

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

23/87

وزارة التعليم و البحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : *GENIE MECANIQUE*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**SUJET**

ETUDE SUR L'APPLICATION DE LA  
TRANSFORMEE DE WALSH  
AU DIAGNOSTIC DES MACHINES

Proposé Par :

*W. KUROWSKI*

Etudié par :

*A. BERIBECHE*

Dirigé par :

*W. KUROWSKI*

PROMOTION : *JANVIER 1987*



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT: GENIE-MECANIQUE  
PROMOTEUR: Mr W. KUROWSKI  
ELEVE INGENIEUR: Mr A. BERBECHE

وزارة التعليم العالي  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
فرع: الهندسة الميكانيكية  
الموجه: كيروفسكي

الطالب المهندس: بريكش السرح الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة - BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

العنوان : دراسة حول تطبيق تحويلات وولش لتشخيص الآلات

الملخص : الهدف من هذا المشروع هو الدراسة النظرية لنحويلات وولش وتطبيقاتها في تشخيص الآلات إنطلاقا من قياس الإهتزازات ، بالإضافة إلى إعداد برنامج معلوماتي لتطبيق هذه التحويلات مع إعطاء مثال تطبيقي على محرك كهربائي.

I Sujet: ETUDE SUR L'APPLICATION DE LA TRANSFORMEE DE WALSH,  
I AU DIAGNOSTIC DES MACHINES I

I Résumé: Le but de ce projet est l'étude de la transformée de  
I WALSH et son application au diagnostic des machines à  
I partir de la mesure des vibrations. I

I Cette étude est illustrée par la mise au point d'un  
I programme relatif à cette transformée, avec son appli-  
I -cation sur un moteur électrique. I

I Subject: STUDY OF THE APPLICATION OF WALSH TRANSFORM TO THE  
I DIAGNOSIS OF MACHINES I

I Abstract: The main goal of our present work is to do a theoretic-  
I -cal study of the WALSH transform and its application  
I to the diagnosis of machines based on the measure of  
I vibrations. I

I Meanwhile, we have proposed a program for the theory  
I mentioned above and its application on an electrical  
I engine. I

## DEDICACES

c'est à :

- Mes chers parents
- Mes frères et sœurs et surtout à :  
Abd-Elmadjid, Badr-eddine et Othmane.
- Toute ma famille.

Ainsi qu'à tous ceux qui témoignent qu'il n'y  
a de dieu qu'ALLAH et que Mohamed est son  
prophète ﷺ

que je dédie ce modeste travail.

B. Abdellatif

*Handwritten signature/initials*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier M<sup>e</sup> Kurovski, mon promoteur, pour l'aide qu'il m'a apporté pendant l'élaboration de ce projet.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à tous ceux qui ont collaboré de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

B. Abdellatif

*B. Abdellatif*

# TABLE DES MATIERES



CHI INTRODUCTION: . . . . .	1
1.1. Maintenance preventive . . . . .	1
1.2. Maintenance prédictive . . . . .	1
1.3. Conclusion. . . . .	2
CHII GENERALITES . . . . .	4
2.1. La nécessité d'étude d'autres transformées que celle de Fourier. . . . .	4
2.2. But . . . . .	5
2.3. Transformées de Fourier Discrètes . . . . .	5
CHIII LES FONCTIONS DE WALSH. . . . .	8
1. Fonction de Rademacher . . . . .	9
1.1. Définition . . . . .	9
1.2. Propriétés . . . . .	9
2. Les Fonctions de Walsh . . . . .	9
2.1. Définition . . . . .	9
2.2. Conversion de Gray Directe . . . . .	11
2.3. Conversion de Gray Inverse . . . . .	12
2.4. Exemples . . . . .	12

2.5 Propriété . . . . .	.13
2.6 Suite de Walsh . . . . .	.16
3. Fonction de Hadamard . . . . .	.19
3.1 Définition . . . . .	.19
3.2. Relation mutuelle des Fonctions de Walsh et de Hadamard.	20
3.3. Propriété . . . . .	.23

## CHIV. DEFINITION DIRECTE DES MATRICES DE WALSH.24

1. Relation fondamentale . . . . .	.24
2. Exemple . . . . .	.24

## CHV. LES TRANSFORMATIONS BINAIRES DISCRETES.26

1. La transformée de Hadamard Discrète . . . . .	.26
1.1. Principes . . . . .	.26
1.3. La transformée Inverse . . . . .	.28
1.4. Propriétés . . . . .	.28
2. La transformée de Walsh Discrète . . . . .	.29
2.1. Principe . . . . .	.29
2.2. Passage de La transformée de Walsh à La transformée de Hadamard . . . . .	.29

CH VI TRANSFORMEE BINAIRE RAPIDE . . . . . 31

1. Transformée de Hademard Rapide. . . . . 31

1.1. Principes. . . . . 32

1.2. Définition de L'Algorithme de Cooley. . . . . 32

1.3. Représentation Graphique de L'Algorithme de Cooley. 33

1.4. Treillis. . . . . 33

1.5. Etats intermédiaires du signal. . . . . 34

1.6. Exemple. . . . . 37

1.7. Interprétation de L'algorithme de Cooley. . . . . 37

2. Programmation de La transformée de Hadamard rapide en huit points. . . . . 38

2.1. Définition de L'algorithme de cooley. . . . . 38

2.2. Représentation graphique de L'algorithme de Cooley. 39

2.3. Interprétation de L'algorithme de cooley. . . . . 40

3. Programmation des transformées de Hadamard en  $N = 2^r$  points. . . . . 40

CH VII TRANSFORMEE DE WALSH RAPIDE . . . . . 43

1. Principe. . . . . 43

2. Applications aux transformées de Walsh rapides en huit points. . . . . 44



## CH VIII QUELQUES COMPARAISONS ENTRE LA PROCEDURE DE WALSH ET DE FOURIER. 45

1. Conversion entre Les transformées de fourier et de walsh. . . . . 45
2. Comparaison de La transformée de Walsh avec La transformée de fourier. . . . . 46
3. Comparaison entre Les spectres de walsh et ceux de fourier. . . . . 46
4. Considération d'erreurs. . . . . 53

## CH IX PROGRAMMATION . . . . . 54

1. Identification des symboles utilisés dans le programme 54
2. Organigramme. . . . . 55

## CH X ESSAI DU PROGRAMME . . . . . 59

## CH XI DIAGNOSTIQUE D'UN MOTEUR ELECTRIQUE .64

CONCLUSION . . . . . 69

BIBLIOGRAPHIE . . . . . 70

# NOTATION UTILISEE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

T.F.D : Transformation de Fourier discrète.

T.W.D : Transformation de Walsh discrète.

T.B.D : Transformation binaire discrète.

T.H.D : Transformation de Hadamard discrète.

T.F.R : Transformation de Fourier rapide.

T.W.R : Transformation de Walsh rapide

T.H.R : Transformation de Hadamard rapide

C.G.D : Conversion de Gray directe

C.G.I : Conversion de Gray inverse

R : Renversement digital.

## I INTRODUCTION

La maintenance du matériel et des outils de production occupe une place importante dans le bilan d'un procédé industriel et nécessite l'élaboration d'une politique efficace dans ce domaine.

### 1.1 MAINTENANCE PRÉVENTIVE

La plus simple et la plus utilisée jusqu'à présent, consiste un arrêt régulier des machines avec démontage, contrôle, puis remplacement systématique d'organes; la date de l'arrêt est planifiée par expérience ou en fonction d'impératifs de sécurité.

L'inconvénient d'un tel procédé est le risque d'un démontage inutile de la machine occasionnant une perte de temps et de production dont la sanction est une perte d'argent. De plus le redémarrage d'une machine refroidie, dans laquelle des éléments ont été changés, exige de nouveaux réglages; parfois longs et distincts. Il se peut aussi que la défaillance survienne entre deux démontages et provoque des dégâts importants avec arrêt de l'installation [5]

### 1.2 MAINTENANCE PREDICTIVE

Elle est plus évoluée, permet d'éviter les inconvénients de la méthode précédente. Elle consiste à déterminer d'une part que l'organe défaillant devrait être remplacé, et la date à laquelle

s'impose l'intervention. Bien évidemment pour faire de telles prédictions, il est nécessaire d'accorder à une bonne compréhension du fonctionnement interne de la machine, car il n'est pas possible de prédire l'avenir d'une machine sans connaître son état de santé, au temps présent.

L'évolution de l'état de santé d'une machine revient à établir un diagnostic, à cet effet il faut remarquer que toute machine en utilisation fournit de nombreux signaux qui sont symptomatiques de son fonctionnement, telle que la chaleur dégagée, la puissance absorbée ou fournie, le bruit, les vibrations, etc... Parmi les informations fournies, les vibrations présentent un grand intérêt parce qu'elles sont localisables et qu'elles se transmettent rapidement, c'est pour cela que la plupart des techniques d'entretien actuelles s'appuient sur le captage et l'analyse des signaux vibratoires.

Les méthodes de surveillance sont liées à l'importance de la machine (entaille, en prix, en intérêt stratégique dans l'installation...) et selon ce que l'on veut connaître de son comportement [5]

### 1.3 CONCLUSION

Dans une installation industrielle, la surveillance en fonctionnement devient une nécessité dès lors que les machines sont importantes, et l'entretien préventif fait, de plus en plus,

place à l'entretien prédictif. Cette surveillance est rendue plus sûre et plus précise grâce aux progrès du matériel de captage et d'analyse des vibrations. Des techniques plus simples aux méthodes les plus sophistiquées, le choix est grand ; il permet aux responsables du fonctionnement des machines de prendre des décisions utiles pour une production optimale.

## II) GENERALITES

### 2.1 LA NECESSITE D'ETUDE D'AUTRES TRANSFORMÉES QUE CELLE DE FOURIER :

De nos jours, on a de plus en plus besoin d'informations dans n'importe quel domaine qu'il soit. On a l'habitude de dire que l'information circule, c'est à dire qu'elle est diffusée sous les formes les plus variées, tel que le spectre de vibration qui contient des informations sur l'état d'une machine. Aujourd'hui le traitement du signal est devenu une discipline scientifique à part entière, d'un niveau élevé, et dont les bases, les méthodes et les possibilités ne peuvent plus être ignorées par l'ingénieur.

Au centre de cette discipline les transformés de Fourier occupent une place de première importance. Cependant il y a des formes de courbes spéciales qui peuvent être approximées plus précisément avec un nombre de termes plus petit que les expansions de Fourier, pour l'instant il est prévu qu'une courbe de forme carrée peut être facilement représentée par une sommation d'un nombre de fonctions carrées au lieu de l'utilisation des fonctions "COS" et "SIN", bien sur n'importe quelle courbe peut être approximée par une fonction échantillonnée [4]

Par exemple dans l'analyse spectrale des impulsions et

transitions sismiques, Les expansions de Fourier sont usuellement utilisées, mais cette méthode n'est pas efficace parce que nous sommes alors entraînés d'expandre des phénomènes de transition en terme de série de fonctions stationnaires, une approche plus efficace est d'expandre de telles transitions en une série de fonctions ayant des propriétés similaires aux transitions elles mêmes [4]

A mesure que se développe et se généralise le traitement du signal, il apparaît que des méthodes plus simples et plus rapides que la transformée de Fourier dont les plus connues sont les transformées de Hadamard, Walsh et de Haar.

## 2.2 BUT

Dans ce projet nous allons exposer une méthode pour le traitement du signal, cette méthode est plus rapide et plus simple que celle de Fourier. Cette méthode est la transformée de Walsh. Le but de notre projet présente l'étude théorique de la transformée de Walsh; c'est à dire mettre en évidence les outils mathématiques nécessaires pour transformer un signal selon cette méthode, puis la programmation de la procédure de calcul de cette transformée à partir d'une série de data, et enfin l'application pratique pour le diagnostic des machines.

## 2.3 LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRETE (TFD)

La TFD d'une suite périodique  $x(k)$   $k=0, 1, \dots, N-1$  est:

$$X(n) = \sum_k x(k) \exp(-j2\pi nk/N)$$

$$\exp(-j2\pi nk/N) = W^{nk}$$

Si le noyau exponentiel  $W^{nk}$  de la transformée de Fourier discrète est remplacé par un noyau ne prenant que deux valeurs égales et opposées  $\pm 1, \pm 2, \dots$ . La transformée obtenue, nommée transformée de Fourier binaire (TFB) est nécessairement moins précise que la TF initiale, mais plus rapide à calculer et plus facile à adapter aux techniques numériques actuelles. Il en résulte que dans tout les cas (très nombreux) <sup>où</sup> une grande précision n'est pas exigée, ces versions simplifiées de la TFD sont très valables.

Elles possèdent d'ailleurs les propriétés caractéristiques de la TFD.

En outre ces transformées se distinguent de la TFD sur deux points intéressants :

1. Elles sont de nature réelle et leur calcul ne met en œuvre que des additions et des soustractions.
2. Elles n'introduisent aucune distorsion du signal, les transformées binaires les plus utilisées sont celles de Hadamard, de Haar, de Walsh et de Paley. Toutes ces transformées s'obtiennent à partir des fonctions de base constituées par des



fonctions orthogonales non sinusoidales en forme d'ondes rectangulaires dont les plus importants sont celles de Walsh et de Haar.

## IV) LES FONCTIONS DE WALSH

Récemment plusieurs auteurs ont étudié la transformée de Walsh, Harmuth (1969) en particulier, a étudié la transformée de Walsh pour les fonctions à une variable [2]

Les fonctions de Walsh représentées en 1923 par le mathématicien J. L. Walsh [1], représentent des ondes périodiques ou non, ne pouvant assumer que les états  $\pm 1$ , elles forment un ensemble infini dénombrable [1]

En ce qui concerne leurs applications aux méthodes rapides de transformation du signal, nous nous limiterons aux notions qui nous seront nécessaires.

La description des fonctions de Walsh peut être représentée de trois manières possibles [1] connues sous le vocable de mode, et qui sont :

- Le mode séquentiel, ou mode de Walsh
- Le mode dyadique, ou mode de Paley
- Le mode naturel, ou mode de Hadamard

L'emploi pratique des fonctions de Walsh repose comme pour toutes les fonctions de base sur leur échantillonnage qu'il faut effectuer conformément au critère de Nyquist, et qui fournit des signaux de Kronecker [1], ce sont des impulsions d'amplitudes positives ou négatives ( $\pm 1$ ). Les suites obtenues possèdent d'importantes propriétés qui ne sont commodément décrites que par les méthodes de calcul matriciel; donc il

nous faut définir les matrices de Walsh et de Hadamard.

Même ainsi simplifiée, l'étude des fonctions de Walsh s'avère complexe, c'est pourquoi nous l'effectuerons en deux temps.

- Nous déduisons les grandes familles de fonctions de Walsh à partir des fonctions de Radmacher

- Nous montrerons que chacune d'elles peut être définie indépendamment des autres.

## 1. LES FONCTIONS DE RADMACHER

1.1 DÉFINITION: Les fonctions de Radmacher introduite en 1922 par le mathématicien allemand H. Radmacher [1] présentent des ondes rectangulaires périodiques prenant les valeurs  $\pm 1$ ; sur un intervalle de temps fini  $(0, 1)$ ; elles ne constituent pas un système complet de fonctions orthogonales.

ELLES SONT NOTÉES  $\text{Rad}(k, t)$

$k = \log_2 N$ ,  $N$ : n° des états (voir fig III.4)

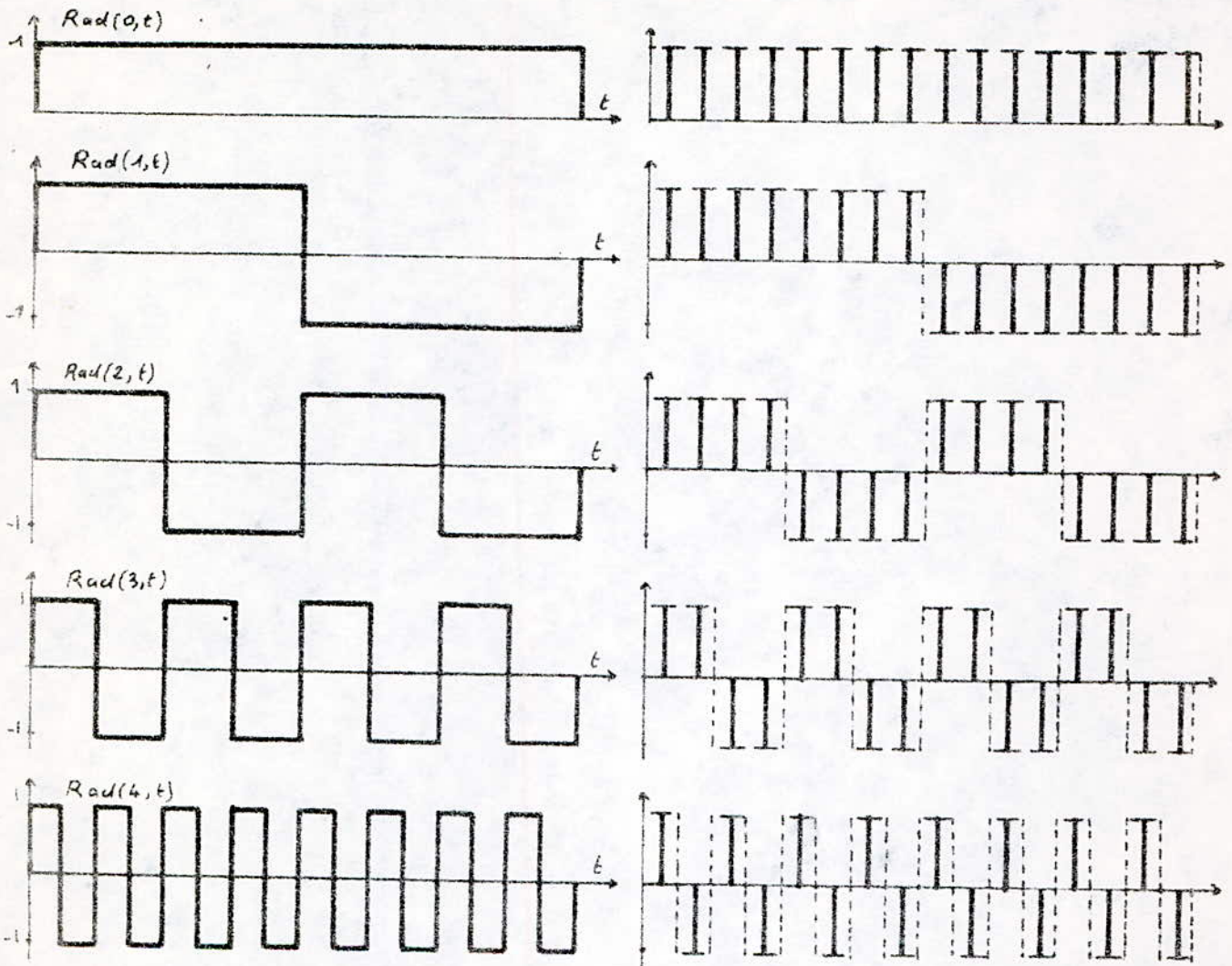
$t$ : variable indépendante du temps

### 1.2 Propriétés:

$\text{Rad}(k, t)$  effectue  $2^{k-1}$  cycles sur l'intervalle de définition, à l'exception de  $\text{Rad}(0, t)$  qui n'oscille pas.

## 2. LES FONCTIONS DE WALSH:

2.1 Définition: Les fonctions de Walsh  $R$  représentent des ondes rectangulaires périodiques ou non, prennent les valeurs  $\pm 1$  et qui sont notées  $\text{wal}(i, t)$ ; on les déduit des fonctions de



Fonctions de Rademacher  
descretisée (= suites de Kronecker)

Representation  
simplifiée

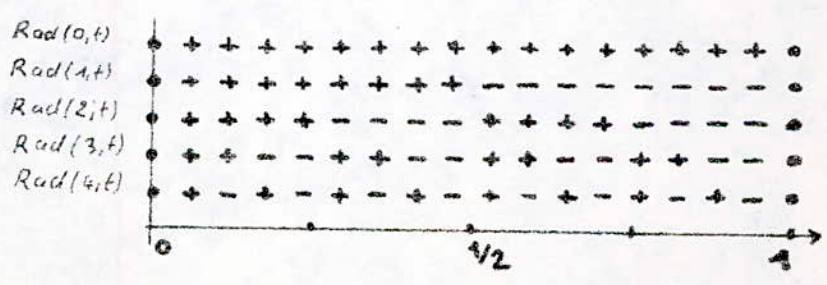


Fig. III.1 : Les Fonctions de Rademacher

Radmacher par la relation suivante.

$$(1) \text{Wal}(i, r) = \prod_{k=1}^{r-1} \text{Rad}(k, r)^{g_k} \quad \text{II} = \text{produit}$$

• L'argument discret  $i$  désigne le numero d'ordre de la fonction de Walsh considérée soit  $i = 0, 1, 2, \dots$

• L'argument discret  $g_k$  désigne le degit du code de Gray qui correspond au degit de même rang de  $i$ ;  $g_k$  est definit par la regle suivante :

$$g_k = b_j \oplus b_{j+1} \quad \begin{array}{l} j = 0, 1, 2, \dots, r-2 \\ r = \log_2 N \end{array}$$

$\oplus$  = addition modulo 2

On va le detailler dans ce qui suit :

## 2.2 LA CONVERSION DIRECT DE GRAY (C.G.D)

a. DEFINITION: soit un entier positif  $B$  ayant pour adresse binaire (en base 2)  $(b_{r-1}, b_{r-2}, \dots, b_0)$   $r$  nombre de bits dont laquelle s'écrit cet entier.

La CGD de ce nombre est la transformation des degits  $b_i$  effectués selon la loi :

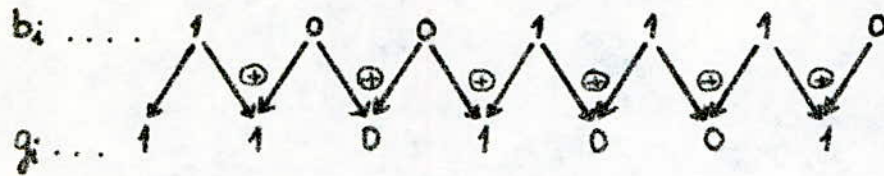
$$g_i = b_i \oplus b_{i+1} \quad \text{avec } i = 0, 1, 2, \dots, r-2$$

et  $g_{r-1} = b_{r-1}$

b. EXEMPLE:

$$\text{soit } B = 78 = \sum_i 2^i b_i \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; \\ b_i = 0 \text{ ou } 1 \end{array}$$

Son adresse binaire est transformée comme suit :



D'où  $G = 105$

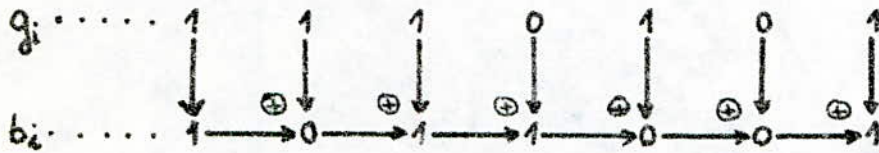
### 2.3 LA CONVERSION DE GRAY INVERSE (C.G.I)

a. DEFINITION : Cette conversion s'effectue selon La Loi :

$$b_i = q_i + b_{i+1} \quad \text{avec } i = r-2, r-3, \dots, 0 \text{ et } b_{r-1} = q_{r-1}$$

b. exemple : Soit le nombre  $G = 117 = \sum_7 z^i q_i$  ;  $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Son adresse binaire est transformée comme suit :



D'où  $B = 89$

### 2.4 EXEMPLES :

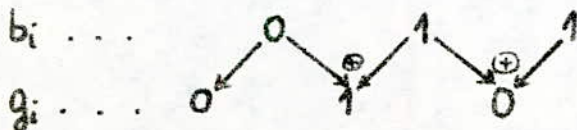
a. Soit à définir La fonction de  $Wal(3, t)$

1. Nous écrivons L'adresse binaire de cette fonction :

$$B = 3 = \sum_i 2^i b_i \quad i = 0, 1, 2$$

$$B = (b_2, b_1, b_0) = 011$$

2. Nous effectuons ensuite La C.G.D



$$G(q_2, q_1, q_0) = 010$$

3. Appliquons La relation (4)

$$\text{Wal}(i, t) = \prod_{k=1}^{r-1} \text{Rad}(k, t)^{g_k} = \text{Rad}(1, t)^{g_1} \times \text{Rad}(2, t)^{g_2} \times \dots \times \text{Rad}(r-1, t)^{g_{r-1}}$$

$$\text{Wal}(3, t) = \text{Rad}(1, t)^0 \times \text{Rad}(2, t)^1 \times \text{Rad}(3, t)^0$$

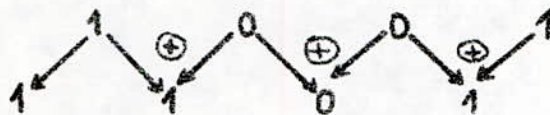
$$\text{Wal}(3, t) = \text{Rad}(2, t)$$

b. Soit  $\bar{a}$  définir  $\text{Wal}(g, t)$

$$1. B = 9 = \sum_i 2^i b_i \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

en binaire  $B = 1001$

2. CGD :



$$G = 1101$$

$$3. \text{Wal}(g, t) = \text{Rad}(1, t)^1 \times \text{Rad}(2, t)^0 \times \text{Rad}(3, t)^1 \times \text{Rad}(4, t)^1$$

$$\text{Wal}(g, t) = \text{Rad}(1, t) \times \text{Rad}(3, t) \times \text{Rad}(4, t)$$

$$\text{Rad}(1, t) = \quad + + + + + + + - - - - -$$

$$\text{Rad}(3, t) = \quad + + - - + + - - + + - - + + - -$$

$$\text{Rad}(4, t) = \quad + - + - + - + - + - + - + - + -$$

$$\text{Wal}(g, t) = \quad + - - + + - - + + + - - + + -$$

## 2.5 PROPRIETES :

Les fonctions de Walsh forment un système orthogonale complet [1]

a. Notion de Séquence :

Les "cycles" successifs des fonctions de Walsh sont pour la

plus part de durées inégales ; La notion de fréquence ne s'applique donc pas à ces fonctions ; elle est remplacée par la notion de séquence (nombre moyen de zéros des fonctions par unité de temps) [1] Celle-ci est définie pour la fonction notée  $Wal(i, t)$  par :

$$S = 0 \quad \text{si } i = 0$$

$$S = i/2 \quad \text{si } i = 2K$$

$$S = (i+1)/2 \quad \text{si } i = 2K+1$$

Conséquences :

Tandis que les méthodes de Fourier sont associées à l'analyse fréquentielle [1]. La notion de fréquence est remplacée par celle de séquence qui est le nombre moyen de zéros des fonctions par unité de temps [2]

Pour les fonctions trigonométriques  $\cos(2\pi ft)$  et  $\sin(2\pi ft)$  la fréquence normalisée  $i = fT$  et le temps normalisé  $\theta = t/T$  sont tels que  $ft = i\theta$  avec  $\theta$  continue dans  $(0, 1)$  et  $i$  prenant les valeurs de 0 à  $N-1$  (ou  $2^r-1$ ) ;  $\theta$  définit également pour les fonctions de Walsh la séquence normalisée  $i = \theta T$  et le temps normalisé  $\theta = t/T$  tel que  $\theta T = i\theta$ ,  $\theta$  et  $i$  définis comme pour les fonctions circulaires.

b. Notion de parité :

Par rapport aux points  $t = 1/2$  les fonctions de Walsh sont paires ou impaires ; nous pouvons donc les répartir en groupes :



1° Le groupe des fonctions paires nommées fonctions "Cal" notées et définies par  $\text{Cal}(i, t) = \text{Wal}(2i, t)$  ;

2° Le groupe des fonctions impaires nommées fonctions "Sal" notées et définies par  $\text{Sal}(i, t) = \text{Wal}(2i-1, t)$

Exemples :

$$\text{Wal}(0, t) = \text{Cal}(0, t) \quad \text{Wal}(1, t) = \text{Sal}(1, t)$$

$$\text{Wal}(2, t) = \text{Cal}(1, t) \quad \text{Wal}(3, t) = \text{Sal}(2, t)$$

$$\text{Wal}(4, t) = \text{Cal}(2, t) \quad \text{Wal}(5, t) = \text{Sal}(3, t)$$

$$\text{Wal}(6, t) = \text{Cal}(3, t) \quad \text{Wal}(7, t) = \text{Sal}(4, t)$$

c. Analogie avec Les Series de Fourier :

Formant un système complet Les fonctions Cal et Sal permettent de définir des développements en série analogues aux séries de Fourier sur l'intervalle  $(0, 1)$

$$x(t) = a_0 \text{Wal}(0, t) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Cal}(n, t) + b_n \text{Sal}(n, t)]$$

$$a_0 = \int_0^1 x(t) dt \quad ; \quad a_n = \int_0^1 x(t) \text{Cal}(n, t) dt \quad ;$$

$$b_n = \int_0^1 x(t) \text{Sal}(n, t) dt \quad ;$$

De tels développements sont mis à profit pour effectuer l'analyse et la synthèse de divers signaux.

d. Notion de Produit :

Les fonctions de Walsh se multiplient selon le mode

dyadique :

$$\text{Wal}(m, t) \times \text{Wal}(n, t) = \text{Wal}(m \oplus n, t)$$

EXEMPLES -  $\text{Wal}(3, t) \times \text{Wal}(2, t) = \text{Wal}(3 \oplus 2, t)$

L'adresse binaire de 3 = 11

L'adresse binaire de 2 = 10

$$3 \oplus 2 = \begin{array}{r} 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \\ \hline 0 \ 1 \end{array} \quad \text{puisque } \begin{array}{l} 1 \oplus 1 = 0 \\ 1 \oplus 0 = 1 \end{array}$$

01 en decimal est 1, alors :

$$\text{Wal}(3, t) \times \text{Wal}(2, t) = \text{Wal}(1, t)$$

$$\text{Wal}(7, t) \times \text{Wal}(3, t) = \text{Wal}(7 \oplus 3, t) = \text{Wal}(4, t).$$

$$\text{Wal}(i, t) \times \text{Wal}(i, t) = \text{Wal}(0, t). \quad \forall i.$$

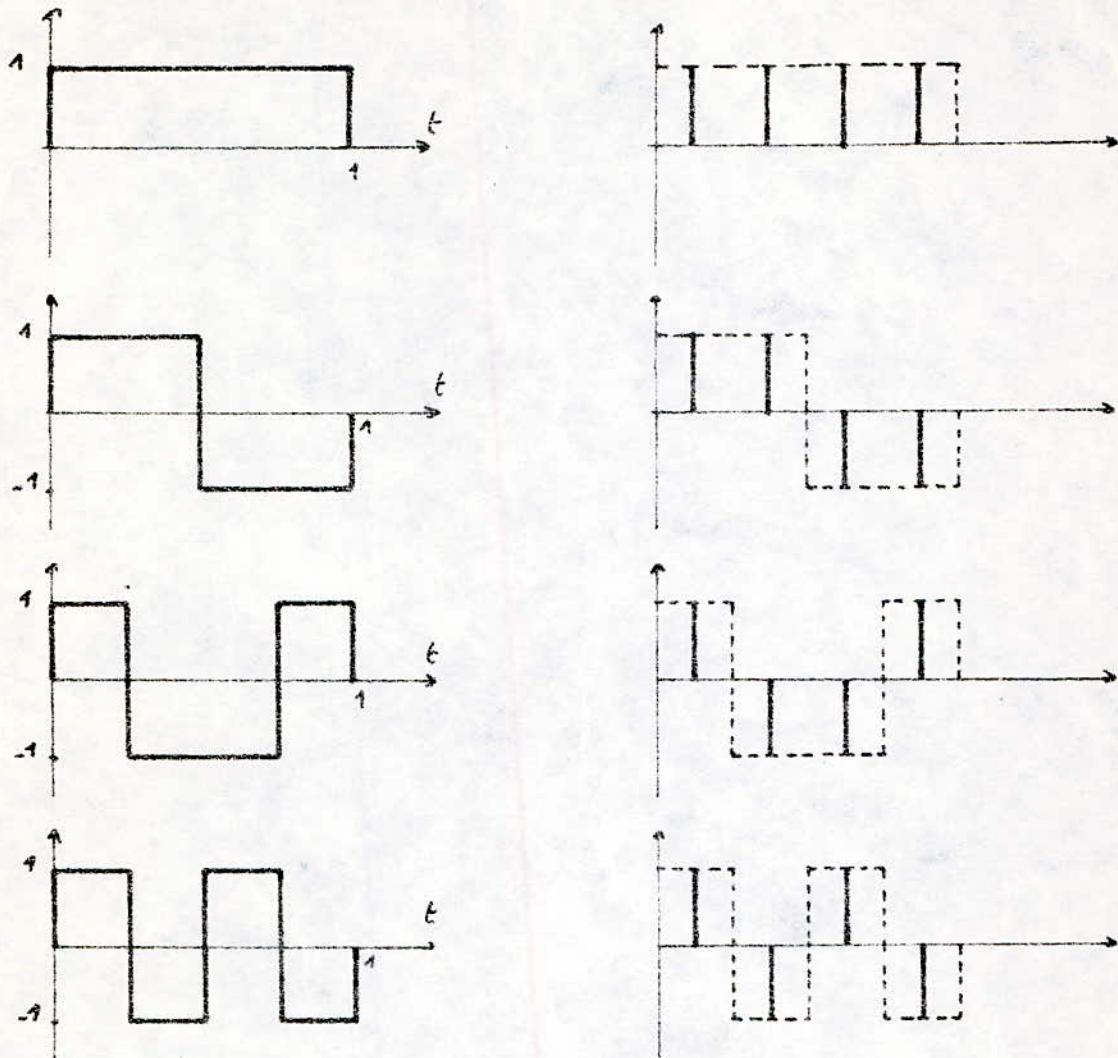
## 2.6. SUITE DE WALSH:

la description des  $N = 2^r$  premier fonction de Walsh, effectuée sur  $N$  points equidistants, conduit aux matrices de Walsh:  $(W_2), (W_4), (W_8), \dots, (W_{2^r})$ .

EXEMPLE: (voir figure. III.2)

$$(W_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(W_8) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$



Représentation échantillonnée

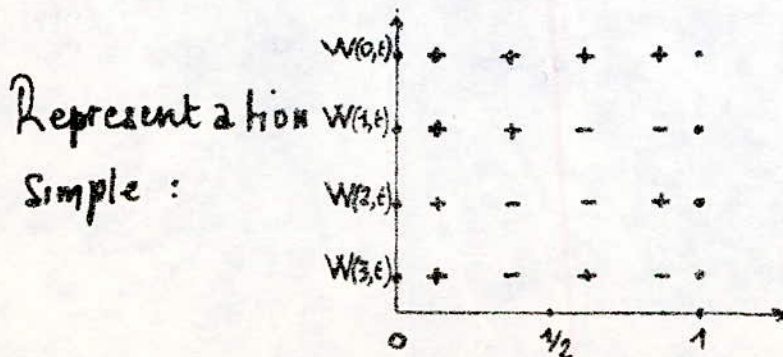


Figure. 11.1 : les quatre premières fonctions de WALSH

Les matrices de Walsh possèdent de nombreuses propriétés intéressantes. Symétrie, Orthogonalité, inversibilité, séparabilité...

### a. propriété de Symétrie.

D'une part la matrice de Walsh ( $W_N$ ) est égale à son transposé

$$(W_N)^t = (W_N) \quad N = 2^r, \quad r: \text{entier}$$

D'autre part la somme des termes de chaque ligne est nulle sauf la première ligne qui est égale à  $N$ , même constatation pour les colonnes, et cela permet de vérifier rapidement l'exactitude de la matrice de Walsh, on dit qu'elles sont quasi-flottantes.

### b. Orthogonalité.

Elle se traduit par la relation :

$$(W_N)^t \times (W_N) = 2^r (I_N) \quad N = 2^r$$

Exemple :

$$\begin{aligned} (W_4)^t \times (W_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

### c. Inversion:

Les relations :  $(W_N)^{-1} (W_N) = I_N$  et  $(W_N)^t (W_N) = 2^r (I_N)$

montre que :  $(W_N)^{-1} = \frac{1}{N} (W/N)$

Exemple :  $(W_4)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

d. Separabilité :

Les matrices de Walsh peuvent être mises sous la forme de produits de matrices simple, dont certaines peuvent être diagonales.

Exemple :

$$(W_4) = \text{diag} \left[ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette propriété est utile pour interpréter les programmes de la TW rapide (TWR)

### 3. FONCTION DE HADAMARD :

Dans les grandes familles de fonctions de Walsh les fonctions de Hadamard tiennent une place prépondérante, cette situation provient de leur définition ; bien qu'un peu plus compliquées, elle confère des propriétés beaucoup plus simples

#### 3.1 DÉFINITION .

La remise en ordre des fonctions de Walsh  $Wal(i, t)$  selon la méthode de Hadamard s'obtient en effectuant sur l'adresse binaire de ces fonctions

1. une C. G. D

2. Un renversement digital (R) (bit reversing)

Nous utiliserons le signe «  $\Re$  » pour représenter l'opération

(R) ; Ex :  $((0101)) = 1010$

$$\text{had}(k, t) = \text{Wal}[\Re(g(i)); t]$$

Inversement les fonctions de Walsh se déduisent de celle de Hadamard en effectuant sur l'adresse binaire :

1. Renversement digital

2. C. G. I

Exemple :  $W(31, t)$

$$31 \xrightarrow{\text{A. binaire}} 11111 \xrightarrow{\text{CGI}} 10000 \xrightarrow{\Re} 00001 \xrightarrow{\text{A. décimal}} 1$$

$$\text{Wal}(31, t) = \text{had}(1, t)$$

3.2 RELATIONS MUTUELLES DES FONCTIONS de W et de H

En appliquons les 2 règles précédentes, on obtient les résultats suivants.

$$1. 0 \leq i \leq 3 \quad \text{had}(0, t) = \text{Wal}(0, t)$$

$$\text{had}(1, t) = \text{Wal}(3, t)$$

$$\text{had}(2, t) = \text{Wal}(1, t)$$

$$\text{had}(3, t) = \text{Wal}(2, t)$$

$$2. 0 \leq i \leq 7 \quad \text{had}(0, t) = \text{Wal}(0, t) \quad \text{had}(4, t) = \text{Wal}(1, t)$$

$$\text{had}(1, t) = \text{Wal}(7, t) \quad \text{had}(5, t) = \text{Wal}(6, t)$$

$$\text{had}(2, t) = \text{Wal}(3, t) \quad \text{had}(6, t) = \text{Wal}(2, t)$$

$$\text{had}(3, t) = \text{Wal}(4, t) \quad \text{had}(7, t) = \text{Wal}(5, t)$$

3.  $0 \leq i \leq 15$

$$\text{had}(0,t) = \text{Wal}(0,t) \quad \text{had}(5,t) = \text{Wal}(12,t) \quad \text{had}(10,t) = \text{Wal}(6,t)$$

$$\text{had}(1,t) = \text{Wal}(15,t) \quad \text{had}(6,t) = \text{Wal}(4,t) \quad \text{had}(11,t) = \text{Wal}(9,t)$$

$$\text{had}(2,t) = \text{Wal}(7,t) \quad \text{had}(7,t) = \text{Wal}(11,t) \quad \text{had}(12,t) = \text{Wal}(2,t)$$

$$\text{had}(3,t) = \text{Wal}(8,t) \quad \text{had}(8,t) = \text{Wal}(1,t) \quad \text{had}(13,t) = \text{Wal}(13,t)$$

$$\text{had}(4,t) = \text{Wal}(3,t) \quad \text{had}(9,t) = \text{Wal}(14,t) \quad \text{had}(14,t) = \text{Wal}(5,t)$$

$$\text{had}(15,t) = \text{Wal}(10,t)$$

### 3.3 PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS DE HADAMARD

La discrétisation des fonctions de Hadamard, effectuées de la même manière que celle des fonctions de Walsh ; fournit Les matrices de Hadamard qui sont elles aussi, symétriques, quasi-flottantes, orthogonales, inversibles et séparables, mais elles possèdent en outre deux propriétés remarquables :

- d'une part possède une propriété de récurrence très utile
- d'autre part possède une propriété de séparabilité très simple

a. Propriété de récurrence.

Soit  $H_{2^r}$  La matrice de Hadamard provenant de l'échantillonnage des  $N = 2^r$  premières fonctions de Hadamard.

Cette matrice satisfait la loi :

$$H_{(2^r)} = \begin{bmatrix} H_{(2^{r-1})} & H_{(2^{r-1})} \\ H_{(2^{r-1})} & -H_{(2^{r-1})} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} N = 2^r \\ r = \log_2 N \\ r \text{ entier} \end{array}$$

On trouve aussi  $H_0 = 1$

$$H_2 = \begin{bmatrix} H_0 & H_0 \\ H_0 & -H_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{bmatrix}$$

b. propriété de Separabilité ,

Les matrices de Hadamard sont des matrices simples dont les éléments sont la matrice  $H_2$  et les diverses matrices identités  $I_2, I_4, I_8, \dots$

On obtient en outre une formulation simple en utilisant le signe  $\otimes$  du produit tensoriel (ou de Kronecker) de 2 matrices :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Exemple du produit  $\otimes$  :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$



Exemples de séparabilité ( $M_{(2^r)}$ )

$$H_2 = \text{diag}[H_1, H_1] [H_1 \otimes I_2]$$

$$H_4 = \text{diag}[H_1, H_1, H_1, H_1] \cdot \text{diag}[H_1 \otimes I_2] [H_1 \otimes I_2]$$

$$H_{2^r} = \underbrace{\text{diag}[H_1 \dots H_1]}_{2^{r-1} \text{ termes}} \cdot \underbrace{\text{diag}[H_1 \otimes I_2, \dots, H_1 \otimes I_2]}_{2^{r-2} \text{ termes}} \dots \underbrace{[H_1 \otimes I_{2^{r-1}}]}_{1 \text{ terme}}$$

# IV) DEFINITION DIRECTE DES MATRICES DE WALSH

## 1. RELATION FONDAMENTALE

Pour écrire la matrice de WALSH ( $W_{2^r}$ ), nous avons une relation qui nous donne les éléments de cette matrice. Soit les éléments  $W_{jk}$  de ( $W_{2^r}$ )

$$j, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W_{jk} = (-1)^{[S(j), k]} \quad j, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$[S(j), k]$  est le produit scalaire qui est donné par:

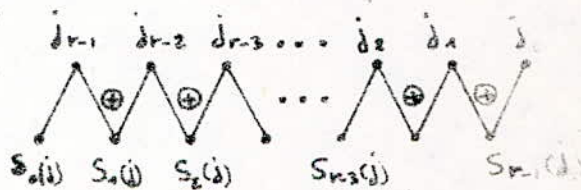
$$[S(j), k] = \sum_i S_i(j) k_i \quad i = 0, 1, \dots, r-1 \quad N = 2^r$$

en outre  $S_0(j) = j_{r-1}$

$$S_1(j) = j_{r-1} \oplus j_{r-2}$$

$$S_2(j) = j_{r-2} \oplus j_{r-3}$$

$$S_{r-1}(j) = j_1 + j_0$$



## 2. Exemple :

soit à trouver la matrice ( $W_4$ )

$$N = 2^r \quad N = 4, \quad r = 2$$

$$W_{jk} = (-1)^{[S(j), k]}$$

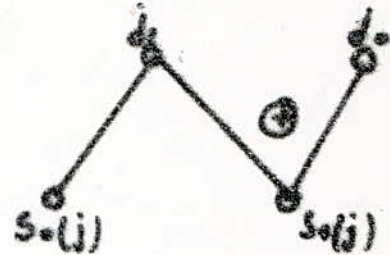
$$j, k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$= 0, 1, 2, 3.$$

$$W_{jk} = \begin{bmatrix} W_{0,0} & W_{0,1} & W_{0,2} & W_{0,3} \\ W_{1,0} & W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} \\ W_{2,0} & W_{2,1} & W_{2,2} & W_{2,3} \\ W_{3,0} & W_{3,1} & W_{3,2} & W_{3,3} \end{bmatrix}$$

$S(j)?$

$j$	$(j_1, j_0)$	$(S_1(j), S_0(j))$	$S(j)$
0	(0, 0)	(0, 0)	0
1	(0, 1)	(1, 0)	2
2	(1, 0)	(1, 1)	3
3	(1, 1)	(0, 1)	1



$$S(j) = 0, 2, 3, 1.$$

$S(j) \backslash k$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
$S(0)$ (0, 0)	0	0	0	0
$S(1)$ (1, 0)	0	0	1	1
$S(2)$ (1, 1)	0	1	1	2
$S(3)$ (0, 1)	0	1	0	1

Ce tableau donne le  
produit scalaire  
 $(S(j), k)$   
pour  $N=4$

$$W_4 = \begin{bmatrix} (-1)^0 & (-1)^0 & (-1)^0 & (-1)^0 \\ (-1)^0 & (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^1 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^1 & (-1)^2 \\ (-1)^0 & (-1)^1 & (-1)^0 & (-1)^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

## V) TRANSFORMEES BINAIRES DISCRETES

Les fonctions de Walsh et Hadamard forment des systèmes de fonctions orthonormées\* complètes et dénombrables [1] sont a priori également valables pour constituer des noyaux de TB, mais en raison de leur propriété remarquablement simples, ce sont les fonctions de Hadamard qui s'y prêtent de mieux. Aussi allons nous exposer en premier lieu les principes de la TH, nous montrerons ensuite comment elle permet d'obtenir celle de Walsh.

### 1- Transformée de HADAMARD Discrete (THD):

#### 1.1 Principes:

● *Definition*: soit une suite périodique fini  $\{x(k)\}$  dans chacune des périodes. Contient  $N$  échantillons

$$x(0), x(1), \dots, x(N-1)$$

La TH est une autre suite de période  $N$  contenant également  $N$  échantillons  $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$  définie par

$$X(n) = \sum_k x(k) (-1)^{(n,k)} \quad N = 2^r, n, k = 0, 1, \dots, N-1$$

\* Def: soit l'ensemble de fonctions  $\{\Phi_i\}$  défini sur  $a \leq x \leq b$  les fonctions sont orthogonales si

$$\int_a^b \Phi_i(x) \times \Phi_j(x) dx = k_i \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j, \quad \delta_{ij} = 1 \text{ pour } j = i$$

Ces fonctions sont orthonormales si  $k_i = 1$ .

Exemple :

Soit la suite périodique  $\{x, k\} = \dots \{1, 2, 4, 3\} \dots$

Appliquons la relation (1)

Les produits scalaires  $(n, k) = \sum_i n_i k_i$

$$X(n) = \sum_k x(k) (-1)^{(n, k)}$$

n \ k	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	1	2

$$X(1) = x(0)(-1)^{(0,0)} + x(1)(-1)^{(0,1)} + x(2)(-1)^{(0,2)} + x(3)(-1)^{(0,3)}$$

$$X(2) = x(0)(-1)^{(1,0)} + x(1)(-1)^{(1,1)} + x(2)(-1)^{(1,2)} + x(3)(-1)^{(1,3)}$$

$$X(3) = x(0)(-1)^{(2,0)} + x(1)(-1)^{(2,1)} + x(2)(-1)^{(2,2)} + x(3)(-1)^{(2,3)}$$

$$X(3) = x(0)(-1)^{(3,0)} + x(1)(-1)^{(3,1)} + x(2)(-1)^{(3,2)} + x(3)(-1)^{(3,3)}$$

remplaçons les  $x(k)$  par leur valeur

$$X(0) = 1(-1)^0 + 2(-1)^0 + 4(-1)^0 + 3(-1)^0 = 10$$

$$X(1) = 1(-1)^0 + 2(-1)^1 + 4(-1)^0 + 3(-1)^1 = 0$$

$$X(2) = 1(-1)^0 + 2(-1)^0 + 4(-1)^1 + 3(-1)^1 = -4$$

$$X(3) = 1(-1)^0 + 2(-1)^1 + 4(-1)^1 + 3(-1)^2 = -2$$

avec la notation matricielle la relation (1) s'écrit

$$(2) \quad \vec{X}(n) = [H_2^r] \vec{x}(k) \quad n, k = 0, N-1 \quad N=2^r \text{ notes}$$

soit

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} \vec{x}(k)$$

$\vec{X}(n) \quad H_2^r H_4 \quad \vec{x}(k)$

Application pour la suite  $\{x(k)\} = \dots \{1, 2, 4, 3\}$

$$\vec{X}(n) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

### 1.3 LA TRANSFORMATION INVERSE :

a) Def: de la relation (2), nous deduisons  $x(k) = H_{2^r}^{-1} \vec{X}(n)$

or  $H_{2^r}^{-1} = \frac{1}{2^r} (H_{2^r})$ , donc :

$$(3) \quad x(k) = \frac{1}{N} (H_N) \vec{X}(n)$$

Cette rela est equivalente à

$$(4) \quad x(k) = \frac{1}{N} \sum x(n) (-1)^{(k,n)} \quad n, k = \overline{0, N-1}$$

b) Exemple :

Soit  $\{X(n) = \dots \{10, 0, -4, -2\} \dots$

$$\vec{x}(k) = \frac{1}{N} (H_N) \vec{X}(n) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

### 1.4 PROPRIÉTÉS :

les TH sont de quantités réelles à l'inverse des TF qui sont généralement complexes, leur utilisation sera donc rapide.

## 2 TRANSFORMÉES DE WALSH DISCRÈTE (TWD)

### 2.1 Principe:

la transformée directe

a) Def: la Tw d'une suite périodique  $\{x(k)\}$  est donnée par la relation

$$X(n) = \sum_k x(k) (-1)^{S(n), k} \quad n, k = 0, N-1, N=2^r$$

b) Interprétation: analogue à celle de TH elle se traduit par

$$\vec{X}(n) = [W_{2^r}] \vec{x}(k)$$

exemple:  $\{x(k)\} = \dots \{1, 2, 4, 3\}$  sa Tw est.

$$\vec{X}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2 Passage de Tw à TH

Principe: Nous les représenterons encore sur

l'exemple des TWD en 4 pts, définies par

$\vec{X}(n) = [w_4] \vec{x}(k)$  nous ne changeons pas  $\vec{x}(k)$  si nous effectuons.

1°: sur les lignes de  $w_4$ , une CGO suivie d'un R

2°: les mêmes opérations sur la suite  $\vec{x}(k)$

la matrice  $w_4$  sera alors devenue une matrice  $H_4$

et le signal  $[x(0), x(1), x(2), x(3)]^t$  sera  $[x(0), x(3), x(2), x(1)]^t$   
d'où l'identité

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(3) \\ x(2) \\ x(1) \end{bmatrix}$$

$[W_4]$                        $\vec{x}(k)$                        $[H_4]$                        $\vec{x}(g(k))$

Exemple :

Soit  $\{x(k)\} = \dots \{1, 2, 4, 3\} \dots$  SATW;

calculée avec la matrice  $H_4$  est :

$$X(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Règle : le calcul de la TW peut être effectuée  
comme celui des TH, à condition de modifier  
le signal par une CGD suivie d'un R  
(renversement digital)



## ⚡) TRANSFORMÉES BINAIRES RAPIDES

Plusieurs auteurs, en particulier Shonks (1969), ont montré que l'on pourrait appliquer l'algorithme de Cooley-Tukey pour le calcul de la T.W.

En effet, pour générer les fonctions de Walsh, nous avons mis en évidence des matrices symétriques et orthogonales qui se décomposent de la même façon que les matrices de Fourier [2]

Comme la transformation de Fourier, les T.B peuvent être effectuées d'une manière systématique et rapide par une organisation rationnelle des calculs; nous en montrerons le principe sur la T.H, en conservant le modèle de Cooley. Convenablement modifiée, la méthode pourra ensuite être étendue à la T.W.

### 1. TRANSFORMATION DE HADAMARD RAPIDE (T.H.R.):

Comme nous l'avons vu les fonctions de Hadamard, en raison de leurs propriétés remarquablement simple (propriété de récurrence, de séparabilité très simple) ils se prêtent mieux, et nous savons que la transformation de Walsh peut être considérée comme une T.H, à condition d'effectuer sur le signal deux (2) modifications préalables C&D et R.

## 1.1. PRINCIPES:

Nous les exposerons sur l'expte des transformées en quatre points. Elles sont définies par la relation:

$$X(n) = \sum x(k) (-1)^{(n,k)} \quad n, k = 0, 1, 2, 3; \quad (n, k) = \sum_{i=0}^2 n_i k_i$$

\* L'algorithme de Cooley consiste à définir des états des signaux intermédiaires entre sa valeur initiale  $x(k)$  et sa transformée  $X(n)$ .

\* Il est commode d'adopter la notation binaire pour  $n$

et  $k$ : 
$$\left. \begin{array}{l} n = (n_1, n_0) \\ k = (k_1, k_0) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{en décimale} \left\{ \begin{array}{l} n = 2n_1 + n_0 \\ k = 2k_1 + k_0 \end{array} \right.$$

$n_0, n_1, k_0, k_1$  prennent les valeurs "0" ou "1".

## 1.2. DEFINITION DE L'ALGORITHME DE COOLEY:

a/ NOTATION:

- du signal:  $x(k) = x_0(k_1, k_0); k_1, k_0 = 0, 1$

- de sa transformée:  $X(n) = X(n_1, n_0); n_1, n_0 = 0, 1$

b/ EXPRESSION:

- du produit scalaire:  $(n, k) = n_0 k_0 + n_1 k_1$

- du noyau de la T.H:  $(-1)^{(n,k)} = (-1)^{n_0 k_0} \cdot (-1)^{n_1 k_1}$

- de la transformée:

$$X(n_1, n_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} x_0(k_1, k_0) (-1)^{n_0 k_0} \cdot (-1)^{n_1 k_1}$$

c/ DEFINITION:

- du 1<sup>er</sup> état intermédiaire:  $x_1(n_1, k_0) = \sum_{k_1} x_0(k_1, k_0) (-1)^{n_1 k_1}; k_0, 1$

- de 3<sup>ème</sup> état intermédiaire:  $x_2(n_1, n_0) = \sum_{k_0} x_0(n_1, k_0) (-1)^{nk_0}$ ;  $k_0 = 0, 1$
- de la transformée:  $X(n_1, n_0) = x_2(n_1, n_0)$ .

Ces trois relations définissent l'algorithme de Cooley de la T.H.R pour les programmes en 4 points, les 2 signaux:  $x_n$  et  $x_0$  assurant la transition entre le signal initial  $\vec{x}_0(n)$  et sa transformée  $\vec{X}(n)$ .

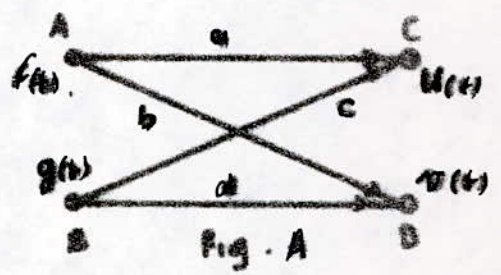
1.3- REPRESENTATION GRAPHIQUE DE L'ALGORITHME:

La programmation des machines utilisées pour le calcul des T.H.R met à profit les propriétés des graphes de flux; l'algorithme de Cooley peut aussi être représenté d'une manière plus facilement exploitable que les expressions mathématiques qui la définissent.

1.4- TREILLIS:

Un treillis simple est défini par:

- 2 nœuds-sources: A et B
- 2 nœuds-puits: C et D
- 2 branches parallèles AC et BD
- 2 branches croisées AD et BC



Si le treillis fonctionne en régime linéaire, ces diverses grandeurs sont liées par:  $U(t) = a f(t) + c g(t)$

$$v(t) = b f(t) + d g(t)$$

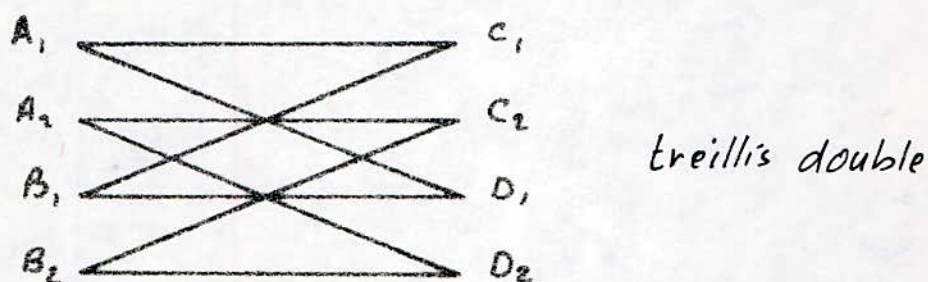
a, b, c et d sont les gains respectives des 4 branches du treillis.

$f(t)$ ,  $g(t)$ , les signaux fournis respectivement par ses sources  $u(t)$ ,  $v(t)$ . les signaux reçus respectivement par ses puits

Chacune des sources alimenté les deux puits.

Chacun des puits est sollicité par les deux sources.

Un treillis double est un association de deux treillis simple en parallèle donc un treillis d'ordre  $m$  est constitué par une association de  $m$  treillis en parallèle



La structure des graphe de Cooley est constitué par des treillis de multiplicité variable à condition que  $N=2^r$  ( $r$ : entier); leur caractéristique nous les serons montrant les exemples

### 1.5) Etats intermédiaire du signal :-

a) Passage du signal initial au premier état intermédiaire.

$$\vec{x}_0 \longrightarrow \vec{x}_1$$

Cette transition est explicite dans le tableau I et représenté par la figure (V.1)

$n_1$	$n_0$	$X_1(n_1, n_0) = X_0(n_1, n_0)(-1)^{n_1 \cdot 0} + X_0(n_1, n_0)(-1)^{n_1 \cdot 1}$
0	0	$X_1(0, 0) = X_0(0, 0) + X_0(1, 0)$
0	1	$X_1(0, 1) = X_0(0, 1) + X_0(1, 1)$
1	0	$X_1(1, 0) = X_0(0, 0) - X_0(1, 0)$
1	1	$X_1(1, 1) = X_0(0, 1) - X_0(1, 1)$

Tableau I

Nous observons que le graphe de la fig (V.1) est constitué par un treillis binaires, de multiplicité 2 et qu'avec la notation de la fig. A, ses branches a, b, c ont pour gain l'unité, tandis que les branches d ont pour gain (-1)

b) Passage du 1<sup>er</sup> état intermédiaire au deuxième état intermédiaire :

Cette seconde transition est explicité dans le tableau II est représenté par la fig (V.2)

$n_1$	$n_0$	$X_2(n_1, n_0) = X_1(n_1, 0)(-1)^{n_1 \cdot 0} + X_1(n_1, 1)(-1)^{n_1 \cdot 1}$
0	0	$X_2(0, 0) = X_1(0, 0) + X_1(0, 1)$
0	1	$X_2(0, 1) = X_1(0, 0) - X_1(0, 1)$
1	0	$X_2(1, 0) = X_1(1, 0) + X_1(1, 1)$
1	1	$X_2(1, 1) = X_1(1, 0) - X_1(1, 1)$

Tableau II

Nous constatons cette fois que le graphe de Cooley est constitué par 2 treillis simple, dont les branches ont le même gains que celle du treillis double précédent

c) Passage du 2<sup>e</sup> état interméd à la transformée de Hadamard

$$\vec{X}_2 \longrightarrow \vec{X}(n)$$

Puisque  $x_2(n, n_0) = X(n, n_0)$ , le second état intermédiaire du signal est identique à sa TH: Les échantillons de celle ci sont donc ordonnés automatiquement, ce qui n'est pas le cas pour la TF donc on a pas besoin de bit-reversing, cet résultat est montré en (fig-VI.3)

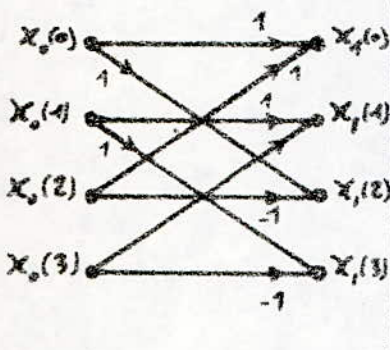


fig VI.1

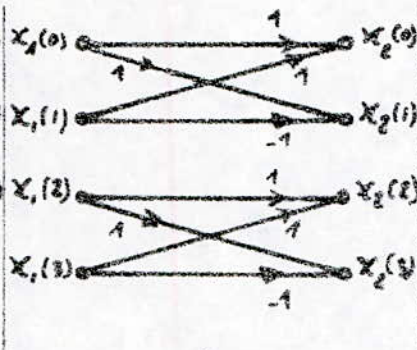


fig VI.2

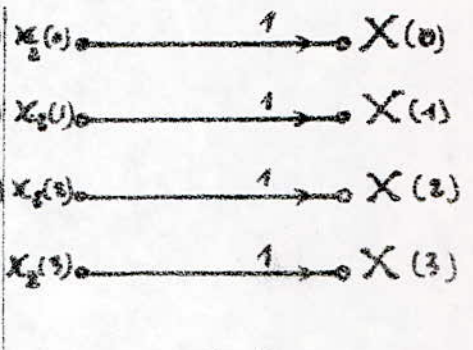
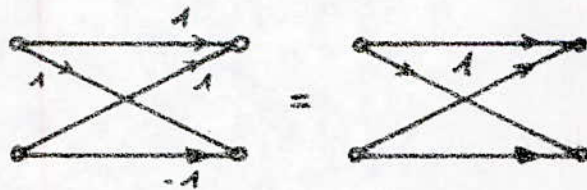
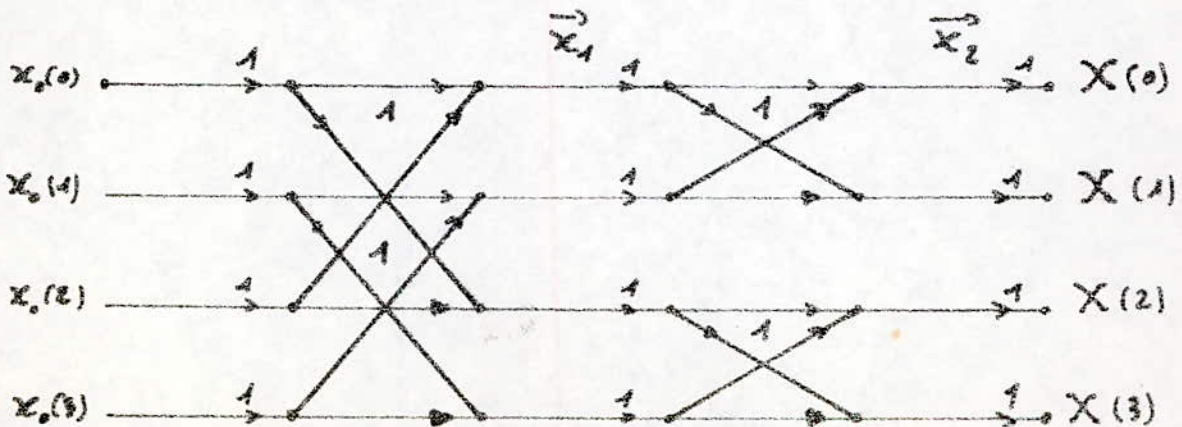


fig VI.3

\* Codage des treillis:

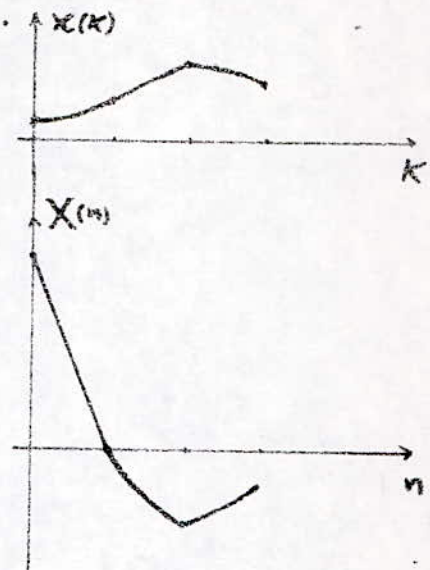


D) Graphe complet:



1.6.) Exemple: soit la suite  $\{x(k) = \dots \{1, 2, 4, 3\} \dots$   
 nous obtenons les resultats suivantes.

$k, n$	$\vec{x}(k)$	$\vec{x}_1$	$\vec{x}_2$	$\vec{x}^{(n)}$
0	1	5	10	10
1	2	5	0	0
2	4	-3	-4	-4
3	3	-1	-2	-2



1.7) Interpretation de l'algorithme:

Cette interprétation s'obtient en procédant méthodiquement à la représentation matricielle des transitions

$$\vec{x}_0 \longrightarrow \vec{x}_1, \quad \vec{x}_1 \longrightarrow \vec{x}_2, \quad \vec{x}_2 \longrightarrow \vec{x}$$

$$x_1(0) = 1x_0(0) + 0x_0(1) + 1x_0(2) + 0x_0(3)$$

$$x_1(1) = 0x_0(0) + 1x_0(1) + 0x_0(2) + 1x_0(3)$$

$$x_1(2) = 1x_0(0) + 0x_0(1) - 1x_0(2) + 0x_0(3)$$

$$x_1(3) = 0x_0(0) + 1x_0(1) + 0x_0(2) - 1x_0(3)$$

soit

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \vec{x}_0$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{bmatrix} \vec{x}_0 = [H_2 \otimes I_2]$$

b) Le tableau II fournit

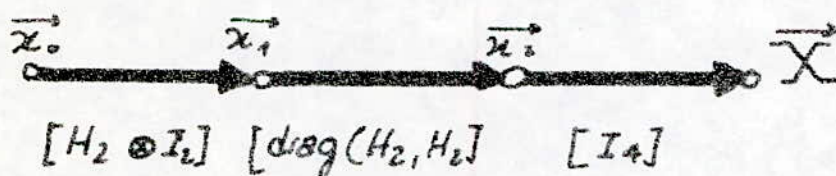
$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_1 = \{ \text{diag.} [H_2, H_2] \} \vec{x}_1$$

c) Quand à l'identité  $\vec{x}_2 = \vec{X}_{(n)}$  elle se détaille comme suit :

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_2 = [I_4] \vec{x}_2$$

d) Conclusion :

La programmation de toutes les transformées du Hadamard en quatre points peut être symbolisée par le graphe matriciel suivant



## 2) PROGRAMMATION DES TRANSFORMÉES de HADAMARD en 8 POINTS :

2.1 Définition de l'algorithme de Cooley :

Procédant comme ci-dessus, nous définirons trois états intermédiaires du signal :  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$

$$x_1(n_2, k_1, k_0) = \sum_{k_2} x_0(k_2, k_1, k_0) (-1)^{n_2 k_2}$$



$$x_2(n_2, n_1, k_0) = \sum_{k_1} x_1(n_2, k_1, k_0) (-1)^{n_1 k_1}$$

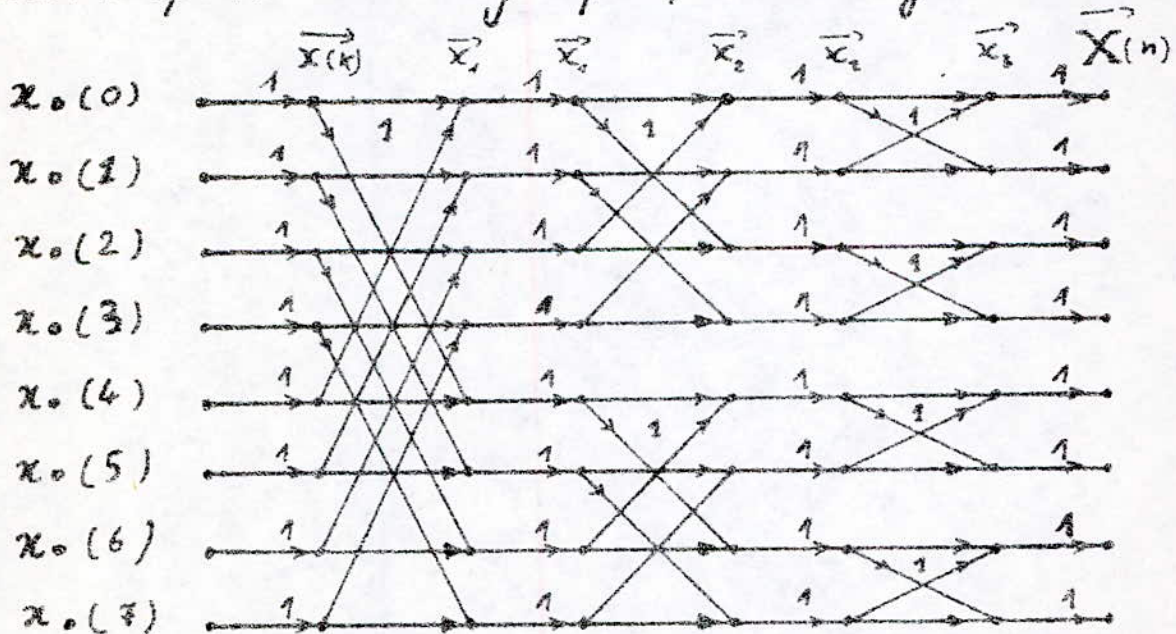
$$x_3(n_2, n_1, n_0) = \sum_{k_0} x_2(n_2, n_1, k_0) (-1)^{n_0 k_0}$$

D'où la transformée

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_2, n_1, n_0)$$

Ces quatre relations définissent l'algorithme de Cooley de la TMR, pour les programmer en 8 points les 3 états intermédiaires  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  assurant la transition entre le signal initial  $\vec{x}_0(k)$  et sa transformée  $\vec{X}(n)$

## 2.2. Représentation graphique de l'algorithme:



Cette représentation nous fournit un graphe constitué par 3 colonnes de treillis

la 1<sup>ère</sup> Contient 1 treillis de multiplicité 4, soit 8/2

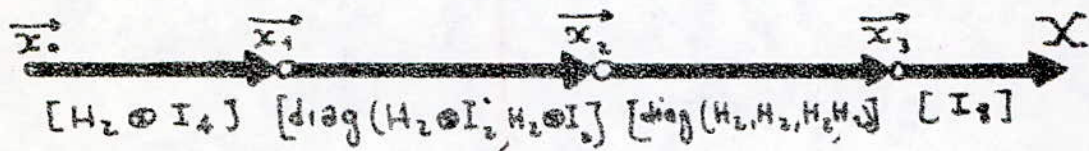
la 2<sup>ème</sup> contient 2 treillis " " 2, soit 8/4

la 3<sup>ème</sup> = 3 = " " 1, soit 8/8

les gains des branches  $a=b=c=+1$ ,  $d=-1$

### 2.3. Interpretation de l'algorithme:

Operant pour  $N=8$  de la même manière que pour  $N=4$ , nous observons que la programmation de toutes les TH en 8 pts, peut être symbolisée par le graphe matriciel suivant:



### 3 PROGRAMMATION des TH en $N=2^r$ points

La programmation de la THR, par la méthode de Cooley met en œuvre  $r$  transitions entre le signal  $\vec{x}(k)$  et sa transformée  $\vec{X}(n)$ , les états intermédiaires se déduisant par récurrence les uns des autres

$$X_1(n_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_1, k_0) = \sum_{k_{r-1}} x_0(k_{r-1}, \dots, k_1, k_0) (-1)^{n_{r-1} k_{r-2}}$$

$$X_2(n_{r-1}, n_{r-2}, k_{r-3}, \dots, k_0) = \sum_{k_{r-2}} x_1(n_{r-1}, k_{r-2}, \dots, k_0) (-1)^{n_{r-2} k_{r-3}}$$

$$\dots$$

$$X_r(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_1, n_0) = \sum_{k_0} x_{r-1}(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, k_0) (-1)^{n_0 k_0}$$

le dernier état intermédiaire du signal,  $\vec{x}_r$  fournit directement la transf.  $X$  qui est ainsi obtenue en place:

$$X(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_1, n_0) = X_r(n_{r-1}, \dots, n_1, n_0)$$

B: Les graphes de cooly représentant les programmes en  $N = 2^r$  points sont constitués par  $r$  colonnes de treillis

la 1<sup>ère</sup> colonne contient 1 treillis  $T_1$  de multiplicité  $N/2$   
 la 2<sup>ème</sup> " " " 2 "  $T_2$  "  $N/4$   
 la 3<sup>ème</sup> " " " 4 "  $T_3$  "  $N/8$   
 .....  
 la  $p$ <sup>ème</sup> " " "  $2^{p-1}$  "  $T_p$  "  $N/2^p$   
 .....  
 la  $r$ <sup>ème</sup> " " "  $2^{r-1}$  "  $T_r$  "  $N/2^r$

la structure complète de ces graphes peut donc être représentée par la formulation générale

$$G = \sum_{p=1}^r 2^{(p-1)} T_p^{2^{(r-p)}}$$

$p$  = rang de la colonne de treillis  $T_p$

$2^{p-1}$  = nombre de treillis

$2^{r-p}$  = Multiplicité du treillis  $T_p$

C: Toutes les TH en  $N = 2^r$  points peuvent être symbolisées par le graphe unique ci-dessous:



$$\textcircled{1} : \{ H_2 \otimes I_{N/2} \};$$

$$\textcircled{2} : \{ \text{diag}[H_2 \otimes I_{N/4}, H_2 \otimes I_{N/4}] \}$$

$$\textcircled{3} : \{ \text{diag}[H_2 \otimes I_{N/8}, H_2 \otimes I_{N/8}, H_2 \otimes I_{N/8}, H_2 \otimes I_{N/8}] \}$$

$$\textcircled{4} : \{ \text{diag}[H_2, H_2, \dots, H_2] \}$$

$$\textcircled{5} : [I_N : N = 2^r]$$

Observation : le nombre de matrices est égale au nombre de treillis.

## VII) TRANSFORMATION DE WALSH RAPIDE (T.W.R)

### 1. Principe:

Nous savons que la TW peut être considérée comme transformée de Hadamard, à condition d'effectuer sur le signal. Deux conditions préalables

1: Une conversion de Gray directe

2: Un renversement digital

Il en est donc de même pour TWR. Mais la conversion Gray, n'est pas pratique, pour contourner cette difficulté, il suffit de modifier la TWR sur 2 pts:

1: Effectue sur le signal initial  $x_0(k)$  un renversement digital (R) (bit reversing)

2: Effectue sur les treillis de rang pair, dans toutes les colonnes qui en contiennent la permutation des c et d.

Cette permutation peut toute fois créer des confusions, nous les éviterons, en modifiant les entrées de treillis de rang pair comme indique ci-dessus:



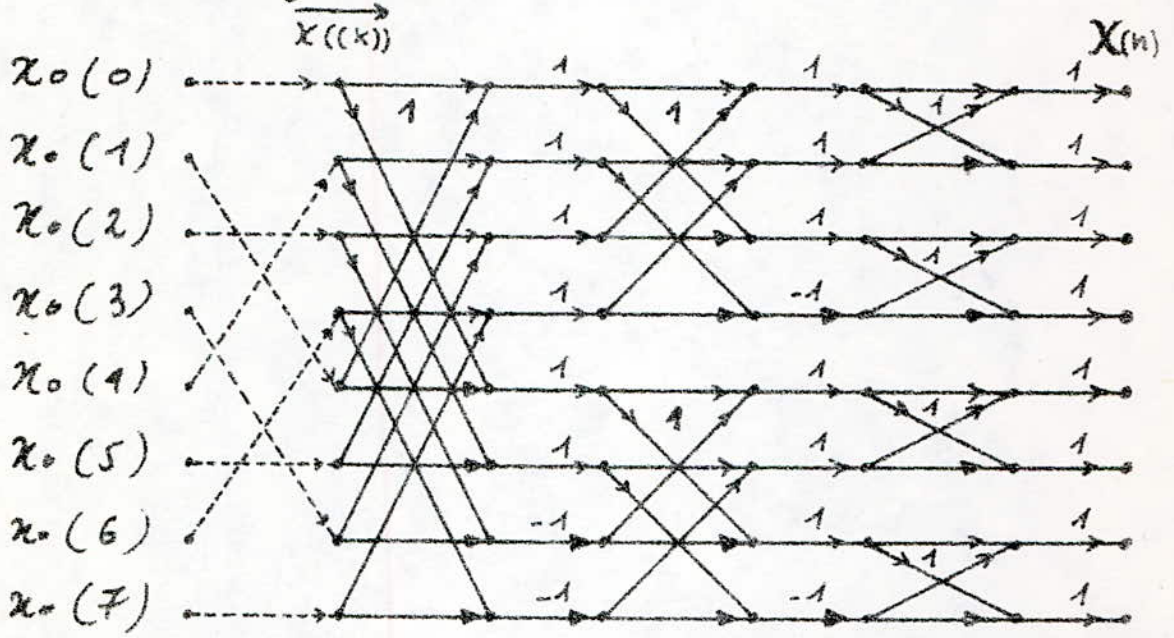
les treillis de la méthode de Hadamard sont préservés

la programmation est donc rendus plus facile

e) Application aux TWR en 8 pts

Soit la suite  $\{x(k)\} = \dots \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \dots$

a) Représentation graphique :



R = renversement digital  
ou (bit reversing)

Cette méthode fournit les résultats suivants

$x_0(k)$	$x_0((k))$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$X$
1	1	3	10	36	36
2	5	11	26	-16	-16
3	3	7	-4	0	0
4	7	15	-4	-8	-8
5	2	-1	0	0	0
6	6	-1	0	0	0
7	4	-1	-2	0	0
8	8	-1	-2	-4	-4

Il est facile de vérifier ces résultats en utilisant la relation  $\vec{X}(n) = [W_8] x(k)$   $k, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ .

# VIII COMPARAISONS ENTRE LA PROCEDURE DE WALSH ET DE FOURIER

## 1. Conversion entre les transformées de Fourier et de Walsh

Les transformées et leur inverses sont données par:

$$(1) X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{Wal}(n, i) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(2) x_i = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \text{Wal}(n, i) \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(3) X_F = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp(-j2\pi i F/N) \quad F = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(4) x_i = \sum_{F=0}^{N-1} X_F \exp(j2\pi i F/N) \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

A partir des équations (2) et (3) on peut lier l'expression des échantillons de la série temporelle  $x_i$  à partir des échantillons de la transformée de Fourier  $X_F$  ou de ceux de la transformée de Walsh.

$$x_i = \sum_{F=0}^{N-1} X_F \exp(j2\pi i F/N) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \text{Wal}(n, i) \quad i, n, F = 0, 1, \dots, N-1.$$

donc la conversion de la TF à la TW est:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{Wal}(n, i) = \frac{1}{N} \sum_{F=0}^{N-1} X_F \left( \sum_{i=0}^{N-1} \text{Wal}(n, i) \exp(j2\pi i F/N) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{F=0}^{N-1} X_F \left( \sum_{i=0}^{N-1} \text{Wal}(n, i) \exp(j2\pi i F/N) \right) \end{aligned}$$

et la conversion inverse est:

$$X_F = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp(-j2\pi i F/N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_n \left( \sum_{i=0}^{N-1} \text{Wal}(n, i) \exp(-j2\pi i F/N) \right)$$

La limite ici est que  $N$  est suffisamment grand, de sorte que une présentation précise des échantillons de la série temporelle est possible à partir d'un nombre limité de termes.

## 2- Comparaison de la TW avec la TF

La transformée et son inverse, données par les équations (1) et (2) peuvent être obtenues par multiplication matricielle en utilisant un ordinateur, puisque les matrices sont symétriques pour la TW (contrairement à la TF), alors aussi bien que la transformée et son inverse sont identiques à l'exception du facteur d'échelle  $1/N$ . si on compare la TW à TF D nous noterons alors que  $\text{Wal}(n, i)$  est réel, limité aux valeurs  $\pm 1$ , le terme  $K = \exp(-j2\pi i F/N)$  est complexe et peut prendre  $N$  valeurs pour chaque coefficient.

Une conséquence directe de cela est que la TW se calcule beaucoup plus facilement en utilisant un ordinateur.

Notons également que puisque les fonctions "sin" et "cos" ne peuvent être représentées exactement avec un nb<sup>re</sup> fini de bits, alors une source d'erreur de troncature est introduite lors du calcul de la TDF qui utilise des multiplications répétées par des nombres complexes. La TW d'autre part utilise uniquement des additions et des soustractions et conduit à une représentation plus précise de sorte que la transformée est dépourvue de bruit [3].

## 3- Comparaison entre les spectres de Walsh et ceux de Fourier

Un choix d'une estimation d'un spectre de Fourier ou de Walsh pour un but donné dépend fortement des caractéristiques du signal.

On va donner quelques exemples pour illustrer cette dépendance.

La (fig III.1) montre un signal de transition de très courte durée généré par une structure mécanique excitée par un choc. Une comparaison entre le spectre de puissance de W et de F montrée dans la (fig III.2)



## 2- Comparaison de la TW avec la TF

La transformée et son inverse données par les équations (1) et (2) peuvent être obtenues par multiplication matricielle en utilisant un ordinateur, puisque les matrices sont symétriques pour la TW (contrairement à la TF), alors aussi bien que la transformée et son inverse sont identiques à l'exception du facteur d'échelle  $1/N$ . si on compare la TW à TF D nous noterons alors que  $W(n, i)$  est réel, limité aux valeurs  $\pm 1$ , le terme  $K = \exp(-j2\pi i F/N)$  est complexe et peut prendre  $N$  valeurs pour chaque coefficient.

Une conséquence directe de cela est que la TW se calcule beaucoup plus facilement en utilisant un ordinateur.

Notons également que puisque les fonctions "sin" et "cos" ne peuvent être représentées exactement avec un nb<sup>re</sup> fini de bits, alors une source d'erreur de troncature est introduite lors du calcul de la TDF qui utilise de multiples répétitions par des nombres complexes. La TW d'autre part utilise uniquement des additions et des soustractions et conduit à une représentation plus précise de sorte que la transformée est dépourvue de bruit [3].

## 3- Comparaison entre les spectres de Welch et ceux de Fourier

Un choix d'une estimation d'un spectre de Fourier ou de Welch pour un but donné dépend fortement des caractéristiques du signal.

On va donner quelques exemples pour illustrer cette dépendance.

La (fig III.1) montre un signal de transition de très courte durée généré par une structure mécanique excitée par un choc. Une comparaison entre le spectre de puissance de W et de F montrée dans la (fig III.2)

Nous pouvons voir de ceci que des similarités proches existent dans la région principale du spectre de puissance. Cependant, une région significative de séquences de puissance plus haute est présente dans le cas de Walsh, bien séparée de la région principale, commune aux deux représentations. Ceci est une caractéristique de certains types de phénomènes de choc qui ont été commentés par Both [4] et Bierman [4] et Kenott [3] qui suggèrent que cette deuxième région peut signaler une caractéristique usuelle pour un signal, les raies de base pour elles-ci sont associées avec l'origine du particulier signal étant analysé.

Puisque ceci est obtenu d'un mouvement harmonique d'une structure mécanique et puisqu'elle est décrite par le moyen d'une équation différentielle linéaire, on peut s'attendre qu'elle soit représentée par une série d'exponentielle, c'est à dire une somme de termes sinusoidales ou cosinusoidales.

Nous voyons dans la (fig III-3) qu'un signal sinusoidal variant lentement va juste donner naissance à une région d'énergie additionnelle de termes de séquence les plus hautes lorsqu'il est analysé dans le sens.

Une région similaire des coefficients de puissance d'ordre supérieur de séquences est trouvée avec l'analyse de Fourier d'un signal rectangulaire synthétisé, comme les spectres comparés d'ondes modulées par des impulsions codées (PCM) montrés dans le deuxième exemple (fig III-4). La représentation du signal (pulse coded modulation) par le spectre de Walsh montre une bande passante précise à séquence limitée due au nombre limité de termes exigés pour la synthèse d'un signal code binaire ayant une durée relative au temps de base de Walsh.

Nous pouvons voir de ceci que des similarités proches existent dans la région principale du spectre de puissance. Cependant, une région significative de séquences de puissance plus haute est présente dans le cas de Walsh, bien séparée de la région principale, commune aux deux représentations. Ceci est une caractéristique de certains types de phénomènes de choc qui ont été commentés par Both [4] et Brennan [4] et Kenett [3] qui suggèrent que cette deuxième région peut signaler une caractéristique usuelle pour un signal, les raies de base pour elles-ci sont associées avec l'origine du particulier signal étant analysé.

Puisque ceci est obtenu d'un mouvement harmonique d'une structure mécanique et puisqu'elle est décrite par le moyen d'une équation différentielle linéaire, on peut s'attendre qu'elle soit représentée par une série d'exponentielle, c'est à dire une somme de termes sinusoidales ou cosinusoidales.

Nous voyons dans la (fig VIII-3) qu'un signal sinusoidal variant lentement va juste donner naissance à une région d'énergie additionnelle de termes de séquence la plus haute lorsqu'elle est analysée dans le cas.

Une région similaire des coefficients de puissance d'ordre supérieur de séquences est trouvée avec l'analyse de Fourier d'un signal rectangulaire synthétisé, comme les spectres comparés d'ondes modulées par des impulsions codées (PCM) montrées dans le deuxième exemple (fig VIII-4). La représentation du signal (pulse coded modulation) par le spectre de Walsh montre une bande présente près de séquence limite due au nombre limité de termes exigés pour la synthèse d'un signal, cette bande ayant une durée relative au temps de base de Walsh.

Dans le cas de Fourier, une série théorique non limitée de coefficients harmoniques est produite par l'analyse du spectre :

Un exemple qui exploite cette différence en représentation est montré dans la (figure III-5) Ceci concerne les différences de Walsh spectra de puissance de Walsh obtenues pour deux types de signaux rectangulaires. Le premier signal (a) est dérivé d'un message codé de morse composé de 15 caractères qui sont discrètement échantillonnés en 512 échantillons ayant l'un des deux valeurs "0" ou "1".

Le repère par rapport à l'éspace de morse codé est obtenu à une valeur précise, comme ça elle pourrait être obtenue avec des codes générés par des machines. Le deuxième signal (b) est le même message mais cette fois repère par rapport à l'éspace est un peu varié d'une façon aléatoire, comme il pourrait être signalé, par exemple si les messages ont été envoyés en utilisant une clef à main.

Une comparaison entre les deux spectres montre clairement la différence essentielle entre les deux groupes de codes, un spectre régulier de séquences limité est obtenu dans le cas d'envoi par machine, montrant qu'une discrimination (selection) entre les deux cas peut être facilement obtenue dans ce domaine, tandis que la différence peut être difficile à détecter dans le domaine de temps original. Ces exemples indiquent clairement les rôles respectifs des analyses spectrales de Walsh et Fourier pour les signaux discontinus et les signaux variant longuement.

Quand le signal est dérivé d'une forme d'onde à base sinusoidale comme celle obtenue d'une masse ressort amortisseur (structure meau), l'analyse de Fourier est relevante. Quand le signal contient des discontinuités saignées

et un nombre limité de niveaux de telle qu'il peut être synthétisé avec une combinaison de formes d'ondes rectangulaires, l'analyse de Walsh est appropriée cependant pour certains buts spéciaux

La vitesse avec laquelle la transformée de Walsh peut être obtenue par calcul digital devient plus important dans l'analyse des signaux à base sinusoidale bien que la complexité du spectre ainsi obtenu devienne de plus en plus grande.

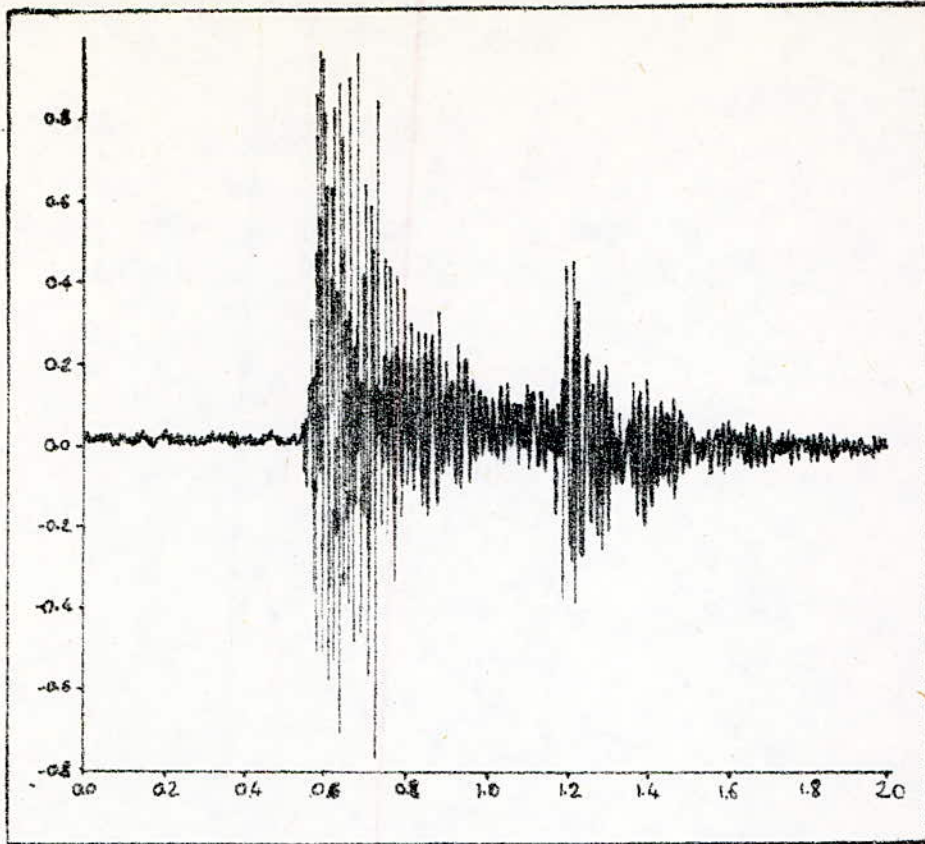


Fig VII. 1

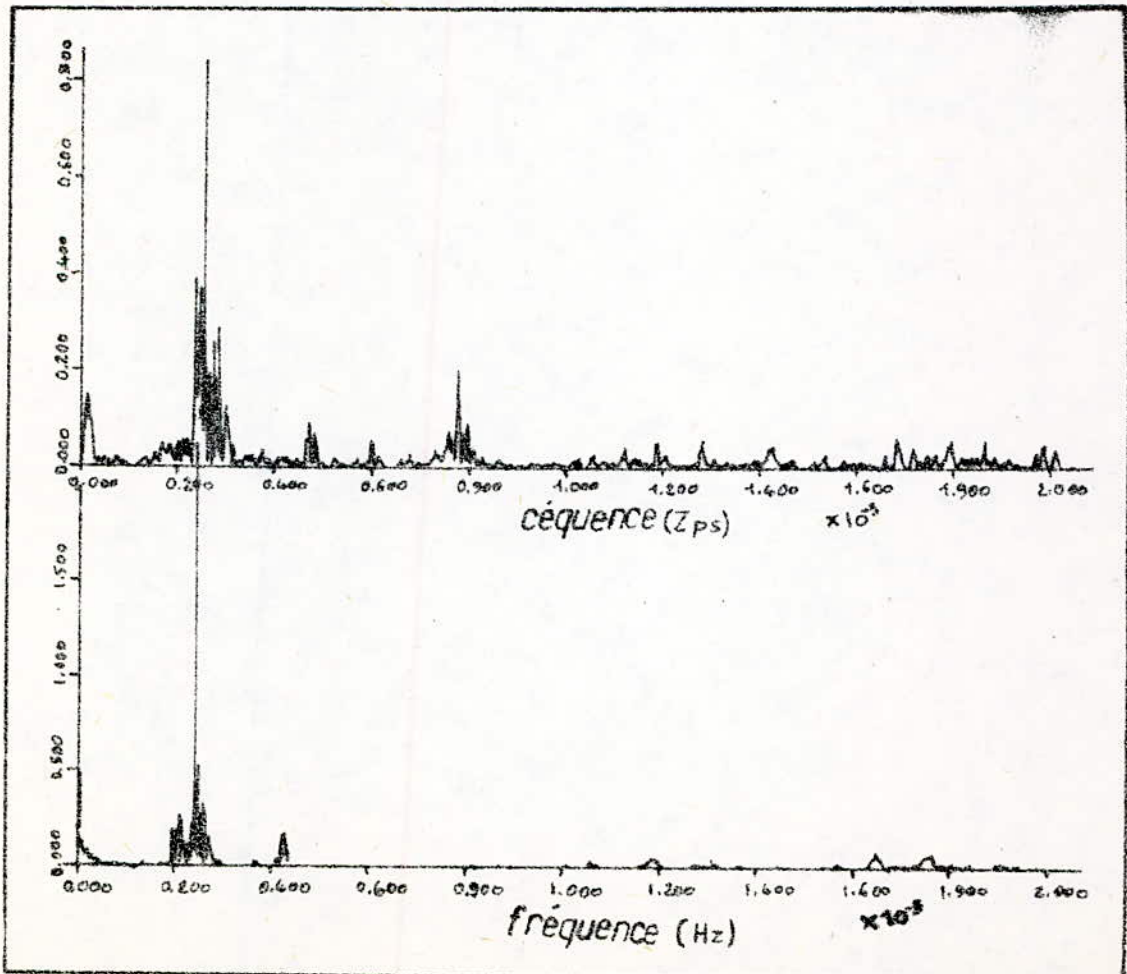
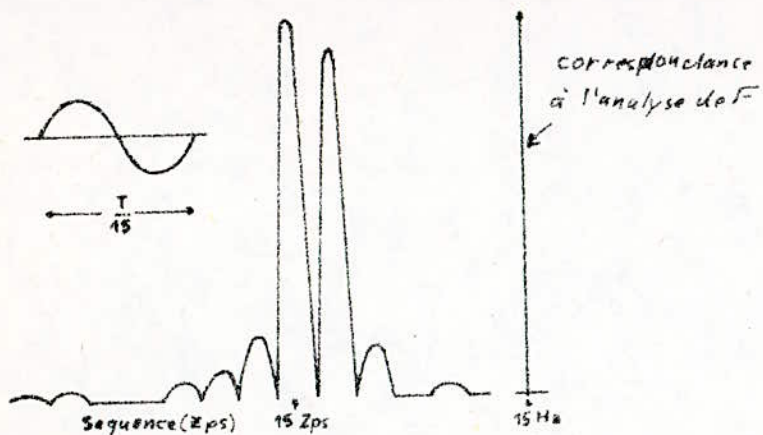


Fig VII. 2

a) densité spectral selon Walsh

pour une onde sinusoïdale  $F=15\text{ Hz}$



b) densité spectral selon Fourier pour une onde carré

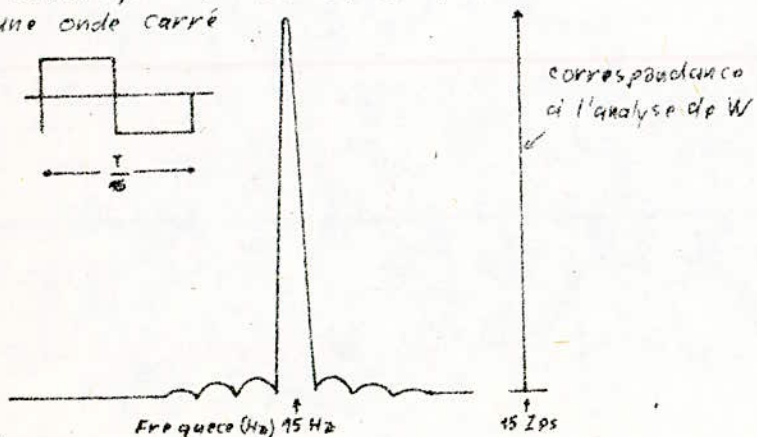


Fig VIII. 3

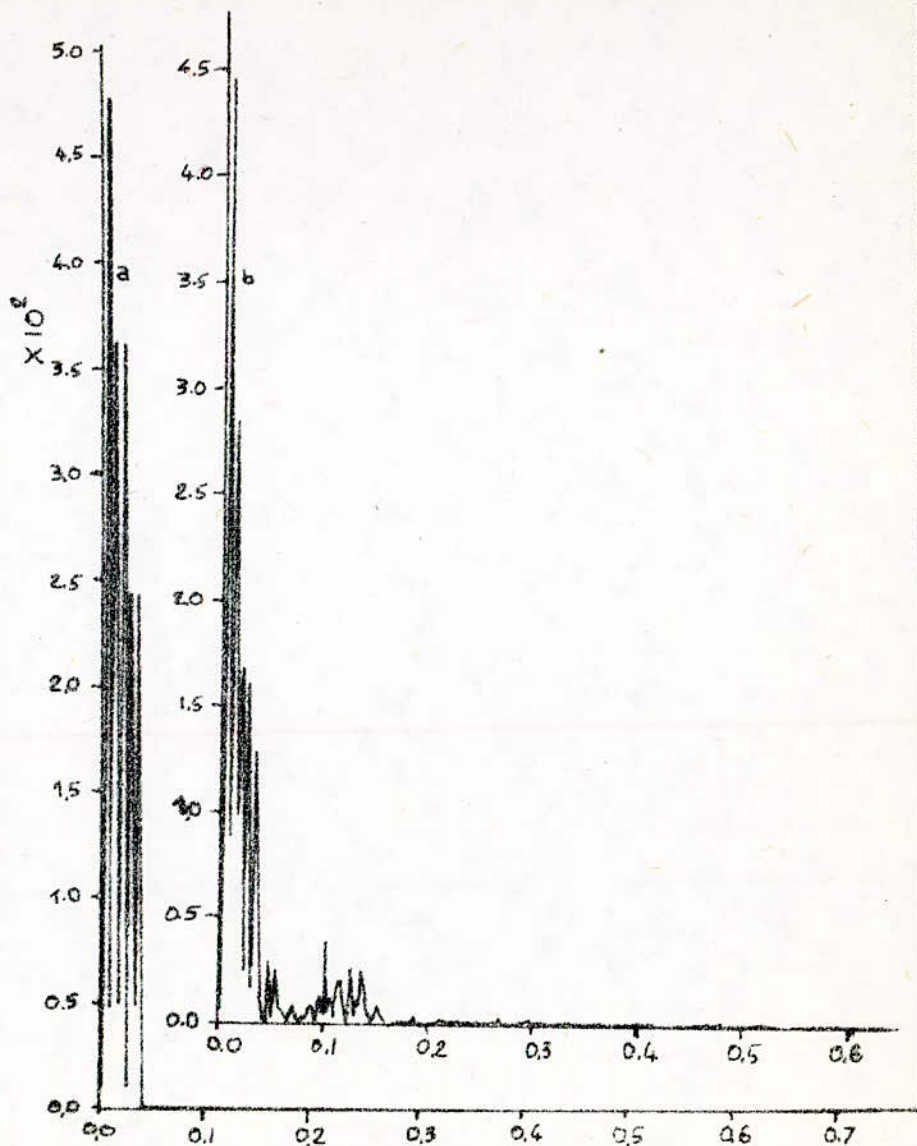


Fig VII. 5

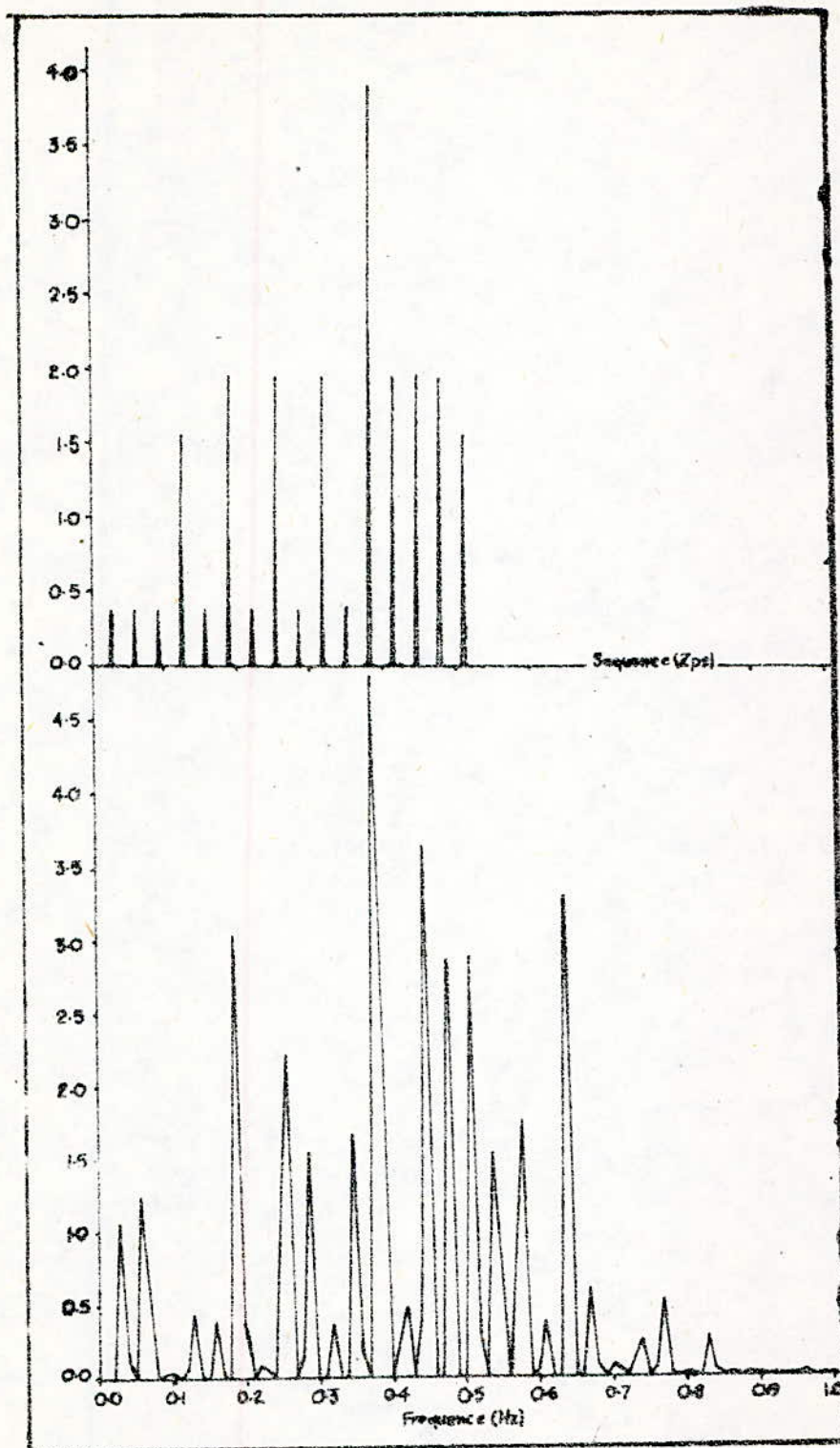


Fig VIII. 4



#### 4 - Considération d'erreurs

Lorsque le signal peut être lié (ayant une relation) à un système physique, la synthèse à partir d'un certain nombre de fonctions sinusoïdales est réalisée, ceci le cas pour plusieurs expériences physiques ou l'utilisation de la transformation de Fourier plutôt que Walsh conduit à de moindres erreurs dans n'importe quelle forme d'analyse du signal. [3]

Un signal à base rectangulaire résulte généralement d'un système technologique (ex système de codage) et quelques avantages d'analyse sont obtenus lorsque la transformation de Walsh est utilisée particulièrement si le signal peut être relié sous forme binaire à la base de temps (période) des séries. [3]

Un critère possible d'efficacité de reconstruction permettant de sélectionner les transformations de Walsh ou Fourier est basé sur la technique d'erreur des moindres carrés qui s'écrit:  $M.C. Erreur = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2$  [3]

$x_i$  = échantillons du signal d'origine.

$y_i$  = " " " " reconstitué

Rish et Brubaker ont montré que la reconstruction  $\frac{\sin x}{x}$  qui est liée aux séries de Fourier conduit à la moindre erreur lorsque  $N$  est faible.

Lorsque  $N$  croît, la reconstruction, utilisant les fonctions de Walsh, conduit à la plus petite erreur pour  $N > 2$ . [3]

## PROGRAMMATION

La programmation est faite en basic sur un micro-ordinateur Olivetti M24

1) Identification des symboles utilisés dans le programme :

$N$ : nombre d'échantillons.

$f(k)$  signal d'entrée.

$W(n)$  densité spectrale.

$R$ : nombre de colonnes treillis déterminé à partir de  $N$ .

$L$ : compteur qui détermine la transition d'une étape à l'autre.

$N_2$ : désigne l'ordre de multiplicité des treillis.  $N_2 = N/2$

$k$ : indice du signal d'entrée.

$n$ : indice de la densité spectrale.

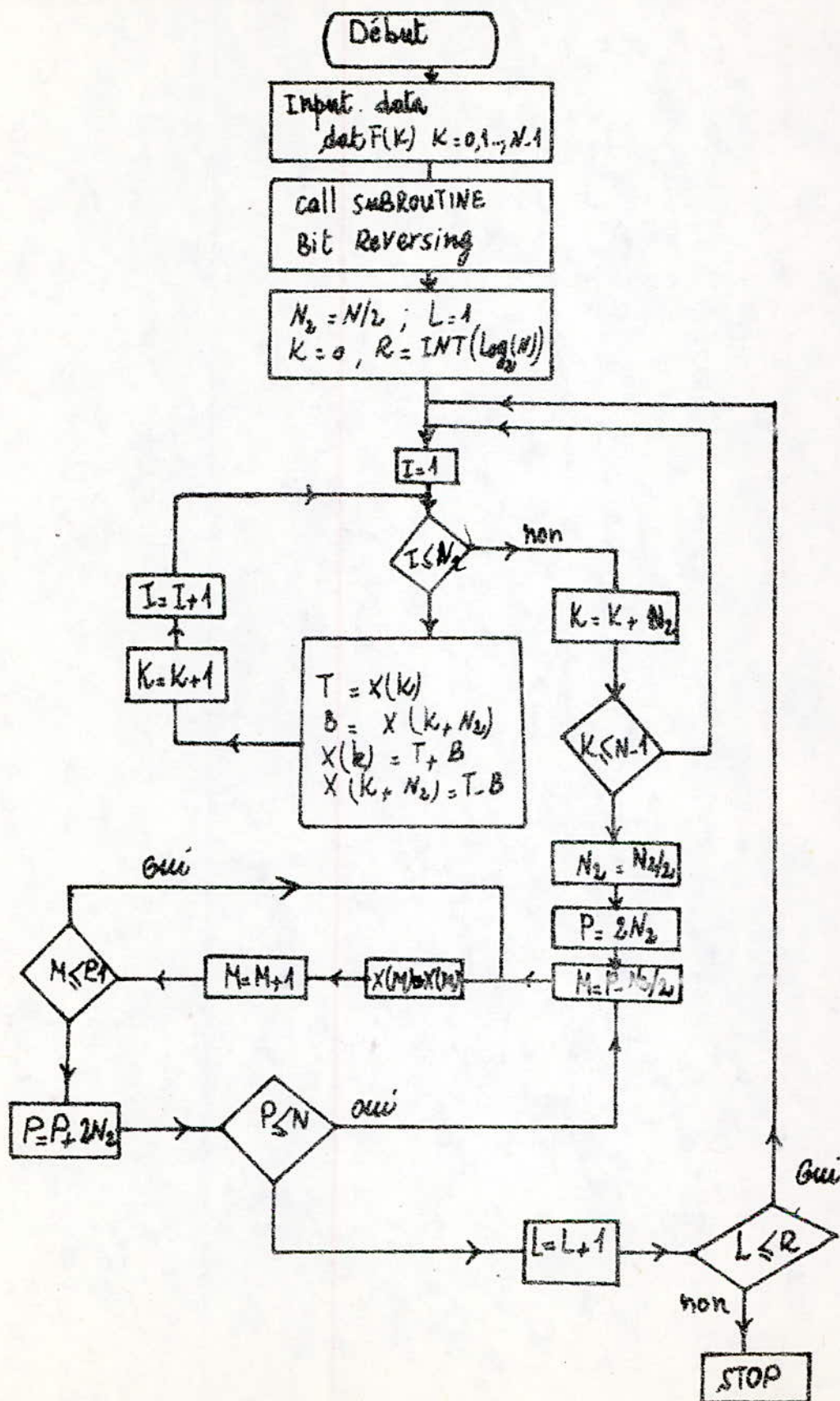
$I$ : compteur qui permet le balayage des treillis.

$P$ : paramètre intermédiaire pour modifier les treillis de rang pair.

$W(n)$ : densité spectrale de puissance [3]

$$W(n) = (X(n))^2 \quad n = 1, 2, \dots, N/2 - 1$$

## 2) Organigramme



```

10 REM *****((( Transformation Rapide de WALSH )))*****
20 REM *****((( Par l'algorithme de COOLEY & TUKEY )))*****
30 KEY OFF
40 SCREEN 1
50 SCREEN 0
60 CLS
70 FOR I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
80 PRINT " VOTRE FONCTION EST-ELLE CONNUE"
90 PRINT " ANALYTIQUEMENT ?"
100 FOR I =1 TO 15:PRINT :NEXT
110 PRINT " REPONDEZ PAR O/N "
120 A$=INKEY$:IF A$(">")="O" AND A$("<")="N" THEN 120
130 IF A$="O" THEN 290
140 CLS
150 FOR I=1 TO 5 :PRINT :NEXT
160 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N":N
170 CLS:SCREEN 3
180 LINE(70,60)-(580,350),1,B
190 LINE(75,65)-(575,345),1,B
200 LINE(175,185)-(450,210),1,B
210 LOCATE 13,23:PRINT"CALCULS EN COURS PATIENTEZ S.V.P"
220 TIME$="0:0"
230 R=INT(LOG(N)/LOG(2))
240 DIM X(N),K(R),W(N),F(N)
250 FOR I=0 TO N-1
260 READ X(I)
270 NEXT I
280 GOTO 500
290 CLS:FOR I=1 TO 3:PRINT:NEXT
300 PRINT " ECRIRE VOTRE NOUVELLE FONCTION "
310 PRINT " A LA LIGNE 400 "
320 PRINT " RAMENER LE CURSSEUR AU DESSUS "
330 FOR I=1 TO 6 :PRINT :NEXT
340 PRINT "GOTO 350":EDIT 470
350 CLS
360 FOR I=1 TO 3 :PRINT :NEXT
370 INPUT "DONNER LA VALEUR DE N":N
380 CLS:SCREEN 3
390 LINE(60,60)-(580,350),1,B
400 LINE(65,65)-(575,345),1,B
410 LINE(175,185)-(450,210),1,B
420 LOCATE 13,23:PRINT"CALCULS EN COURS PATIENTEZ S.V.P"
430 TIME$="0:0"
440 R=INT(LOG(N)/LOG(2))
450 DIM X(N),W(N),K(R),F(N)
460 FOR I=0 TO N-1
470 X(I)= COS(2*3.141592654#*I/8)
480 F(I)=X(I)

```

```

490 NEXT I
500 FM=ABS(X(0))
510 FOR I=0 TO N-1
520 IF FM < ABS(X(I)) THEN FM=ABS(X(I))
530 NEXT I
540 FOR I=0 TO N-2
550 F(I)=X(I)
560 NEXT I
570 GOSUB 870
580 N2=N/2
590 FOR L=1 TO R
600 K=0
610 IF(L=1) THEN 730
620 REM -----
630 REM -----( Modification des entrées des treillis de rang pair )-----
640 REM -----
650 P=2*N2
660 M=P-N2/2
670 FOR S=M TO P-1
680 X(S)=(-1)*X(S)
690 NEXT S
700 P=P+2*N2
710 IF(P=N) THEN 660
720 REM *****
730 FOR I=1 TO N2
740 T=X(K)
750 B=X(K+N2)
760 X(K)=T+B
770 X(K+N2)=T-B
780 K=K+1
790 NEXT I
800 K=K+N2
810 IF K<(N-1) THEN 730
820 NEXT L
830 GOTO 1050
840 REM -----
850 REM -----((( BIT REVERSING )))-----
860 REM -----
870 FOR K=0 TO N-1
880 JL=K
890 I=0
900 KL=N
910 FOR IL=1 TO R
920 KL=KL/2
930 IF JL<KL THEN K(IL)=0:GOTO 960
940 K(IL)=1
950 JL=JL-KL
960 I=I+(2^(IL-1))*K(IL)

```

```

970 NEXT IL
980 IF I<=K THEN 1020
990 T=X(K)
1000 X(K)=X(I)
1010 X(I)=T
1020 NEXT K
1030 RETURN
1040 REM *****
1050 FOR I=0 TO N-1
1060 W(I)=(X(I))^2
1070 NEXT I
1080 B=ABS(W(0))
1090 FOR I=0 TO N-1
1100 IF B >= ABS(W(I)) THEN 1120
1110 B=ABS(W(I))
1120 NEXT I
1130 GOSUB 1230
1140 FOR I=0 TO N-2
1150 LINE(I,F(I))-(I+1,F(I+1))
1160 NEXT I
1170 GOSUB 1400
1180 FOR I=0 TO N/2-1
1190 LINE (I,W(I))-(I+1,W(I+1))
1200 NEXT I
1210 LOCATE 14,54:PRINT"TEMPS D'EXECUTION=";TIME$
1220 LOCATE 2,2 :END
1230 CLS
1240 KEY OFF
1250 SCREEN 3
1260 LINE (0,0)-(639,399),1,B
1270 LOCATE 2,2:PRINT "f(k)"
1280 LOCATE 15,2:PRINT "W(n)"
1290 LOCATE 7,72:PRINT "k"
1300 LOCATE 23,72:PRINT "n"
1310 LOCATE 13,16 :PRINT "FIG(1) : SIGNAL D'ENTREE f(k)"
1320 LOCATE 25,16:PRINT "FIG(2) : DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE W(n)"
1330 LINE (0,0)-(639,399),1,B
1340 LINE (1,205)-(638,205)
1350 VIEW (15,5)-(634,165)
1360 WINDOW (-10,-1.25*FM)-(N+10,1.25*FM)
1370 LINE (-10,0)-(N+10,0)
1380 LINE (0,-1.25*FM)-(0,1.25*FM)
1390 RETURN
1400 VIEW (5,210)-(634,375)
1410 WINDOW (-5,-.25*B)-(N/2+5,1.25*B)
1420 LINE (-5,0)-(N/2+5,0)
1430 LINE (0,-.25*B)-(0,1.25*B)
1440 RETURN

```

## CHX ESSAI DU PROGRAMME

Après avoir mis au point le programme relatif à la T.R.W, nous avons fait quelques essais pour des fonctions connues.

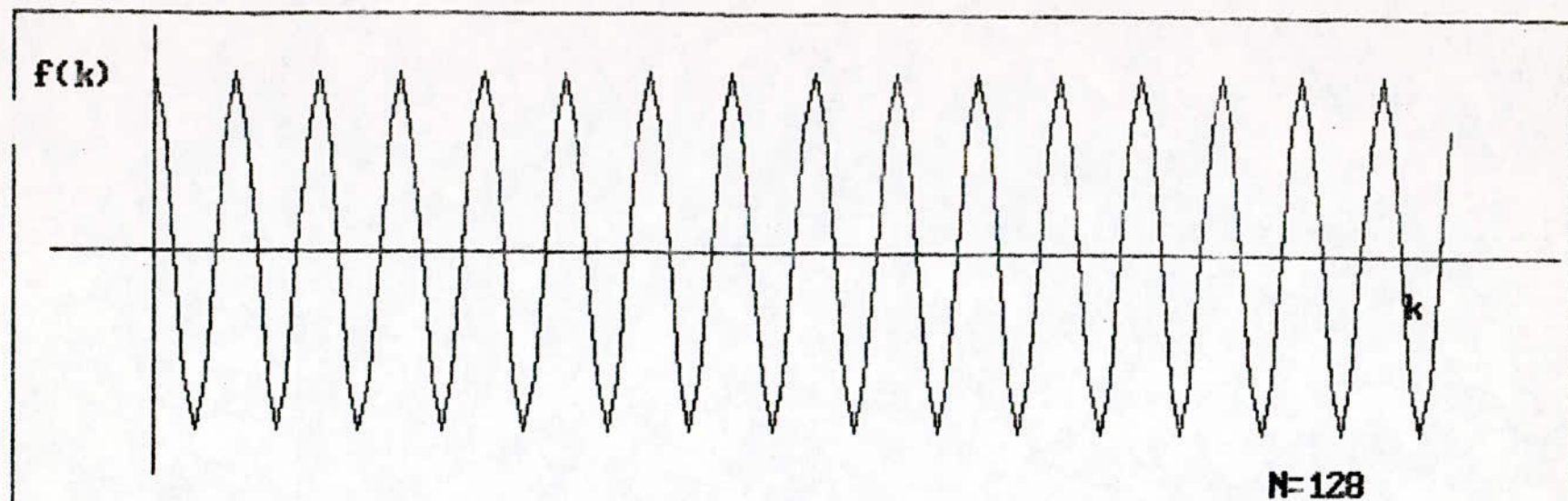
Nous représenterons ici deux cas :

$$1) f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t) \quad \text{où } \nu_0 = 1/8$$

$$2) f(t) = \text{EXP}(-0,25t)$$

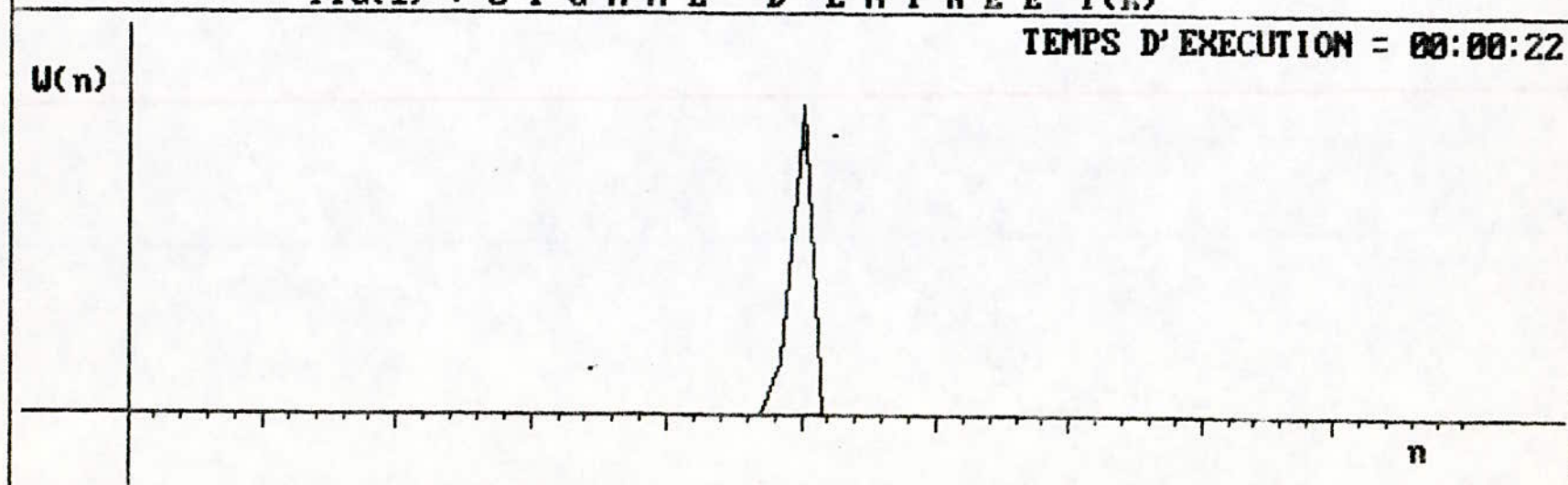
En remarque que pour  $f(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$  la densité spectrale selon Walsh (fig X.1) est la même que selon Fourier (fig X.2).

Tandis que pour la fonction:  $f(t) = \text{EXP}(-0,25t)$ , la densité spectrale selon Walsh (fig X.3) est différente que la densité selon Fourier (fig X.4).



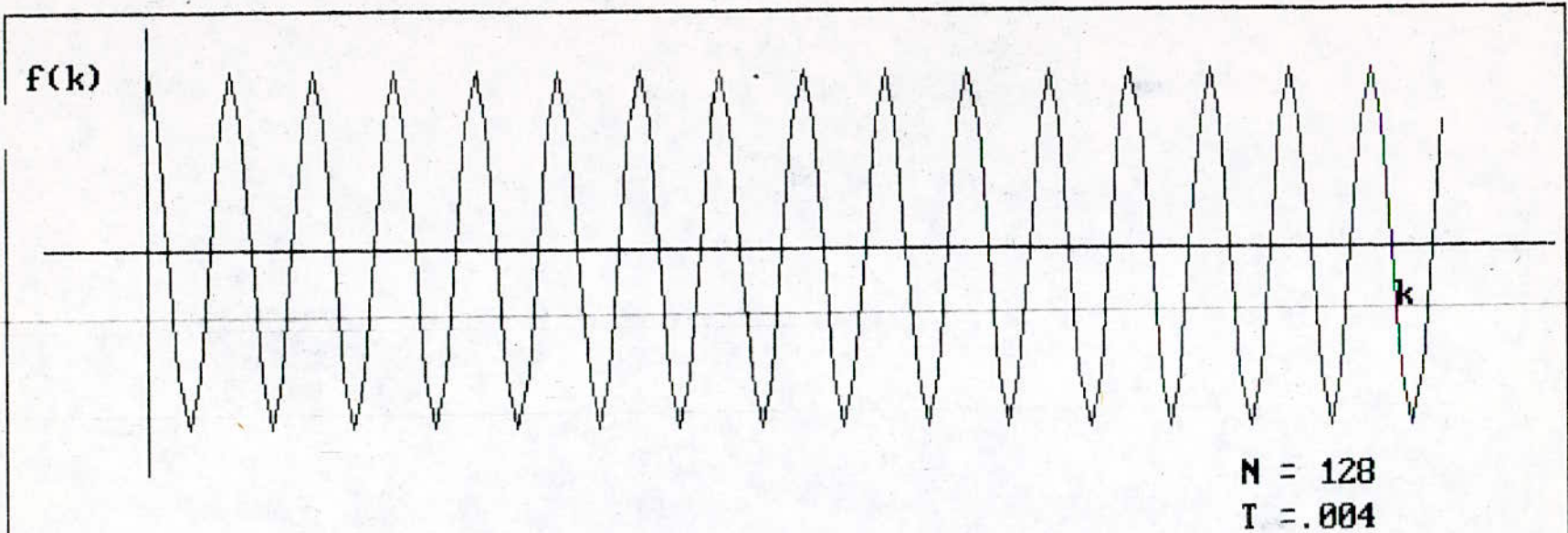
FIG(1) : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$

TEMPS D'EXECUTION = 00:00:22



FIG(2) : DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $U(n)$



FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$ 

TEMPS D'EXECUTION=00:00:56

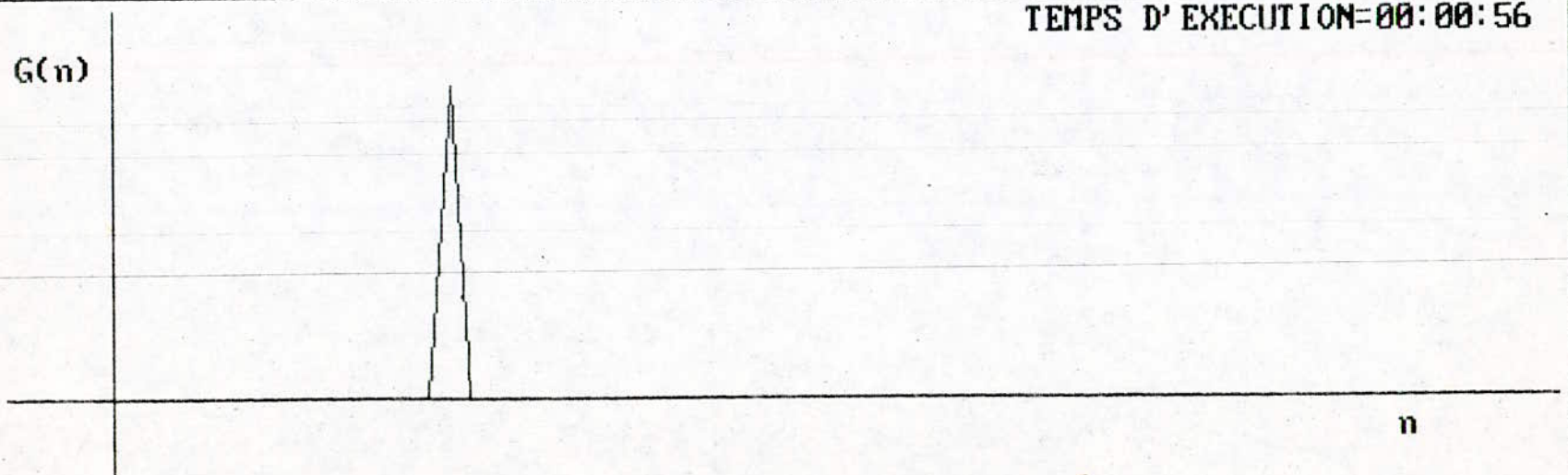
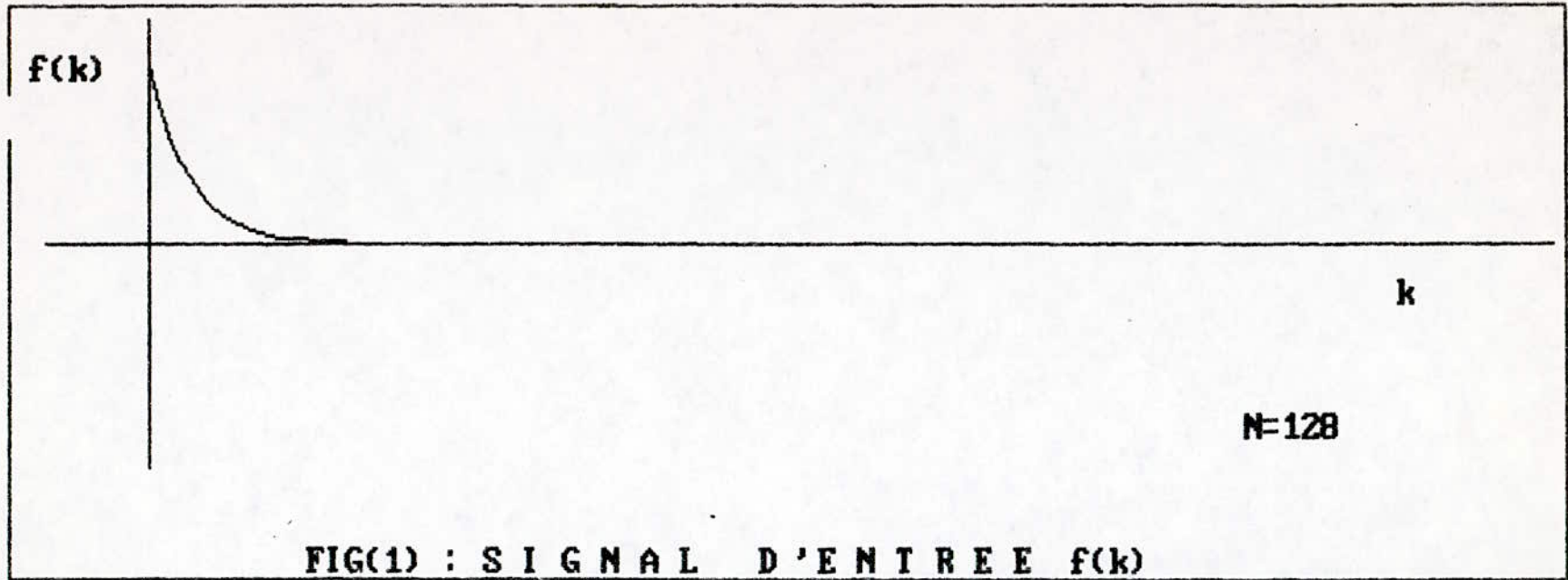
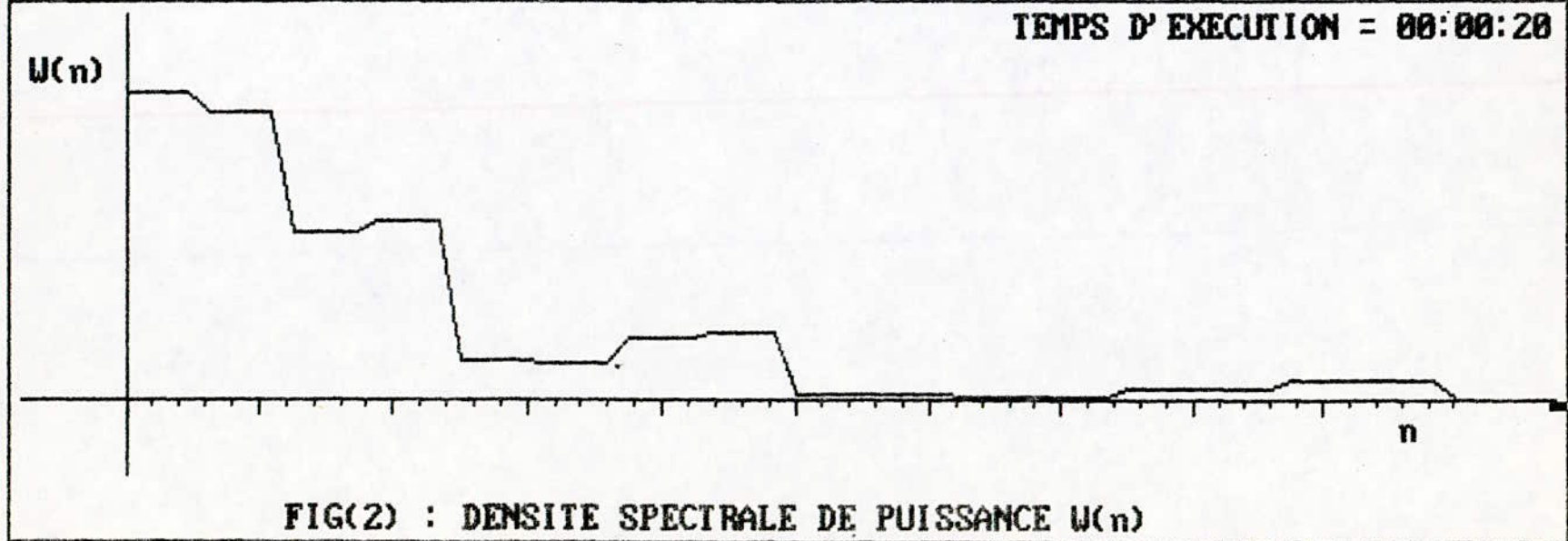
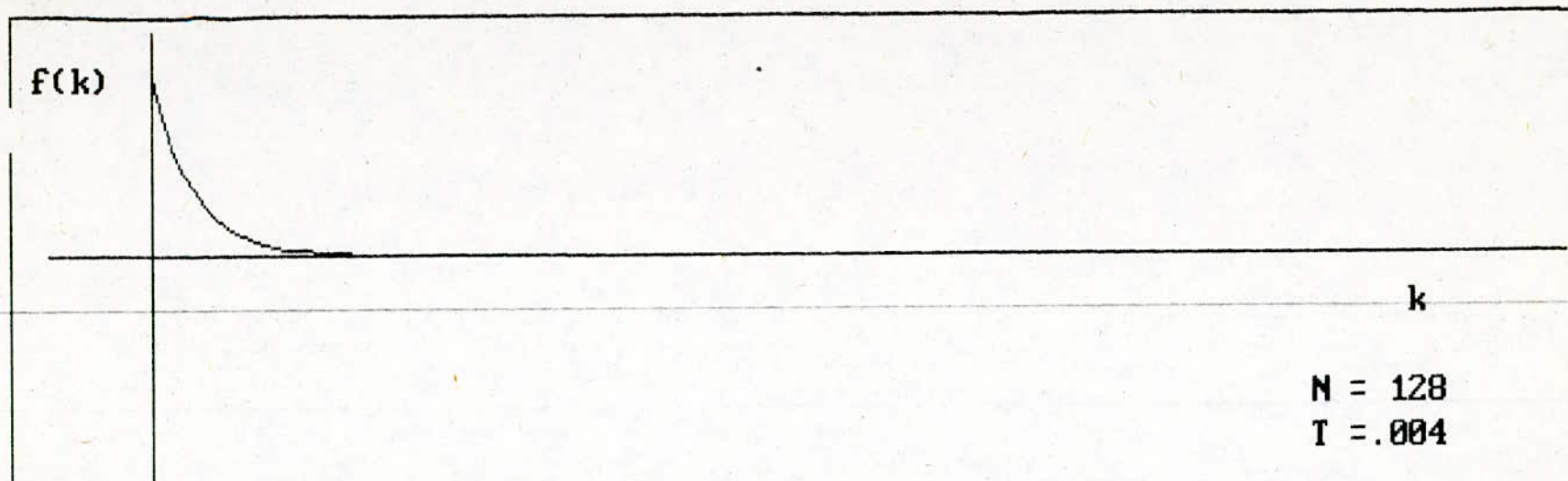
FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $G(n)$ 

fig. 8.2

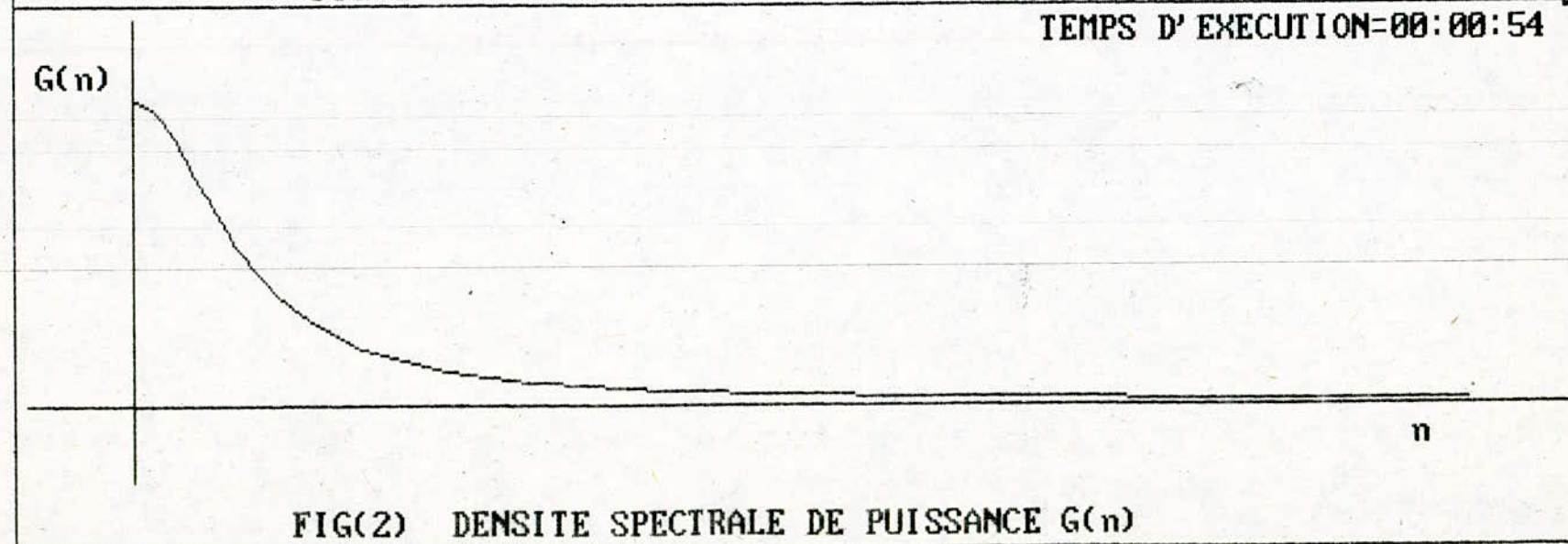


TEMPS D'EXECUTION = 00:00:20



FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$ 

TEMPS D'EXECUTION=00:00:54

FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $G(n)$

## DIAGNOSTIC D'UN MOTEUR ELECTRIQUE

Après avoir mis aux pts des outils mathématiques nécessaires et la réussite de programmation de cette procédure, nous allons l'appliquer pour un moteur électrique dont les caractéristiques et les conditions d'installation sont les suivantes:

- puissance 12 kW

- vitesse de rotation 750 tr/min.

- Le nombre d'ailettes du ventilateur de refroidissement est 8. Ce moteur sert à entrainer par courroie un générateur à courant constant, et il est installé et fixé par vis sur un panneau en acier dont il est solidaire à une fondation en béton, le signal de vibration du moteur est prélevé à l'aide d'un capteur et un enregistreur. Voir fig D.1. Ce signal est introduit au programme sous forme d'une série de data.

capteur

piezoélectrique

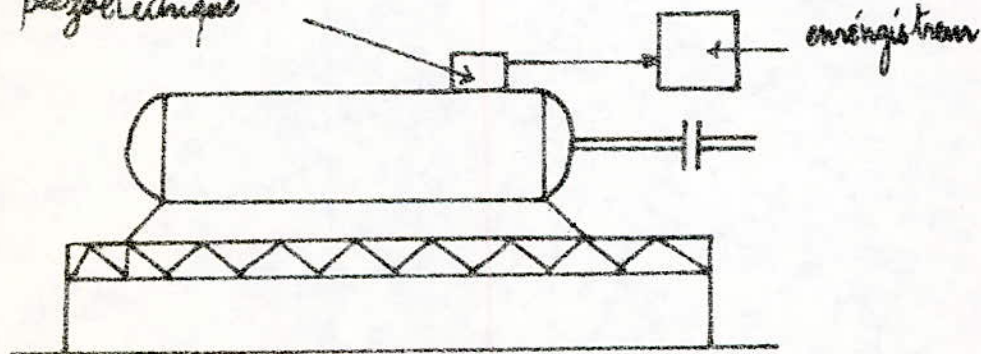


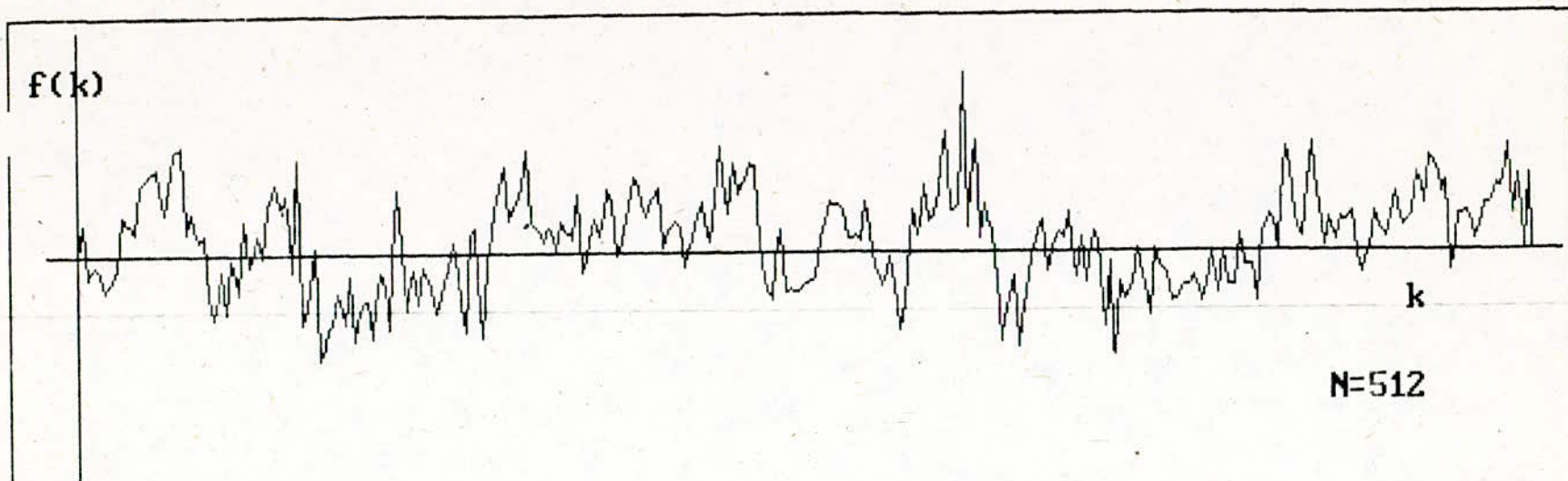
Fig. D.1.

L'expérience réalisée dans cette étude est plutôt une application de la théorie de Walsh et non pas un diagnostic approfondi. Le signal recueilli a subi une discrétisation dont la période  $T = 0,002$  s et l'échantillonnage considéré comprend  $N = 512$  points.

La densité spectrale de puissance est:

- par la méthode de Walsh fig XI.1
- par la méthode de Fourier fig XI.2
- par la méthode de Fourier d'un signal filtré fig XI.3

On remarque que pour la méthode de Walsh on a obtenu presque le même résultat obtenu par la méthode de Fourier d'un signal non filtré.

FIG(1) : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$ 

TEMPS D'EXECUTION = 00:01:33

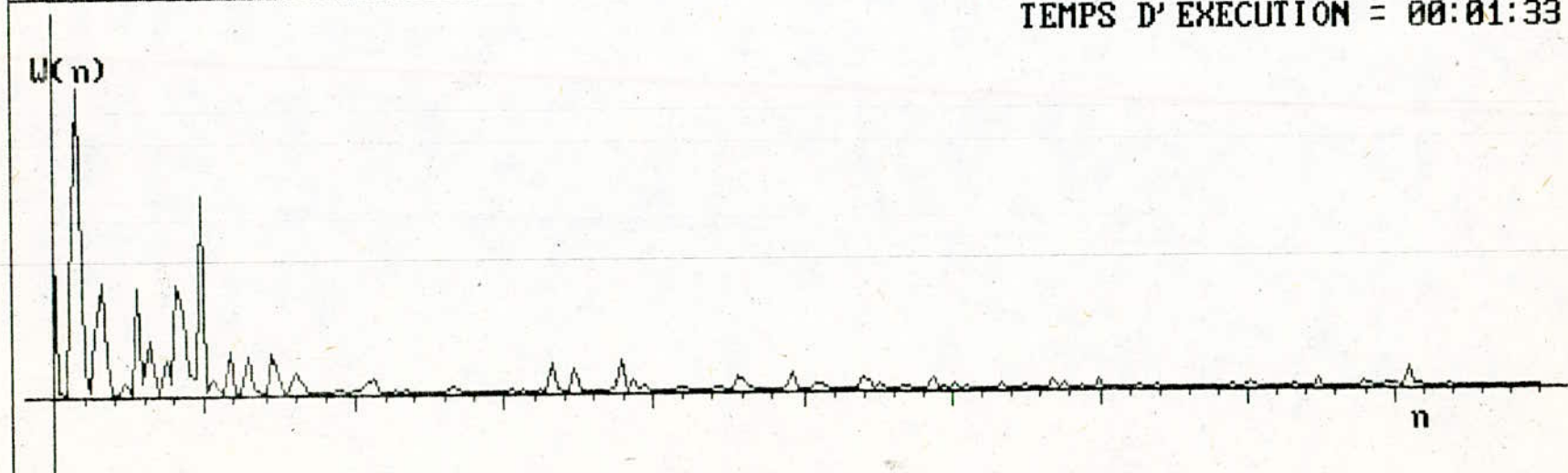
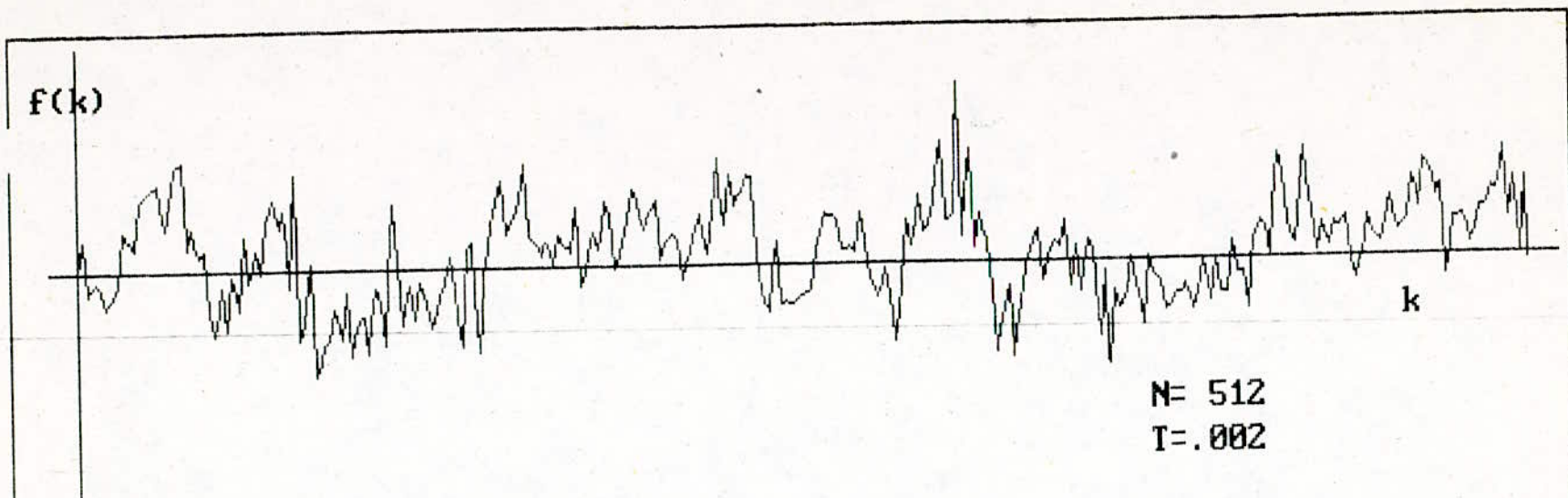
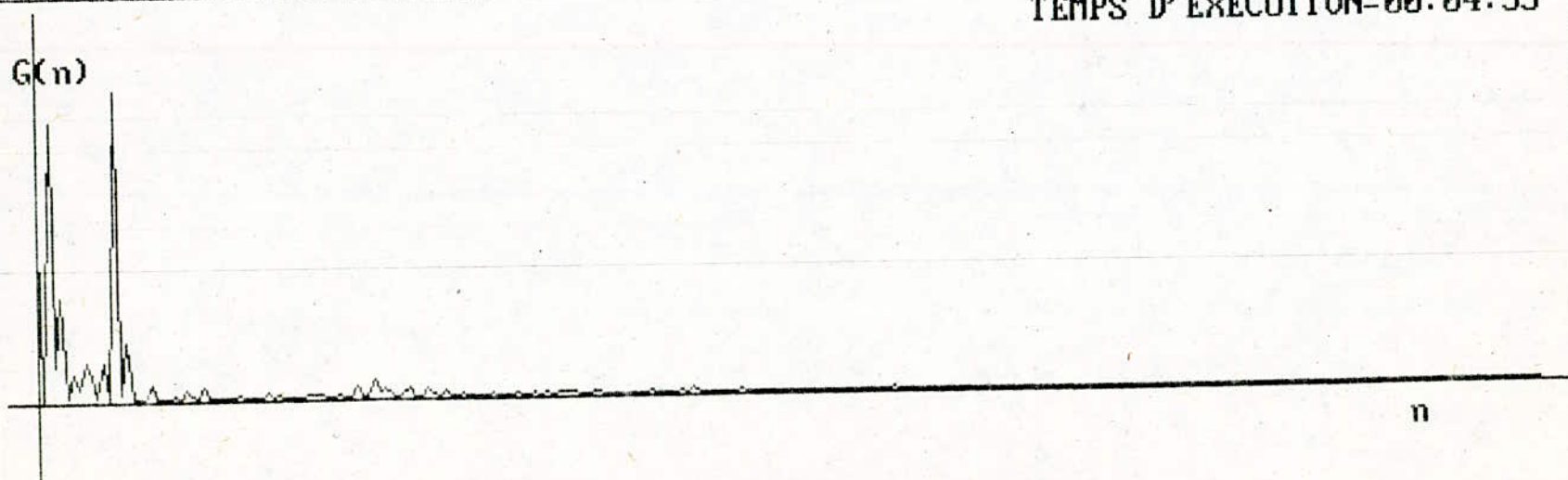
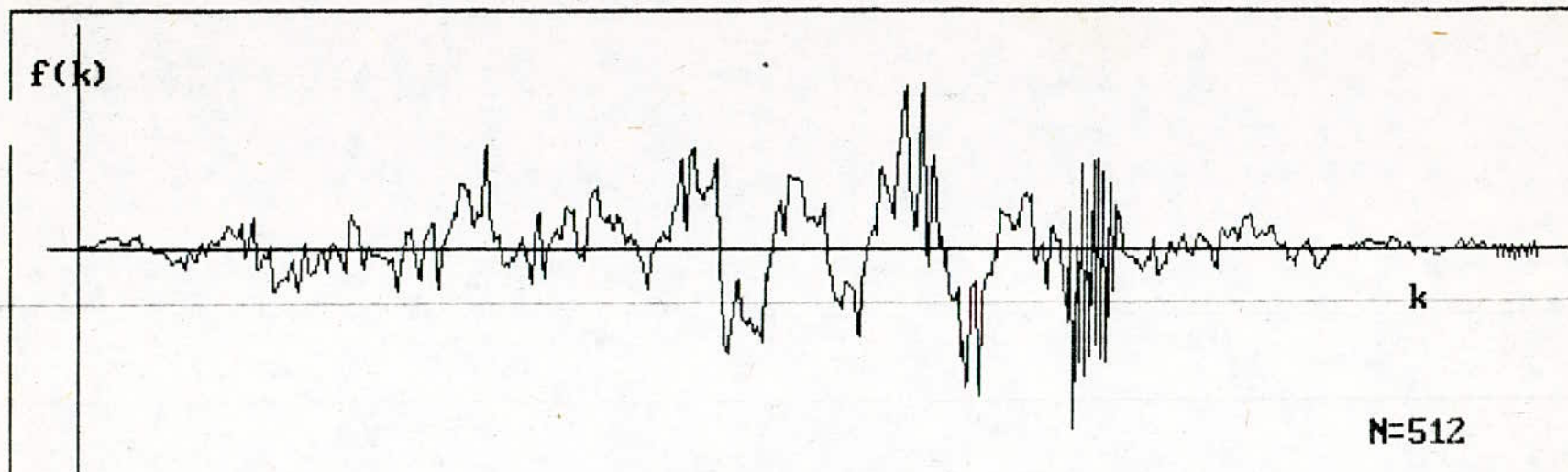
FIG(2) : DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $W(n)$ 

Fig. 1

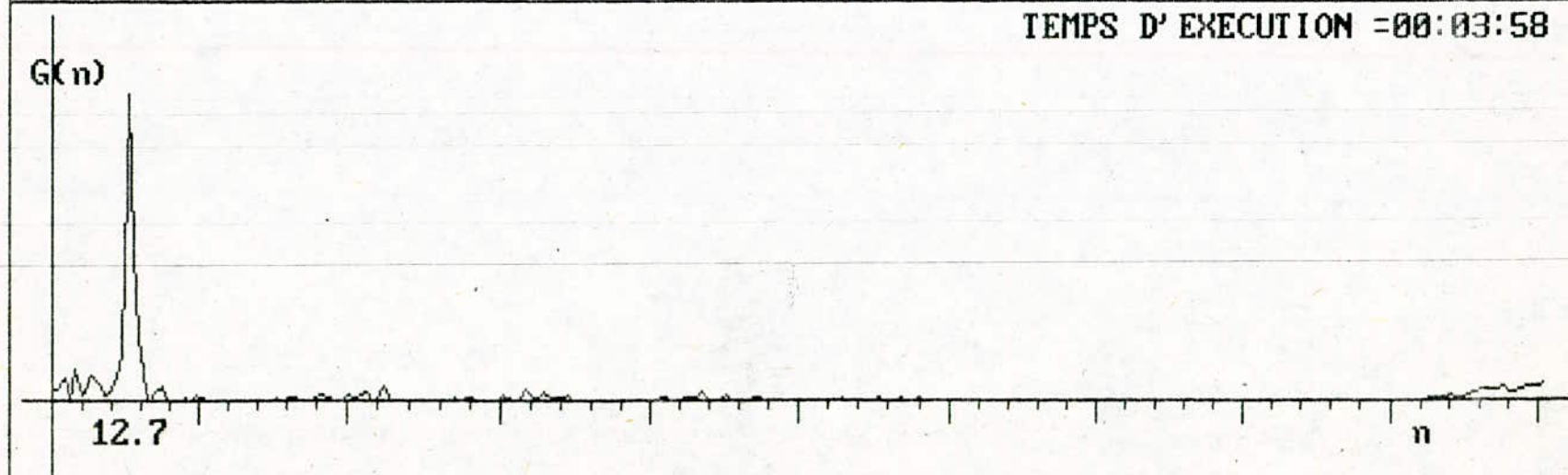
FIG 1 : SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$ 

TEMPS D'EXECUTION=00:04:33

FIG(2) DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $G(n)$

FIG(1): SIGNAL D'ENTREE  $f(k)$ 

TEMPS D'EXECUTION = 00:03:58

FIG(2): DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE  $G(n)$



## CONCLUSION

Cette étude nous a permis de mettre en évidence les outils mathématiques nécessaires pour faire un diagnostic d'une machine par la procédure de Walsh. On a remarqué, d'après le temps d'exécution mentionné sur les figures, que cette méthode est plus rapide que celle de Fourier, et que les résultats sont les mêmes pour cette procédure et celle de Fourier sans filtre pour les signaux qui prennent des valeurs nulles. En fin de cette conclusion, je tiens à signaler la grande importance d'utilisation de la transformée de Walsh ce qui nécessite des études approfondies sur elle.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] J. LIFERMANN

Les méthodes rapides de transformation du signal:  
Fourier, Walsh, Hadamard, Haar

[2] Analyse séquentielle

P. Bois 1971.

[3] Walsh Functions and their Applications.

K.G. Beauchamp 1975.

[4] Spectral Analysis in Geophysics.

M. BATH 1974.

[5] Encyclopédie des Sciences Industrielles.

Quillet 1983.

