structure est la somme des énergies de déformations élémentaires.

$$[W] = \sum W_e$$

On fait de même pour construire la matrice masse globale assemblée, si la structure comporte des charges celles-ci peuvent être réparties aux nœuds en modifiant les termes  $m_i$  en leur rajoutant les valeurs des masses concentrées

Les matrices  $[K]$  et  $[M]$  assemblées sont symétrique, définies et positive

### 2.7.3) Conditions des déplacements aux noeuds.

Les conditions aux limites de la structure (limitation de certains degrés de libertés de noeuds données) permettent de réduire les matrices rigidité et masse en annulant les lignes et les colonnes qui correspondent aux déplacements nuls.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i = 0 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1i} & \dots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{i1} & \dots & M_{ii} & \dots & M_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \dots & M_{ni} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i = 0 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = 0$$

Le système devient, alors.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ i \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n-1} & \dots & K_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{n-1} & \dots & M_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} q_1 \\ \vdots \\ q_i \neq 0 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{array} \right\}$$



# CH3 MODELISATION DU CHASSIS

## 3.1) Introduction

La modélisation consiste à discrétiser une structure continue en éléments simples.

L'approximation par éléments finis présente deux aspects distincts :

- définir analytiquement la géométrie de tous les éléments, ce qui est plus ou moins compliqué selon leur forme.

- Définir ensuite les charges concentrées appliquées aux nœuds.

Pour cela nous choisissons un ensemble de points sur la structure qui servira à définir la géométrie des éléments, ces points sont appelés nœuds géométriques. La structure sera ainsi remplacée par un ensemble d'éléments de formes relativement simples. Chaque élément doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds qui y appartiennent à cet élément.

Le chargement supporté par la structure est simplifié par l'application des charges aux nœuds.

## 3.2) Discrétisation

### 3.2.1) Choix des noeuds

Le choix des noeuds est fait suivant les deux critères suivants:

- Géométrie du châssis: Suivant la disposition des poutres de la structure on choisit les noeuds géométrique aux points de connexion de ces dernières, ensuite comme la section et l'un des paramètres constant caractérisant les matrices de rigidité et masse assemblées, nous serons amenés à choisir d'autres noeuds là où la section varie, mais on tient compte des longueurs des poutres qui définissent l'élément "poutre" en résistance des matériaux.

- Les appuis: Comme les articulations de la suspension arrière se trouvent sur les points de connections des poutres, donc les noeuds correspondant à ces points sont déjà choisis. Les articulations de la suspension de l'avant se trouvent près des noeuds déjà choisis on considère donc que les points d'articulation se trouvent sur les noeuds.

### 3.2.2) Numérotation

Les problèmes de la programmation nous oblige de suivre des numérotations des noeuds bien déterminer fig (3.1), pour avoir des matrices qui ont des bandes diagonales dense et étroite, la numérotation

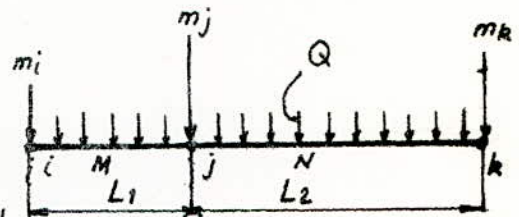
tation doit se faire le long de la longueur de la structure.

### 3.3) Masse concentrée

On distingue deux types de charges qui agissent sur le châssis.

1 - Charges réparties : La charge due au poids du plateau et la matière transporter est présentée par des masses concentrées appliquées au noeuds déjà choisis, chacune de ces masses est calculée de la façon suivante.

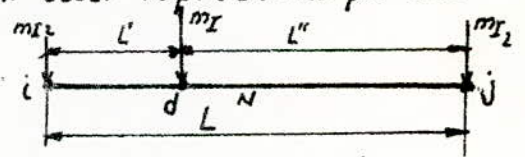
Soit les deux éléments  $M$  et  $N$  délimités respectivement par les deux noeuds  $(i, j)$  et  $(j, k)$  et de longueur  $L_1$  et  $L_2$ . Les éléments sont soumis à une charge constante  $Q$ .



La masse concentrée au noeud  $j$  est donc :

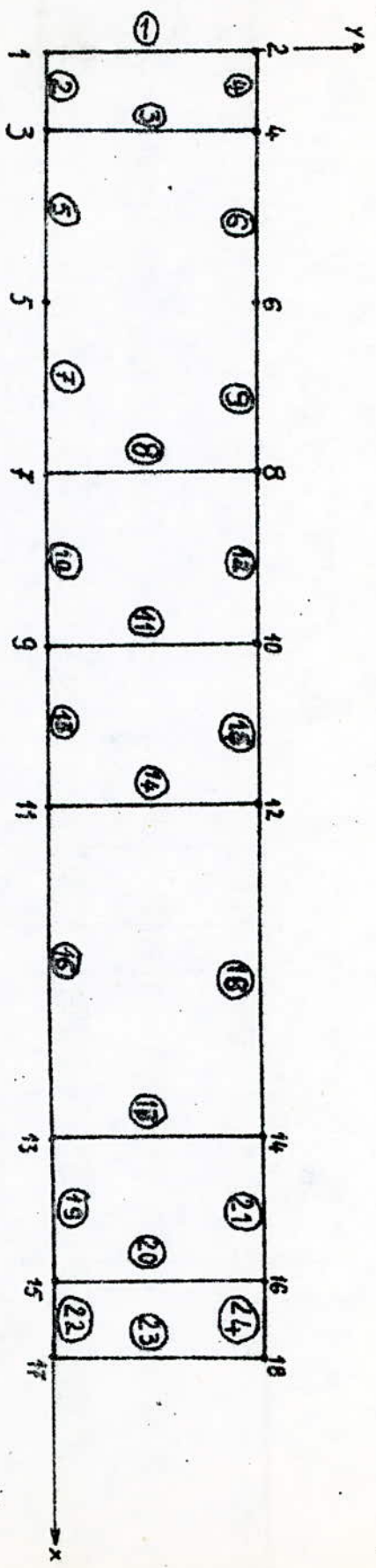
$$m_j = QL_1/2 + QL_2/2$$

2 - Charges concentrées : Les charges concentrées qui sont dues au poids propre des organes du camion sont aussi représentées par des masses concentrées aux noeuds.

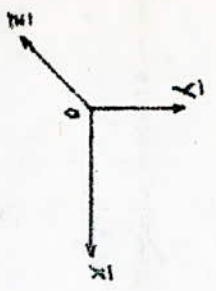


Soit l'élément  $N$  délimité par les noeuds  $i$  et  $j$ , soumis au poids d'un tel organe  $m_I g$ , si on représente ce poids par deux poids  $m_{I1} g$  et  $m_{I2} g$  appliqués respectivement aux noeuds  $i$  et  $j$ .

On a à l'équilibre :



Fig(3.1) : Modélisation en éléments finis de poutres du chassis K120



$$\sum \vec{M}_{I/\delta}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow m_{I_1} \cdot g \cdot L' - m_{I_2} \cdot g \cdot L'' = 0 \dots\dots (1)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow m_{I_1} + m_{I_2} = m_T \dots\dots (2)$$

des deux équations (1) et (2) on tire :

$$m_{I_1} = \frac{L'}{L} m_T$$

$$m_{I_2} = \frac{L''}{L} m_T$$

• Les coordonnées des noeuds et les masses concentriques [Tableau (3.4)]

### 3.4) Caractéristiques mécaniques et géométriques du chassis modèle

#### 3.4.1) Construction du chassis :

La matière du chassis est de l'acier doux, d'où on tire à partir des manuels de construction mécanique les caractéristiques mécaniques suivantes :

- module de Young  $E = 2100 \text{ [dan/mm}^2\text{]}$

- masse volumique  $\rho =$

- module d'élasticité transversale  $G = 8400 \text{ [dan/mm}^2\text{]}$

#### 3.4.2) Moments d'inerties et sections.

La résolution du problème dynamique exige l'introduction des valeurs des moments d'inerties principaux, moments d'inerties polaire et les sections des différents éléments.

Noeuds	Coordonnées		Masses concentriques
	X [mm]	Y [mm]	m [kg]
1	0,000	0,000	5,857
2	0,000	800,000	5,857
3	420,000	0,000	333,600
4	420,000	800,000	333,600
5	1500,000	0,000	734,460
6	1500,000	800,000	734,460
7	2485,000	0,000	1089,670
8	2485,000	800,000	1089,670
9	3480,000	0,000	865,180
10	3480,000	800,000	865,180
11	4910,000	0,000	821,655
12	4910,000	800,000	821,655
13	6425,000	0,000	664,040
14	6425,000	800,000	664,040
15	7290,000	0,000	453,065
16	7290,000	800,000	453,065
17	7960,000	0,000	222,120
18	7960,000	800,000	222,120

Remarque: La coordonnée Z de tous les noeuds est nul.

.Tableau (3.1) -

### 3.4.2.1) Formulations

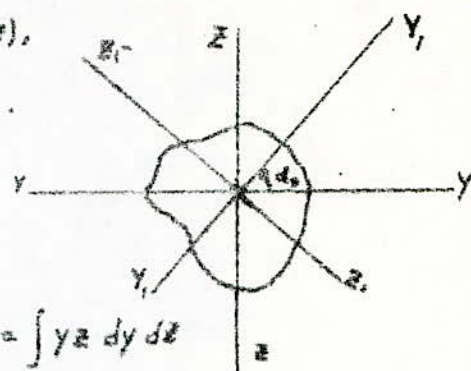
Supposons connus les moments d'inerties d'une section quelconque par rapport aux axes de coordonnées  $(y, z)$ ,

où  $O$ : le centre de gravité de la section:

$$I_y = \int z^2 dy dz$$

$$I_z = \int y^2 dy dz$$

le moment d'inertie centrifuge est:  $I_{yz} = \int yz dy dz$



Après la détermination de la disposition des axes principaux  $y_1$  et  $z_1$ , par rapport auxquels le moment d'inertie centrifuge est égal à zéro.

Les moments d'inerties principaux sont données par les relations suivantes:

$$I_{y_1} = \frac{1}{2} \left[ (I_y + I_z) \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right]$$

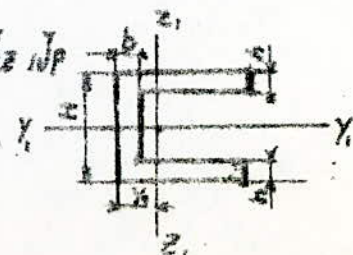
$$I_{z_1} = \frac{1}{2} \left[ (I_y + I_z) \mp \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \right]$$

Les signes d'en haut (+ et -) correspondront à  $I_{y_1} > I_{z_1}$ , tandis que ceux d'en bas (- et +) à  $I_{y_1} < I_{z_1}$ .

Le moment d'inertie polaire  $I_p$  est donné par

$$I_p = I_{y_1} + I_{z_1}$$

Les poutres de notre structure étant embouties en U, les manuels de résistance des matériaux donnent les relations suivantes pour les moments d'inerties principaux  $I_{y_1}, I_{z_1}, I_p$  et la section transversale  $S$



$$I_x = \frac{BH^3 - (B-b)(H-2h)^3}{12}$$

$$I_z = \frac{Hb^3 + 2b(B-b)^3}{12} + Hb(y - \frac{h}{2})^2$$

La section:  $S = Hb + 2h(B-b)$

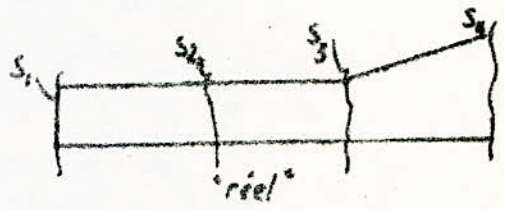
### 3.4.2.2) Calculs

La discrétisation du chassis nous oblige de faire les approximations suivantes pour les calculs.

1 - longeron:

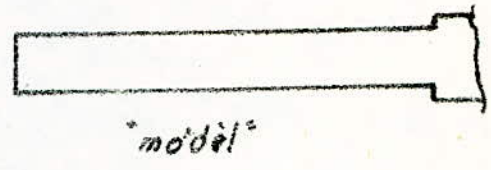
a) zone (1) fig(1.3) où on a choisit les noeuds 1, 3 et 5, on divise cette zone en 3 parties égales

$$d'où \quad S_{moy} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = 19275 \text{ [mm}^2\text{]}$$



de même pour les moments d'inerties

$$I_{moy} = \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{4}$$



après les calculs on trouve:

$$I_{ymoy} = 10770817,73 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$I_{z moy} = 494736,65 \text{ [mm}^4\text{]}$$

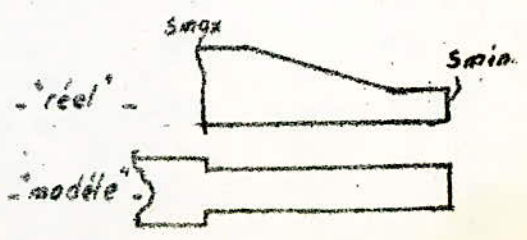
$$Jp = 1126155,5 \text{ [mm}^4\text{]}$$

b) zone (3) fig(1.3)

comme la Longueur de la partie intermédiaire est très grande par rapport aux autres parties,

dont on admet pour la pour la

zone (3) une section moyenne suivante.





$$S_{\text{moy}} = \frac{S_{\text{max}} + S_{\text{min}}}{2} = 2034,3 \text{ [mm}^2\text{]}$$

même chose pour les moments d'inerties

$$I_{\text{moy}} = \frac{I_1 + I_2}{2}$$

après les calculs on trouve

$$I_{y \text{ moy}} = 13595784,8 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$I_{z \text{ moy}} = 486242,35 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$J_p = 15492308,15 \text{ [mm}^4\text{]}$$

2. Traverses (3), (4) et (5) fig (3.1), de géométrie compliquée, on considère le cas le plus défavorable qui présente ces traverses comme des poutres en U caractérisées par la section

$$S \begin{cases} H = 100 \\ B = 105 \\ h = 5 \\ b = 5 \end{cases}$$

Les différents paramètres, moments d'inerties et sections sont classés sur le tableau (3.2) suivant:

	Longerons			Traverses			
	Zone (1)	Zone (2)	Zone (3)	1	2	3, 4, 5	6, 7, 8
$J_y$ [mm <sup>4</sup> ]	10770817,75	19245718	13595784,5	10719165	4062635	1446875	4062635
$J_z$ [mm <sup>4</sup> ]	490736,65	477343,6	486272,35	4857882	353372,8	2675000	353372,8
$J_p$ [mm <sup>4</sup> ]	11261554,5	19723062	15492308,25	15577047	4416008	4121875	4416008
$S$ [mm <sup>3</sup> ]	1921,5	2268	2094,75	2300	1136	1500	1136

Tableau (3,2) : Moments d'inerties et sections des différentes parties du châssis

## 4.1) Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi est l'une des méthodes les plus utilisées pour les calculs des valeurs et vecteurs propres pour les matrices symétriques définies et positives.

Elle consiste à transformer les matrices de rigidité et masse qui définissent le système  $[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0$  en des matrices diagonales.

Son principe est basé sur la recherche des matrices orthogonales  $(Q^1, \dots, Q^n)$ , puis faire les transformations successives suivantes.

$$[K^1] = [K]$$

$$[M^1] = [M]$$

$$[K^2] = [Q^1][K^1][Q^1]$$

$$[M^2] = [M^1][M^1][Q^1]$$

$$[K^{k+1}] = [Q^k][K^k][Q^k]$$

$$[M^{k+1}] = [Q^k][M^k][Q^k]$$

Les matrices  $[K^{k+1}]$  et  $[M^{k+1}]$  tendent vers les matrices diagonales lorsque  $k$  tend vers l'infini.

Les valeurs et vecteurs propres sont calculés par :

$$\lambda = \frac{K_{ii}^{k+1}}{M_{ii}^{k+1}}$$

$$\{x\} = [Q^1][Q^2] \dots [Q^k][Q^{k+1}] \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{M_{ii}^{k+1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \cdot i$$

Le choix de la matrice de transformation  $[Q^k]$  se fait de manière

à annuler  $[K_{ij}^k]$  et  $[M_{ij}^k]$ , après la transformation  $ano$ .

$$Q^k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & i \\ & 1 & \dots & 0 & \dots & j \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & 1 & \dots & j \\ & & & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont calculés en écrivant que  $K_{ij}^{kH} = M_{ij}^{kH} = 0$

$$aK_{ii} + (1 + ab)K_{ij} + bK_{ij} = 0$$

$$aM_{ii} + (1 + ab)M_{ij} + bM_{ij} = 0$$

Faisant les notations suivantes:

$$C_1 = K_{ii}M_{ij} - M_{ii}K_{ij}$$

$$C_2 = K_{jj}M_{ij} - M_{jj}K_{ij}$$

$$C_3 = K_{ii}M_{ji} - M_{ii}K_{jj}$$

$$d = C_{3/2} + \text{signe}(C_3) \sqrt{(C_{3/2})^2 + C_1 C_2}$$

On aura donc:  $a = \frac{C_2}{d}$

$$b = -\frac{C_1}{d}$$

Comme  $[M]$  est définie positives, alors le coefficient  $(\frac{C_3}{2})^2 + C_1 C_2$  est positif.

Dans le cas particulier où le coefficient  $d$  est nul, c'est à dire que.

$$K_{ii}/M_{ii} = K_{jj}/M_{jj} = K_{ij}/M_{ij}$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  seront donc

$$a = 0 ; \quad b = K_{ij}/K_{jj}$$

## 4.2) Programmation

Les équations de la méthode des éléments fins sont d'une forme assez générale pour qu'il soit en principe possible d'écrire un programme unique, capable d'étudier n'importe quelle structure.

Pour notre étude on a établi un programme générale qui calcul les valeurs et les les vecteurs vecteurs propres de n'importe qu'elle structure en éléments poutres dont les étapes du programme sont les suivantes:

1) Entrée des données :

- On se donne  $NN$  noeuds,  $NEL$  éléments et  $NVP$  nombre de valeurs propres demandé.

2) On construit un tableau de données donnant à la ligne  $I$  le numéros du noeud; ces coordonnées et ces masses concentriques.

2) On construit la table de connection donnant à la ligne  $I$  le numéros des deux noeuds qui délimitent cet élément et les caractéristiques géométriques de cet élément ( module de Young, la section transversale, moments d'inerties axiales, moments d'inertie polaire, masse volumique et module d'élasticité transversale).

3) Généralisation des modèles mathématiques des éléments de la structure

4) Assemblage des matrices  $[K]$  et  $[M]$  on utilisant la table de localisation qui donne à chaque ligne  $I$ , le numéros de la position de chaque élément des matrices de rigidité et masses dans les matrices globales de la structure.

5) Résolution du modèle mathématique représentant le système entier

6) résultats des valeurs et vecteurs propres

#### 4.3) RESULTATS

Un test préliminaire du programme a été fait en comparaison avec différents exemples donnés par YANG [4] nous a permis de vérifier que notre programme donne les mêmes résultats avec une précision de 2 %

#### RESULTATS

NOMBRE DE NOEUDS= 18  
NOMBRE D'ELEMENT= 24

NOEUDS	D.O.L						COORDONNEES			
	No	1	2	3	4	5	6	X	Y	Z
1	1	1	1	1	1	1	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1	1	1	1	1	1	1	0.0000E+00	0.8000E+00	0.0000E+00
3	0	0	0	0	1	0	0	0.4200E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	0	0	0	0	1	0	0	0.4200E+00	0.8000E+00	0.0000E+00
5	1	0	1	0	1	0	0	0.1500E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
6	1	0	1	0	1	0	0	0.1500E+01	0.8000E+00	0.0000E+00
7	1	1	1	1	1	1	1	0.2485E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
8	1	1	1	1	1	1	1	0.2485E+01	0.8000E+00	0.0000E+00
9	1	1	1	1	1	1	1	0.3480E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
10	1	1	1	1	1	1	1	0.3480E+01	0.8000E+00	0.0000E+00
11	0	0	0	0	1	0	0	0.4910E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
12	0	0	0	0	1	0	0	0.4910E+01	0.8000E+00	0.0000E+00
13	1	0	1	0	1	0	0	0.6425E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
14	1	0	1	0	1	0	0	0.6425E+01	0.8000E+00	0.0000E+00
15	1	1	1	1	1	1	1	0.7290E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
16	1	1	1	1	1	1	1	0.7290E+01	0.8000E+00	0.0000E+00
17	1	1	1	1	1	1	1	0.7960E+01	0.0000E+00	0.0000E+00
18	1	1	1	1	1	1	1	0.7960E+01	0.8000E+00	0.0000E+00

ELEM	S	IX	IZ	JP	
1	1 2	0.2300E-02	0.1072E-08	0.4858E-09	0.1558E-08
2	1 3	0.1921E-02	0.1077E-08	0.4907E-09	0.1126E-08
3	3 4	0.1136E-02	0.4063E-08	0.3534E-09	0.4416E-08
4	2 4	0.1921E-02	0.1077E-08	0.4907E-09	0.1126E-08
5	3 5	0.1921E-02	0.1077E-08	0.4907E-09	0.1126E-08
6	4 6	0.1921E-02	0.1077E-09	0.4907E-09	0.1126E-08
7	5 7	0.2268E-02	0.1925E-08	0.4773E-09	0.1972E-08
8	7 8	0.1500E-02	0.1447E-08	0.2675E-09	0.4122E-09
9	6 8	0.2268E-02	0.1925E-09	0.4773E-09	0.1972E-08
10	7 9	0.2268E-02	0.1925E-09	0.4773E-09	0.1972E-08
11	9 10	0.1500E-02	0.1447E-08	0.2675E-09	0.4122E-10
12	8 10	0.2268E-02	0.1925E-08	0.4773E-09	0.1972E-08
13	9 11	0.2268E-02	0.1925E-08	0.4773E-09	0.1972E-08
14	11 12	0.1500E-02	0.1447E-08	0.2675E-09	0.4122E-10
15	10 12	0.2268E-02	0.1925E-08	0.4773E-09	0.1972E-08
16	11 13	0.2095E-02	0.1360E-08	0.4863E-09	0.1549E-08
17	13 14	0.1136E-02	0.4063E-08	0.3534E-09	0.4416E-08
18	12 14	0.2095E-02	0.1360E-08	0.4863E-09	0.1549E-08
19	13 15	0.2095E-02	0.1360E-08	0.4863E-09	0.1549E-08
20	15 16	0.1136E-02	0.4063E-07	0.3534E-09	0.4416E-08
21	14 16	0.2095E-02	0.1360E-08	0.4863E-09	0.1549E-08
22	15 17	0.2095E-02	0.1360E-08	0.4863E-09	0.1549E-08
23	17 18	0.1136E-02	0.4063E-08	0.3534E-09	0.4416E-08
24	16 18	0.2095E-02	0.1360E-09	0.4863E-09	0.1549E-08

## 4.3.1) Chassis non charge

54

1)VALEUR PROPRE= 0.5819E+04FREQUENCE=0.2429E+02

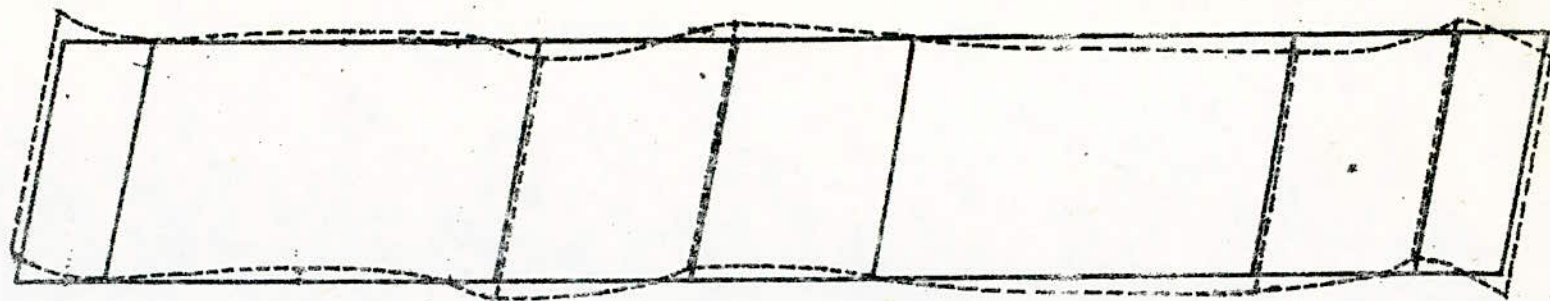
NOEUD	U	V	W	TETAX	TETAY	TETAZ
1	0.000E+00	0.000E+00	0.101E+01	0.000E+00	-.142E+01	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	0.101E+01	0.000E+00	-.142E+01	0.000E+00
3	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-.152E+01	0.000E+00
4	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-.152E+01	0.000E+00
5	0.000E+00	0.000E+00	0.177E+00	0.000E+00	0.518E+01	0.000E+00
6	0.000E+00	0.000E+00	0.177E+00	0.000E+00	0.518E+01	0.000E+00
7	0.000E+00	0.000E+00	-.552E+00	0.000E+00	-.213E+01	0.000E+00
8	0.000E+00	0.000E+00	-.552E+00	0.000E+00	-.213E+01	0.000E+00
9	0.000E+00	0.000E+00	0.502E+00	0.000E+00	0.573E+00	0.000E+00
10	0.000E+00	0.000E+00	0.502E+00	0.000E+00	0.573E+00	0.000E+00
11	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.342E+01	0.000E+00
12	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.342E+01	0.000E+00
13	0.000E+00	0.000E+00	-.502E+00	0.000E+00	-.551E+00	0.000E+00
14	0.000E+00	0.000E+00	-.502E+00	0.000E+00	-.551E+00	0.000E+00
15	0.000E+00	0.000E+00	0.555E+00	0.000E+00	-.316E-01	0.000E+00
16	0.000E+00	0.000E+00	0.555E+00	0.000E+00	-.316E-01	0.000E+00
17	0.000E+00	0.000E+00	-.736E+00	0.000E+00	-.505E+00	0.000E+00
18	0.000E+00	0.000E+00	-.736E+00	0.000E+00	-.505E+00	0.000E+00

## 4.3.2) CHASSIS CHARGE

1)VALEUR PROPRE= 0.1364E+04FREQUENCE=0.1176E+02

NOEUD	U	V	W	TETAX	TETAY	TETAZ
1	0.000E+00	0.000E+00	0.968E+00	0.000E+00	-.199E+01	0.000E+00
2	0.000E+00	0.000E+00	-.867E+00	0.000E+00	0.199E+01	0.000E+00
3	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-.851E+00	0.000E+00
4	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.851E+00	0.000E+00
5	0.000E+00	0.000E+00	0.154E-02	0.000E+00	0.339E+00	0.000E+00
6	0.000E+00	0.000E+00	-.154E-02	0.000E+00	-.339E+00	0.000E+00
7	0.000E+00	0.000E+00	-.340E-03	0.000E+00	-.149E+00	0.000E+00
8	0.000E+00	0.000E+00	0.340E-03	0.000E+00	0.149E+00	0.000E+00
9	0.000E+00	0.000E+00	-.559E-03	0.000E+00	0.177E+00	0.000E+00
10	0.000E+00	0.000E+00	0.559E-03	0.000E+00	-.177E+00	0.000E+00
11	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	-.252E+00	0.000E+00
12	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.252E+00	0.000E+00
13	0.000E+00	0.000E+00	0.849E-03	0.000E+00	0.594E-01	0.000E+00
14	0.000E+00	0.000E+00	-.849E-03	0.000E+00	-.594E-01	0.000E+00
15	0.000E+00	0.000E+00	-.274E-03	0.000E+00	-.193E-02	0.000E+00
16	0.000E+00	0.000E+00	0.274E-03	0.000E+00	0.193E-02	0.000E+00
17	0.000E+00	0.000E+00	0.306E-04	0.000E+00	0.649E-03	0.000E+00
18	0.000E+00	0.000E+00	-.306E-04	0.000E+00	-.651E-03	0.000E+00

ON tracera les déformées modales correspondantes au 1<sup>er</sup> modes des deux cas (chassis non charge et chassis charge)  
Ces modes représentent le cas le plus défavorable (flexion autour de OY)



Fig(4.1): Tracé de l'allure des déformées modales du chassis non chargé correspondante au 1<sup>er</sup> mode



Fig(4.2): Tracé de l'allure des déformées modales du chassis chargé correspondante au 1<sup>er</sup> mode



# CONCLUSION

Ce travail m'a donné un aperçu général sur le calcul des structures et en particulier un apport appréciable dans la connaissance de la méthode des éléments finis.

Le programme qu'on a développé est très performant et donne des résultats très concluants malgré qu'il pourrait être optimisé pour un meilleur gain d'espace mémoire et une réduction du temps d'exécution.

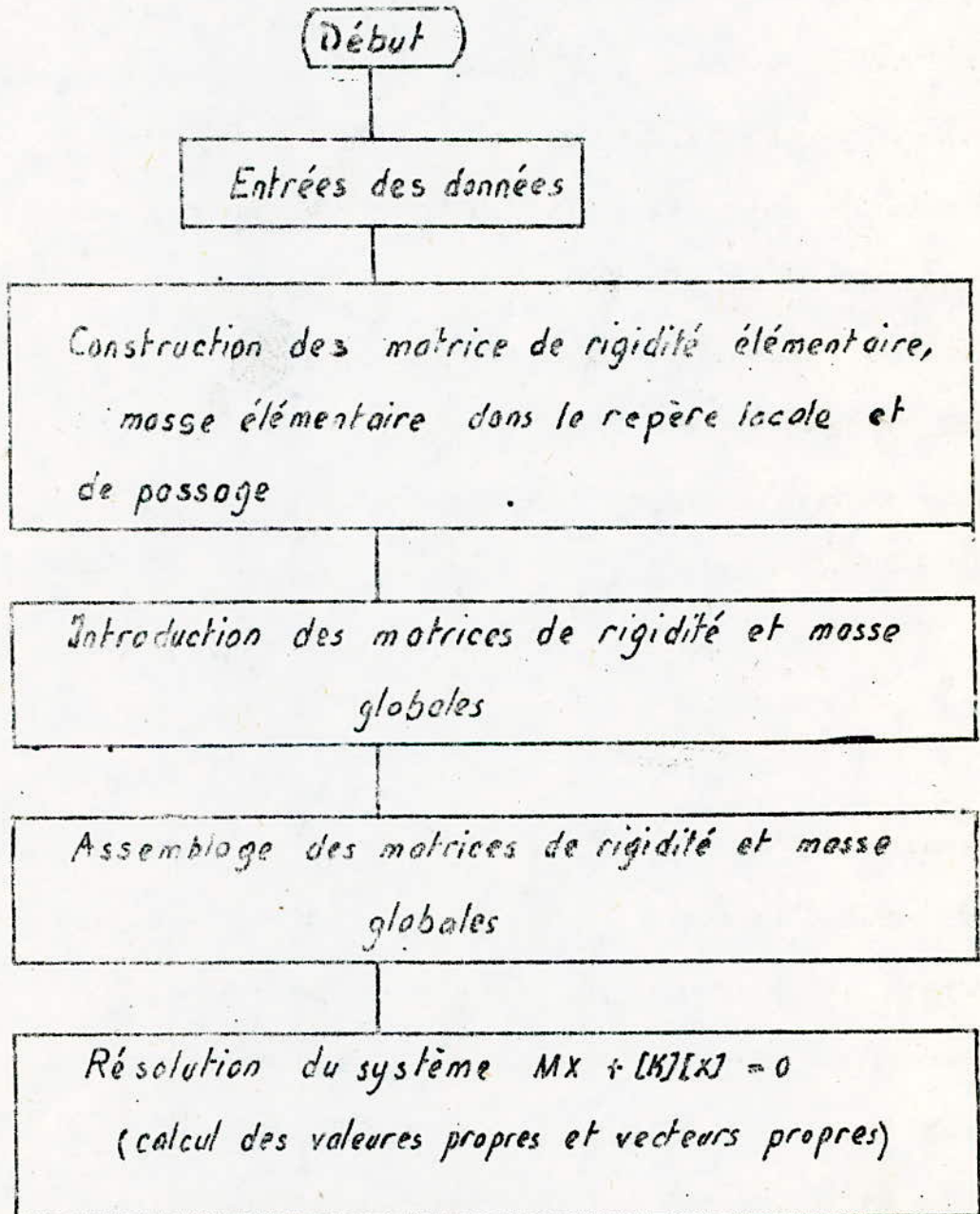
Le calcul des éléments propres du châssis montre la configuration actuelle du châssis et la modélisation adoptée situe la fréquence de résonance dans le régime au ralenti (basse fréquence). Ce résultat doit toutefois être retrouvé avec d'autres maillages.

J'espère que cette étude sera poursuivie en tenant compte de l'amortissement, ainsi que le calcul dynamique en vibrations forcées qui prend en compte le comportement réel du châssis. Enfin un calcul dynamique n'aura de valeur effective que s'il est vérifié par des mesures expérimentales sur la structure réelle.

Le calcul des éléments propres du châssis montre la configuration actuelle du châssis et la modélisation adoptée situe la fréquence de résonance dans le régime au ralenti (basse fréquence). Ce résultat doit toutefois être retrouvé avec d'autres maillages.

# ANNEXE

## - Organigramme



```

*****
*      PROGRAMME POUR LE CALCUL DYNAMIQUE DES STRUCTURES      *
*      EN ELEMENTS POUTRES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS  *
*****

```

```

INTEGER DDN, TI
REAL L, IX, IY, IZ
DIMENSION FKE(12,12), T(12,12), TT(12,12), C(12,12), FKG(12,12)
DIMENSION D(12,12), FME(12,12), AMG(400,400), CMA(100,6)
DIMENSION XNN(100), YNN(100), ZNN(100), S1(100), G1(100)
DIMENSION YM(100), ZM(100), PM(100), RO(100), E(100)
DIMENSION AKG(400,400), FMG(12,12), IEC(400), VCP(400)
DIMENSION IDDN(100,6), TI(100,12), NBN(100,2)
DIMENSION EIGV(400), VALP(400), VIC(400,400), W(400,400)

```

```
*****
```

```
ENTREE DES DONNEES
```

```
*****
```

```

OPEN(16, NAME='DONNEES.DAT', STATUS='OLD')
OPEN(17, NAME='RESM.DAT', STATUS='NEW')
WRITE(17, 2000)
FORMAT(15X, ' _____ RESULTATS _____ ', /)

```

```
-----
LECTURE DES COORDONNEES DES NOEUDS ET LEURS D.D.L
-----
```

```

READ(16, 11) NN, NEL, IFPR, NVP
FORMAT(4I3)
WRITE(17, 12) NN, NEL
FORMAT(5X, 'NOMBRE DE NOEUDS=', I3/5X, 'NOMBRE D ELEMENT=', I3)
WRITE(17, 21)
FORMAT(/3X, 6HN0EUDS, 3X, 42H D.D.L COORDONNEES)
WRITE(17, 22)
FORMAT(5X, 21HNo 1 2 3 4 5 6, 6X, 4H X, 11X, 1HY, 10X, 1HZ)
DO 30 I=1, NN
READ(16, 23) N, IDDN(I,1), IDDN(I,2), IDDN(I,3), IDDN(I,4), IDDN(I,5),
1 IDDN(I,6), XNN(I), YNN(I), ZNN(I), CMA(I,3)
FORMAT(13, 6I2, 4E10.3)
WRITE(17, 24) N, IDDN(I,1), IDDN(I,2), IDDN(I,3), IDDN(I,4), IDDN(I,5)
1 IDDN(I,6), XNN(I), YNN(I), ZNN(I)
FORMAT(4X, I3, 3X, I1, 5(2X, I1), 5X, E10.4, 2(2X, E10.4))
CONTINUE

```

```
-----
TABLEAU DES ELEMENTS DONNANT LES NOEUDS DE
L'ELEMENT, ET LES CARACTERISTIQUES MECANIQUES
-----
```

```

WRITE(17, 34)
FORMAT(/5X, ' TABLE DE CONNECTIONS')
WRITE(17, 31)
FORMAT(/2X, 4HELEM, 10X, 1HE, 9X, 1HS, 9X, 2HIY, 8X, 2HIZ, 8X, 1HJ, 8X, 2HRO)
DO 40 I=1, NEL
READ(16, 32) N, NBN(I,1), NBN(I,2), S1(I), YM(I), ZM(I), PM(I)
FORMAT(13, 2I2, 4E14.4)
WRITE(17, 33) N, NBN(I,1), NBN(I,2), S1(I), YM(I), ZM(I), PM(I)
FORMAT(3X, I3, X, 2(I2, X), 4(E14.4, X))

```

CONTINUE

-----  
CALCUL DU NOMBRE DE D.D.L TOTALE

```

H=0
DO 50 I=1,NN
DO 50 J=1,6
K=IDDN(I,J)
IF(K.EQ.0) GO TO 50
H=H+1
IDDN(I,J)=H
CONTINUE
NDT=H
WRITE(17,51)NDT
FORMAT(/5X,'NOMBRE D.D.L.TOTALE=',I3)

```

-----  
TABLE DE LOCALISATION

```

DO 60 I=1,NEL
I1=NBN(I,1)
I2=NBN(I,2)
DO 60 J=1,6
TI(I,J)=IDDN(I,J)
TI(I,J+6)=IDDN(I,J)
CONTINUE
WRITE(17,61)
FORMAT(/2X,7HELEMENT,5X,21HTABLE DE LOCALISATION)
WRITE(17,62)
FORMAT(5X,32HN6      1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12)
DO 70 I=1,NEL
WRITE(17,71)I,TI(I,1),TI(I,2),TI(I,3),TI(I,4),TI(I,5),
1  TI(I,6),TI(I,7),TI(I,8),TI(I,9),TI(I,10),TI(I,11),
2  TI(I,12)
FORMAT(/5X,I3,3X,12(I3,X))
CONTINUE

```

-----  
INITIATION DES MATRICES DE RIGIDITE ET MASSE ASSEMBLEES A 0

```

DO 80 I=1,NDT
DO 80 J=1,NDT
AKG(I,J)=0
AMG(I,J)=0
REWIND 1
DO 1000 I3=1,NEL
DO 90 I=1,12
DO 90 J=1,12
FKE(I,J)=0
FME(I,J)=0
T(I,J)=0
I1=NBN(I3,1)
I2=NBN(I3,2)
X1=XNN(I1)
X2=XNN(I2)
Y1=YNN(I1)
Y2=YNN(I2)

```

```

Z1=ZNN(I1)
Z2=ZNN(I2)
L=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2+(Z2-Z1)**2)
AL=SQRT((X2-X1)**2+(Y2-Y1)**2)
CA=AL/L
SA=(Y2-Y1)/L
CK=(X2-X1)/AL
SK=(Z2-Z1)/AL
IY=YM(I3)
IZ=ZM(I3)
IX=PM(I3)
E(I3)=2.E+11
G1(I3)=8.E+10
RO(I3)=8000.
E1=E(I3)
G=G1(I3)
S=S1(I3)
RO1=RO(I3)

```

\*\*\*\*\*

MATRICE DE RIGIDITE DANS LE REPERE LOCALE

\*\*\*\*\*

```

FKE(1,1)=E1*S/L
FKE(1,7)=-E1*S/L
FKE(2,2)=12.*E1*IZ/L**3
FKE(2,6)=6.*E1*IZ/L**2
FKE(2,8)=-12.*E1*IZ/L**3
FKE(2,12)=6.*E1*IZ/L**2
FKE(3,3)=12.*E1*IY/L**3
FKE(3,5)=6.*E1*IY/L**2
FKE(3,9)=-12.*E1*IY/L**3
FKE(3,11)=6.*E1*IY/L**2
FKE(4,4)=G*IX/L
FKE(4,10)=-G*IX/L
FKE(5,5)=4.*E1*IY/L
FKE(5,9)=-6.*E1*IY/L**2
FKE(5,11)=2.*E1*IY/L
FKE(6,6)=4.*E1*IZ/L
FKE(6,8)=-6.*E1*IZ/L**2
FKE(6,12)=2.*E1*IZ/L
FKE(7,7)=E1*S/L
FKE(8,8)=12.*E1*IZ/L**3
FKE(8,12)=-6.*E1*IZ/**2
FKE(9,9)=12.*E1*IY/L**3
FKE(9,11)=-6.*E1*IY/L**2
FKE(10,10)=G*IX/L
FKE(11,11)=4.*E1*IY/L
FKE(12,12)=4.*E1*IZ/L

```

\*\*\*\*\*

MATRICE MASSE DANS LE REPERE LOCAL

\*\*\*\*\*

```

FME(1,1)=RO1*S*L/3
FME(1,7)=RO1*S*L/6
FME(2,2)=39.*RO1*S*L/105
FME(2,6)=11.*RO1*S*L*L/210
FME(2,8)=27.*RO1*S*L/210

```

0000  
400

```

FME(2,12)=-13.*R01*S*L/420
FME(3,3)=39.*R01*S*L/105
FME(3,5)=11.*R01*S*L/210
FME(3,9)=27.*R01*S*L/210
FME(3,11)=-13.*R01*S*L/420
FME(4,4)=R01*I*X/L/3
FME(4,10)=R01*I*X/L/6
FME(5,5)=R01*S*L/105
FME(5,9)=13.*R01*S*L/420
FME(5,11)=-R01*S*L/140
FME(6,6)=FME(5,5)
FME(6,8)=FME(5,9)
FME(6,12)=FME(5,11)
FME(7,7)=R01*S*L/3
FME(8,8)=39.*R01*S*L/105
FME(8,12)=-11.*R01*S*L/210
FME(9,9)=39.*R01*S*L/105
FME(10,10)=FME(4,4)
FME(9,11)=-11.*R01*S*L/210
FME(11,11)=R01*S*L/105
FME(12,12)=R01*S*L/105
DO 400 I=1,12
I4=I+1
DO 400 J=14,12
FKE(J,I)=FKE(I,J)
FME(J,I)=FME(I,J)
*****

```

MATRICE DE PASSAGE DU REPERE LOCAL AU REPERE GLOBALE

\*\*\*\*\*

```

T(1,1)=CA*CK
T(1,2)=SA
T(1,3)=CA*SK
T(2,1)=-SA*CK
T(2,2)=CA
T(2,3)=-SA*SK
T(3,1)=-SK
T(3,3)=CK
T(4,4)=T(1,1)
T(4,5)=T(1,2)
T(4,6)=T(1,3)
T(5,4)=T(4,6)
T(5,5)=T(2,2)
T(5,6)=T(2,3)
T(6,6)=T(3,3)
T(6,4)=T(3,1)
T(7,7)=T(4,4)
T(7,8)=T(4,5)
T(7,9)=T(4,6)
T(8,7)=T(5,4)
T(8,8)=T(5,5)
T(8,9)=T(5,6)
T(9,7)=T(6,4)
T(9,9)=T(6,6)
T(10,10)=T(7,7)
T(10,11)=T(7,8)

```

```

T(10,12)=T(7,9)
T(11,10)=T(8,7)
T(11,11)=T(8,8)
T(11,12)=T(8,9)
T(12,10)=T(10,7)
T(12,12)=T(9,9)
DO 130 I=1,12
DO 130 J=1,12
TT(I,J)=T(J,I)
DO 140 I=1,12
DO 140 J=1,12
C(I,J)=0
D(I,J)=0
DO 140 K=1,12
C(I,J)=C(I,J)+TT(I,K)*FKE(K,J)
D(I,J)=D(I,J)+TT(I,K)*FME(K,J)
DO 150 I=1,12
DO 150 J=1,12
FKG(I,J)=0
FMG(I,J)=0
DO 150 K=1,12
FKG(I,J)=FKG(I,J)+C(I,K)*T(K,J)
FMG(I,J)=FMG(I,J)+D(I,K)*T(K,J)
*****
ASSEMBLAGE
*****

DO 100 I=1,12
DO 100 J=1,12
K=TI(13,I)
L=TI(13,J)
IF (K*L.EQ.1) GO TO 100
AKG(K,L)=AKG(L,K)+FKG(I,J)
AMG(K,L)=AMG(L,K)+FMG(I,J)
CONTINUE
CONTINUE
DO 1500 I=1,NN
DO 1500 J=1,6
K=IDDN(I,J)
IF(K.EQ.0) GO TO 1500
AMG(K,K)=AMG(K,K)+CMA(I,J)
CONTINUE
*****
CALCUL DES VALEURS ET VECTEURS PROPRES
*****
WRITE(17,2980)
NSMAX=15
RTOL=1.0-19
DO 2010 I=1,NDT
IF ((AKG(I,I).GT.0).AND:(AMG(I,I).GT.0)) GO TO 4
WRITE(17,3020)
STOP
VALP(I)=AKG(I,I)/AMG(I,I)
EIGV(I)=VALP(I)

```

---

INITIALISER LES VECTEURS PROPRES

DONNEES DU PROGRAMME

24	1	3						
1	1	1	1	1	1	.000	.000	.000 5.857
2	1	1	1	1	1	.000	.000	.000 5.857
3	0	0	0	0	1	.420	.000	.000 333.600
4	0	0	0	0	1	.420	.800	.000 333.600
5	1	0	1	0	1	1.500	.000	.000 734.460
6	1	0	1	0	1	1.500	.800	.000 734.460
7	2	1	1	2	1	2.485	.000	.000 1089.670
8	2	1	1	2	1	2.485	.800	.000 1089.670
9	1	1	1	1	1	3.480	.000	.000 865.180
10	1	1	1	1	1	3.480	.800	.000 865.180
11	0	0	0	0	1	4.910	.000	.000 821.655
12	0	0	0	0	1	4.910	.800	.000 821.655
13	1	0	1	0	1	6.425	.000	.000 664.040
14	1	0	1	0	1	6.425	.800	.000 664.040
15	1	1	1	1	1	7.290	.000	.000 453.065
16	1	1	1	1	1	7.290	.800	.000 453.065
17	1	1	1	1	1	7.960	.000	.000 222.120
18	1	1	1	1	1	7.960	.800	.000 222.120
19	1	1	2			2.3000E-03	1071.9165E-12	486.7892E-12 1557.7045E-12
20	1	1	2			1.9215E-03	1077.0817E-12	490.7366E-12 1126.1554E-12
21	3	4				1.1360E-03	4062.6350E-12	353.3728E-12 4416.0080E-12
22	2	4				1.9215E-03	1077.0817E-12	490.7366E-12 1126.1554E-12
23	3	3				1.9215E-03	1077.0817E-12	490.7366E-12 1126.1554E-12
24	4	6				1.9215E-03	1077.0817E-12	490.7366E-12 1126.1554E-12
25	5	7				2.2680E-03	1924.5718E-12	477.3436E-12 1972.3062E-12
26	7	9				1.5000E-03	1446.8751E-12	267.5000E-12 412.1875E-12
27	6	8				2.2680E-03	1924.5718E-12	477.3436E-12 1972.3062E-12
28	7	8				2.2680E-03	1924.5718E-12	477.3436E-12 1972.3062E-12
29	9	10				1.5000E-03	1446.8751E-12	267.5000E-12 412.1875E-12
30	8	10				2.2680E-03	1924.5718E-12	477.3436E-12 1972.3062E-12
31	9	11				2.2680E-03	1924.5718E-12	477.3436E-12 1972.3062E-12
32	11	11				1.5000E-03	1446.8751E-12	267.5000E-12 412.1875E-12
33	10	12				2.2680E-03	1924.5718E-12	477.3436E-12 1972.3062E-12
34	11	13				2.0947E-03	1359.7845E-12	486.2723E-12 1549.2308E-12
35	17	14				1.1360E-03	4062.63500E-12	353.3728E-12 4416.0080E-12
36	18	14				2.0947E-03	1359.7845E-12	486.2723E-12 1549.2308E-12
37	19	15				2.0947E-03	1359.7845E-12	486.2723E-12 1549.2308E-12
38	20	15				1.1360E-03	4062.63500E-12	353.3728E-12 4416.0080E-12
39	21	16				2.0947E-03	1359.7845E-12	486.2723E-12 1549.2308E-12
40	22	17				2.0947E-03	1359.7845E-12	486.2723E-12 1549.2308E-12
41	23	18				1.1360E-03	4062.6350E-12	353.3728E-12 4416.0080E-12
42	24	18				2.0947E-03	1359.7845E-12	486.2723E-12 1549.2308E-12



# BIBLIOGRAPHIE

1- H.C. ROCKEY , H.R. EVANS

*Introduction à la méthode des élément finis , EYROLLES - Paris 19*

2- G. DHATT , G. TOUZOT

*Une présentation de la méthode des éléments finis , 2<sup>e</sup> édition*

*MALOINES.A - Paris 1984*

3- J.F. JMBERT

*Analyse des structure par élément finis , CEPADUES - Toulouse 1979*

4- T.Y. YANG

*Finite élément structural Analysis*

5-

*Aide-mémoire de résistance des matériaux, Editions de Moscou*

6- DESBOIS, F. TOUACHE , J. TOURANCHAUT

*L'automobile: Technologie professionnelle générale T:2 Paris 1983*

7- A. BENTEBBICHE , janvier 1987

*Projet de fin d'étude : Etude comparative de méthodes de calcul des éléments propres des structures*



