

23/85

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Aex

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

**THEME**

ETUDE DYNAMIQUE D'UN  
SUPPORT RESERVOIR D'AIR  
D'UN VEHICULE 100 V 8

Promoteur :

KUROWSKI

Proposé par :

S. N. V. I.

Etudiant :

HAMEURLAINE Mouloud

juin 85

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

المدرسة الوطنية للعلوم الهندسية  
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

**THEME**

ETUDE DYNAMIQUE D'UN  
SUPPORT RESERVOIR D'AIR  
D'UN VEHICULE 100 V 8

Promoteur :

**KUROWSKI**

Proposé par :

**S. N. V. I.**

Etudiant :

**HAMEURLAINE Moulouci**

# MEDICALS

AP

- Mon pay: l'ALGERIE
- Nos glorieux Chouhadas
- Mespparents
- TOUTE Ma famille
- Tous Mes amis (es)

Je dedie ce modeste travail

A:

# REMERCIEMENT

Ma gratitude et ma reconnaissance s'adresse après ALLAH à:

Ma mère et mon père qui m'ont consacré toute leur vie afin que je puisse arriver à ce niveau; ainsi que tous mes frères et sœurs.

A tous les professeurs qui ont contribué à ma formation (M<sup>me</sup> lugan, Pierozak, Gad, Eliod, Ait ali,.....)

A monsieur Waldemar KUROWSKI qui a eu l'aimable sollicitation de me suivre avec une bonne attention dans ce travail

Aux responsables de la SONEIGHAZ (AKCHA)

Aux responsables de la SNVI (BAYOU)

-A tous mes amis(es) en particulier à qui je dois ce polycopé .

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département: ... DE MÉCANIQUE ...

Promoteur: ... KUROWSKI ...

Élève Ingénieur: HAMEURLAINE Mouloud.

وزارة التعليم العالي

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات

واترقي: الميكانيكا

موجه: كيروفسكي

تلميذة مهندسة: أمالعي مولود

الموضوع: الدراسة الديناميكية لحامل خزانات الهواء  
المصنوع. يتمثل موضوعنا هذا في الدراسة الديناميكية لحامل  
خزانات الهواء مما لا يحتاج المركب الصناعي للجرارات الصناعية  
بالنوعية، وقد اتت دراستنا هذه بعد الاشتقاق الذي  
لوحظ على مستوى ريل هذا الحامل كما تتمحور دراستنا على  
درجة الحركة المطلقة - وضع نموذج رياضي - تحليل نظري للإجهادات الديناميكية.

Sujet: ... ETUDE DYNAMIQUE D'UN SUPPORT-RESERVOIR D'AIR ...

Résumé: Notre projet consiste en l'étude d'un support réservoir d'air produit par SNVI-CVI Rouiba.

C'est à la suite des fissurations observées qu'il s'est avéré nécessaire de faire une étude sur les points suivants:

- degrés de libertés
- modélisation mathématique
- Analyses des contraintes dynamiques.

Subject: ... DYNAMIC STUDY OF AN AIR TANK BRACKET ...

Abstract: Our project consists in the dynamic of an air tank bracket of a lorry made by SNVI-CVI-Rouiba.

After having noticed fracture deteriorations in the bracket, it is compulsory to consider the following points:

- dynamic model of the system-degree of freedom-mathematical modelisation-theoretical analysis of the dynamic stresses.

## TABLE DES MATIERES

Intoduction .....	I
§ I-Généralités .....	3
I.1 But du projet .....	"
I.2 Présentation de la fixation .....	"
I.3 Causes des vibrations .....	5
§ 2- Modélisation .....	8
2.1 Degrés de liberté .....	9
2.2 Construction du modèle mathématique.....	II
2.2I Etablissement des équations.....	"
§ 3 Paramètres du support .....	I7
3.1 Centre de gravité .....	"
3.2 Caractéristique du support .....	"
3.3 Calcul du moment d'inertie quadratique ..	I7
3.4 Calcul des différentes raideurs .....	24
§ 4 Amortissement .....	34
4.1 Généralités .....	34
4.2 Méthode de détermination de C .....	36
4.3 Paramètres de calcul .....	38
§ 5 Elément d'inertie .....	42
5.1 Généralités .....	42
5.2 Schématisation et calcul .....	43
5.2.1 Moment d'inertie du corps I .....	44
5.2.2 "" "" des barres .....	46
5.2.3 Réservoir .....	47
5.3 Moment d'inertie globale .....	50
§ 6 Résolution mathématique .....	54
6.1 Modèle mathématique du support .....	56
6.2 Calcul des fréquences propres .....	59
6.3 "" "" Coefficients d'amplification..	60
CONCLUSION .....	62

## TABLE DES FIGURES

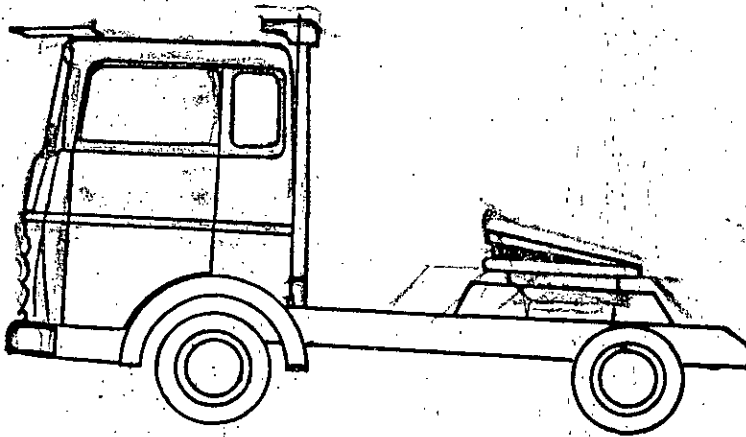
fig I.1 Support .....	4
"" I.2 Schémas des excitations .....	6
I.3 Schémas simplifier .....	7
fig 2.1 Support et degrés de liberté .....	9
fig 3.1 Dimensionnement du support .....	18
fig 4.3 Diagramme de buzman .....	37
fig 5.2 Découpage du support .....	45
5.3     ""     " réservoir .....	"
fig 6.3. Diagramme des amplifications .....	61

## TABLE DES TABLEAU

Tableau des moments d'inertie .....	52
"" recapitulatif .....	52

مقدمة

# INTRODUCTION





INTRODUCTION

Le support étudié est attaché au châssis du camion, il se trouve au milieu du côté droit du châssis.

Notre support porte deux éléments principaux et indispensable pour un camion avec un degré de moins l'un par rapport à l'autre.

Ainsi, d'après l'exploitation de certains camions entrant dans la large gamme que produit la division de véhicules industriels S.N.V.I au sein de son complexe à Rouiba, il a été observé des fissurations sur le support pouvant conduire à des accidents graves (perte de bouteille et par conséquent le freinage).

Afin d'éviter que de tels incidents arrivent; il est préférable de faire une étude tenant compte de tous les efforts et les charges quel qu'en soit leur nature.

Notre étude, portera sur le type de camion le TB 230 (semi remorque) proposé par le bureau d'étude de la S.N.V.I.

Le support est sollicité par deux types de charges:

- Statique.
- Dynamique.

Les charges statiques sont dues principalement au poids propre de l'ensemble monté s'ajoutant le poids de l'utilisateur sur l'escalier. Le support a été bien calculé pour ces charges.

Les charges dynamiques sont de sources diverses, elles peuvent être extérieures ou intérieures, d'un degré moins

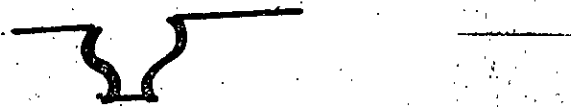
lorsque le camion est arrêté (moteur en marche) .

Ainsi lorsque le vehicule est en mouvement le support subit plusieurs sollicitations (forces centrifuge, de freinage, et d'accélération) qui se repercutent sur le chassis puis le support. Ces forces sont d'autant plus que la masse est très importante.

Enfin avec tout ceci nous pouvons espérer que les fissurations sont de causes dynamique, car, tout le système excité peut atteindre des fréquences propres si les fréquences d'excitations soient égales à ceux du système, par conséquent le système peut fonctionner dans la condition de résonance. De ce fait, il est sollicité à des contraintes très élevées qui entraînent facilement la rupture.

On connaît des cas où la construction est calculée avec un grand coefficient de sécurité pour les charges statiques qui se fissures sous l'effet des forces périodiques tel que la fissuration du chassis du camion C 230.

الفصل الاول



# CHAPITRE 1

## GENERALITES



## §§.I GENERALITES

### I.1 But du projet

L'objet de notre travail consiste à étudier le comportement dynamique du support réservoir d'air et de déterminer si possible, les causes de fissurations observées.

Cela pourra enrichir une banque d'information pour proposer des solutions; afin d'apporter l'amélioration à la conception et à la construction du support.

On note, que cette étude n'est qu'une suite de travaux déjà fait (le support batterie, et le support roue de secours)

### I.2 Présentation de la fixation sur le châssis

Le support est fixé en porte à faux au châssis par l'intermédiaire d'une fixation rigide démontable, qui est assurée par un assemblage de six boulons M 12, sur le châssis, qui est formé par deux longerons en forme de U renforcés par une série de traverses rivetées; boulonnées; ou soudées voir fig (I.1)

Remarque: On peut mesurer les excitations suivant les axes  
de translation X , Y , Z et Non suivant la  
rotation car on ne dispose pas de capteur'

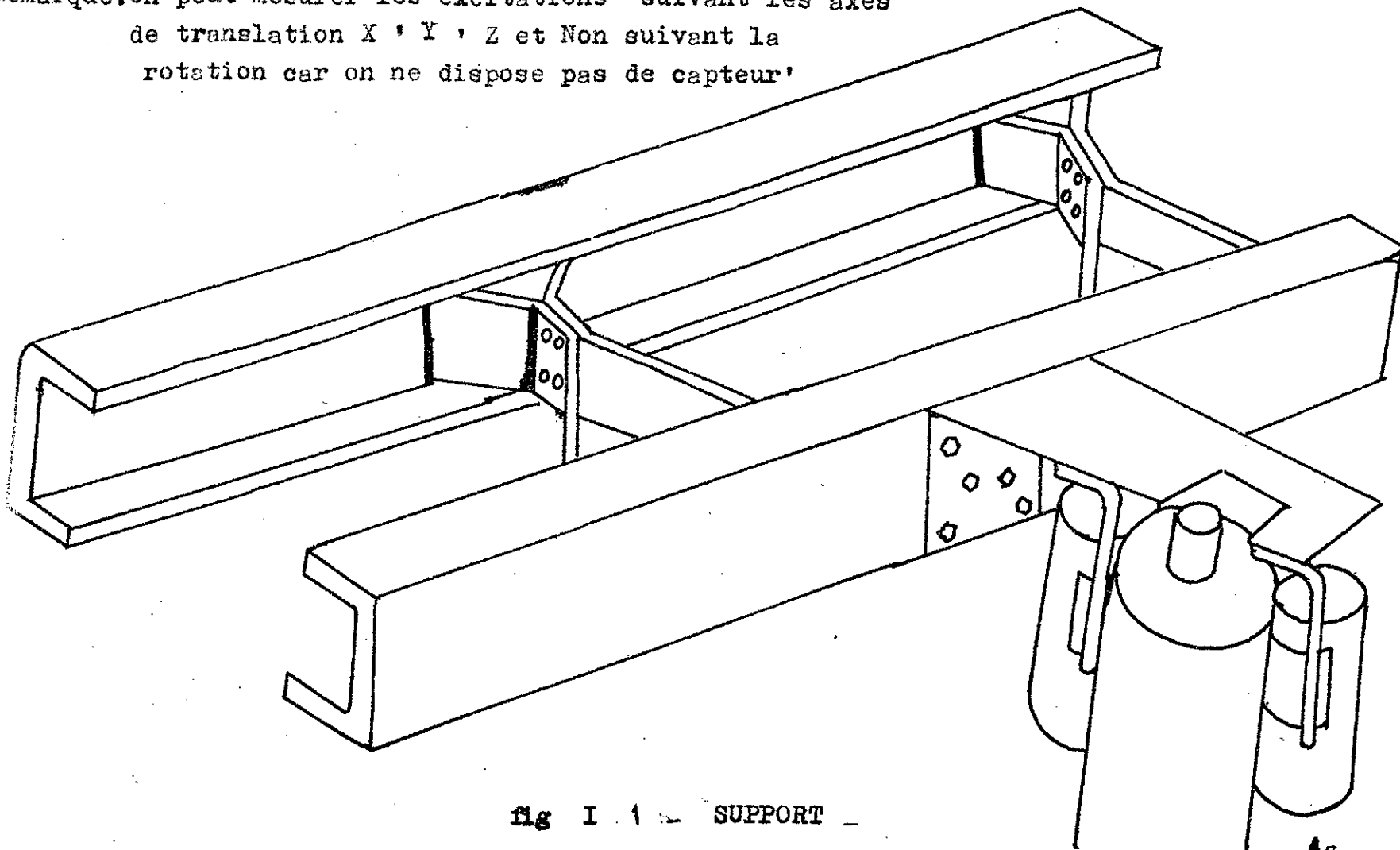


fig 1.1 - SUPPORT -

### I.3 Causes des vibrations

Les vibrations reçue au support peuvent avior des causes assez variées, dont certaines sont inhérentes au processus technologique où au principe de fonctionnement du moteur et l'assemblage des accessoires sur le chassis. C'est le processus technologique qui est la cause des vibrations internes provoqué par le moteur (piston, bille, pompe et compresseur), causant des forces periodiques et engendrant la force d'excitation.

De,me les forces exterior ont des causes différentes tel que l'irregularité de la chaussée, la force de freinage les forces centrifuges, ect...; un schémas détaillé tenant compte de tous charges est représeté dans la fig(I.2) et la fig(I.3).

— SCHEMAS SIMPLIFIE DE L'EXCITATION DU CHASSIS —

$E_r$ : Excitation des roues due a l'etat de route et transformee  
 par l'élasticité et la rigidité des roues et du ressorts  
 $E_m$ : Excitation résultée par le moteur  
 $E_c$ : " " " la cabine  
 $E_R$ : " " " la remorque chargée

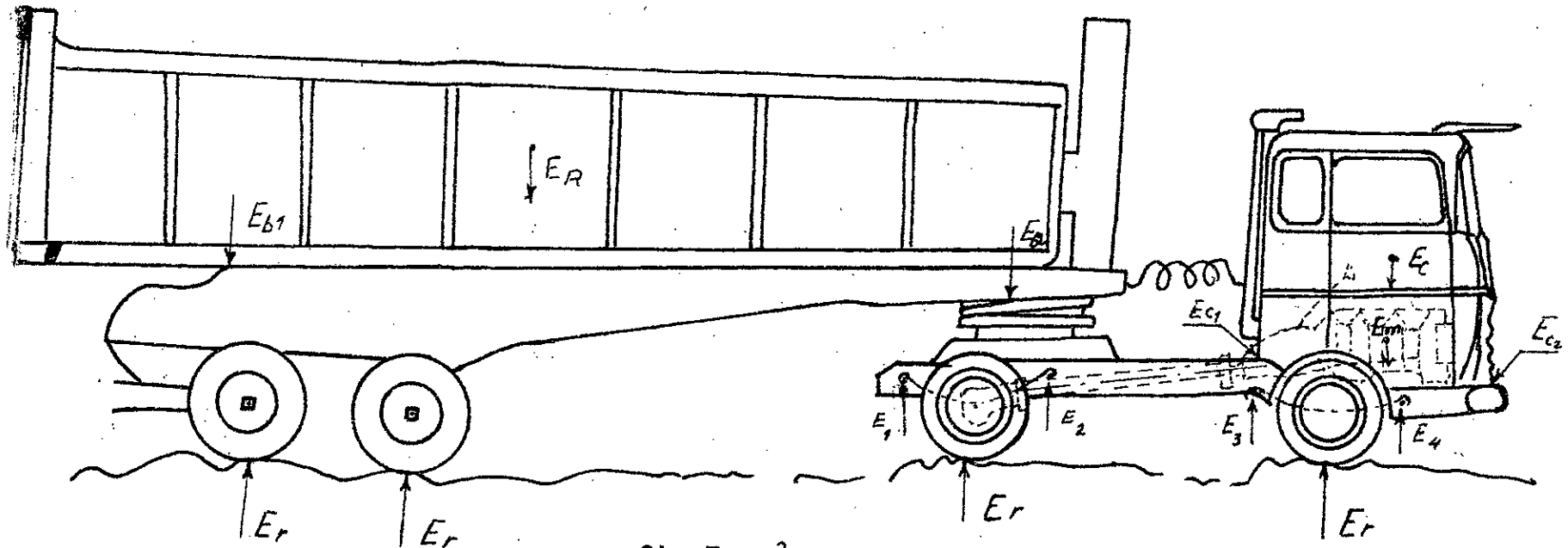


fig I " 2 "

SCHEMAS SIMPLIFIE DE L'EXCITATION DU SUPPORT

VUE PAR LE CONTROLE AUTOMATIQUE

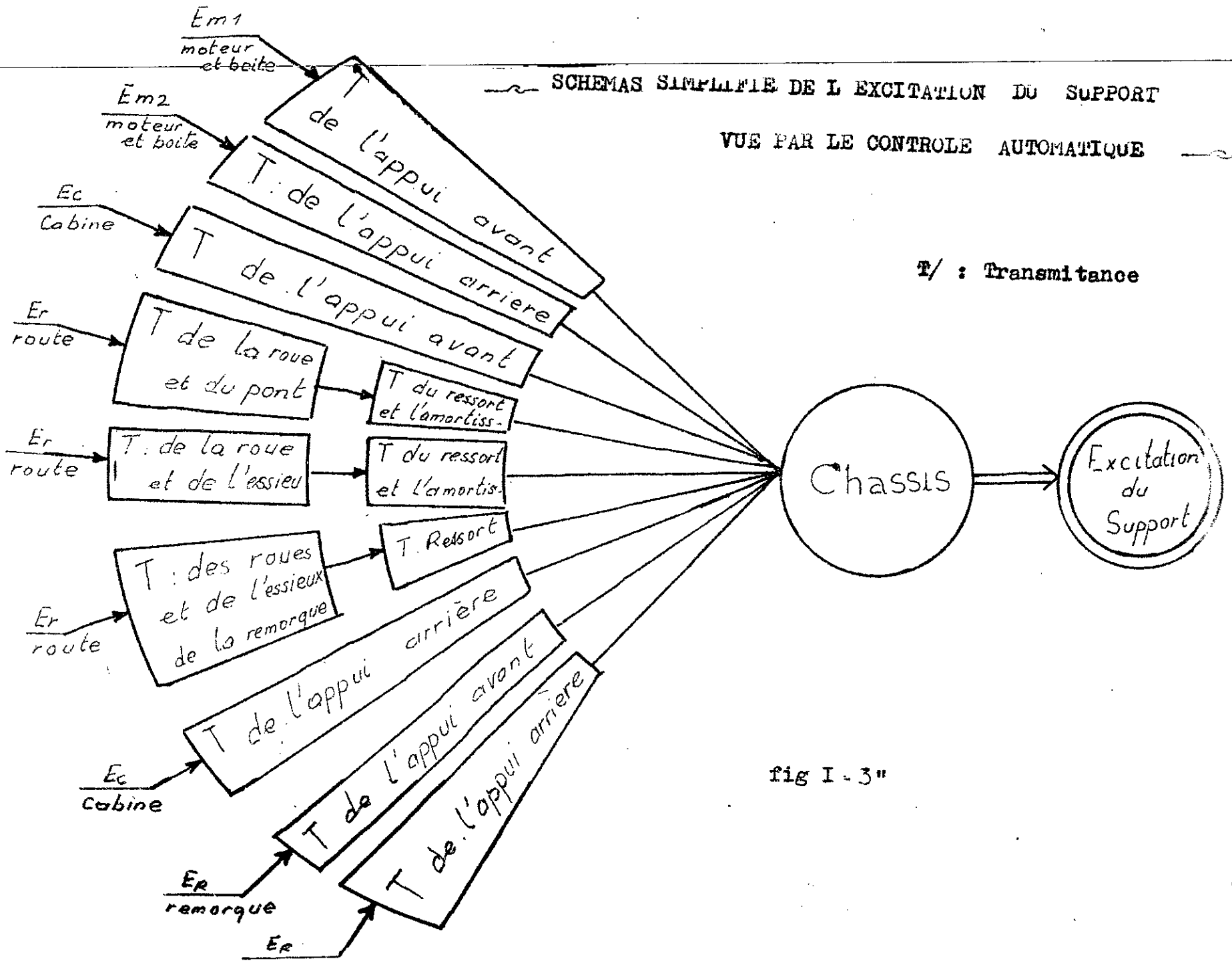


fig I-3"



### 3.1 DEGRES DE LIBERTÉ

Dans le système d'axe choisi ( origine du système confondue avec le centre de gravité de l'ensemble support réservoir d'air) .

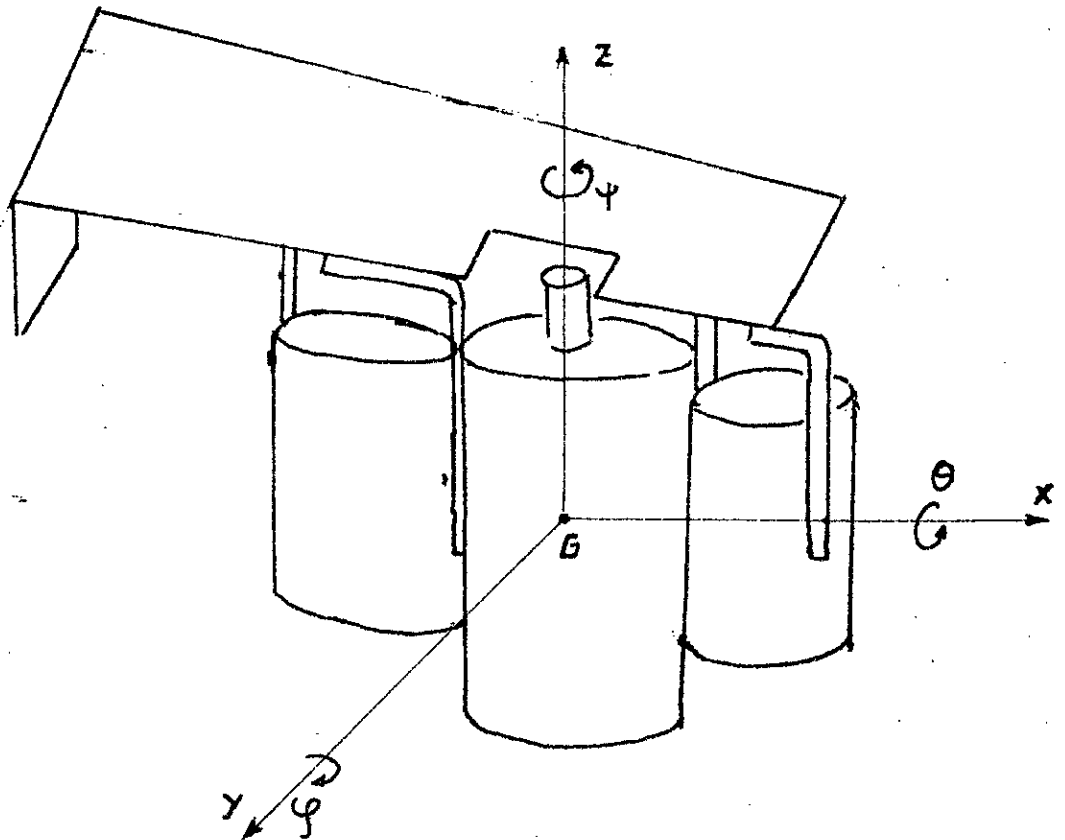


fig -2.1-

On a six degrés de liberté:

-trois de translation;  $\vec{Gx}$ ,  $\vec{Gy}$ ,  $\vec{Gz}$

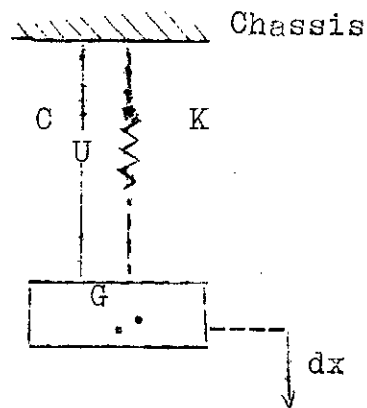
-trois de rotation;  $\vec{G\theta}$ ,  $\vec{G\phi}$ ,  $\vec{G\psi}$

A ces mouvements on peut ajouter certaines hypothèses afin de simplifier le problème.

-Nous admettrons que l'ensemble support et réservoir

se comportant comme un seul corps rigide et homogène .  
 Nous supposons que le support possède aussi certaines propriétés mécaniques ; tel que la rigidité (l'élasticité), et l'amortissement, l'inertie de la masse .

De la construction mécanique on pourra aboutir à un schéma très simple, (c.a.d) celui d'une masse concentrée au centre de gravité à un ressort et un amortisseur, voir schémas



Où le ressort représente la faculté de déformation suivant chaque degré de liberté, et l'amortisseur le pouvoir de dissiper l'énergie progressivement par l'effet de freinage; Ainsi la dissipation de cette énergie se fait grâce au frottement interne des molécules du métal; c.a.d phénomène d'hystérésis que nous allons voir dans le §4 .

# الفصل الثاني



## CHAPITRE 2

## MODELISATION



## 2.2 CONSTRUCTION DU MODELE MATHÉMATIQUE

Il est indispensable de faire un passage du modèle réel au modèle mathématique, afin de mettre une approche entre le mouvement compliqué du support et le mouvement simplifié le plus possible au traitement théorique; et cela ne sera faite que par le biais de certaines symboles et relations.

Ainsi on définit la rigidité par la loi de HOOKE comme étant le coefficient de proportionnalité et la charge au déplacement dans sa direction, c'est notre support aura six rigidités notées " $K_i$ ".

Et le coefficient d'amortissement symbolisé par " $C_i$ " représentant l'amortissement interne du métal ayant servi à la fabrication de ce support.

### 2.2.I) Etablissement de l'équation du mouvement

#### i) Cas de translation

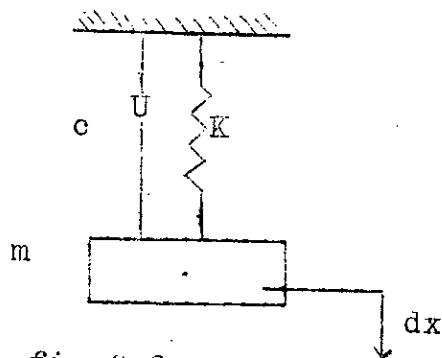


fig 2.2

## 2.2 CONSTRUCTION DU MODELE MATHEMATIQUE

Il est indispensable de faire un passage du modèle réel au modèle mathématique, afin de mettre une approche entre le mouvement compliqué du support et le mouvement simplifié le plus possible au traitement théorique; et cela ne sera faite que par le biais de certaines symboles et relations.

Ainsi on définit la rigidité par la loi de HOOKE comme étant le coefficient de proportionnalité et la charge au déplacement dans sa direction, c'est notre support aura six rigidités notées " $K_i$ ".

Et le coefficient d'amortissement symbolisé par " $C_i$ " représentant l'amortissement interne du métal ayant servi à la fabrication de ce support.

### 2.2.I) Etablissement de l'équation du mouvement

#### i) Cas de translation

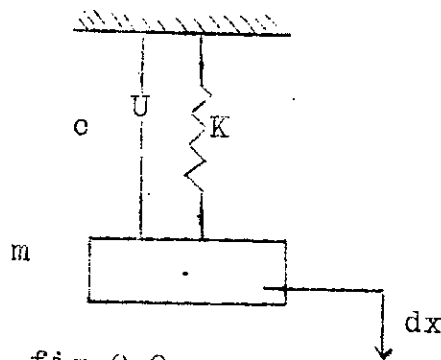


fig 2.2

Considérons une masse ( m ) suspendue par un ressort et un amortisseur fig 2.2;

La raideur est définie par sa constante "K ", entre le point de suspension et la masse; dont on note la présence d'un mécanisme d'amortissement, qui n'entre pas en jeu tant que le système est au repos . Dès que la masse commence à se mouvoir , une force d'amortissement interne intervient elle est proportionnelle à la vitesse et lui est opposée ; d'autre part , la force élastique la force élastique due au ressort est proportionnelle au déplacement tant que suit la loi de HOOKE .

Finalement on supposant que notre référentiel est galiléen , et pour un système dissipatif libre, la fondamentale de la dynamique appliquée à l'ensemble des forces donne:

- Avec: --la masse est concentrée au centre de gravité  
 --le support est à la fois ressort et amortisseur  
 --l'amortissement du support est analogue à celui d'un amortisseur visqueux ( $f_{\text{amort}} = -C \frac{dx}{dt}$  )  
 --on admettant la linéarité la force élastique est proportionnelle au déplacement ( $f_{\text{el}} = -Kx$ )

D'où:

$$F_{\text{ext}}(\text{inertie}) = \sum F_{\text{int}}$$

$$= -F_{\text{amort}} - F_{\text{el}}$$

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = -C \frac{dx}{dt} - Kx \dots$$

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + K x = 0$$

on note:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Enfin on a:

$$\underline{m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0} \quad (I)$$

-Remarque:

L'equation (I) constitue le modèle mathématique représentant le processus dynamique du support relatif au déplacement de translation.

ii) Cas de rotation

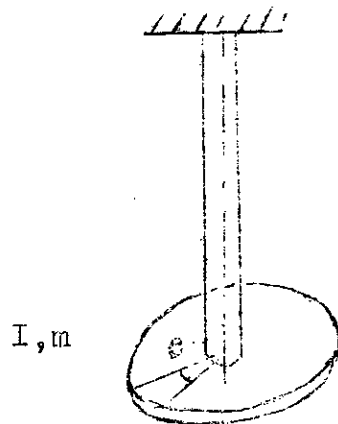


Fig 2.3

La masse  $m$  ayant un moment d'inertie  $I$  fixée à un axe ayant une raideur de torsion  $Kt$ , où " $Kt$ " est le couple en killogramme-centimètre nécessaire pour faire tourner le disque d'un radian.

Le principe d'inertie appliqué à un corps en rotation donne:

$$C = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

où;  $\frac{d^2 \theta}{dt^2}$  = (accélération angulaire)

En réalité il y'a deux couples agissant sur le corps:

-le couple élastique du ressort d'expression  $-K\theta$ , où  $\theta$  est mesuré en radian.

-le couple résistant due à l'amortissement d'expression  $-C \frac{d\theta}{dt}$ , due à l'amortissement interne

Finalement avec des hypothèses analogue à i), l'ensemble des couples agissant sur le corps:

$$C_{\text{inertie}} = C_{\text{amort}} + C_{\text{élast}}$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -c \frac{d\theta}{dt} - K\theta$$

Avec  $C$ : couple

$c$ : coefficient d'amortissement

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$



$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

D'où l'équation finale peut s'écrire:

$$\underline{I \ddot{\theta} + c \dot{\theta} + K \theta = 0} \quad (2)$$

Remarque : Cette équation constitue le modèle pour les trois degrés de rotations ; on notant que le modèle mathématique globale (c.a.d relatif au six degrés de libertés) sera donner par des expressions analogues à l'équation (1) et (2) .

الفصل الثالث



CHAPITRE 3

CALCUL DE

RIGIDITES



## PARAMETRES DU SUPPORT

## 3.1) Centre de gravité

i) Le centre de gravité du support est déterminé par une méthode pratique (méthode du fil à plomb), le résultat est:  $G_s = (440, 157, 350)$

ii) Le centre de gravité de l'ensemble est déterminé par la même méthode, le résultat est:

$$G_g = (440, 161, 346)$$

Remarque : vu que le résultat de  $G_s$  et  $G_g$  ne diffère que de peu, on prendra pour tous nos calcul les coordonnées du centre  $G_s$

## 3.2) Caractéristique géométrique du support

Le support sera décomposé en deux parties coupe 1.1 et coupe 2.2 Voir (fig 3.1).

## 3.3) Calcul du moment d'inertie quadratique

I) Moment d'inertie de la coupe 1.1

Nous décomposant cette coupe en quatre éléments simples, fig 3.2

le moment de chaque élément est donné par:

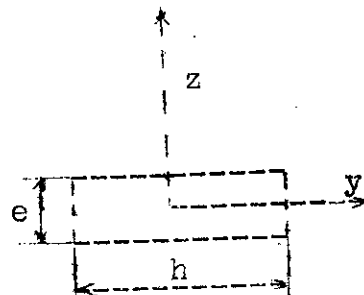
$$I_y = \int z^2 ds$$

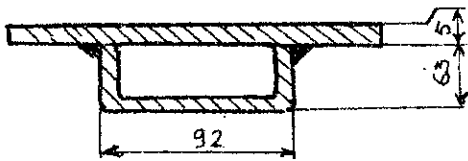
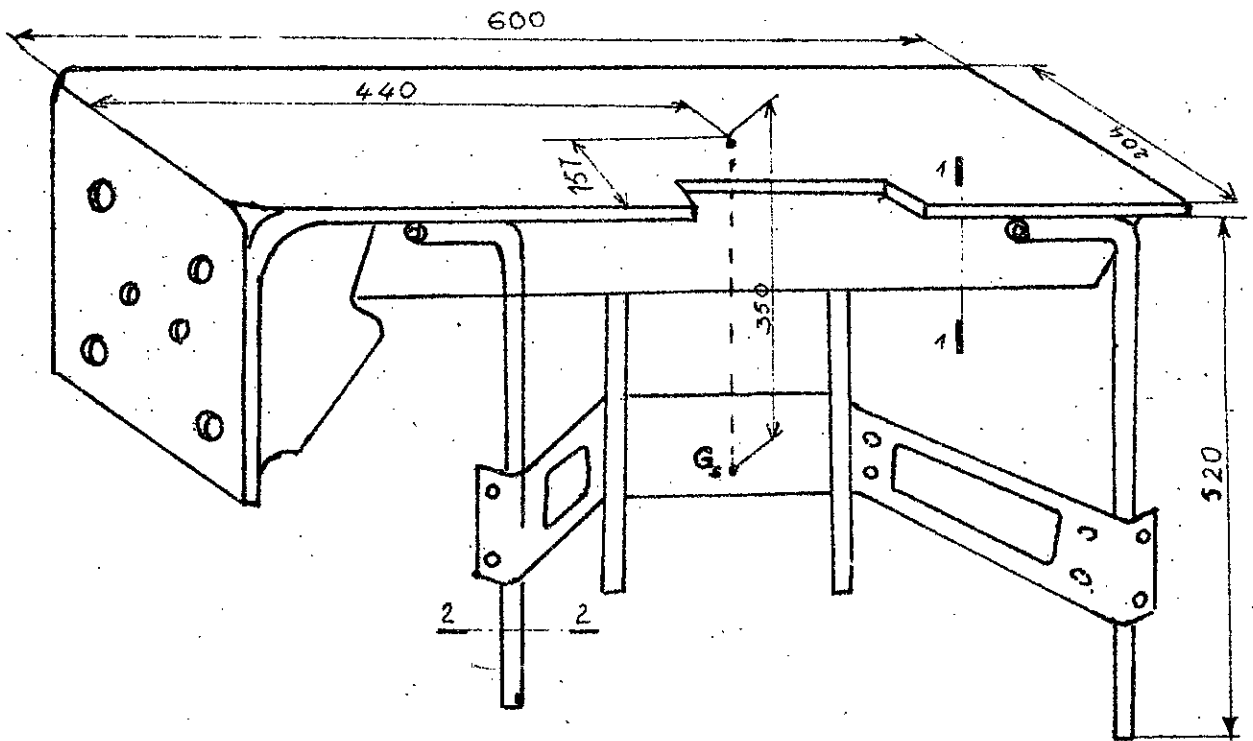
$$I_z = \int y^2 ds$$

Pour une section

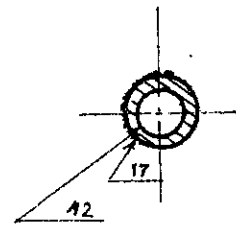
$$I_y = \frac{e^3 h}{12}$$

$$I_z = \frac{e h^3}{12}$$





Coupe 1.1



Coupe 2.2

fig. 3.1

i) Application

-Surface 1

données:  $h_1 = 204$  mm

$e = 5$  mm

$$I_{y_1} = \frac{e^3 h_1^3}{12} = 0,083.5^3.204^3 = 2125 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_1} = \frac{e h_1^3}{12} = 0,083.5.204^3 = 3537660 \text{ mm}^4$$

-Surface 2

données:  $h_2 = 62$  mm

$e = 5$  mm

$$I_{y_2} = \frac{e h_2^3}{12} = 0,083.62^3.5 = 99303,3 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_2} = \frac{e^3 h_2^3}{12} = 0,083.5^3.62^3 = 645 \text{ mm}^4$$

-Surface 3

données:  $h_3 = 82$  mm

$$I_{y_3} = \frac{e^3 h_3^3}{12} = 0,083.5^3.82^3 = 854,2 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_3} = \frac{e h_3^3}{12} = 0,083.5.82^3 = 229736,7$$

-Surface 4

même résultat que 2

$$I_{y_4} = 99303,3 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_4} = 645 \text{ mm}^4$$

=Détermination du centre de gravité de la coupe I.I  
dans le plan YZ

D'après la formule du centre de gravité définie par:

$$\sum S_i \eta_i = S_G \eta_G \Rightarrow \eta_G = \frac{\sum S_i \eta_i}{G}$$

D'après la fig 3.3 on a:

$$I_1 = 2,5 \text{ mm}$$

$$I_2 = 4 = 36 \text{ mm}$$

$$I_3 = 64,5 \text{ mm}$$

$$I_1 = I_3 = 102 \text{ mm}$$

$$I_2 = 145 \text{ mm}$$

$$I_3 = 58 \text{ mm}$$

$$S_1 = e \cdot h_1 = 5 \cdot 204 = 1020 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = S_4 = e h_2 = 5 \cdot 62 = 310 \text{ "}$$

$$S_3 = 5 \cdot 82 = 410 \text{ mm}^2$$

$$\eta_G = \frac{1020 \cdot 2,5 + 620 \cdot 36 + 410 \cdot 64,5}{2100} = 24,4 \text{ mm}$$

$$\eta_G = \frac{1020 \cdot 102 + 302 \cdot 145 + 410 \cdot 102 + 310 \cdot 102}{2100} = 106 \text{ mm}$$

:::Moment d'inertie de la coupe I.I

En appliquant le théoreme de KOENING ( $I = I' + S_i D_i^2$ )

$D_i$  = distance entre les C.G des élément et le C.G de la

surface ( $D = \eta_G - \eta_i$ ) ; ( $d = \eta_G - \eta_i$ )

Résultats:

$D_1 =$	21,5	12	40,5	12
$d_i =$	4	44,5	4	47,5

D'où ;

$$I_y = I_i + S_i D_i^2 \\ = 778965,6 \text{ mm}^4$$

$$I_z = I_{z_i} + S_i d_i^2 \\ = 510583,3 \text{ mm}^4$$

Enfin calcul du moment d'inertie par-rapport a Gs

$$\therefore I_{Y(I.I)} = I_y + S_t b^2$$

$$\text{avec: } b = 244 \text{ mm}$$

$$S_t = 2100 \text{ mm}^2$$

$$I_{Y(I.I)} = 778965,6 + 2100 \cdot 244^2 = \underline{1,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4}$$

$$\therefore I_{Z(I.I)} = I_z + S_t a^2$$

$$\text{avec: } a = 133 \text{ mm}$$

$$S_t = 2100 \text{ mm}^2$$

$$I_{Z(I.I)} = (510583,3 + 2100 \cdot 133^2) = \underline{0,35 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4}$$

## 2) Moment quadratique de la coupe 2.2

On suppose que les barres sont liées et on fait la coupe voir fig 3.4

### i) Centre de gravité de la coupe 2.2

Par symétrie de répartition de charges  $Y_g$  se trouve au milieu. ( $Y_g = 220 \text{ mm}$ )

-pour déterminer  $Z_g$  on utilise de surface on supposant que les masses sont réparties sur toute la surface

ainsi on a: (fig 3.5)

$$S_i \eta_i = S_t \cdot \eta_g$$

Avec : voir fig(3.5)

$$S_1 = S_3 = 11250 \text{ mm}^2$$

$$S_2 = 140 \cdot 150 = 21000 \text{ mm}^2$$

$$n_1 = n_3 = 50 \text{ mm}$$

$$n_2 = 75 \text{ mm}$$

$$\text{d'où } n_g = \frac{(11250 \cdot 50) \cdot 2 + 2100 \cdot 75}{43500} = 62 \text{ mm}$$

$$g(220, 62)$$

i) Moment quadratique de la coupe 2.2 par-rapport à g

-Moment d'une couronne

$$I_{y_i} = I_{z_i} = 0,049(d^4 - d'^4)$$

$$= 0,049(17^2 - 12^2) = 3075,5 \text{ mm}^4$$

$$S_i = \frac{\pi}{4}(d^2 - d'^2)$$

$$= 114 \text{ mm}^2$$

-Moment d'inertie on appliquant KOENING à g

$$I_{g_y} = 4 \cdot 3075,5 + 2 \cdot 114(70)^2 + 114 \cdot 220^2 = 12164906 \text{ mm}^4$$

$$I_{g_z} = 4 \cdot 3075,5 + 2 \cdot 114 \cdot 62^2 + 2 \cdot 114 \cdot 88^2 = 2654570 \text{ mm}^4$$

Enfin, calcul du moment de la coupe 2.2 relative à Gs

$$I_{G.2} = I_g + S_T d_i^2$$

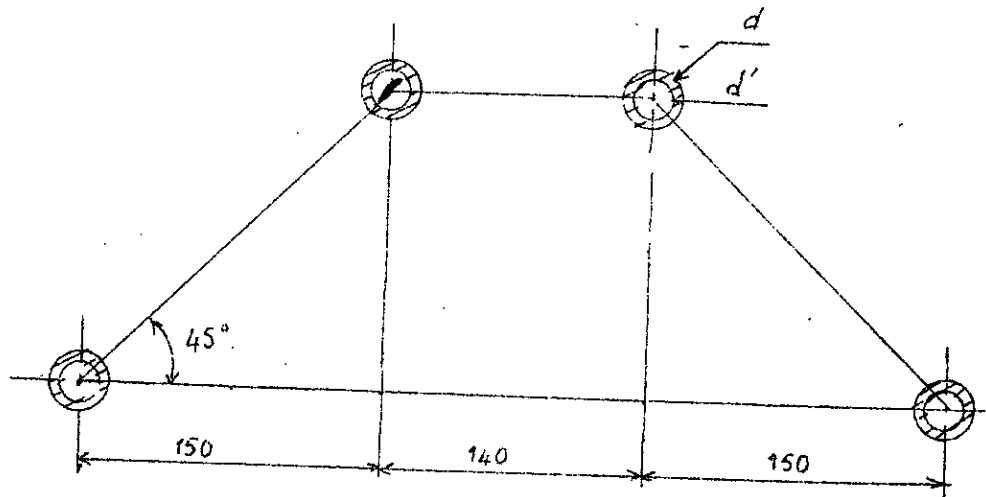
$$dy = 95 \text{ mm}$$

$$dz = 60 \text{ mm}$$

$$\text{d'où: } I_{G_y.2} = 12164906 + 456 \cdot 95^2 = \underline{0,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4}$$

$$I_{G_z.2} = 26554570 + 456 \cdot 60^2 = \underline{0,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4}$$





figs - 3.4.

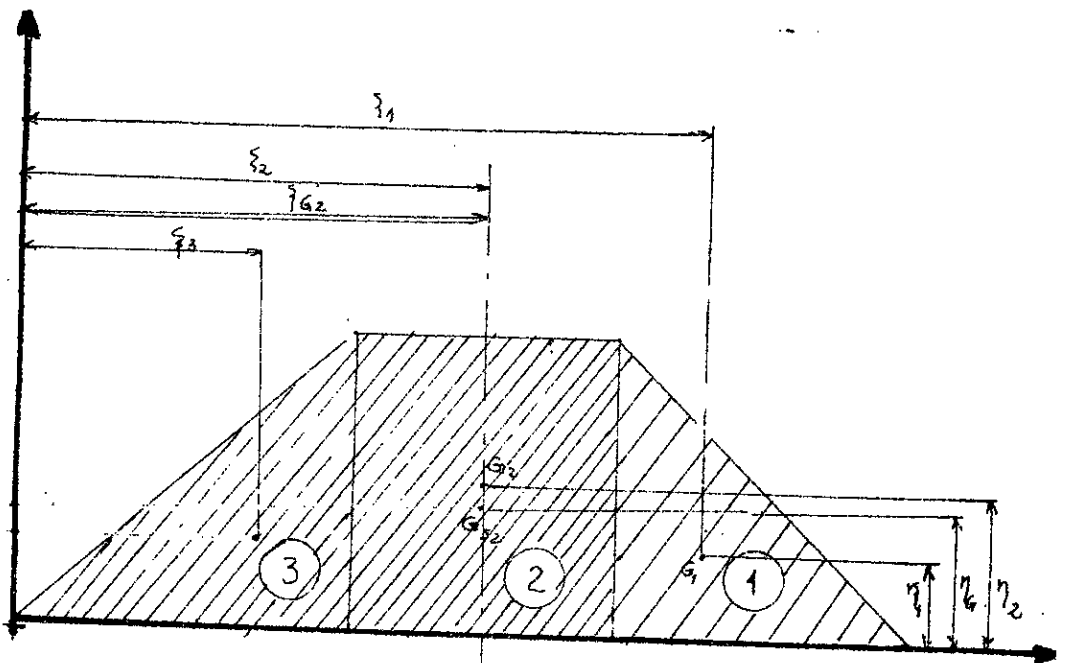
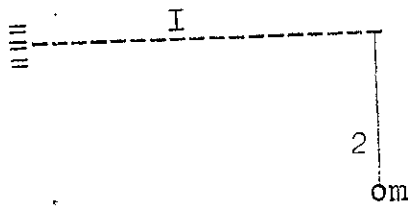
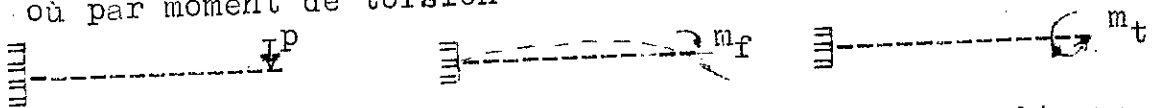


fig. 3.5

### 3.4 CALCUL DES DIFFERENTES RAIDEURS



L'analyse de la masse vibrante suivant les six degrés de liberté provoque des déformations primaires sur les deux poutres (I.2), soit par une force, soit par moment de flexion ou par moment de torsion



Ainsi on voit que la déformation résultante est obtenue par superposition respective des déformations, primaires des deux poutres?

Une coupe à l'angle est préférable, afin de calculer les différentes rigidités de chaque poutre..

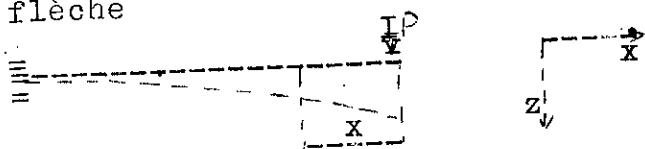
#### 3.4.1) Différentes raideurs

i) Rigidités dues à la force de flexion

On définit les rigidités de translation ( $K_x, K_y, K_z$ ) comme étant la constante de proportionnalité entre le déplacement,  $P = K_{x,y,z}$

: représente la flèche suivant chaque direction

- Calcul de la flèche



$$M(x) = -P(l-x)$$

D'autre part les lois relatives aux déformations des

poutres lié à l'R.D.M  $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{P(1-x)}{EI}$

E: module d'élasticité de YOUNG

PAR integration successive

$$\dot{z} = \int -\frac{P(1-x)}{EI} dx = -\frac{I}{EI} (-Plx + \frac{Px^2}{2} + c_1)$$

avec les conditions:  $x=0$   
 $\dot{z}=0$

on a :  $\dot{z} = (-Plx + \frac{Px^2}{2}) \frac{I}{EI}$

C'est l'expression de l'angle de flexion pour tous Points de x.

si on integre une deuxieme fois on obtient:

$$z = \int \dot{z} dx = -\frac{I}{EI} (-\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + c_2)$$

avec :  $x=1$   
 $z=0$

On a:

$$z = \frac{Pl^3}{3EI} (1 - \frac{3x^2}{2l^2} + \frac{x^3}{2l} - \frac{x^3}{l^3})$$

C'est l'expression de déformation pour tous poits x

Pour  $x=1$

- la rotation de la barre est:

$$\dot{z} = \frac{Pl^2}{3EI}$$

-la flèche<sub>3</sub>

$$\delta = f_m = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (I)$$

$x, y, z$

Nota: Cette formule est l'expression générale de la déformée elle sera étulisé pour le calcul de la rigidité de translation pour la poutre(1), et(2).

ii) Rigidités dues au moment fléchissant.

La rigidité est la constante de proportionnalité entre l'angle et le moment

$$M = K$$

- Calcul de  $\alpha$

$$y = - \frac{M}{EI} x^2 + c$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = - \frac{2M}{EI} x + c$$

avec la condition:

$$x=0$$

$$\dot{y}=0$$

$$\alpha = \dot{y} = - \frac{2Mx}{EI}$$

et pour  $x=l$

$$\alpha = - \frac{2Ml}{EI} \quad (2)$$

iii) Rigidités dues au moment de torsion

La rigidité est la constante entre le moment de torsion et l'angle

$$M_t = K_t \theta$$

Le moment de torsion étant

$$M_t = \frac{G I_t \theta}{l}$$

$$\text{où: } G = \frac{2}{5} E$$

$$I_0 = I_x + I_y \quad (\text{moment polaire})$$

Enfin

$$\theta = \frac{M_t \cdot l}{G I_0} \quad (3)$$

## 3.4.2) APPLICATION

i) Rigidités de la poutre I

Données:  $L=440$  mm

$$I_y = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_o = 1,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

i.1) Cas de translation

On appliquant l'équation (I)

-  $K_x=0$  (poutre liée suivant la direction  $x'x$ )

$$-K_y = \frac{P}{I} = \frac{L^3}{3E I_y} = \frac{440^3 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,25 \cdot 10^{-4}} = 8,8 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$-K_z = \frac{P}{I} = \frac{3EI_z}{L^3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,35 \cdot 10^{-4}}{440^3 \cdot 10^{-9}} = 2,4 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

i.2) Cas de rotation liée au moment de flexion

D'après la formule 2

$$-K_{\phi} = \frac{E I_z}{L} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,35 \cdot 10^{-4}}{440 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

$$K_{\psi} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,25 \cdot 10^{-4}}{440 \cdot 10^{-3}} = 5,7 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

i.3) Cas de rotation liée au moment de torsion

D'après la formule 3

$$K_{\theta} = \frac{G I_o}{L} = \frac{2E I_o}{5 L}$$

$$K_{\theta} = \frac{2.2 \cdot 10^{11} \cdot 1.55 \cdot 10^{-4}}{5.0,44} = 14 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

ii) Rigidités de la poutre 2

$$l = 350 \text{ mm}$$

$$I_{y2} = 0,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{x2} = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$I_{o2} = 0,56 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

ii.1) Cas de translation

$$K_y = \frac{3 E I_y}{l^3}$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,16 \cdot 10^{-4}}{350^3 \cdot 10^{-9}} = 2,23 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$K_x = \frac{3 E I_x}{l^3}$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,4 \cdot 10^{-4}}{350^3 \cdot 10^{-9}} = 8,7 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$K_z = 0$  (même raison que précédemment)

ii.2) Cas de rotation par moment de flexion

$$-K_{\psi 2} = \frac{E I_x \cdot 2}{l}$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,4 \cdot 10^{-4}}{0,350} = 2,2 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

$$-K_{\theta 2} = \frac{E I_y \cdot 2}{l}$$

$$= \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,16 \cdot 10^{-4}}{0,35} = 0,9 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

i.3) Cas de roation par moment de torsion

De la formule (3)

$$K = \frac{GI}{\psi} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,56 \cdot 10^{-4}} = 6,4 \cdot 10^7 \frac{Nm}{rd}$$

0,35

Résumé:

POUTRE 1

$$K_{x_1} = 0 \quad \frac{-N}{m}$$

$$K_{y_1} = 8,8 \cdot 10^8 \text{ "}$$

$$K_{z_1} = 2,4 \cdot 10^8 \text{ "}$$

$$K_{\psi_1} = 1,5 \cdot 10^7 \frac{Nm}{rd}$$

$$K_{\theta_1} = 5,7 \cdot 10^7 \text{ "}$$

$$K_{\theta_1} = 14 \cdot 10^7 \text{ "}$$

POUTRE 2

$$K_{x_2} = 8,7 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$$

$$K_{y_2} = 3,23 \text{ "}$$

$$K_{z_2} = 0 \text{ "}$$

$$K_{\psi_2} = 2,2 \cdot 10^7 \frac{Nm}{rd}$$

$$K_{\psi_2} = 6,4 \cdot 10^7 \text{ "}$$

$$K_{\theta_2} = 0,9 \cdot 10^7 \text{ "}$$

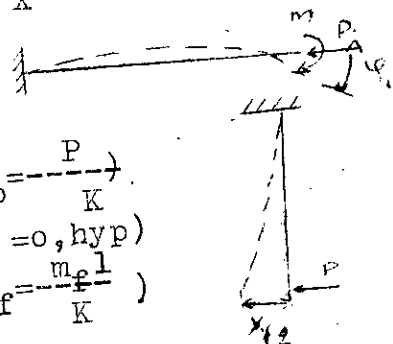
Les équations de rotation des 2 poutres sont liées par la relation

### 3.4.3 Rigidités de l'ensemble

a) Déformation dans la direction X

$$X = x_{fp_2} + x_c + x_{fIm} =$$

où:  $x_{fp}$  flèxion par force ( $x_{fp} = \frac{P}{K}$ )  
 $x_c$  compression ( $K_c = 0, hyp$ )  
 $x_{f m}$  flèxion par moment ( $x_f = \frac{m \cdot l}{K}$ )



Enfin:  $X = x_{fp_2} + x_{fIm}$

$$\frac{P}{K_x} + \frac{P}{K_{x_2}} + \frac{m \cdot l}{K_{\psi_1}}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{K_x} = \frac{L l}{K} + \frac{I}{K_{x_2}}$$

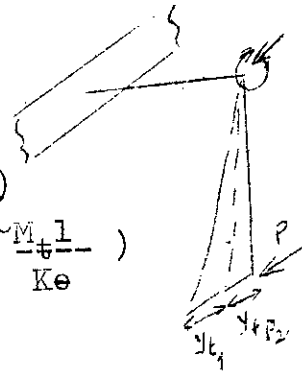
$$= \frac{0,44 \cdot 0,35}{1,5 \cdot 10^7} + \frac{I}{8,7 \cdot 10^8} = 0,114 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{d'où } \underline{K_x = 8,7 \cdot 10^7} \quad \frac{N}{m}$$

b) Déformation dans la direction Y

$$Y = y_{fp_2} + y_{t_I}$$

où:  $y_{fp_2}$  flèxion par force ( $y_f = \frac{P}{K}$ )  
 $y_t$  " " "  $M_t$  ( $y_t = \theta l = \frac{M l}{K \theta}$ )



de la même manière

$$\frac{I}{K_y} = \frac{I}{K_{y_2}} + \frac{L l}{K \theta_I}$$

$$= \frac{I}{3,23 \cdot 10^8} + \frac{0,35 \cdot 0,44}{14 \cdot 10^7} = 0,04 \cdot 10^7$$

$$\text{d'où: } \underline{K_y = 23,6 \cdot 10^7} \quad \frac{N}{m}$$

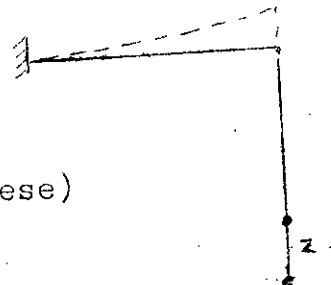
c) Déformation dans la direction Z

$$Z = z_{fp_I} + z_c$$

où:  $z_{fp}$  flèxion par force  
 $z_c$  compression ( $z_c = 0$  hypothèse)

$$\text{Enfin } Z = z_{fp_I}$$

$$\Rightarrow \underline{K_z = K_{z_I} = 2,4 \cdot 10^8} \quad \frac{N}{m}$$





d) Rotation autour de x

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

où:  $\theta_1$  angle de torsion de 1

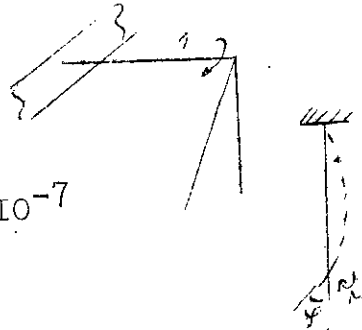
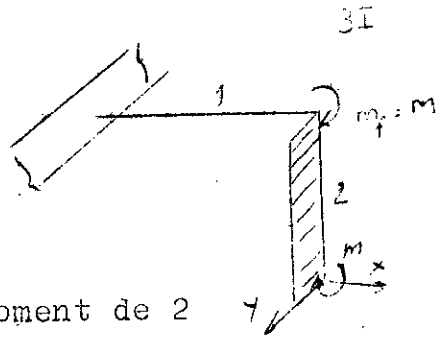
$\theta_2$  angle de flèxion par moment de 2

d'où

$$\frac{1}{K_\theta} = \frac{1}{K_{\theta_1}} + \frac{1}{K_{\theta_2}}$$

$$= \frac{1}{14 \cdot 10^7} + \frac{1}{0,9 \cdot 10^7} = 1,18 \cdot 10^{-7}$$

$$K_\theta = 0,84 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$



e) Rotation autour de y

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

où: angle de flèxion par moment de 1

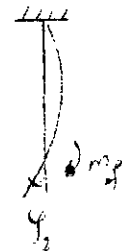
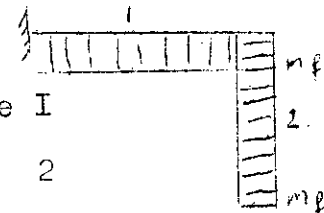
" " " " " " 2

d'où

$$\frac{1}{K_\psi} = \frac{1}{K_{\psi_1}} + \frac{1}{K_{\psi_2}}$$

$$= \frac{1}{1,5 \cdot 10^7} + \frac{1}{2,2 \cdot 10^7} = 1,11 \cdot 10^{-7}$$

$$K = 0,9 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

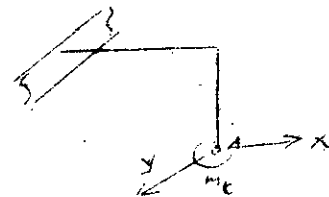


f) Rotation autour de z

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

où =  $\psi_1$  angle de flexion par  $m_f$  de 1

$\psi_2$  " " Torsion "  $M_t$  de 2



# الفصل الرابع



## CHAPITRE 4

### AMORTISSEMENT



$$\frac{I}{K_{\psi}} + \frac{I}{K_{\psi I}} + \frac{I}{K_{\psi 2}}$$

$$= \frac{I}{5,7 \cdot 10^7} + \frac{I}{6,4 \cdot 10^7} = 0,33 \cdot 10^{-7}$$

$$K = 3,01 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

Résumé:

$$K_x = 6,7 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$K_y = 23,6 \cdot 10^7 \text{ "}$$

$$K_z = 24 \text{ " "}$$

$$K_{\theta} = 0,84 \cdot 10^7 \frac{\text{Nm}}{\text{rd}}$$

$$K_{\psi} = 0,9 \cdot 10^7 \text{ "}$$

$$K_{\psi} = 3,01 \text{ " "}$$

## 4-I Généralités

Un grand nombre de matériaux rigides présente la propriété d'amortissement interne, sous la forme d'une boucle elliptique aplatie parcourue dans le sens des aiguilles d'une montre, appelée ( boucle d'hystérésis ).

Ainsi l'écart de la loi de HOOKE est expliqué par la dépendance entre la déformation et l'effort qui est liée à plusieurs facteurs tels que :

-facteurs métallurgique ( structure-cristalline, homogénéité , température )

-facteurs physiques (état de contraintes, la durée, la fréquence des sollicitations.)

Contrairement à la constante élastique qui peut être estimée par l'application des formules de statique, le coefficient d'amortissement interne ne peut être mesuré que par l'étude des vibrations des corps (fig 5.I )

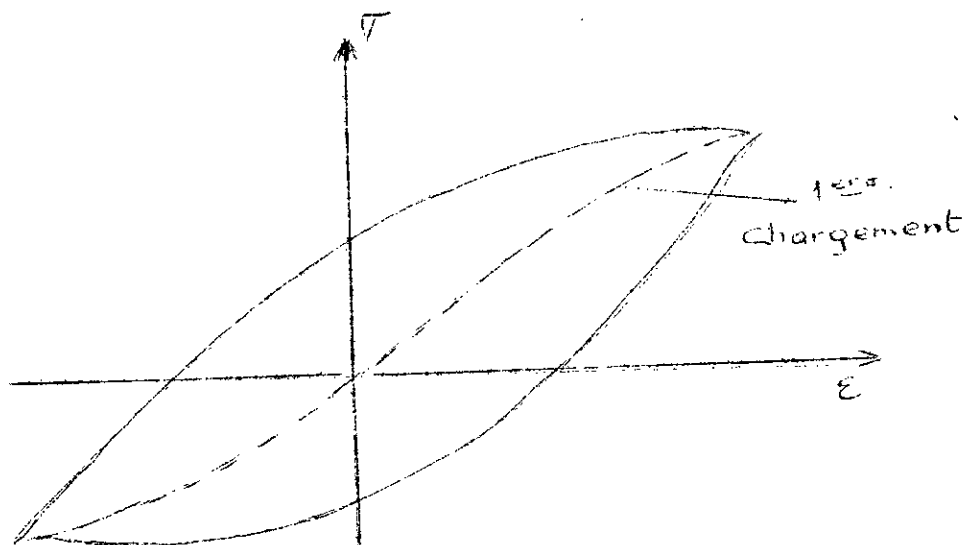
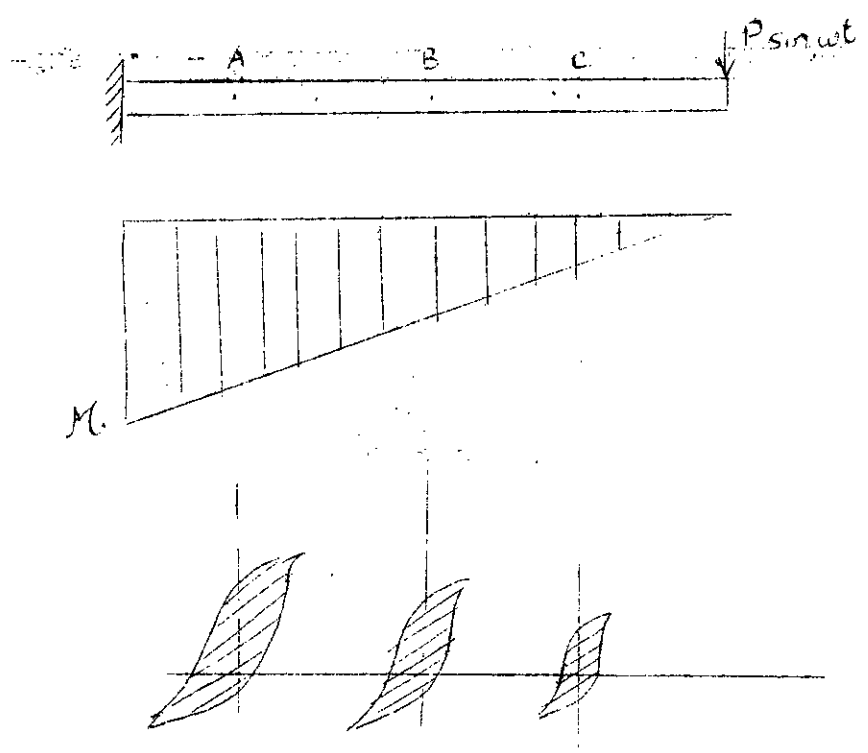


fig 4.I

L'enregistrement de cette courbe permet de nous faire distinguer une courbe de première chargement issue de l'origine, et pour un cycle de charge (positive)-decharge (negative), l'apparition d'une boucle d'hysteresis. Plus la deformation la deformation maximale atteinte au cours d'un cycle est importante, plus la boucle est inclinée sur la verticale et plus son aire augmente. L'apparition d'une boucle d'hysteresis met en évidence une dissipation d'énergie dans le materiau; plus l'aire de la boucle est grand plus la dissipation est grande ( fig 4.2 )



-fig 4.2 - (poutre encastrée de section constante)

#### 4.2 METHODE DE DETERMINATION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT

Les travaux du savant BUSEMAN ont abouties à des résultats expérimentaux pour le calcul d'amortissement concernant la torsion. ( Voir fig 4.3 )

En réalité le phénomène est très compliqué, car la dépendance entre le coefficient et les contraintes ne sont pas linéaire de plus elle varie en fonction du nombre totale de cycle durant le temps.

Afin de pouvoir utiliser les diagrammes de BUEMAN et dans l'espoir de déterminer le coefficient de frottement interne relatif au déplacement du support, nous admettrons les hypothèses suivantes: la même quantité d'énergie sera perdue pour tous les types de contraintes (flexion, torsion) Par ailleurs nous prendrons la même valeur pour les mouvements de translation et de rotation.

L'expression donnant la valeur du coefficient d'amortissement interne:

$$C' = \frac{C \cdot V}{16 \cdot f_{md}}$$

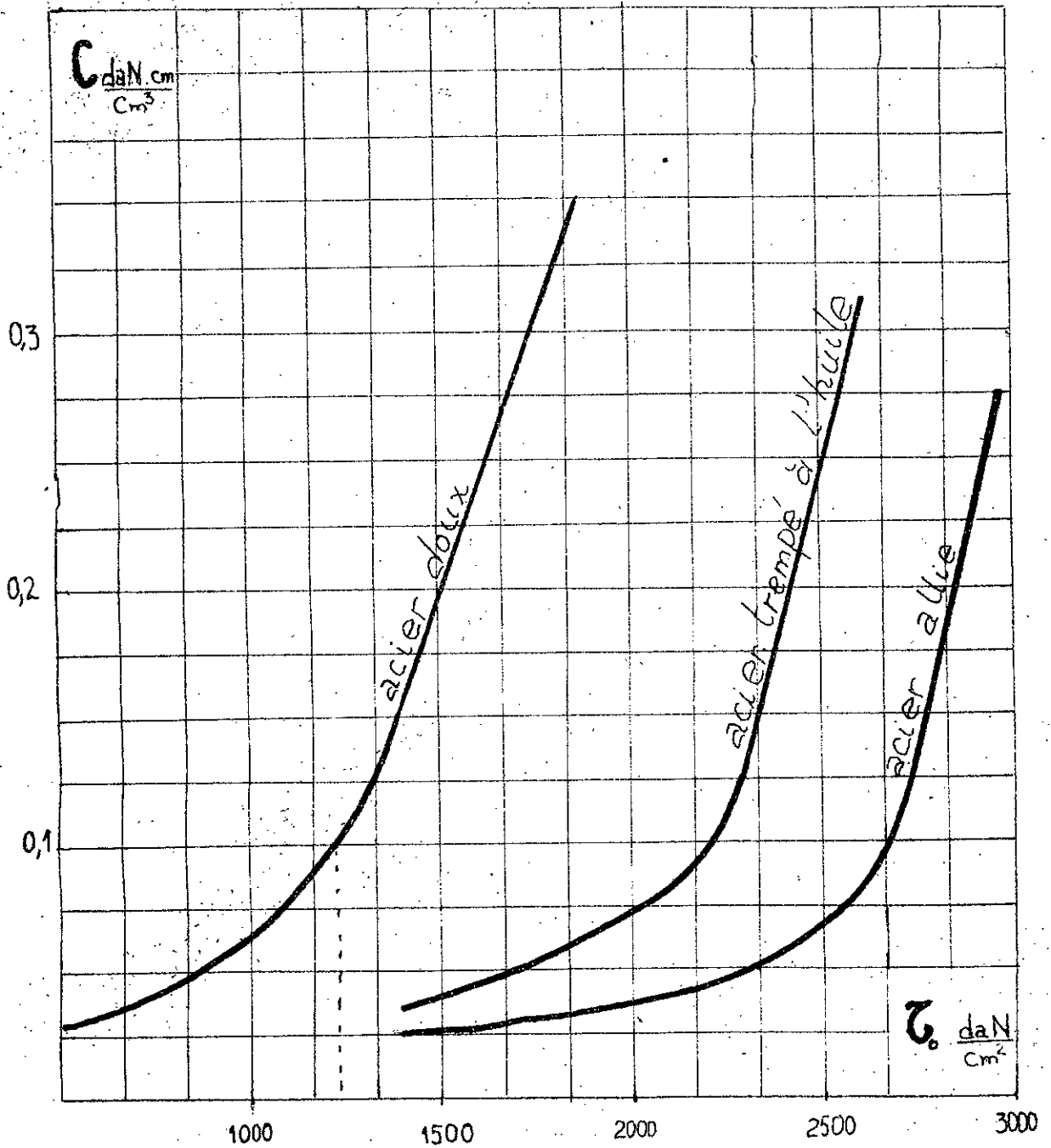
C: valeur lue sur le diagramme

V: volume du support

$f_{md}$ : flèche moyenne dynamique

: fréquence du châssis

Les courbes de torsion de la fig 4.3 expriment l'énergie donnée sous forme de travail (daN.cm) par unité de volume ( $\text{cm}^3$ ), et elle est proportionnelle à  $\tau$



- fig. 4.3 -

## 4.3 Paramètres de calcul

a) calcul des volumes

i) volume du corps I ; voir fig 4.4

$$\begin{aligned}
 V_I &= (V_I - v_2) + 2 v_3 \\
 &= (9,2.6,8.60 - 8,2.5,8.60) + 0,5.60.5,6.2 \\
 &= 1236 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

ii) volume de la barre 2

$$\begin{aligned}
 V_2 &= 4. v \\
 &= 4 . \pi ( r^2 - r'^2 ) . H \\
 &= 4. \pi ( 1,7^2 - 1,2^2 ) . 52 = 947,5 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

b) Fréquence d'excitation  $\dot{V}$ 

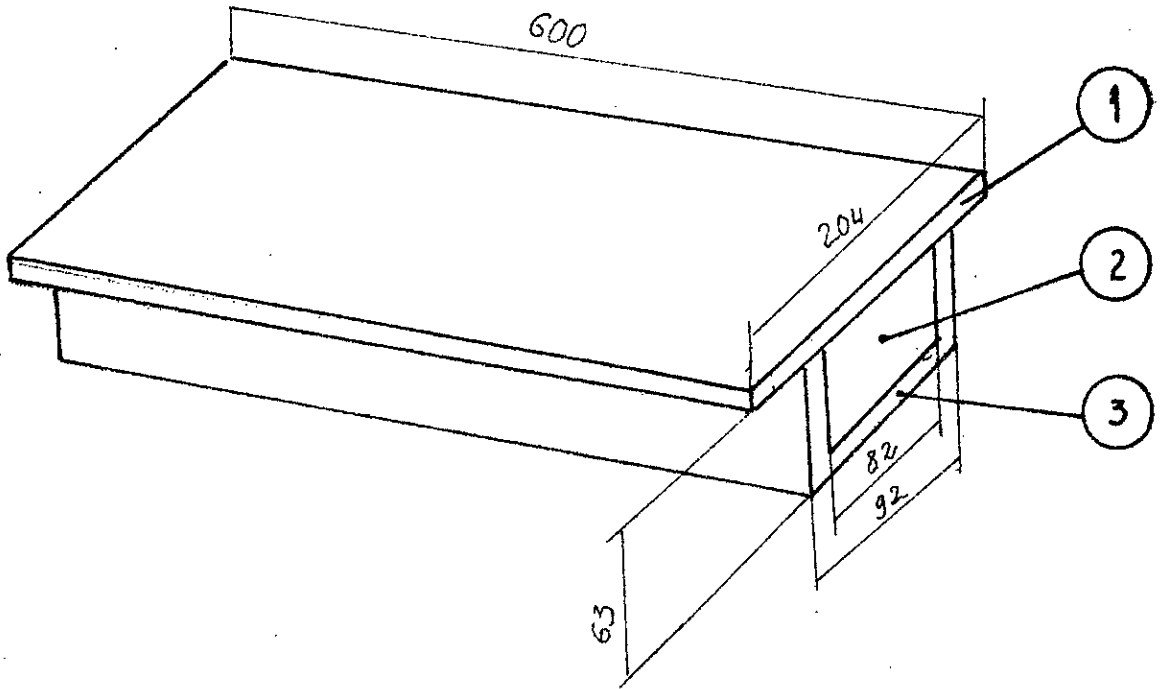
Nous admettrons , que seul le groupe moto propulseur du camion qui excite le support et avec une seul fréquence ; la vitesse moyenne de rotation de ce dernier (moteur) étant de (2000 à 2500 tr/mn) ; nous supposerons d'autre part q'un tour du moteur correspond à un cycle du mouvement vibratoire du support ainsi la fréquence  $\dot{V}$  est:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{Nm}{60} = \frac{2000}{60} \\
 \dot{V} &= 33,3 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

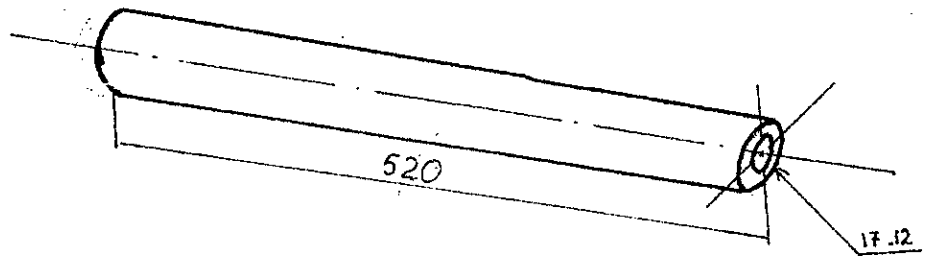


10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Corps . 1.



Corps . 2.



- fig. 4.4. -

# الفصل الخامس



## CHAPITRE 5

### ELEMENTS

#### 1) INERTIE



## d) Facteur C

Le support est fait d'un matériau qui a pour  $\sigma = (1300 \text{ ; } 1900) \text{ daN/cm}^2$

On prend  $C = 0,1 \text{ daN.cm/cm}^3$

Pour déterminer  $C'$  une méthode itérative est obligatoire, car pour connaître ce coefficient, il faut connaître les contraintes dynamiques qui dépendent des vibrations et vis vers ça.

## d) Flèche dynamique

D'après les observations faites sur le mouvement du support nous avons estimé la flèche entre (1 et 3mm).

On prend comme moyenne  $f_{md} = 2\text{mm}$

-Enfin avec tous ces paramètres, nous pourrions calculer  $C'$  (en appliquant la formule précédente).

## i) Corps 1

$$C'_1 = \frac{0,1 \cdot 1236}{16 \cdot 2^2 \cdot 33,3 \cdot 10^{-2}} = 5,79 \text{ daN s/cm}$$

$$= 5793 \text{ Ns/cm}$$

## ii) Barres 2

$$C'_2 = \frac{0,1 \cdot 947,5}{16 \cdot 2^2 \cdot 33,3 \cdot 10^{-2}} = 4,44 \text{ daN s/cm}$$

$$= 4440 \text{ Ns/m}$$

D'où le coefficient d'amortissement globale est:

$$C' = C'_1 + C'_2 = 5793 + 4440$$

$$= \underline{\underline{10230 \text{ Ns/m}}}$$

## GENERALITES

D' une façon générale, on appelle moment d'inertie massique d'un corps par-rapport à un axe, une grandeur qui mesure l'inertie de rotation par-rapport à cette axe , mathématiquement on définit le moment d'inertie autour d' un axe, comme étant la somme des produits des masses élémentaires par de des carrés de leurs distance à cette axe .

LES moments d' inertie du support par-rapport aux axes  $G_x$  ,  $G_y$  ,  $G_z$  par :

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm = \iiint_V \rho (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm = \iiint_V \rho (x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm = \iiint_V \rho (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Où  $m$  ,  $\rho$  ,  $V$  ( $dx dy dz$  ) sont respectivement la masse, la densité et le volume du corps (ensemble support réservoir d'air et filtre à air) , et  $X$  ,  $Y$  ,  $Z$  les coordonnées des particules élémentaires du volume  $dv$  et de la masse  $dm$  du corps.

Remarque:

pour notre calcul on prendra comme centre de gravité de l'ensemble support et réservoir d'air, le centre géométrique du support car il diffère de peu.

## 5.2 SCHEMATISATION ET CALCUL DES ELEMENTS DU SUPPORT

Afin de pouvoir calculer le moment d'inertie globale il est nécessaire de faire un découpage suivant le schémas puis de calculer le moment d'inertie de chaque élément par rapport à son centre de gravité, et les liés au centre de gravité du support par l'intermédiaire de la formule de HYGENS-STEINER

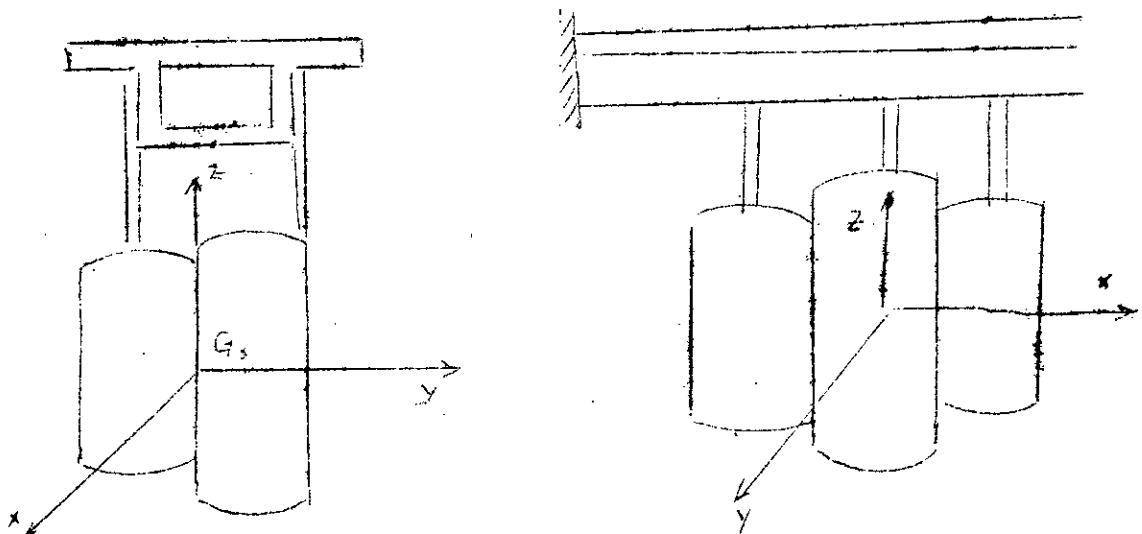


Fig 5. I

## 5.2.1 CALCUL

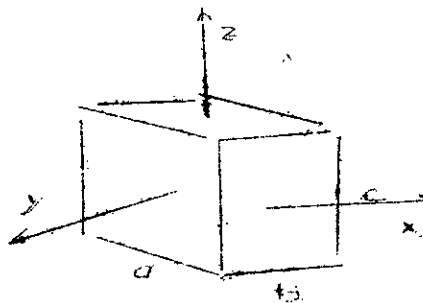
Avant de commencer les calculs, il est nécessaire de donner les formules du moment d'inertie pour quelque formes simples déjà démontré dans tous livres d'R.D.M.

Cube:

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$



Cylindre:

a) -Plein

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{16} m (D^4 + \frac{4}{3} h^2)$$

b) -Creux

$$I_z = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} m (R^2 + r^2 + \frac{1}{3} h^2)$$

### 5.2.2 CALCUL DU SUPPORT

a) Corps

le moment d'inertie est calculé suivant le découpage de la fig 5.2

=== Détermination des masses

$$m_1 = \rho V_1 = 7800 \cdot 0,6 \cdot 0,068 \cdot 0,092 = 29 \text{ kg}$$

$$m_2 = \rho V_2 = 7800 \cdot 0,6 \cdot 0,092 \cdot 0,058 = 25 \text{ kg}$$

$$m_3 = \rho V_3 = 7800 \cdot 0,6 \cdot 0,052 \cdot 0,005 = 1,3 \text{ kg}$$

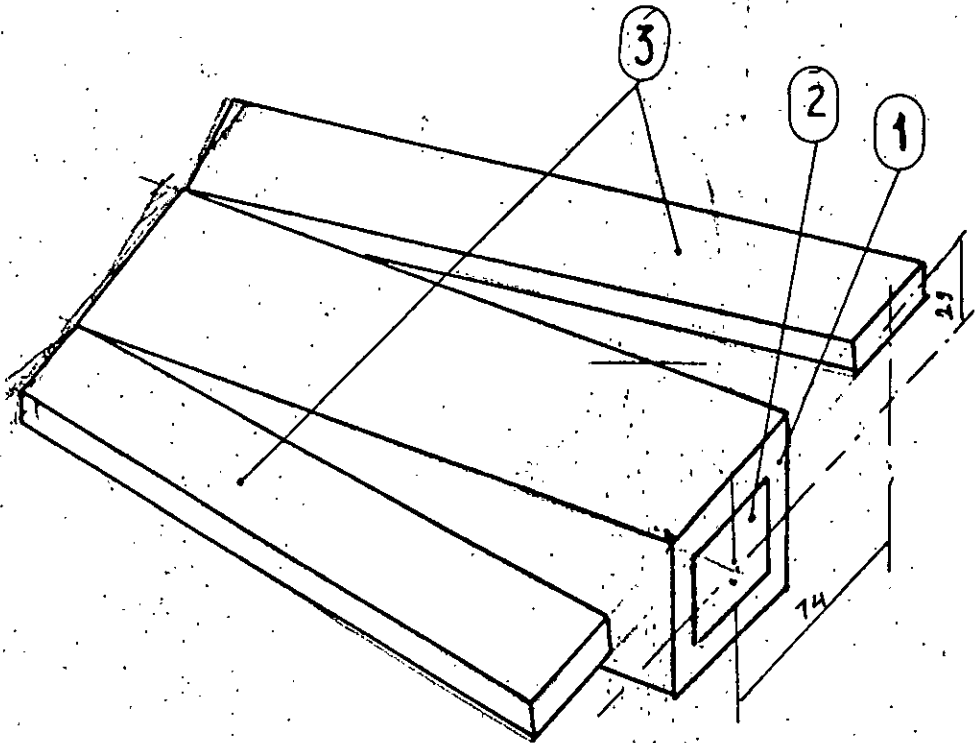
=== Détermination des éléments d'inertie

i) plaque 3

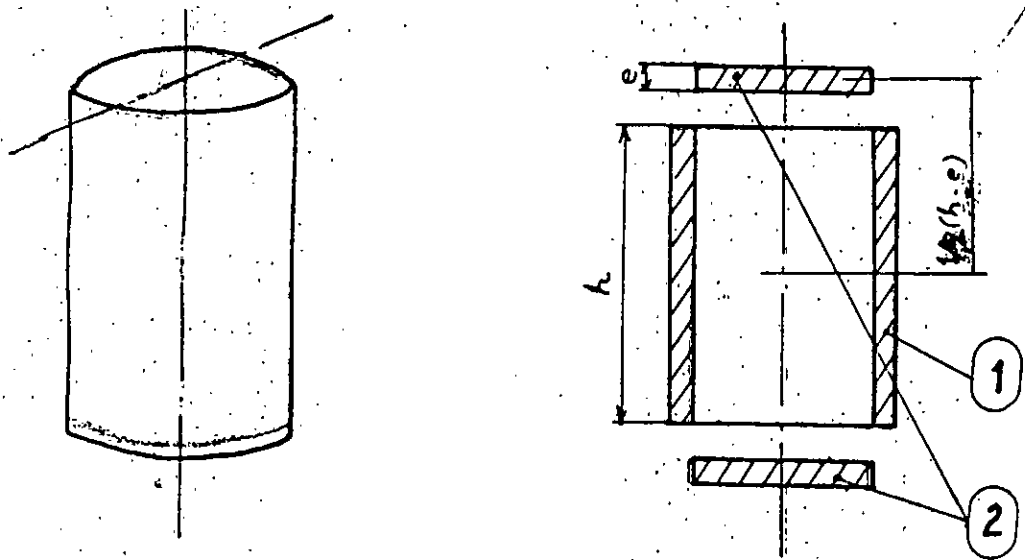
$$I_{x3} = \left( \frac{1,3 \cdot 10^{-6}}{12} (52^3 + 5^3) \right) + 1,3 \cdot 74^2 \cdot 10^{-6} = 0,07 \text{ kg m}^2$$

$$I_{y3} = \left( \frac{1,3 \cdot 10^{-6}}{12} (600^3 + 5^3) \right) + 1,3 \cdot 29^2 \cdot 10^{-6} = 0,05 \text{ ..}$$

$$I_{z3} = \frac{1,3 \cdot 10^{-6}}{12} (600 + 52)^3 + 1,3 \cdot 0 = 0,39 \text{ ..}$$



- fig. 5.12 -



- fig. 5.13 -

ii) tube carré creux

données:

$$\begin{aligned} & a=92 \text{ mm} \\ 1) \quad & b=600 \text{ ..} \\ & c=68 \text{ ..} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a'=82 \text{ mm} \\ 2) \quad & =600 \text{ ..} \\ & c'=58 \text{ ..} \end{aligned}$$

Calcul:

$$\begin{aligned} I_{X.I} &= I_{x_1} - I_{x_2} \\ &= \frac{I_0^{-6}}{I_2} (29(92^2 + 68^2) - 25(58^2 + 82^2)) = 0,8 \text{ kg.m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Y.I} &= I_{y_1} - I_{y_2} \\ &= \frac{I_0^{-6}}{I_2} (29(600^2 + 68^2) - 25(600^2 + 58^2)) = 0,12 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{Z.I} &= I_{z_1} - I_{z_2} \\ &= \frac{I_0^{-6}}{I_2} (29(600^2 + 92^2) - 25(600^2 + 82^2)) = 0,12 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

-o- Enfin de i), ii) , on obtient:

$$\begin{aligned} I_{1.I} &= I_{X.I} + I_{x_3} \\ &= 0,8 + 0,07 = \underline{0,87 \text{ kgm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2.I} &= I_{Y.I} + I_{y_3} \\ &= 0,12 + 0,1 = \underline{0,22 \text{ ..}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{3.I} &= I_{Z.I} + I_{z_3} \\ &= 0,12 + 0,39 = \underline{0,5 \text{ ..}} \end{aligned}$$

b) Les barres

données:

$$\begin{aligned} l &= 520 \text{ mm} \\ D &= 17 \text{ ..} \\ d &= 12 \text{ ..} \end{aligned}$$

$$m = 0,5 \text{ kg}$$

Moment d'inertie:



Moment d'inertie:

-remarque: on constate d'après le calcul que le terme d'inertie est négligeable devant le terme de <sup>Hygnes</sup> (I=I<sub>0</sub>+md<sup>2</sup>)

Où d: distance suivant les directions du centre de gravité de la barre au centre de gravité G<sub>s</sub> définie dans le § 3

Enfin:

$$\begin{aligned}
 I_{x-b} &= m(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2) \\
 &= 0,5(60^2 + 60^2 + 190^2 + 190^2) \cdot 10^{-4} = 0,39 \text{ kgm}^2 \\
 I_{y-b} &= m(dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2) \\
 &= 0,5(130^2 + 130^2 + 20^2 + 20^2) \cdot 10^{-6} = 0,17 \text{ kgm}^2 \\
 I_{z-b} &= m \cdot 4 \cdot dz^2 \\
 &= 0,5 \cdot 4 \cdot 90^2 \cdot 10^{-6} = 0,16 \text{ kgm}^2
 \end{aligned}$$

### 5.2. 3) CALCUL DES RESERVOIRS

#### I) Réservoir d'air

Le moment d'inertie de cette bouteille sera calculer pour un cylindre creux I, et deux cylindres pleins voir fig 5.3

#### i) Calcul du cylindre I

Données: D=0,3 m  
d=0,294 m  
h=0,45 m  
M<sub>I</sub>=9,8 kg

$$I_x = \frac{I}{4} - m(R^2 + r^2 + \frac{I}{3} h^2)$$

$$= \frac{I}{4} - 9,8(0,15^2 + 0,147^2 + \frac{I}{3} \cdot 0,45^2) = 0,17 \text{ kgm}^2$$

$$I_x = 0,25 \cdot 9,8(0,147^2 + 0,15^2 + 0,33 \cdot 0,45^2) = 0,27 \text{ kgm}^2$$

$$I_y = I_x = 0,27 \text{ kgm}^2$$

$$I_z = \frac{I}{2} - m(R^2 + r^2)$$

$$= 0,5 \cdot 9,8(0,15^2 + 0,147^2) = 0,2 \text{ kgm}^2$$

ii) Calcul du cylindre 2

Données:

$$d = 0,294 \text{ m}$$

$$h' = 0,003 \text{ m}$$

$$M' = 1,5 \text{ kg}$$

$$I_{x_I} = \frac{I}{16} - m(d^2 + \frac{4}{3}r^2 + 16 \frac{h^2}{4})$$

$$= 0,062 \cdot 1,5(0,294^2 + 1,33 \cdot 0,005^2 + 4 \cdot 0,45^2) = 0,06 \text{ kgm}^2$$

$$I_{y'} = I_{x'} = 0,06 \text{ kgm}^2$$

$$I_{z'} = \frac{I}{2} - mr^2$$

$$= \frac{I}{2} - 1,5 \cdot 0,147^2 = 0,01 \text{ kgm}^2$$

--- Enfin de i), ii) on a:

$$I_{Xr} = I_x + 2I_{x'}$$

$$= 0,27 + 0,12 = 0,4 \text{ kgm}^2$$

$$I_{Yr} = I_y + I_{y'} = I_{Xr}$$

$$= 0,4 \text{ kgm}^2$$

$$I_{Zr} = I_z + I_{z'} \cdot 2$$

$$= 0,2 + 0,02 = 0,22 \text{ kgm}^2$$

## 2) Réservoir du filtre à air

Avec la même remarque que I on procède au calcul

## i) Calcul du cylindre I

Données:

$$D' = 0,3\text{m}$$

$$d' = 0,297\text{m}$$

$$h' = 0,55\text{m}$$

$$M' = 7,6 \text{ kg}$$

-même formule que précédemment

$$I_{x'} = I_{y'} = -\frac{I}{4} m (R'^2 + r'^2 + \frac{I}{3} h'^2)$$

$$= 0,25 \cdot 7,6 (0,15^2 + 0,148^2 + 0,55^2) = 0,21 \text{ kgm}^2$$

$$I_{z'} = -\frac{I}{2} m (R'^2 + r'^2)$$

$$= 0,5 \cdot 7,6 (0,15^2 + 0,148^2) = 0,13 \text{ kgm}^2$$

## ii) Calcul du cylindre 2

$$d'' = 0,297\text{m}$$

$$h'' = 0,0015\text{m}$$

$$M'' = 0,8 \text{ kg}$$

$$I_{x''} = -\frac{I}{16} m'' (d''^2 + \frac{4}{3} h''^2 + h''^2 - \frac{I}{4})$$

$$= 0,062 \cdot 0,8 (0,297^2 + 1,33 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,55) = 0,04$$

$$I_{x''} = I_{y''} = 0,04 \text{ kgm}^2$$

$$I_{z''} = -\frac{I}{8} m'' d''^2$$

$$= 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,148^2 = 0,01 \text{ kgm}^2$$

-----Enfin de i) ii) on a:

$$I_x = I_x + 2I_x''$$

$$= 0,21 + 0,08 = 0,3 \text{ kgm}^2$$

$$I_y'' = I_y' + I_y''$$

$$= 0,3 \text{ kgm}^2$$

$$I_z'' = I_z' + 2 I_z''$$

$$= 0,13 + 0,02 = 0,15 \text{ kgm}^2$$

#### 5.2.4) MOMENT d'inertie de l'ensemble

En appliquant le théorème de KOENING pour tous l'ensemble rotant par-rapport au centre de gravité

$$I = \sum I_i + \sum m_i d_i^2$$

Où dx: distance du centre de gravité de l'élément Gs

dy:    ...            ..    ..    ..            ..            ....

dz:    ...            ..    ..            ..    ..            .. ..

$$M_1 = 12,8 \text{ kg}$$

$$M_2 = 12,8 \text{ kg}$$

$$M_3 = 9 \text{ kg}$$

$$m_c = 10,8 \text{ kg}$$

$$m_b = 2 \text{ kg}$$

	$I_x$ kgm <sup>2</sup>	$I_y$ kgm <sup>2</sup>	$I_z$ kgm <sup>2</sup>	dx m	dy m	dz m
réservoir air	0,4	0,4	0,22	0,22	0,05	0
bouteille filtre	0,3	0,3	0,15	0	0,14	0
corps	0,87	0,22	0,5	0,05	0,14	0,32
barres	0,39	0,17	0,16	0	0	0

On appliquant la formule précédente on obtient:

$$I_X = 8,5 \text{ kg m}^2$$

$$I_Y = 5,43 \text{ "}$$

$$I_Z = 4,23 \text{ kgm}^2$$

### 5.3-TABLEAU RECAPITULATIF DES DIFFERENTS PARAMETRES

degré de liberté	facteurs d'inertie	facteurs de rigidité $10^7$	facteurs d'amortissement
Translation $\theta_x$	$m=60\text{kg}$	6,7 N/m	10230 Ns/m
translation $G_y$	$m=60 \text{ kg}$	23 N/m	"
Translation $G_z$	$m=60 \text{ kg}$	24 N/m	"
Rotation $\theta$	$I_x=8,5 \text{ kgm}^2$	0,84 Nm/rd	10230 Nms/rd
Rotation $\psi$	$I_y=5,42 \text{ "}$	0,9 Nm/rd	"
Rotation $\psi$	$I_z=4,23 \text{ "}$	3,01 "	10230 Nms/rd

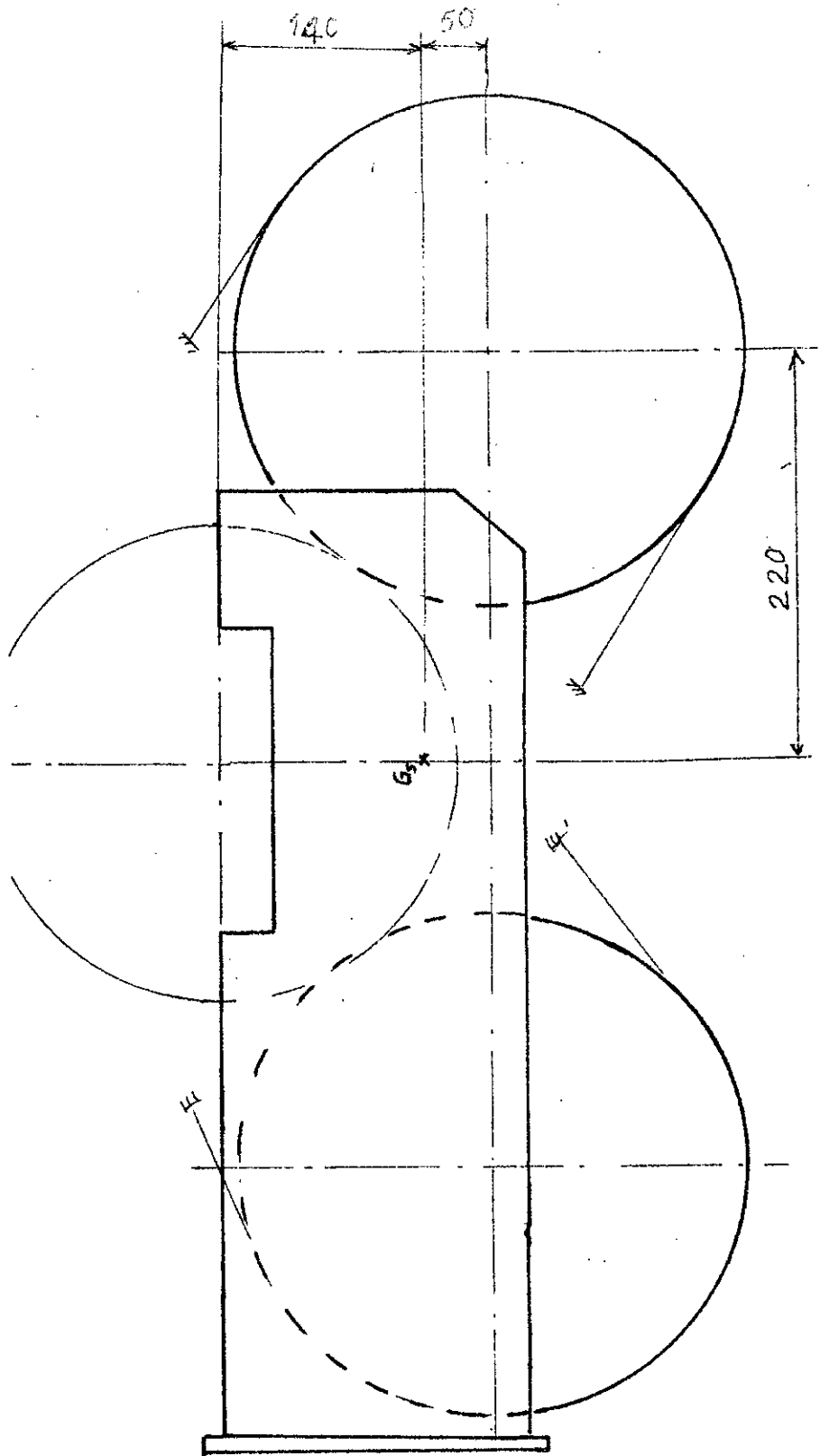


Fig. 5.4 -

## DESCRIPTION DES PRINCIPES DE LA MODELISATION MATHÉMATIQUE

Après avoir calculé les facteurs de rigidités, d'inerties et d'amortissements nécessaires pour résoudre les équations et définir le mouvement du support suivant ses degrés de liberté.

En réalité le mouvement du support est bien compliqué; car pour être en conformité avec la réalité, il faudra tenir compte du couplage existant entre les degrés de liberté.

Prenons l'exemple du support fig(6.I)

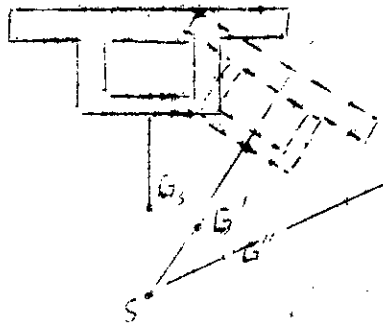


fig 6.1

On remarque que pour une translation du centre de gravité de  $G$  en  $G'$  suivant le déplacement  $\overline{GG'}$ . La rotation autour de  $G_x$  le fait déplacer en  $G''$  suivant l'arc  $\widehat{GG''}$  d'angle  $\theta$ . L'action du mouvement  $M$  fait déplacer le centre de gravité de  $G''$   $G'''$  d'angle  $\phi$ .

Le même phénomène se produit pour les autres plans; alors si on prend en considération tous ces couplages, le système d'équation devient très compliqué (il peut même être non

linéaire). C'est pourquoi nous admettrons que le mouvement suivant les degrés de liberté est mutuellement indépendant.

A la suite de cette simplification, nous aurons à résoudre six équations indépendantes pour déterminer le il faut faire une superposition de ces mouvements.



الفصل السادس



CHAPITRE 6

RESOLUTION

MATHEMATIQUE



## 6.1-MODELE MATHEMATIQUE DU SUPPORT

L'établissement du modèle mathématique nécessite d'une part la connaissance de tous les paramètres caractéristiques du support (inertie, rigidité, amortissement; ..voir tableau); et d'autre part la connaissance des modes d'excitations voir schémas (6.2).

Les excitations du support sont dues au mouvement du châssis auquel il est attaché, la situation est présentée par le schéma (6.2)

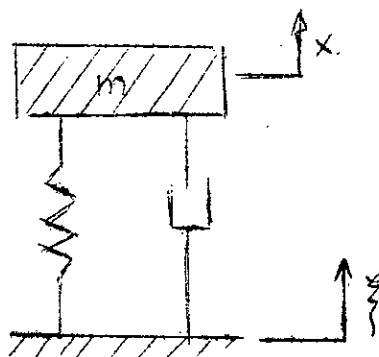


fig-6.2-

La masse  $-m-$  représente l'ensemble support réservoir d'air étant attachée au châssis par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $K$  et d'un amortisseur (représentant la rigidité et l'amortissement interne du matériau)

On sait que le modèle mathématique pour ce type d'excitation est décrit à l'aide de l'équation:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = m\ddot{y}$$

Les excitations du châssis étant supposées comme harmoniques, de ce fait son mouvement vibratoire l'est aussi, son déplacement est caractérisé par :

$$y = a \cos \dot{V}t$$

ou  $\dot{V}$ : fréquence de vibration du châssis, par conséquent on a:

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = ma \cos \dot{V}t$$

On posant:

$$\frac{C}{m} = 2h$$

$$\frac{K}{m} = w^2$$

on obtient:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + w^2 x = a \dot{V}^2 \cos \dot{V}t$$

Où  $w^2$ : fréquence propre angulaire des vibrations libres

de période:  $T = \frac{2\pi}{w}$

Enfin des ouvrages de vibrations, cette équation admet pour solution:

$$X = D e^{-ht} \cos(\lambda t + \alpha) + \frac{a \cdot \dot{V}^2}{w^2} \frac{\cos(\dot{V}t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \frac{\dot{V}^2}{w^2})^2 + \frac{4h^2}{w^2} \cdot \frac{\dot{V}^2}{w^2}}}$$

avec: fréquence propre angulaire des vibrations amorties ( )

$$\lambda = \sqrt{w^2 - h^2}$$

phase du mouvement ( $\varphi$ )

$$\varphi = \arctg \frac{2h \dot{V}}{w^2 - \dot{V}^2}$$

L'expression représentant la vibration libre qui

disparaît au bout d'un temps très grand est:

$$x_0 = D e^{-t} \cos(\lambda t + \alpha)$$

Il reste finalement le terme:

$$x_T = \frac{a \cdot \dot{V}^2}{w^2} \frac{\cos(\dot{V}t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \frac{\dot{V}^2}{w^2})^2 + \frac{4h^2 \dot{V}^2}{w^2 w^2}}$$

Ce terme donne l'expression des vibrations dues au mouvement du châssis, leur amplitude est:

$$A_0 = \frac{a \cdot \frac{V^2}{w^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{w^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{w^2} \cdot \frac{V^2}{w^2}}$$

Nota: La résolution des autres équations se fait de la même manière, sauf pour le cas de rotation.

-Cas de rotation

L'équation pour le cas de torsion est:

$$I \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K \theta = I \ddot{E}$$

avec:  $h = \frac{C}{I}$

$$w^2 = \frac{K}{I}$$

$$E = a \cos Vt$$

La forme d'amplification dans ce cas est identique à celle de la translation.

$$A_0 = \frac{a \frac{V^2}{w^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{w^2}\right)^2 + 4 \frac{h^2}{w^2} \cdot \frac{V^2}{w^2}}$$

Enfin le coefficient d'amplification sera calculé dans le cas de la résonance c.à.d ( $w=V$ ) et ( $w^2=V^2$ )

-cas de translation:  $J = \frac{A_0}{a} = \frac{\sqrt{K \cdot m}}{C}$

-cas de rotation:  $J = \frac{A_0}{a} = \frac{\sqrt{K \cdot I}}{C}$

## 6.2 CALCUL DES FREQUENCES PROPRES

On sait d'après le paragraphe 6.1 que:

$$w^2 = \frac{K}{m} \quad ; \quad w = 2 \pi f$$

$$w^{\wedge 2} = \frac{K_r}{I} \quad ; \quad w^{\wedge} = 2 \pi f^{\wedge}$$

D'où :

la fréquence propre suivant l'axe Gx

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{m}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^7}{60}} = 175,7 \text{ s}^{-1}$$

la fréquence propre suivant l'axe Gy

$$f_y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_y}{m}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{23 \cdot 10^7}{60}} = 325 \text{ s}^{-1}$$

la fréquence propre suivant l'axe Gz

$$f_z = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_z}{m}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{24 \cdot 10^7}{60}} = 325 \text{ s}^{-1}$$

la fréquence propre autour de l'axe Gx (rotation)

$$f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_o}{I_x}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{0,84 \cdot 10^7}{8,5}} = 158,3 \text{ s}^{-1}$$

la fréquence propre de rotation autour de l'axe Gy

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_y}{I_y}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{0,9 \cdot 10^7}{5,42}} = 503,5 \text{ s}^{-1}$$

la fréquence propre de rotation autour de l'axe Gz

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_z}{I_z}} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} \sqrt{\frac{3,01 \cdot 10^7}{4,23}} = 431 \text{ s}^{-1}$$

Finalement:

$f_x = 175,7 \text{ s}^{-1}$	$f_o = 158,3 \text{ s}^{-1}$
$f_y = 325 \text{ "}$	$f = 503,5 \text{ "}$
$f_z = 325 \text{ "}$	$f = 431 \text{ "}$

## 6.3- CALCUL DES COEFFICIENTS D'AMPLIFICATION

D'après les équations précédentes on a définie le coefficient d'amplification comme étant le rapport d'amplitude des vibrations de l'élément excitant (chassis) et l'élément excité (support).

$$U = \frac{A_0}{a}$$

le calcul de ce coefficient nous oblige à ce placer dans le cas critique ; (c.a.d)  $=w$  ) car les vibrations seront les plus grandes, d'où contraintes très grandes.

Application

$$\mu_x = \frac{\sqrt{\frac{mK_x}{C}}}{\sqrt{60.6.7 \cdot 10^7}} = 6,19$$

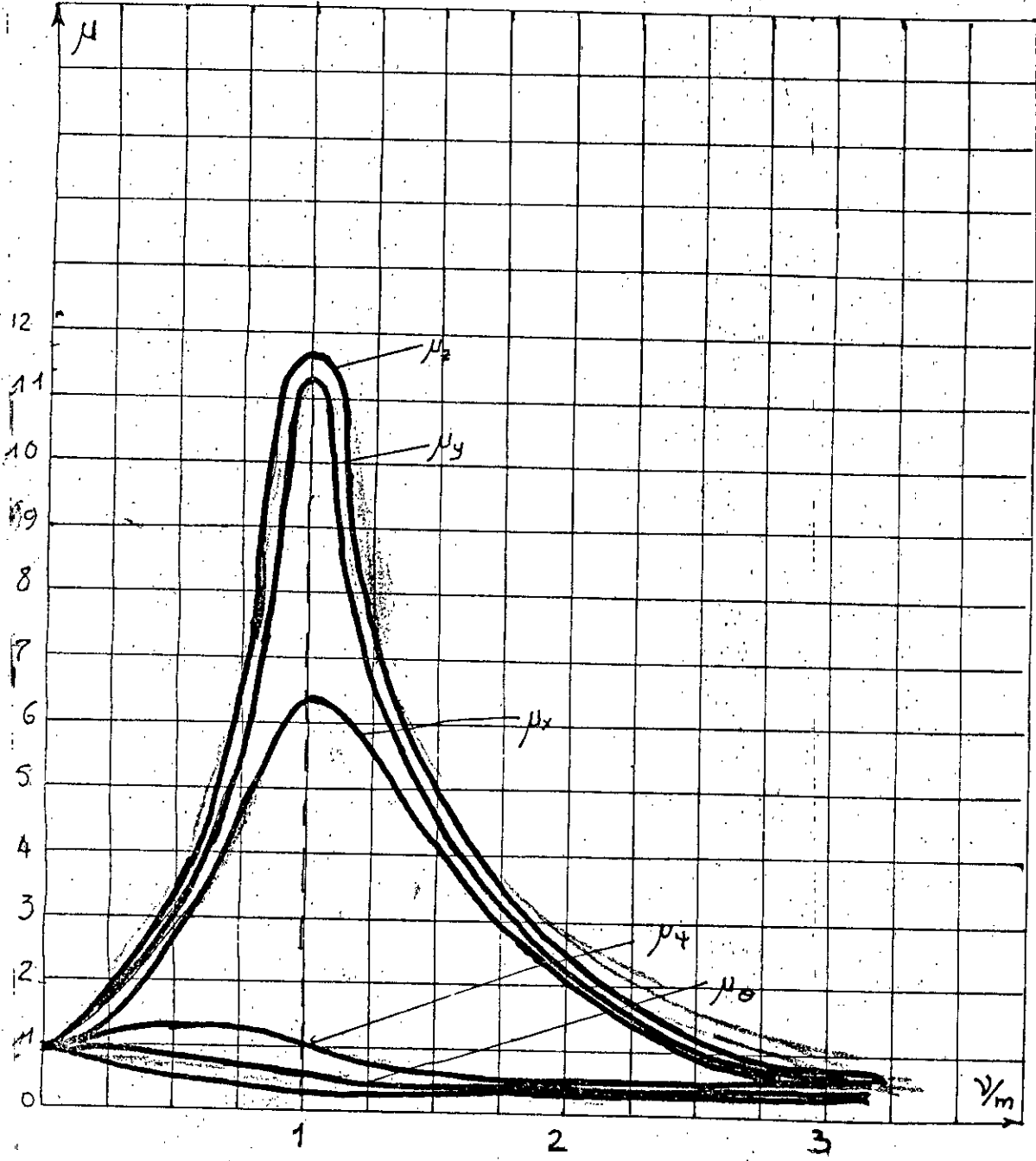
$$\mu_y = \frac{\sqrt{\frac{mK_y}{C}}}{\sqrt{60.23 \cdot 10^7}} = 11,48$$

$$\mu_z = \frac{\sqrt{\frac{mK_z}{C}}}{\sqrt{60.24 \cdot 10^7}} = 11,7$$

$$\mu_0 = \frac{\sqrt{\frac{K_0 I}{C}}}{\sqrt{8.5.0,84 \cdot 10^7}} = 0,82$$

$$\mu_y = \frac{\sqrt{\frac{I_y K}{C}}}{\sqrt{5.43.0,9 \cdot 10^7}} = 0,68$$

$$\mu_z = \frac{\sqrt{\frac{I_z K}{C}}}{\sqrt{3.014.23 \cdot 10^7}} = 1,1$$



courbe donnant la variation de  $\mu$  en fonction de  $v/w$  pour les différents degrés de liberté.

## CONCLUSION

Afin d'améliorer la construction du support et dans le but de résoudre le problème avec précision; nous nous sommes confrontés à des problèmes malgré que le résultat paraît concluant.

a) Le problème n'est pas assez facile comme on le prétend; c'est pour cela qu'une étude supplémentaire est déjà proposée (étude et détermination des contraintes)

b) Pour arriver à des résultats pratiques, il est nécessaire de savoir avec précision:

-L'amortissement interne

-La vibration du châssis (excitation)

Nous rapportons à l'égard de la S.N.V.I-C.V.I principale concernée par le problème. D'orienter ces études dans ce sens une fois que le laboratoire roulant sera en place.

-On constate que le spectre de fréquence se situe dans la zone des vibrations importantes, d'où une forte probabilité de résonance!

C'est pour cela le coefficient d'amortissement  $\mu$  prend des valeurs allant jusqu'au dizaines.

En conclusion générale; on voit bien que l'objectif visé est atteint, et que l'étude complémentaire donnera plus de détail afin de concevoir un modèle simple et résistant.



# BIBLIOGRAPHIE

- 1°) Cours de monsieur KUROWSKI  
- Vibration acoustique des machines.
- 2°) J.P DEN HARTOG  
- VIBRATION MECANIQUE  
EDITION EYROLLES 1969
- 3°) I. MIROLIOBOV S. ENGOLYTCHEV  
- Resistance de materiaux, manuel de resolution de problèmes.  
Edition MOSCOU 1977
- 4°) S. STEPLIKOV  
- Mécanique  
Edition MOSCOU 1978
- 5°) G. CHEVASSON ET PEZET  
- Formulaire du dessinateur et du techniciens  
Edition des Forges 1977
- 6 ) J-P.Henry et F.Parcy  
-Cours d'élasticité  
Edition DUNOD
- 7 ) ENSMP CNRS ENPC  
-Matériaux et structures sous chargement cyclique  
Edition Palaiseau 1978
- 8 ) G.Walter  
-Aide mémoire de l'ingenieur  
OPU
- 9 °) Encyclopedies des sciences industrielles  
QUILLET