

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
«O»

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

«O»

المركز الوطني للتوثيق  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT : MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

lex

EN VUE D'OBTENTION DE DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

# Etude Statique du Chassis du Camion K 120

Proposé par :

S. N. V. I.

Etudié par :

A. BOUBEKRI

Dirigé par :

S. RECHAK

PROMOTION JUIN 1987



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
«O»

# ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

«O»

DEPARTEMENT : MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE D'OBTENTION DE DIPLOME D'INGENIEUR D'ETAT

SUJET

# **Etude Statique du Chassis du Camion K 120**

Proposé par :

S. N. V. I.

Etudié par :

A. BOUBEKRI

Dirigé par :

S. RECHAK

PROMOTION JUIN 1987

وزارة التعليم العالي  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبية - المكتبة  
BIBLIOTHEQUE - المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Ministère de l'enseignement supérieur  
Ecole nationale polytechnique.  
Département de mécanique.  
الموجه: رشاق  
المؤلف: بوبكري عبد الحفيظ  
Promoteur: Rechak Saïd  
Elève ingénieur: Boubekri. A

العنوان: دراسة سكونية لهيكل شاحنة K120  
المخلص: يهدف عملنا هذا إلى دراسة سكونية لهيكل شاحنة  
من طراز K120 المركب من العتبات، واستعملنا لذلك أولا قوانين  
مقاومة المواد ثم طريقة العناصر المحدودة. وقد قمنا  
في الحالتين باختبار الإجهادات واستنتاج عن حساب الأبعاد.

Sujet : Etude statique du chassis du camion K120

Résumé : L'objet de ce projet consiste en l'étude du comportement statique du chassis K120. L'analyse de cette structure a été modélisée en éléments poutres. Le problème a été résolu par deux méthodes différentes, l'une utilisant la méthode élémentaire de La R.D.M, l'autre utilisant la méthode récente des éléments finis. Les résultats ainsi obtenus ont permis de vérifier et conclure le dimensionnement du chassis.


Subject : Static study of the K120 lorry frame

Abstract: The aim of this project consists on the study of the static compartment of the K120 frame. The analysis of this structure was modelised by beam elements. The problem has been solved by two different methods, one utilizing the elementary method of strength of materials, the other one utilizing the recent finite element method. The results obtained in this manner have bad verify and conclude on the dimensions of the structure of the frame.

# DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

- A mes parents .
- A ma grand mère .
- A mes frères et sœurs .
- A mon frère Abdelbaki .
- Aux familles des mosquées .

B. Abdelghani  


# REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à monsieur Rechak qui a eu l'aimable sollicitation de vouloir me suivre le long de cette étude. Ses conseils précieux m'ont beaucoup aidé.

Je remercie également tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

Que tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce projet trouvent ici ma sincère gratitude.

# TABLE DE MATIERES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

	Introduction	1
Chap I	: Généralités	4
I.1	: Méthode élémentaire	4
I.2	: Méthode des éléments finis .	7
Chap II	: <b>M</b> odélisation en résistance des matériaux	11
II.1	: Nécessité de la modélisation	11
II.2	: Description du véhicule et présentation du châssis	11
II.3	: Modélisation et répartition des charges .	13
Chap III	: <b>E</b> fforts internes .	17
III.1	: Réactions d'appuis .	17
III.2	: Construction des diagrammes .	18
Chap IV	: <b>V</b> érification de contraintes et dimensionnement .	22
IV.1	: Vérification de contraintes .	22
IV.2	: Dimensionnement .	23
Chap V	: <b>P</b> résentation de la méthode des éléments finis .	34
V.1	: Formulation des problèmes statiques .	34
Chap VI	: <b>M</b> odélisation en éléments finis .	50
VI.1	: Choix des nœuds .	50
VI.2	: Répartition des charges .	50

VI-3: Calcul des inerties	52
Chap VII : Programmation	56
VII-1: Programme principal	56
VII-2: Sous-programmes	57
Chap VIII : Interprétation des résultats	
VIII-1: Données	
VIII-2: Résultats	
VIII-3: Interprétation	
Conclusion	
Annexes	
Bibliographie	



# TABLE DES FIGURES

- 2.1 : Représentation schématique d'un ressort à lames.
- 2.2 : Fonction de la jumelle dans un ressort à lames.
- 2.3 : Longeron modèle pour étude par R.D.M.
- 3.2 : Diagrammes des efforts internes.
- 4.1 : Section d'une poutre en U.
- 4.3 : Organigramme pour dimensionnement.
- 4.4 : Tableau comparatif (dimensions réelles - dimensions calculées)
- 5.1 : Élément poutre à six degrés de liberté par nœud.
- 5.2 : Schéma de superposition.
- 5.3 : Changement de repère.
- 6-1 : Concentration aux nœuds, d'un effort concentré.
- 6-2 : Concentration aux nœuds, d'une charge répartie.
- 6-5 : Schéma du châssis modélisé en éléments finis de poutres.
- 6-6 : Modélisation de la variation de section du longeron.
- 7-1 : Organigramme de traitement statique.

المدسة الوطنفة المفعفة الففففف  
BIBLIOTHEQUE — المفففففة  
Ecole Nationale Polytechnique

# INTRODUCTION

1

Dans tous les domaines industriels on cherche toujours une optimisation tenant compte de l'économie de matière d'une part et la résistance des constructions d'autre part.

Pour cela les renseignements sur les sollicitations se révèlent très nécessaires.

En fabrication de véhicules les spécialistes affirment que ceux-ci sont soumis à des contraintes statiques dues à leur poids propre et au poids de la charge transportée, ainsi qu'à des contraintes dynamiques provenant des inégalités de la route, de la force centrifuge et du freinage.

Notre sujet porte sur l'étude statique du châssis pour camion K120 fabriqué par la SNVI de Roubaix le châssis étant l'organe qui reçoit toutes les sollicitations auxquelles est soumis le véhicule.

La connaissance des différentes charges relatives aux différents organes du camion et des efforts internes qu'elles créent dans la structure du châssis rend possible le calcul de répartition des contraintes qui, une fois fait représente la base pour un dimensionnement rigoureux et optimum.

On commencera l'étude par une modélisation de la structure pour faciliter la résolution du problème qu'on se propose d'aborder en utilisant en premier lieu la méthode élémentaire de la résistance des matériaux se basant sur la détermination des efforts internes dus à la flexion, la détermination des contraintes puis le dimensionnement sur la base de ces connaissances.

Le même problème est résolu en second lieu et à l'aide de l'analyse des structures par méthodes matricielles. On utilisera précisément la méthode des éléments finis, méthode très récente et développée laquelle consiste à discrétiser la structure en plusieurs éléments, écrire les équations d'équilibre d'un élément sous forme matricielle, puis assembler les matrices élémentaires pour obtenir l'équilibre global de la structure. Cette méthode nécessite un calcul informatisé effectué sur ordinateur.

À cet effet on utilisera le mini-ordinateur type VAX 750 pour développer un programme en éléments finis permettant la détermination des déplacements et contraintes qui fait la base de la vérification de

dimensionnement.

On procédera en fin à une comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes utilisées.

L'importance de ce sujet réside dans la vérification du dimensionnement du châssis K120 réellement existant. Il renseigne sur les risques de fissuration ou déformation dans le cas du sous-dimensionnement; dans le cas contraire notre sujet sera d'un intérêt économique pour la SNVI, comme il pourra servir comme renseignement de base pour des projets d'avenir, citons à titre d'exemple le projet d'utilisation du châssis K120 modifié pour mini-bus.

En outre, le programme développé est général et peut être utilisé pour l'analyse statique d'autres structures en éléments poutres.

Notons enfin que cette étude statique est complétée en parallèle par une étude dynamique du même problème, qui fait le thème d'un autre projet de fin d'études.

**CHAP I**

**GENERALITES**

# I.1. METHODE ELEMENTAIRE

## I.1.1 : Objet de la R.D.M

La résistance des matériaux se propose en général de vérifier la stabilité des constructions sous l'effet des charges qui lui seront appliquées. Cela suppose un prédimensionnement des pièces, réalisé par comparaison avec des ouvrages déjà construits.

La résistance des matériaux a pour but de déterminer les caractéristiques (matières, dimensions et formes) des éléments d'une construction pour que chaque élément résiste sans déformation permanente aux forces maximales qui lui seront appliquées en service.

Pour y parvenir, d'une part, il faut analyser rationnellement le mode d'action des forces extérieures sur la matière d'un élément et calculer les sollicitations correspondantes, d'autre part, il faut étudier expérimentalement le comportement des matériaux sollicités par des efforts et déterminer leurs caractéristiques mécaniques.

## I.1.2 : Flexion des poutres :

On appelle flexion l'effet produit dans les sections

droites d'une poutre par un moment fléchissant.

On distingue trois types de flexion.

Flexion pure : Si entre deux points de la poutre nous avons :  $M \neq 0$  ,  $N = 0$  et  $T = 0$  la flexion est dite pure . L'effort tranchant étant nul, le moment fléchissant est donc constant (cf. § III.) ; c'est le cas par exemple d'une poutre sur deux appuis à deux porte-à-faux .

Dans ce cas la condition de stabilité est donnée par

$$\sigma_{max} \leq \bar{\sigma} \quad \text{Autrement dit} \quad \frac{M.v}{I} \leq \bar{\sigma} \quad (I.1)$$

avec :  $M$  : moment fléchissant.

$I$  : moment d'inertie quadratique

$v$  : distance maximale entre l'axe neutre et le point le plus éloigné de celui-ci suivant la direction axiale  $Y$  ou  $Z$  .

$M$ ,  $I$  et  $v$  sont considérés dans la section dangereuse

$\bar{\sigma}$  : contrainte admissible, généralement comprise dans l'intervalle :

$$\frac{1}{2} R_e \leq \bar{\sigma} \leq \frac{2}{3} R_e \quad (I.2)$$

où  $R_e$  représente la limite élastique du matériau.

Flexion simple : Si entre deux points d'une poutre droite reposant sur deux appuis, soumise à des forces verticales ( $N = 0$ ) situées symétriquement



par rapport au plan vertical passant par la fibre moyenne, nous avons :  $M \neq 0$ ,  $T \neq 0$  et  $N = 0$

on dit que cette poutre travaille à la flexion simple.

La poutre est donc soumise simultanément à un moment de flexion qui produit une rotation, et un effort tranchant qui provoque un glissement tangentiel de ses sections.

Les déformations du plan des sections étroites influent très peu sur la valeur des contraintes normales. On admet donc que les formules établies en flexion pure pour le calcul des contraintes sont applicables en flexion simple.

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{I} \leq \bar{\sigma} \quad (I-3)$$

Flexion composée :

On dit qu'une poutre est soumise à la flexion composée si les éléments de réduction au centre de gravité des sections droites sont tels que :

$$M \neq 0 \quad T \neq 0 \quad \text{et} \quad N \neq 0$$

Les contraintes normales sont dues, d'une part au moment de flexion  $M$ , d'autre part à l'effort normal  $N$  (compression simple ou traction simple)

$$\sigma = \pm \frac{My}{I} \pm \frac{N}{\Omega} \quad (I-4)$$

# I-2 METHODE DES ELEMENTS FINIS

## I-2.1 : Concept d'élément fini

Les structures couramment utilisées par les ingénieurs sont composées d'une réunion de parties indépendantes reliées entre elles ayant des géométries diverses telles que barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives .. etc

L'analyse de ces structures ou milieux continus peut se faire par différentes approches.

Les méthodes classiques d'analyse se trouvaient d'une utilité limitée par le grand nombre d'équations mises en jeu pour la résolution, mais le développement de l'outil informatique a levé cette limitation. Ces méthodes ont été ensuite solidement établies de façon à tirer le maximum d'avantages des possibilités de l'ordinateur, on les appelle "méthodes matricielles", valables seulement pour les structures en treillis.

La méthode des éléments finis représente l'extension des méthodes matricielles pour l'étude des milieux continus.

On étudie dans ce cadre un modèle discret basé sur une subdivision du domaine continu en sous-domaines de forme géométrique simple appelés "éléments finis" interconnectés

en des points remarquables appelés "nœuds" et on définit dans chaque élément une approximation permettant de résoudre le problème en fonction, uniquement des conditions aux nœuds.

I-2-2 : Types d'éléments : Ils sont classés suivant leurs géométries, on distingue essentiellement :

— Les éléments unidimensionnels : barres, poutres rectilignes ou courbes.

— Les éléments bidimensionnels : élasticité plane (plaques en membrane), plaques en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire.

— Les éléments tridimensionnels : éléments de volume ou coques épaisses

— Les éléments axisymétriques : c'est une classe bien particulière (tores, coques coniques...)

I-2-3 : Formulation :

On distingue deux types de formulations, à chacune correspondent par leurs natures, les paramètres inconnus à déterminer :

\* La méthode des forces où les inconnues sont les forces résultantes dans l'élément.

\* La méthode des déplacements où les inconnues sont les déplacements (ou les rotations) aux nœuds.

On doit d'abord passer par la formulation élémentaire au niveau de chaque élément, puis à la formulation globale au niveau de la structure complète.

Dans le cadre de notre travail on s'intéresse à la méthode de déplacements ou qu'elle est la plus utilisée et la plus compatible avec notre problème tel qu'il est posé.

La formulation élémentaire consiste à rechercher pour chaque élément les expressions matricielles des énergies et du travail des forces appliquées en fonction des déplacements aux nœuds de l'élément.

Ces expressions s'écrivent pour le cas statique :

$$\text{Energie de déformation : } U_e = \frac{1}{2} q^T K^e q^e \quad (1-2.1)$$

$$\text{Travail des forces appliquées } \bar{C}^e = q^{eT} F^e \quad (1-2.2)$$

$K^e$  : matrice de rigidité élémentaire

$F^e$  : vecteur de forces équivalentes élémentaires.

La formulation globale s'écrit :

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \quad (1-2.3)$$

$$\bar{C} = q^T F \quad (1-2.4)$$

L'équation d'équilibre de la structure globale est obtenue par application directe du principe des travaux virtuels.

$$\delta U = \delta \bar{C}$$

$$\delta q^T K q = \delta q^T F$$

d'où :  $K \cdot q = F$  (I-2.5)

La résolution de ce système linéaire des équations d'équilibre permet de déterminer le vecteur  $q$  des déplacements nodaux inconnus, et l'analyse se termine par la détermination des contraintes dans les éléments.

En pratique, il est évident que le grand nombre de paramètres et la nature répétitive des calculs exigent que l'analyse des structures par la M.E.F doit se faire par ordinateur.

**CHAP II**

**MODELISATION**

**EN**

**R . D . M**

## II.1 - NECESSITE D'UNE MODELISATION

Pour l'étude de toute structure, (phénomène ou processus) réellement existant il faut d'abord procéder à des schématisations simplifiant la structure, dans l'objectif de rendre possibles la formulation et l'analyse mathématique de la structure ( du phénomène ou du processus ).

Dans cette étude on propose un modèle simplifié permettant l'étude de la structure du châssis par les lois élémentaires de la résistance des matériaux (RDM).

Les simplifications du modèle et les hypothèses admises doivent se faire sans toutefois s'éloigner de la réalité.

## II.2 - DESCRIPTION DU VEHICULE ET PRESENTATION DU CHASSIS

Le châssis à étudier est celui du camion K120 produit par la SNVI . ( châssis type "extralong" )

Le K120 (omexe ) est un véhicule destiné au transport de matières "en sac" pour les moyens trajets ayant les spécifications suivantes :

- Poids du châssis-cabine en ordre de marche 4000 Kg
- Charge totale : charge utile + carrosserie 8000 Kg
  - } Conducteur et passagers
  - } roue de secours
- Poids total autorisé en charge du véhicule isolé: 12000 Kg

répartis : max sur avant 4200 kg  
max sur arrière 8400 kg

- Boîte de vitesses type

- Moteur F6L912 dont les caractéristiques sont :

- Puissance 110 ch.
- Rotation 2800 tr/min
- Couple 33 m.daN (33,7 m.kg)

D'autres données utiles sont :

• Poids de la boîte de vitesses (type BXS) assemblée avec le moteur : 640 kg.

- Poids à plein du réservoir à combustible : 165 kg
- Poids du coffre à batteries et réservoir à air : 90 kg
- Poids de la roue de secours : 120 kg
- Poids du conducteur et passagers : 500 kg

Le châssis de ce camion est constitué par deux longerons en tôle d'acier doux laminé à chaud emboutis en forme de U, caractérisés par les propriétés mécaniques suivantes :

- Limite élastique à 0,2%  $R_e [Kg/mm^2] \geq 23$
- Résistance à la rupture  $R_r [Kg/mm^2] \in [34 \div 44]$
- Allongement :  $(L=5,65 \sqrt{S})$  :  $A \geq 30\%$

Les deux longerons sont reliés par huit traverses en tôle d'acier doux laminé à chaud (tôle 3C) dont les propriétés mécaniques sont :



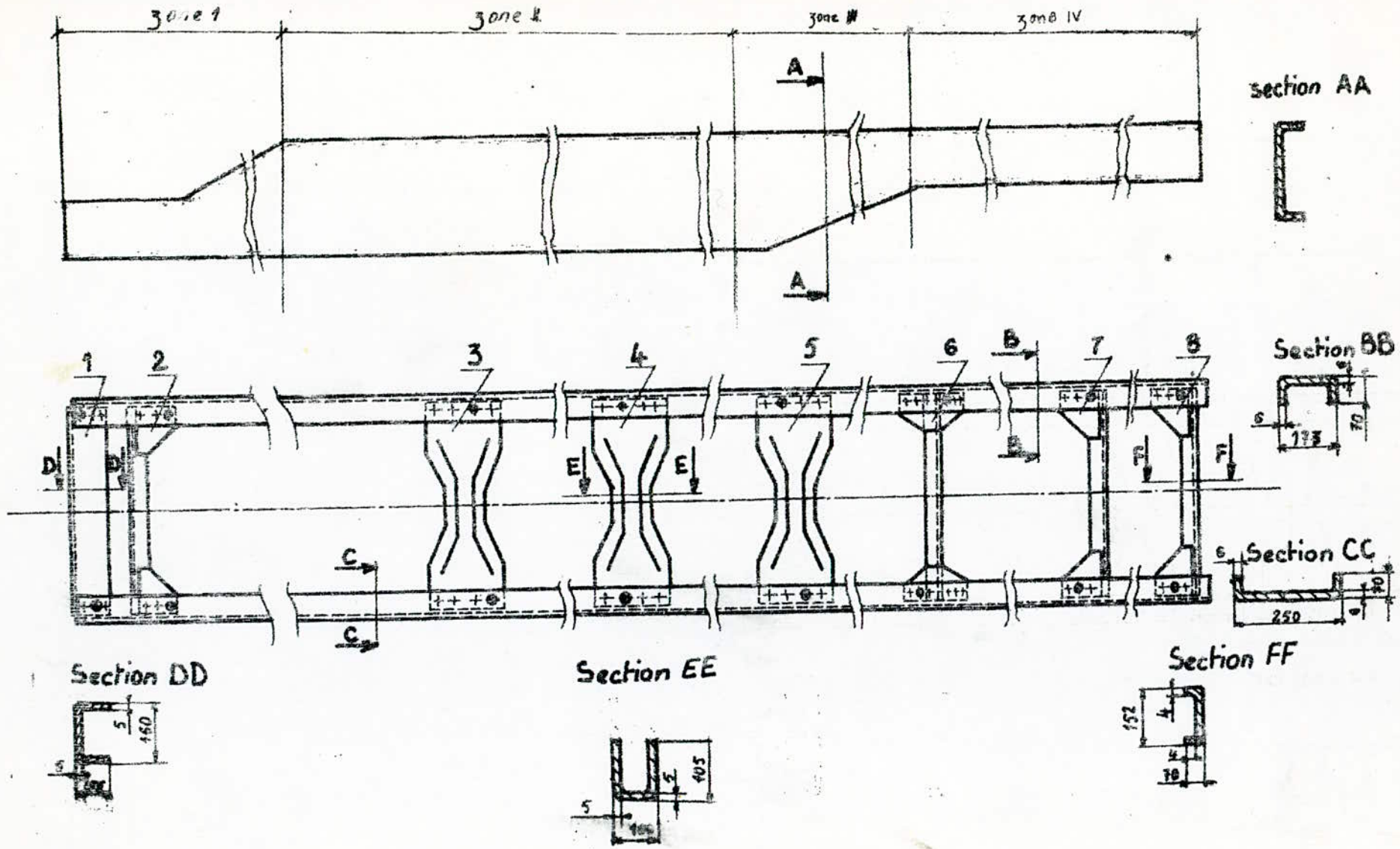


Fig (1.3)

- Limite élastique :  $R_e [Kg/mm^2]_{maxi} = 25$
- Résistance à la rupture :  $R_r [Kg/mm^2]_{maxi} = 36$
- Allongement :  $A = 33\%$  ( $e < 3, l_0 = 80$ )  
 :  $A = 39\%$  ( $e \geq 3, l_0 = 8,16 \sqrt{S_0}$ )

La liaison longeron - traverse est une liaison rigide indéformable assurée par rivetage.

## II.3 - MODELISATION ET REPARTITION DES CHARGES

Le modèle qu'on propose pour arriver à un schéma statique utile à l'étude par les lois de la résistance des matériaux suppose que chaque longeron est considéré comme une poutre chargée verticalement reposant sur deux appuis constitués par l'essieu avant et l'essieu arrière.

### II.3.1 Types d'appuis :

La liaison essieu - châssis se fait par l'intermédiaire des ressorts à lames (fig 2.1), ressorts courants de suspension des véhicules industriels. Ceux-ci sont fixés de telle façon que la longueur AB (fig. 2.2) varie pendant la flexion. Cette flexion due à la charge nécessite que le ressort à lames soit articulé aux deux extrémités, de plus la jumelle permettant le glissement de l'extrémité B.

Cet aperçu sur le mode de liaison nous permet la considération d'un appui double à l'avant et un appui simple à l'arrière pour chacune des deux poutres.

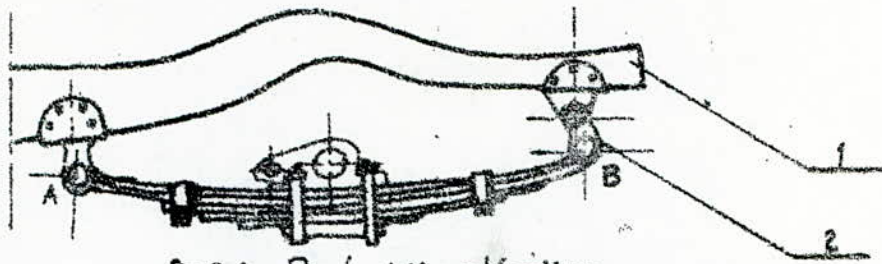


Fig 2.1 : Représentation schématisée  
d'un ressort à lame.

- ⊙ Chassis
- ⊙ jumelle



Fig 2.2 : Fonction de la jumelle  
dans un ressort à lame

### II.3.2. Mode de chargement et répartition des charges

Les contraintes statiques auxquelles est soumis le châssis sont constituées par les charges verticales qui soumettent le véhicule à des effets de flexion.

Ces charges sont constituées essentiellement par le poids propre du châssis, la carrosserie, la charge transportée, le conducteur et les passagers, le moteur et boîte de vitesses, le réservoir de combustible, les réservoirs à air comprimée, le coffre à batteries et la roue de secours.

On note par  $F_i, Q_i$  les forces concentrées et réparties appliquées sur la poutre (I) (longeron de droit) et par  $F'_i, Q'_i$  celles appliquées sur la poutre (II) (longeron de gauche).

À la roue de secours correspondent deux efforts (fig 2-3).

$$F_1 = F'_1 = \frac{P_{rs}}{2}$$

À l'ensemble moteur-boîte supporté par quatre supports, correspondent quatre efforts (fig 2-3) :

$$F_2 = F_3 = F'_2 = F'_3 = P_{moteur.boite} / 4$$

À la cabine supportée par quatre supports correspondent quatre efforts égaux : (fig 2-3)

$$F_4 = F_5 = F'_4 = F'_5 = P_{cabin} / 4$$

Le poids propre du chassis, celui du plateau et le poids de la charge transportée sont considérés comme une charge répartie sur une longueur de 6,36 m, répartis équitablement ( $Q = Q'$ ), sur les deux longerons. (fig 2-3)

Au réservoir de combustible (sur la poutre (I)) correspond un effort  $F_6$  égal à son poids à plein. Symétriquement, sur la poutre (II) un effort  $F'_6$  correspond au coffre de batteries et réservoirs à air (fig 2-3).

Au conducteur et passagers correspondent deux efforts  $F_7 = F'_7$  (estimation 100 kg/personne) (fig 2-3)

### II-3.3 : Présentation du modèle :

À la base de cette modélisation et utilisant les données délivrées par les services de la SNVI, le modèle proposé pour l'étude est le suivant (fig 2-3)

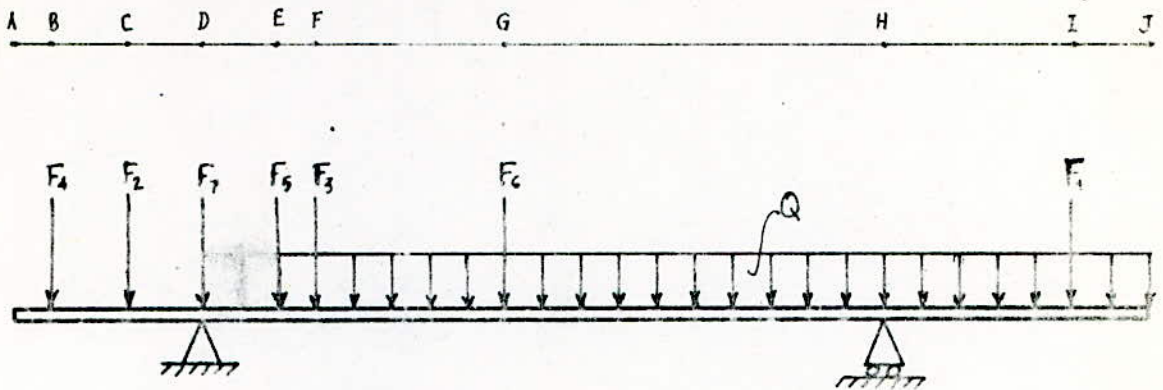


Figure 2-3 : Schéma statique pour  
étude par R.D.M

$$F_1 = 60 \text{ Kg}$$

$$F'_1 = 60 \text{ Kg}$$

$$F_2 = 160 \text{ Kg}$$

$$F'_2 = 160 \text{ Kg}$$

$$F_3 = 160 \text{ Kg}$$

$$F'_3 = 160 \text{ Kg}$$

$$F_4 = 120 \text{ Kg}$$

$$F'_4 = 120 \text{ Kg}$$

$$F_5 = 120 \text{ Kg}$$

$$F'_5 = 120 \text{ Kg}$$

$$F_6 = 165 \text{ Kg}$$

$$F'_6 = 90 \text{ Kg}$$

$$F_7 = 150 \text{ Kg}$$

$$F'_7 = 150 \text{ Kg}$$

$$Q = 592 \text{ Kg/m}$$

$$Q' = 592 \text{ Kg/m}$$

$$AB = 205 \text{ [mm]} \quad GH = 2918 \text{ [mm]}$$

$$BC = 420 \text{ [mm]} \quad HI = 1180 \text{ [mm]}$$

$$CD = 580 \text{ [mm]} \quad IJ = 393 \text{ [mm]}$$

$$DE = 397 \text{ [mm]}$$

$$EF = 50 \text{ [mm]}$$

$$FG = 1120 \text{ [mm]}$$

**CHAP III**

**EFFORTS'**

**INTERNES'**

La nature du problème indique que les poutres modélisant le châssis sont seulement sollicitées à la flexion simple  
(  $N=0$  ,  $T \neq 0$  ,  $M \neq 0$  )

Remarque : Du point de vue chargement, on remarque une symétrie entre les poutres (I) et (II) à l'erreur près de l'effort  $F'_6$  qui est différent de  $F_6$  ( $F'_6 = 90 \text{ Kg}$  ;  $F_6 = 165 \text{ kg}$ ) mais le fait que  $F'_6$  soit inférieur à  $F_6$  indique que le diagramme de  $M(x)$  (cf III.2.2) pour la poutre (II) (semblable à celui de la poutre (I) par raison de symétrie) ait des extrêmes un peu inférieurs.

Dans ces conditions, on peut se permettre de baser le dimensionnement seulement sur les calculs de la poutre (I) la plus chargée.

### III-1-REACTIONS D'APPUIS

#### III-1-1- Appui arrière: H (fig 2-3)

L'équation de la statique peut s'écrire :

$$\sum_i M_i / D = 0 \quad (\text{III-1})$$

$$R_H = \frac{-F_4 \cdot 1 - 0,58 F_2 + 0,397 F_5 + 0,447 F_3 + 1,567 F_6 + 3,577 Q + 6,37 F_1}{4,485}$$

$$R_H = 3126 \text{ Kg}$$

#### III-1.2 - Appui avant: D (fig 2.3)

L'équation de la statique donne :

$$\sum_i M_{0i}/H = 0 \quad (\text{III-2})$$

$$R_D = \frac{-1,88 F_1 - \frac{(1,136)^2}{2} Q + \frac{(2,044)^2}{2} Q + 2,918 F_6 + 4,038 F_3 + 4,088 F_5}{4,485} +$$

$$+ \frac{4,485 F_7 + 5,065 F_2 + 5,485 F_4}{4,485}$$

$$R_D = 1575 \text{ kg.}$$

### III-2 - CONSTRUCTION DES DIAGRAMMES

#### III-2-1 - Effort tranchant :

L'effort tranchant dans une section d'abscisse  $x$  (fig 3.1)

est défini comme étant égal à  $YV$

la somme des projections de toutes

les forces appliquées à gauche de cette section (y compris les réactions d'appuis).



Fig. 3.1

L'effort tranchant s'écrit comme une fonction constante ( $T(x) = K$ ) si la charge est concentrée et s'écrit comme une fonction linéaire de  $x$  ( $T(x) = q \cdot x$ ) si la charge est répartie.

La construction du diagramme est faite directement en se basant sur ces définitions (fig 3-2-0)

#### III-2-2 - Moment Fléchissant :

Il est défini comme étant égal à la somme des moments



des forces agissant à gauche de la section (y compris les réactions d'appuis).

Le moment fléchissant se déduit de l'effort tranchant par l'expression :  $M(x) = - \int T dx$  (III-3)

Autrement dit, il représente l'aire limitée par l'axe des x et la courbe T(x).

La construction du diagramme de M(x) peut donc se faire directement par la méthode de sommation des aires (fig 3-2.b)

### III-2-3 - Expressions de M(x)

Se référer à la figure (2-3)

[A-B]  $x \in [0 \div 0,205]$  [m]

$$M_1(x) = 0$$

[B.C]  $x \in [0,205 \div 0,625]$  [m]

$$M_1(x) = -F_4 (x - 0,205)$$

[C.D]  $x \in [0,625 \div 1,205]$  [m]

$$M_2(x) = M_1(x) - F_2 (x - 0,625)$$

[D.E]  $x \in [1,205 \div 1,602]$

$$M_3(x) = M_2(x) + (R_D - F_7) (x - 1,205)$$

[E.F]  $x \in [1,602 \div 1,652]$

$$M_4(x) = M_3(x) - F_5 (x - 1,602) - Q \frac{(x - 1,602)^2}{2}$$

[F.G]  $x \in [1,652 \div 2,772]$

$$M_5(x) = M_4(x) - F_3 (x - 1,652)$$

$$[GH] \quad x \in [2,772 \div 5,690]$$

$$M_6(x) = M_5(x) - F_6(x - 2,772)$$

$$[HI] \quad x \in [5,690 \div 7,57]$$

$$M_7(x) = M_6(x) + R_H(x - 5,690)$$

$$[IJ] \quad x \in [7,57 \div 7,96]$$

$$M_8(x) = M_7(x) - F_1(x - 7,57)$$

Les diagrammes  $T(x)$  et  $M(x)$  pour la poutre modèle (fig 2-3) sont dessinés sur la page suivante (fig 3-2)

On a montré sur les diagrammes les valeurs numériques de  $T(x)$  en [Kg] et de  $M(x)$  en [Kg.m] au niveau des sections particulièrement sollicitées.

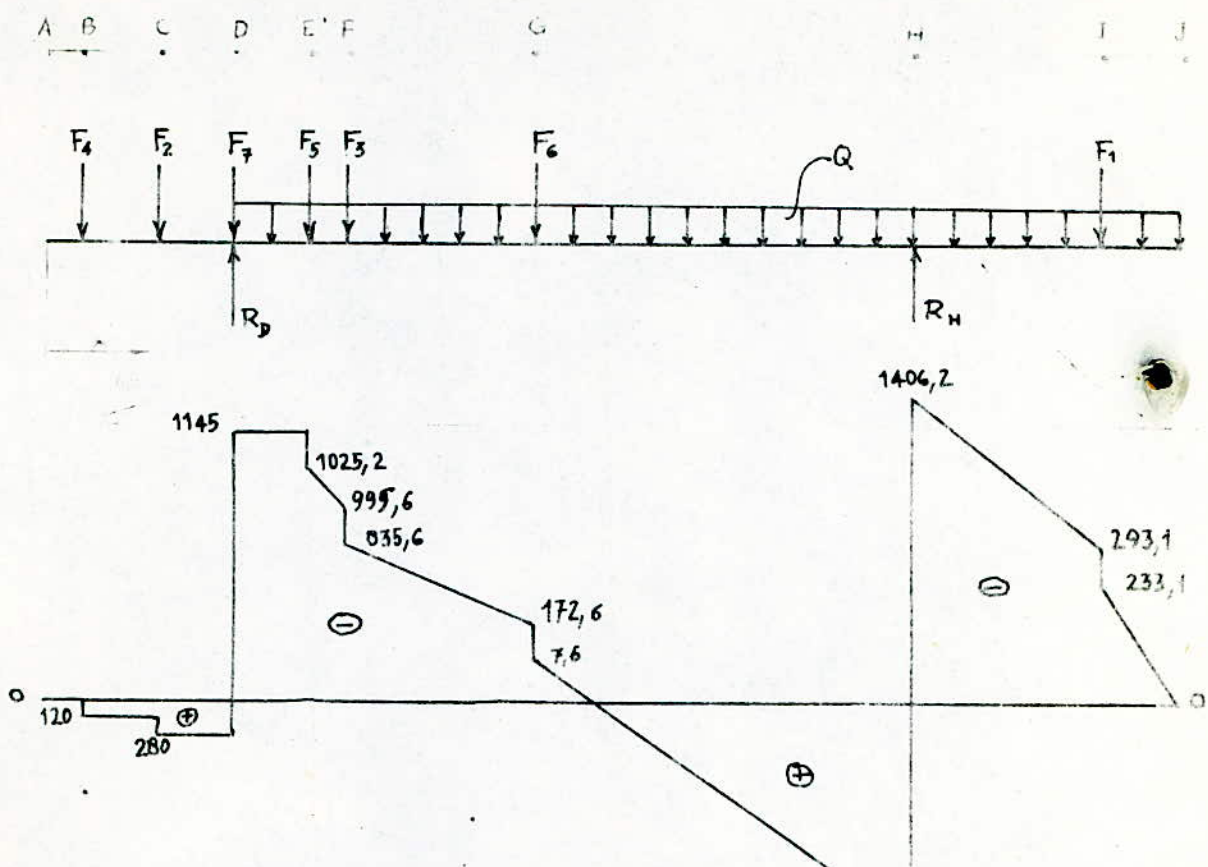


fig 3.2-a : Effort tranchant

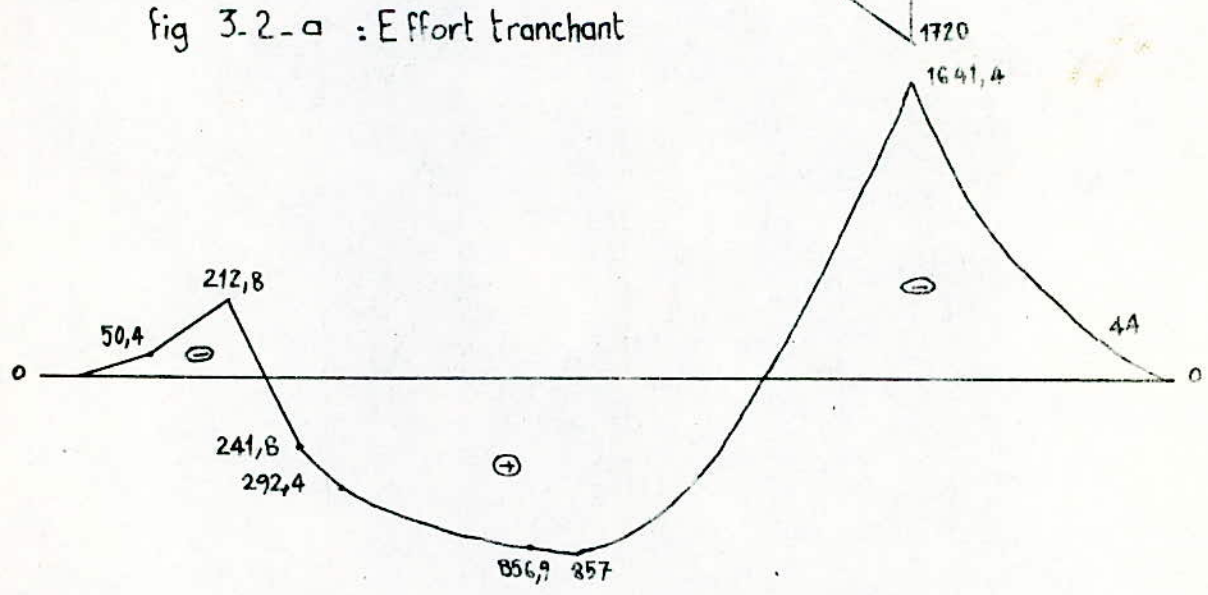


fig 3.2-b : Moment fléchissant

**CHAP IV**  
**VERIFICATION**  
**DE**  
**CONTRAINTES**  
**ET**  
**DIMENSIONNEMENT**

## IV-1 - VERIFICATION DE CONTRAINTES

La relation (2-2) limite la plage de la contrainte admissible :

$$\frac{1}{2} R_e \leq \bar{\sigma} \leq \frac{2}{3} R_e$$

La limite élastique pour l'acier A (longerons) est telle que :

$$R_e \geq 23 [\text{kg/mm}^2] \quad (\text{cf. § II-2})$$

$$\text{d'où} \quad 11,5 \text{ kg/mm}^2 \leq \bar{\sigma} \leq 15,33 \text{ kg/mm}^2 \quad (\text{IV-1})$$

c'est à dire un coefficient de sécurité  $S$  tel que :

$$1,5 \leq S \leq 2 \quad (\text{IV-2})$$

Dans ce qui suit on calcule les contraintes maximales dans la section dangereuse de la poutre, soit la section en H (fig ).

### IV-1-1 - Vérification de la section minimale du Longeron réel.

le moment d'inertie  $I_z$  est donné par

$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \quad (\text{IV-3})$$

Pour la section minimale du longeron :

$$B = 70, b = 64, H = 173, h = 161, e = 6 [\text{mm}]$$

$$\text{An. } I = 7\,945\,850,5 \text{ mm}^4$$

$$v = \frac{H}{2} \quad (\text{IV-4})$$

$$\text{An. } v = 86,5 \text{ mm}$$

En utilisant la relation (I-3) on obtient :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} v}{I} = \frac{1641,37 \cdot 10^3 \cdot 86,5}{7\,945\,850,5}$$

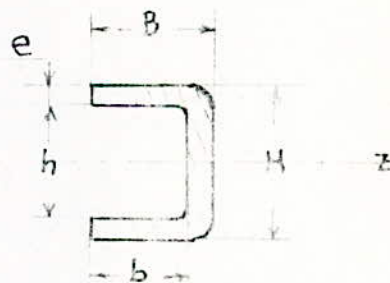


Fig 4-1 : section d'une poutre en U.

$$\sigma_{\max} = 17,87 \text{ [kg/mm}^2\text{]} > \bar{\sigma}_{\max}$$

Cette section ne permet pas à la poutre de résister à la contrainte maximale. La poutre ne peut donc avoir cette section (fig 4-1) que dans ses parties les moins sollicitées:

#### IV.1.2 - Vérification de la section maximale du longeron réel.

Pour la section maximale on a : (fig 4-1)

$$B = 70, b = 64, H = 250, h = 238, e = 6 \text{ [mm]}$$

$$I_z = 19\,245\,716 \text{ mm}^4$$

$$v = 125 \text{ mm.}$$

La contrainte maximale, en utilisant la relation (1.3),

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot v}{I} = \frac{1641,37 \cdot 10^3 \cdot 125}{19\,245\,716}$$

$$\sigma_{\max} = 10,66 \text{ kg/mm}^2 < \bar{\sigma}_{\min}$$

La contrainte maximale est inférieure à la valeur minimale de la contrainte admissible, donc la section correspondante peut être utilisée, sans risque, pour toute la longueur de la poutre.

#### IV.2. DIMENSIONNEMENT

Les longerons sont commandés sous forme de large-plats d'épaisseur constante  $e = 6 \text{ mm}$ .

On se propose d'autre part de garder la côte B (fig 4-1) constante ( $B = 70 \text{ mm}$ ) et on ne fait varier que H pour varier la section.

Il a été vu au début de ce paragraphe que la plage de la contrainte admissible est :

$$11,50 \leq \bar{\sigma} \text{ [kg/mm}^2\text{]} \leq 15,33$$

Si  $\sigma_{\max} < 11,50 \text{ kg/mm}^2$  on a un surdimensionnement.

Si  $\sigma_{\max} > 15,33 \text{ kg/mm}^2$  on a un sous-dimensionnement.

Pour avoir un bon dimensionnement, il faut que la contrainte maximale appartienne à la plage de la contrainte admissible, autrement dit :

$$\bar{\sigma}_{\min} \leq \sigma_{\max} \leq \bar{\sigma}_{\max}$$

Dans ce qui suit on se propose de procéder à un dimensionnement rigoureux par deux méthodes différentes :

#### IV.2.1 : Poutre à section constante :

La méthode consiste à délimiter la section (donc la hauteur  $h$ ) par une marge  $[S_{\min}, S_{\max}]$ , caractérisée par la marge de hauteur  $[H_{\min}, H_{\max}]$  de telle façon que la contrainte maximale à laquelle est soumise la poutre (en sa section dangereuse) soit comprise dans l'intervalle de contrainte admissible.

La poutre (longeron) est supposée avoir une section constante, appartenant à la marge  $[S_{\min}, S_{\max}]$ .

L'utilisation de la relation (I.3) entraîne :

$$M_v / I \leq \bar{\sigma}$$

qui s'écrit dans le cas limite  $\frac{M_v}{I} = \bar{\sigma}$

d'où  $M/I_v = \bar{\sigma}$  ou  $\frac{I}{v} = \frac{M}{\bar{\sigma}}$  (IV-5)

le moment d'inertie étant donné par (IV-3), fonction de H. v est donnée par (IV-4) aussi fonction de H.

La figure (4-1) montre que :

$H = h + 2e$  (IV-6)

$B = b + e$  (IV-7)

La combinaison de (IV-5, 6 et 7) entraîne :

$\frac{I}{v} = \frac{B}{6} H^2 - \frac{b}{6} \frac{h^3}{H}$

$h = H - 2e$  d'après (IV-6)

$h^3 = H^3 - 6H^2e + 12e^2H - 8e^3$

donc  $\frac{I}{v} = \frac{B}{6} H^2 - \frac{b}{6} \cdot (H^2 + 12e^2 - 6He - \frac{8e^3}{H})$

le terme  $8e^3/H$  est très petit devant les autres termes. ( $H^2, 12e^2, 6He$ ) - Pour illustration un exemple numérique est présenté sur le tableau (4-2).

Prenons une valeur moyenne de H, soit  $H = 215 \text{ mm}$ .

terme	(1)	(2)	(3)	(4)	—	—
expression [mm <sup>2</sup> ]	$H^2$	$6He$	$12e^2$	$8e^3/H$	—	—
valeur [mm <sup>2</sup> ]	46 225	7 740	432	8,0	—	—
rapport (4)/(1)	$174 \cdot 10^{-6}$	$1038 \cdot 10^{-6}$	$185 \cdot 10^{-4}$	1	—	—

Tableau : 4.2

En négligeant le terme (4), l'équation précédente devient :



$$\frac{I}{V} = \frac{(B-b)}{6} H^2 + beH - 2be^2$$

$$\frac{I}{V} = \frac{e}{6} H^2 + beH - 2be^2 \quad (IV-8)$$

Revenons à l'équation (IV-5) pour application numérique :

$$M_{\max} = 1641,4 \text{ Kg}\cdot\text{m} \quad (\text{fig 3-2})$$

$$\bar{\sigma}_{\min} = 11,50 \text{ Kg/mm}^2 \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_{\max} = 15,33 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}_{\min}} = 142\,728 \text{ mm}^3$$

$$\frac{M_{\max}}{\bar{\sigma}_{\max}} = 107\,046 \text{ mm}^3$$

La substitution de ces valeurs de  $M/\bar{\sigma}$  dans (IV-5) forme les deux équations limites :

$$H^2 + 384H - 147\,336 = 0 \quad (IV-9-1)$$

$$H^2 + 384H - 111\,654 = 0 \quad (IV-9-2)$$

Les solutions positives de ces deux équations représentent les hauteurs limites du dimensionnement recherché :

$$\text{On trouve} \quad H_{\max} = 238 \text{ mm} ; \quad H_{\min} = 194 \text{ mm}.$$

Cette méthode propose donc les dimensions suivantes pour les deux longerons emboutis en section U :

$$\left. \begin{array}{l} e = 6 \\ B = 70 \\ H = [194 - 238] \\ b = B - e \\ h = H - 2e \end{array} \right\} \text{ [mm]}$$

Il est à noter qu'on peut se permettre des diminutions de section en dessous de  $S_{\min}$ , dans les zones les moins sollicitées, si cela se trouve nécessaire. C'est d'ailleurs ce qui se présente sur le longeron réel (annexe 1) dans ses zones avant et arrière [ $H = 173 \text{ mm}$ ]. Sur le reste des parties du longeron on a remarqué que la section dépasse la section maximale prévue par les calculs.

#### IV.2.2 : Poutre à section variable :

Le dimensionnement, dans ce cas, est recherché en fixant la contrainte admissible une fois à sa limite inférieure (11,50), une deuxième fois à sa limite supérieure (15,33). On calcule ensuite les valeurs du moment fléchissant  $M(x)$  en plusieurs sections de la poutre, puis en se basant sur les hypothèses énoncées au début du chapitre concernant le procédé de variation de section, on détermine les dimensions de chaque section.

Pour cela on a développé un programme en FORTRAN, qui permet le calcul des valeurs de  $M(x)$ , puis celles de  $H(x)$ .

$$H(x) = -192 + \left[ 192^2 + (4608 - \frac{M(x)}{\sigma}) \right]^{1/2} \quad (\text{IV.10})$$

$H(x)$  est la solution de l'équation combinée de (IV.5) et (IV.8).

L'organigramme correspondant est présenté sur la page

Le programme, dit, DIM.FOR est en annexe.

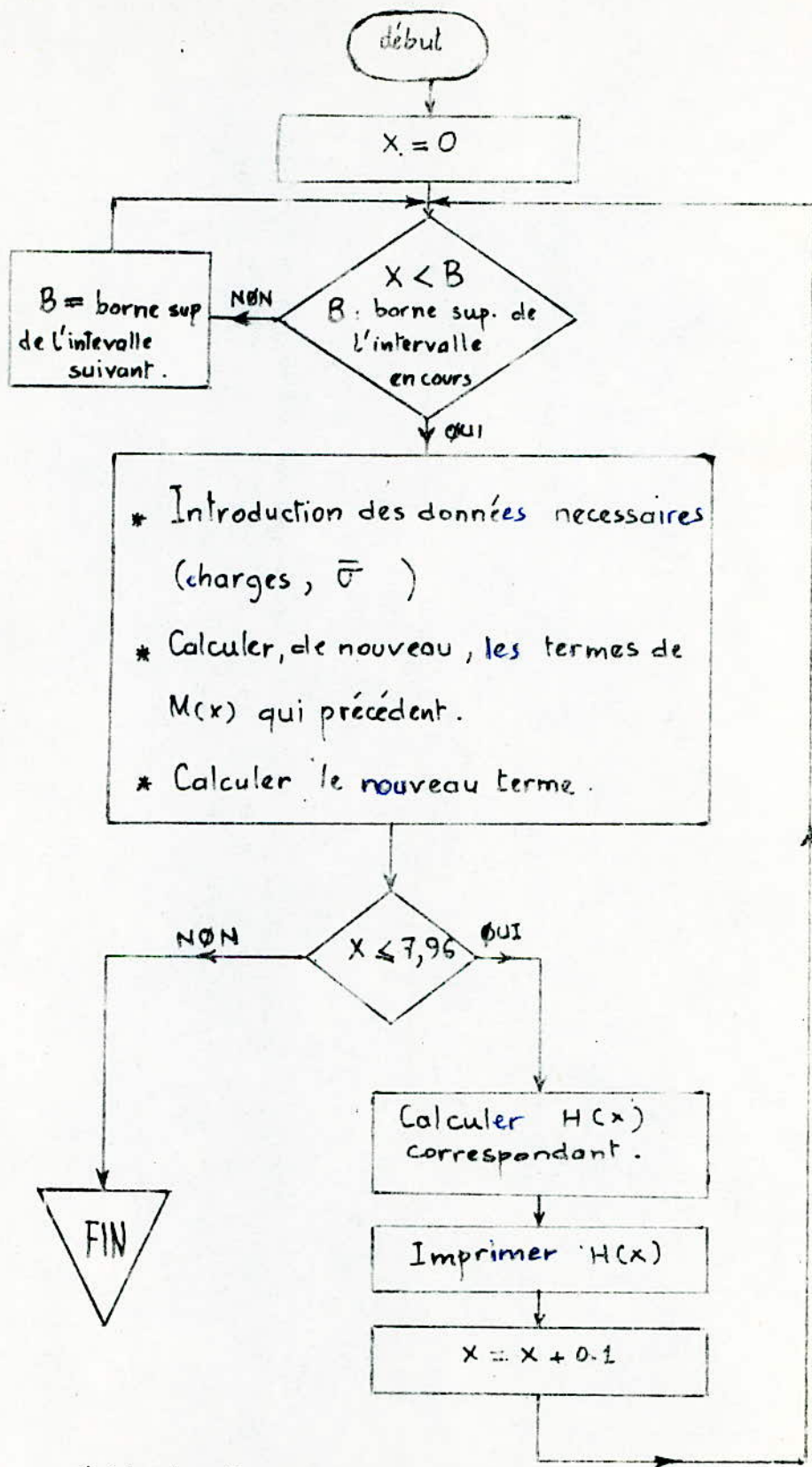


fig (4-3) : Organigramme pour dimensionnement.

L' épaisseur  $e$  et la largeur  $B$  (fig 4-1) étant maintenues constantes, les résultats du programme (DIM.FOR) nous ont permis d'établir le tableau comparatif (fig 4.4) ci-dessous.

$x$ [m]	$H_{Hh}(x)$ [mm] max.	$H_{V_{\text{red}}}(x)$ [mm]	$H_{Hh}(x)$ [mm] min.
0,000	16,7	173	15,4
0,100	14,2	173	13,5
0,200	11,6	173	11,6
0,300	14,0	173	13,4
0,400	16,5	173	15,3
0,500	19,0	173	17,2
0,600	21,4	173	19,0
0,700	26,3	173	22,7
0,800	31,8	173	26,9
0,900	37,2	173	31,1
1,000	42,4	185	35,1
1,100	47,5	201	39,1
1,200	52,6	217,5	43,0
1,300	32,7	234	27,7
1,400	13,8	250	13,2
1,500	36,8	250	30,8
1,600	57,5	250	46,9
1,700	73,4	250	59,4

$X$ [m]	$H_{th}(x)$ [mm] max.	$H_{réel}(x)$ [mm]	$H_{th}(x)$ [mm] min.
1,800	85,7	250	69,2
1,900	96,8	250	78,0
2,000	106,7	250	86,0
2,100	115,1	250	92,8
2,200	122,8	250	99,1
2,300	129,4	250	104,4
2,400	135,2	250	109,1
2,500	139,9	250	113,0
2,600	143,9	250	116,3
2,700	147,0	250	118,8
2,800	149,0	250	120,4
2,900	148,3	250	119,8
3,000	147,2	250	118,9
3,100	145,1	250	117,2
3,200	142,4	250	115,0
3,300	138,6	250	111,9
3,400	134,4	250	108,4
3,500	128,8	250	103,9
3,600	122,8	250	99,1
3,700	115,6	250	93,2
3,800	107,5	250	86,7

$x$ [m]	$H_{H_{\max}}(x)$ [mm]	$H_{\text{reel}}(x)$ [mm]	$H_{H_{\min}}(x)$ [mm]
3,900	98,1	250	79,1
4,000	87,7	250	70,8
4,100	75,7	250	61,2
4,200	62,3	250	50,7
4,300	46,8	250	38,5
4,400	29,4	250	25,1
4,500	14,0	250	13,4
4,600	35,1	250	29,4
4,700	55,2	250	45,1
4,800	75,0	250	60,7
4,900	94,2	250	76,0
5,000	113,0	249	91,1
5,100	131,5	242,5	106,1
5,200	149,8	236	121,1
5,300	167,9	230,5	135,9
5,400	185,8	225	150,7
5,500	203,6	217,5	165,4
5,600	221,2	210	180,1
5,700	235,5	205	192,0
5,800	221,5	198	180,3
5,900	207,3	191	168,5

X (m)	$H_{H_1}(x)$ [mm] max	$H_{réel}(x)$ [mm]	$H_{H_1}(x)$ [mm] min
6,000	193,5	185	157,0
6,100	179,8	179,5	145,7
6,200	166,2	173	134,5
6,300	153,0	173	123,7
6,400	139,9	173	113,0
6,500	127,1	173	102,5
6,600	114,7	173	92,5
6,700	102,6	173	82,7
6,800	91,0	173	73,4
6,900	79,7	173	64,4
7,000	68,6	173	55,6
7,100	58,7	173	47,8
7,200	48,8	173	40,1
7,300	40,4	173	33,5
7,400	32,0	173	27,1
7,500	24,9	173	21,6
7,600	18,8	173	17,0
7,700	15,0	173	14,2
7,800	12,3	173	12,1
7,900	12,3	173	12,1

Figure 4.4 : Tableau comparatif  
Dimensions réelles - Dimensions calculées

### IV-2.3 : Commentaire

La comparaison entre les deux procédés présentés dans les paragraphes IV-2-1 et IV-2-2 fait la remarque que la poutre à section constante présente l'avantage de la simplicité de fabrication tandis que la poutre à section variable profite de l'économie de matière alors que la fabrication est plus complexe donc exige un prix de revient plus élevé.

Le choix rigoureux de l'une des deux méthodes peut se faire par un calcul d'optimisation qui tient compte de plusieurs paramètres, principalement la disponibilité du matériel de fabrication, des frais de fabrication, des exigences de construction ... etc.

À l'exception de la zone  $5,6 < x(m) < 6,1$  où la section réelle est comprise dans la plage optimale (§ IV-2-1), on peut dire que le chassis réellement existant est, ou bien dans un état de surdimensionnement, ou qu'il a été conçu avec un coefficient de sécurité trop fort.



**CHAP V**  
**PRESENTATION**  
**DE LA**

**M . E . F**

METHODE

DES

ELEMENTS

FINIS

# V.1 - FORMULATION DES PROBLEMES STATIQUES

On a vu dans les généralités (§1.2) que les problèmes statiques se formulent par la relation (1.2.5).

Dans ce paragraphe on va formuler la matrice de rigidité élémentaire pour l'élément poutre puis la matrice de passage au repère global et l'assemblage des matrices élémentaires.

## V.1.1 - Matrice de rigidité d'un élément poutre

La matrice de rigidité d'une structure est la matrice K, permettant d'exprimer l'énergie de déformation sous une forme quadratique des déplacements :

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \quad (V.1.1)$$

Pour formuler K, on considère le cas général de la figure (5.1), la poutre possède six degrés de liberté au niveau de chaque noeud.

On désigne par u, v, w les déplacements suivant les trois axes, par  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  les rotations, par X, Y, Z les forces appliquées au noeud et par  $M_x, M_y, M_z$  les moments concentrés au noeud suivant les trois axes x, y, z.

. Vecteur déplacement :

$$q^T = [u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, u_2, v_2, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, \theta_{z2}] \quad (V.1.2)$$

. Vecteur force :

$$F^T = [X_1, Y_1, Z_1, M_{x1}, M_{y1}, M_{z1}, X_2, Y_2, Z_2, M_{x2}, M_{y2}, M_{z2}] \quad (V.1.3)$$

Dans les équations (v.1.2) et (v.1.3), les indices 1 et 2 désignent les nœuds ① et ②.

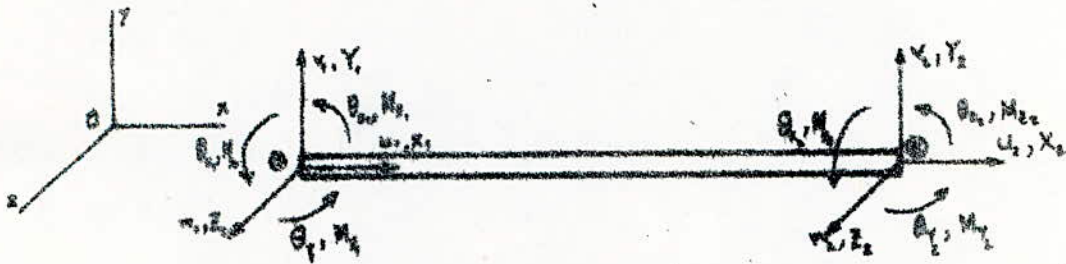


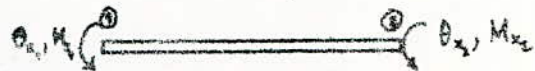
Figure 3.1 : Élément de poutre à six degrés de liberté par nœud.

Ce problème peut être considéré comme la superposition de quatre problèmes qu'on peut résoudre séparément.

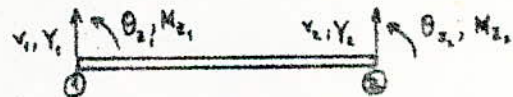
(a) Extension



(b) Torsion



(c) Flexion autour de Oz



(d) Flexion autour de Oy

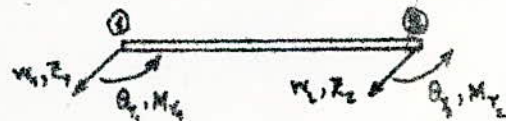


Figure 3.2 : Superposition

v.1.1.1 - Matrice de rigidité en extension.

La poutre de longueur  $L$  (fig 3.2.a) travaille à la traction sollicitée par les efforts  $X_1$  et  $X_2$ ;  $u_1, u_2$  étant les déplacements correspondants. On cherche  $K_E$  dans le système de coordonnées local  $Ox$  orienté de ① vers ②.

Soit  $u(x)$  le déplacement d'un point  $M$  quelconque de l'élément poutre. Sachant que la déformation  $\epsilon_x$  est constante dans un tel cas de sollicitation, on peut écrire :

$$u(x) = u_1 + (u_2 - u_1)x/L$$

$$\epsilon_x(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{L} (u_2 - u_1)$$

$$\text{d'où } u(x) = u_1 + \epsilon_x(x) \cdot x \quad (\text{VI-4})$$

L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$U = \int_V w \, dv \quad (\text{VI-5})$$

où  $w$  représente le potentiel de déformation :  $w = \frac{\sigma \epsilon}{2}$

et  $dv$  représente l'élément de volume  $dv = S \cdot dx$ .

On montre en utilisant la loi de Hooke que  $U$  peut s'écrire :

$$U = \int_0^L \frac{ES}{2} \epsilon_x^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2)$$

cette expression se met sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \frac{ES}{L} [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

d'où la matrice de rigidité en extension :

$$\mathbf{K}_E = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI-6})$$

V.1.1.2 - Matrice de rigidité en torsion :

L'énergie de déformation dans le cas de torsion (fig 5.2.b) est exprimé par :

$$U_T = \frac{GI_x}{2} \int_0^L \left( \frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 dx \quad (\text{VI-7})$$

Si la poutre n'est soumise qu'à des couples de torsion aux extrémités, la solution correspond à une variation linéaire de  $\theta_x$ .

De manière analogue au cas d'extension on obtient :

$$U_T = \frac{1}{2} q^T K_T q \quad \text{avec} \quad q^T = [\theta_{x_1} \quad \theta_{x_2}]$$

$$K_T = \frac{GI_x}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (VI.8)$$

### V.1.1.3 - Matrice de rigidité en flexion.

Considérons d'abord le cas de la flexion dans le plan  $xOy$ , (fig. 5-2-c). Pour déterminer  $K_x$  on doit passer par une suite d'étapes.

\* Choix de la fonction de déplacement :

C'est une fonction polynomiale  $v = f(x)$  devant avoir un nombre de constantes inconnues d'autant qu'il y a de degrés de liberté.

Pour le cas de la figure (5-2-c),  $v$  s'écrit :

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (VI.9)$$

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3 x + 3a_4 x^2 \quad (VI.10)$$

Le vecteur déplacement s'écrit alors :

$$\{q(x, y)\} = \begin{bmatrix} v \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (VI.11)$$

\* Conditions aux limites :

$$x=0 \quad v(x) = v_1 = a_1 \quad \theta_y = \theta_{y_1} = a_2$$

$$x=L \quad v(x) = v_2 \quad \theta_y = \theta_{y_2}$$

$$\text{avec :} \quad v_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3$$

$$\theta_{y_2} = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2$$

$$\text{Sous forme matricielle :} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{y_1} \\ v_2 \\ \theta_{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \quad (VI.12)$$

$$\text{Soit } [V] = [A] \cdot [a]$$

d'où en déduit le vecteur de constantes inconnues :

$$[a] = [A]^{-1} [V]$$

Il faudra donc déterminer la matrice inverse de A.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^2 & 1/L & -2/L^2 & 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{y_1} \\ v_2 \\ \theta_{y_2} \end{bmatrix}$$

\* Relation entre déplacements et déformations :

On considère le cas d'élasticité linéaire et on exprime l'énergie de déformation :

$$U = \frac{1}{2} \int \sigma \cdot \epsilon \cdot dv = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_x^2}{EI_x} dx$$

$$U = \frac{EI_x}{2} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad (VI.14)$$

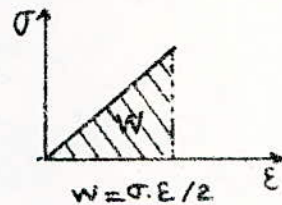


figure 5.3

D'après la loi de déplacement on a :

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = 2a_3 + 6a_4 x$$

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (VI.15)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 6x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12x \\ 0 & 0 & 12x & 36x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (VI.15 \rightarrow)$$

d'où l'expression de l'énergie de déformation :

$$U = \frac{EI_z}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

$$U = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 12L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \cdot \frac{EI_z}{2} \quad (VI-16)$$

Par substitution de (VI-15) dans (VI-16) on obtient en utilisant une autre fois la propriété de transposition :

$$U = \frac{EI_z}{2} [v_1 \ \theta_{y1} \ v_2 \ \theta_{y2}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/L^2 & 2/L^3 \\ 0 & 1 & -2/L & 1/L^2 \\ 0 & 0 & 3/L^2 & -2/L^3 \\ 0 & 0 & -1/L & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L & 6L^2 \\ 0 & 0 & 6L^2 & 12L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^2 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{y1} \\ v_2 \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}$$

Cette expression devient en effectuant le produit matriciel :

$$U = \frac{EI_z}{2L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{y1} \\ v_2 \\ \theta_{y2} \end{bmatrix}$$

Par analogie avec l'équation (VI-1), la matrice de rigidité en cas de flexion se déduit automatiquement :

$$K_x = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (VI-18)$$

En procédant de même pour le cas de flexion dans le plan (xOz), l'expression de  $K_y$  sera :

$$K_y = \frac{EI_y}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \quad (VI-19)$$

V.1.1.5 - Matrice de rigidité de l'élément complet :

L'expression de l'énergie de déformation totale est la somme des énergies des quatre cas :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} q^T K q \\ &= \frac{1}{2} [q_E^T K_E q_E + q_T^T K_T q_T + q_Z^T K_Z q_Z + q_Y^T K_Y q_Y] \\ U &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_E & q_T & q_Z & q_Y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} K_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_E \\ q_T \\ q_Z \\ q_Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice de rigidité de l'élément complet est écrite explicitement sur la page 41.



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} & \frac{12EI_x}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_x}{L} & -\frac{6EI_x}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_x}{L} \end{bmatrix} \quad (VI.20)$$

### V-1.2 - Changement de repère :

Dans l'analyse de structures, il est plus pratique d'utiliser des transformations de coordonnées.

Dans le cadre de la MEF (méthode des éléments finis), les calculs se font au niveau élémentaire puis global, d'où la commodité d'analyser chaque élément dans son repère local.

L'analyse dans un repère global (repère fixe) se fait en effectuant un changement de coordonnées.

Le passage du repère local au repère global peut se formuler matriciellement de la manière suivante.

On considère l'élément poutre AB de la figure (5.3).

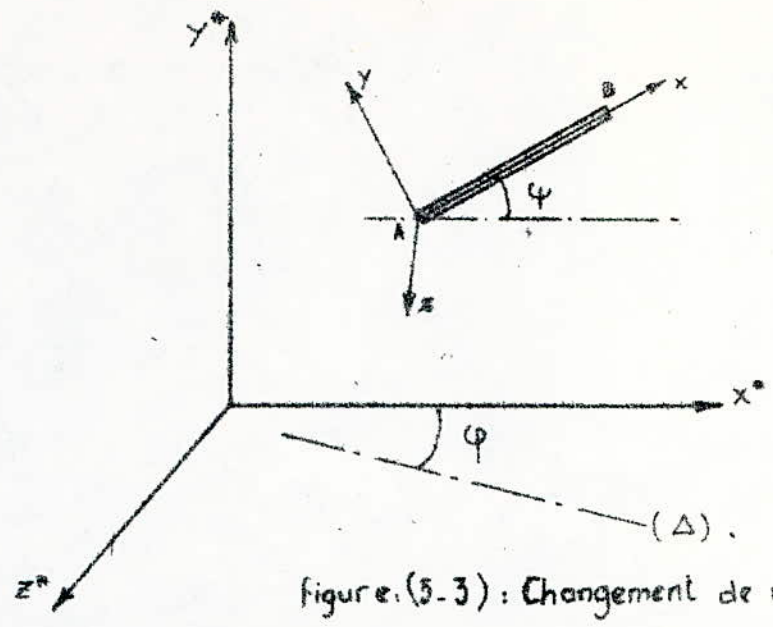


Figure (5.3) : Changement de repère.

Soient  $q, q^*$ ;  $F, F^*$  les vecteurs déplacements et forces élémentaires dans les repères local et global respectivement.

$\psi$  l'angle formé par  $Ax$  et un plan parallèle à  $x^*Oz^*$ .

$\varphi$  l'angle formé par l'axe  $Ox^*$  et la projection  $(\Delta)$  de  $Ax$  sur  $x^*Oz^*$ .

Le système d'équations (VI-21), ... d'un noeud quelconque  $i$  dans le repère global.

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \cos \varphi \cos \psi u_i^* + \sin \varphi v_i^* + \cos \varphi \sin \psi w_i^* \\ v_i &= -\sin \varphi \cos \psi u_i^* + \cos \varphi v_i^* - \sin \varphi \sin \psi w_i^* \\ w_i &= -\sin \psi u_i^* + \cos \psi w_i^* \end{aligned} \right\} \text{(VI-21)}$$

On peut ainsi écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ \theta_{z_1} \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ \theta_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ w_1^* \\ \theta_{x_1}^* \\ \theta_{y_1}^* \\ \theta_{z_1}^* \\ u_2^* \\ v_2^* \\ w_2^* \\ \theta_{x_2}^* \\ \theta_{y_2}^* \\ \theta_{z_2}^* \end{bmatrix} \quad \text{(VI-22)}$$

Dans l'équation (VI.22), le paramètre  $\lambda$  désigne l'expression

$$\lambda = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi & \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \psi & \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (\text{VI.23})$$

Les éléments de la matrice de passage sont définis à partir des coordonnées des nœuds dans le repère global.

$$\cos \psi = \frac{[(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}}{L} \quad (\text{VI.24})$$

$$\sin \varphi = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad (\text{VI.25})$$

$$\cos \varphi = \frac{x_2 - x_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}} \quad (\text{VI.26})$$

$$\sin \psi = \frac{z_2 - z_1}{L} \quad (\text{VI.27})$$

$$L = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (\text{VI.28})$$

L'énergie de déformation et le travail des forces élémentaires sont invariants dans toute transformation de coordonnées; d'où

$$2U = q^T K q = q^{*T} K^* q^*$$

En utilisant la relation (VI.22) on obtient

$$K^* = \Lambda^T K \Lambda \quad (\text{VI.29})$$

$$\text{avec } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{VI.30})$$

La propriété d'invariance du travail des forces élémentaires ( $q^T F = q^{*T} F^*$ ) permet d'obtenir en utilisant (VI.2) :

$$F^* = \Lambda^T F \quad (\text{VI.31})$$

### V.1.3 - Assemblage de la matrice de rigidité globale :

L'assemblage est une étape d'analyse effectuée dans le but d'établir la matrice de rigidité globale de la structure en question, à partir des matrices de rigidité élémentaires exprimées dans le repère global.

Sachant que du fait qu'un nœud peut être commun à plusieurs éléments, le déplacement (ou rotation) correspondant doit figurer dans plusieurs vecteurs élémentaires.

Pour formuler la matrice globale assemblée, on exprime les matrices élémentaires  $K$ , de dimension égale au nombre de degrés de liberté de l'élément, dans la dimension égale au nombre de degrés de liberté de toute la structure, que l'on appelle la matrice  $K$  globale. Cela est obtenu par insertion de lignes et colonnes de zéros.

En effet, soit l'élément  $m$  repéré dans la structure par ses nœuds  $i$  et  $j$ .

On a vu au deuxième paragraphe de ce chapitre que l'énergie de déformation s'écrit :

$$u^e = [q_i \quad q_j] \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} \quad (VI-32)$$

En exprimant  $u^e$  à l'aide du vecteur déplacement global, l'équation (VI-32) devient :

$$U^e = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_i & \dots & q_j & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & K_{11} & \dots & K_{12} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & K_{21} & \dots & K_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (V1-33.)$$

↓ une colonne
↓ une colonne

La matrice K globale assemblée est obtenue facilement en utilisant la propriété de sommation des énergies de déformation.

$$U_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n U_i \text{ élémentaires}$$

#### V.1.4 - Résolution :

L'analyse statique se termine par la détermination des déplacements nodaux et la détermination des contraintes dans les éléments.

##### V1.4.1 - Déplacements :

Les déplacements nodaux sont déterminés en résolvant le système matriciel (I21)

$$[F] = [K][q]$$

$[K]$  : matrice d'ordre  $(n, n)$

On doit donc faire appel aux méthodes d'analyse numérique, parmi lesquelles on choisit la méthode d'élimination de Gauss constituée de deux étapes.

##### V1.4.1.1 - Triangularisation :

Cette étape consiste à modifier progressivement le système (I21) de telle manière à éliminer tous les déplacements inconnus du vecteur  $[q]$  sauf le déplacement de la dernière ligne.

L'élimentation se fait suivant la procédure suivante :

Pour éliminer  $q_1$  nous utiliserons la première équation sous forme :

$$q_1 = \frac{1}{K_{11}} (F_1 - K_{12} q_2 - \dots - K_{1n} q_n) \quad (VI.34.a)$$

Reportons cette expression de  $q_1$  dans les équations qui suivent.

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ 0 & K_{22} - \frac{K_{21} K_{12}}{K_{11}} & \dots & K_{2n} - \frac{K_{21} K_{1n}}{K_{11}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K_{n2} - \frac{K_{n1} K_{12}}{K_{11}} & \dots & K_{nn} - \frac{K_{n1} K_{1n}}{K_{11}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 - \frac{K_{21} F_1}{K_{11}} \\ \vdots \\ F_n - \frac{K_{n1} F_1}{K_{11}} \end{pmatrix} \quad (VI.34.b)$$

Le système (VI.34) est noté plus simplement :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ 0 & K'_{22} & \dots & K'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & K'_{n2} & \dots & K'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F'_2 \\ \vdots \\ F'_n \end{pmatrix} \quad (VI.35)$$

On procède de même, jusqu'à obtenir la forme ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} K_{11} & & & & & \\ 0 & K'_{22} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & K''_{33} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & K'''_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K''''_{55} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K''''''_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F'_2 \\ F''_3 \\ F'''_4 \\ F''''_5 \\ \vdots \\ F''''''_n \end{pmatrix} \quad (VI.36)$$

L'algorithme de construction des matrices  $K$  nécessaires pour les étapes d'élimination, s'écrit :

$$\begin{array}{l}
 s = 1, 2, \dots, n-1 \\
 \quad i = s+1, s+2, \dots, n \\
 \quad \quad c = K_{is} \cdot K_{ss}^{-1} \\
 \quad \quad F_i = F_i - c F_s \\
 \quad \quad \quad j = s+1, s+2, \dots, n \\
 \quad \quad \quad K_{ij} = K_{ij} - c K_{sj}
 \end{array} \quad (VI.37)$$

#### VI.4.1.2 Résolution du système triangulaire supérieur :

La résolution se fait à partir de la dernière équation, en calculant successivement  $q_n, q_{n-1}, \dots, q_1$ .

L'algorithme correspondant s'écrit :

$$\begin{array}{l}
 q_n = K_{nn}^{-1} \cdot F_n \\
 \quad i = n-1, n-2, \dots, 1 \\
 \quad \quad q_i = K_{ii}^{-1} \left( F_i - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} q_j \right)
 \end{array}$$

#### VI.4.2 - Contraintes :

Dans ce paragraphe la formulation vue en § VI.1.3 est très utile. Chaque élément de la structure est sollicité par un état de contrainte composé par les deux flexions dans les plans  $xOy$  et  $xOz$  respectivement, et par l'extension.

$$\sigma_1 = \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_2 = \frac{M_y}{I_y} z \quad \sigma_3 = E \frac{du}{dx}$$

l'état de contrainte s'écrit donc :

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} z + E \frac{du}{dx} \quad (VI.39)$$

Sachant d'autre part que :

$$M_y = -EI_y \frac{d^2 w}{dz^2}$$

$$M_z = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}$$

on déduit une nouvelle expression de  $\sigma_x$  :

$$\sigma_x = E ( u'_x - y v''_y - z w''_z ) \quad (VI.40)$$

$u_x$ ,  $v_y$  et  $w_z$  représentent les déplacements généralisés.

Il reste donc à exprimer  $u'_x$ ,  $v''_y$  et  $w''_z$ . Or d'après § V.1.1.3, les fonctions de déplacement choisies sont :

$$u = d_0 + d_1 x \quad (\text{extension})$$

$$v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (\text{flexion dans } xOz)$$

$$w = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad (\text{flexion dans } xOy)$$

ou sous forme matricielle :

$$\{S(x)\} = [f(x)] [a]$$

$[f(x)]$  matrice d'ordre  $(6, 12)$  formée par l'assemblage des deux cas de flexions et de l'extension (\*)

Pour exprimer les déplacements nodaux (voir § V.1.1.3)

$$\{S(x)\} = [f(x)] [A]^{-1} [q^e]$$

$$\text{avec : } [A] = \begin{bmatrix} [f(x)]_{x=0} \\ [f(x)]_{x=L} \end{bmatrix} \quad \text{d'ordre } (12, 12)$$

$[A]$  exprimée relativement au vecteur de déplacements nodaux

$$[q^e] = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \theta_{z2}]$$

En fin  $u'$ ,  $v''$  et  $w''$  sont obtenus à l'aide de la relation (VI.41)

de la page 49.



$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \left[ \text{diff}(f(x)) \right] \left[ A \right]^{-1} \{q^e\} \quad (V1.41)$$

Mais on ne prend que les trois premières lignes de  $[f(x)]$  pour assurer la compatibilité du produit matriciel.

$$(3,1) \equiv (3,12) = (12,12) = (12,1)$$

La matrice  $[\text{diff}(f(x))]$  est obtenue en différenciant une fois la première ligne de  $f(x)$  et deux fois sa deuxième et troisième lignes.

(a) Expressions de  $[A]$  et  $[f(x)]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V1.42)$$

$$[f(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V1.43)$$

**CHAP VI**  
**MODELISATION**  
**EN**  
**ELEMENTS**  
**FINIS**

Dans ce chapitre, le châssis du véhicule K120 est modélisé par une succession d'éléments poutres.

## VI.1. CHOIX DES NOEUDS

Les noeuds sont choisis de façon à tenir compte de la géométrie, des liaisons mécaniques et des degrés de liberté.

On a essayé de répartir au mieux les noeuds sur toute la structure, sans toutefois s'éloigner de la définition de la poutre en résistance des matériaux.

Pour modéliser le châssis on est amené à définir trois types de noeuds caractérisés par leurs natures.

a/ Les noeuds correspondants aux changements de section de la poutre.

b/ Les noeuds correspondants aux points de connections des traverses avec les longerons.

c/ Les noeuds correspondants aux appuis se rapportent aux points de fixation des ressorts à lames.

La numérotation des noeuds est faite de telle façon que la différence maximale entre les numéros de deux noeuds voisins soit la plus petite possible.

Cette règle assure une matrice de rigidité dont les éléments forment une bande la plus petite que possible.

## VI.2. REPARTITION DES CHARGES

Le mode de chargement présenté au chapitre (II) est maintenu

pour le problème de répartition qu'on aborde dans ce paragraphe.

La concentration des charges aux noeuds est faite de la manière suivante :

a/ Charges concentrées :

Soit l'élément poutre (fig 6-1.a) ayant  $i, j$  pour numéros de noeuds, chargé par l'effort  $F$ .

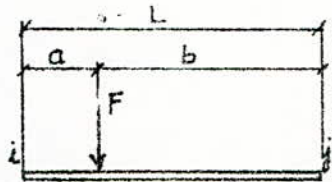


Fig 6-1.a : Elément réel.

En se basant sur les lois de la statique, l'effort  $F$  est remplacé par deux efforts  $F_i$  et  $F_j$  (fig 6-1.b) tels que :



Fig 6-1.b : Elément modèle.

$$\left. \begin{aligned} F_i + F_j &= F \\ F_i &= \frac{b}{L} F \\ F_j &= \frac{a}{L} F \end{aligned} \right\} \text{(VI.1)}$$

b/ Charges réparties :

D'après les lois de la statiques, la charge répartie  $Q$  (fig 6-2-a) peut se concentrer aux noeuds  $(n)$  et  $(m)$  telle que

$$\left. \begin{aligned} F_n + F_m &= QL \\ F_n = F_m &= \frac{QL}{2} \end{aligned} \right\} \text{(VI.2)}$$

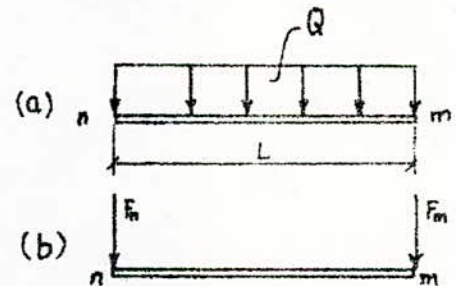


Fig 6-2.(a) : Elément réel.

(b) : Elément modèle.

En fin pour obtenir le changement résultant dans un noeud quelconque on fait la sommation de toutes les charges résultantes de la procédure ci-dessus.

## VI-3. CALCUL D'INERTIES

Les moments d'inertie d'une section transversale (fig 6-3) par rapport aux axes  $(Oy, Oz)$  sont définis par les intégrales :

$$I_y = \int_V z^2 dy dz \quad (VI-3-1)$$

$$I_z = \int_V y^2 dy dz \quad (VI-3-2)$$

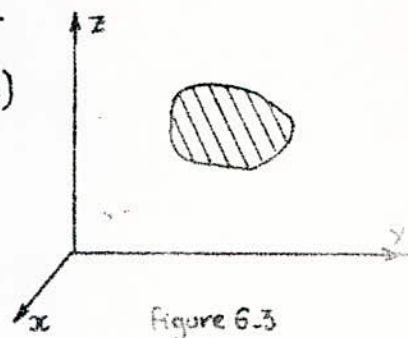


Figure 6-3

Le moment d'inertie par rapport à  $Ox$ , dit, polaire est donné par  $I_x = I_y + I_z$  (VI-3-3)

Les poutres de la structure étudiée sont de section U; les aides-mémoire de R.D.M. donnent les relations suivantes dans le cas particulier où  $Oy, Oz$  forment les axes principaux de la section.

$$I_y = \frac{BH^3 - (B-b)(H-2h)^3}{12} \quad (VI-3-4)$$

$$I_z = \frac{Hb^3 + 2h(B-b)^3}{12} + Hb \left( y_1 - \frac{b}{2} \right)^2 + 2h \left( \frac{B-b}{2} + b - y_1 \right) \quad (VI-3-5)$$

$$y_1 =$$

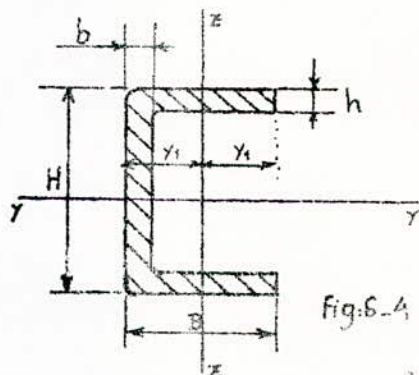


Fig. 6-4

Les résultats des calculs des inerties sont classés plus loin au paragraphe VII-3 parmi les données du programme "STATIC".

Il est à noter que quelques simplifications sont admises lors de cette modélisation, on en cite essentiellement :

a/ On considère une section moyenne entre plusieurs sections représentées sur la zone (I) du longeron (fig 6-6) et des valeurs moyennes des inerties pour cette même zone.

$$S_{\text{moy}_1} = 1993 \text{ [mm}^2\text{]}$$

b/ Pour la zone III du longeron réel (fig 6-6), on considère une section moyenne entre  $S_{\text{min}}$  et  $S_{\text{max}}$  de celui-ci.

$$S_{\text{moy}_{\text{III}}} = 2112 \text{ [mm}^2\text{]}$$

c/ Pour les traverses ⑩, ⑬ et ⑯ ayant une géométrie complexe on a considéré le cas défavorable correspondant à une section en U caractérisée par :

$$H = 100$$

$$B = 105$$

$$h = 5$$

$$b = 5$$

La modélisation en éléments finis de poutres, du châssis à étudier est illustrée sur les figures (6-5) et (6-6).

$i$  : numéro de noeud.  
④ : numéro d'élément.

Les coordonnées des noeuds et les sections des éléments sont classés avec les données du programme "STATIC"  
(Voir paragraphe VIII-1).

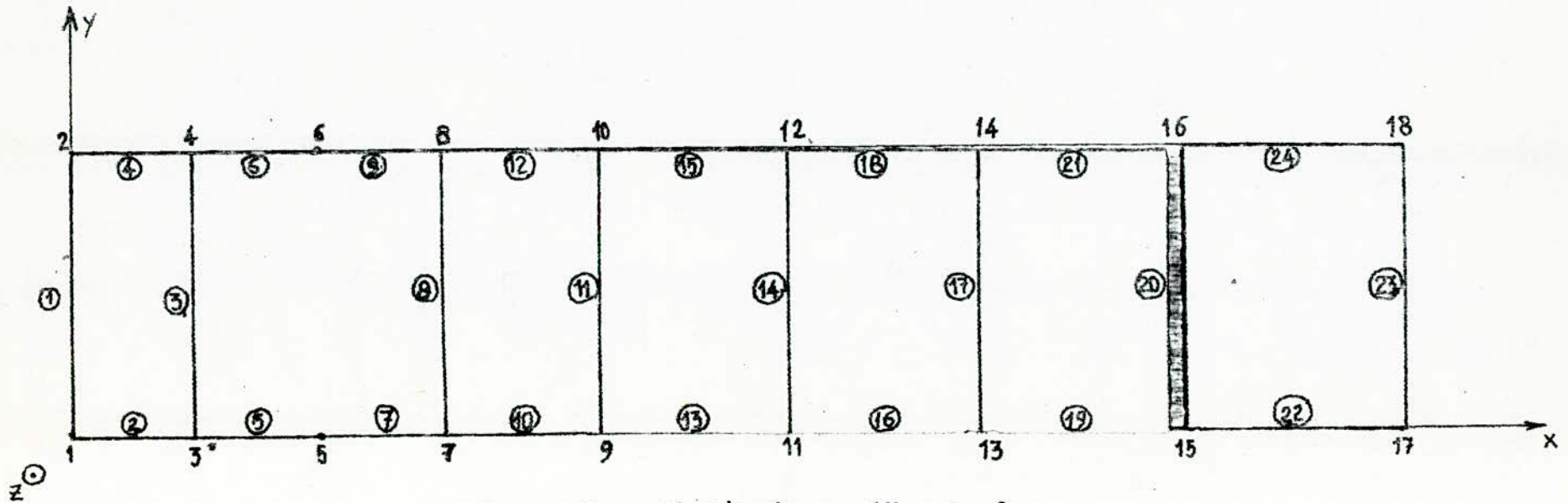


Figure 6-5 : Modelisation en éléments finis de poutres du chassis K120.

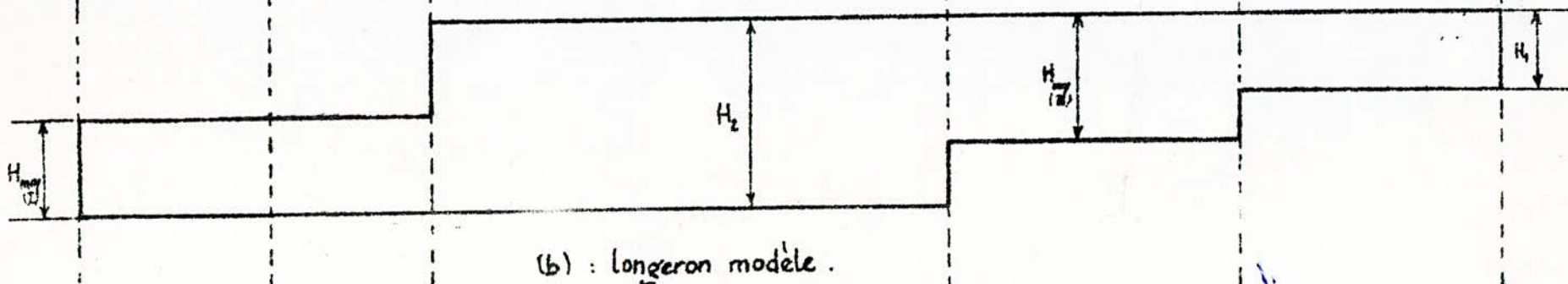
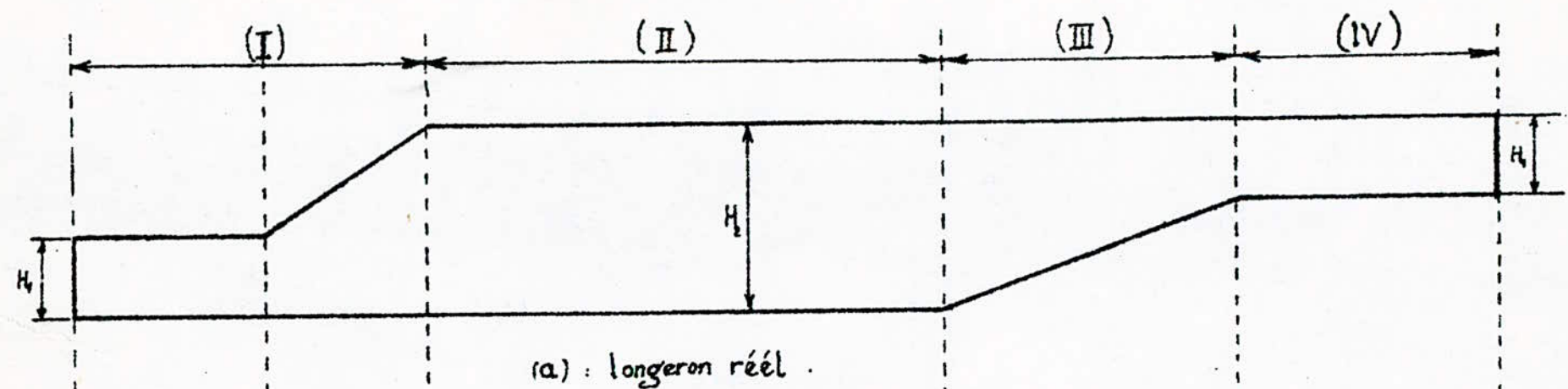


Figure 6-6 : Modélisation de la variation de section du longeron.



**CHAP VII**

**PROGRAMMATION**

L'organigramme de traitement général pour l'analyse statique utilisant la méthode des déplacements, est illustré sur la figure (7.1) de la page

Dans le cas particulier de notre problème on a développé un programme principal suivi de six sous-programmes de calcul matriciel.

## VII.1 - PROGRAMME PRINCIPAL "STATIC"

Les tâches essentielles effectuées par ce programme sont :

- Lecture du nombre de nœuds et nombre d'éléments.
- Lecture du tableau de nœuds.
- Lecture du tableau d'éléments.
- Lecture du tableau de charges.
- Calcul du nombre de degrés de liberté.
- Arrangement des éléments de la matrice de rigidité sous forme de bande.
- Génération de la matrice de rigidité et de passage élémentaires.
- Assemblage de la matrice de rigidité de la structure.
- Assemblage du vecteur force global de la structure.
- Résolution du système linéaire et détermination des déplacements nodaux.
- Calcul des contraintes dans les éléments.

## VII\_2\_SOUS\_PROGRAMMES

Les sous-programmes utilisés pour le calcul matriciel sont introduits dans le programme principal en SUBROUTINE.

- 1\_ "RIGID" : forme les matrices de rigidité élémentaires (BKE)
- 2\_ "TRANS" : forme les matrices de passage (T).
- 3\_ "PASS" : Exprime les matrices de rigidité élémentaires dans le repère global.  $(BKG = T^t \cdot BKE \cdot T)$
- 4\_ "GAUSS" : Résolution du système linéaire  $(F = K \cdot q)$  par la méthode d'élimination de Gauss.
- 5\_ "RETOUR" : Exprime les déplacements nodaux trouvés (repère global) dans les repères locaux.
- 6\_ "INVERSE" : Inversion de matrice d'ordre  $(n, n)$ .

# ORGANIGRAMME

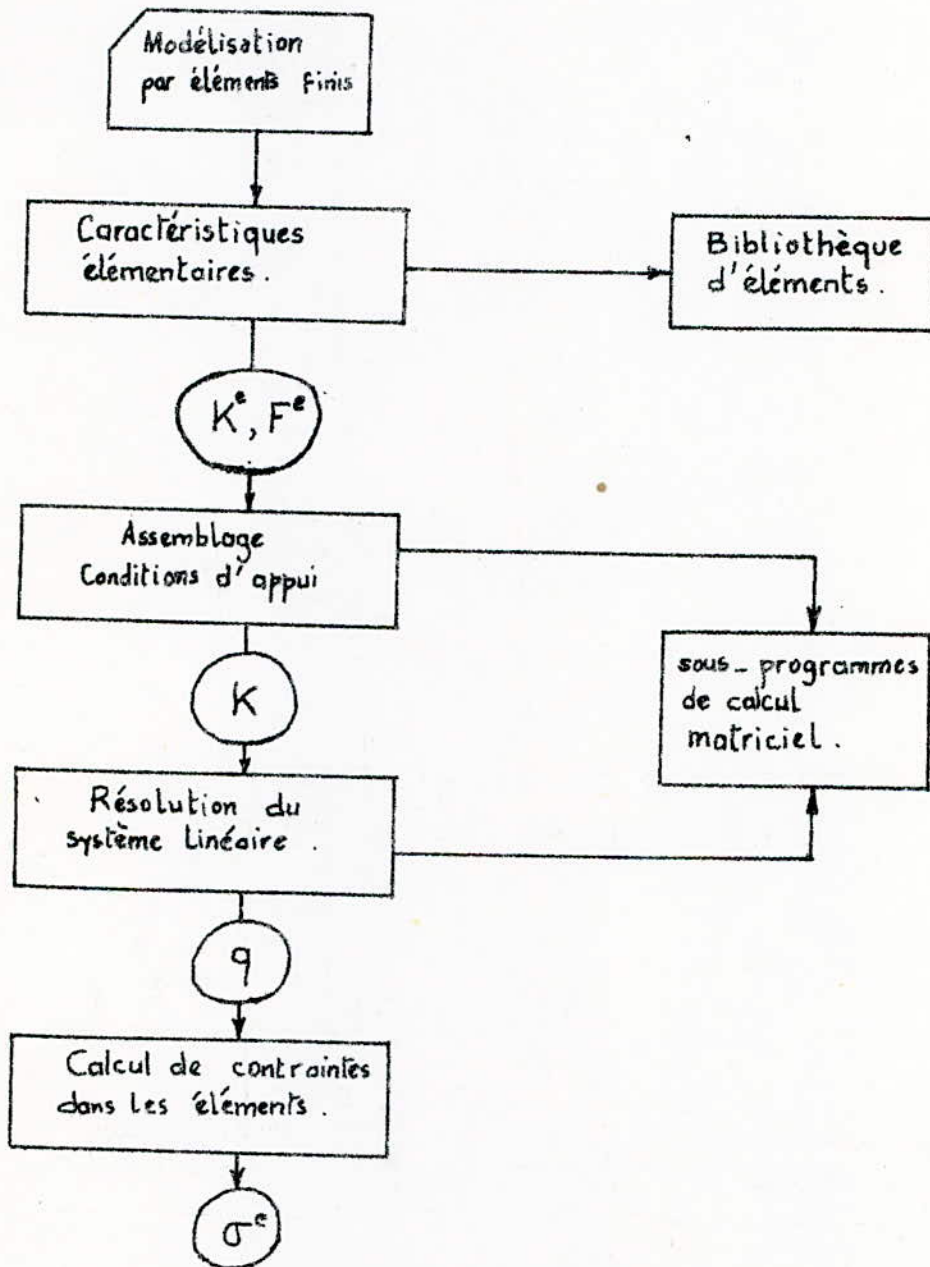


Figure : 7-1

Organigramme de traitement pour analyse statique. (méthode des déplacements)

**CHAP VIII**

**INTERPRETATION**

**DES**

**RESULTATS**

=====

NOMBRE DE NOEUDS=18  
NOMBRE D'ELEMENTS=24

-----

Tableau de noeuds

-----

Noeud	D.D.L	X	Y	Z
1	1 1 1 1 1 1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
2	1 1 1 1 1 1	0.00E+00	0.80E+00	0.00E+00
3	0 0 0 1 1 1	0.42E+00	0.00E+00	0.00E+00
4	0 0 0 1 1 1	0.42E+00	0.80E+00	0.00E+00
5	1 0 1 1 1 1	0.15E+01	0.00E+00	0.00E+00
6	1 0 1 1 1 1	0.15E+01	0.80E+00	0.00E+00
7	1 1 1 1 1 1	0.25E+01	0.00E+00	0.00E+00
8	1 1 1 1 1 1	0.25E+01	0.80E+00	0.00E+00
9	1 1 1 1 1 1	0.35E+01	0.00E+00	0.00E+00
10	1 1 1 1 1 1	0.35E+01	0.80E+00	0.00E+00
11	0 0 0 1 1 1	0.49E+01	0.00E+00	0.00E+00
12	0 0 0 1 1 1	0.49E+01	0.80E+00	0.00E+00
13	1 0 1 1 1 1	0.64E+01	0.00E+00	0.00E+00
14	1 0 1 1 1 1	0.64E+01	0.80E+00	0.00E+00
15	1 1 1 1 1 1	0.73E+01	0.00E+00	0.00E+00
16	1 1 1 1 1 1	0.73E+01	0.80E+00	0.00E+00
17	1 1 1 1 1 1	0.80E+01	0.00E+00	0.00E+00
18	1 1 1 1 1 1	0.80E+01	0.80E+00	0.00E+00

X,Y,et Z representent les coordonnees des noeuds dans le repere global,donnees en metres.

D.D.L represente les degres de liberte qui expriment les conditions aux limites de chaque noeud.

Tableau d'elements

N	N1	N2	Aire	I n e r t i e s			Elasticites	
1	1	2	0.23E-02	0.11E-08	0.49E-09	0.16E-08	0.20E+12	0.80E+11
2	1	3	0.19E-02	0.11E-08	0.49E-09	0.11E-08	0.20E+12	0.80E+11
3	3	4	0.11E-02	0.41E-08	0.35E-09	0.44E-08	0.80E+11	0.19E+05
4	2	4	0.19E-02	0.11E-08	0.49E-09	0.11E-08	0.20E+12	0.80E+11
5	3	5	0.19E-02	0.11E-08	0.49E-09	0.11E-08	0.20E+12	0.80E+11
6	4	6	0.19E-02	0.11E-08	0.49E-09	0.11E-08	0.20E+12	0.80E+11
7	5	7	0.23E-02	0.19E-08	0.48E-09	0.20E-08	0.20E+12	0.80E+11
8	7	8	0.15E-02	0.14E-08	0.27E-09	0.41E-09	0.20E+12	0.80E+11
9	6	8	0.23E-02	0.19E-08	0.48E-09	0.20E-08	0.20E+12	0.80E+11
10	7	9	0.23E-02	0.19E-08	0.48E-09	0.20E-08	0.20E+12	0.80E+11
11	9	10	0.15E-02	0.14E-08	0.27E-09	0.41E-10	0.20E+12	0.80E+11
12	8	10	0.23E-02	0.19E-08	0.48E-09	0.20E-08	0.20E+12	0.80E+11
13	9	11	0.23E-02	0.19E-08	0.48E-09	0.20E-08	0.20E+12	0.80E+11
14	11	12	0.15E-02	0.14E-08	0.27E-09	0.41E-10	0.20E+12	0.80E+11
15	10	12	0.23E-02	0.19E-08	0.48E-09	0.20E-08	0.20E+12	0.80E+11
16	11	13	0.21E-02	0.14E-08	0.49E-09	0.15E-08	0.20E+12	0.80E+11
17	13	14	0.11E-02	0.41E-08	0.35E-09	0.44E-08	0.20E+12	0.80E+11
18	12	14	0.21E-02	0.14E-08	0.49E-09	0.15E-08	0.20E+12	0.80E+11
19	13	15	0.21E-02	0.14E-08	0.49E-09	0.15E-08	0.20E+12	0.80E+11
20	15	16	0.11E-02	0.41E-07	0.35E-09	0.44E-08	0.20E+12	0.80E+11
21	14	16	0.21E-02	0.14E-08	0.49E-09	0.15E-08	0.20E+12	0.80E+11
22	15	17	0.21E-02	0.14E-08	0.49E-09	0.15E-08	0.20E+12	0.80E+11
23	17	18	0.11E-02	0.41E-08	0.35E-09	0.44E-08	0.20E+12	0.80E+11
24	16	18	0.21E-02	0.14E-08	0.48E-09	0.15E-08	0.20E+12	0.80E+11

Dans le tableau ci-dessus la premiere colonne donne le numero de l'element, la deuxieme et la troisieme donne les connections de l'element, les colonnes qui suivent donnent les inerties  $I_x, I_y, I_z$ , Les modules d'elasticite E et G respectivement.

Tableau des charges et points eloignes

Element	Y eloigne	Z eloigne
1	0.80E-01	0.77E-01
2	0.18E+00	0.35E-01
3	0.72E-01	0.35E-01
4	0.18E+00	0.35E-01
5	0.18E+00	0.35E-01
6	0.18E+00	0.35E-01
7	0.12E+00	0.35E-01
8	0.50E-01	0.35E-01
9	0.12E+00	0.35E-01
10	0.12E+00	0.52E-01
11	0.50E-01	0.35E-01
12	0.12E+00	0.52E-01
13	0.12E+00	0.35E-01
14	0.50E-01	0.35E-01
15	0.12E+00	0.52E-01
16	0.10E+00	0.35E-01
17	0.72E-01	0.35E-01
18	0.10E+00	0.35E-01
19	0.10E+00	0.35E-01
20	0.72E-01	0.35E-01
21	0.10E+00	0.35E-01
22	0.10E+00	0.35E-01
23	0.72E-01	0.35E-01
24	0.10E+00	0.35E-01

Noeud charge(Newtons)

1	-.586E+03
2	-.586E+03
3	-.167E+04
4	-.167E+04
5	-.563E+04
6	-.563E+04
7	-.905E+04
8	-.905E+04
9	-.905E+04
10	-.905E+04
11	-.870E+04
12	-.870E+04
13	-.704E+04
14	-.704E+04
15	-.479E+04
16	-.479E+04
17	-.233E+04
18	-.233E+04



\*\*\*\*\*

VIII\_2

R E S U L T A T S

NOMBRE DE NOEUDS= 18

NOMBRE D'ELEMENTS= 24

BANDE MAXIMUM= 35

=====DEPLACEMENTS AUX NOEUDS=====

NOEUD	U	V	W	ROT X	ROT Y	ROT Z
1	0.00E+00	0.00E+00	-.23E-03	0.18E-02	-.40E-03	0.00E+00
2	0.00E+00	0.00E+00	-.64E-04	0.18E-02	-.98E-04	0.00E+00
3	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.18E-02	-.68E-03	0.00E+00
4	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.18E-02	-.26E-03	0.00E+00
5	0.00E+00	0.00E+00	0.12E-02	0.18E-02	-.11E-02	0.00E+00
6	0.00E+00	0.00E+00	0.74E-03	0.18E-02	-.66E-03	0.00E+00
7	0.00E+00	0.00E+00	0.16E-02	0.18E-02	0.52E-03	0.00E+00
8	0.00E+00	0.00E+00	0.86E-03	0.18E-02	0.51E-03	0.00E+00
9	0.00E+00	0.00E+00	0.89E-03	0.18E-02	0.80E-03	0.00E+00
10	0.00E+00	0.00E+00	0.41E-03	0.18E-02	0.48E-03	0.00E+00
11	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.18E-02	-.41E-04	0.00E+00
12	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.18E-02	-.13E-03	0.00E+00
13	0.00E+00	0.00E+00	0.85E-03	0.18E-02	-.17E-03	0.00E+00
14	0.00E+00	0.00E+00	0.62E-03	0.18E-02	0.73E-04	0.00E+00
15	0.00E+00	0.00E+00	0.90E-03	0.18E-02	0.22E-03	0.00E+00
16	0.00E+00	0.00E+00	0.33E-03	0.18E-02	0.85E-03	0.00E+00
17	0.00E+00	0.00E+00	0.54E-03	0.18E-02	0.80E-03	0.00E+00
18	0.00E+00	0.00E+00	-.31E-03	0.18E-02	0.11E-02	0.00E+00

Les déplacements sont donnés en mètres

Les rotations sont données en radians

\*\*\*\*\*

=====ELEMENT#####CONTRAINTE=====

1	0.279E+09
2	-0.350E+09
3	0.892E+08
4	-0.120E+09
5	-0.506E+08
6	-0.269E+08
7	0.751E+09
8	-0.269E+10
9	0.132E+09
10	-0.104E+09
11	-0.289E+10
12	-0.341E+09
13	-0.492E+09
14	-0.316E+10
15	-0.294E+09
16	0.228E+08
17	-0.281E+10
18	0.704E+08
19	0.179E+09
20	-0.281E+10
21	-0.521E+08
22	-0.286E+09
23	-0.120E+10
24	-0.546E+09

Les contraintes auxquelles sont soumis les elements  
sont donnees en Newton par metres carres (N/m<sup>2</sup>).

Les résultats obtenus par cette méthode, comme le montrent le paragraphe VIII-2 représentent les déplacements aux nœuds et les contraintes maximales auxquelles sont soumis les éléments.

On remarque que les déplacements sont d'un ordre variant entre le millimètre et les centièmes du millimètre. Tandis que pour les contraintes, celles-ci sont inférieures à  $\bar{\sigma}_{\max}$  (cf. ch IV) pour certains éléments, pour d'autres la contrainte admissible se trouve dépassée; cela est probablement dû à la modélisation des sections et de la répartition des charges,  $\bar{\sigma}_{\max}$  est d'ailleurs largement dépassée pour les traverses ⑧, ⑩ et ⑭ ayant des géométries complexes et pour lesquelles on a adopté des sections en U; ce qui nous enseigne que cette modélisation reste à revoir.

En fait pour un calcul conceptionnel il faudrait bien jouer sur la modélisation et les caractéristiques géométriques et mécaniques, ce qui n'est pas permis par la brève durée de réalisation de ce projet.

# CONCLUSION

Cette étude nous a été très bénéfique du fait qu'elle nous a fait l'initiation au domaine d'analyse de structures et surtout la M.E.F.

On a constaté à l'issue de cette étude on a constaté l'aptitude de la méthode élémentaire à l'analyse des structures en treillis, néanmoins cette méthode est limitée et restreinte par comparaison à la M.E.F qui s'étale sur des champs d'application très variés.

On a aussi constaté que l'application de la M.E.F au cours de ce travail, doit être achevée, et par suite on recommande la proposition d'autres sujets appliquant la M.E.F et utilisant des modèles variés du point de vue type d'éléments et caractéristiques mécaniques, avec des renseignements sur les règlements assurant un choix efficace des coefficients de sécurité.

## BIBLIOGRAPHIE

1. GOURI DHATT , G. TOUZOT

Une présentation de la méthode des éléments finis , 2<sup>ème</sup> ed .

MALOINES . A - Paris 1984 .

2. K, C, ROCKEY , H.R. EVANS

Introduction à la méthode des éléments finis .

EYROLLES - Paris 1979

3. J.F. AUBOIN

Calcul des structures et informatique , EYROLLES - Paris 1983

4. J.F. IMBERT

Analyse des structures par éléments finis , édition 1979

CEPADUES EDITIONS

5. T.Y. YANG

Finite element structural analysis , New Jersey 1986 .

6. GUY VILLARD

Notions de résistance des matériaux , ed. SNED Alger 1974.

7. Editions Moscou .

Aide mémoire de résistance des matériaux .

8. A. BENTEBBICHE : Thèse de fin d'études (Janvier 1987)

9. M. RAHMOUNE : Thèse de fin d'études (Janvier 1985)

