

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

34/87

وزارة التعليم و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

Alex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*SYNTHESE SUR L'ANALYSE  
DYNAMIQUE DES PARTIES  
INTERNES DES MOTEURS  
EN LIGNE ET EN V.*

Proposé par :

M. Boukabache

Etudié par :

R. Ayad

Dirigé par :

M. Boukabache

PROMOTION JUIN 87

EXHIBIT 2118016

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT

MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*SYNTHESE SUR L'ANALYSE  
DYNAMIQUE DES PARTIES  
INTERNES DES MOTEURS  
EN LIGNE ET EN V.*

Proposé par :

M. BOUKABACHE

Etudié par :

R. AYAD

Dirigé par :

M. BOUKABACHE

PROMOTION JUIN 87

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الجامعة الوطنية المتعددة التخصصات  
BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique



وَأَنْزَلْنَا الْحَدِيدَ فِيهِ بَأْسٌ  
ثَقِيلٌ وَمَنْفَعٌ لِّلنَّاسِ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ



# REMERCIEMENTS

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Je tiens à remercier vivement mon promoteur et chef de département, M. Boukabache, pour tous ses conseils qui m'ont aidé à rédiger ce mémoire de fin d'études.

Je remercie également M. Rechak et M. Tazi d'avoir bien voulu accepter d'être membres de jury.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance :

- Au personnel du centre de calcul de l'E.N.P. et en l'occurrence M. Sari qui était présent à tout moment.
- Au personnel qui ont participé au tirage de cet ouvrage et à sa finition, notamment M. Benkabila de l'USTHB, mon cousin Ayad Madjid et M. Selmani Abderrahmane d' « El Moudjahid ».
- Aux cadres de l'ENPMO de Bel Abbès qui ont accepté d'assister à ma soutenance.

Que tous les enseignants ayant contribué à ma formation trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

# DEDICACES

**Je dédie ce modeste travail à :**

- Mon père et à ma mère qui m'ont encouragé à persévérer dans mes études.
- Mon frère et mes sœurs.
- MM. Gahmousse, Tazi et Mansour : enseignants au département, qui ont contribué à ma formation.
- Mon ami Boucheffra Khélifa qui était présent à tout moment durant mes études secondaires.
- Mon oncle Ayad Khélifa et sa famille.
- Mes amis Ziane, Youssef et Yacine.
- Toute ma promotion.

# Sommaire

Introduction . . . . . 1

## CHAPITRE : I ETUDE CINEMATIQUE

### ET DYNAMIQUE DE L'ATTELAGE MOBILE DES MOTEURS EN LIGNE ET EN V

A. ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DE L'EMBIELLAGE  
 (BIELLE-BIELLETTE) DE MOTEURS EN V . . . . . 5

A.1) ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME (bielle-biellette-manivelle) . . 6

1. Mise en place des repères. Définition des points . . . . . 6
2. Formules de passage entre repères . . . . . 7
3. Relations cinématiques . . . . . 13
4. Cinématique des points A, B<sub>1</sub>, G<sub>1</sub>, C, B<sub>2</sub>, G<sub>2</sub> . . . . . 15

A.2) ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME (bielle - biellette-manivelle). . 21

1. Etude dynamique du piston (1) . . . . . 22
  - 1.1 ) Analyse des actions mécaniques sur le piston (1). . . . . 22
  - 1.2 ) Equations vectorielles fondamentales du piston (1) . . . . . 23
  - 1.3 ) Equations scalaires du piston (1) . . . . . 25
2. Etude dynamique du piston (2). . . . . 25
  - 2.1 ) Analyse des actions mécaniques sur le piston (2) . . . . . 25
  - 2.2 ) Equations vectorielles fondamentales du piston (2) . . . . . 27
  - 2.3 ) Equations scalaires du piston (2) . . . . . 28
3. Etude dynamique de La bielle (à œil) . . . . . 29
  - 3.1 ) Analyse des actions mécaniques sur La bielle . . . . . 29
  - 3.2 ) Equations vectorielles fondamentales de La bielle . . . . . 30

3.3 ) Equations scalaires de la bielle . . . . .	33
4. Etude dynamique de la bielle . . . . .	34
4.1 ) Analyse des actions mécaniques sur la bielle . . . . .	34
4.2 ) Equations vectorielles fondamentales de la bielle . . . . .	35
4.3 ) Equations scalaires de la bielle . . . . .	36
5. Etude dynamique de la manivelle . . . . .	37
5.1 ) Analyse des actions mécanique sur la manivelle . . . . .	37
5.2 ) Equations vectorielle fondamentales de la manivelle . . . . .	37
5.3 ) Equations scalaires de la manivelle . . . . .	39
 <b>B. ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DE L'EMBIELLAGE</b>	
( BIELLE-BIELLE A FOURCHE ) DE MOTEURS EN V . . . . .	40
B.1 ) ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME ( bielle-bielle à fourche-manivelle ) . . . . .	42
1. Relations cinématiques . . . . .	43
2. Cinématique des points $G_1, B_2, G_2$ . . . . .	44
B.2 ) ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME ( bielle-bielle à fourche-manivelle ) . . . . .	47
3. Etude dynamique de la bielle . . . . .	48
4. Etude dynamique de la bielle à fourche . . . . .	51
5. Etude dynamique de la manivelle . . . . .	54
 <b>C. ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DU SYSTEME</b>	
( BIELLE-MANIVELLE ) DE MOTEURS EN LIGNE . . . . .	56
C.1 ) ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME ( bielle-manivelle ) . . . . .	56
1. Relations cinématiques . . . . .	56
2. Cinématique des points B, G, A . . . . .	56
C.2 ) ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME ( bielle-manivelle ) . . . . .	57
1. Etude dynamique du piston . . . . .	58



2. Etude dynamique de La bielle . . . . .	58
3. Etude dynamique de La manivelle . . . . .	59
<b>D. EQUATIONS DE MOUVEMENT DES MOTEURS EN</b>	
<b>LIGNE ET EN V . . . . .</b>	<b>60</b>
1. Equations de mouvement du moteur en V : syst (bielle-biellelette)(I). 60	60
2. Equations de mouvement du moteur en V : syst (bielle-bielle à fourche)(II). 61	61
3. Equations de mouvement du moteur en ligne : syst (bielle-manivelle)(III) 62	62
4. Resolution des systèmes d'équations (I) , (II) et (III) . . . . .	62
5. Calcul des efforts au niveau de chaque élément de l'embielage mobile dans le repère cartésien . . . . .	66
5.1 ) Moteur en V avec embielage (Bielle-Biellelette) . . . . .	66
5.2 ) Moteur en V avec embielage (Bielle-Bielle à fourche) . . . . .	67
5.3) Moteur en ligne avec système (Bielle-manivelle) . . . . .	67
6. Calcul des efforts au niveau de chaque élément de l'embielage mobile dans le repère polaire . . . . .	68
6.1 ) Moteur en V avec embielage (Bielle-Biellelette) . . . . .	68
6.2 ) Moteur en V avec embielage (Bielle-Bielle à fourche) . . . . .	70
6.3) Moteur en ligne avec système (Bielle-manivelle) . . . . .	71

## CHAPITRE : II      ETUDE DU COUPLE

### MOTEUR ET DE SES HARMONIQUES POUR UN MONOCYLINDRE

I.1 ) CALCUL DU COUPLE MOTEUR POUR UN CYLINDRE. . . . .	73
a- Couple dû aux pressions des gaz . . . . .	74
b- Couple dû aux inerties . . . . .	75
I.2 ) ETUDE DES HARMONIQUES DU COUPLE MOTEUR POUR UN CYLINDRE (4 temps) . . . . .	77
1. Developpement du couple moteur en serie de Fourier . . . . .	77
2. Applications . . . . .	79

CHAPITRE : IV CALCUL DES PULSATIONS

PROPRES D'UNE LIGNE D'ARBRES NON RAMIFIEE EN  
 VIBRATION DE TORSION . ETUDE DES RESONANCES

IV.1 ) Modélisation des lignes d'arbres . . . . .	.100
1. Généralités . Pourquoi la modélisation ? . . . . .	.100
2. Constituants d'un modèle de ligne d'arbres . . . . .	.101
IV.2 ) Détermination des pulsations propres d'une ligne d'arbres en vibration de torsion . . . . .	.102
1. Calcul des fréquences propres . . . . .	.103
2. Equations de mouvement des disques . . . . .	.103
3. Résolution du système différentiel par la méthode de Rutishauser . . . . .	.105
3.1 ) Ecriture matricielle du système différentiel (II) . . . . .	.105
3.2 ) Ecriture matricielle de la solution adoptée . . . . .	.106
4. Détermination des valeurs propres ( $\lambda = \omega^2$ ) de la matrice tri-diagonale [C] . . . . .	.107
4.1 ) Algorithme de Rutishauser . . . . .	.109
4.2 ) Application de l'algorithme de Rutishauser . . . . .	.110
IV.3 ) Application de l'algorithme de Rutishauser à la détermination des pulsations propres de torsion des vilebrequins de moteurs alternatifs (4 temps) . . . . .	.114
IV.3-1 ) Moteur en ligne . . . . .	.114
IV.3-2 ) Moteur en V . . . . .	.115
IV.3-3 ) Détermination des fréquences propres de torsion relatives au moteur FBL413 . . . . .	.117
IV.4 ) Etude des résonances . . . . .	.118

1. Notion de vitesses dangereuses . . . . .	118
2. Sources d'excitation . . . . .	119
2.1 ) Balourds . . . . .	119
2.2 ) Engrenages. . . . .	120
2.3 ) Roulements. . . . .	120
2.4 ) Système bielle-manivelle. . . . .	121
3. Adaptation de La ligne d'arbres dans la plage . . . . .	1
de fonctionnement du moteur . . . . .	122
3.1 ) Influence de La rigidité torsionnelle des tronçons d'arbre sur les pulsations propres . . . . .	123
3.2 ) Influence du moment d'inertie des disques sur les pulsations propres . . . . .	124
3.3 ) Solution Damper (Amortisseur de torsion) . . . . .	124
4. Application : Courbe (Résonance - Excitation) relative au vilebrequin du moteur F8L413. . . . .	124

## ANNEXE

### APPENDICE : 1°

1.1 ) Comment aborder un problème de cinématique . . . . .	126
1.2 ) Comment aborder un problème de dynamique . . . . .	128

### APPENDICE : 2

Etude des différents cycles thermodynamiques . . . . .	133
(Théoriques et quasi-réels)	

APPENDICE : 3

Vérification des solutions des équations du moteur en ligne

- 3.1) A partir de celles des équations du moteur en V (Bielle-bielle). .147
- 3.2) A partir de celles des équations du moteur en V (Bielle-bielle à fourche). .148

APPENDICE : 4

Exemple de calcul du couple moteur instantané du  
 Moteur V12 Ferrari 250 . . . . .150

APPENDICE : 5

Calcul du moment d'inertie de la bielle à œil et de  
 la biellette. (recherche des coordonnées de leur centre de  
 gravité) . . . . .153

Organigramme du programme : SYNTHESE . . . . .162

Conclusion . . . . .166

Bibliographie



# Table des figures

- Fig ( 1 ): Vue en perspective d'un moteur à 4 cylindres en ligne
- Fig ( 2 ): Vue en perspective d'un moteur à 8 cylindres en V
- Fig ( 3 ): Vue en perspective des articulations (têtes de bielle-maneton) du VB ouvert à  $90^\circ$
- Fig(A.1): Embiellage (Bielle - Biellette) de moteur en V
- Fig (A.2): Passage entre repères
- Fig (A.3): Représentation schématisée du système (Bielle-biellette-manivelle)
- Fig (A.4): Définition des points et des angles
- Fig (A.4a): Définition du point d'articulation des têtes de bielles du système (Bielle-biellette)
- Fig (A.5): Actions mécaniques sur les pistons (1) et (2)
- Fig (A.6): Actions mécaniques sur la bielle (à œil)
- Fig (A.7): Actions mécaniques sur la biellette
- Fig (A.8): Actions mécaniques sur la manivelle
- Fig (A.9): Analyse des actions mécaniques sur le piston (1)
- Fig (A.10): Analyse des actions mécaniques sur le piston (2)
- Fig (A.11): Perspective cavalière de la bielle (à œil)
- Fig (A.12): Perspective cavalière de la biellette
- Fig (A.13): schéma d'un coude (manivelle) d'un vilebrequin
- Fig (B): 1<sup>ère</sup> disposition de bielles à fourche.
- Fig (B') : 2<sup>ème</sup> disposition de bielles à fourche
- Fig (B'') : Décalage des cylindres dans le cas de bielles déportées
- Fig (B''') : Système de bielles déportées ou accolées de moteurs en V
- Fig (B.1): Embiellage (Bielle-Bielle à fourche) de moteurs en V
- Fig (B.2): Définition des repères
- Fig (B.3): Définition et positionnement des points et des angles

Fig(B.4): Actions mécaniques sur la bielle

Fig(B.5): Actions mécaniques sur la bielle à fourche

Fig(B.6): Actions mécaniques sur la manivelle du vilebrequin

Fig(B.7): Perspective de la bielle et définition des repères qui lui sont liés

Fig(G.1): Représentation schématique du système bielle-manivelle. Définition des repères.

Fig(C.2): Définition des points et des angles de rotation.

Fig(C.3): Actions mécaniques sur le piston

Fig(C.4): Actions mécaniques sur la bielle

Fig(C.5): Actions mécaniques sur la manivelle

Fig(II.1): Représentation de l'effort au niveau du maneton (tête de bielle) d'un système: Bielle-manivelle

Fig(III.1): Repérage des cylindres sur un 4 cylindres en ligne

Fig(III.2): Repérage des cylindres sur un V8

Fig(III.3): Vilebrequin et ordre d'allumage du moteur 2 cylindres en ligne (4T)

Fig(III.4): Vilebrequin et ordre d'allumage du moteur 4 cylindres en ligne (4T)

Fig(III.5): Vilebrequin du moteur 6 cylindres en ligne (4T)

Fig(III.6): Ordres d'allumage possibles du moteur 6 cylindres en ligne

Fig(III.7): Fréquence de charge des paliers du 6 cylindres en ligne

Fig(III.8): Vilebrequin de moteurs en ligne (à n-cylindres)

Fig(III.9): Vilebrequin et ordre d'allumage du V6 ouvert à  $\gamma=120^\circ$

Fig(III.10): Ordre d'allumage du V6

Fig(III.11): Vilebrequin possible pour le moteur V8

Fig(III.12): Ordres d'allumage possible du V8

Fig(III.13): Ordre d'allumage du V8

Fig(III.14): Vilebrequin et ordre d'allumage du moteur V8 (4T)

Fig(IV.1): Amortisseur viscoélastique de vilebrequins

Fig(IV.2): Amortisseur visqueux de vilebrequins

- Fig (IV.4) : ligne d'arbres aux extrémités encastrees
- Fig (IV.5) : ligne d'arbres aux extrémités libres
- Fig (IV.6) : vilebrequin de moteur en ligne (4 cylindres) et son modèle
- Fig (IV.7) : vilebrequin de moteur en ligne (6 cylindres) et son modèle
- Fig (IV.8) : vilebrequin de moteur en V (6 cylindres) et son modèle
- Fig (IV.9) : vilebrequin à plat de moteur en V (8 cylindres) et son modèle
- Fig (IV.10) : vilebrequin du moteur en V (12 cylindres) et son modèle
- Fig (IV.11) : Courbe (Resonance - Excitation)

### FIGURES DE L'ANNEXE

- Fig (1.1) : Définition de la vitesse d'un point M
- Fig (1.2) : Champ des vitesses et des accélérations du solide (S)
- Fig (1.3) : Dérivée d'un vecteur  $\vec{u}$
- Fig (1.4) : Définition du tenseur d'inertie
- Fig (1.5) : Définition du moment dynamique
- Fig (1.6) : Liaison de type rotatoire
- Fig (1.7) : Liaison de type cylindrique
- Fig (1.8) : Liaison de type verrou
- Fig (1.9) : Liaison de type sphérique
- Fig (2.1) : Moteur en ligne
- Fig (2.2) : Moteur en V (Bielle-Bielle)
- Fig (2.3) : Moteur en V (Bielle-Bielle à fourche)
- Fig (2.4) : Cycle mixte théorique
- Fig (2.5) : Cycle Diesel (Pcte) théorique
- Fig (2.6) : Cycle de Beau de Rochas (théorique)
- Fig (2.7) : Cycle mixte quasi-reel
- Fig (2.8) : Cycle Diesel à Pcte quasi-reel
- Fig (2.9) : Cycle quasi-reel du moteur à essence

Fig(4.1) : vilebrequin N°1 du moteur V12

Fig(4.2) : vilebrequin N°2 du moteur V12

Fig(4.3) : Les 32 ordres d'allumage possibles du moteur V12

Fig(4.4) : Ordre d'allumage du V12 Ferrari 250

Fig(4.5) : Fréquences de charge des paliers de ligne du  
V12 Ferrari 250

Fig(4.6) : vilebrequin et ordre d'allumage du V12 Ferrari 250 (4T)

Fig(5.1) : schéma de la portion ① du modèle de bielle (à œil)

Fig(5.2) : schéma de la portion ② du modèle de bielle (à œil)

Fig(5.3) : " " " ③ " " " "

Fig(5.4) : " " " ④ " " " "

Fig(5.5) : schéma et section de la portion ① du modèle de bielle.

## Table des tableaux récapitulatifs

TAB.1 : Passage du repère  $(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  dans les repères liés à chaque élément

TAB.2 : Passage du repère  $(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  dans les repères liés à chaque élément

TAB.3 : Passage des repères liés à chaque élément dans le repère  $(0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$

TAB.4 : Passage des repères  $(0, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$  et  $(B_2, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$  dans le repère  $(0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

TAB.5 : Tableau des moments d'inertie et des rigidités torsionnelles  
relatifs au modèle du moteur F8L413.

TAB.6 : Tableau des pulsations propres et vitesses de rotation (tr/min)  
correspondantes relatives au moteur F8L413.



# Notations utilisées

$\theta$  : Angle de rotation du vilebrequin

$\gamma$  : Angle d'ouverture du V

$\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$  : Angle de rotation, vitesse angulaire, accélération angulaire de la bielle

$\psi, \dot{\psi}, \ddot{\psi}$  : Angle de rotation, vitesse angulaire, accélération angulaire de la bielle et de la bielle à fourche.

$\omega = \dot{\theta}$  : vitesse angulaire du vilebrequin

$\beta$  : angle position de l'entraxe de l'œil de bielle  $r_{B1}$  par rapport à l'entraxe de la bielle  $L_1$ .

$L_2$  : entraxe de la bielle

$G, G_1, G_2$  : centres de gravité de la bielle (moteur en ligne), de la bielle (moteur en V), de la bielle (de la bielle à fourche)

$L, L_{G1}, L_{G2}$  : position des CDG  $G, G_1, G_2$  par rapport aux pieds de bielles  $B, B_1, B_2$

$R$  : rayon de la manivelle

$r$  : position du CDG  $G_m$  de la manivelle par rapport à l'axe de rotation

$M_P$  : masse d'un piston + axe + segments + ...

$M_B$  : masse de la bielle

$M_{Bt}$  : masse de la bielle

$M_{Bf}$  : masse de la bielle à fourche

$M_m$  : masse de la manivelle

$I_{Gz}, I_{Gz1}, I_{Gz2}$  : moment d'inertie de la bielle (moteur en ligne), de la bielle (moteur en V), de la bielle ou de la bielle à fourche (moteur en V) par rapport à leurs CDG  $G, G_1, G_2 / \vec{z}$

$S$  : section du cylindre

$P(\theta)$  : pression des gaz en fonction de  $\theta$

$P_0$  : pression dans le carter du moteur.

$N$  : vitesse de rotation en (tr/min)

$n$  : nombre de cylindres

$C_m(\theta)$  : couple moteur total en fonction de  $\theta$  pour un cylindre (Nm)

$C_g(\theta)$  : couple moteur dû aux gaz en fonction de  $\theta$  pour un cylindre (Nm)

$C_I(\theta)$  : couple moteur dû aux inerties en fonction de  $\theta$  pour un cylindre (Nm)

$\delta$  : angle de calage des manetons de vilebrequins. (degré)

$C(\theta)$  : couple moteur total instantané en fonction de  $\theta$  pour un multicylindre (en ligne et en V) (Nm)

$C_g^L(\theta)$  ;  $C_I^L(\theta)$  : couple dû aux gaz, aux inerties en fonction de  $\theta$  pour un multicylindre en ligne (Nm)

$C_g^V(\theta)$  ;  $C_I^V(\theta)$  : couple dû aux gaz, aux inerties en fonction de  $\theta$  pour un multicylindre en V. (Nm)

$C_0, C_0^L, C_0^V$  : couple moteur moyen pour un cylindre, un multicylindre en ligne, en V.

$a_n, a_n^L, a_n^V$  ;  $b_n, b_n^L, b_n^V$  } amplitudes des harmoniques du couple total pour un cylindre, un multicylindre en ligne, un multicylindre en V (Nm)

$a_{ng}, a_{ng}^L, a_{ng}^V$  } amplitudes des harmoniques du couple dû aux gaz pour un cylindre, un multicylindre en ligne, en V (Nm)

$a_{ni}, a_{ni}^L, a_{ni}^V$  } amplitudes des harmoniques du couple dû aux inerties pour un cylindre, un multicylindre en ligne, en V (Nm)

$I_i$  : Moment d'inertie du disque (i) d'une ligne d'arbres quelconque (kgm<sup>2</sup>)

$K_i$  : rigidité torsionnelle du tronçon d'arbre (i) de la même ligne d'arbres (Nm/rad)

$\theta_i$  : déplacement ou déviation angulaire du disque (i) (rad)

$\omega$  : pulsation (rad/s)

$\lambda$  : valeur propre de la matrice inertie-rigidité ( $\lambda = \omega^2$ )

$T$  : Energie cinétique (Joules)

$V$  : Energie potentielle (Joules)

$\rho$  : masse volumique (Kg/m<sup>3</sup>)

$\epsilon$  : Erreur relative entre deux itérations

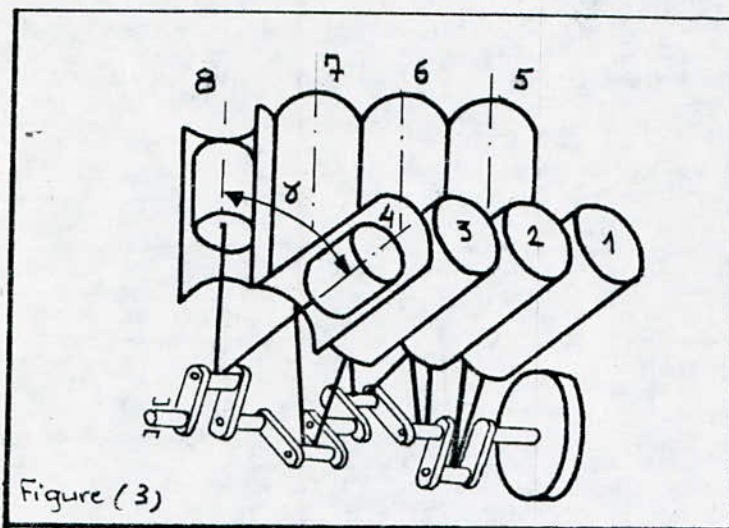
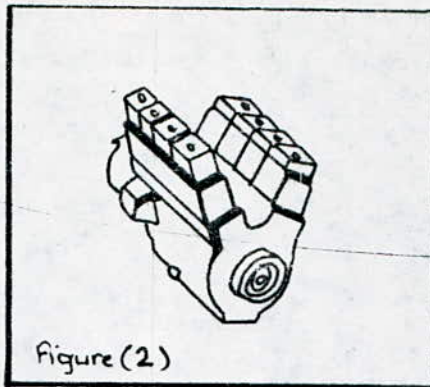
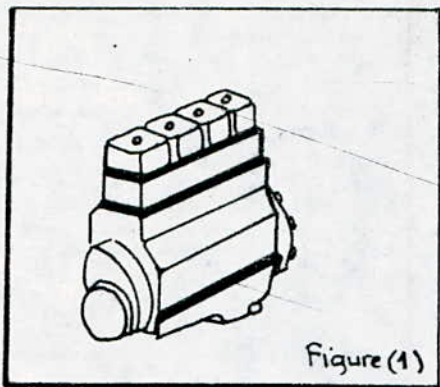
# Introduction

Le moteur à combustion interne à piston est une machine thermique très ancienne dans ses principes. Actuellement il est très difficile de trouver des réalisations techniques aussi près des idées générales conçues il y a un siècle ou plus.

Avant, LENOIR, OTTO, BEAU DE ROCHAS, DIESEL commencèrent par appliquer le cycle de Carnot à leur réalisation, mais malheureusement ceci s'avérait impossible, c'est ainsi qu'apparurent les moteurs à combustion interne à 2 ou à 4 temps, à allumage commandé ou par compression, dont les réalisations successives depuis plus d'un siècle aboutiront aux moteurs perfectionnés que nous connaissons aujourd'hui.

Les moteurs modernes sont réalisés à quatre, six, huit et plus rarement à douze cylindres. Ces derniers peuvent être disposés en une rangée en ligne (Fig 1) ou en deux rangées en V (Fig 2) dont l'artéziage interne est schématisé par la Fig 3) (Ex: moteur 4 cylindres en ligne, moteur 6 cylindres en V). Ces derniers permettent de réduire l'encombrement du moteur par rapport à ceux en ligne et par conséquent de disposer plus avantageusement le siège du conducteur et les organes de commande des véhicules.

La raison d'être un moteur est de fournir de la puissance, donc du couple. Pour fournir ce dernier le moteur



doit successivement :

- Comprimer un fluide froid
- Y introduire de l'énergie calorifique par augmentation de la température du fluide.
- Détendre le fluide pour extraire le travail moteur
- Rejeter la chaleur restante pour revenir aux conditions initiales.

Dans les études de conception des moteurs, on y trouve l'étude technologique, thermodynamique et aérodynamique. L'analyse dynamique des parties internes de ces machines qui l'objet de notre étude a pour but de mettre au point l'outil nécessaire pour analyser et contrôler leur comportement vibratoire, c'est tout à fait une étude de conception complétant les trois premières.

Dans le premier chapitre de cet ouvrage, on s'attache à faire l'étude cinématique et dynamique de l'attelage mobile de tous les moteurs en ligne et en V qui puissent exister, à l'exception des moteurs en étoile dont l'étude est très délicate surtout par le nombre considérable de degrés de liberté. Ce chapitre impose, en outre, la nécessité d'examiner avec soin les aspects exacts des pièces en mouvement et les efforts transmis aux différents éléments constitutifs du moteur.

Le chapitre II qui dépend de quelques résultats du chapitre I est consacré à l'étude du couple moteur et de ses harmoniques pour un moteur monocylindre, et d'en examiner l'effet de son irrégularité sur l'apparition des vibrations de torsion nuisibles au fonctionnement du moteur.

L'augmentation du nombre de cylindres, autrement dit l'apparition des moteurs multicylindres n'est autre qu'une solution de remède au problème de l'irrégularité du couple moteur considérable surtout dans le cas du monocylindre, et aussi une autre solution pour augmenter ce couple, donc fournir encore plus de puissance.

Pour voir l'effet de ce bel avantage ; le chapitre III est introduit. Celui-ci étudie le couple moteur et ses harmoniques pour les multicylindres en ligne et en V.

Un chapitre IV relatif aux vibrations de torsion des vilebrequins de moteurs alternatifs est mis en évidence, il permet d'évaluer les fréquences propres des lignes d'arbres non ramifiées. Ce chapitre est suivi d'une étude de résonance qui aura pour effet d'écarter les vitesses dangereuses, présentant des conséquences destructives de lignes d'arbres, en dehors de la plage de fonctionnement du moteur.

Finalement, une annexe avec ses cinq appendices est introduite en plus dans l'ouvrage. Cette partie s'avère très utile à la compréhension des trois premiers chapitres et leurs confère ainsi une bonne exploitation des méthodes utilisées.

CHAPITRE :

---

**I**

◀ ● ETUDE CINEMATIQUE  
ET DYNAMIQUE DE L'ATTELAGE  
MOBILE DES MOTEURS EN  
LIGNE ET EN V.

---

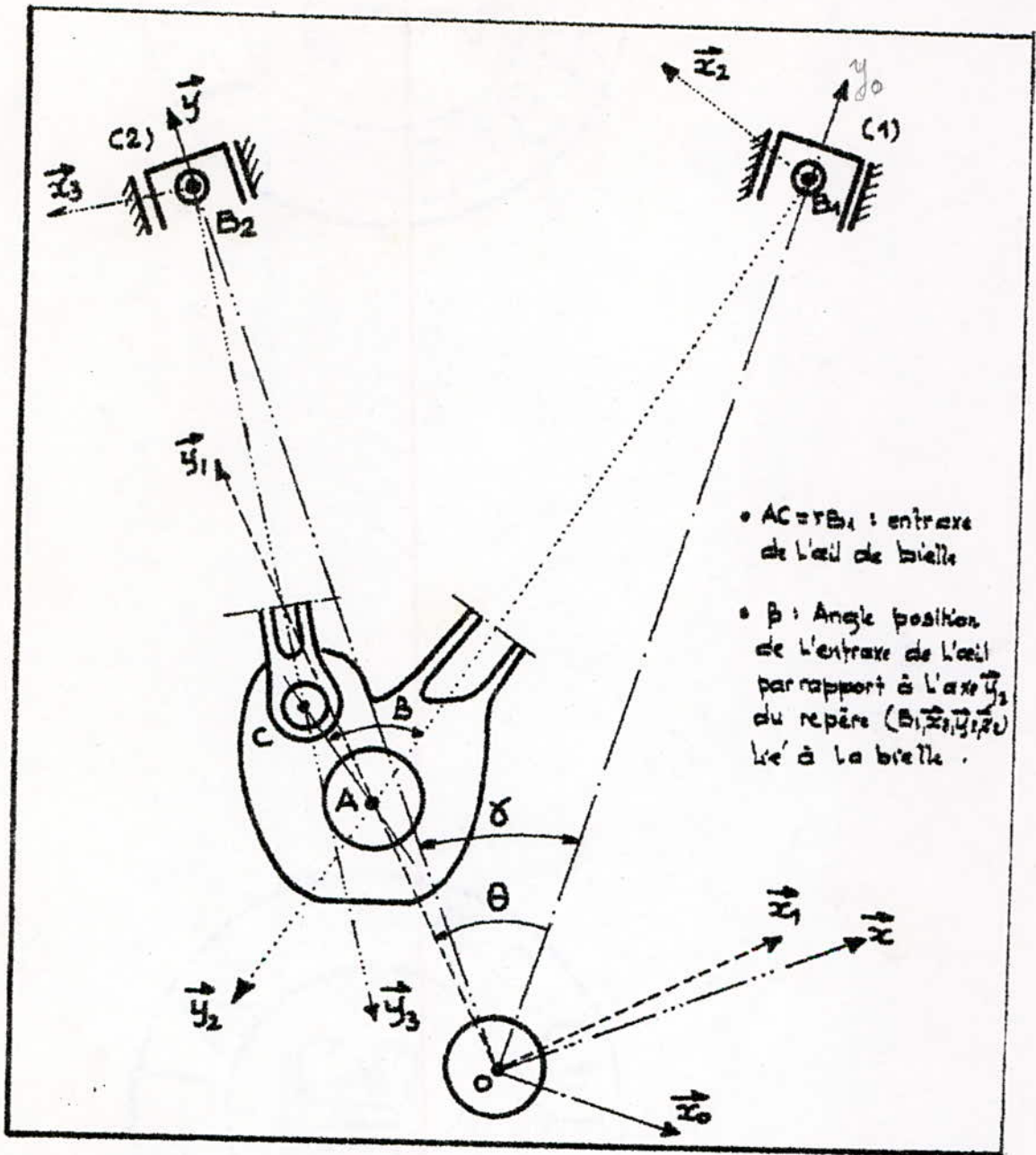


Figure A.1 : Embiellage (Bielle - Bielle-lette) de moteurs en V

$(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  : repère fixe lié au piston (1)

$(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  : repère fixe lié au piston (2)

$(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  : repère mobile lié à la manivelle

$(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  : repère mobile lié à la bielle (à œil)

$(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  : repère mobile lié à la bielle-lette.

$\delta$  : angle d'ouverture du V -  $\beta$  : angle position de l'entraxe de l'œil de bielle ( $\vec{y}_2$

$B_1$  (resp.  $B_2$ ) : centre de pied de la Bielle (resp. Bielle-lette) - C : Articulation (bielle-bielle-lette)



## A.1) ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE-BIELLETTE-MANIVELLE

### 1 - MISE EN PLACE DES REPERES . DEFINITION DES POINTS

L'étude du système Bielle-Biellette-Manivelle nécessite la mise en place de cinq repères : 2 repères fixes et trois autres liés à chaque élément. (Fig. A.1)

#### a. Repères fixes :

•  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la 1<sup>ère</sup> rangée de cylindres. (Fig. A.1)

$O$ : Centre du vilebrequin.

$\vec{y}_0$ : Axe du cylindre (1) " 1<sup>ère</sup> rangée ".

$\vec{z}_0$ : Axe du vilebrequin.

•  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié à la 2<sup>ème</sup> rangée de cylindres. (Fig. A.1)

$\vec{y}_1$ : Axe du cylindre (2) " 2<sup>ème</sup> rangée ".

$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ : Axe du vilebrequin.

Remarque: Le volant est placé sur les  $\vec{z}_0$  positifs.

#### b. Repères mobiles :

•  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au vilebrequin (à la manivelle). (Fig. A.1)

$\vec{y}_1$ : Axe portant la manivelle

Posons  $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ : l'angle de rotation du vilebrequin et  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ : la vitesse angulaire de rotation du vilebrequin considérée constante.

Notons par  $\overline{\Omega(1/0)} = \omega \cdot \vec{z}_0$ : le vecteur rotation instantané du repère 1 lié à la manivelle par rapport au repère 0 autour de  $\vec{z}_0$ .

•  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié à la bielle (à œil) (Fig. A.1)

$\vec{y}_2$ : Axe portant la bielle

$B_1$ : Centre de pied de la bielle

Notons par  $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ : l'angle de rotation de la bielle; le vecteur rotation instantané de la bielle sera  $\overline{\Omega(2/0)} = \dot{\varphi} \cdot \vec{z}_0$ .

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$  : vitesse angulaire de la bielle.

$(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié à la bielle (Fig. A.4)

$B_2$  : Centre de pied de la bielle

$\vec{y}_3$  : Axe portant la bielle

Notons par  $\Psi = (\vec{y}, \vec{y}_3)$  : Angle de rotation de la bielle ; le vecteur rotation instantané de la bielle par rapport au repère fixe sera  $\overline{\Omega(3/0)} = \dot{\Psi} \vec{z}_0$ .

$\dot{\Psi} = \frac{d\Psi}{dt}$  : vitesse angulaire de la bielle.

c. Définition des points :

$B_1, B_2$  : Centres de pied des bielles, couissant sur les axes  $\vec{y}_0$  et  $\vec{y}$ .

$G_1, G_2$  : Centres de gravité des bielles

A : Point d'articulation (Bielle-Manivelle).

C : Point d'articulation (Bielle-Bielle).

$G_{P_1}, G_{P_2}, G_m$  : Centres de gravité des pistons (1), (2) et de la manivelle.

## 2 - FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES :

2.1) Passage du repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  : (Fig. A.2a)

Ce passage se fait par la projection des axes  $\vec{x}_1, \vec{y}_1$  sur  $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ .

a. Vecteurs position :

$$\left. \begin{cases} \vec{x}_1 = \cos\theta \cdot \vec{x}_0 + \sin\theta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases} \right\} (1)$$

b. Vecteurs vitesse :

$$\left. \begin{cases} \frac{d^0 \vec{x}_1}{dt} = \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{x}_1 + \frac{d^1 \vec{x}_1}{dt} = \omega \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 + 0 = \omega \vec{y}_1 \\ \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} = \overline{\Omega(1/0)} \wedge \vec{y}_1 + \frac{d^1 \vec{y}_1}{dt} = \omega \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 + 0 = -\omega \vec{x}_1 \\ \frac{d^0 \vec{z}_1}{dt} = \vec{0} \end{cases} \right\} (2)$$

2.2) Passage du repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  : (Fig. A.2c)

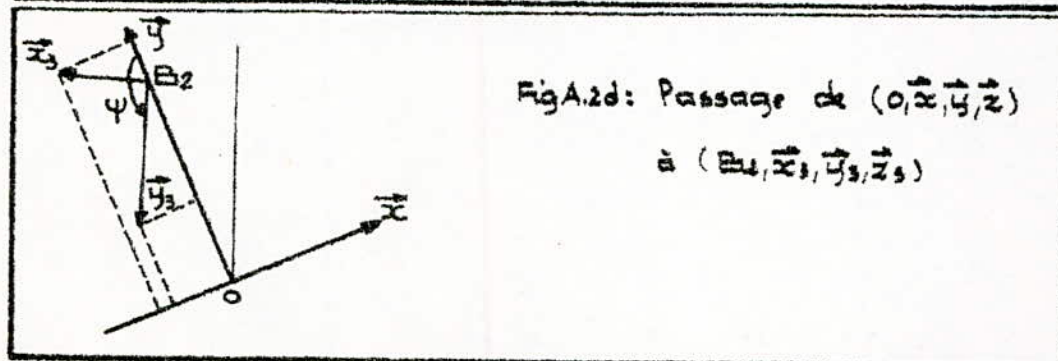
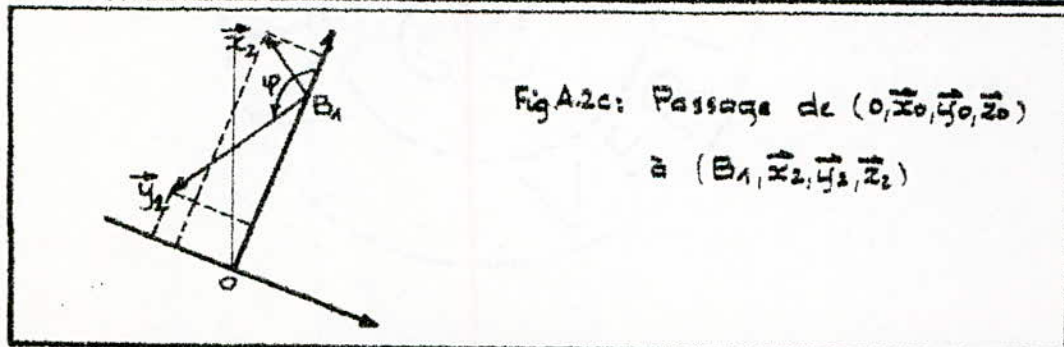
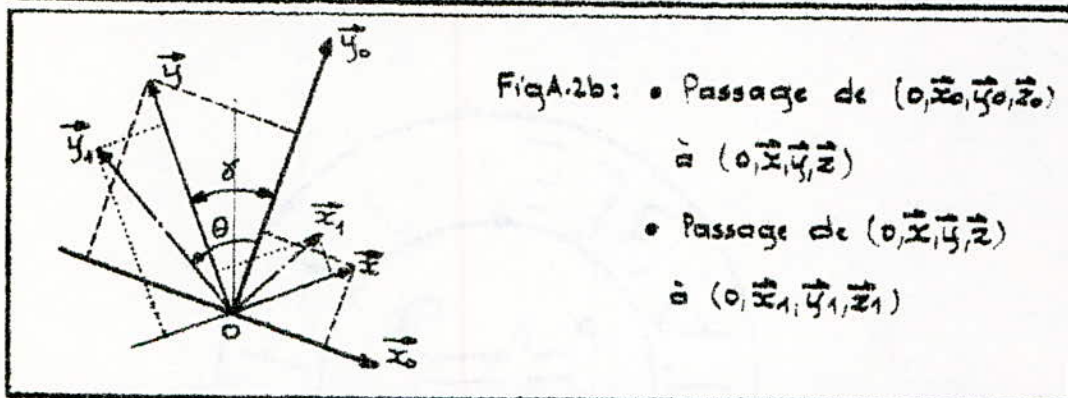
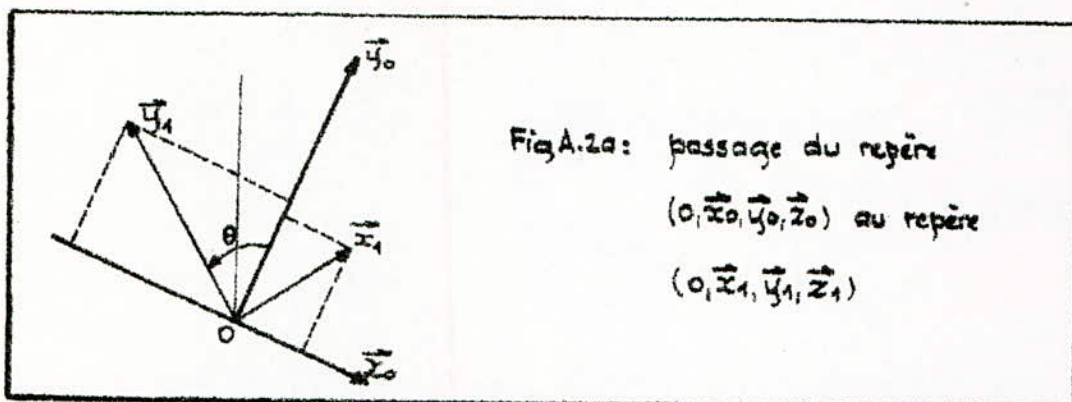


Figure A.2 : Passage entre repères

(9)

a. Vecteurs position :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{x}_2 &= \cos\varphi \cdot \vec{x}_0 + \sin\varphi \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 &= -\sin\varphi \cdot \vec{x}_0 + \cos\varphi \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 &= \vec{z}_0 \end{aligned} \right. \quad (3)$$

b. Vecteurs vitesse :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^0 \vec{x}_2}{dt} &= \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{x}_2 + \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_2 + \vec{0} = \dot{\varphi} \vec{y}_2 \\ \frac{d^0 \vec{y}_2}{dt} &= \vec{\Omega}(2/0) \wedge \vec{y}_2 + \frac{d^2 \vec{y}_2}{dt^2} = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_2 + \vec{0} = -\dot{\varphi} \vec{x}_2 \\ \frac{d^0 \vec{z}_2}{dt} &= \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

2.3) Passage du repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  : (Fig. A.2b)

a. Vecteurs position :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{x} &= \cos\delta \cdot \vec{x}_0 + \sin\delta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y} &= -\sin\delta \cdot \vec{x}_0 + \cos\delta \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z} &= \vec{z}_0 \end{aligned} \right. \quad (5)$$

b. Vecteurs vitesse : Ces vecteurs sont nuls car l'angle  $\delta$  est constant.

2.4) Passage du repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  au repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  : (Fig. A.2b et A.2d)

a. Vecteurs position :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{x}_3 &= \cos(\psi+\delta) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\psi+\delta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_3 &= -\sin(\psi+\delta) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\psi+\delta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_3 &= \vec{z}_0 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

b. Vecteurs vitesse :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^0 \vec{x}_3}{dt} &= \vec{\Omega}(3/0) \wedge \vec{x}_3 + \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} = \dot{\psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3 + \vec{0} = \dot{\psi} \vec{y}_3 \\ \frac{d^0 \vec{y}_3}{dt} &= \vec{\Omega}(3/0) \wedge \vec{y}_3 + \frac{d^2 \vec{y}_3}{dt^2} = \dot{\psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_3 + \vec{0} = -\dot{\psi} \vec{x}_3 \\ \frac{d^0 \vec{z}_3}{dt} &= \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (7)$$

2.5) Passage du repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans le repère  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  (Fig. A.2b)

a. Vecteurs position :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos(\theta-\delta) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta-\delta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 &= -\sin(\theta-\delta) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\theta-\delta) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 &= \vec{z}_0 \end{aligned} \right. \quad (8)$$

b. Vecteurs vitesse :

Dans ce contexte on a désigné le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  par un point  $(\cdot)$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^{\cdot} \vec{x}_1}{dt} &= \vec{\Omega}(1/\cdot) \wedge \vec{x}_1 = \omega \vec{y}_1 \\ \frac{d^{\cdot} \vec{y}_1}{dt} &= \vec{\Omega}(1/\cdot) \wedge \vec{y}_1 = -\omega \vec{x}_1 \\ \frac{d^{\cdot} \vec{z}_1}{dt} &= \vec{0} \end{aligned} \right. \quad (9)$$

2.6) Passage du repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  au repère  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ : (Fig A.2d)

a - Vecteurs position :

$$\begin{cases} \vec{x}_3 = \cos\psi \cdot \vec{x} + \sin\psi \cdot \vec{y} \\ \vec{y}_3 = -\sin\psi \cdot \vec{x} + \cos\psi \cdot \vec{y} \\ \vec{z}_3 = \vec{z} = \vec{z}_0 \end{cases} \quad (10)$$

b - Vecteurs vitesse :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}_3}{dt} = \vec{\Omega}(B_2) \wedge \vec{x}_3 = \dot{\psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_3 = \dot{\psi} \vec{y}_3 \\ \frac{d\vec{y}_3}{dt} = \vec{\Omega}(B_2) \wedge \vec{y}_3 = \dot{\psi} \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_3 = -\dot{\psi} \vec{x}_3 \\ \frac{d\vec{z}_3}{dt} = \vec{0} \end{cases} \quad (11)$$


---

## TABLEAU RECAPITULATIF DES FORMULES DE PASSAGE ENTRE REPERES

• TAB.1 : passage du repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  dans les repères liés à chaque élément

Passage de $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dans $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à La manivelle		
$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$
Passage de $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dans $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ lié au piston (2)		
$\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{y} = \begin{bmatrix} -\sin\delta \\ \cos\delta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{z} = \vec{z}_0$
Passage de $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dans $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à La 2 <sup>ème</sup> bielle		
$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\psi+\delta) \\ \sin(\psi+\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} -\sin(\psi+\delta) \\ \cos(\psi+\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{z}_3 = \vec{z}_0$
Passage de $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ dans $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à La bielle maîtresse		
$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{y}_2 = \begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$	$\vec{z}_2 = \vec{z}_0$

• TAB.2 : Passage du repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans les rep.  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

Passage du repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dans $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à La manivelle		
$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta-\delta) \\ \sin(\theta-\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	$\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta-\delta) \\ \cos(\theta-\delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	$\vec{z}_1 = \vec{z}$
Passage du rep. $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dans $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à La 2 <sup>ème</sup> bielle		
$\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	$\vec{y}_3 = \begin{bmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	$\vec{z}_3 = \vec{z}$

Tableaux de passage des repères liés à chaque élément dans les repères fixes  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ :

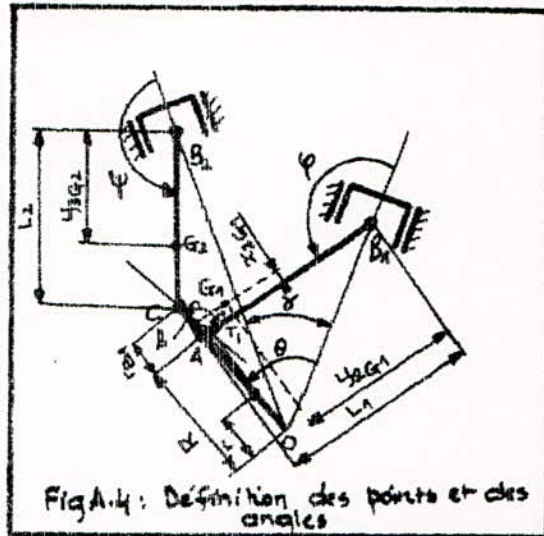
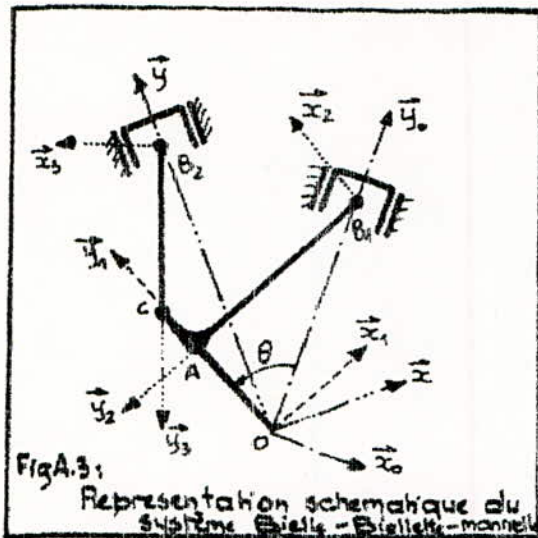
Ces deux seront utiles pour l'étude des diagrammes polaires des actions mécaniques au niveau de chaque élément de l'attelage mobil.

TAB.3 : passage des repères liés à chaque élément dans le rep.  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

Passage de $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à la manivelle dans $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$		
$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$	$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$	$\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ (C1)
Passage de $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ fixe lié au piston (2) dans $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$		
$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ -\sin \delta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} \sin \delta \\ \cos \delta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$	$\vec{z}_0 = \vec{z}$ (C2)
Passage de $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à la bielle maîtresse dans $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$		
$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$	$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$	$\vec{z}_0 = \vec{z}_2$ (C3)
Passage de $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à la 2 <sup>ème</sup> bielle dans $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$		
$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \cos(\psi + \delta) \\ -\sin(\psi + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$	$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} \sin(\psi + \delta) \\ \cos(\psi + \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$	$\vec{z}_0 = \vec{z}_3$ (C4)

TAB.4 : passage de  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  dans  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Passage du repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$		
$\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos(\theta - \delta) \\ -\sin(\theta - \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$	$\vec{y} = \begin{bmatrix} \sin(\theta - \delta) \\ \cos(\theta - \delta) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$	$\vec{z} = \vec{z}_1$ (d1)
Passage du repère $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$		
$\vec{x} = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$	$\vec{y} = \begin{bmatrix} \sin \psi \\ \cos \psi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix}$	$\vec{z} = \vec{z}_3$ (d2)



### 3- RELATIONS CINEMATIQUES

L'examen du système (Bielle-Biellette-manivelle) (Fig. A.3) a montré qu'en projection sur :

- L'axe  $\vec{x}_0$  : Le rayon de la manivelle OA est égal à l'entraxe de la bielle (à œil)
- L'axe  $\vec{x}$  : La distance OC est égale à l'entraxe de la biellette

#### 3.1) Définition des angles $\varphi$ et $\psi$ : (Fig. A.4)

On rappelle que l'angle  $\varphi$  (resp.  $\psi$ ) est l'angle de rotation de la bielle (resp. de la biellette) .  $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$  et  $\psi = (\vec{y}, \vec{y}_3)$

• Angle  $\varphi$  :  $\vec{OA} = R \cdot \vec{y}_1 = -R \sin \theta \cdot \vec{x}_0 + R \cos \theta \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{OA} / \vec{x}_0 = -R \sin \theta$

$\vec{B_1A} = L_1 \vec{y}_2 = -L_1 \sin \varphi \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cos \varphi \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{B_1A} / \vec{x}_0 = -L_1 \sin \varphi$

$\vec{OA} / \vec{x}_0 = \vec{B_1A} / \vec{x}_0 \Rightarrow R \sin \theta = L_1 \sin \varphi$  (12) : 1<sup>re</sup> relation cinématique

• Angle  $\psi$  :  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = R \vec{y}_1 + r_{B_1} \sin \beta \cdot \vec{x}_2 - r_{B_1} \cos \beta \cdot \vec{y}_2$  ;  $\beta = \alpha + \varphi$

$\vec{B_2C} = L_2 \vec{y}_3 = -L_2 \sin \psi \cdot \vec{x} + L_2 \cos \psi \cdot \vec{y}$

sur  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :  $\vec{OA} = R \vec{y}_1 = -R \sin(\theta - \alpha) \cdot \vec{x} + R \cos(\theta - \alpha) \cdot \vec{y} \Rightarrow \text{TAB. 2 (b1)}$

$\vec{AC} = r_{B_1} \sin(\varphi + \beta - \alpha) \cdot \vec{x} - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta - \alpha) \cdot \vec{y} \Rightarrow \text{combinaison de (a4) et (c2) } \Rightarrow \text{TAB. 1 et 3}$

D'où  $\vec{OC} = (-R \sin(\theta - \alpha) + r_{B_1} \sin(\varphi + \beta - \alpha)) \cdot \vec{x} + (R \cos(\theta - \alpha) - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta - \alpha)) \cdot \vec{y}$

Les vecteurs  $\vec{OC}$  et  $\vec{B_2C}$  sont maintenant définis dans le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  ;

écrivons leur projection sur l'axe  $\vec{x}$  :



$$\vec{OC}/\vec{x} = -R \sin(\theta - \gamma) + r_{B_1} \sin(\varphi + \beta - \gamma)$$

$$\vec{B_2C}/\vec{x} = -L_2 \sin\psi$$

$\vec{OC}/\vec{x} = \vec{B_2C}/\vec{x}$  d'où la 2ème relation cinématique fondamentale :

$$-L_2 \sin\psi = -R \sin(\theta - \gamma) + r_{B_1} \sin(\varphi + \beta - \gamma) : \quad (13)$$

Donc on tire la valeur de l'angle  $\varphi$  et de l'angle  $\psi$  respectivement par leur sinus et leur cosinus :

$$(12) \Rightarrow \sin\varphi = (R/L_1) \sin\theta \quad (14); \quad (13) \Rightarrow \sin\psi = (R/L_2) \sin(\theta - \gamma) - (r_{B_1}/L_2) \sin(\varphi + \beta - \gamma) \quad (15)$$

Comme  $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$  et  $\sin^2\varphi = (R/L_1)^2 \sin^2\theta$

$$\text{il vient donc : } \cos\varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{R^2}{L_1^2} \sin^2\theta}$$

de même pour  $\cos\psi$  :

$$\cos\psi = \pm \sqrt{1 - \left[ (R/L_2) \sin(\theta - \gamma) - (r_{B_1}/L_2) \sin(\varphi + \beta - \gamma) \right]^2}$$

Remarque :

Les angles  $\varphi$  et  $\psi$  étant positifs et varient légèrement autour de  $\pi$  ; leur cosinus sont donc négatifs et valent toujours :

$$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L_1^2} \sin^2\theta} \quad (16)$$

$$\cos\psi = -\sqrt{1 - \left[ \frac{R}{L_2} \sin(\theta - \gamma) - \frac{r_{B_1}}{L_2} \sin(\varphi + \beta - \gamma) \right]^2} \quad (17)$$

3.2) Définition des vitesses angulaires  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\psi}$  :

•  $\dot{\varphi}$  : Dérivons la relation (14) par rapport au temps ; ça donne :

$$\dot{\varphi} = \frac{R\omega \cos\theta}{L_1 \cos\varphi} \quad (18)$$

•  $\dot{\psi}$  : Dérivons la relation (15) par rapport au temps ; ça donne :

$$\dot{\psi} = \frac{R\omega \cos(\theta - \gamma) - r_{B_1} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \beta - \gamma)}{L_2 \cos\psi} \quad (19)$$

3.3) Définition des accélérations angulaires  $\ddot{\varphi}$  et  $\ddot{\psi}$  :

- $\ddot{\varphi}$  : Dérivons la relation (18) par rapport au temps ; ça donnera

$$\ddot{\varphi} \cos \psi - \dot{\varphi}^2 \sin \psi = -\frac{R}{L_1} \omega^2 \sin \theta$$

- $\ddot{\psi}$  : Dérivons la relation (19) par rapport au temps ; ça donnera

$$\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi = -\frac{R}{L_2} \omega^2 \sin(\theta - \gamma) + \frac{R B_1}{L_2} [\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \beta - \gamma) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta - \gamma)]$$

Remplaçons les relations (14) et (15) par leur valeur dans ces deux dernières relations ; nous obtenons les deux accélérations angulaires  $\ddot{\varphi}$  et  $\ddot{\psi}$  :

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}^2) \tan \psi = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2) \tan \psi \quad (20)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\psi}^2 \frac{\sin \psi}{\cos \psi} - \frac{R \omega^2 \sin(\theta - \gamma) + R B_1 [\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \beta - \gamma) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta - \gamma)]}{L_2 \cos \psi} \quad (21)$$

$\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$ ,  $\sin \psi$ ,  $\cos \psi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\varphi}$  sont donnés respectivement par les relations (14), (16), (15), (17), (18), (19), (20)

$$\sin(\theta - \gamma) = \sin \theta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \theta$$

$$\cos(\varphi + \beta - \gamma) = \cos \varphi \cos(\beta - \gamma) - \sin \varphi \sin(\beta - \gamma) \quad ; \quad \beta \text{ et } \gamma \text{ sont des constantes.}$$

$$\sin(\varphi + \beta - \gamma) = \sin(\varphi) \cos(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma) \cos \varphi$$

#### 4- CINEMATIQUE DES POINTS A, B<sub>1</sub>, G<sub>1</sub>, C, B<sub>2</sub>, G<sub>2</sub>

4.1 Point A : Articulation (têtes de bielle - maneton de la manivelle) : (Fig A.1)

a- Position du point A :

$$\vec{OA} \text{ a été déjà calculé : } \vec{OA} = -R \sin \theta \cdot \vec{x}_0 + R \cos \theta \cdot \vec{y}_0 \quad \text{sur } (0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$$\vec{OA} = -R \sin(\theta - \gamma) \cdot \vec{x} + R \cos(\theta - \gamma) \cdot \vec{y} \quad \text{sur } (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

b- vitesse de A : par définition  $\vec{V}_A = \frac{d^0 \vec{OA}}{dt}$

$$\text{Comme } \vec{OA} = R \vec{y}_1 \Rightarrow \vec{V}_A = \frac{d^0 R \vec{y}_1}{dt} = R \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} \quad ; \quad \text{d'après la relation (9) } \frac{d^0 \vec{y}_1}{dt} = -\omega \vec{x}_1$$

d'où  $\vec{V}_A = -R \omega \vec{x}_1$  or  $\omega = \text{cte}$  il vient que la vitesse de A est constante et elle est portée par une tangente au cercle.

c- Accélération de A : soit  $\vec{T}_A$  le vecteur accélération du point A

$$\vec{T}_A = \frac{d^0 \vec{V}_A}{dt} = -R \dot{\omega} \vec{x}_1 - R \omega^2 \vec{y}_1 \quad ; \quad \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{T}_A = -R \omega^2 \vec{y}_1$$

Remarques:

- Pour une meilleure utilisation de la cinématique de tous les points ; on se contentera d'écrire les positions, les vitesses et les accélérations sous forme matricielle.
- La cinématique de tous les points sera donnée dans le repère fixe  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Etant donné que la procédure de calcul est la même que celle faite pour le point A, nous donnerons uniquement les résultats pour les autres points  $(B_1, G_1, G_2, B_1, C)$

Reprenons le point A et écrivons sa cinématique matriciellement :

$$\text{Position de A : } \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (22)$$

$$\text{Vitesse de A : } \vec{V}_A = \begin{pmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{y}_A \\ \dot{z}_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \cos \theta \\ -R\omega \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (22')$$

$$\text{Accélération de A : } \vec{T}_A = \begin{pmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{y}_A \\ \ddot{z}_A \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} R\omega^2 \sin \theta \\ -R\omega^2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (22'')$$

$$4.2 \text{ Point } B_1 : \vec{OB}_1 = \vec{OA} + \vec{AB}_1 = R\vec{y}_1 - L_1\vec{y}_2$$

Le point  $B_1$  est mobile en translation sur l'axe  $\vec{y}_0$  ;  $\vec{OB} = y_B \cdot \vec{y}_0$ , sa projection sur  $\vec{x}_0$  est nulle donc :

$$a. \text{ Position de } B_1 : \vec{OB}_1 = \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \\ z_{B_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \cos \theta - L_1 \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (23)$$

$$b. \text{ Vitesse de } B_1 : \vec{V}_{B_1} = \frac{d^0 \vec{OB}_1}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{B_1} \\ \dot{y}_{B_1} \\ \dot{z}_{B_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega \sin \theta + L_1 \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (23')$$

$$c. \text{ Accélération de } B_1 : \vec{T}_{B_1} = \frac{d^0 \vec{V}_{B_1}}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{B_1} \\ \ddot{y}_{B_1} \\ \ddot{z}_{B_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R\omega^2 \cos \theta + L_1 (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (23'')$$

Comme  $\sin \varphi = \frac{R}{L_1} \sin \theta$  et  $\cos \varphi = \frac{R\omega \cos \theta}{L_1 \dot{\varphi}}$  Le vecteur accélération de  $B_1$

$$\text{devient : } \vec{T}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega(\dot{\varphi} - \omega) \cos \theta + R\ddot{\varphi} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (23''')$$

• Point  $G_1$ : Centre de gravité de la bielle (à œil)

Le centre de gravité de la bielle n'est pas tout à fait sur l'axe  $\vec{y}_2$ , il a une composante suivant l'axe  $\vec{x}_2$  alors:

$G_1(x_{2G_1}, y_{2G_1}, 0)$  dans le repère  $(E_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{OG}_1 = \vec{OA} + \vec{AG}_1$$

$$\vec{AG}_1 = \vec{AT}_1 + \vec{T}_1G_1 \quad (\text{Fig. A.4})$$

$$\vec{AT}_1 = -(L_1 - y_{2G_1})\vec{y}_2 \quad \text{et} \quad \vec{T}_1G_1 = x_{2G_1} \cdot \vec{x}_2$$

$$\text{Alors; } \vec{AG}_1 = \begin{pmatrix} (L_1 - y_{2G_1}) \sin \varphi + x_{2G_1} \cdot \cos \varphi \\ -(L_1 - y_{2G_1}) \cdot \cos \varphi + x_{2G_1} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

a- Position de  $G_1$ :

$$\vec{OG}_1 = \begin{pmatrix} x_{G_1} \\ y_{G_1} \\ z_{G_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta + (L_1 - y_{2G_1}) \sin \varphi + x_{2G_1} \cdot \cos \varphi \\ R \cos \theta - (L_1 - y_{2G_1}) \cos \varphi + x_{2G_1} \cdot \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (24)$$

b- Vitesse de  $G_1$ :

$$\vec{VG}_1 = \frac{d^0 \vec{OG}_1}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{G_1} \\ \dot{y}_{G_1} \\ \dot{z}_{G_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \cos \theta + (L_1 - y_{2G_1}) \dot{\varphi} \cos \varphi - x_{2G_1} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi \\ -R\omega \sin \theta + (L_1 - y_{2G_1}) \dot{\varphi} \sin \varphi - x_{2G_1} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (24')$$

c- Accélération de  $G_1$ :

$$\vec{T}_{G_1} = \frac{d^0 \vec{VG}_1}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_1} \\ \ddot{y}_{G_1} \\ \ddot{z}_{G_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$\vec{T}_{G_1} = \begin{pmatrix} y_{2G_1} \cdot \omega^2 \sin \varphi - x_{2G_1} [\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] \\ -R\omega^2 \cos \theta + (L_1 - y_{2G_1}) [\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi] - x_{2G_1} \frac{R}{L_1} \omega^2 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (24'')$$

• Point C: point d'articulation Bielle-bielle

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}; \quad \vec{AC} = \vec{AM} + \vec{MC} \quad (\text{Fig. A.4a})$$

$$\text{d'où } \vec{OC} = R\vec{y}_1 + r_{B_1} \sin \beta \vec{x}_2 - r_{B_1} \cos \beta \vec{y}_2$$

connaissions les coordonnées des vecteurs  $\vec{y}_1, \vec{y}_2$  et  $\vec{x}_2$  dans le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

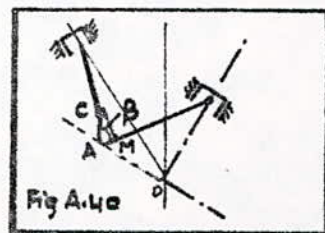


Fig. A.4a

et ceci en utilisant les relations (1) et (3) il vient alors;

$$a. \text{ Position de C : } \vec{OC} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta + r_{B_1} \sin(\varphi + \beta) \\ R \cos \theta - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (25)$$

$$b. \text{ Vitesse de C : } \vec{V}_C = \frac{d^0 \vec{OC}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_c \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -R\omega \cos \theta + r_{B_1} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \beta) \\ -R\omega \sin \theta + r_{B_1} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \beta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (25')$$

$$c. \text{ Accélération de C : } \vec{T}_C = \frac{d^0 \vec{V}_C}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{z}_c \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} R\omega^2 \sin \theta + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \beta) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi + \beta)] \\ -R\omega^2 \cos \theta + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta)] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (25'')$$

#### 4.5 • Point B<sub>2</sub> :

Le point B<sub>2</sub> (Centre de pied de la bielle) est mobile en translation sur l'axe  $\vec{y}$  du repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ; sa composante suivant  $x$  est nulle

$$\vec{OB}_2 = \vec{OC} + \vec{CB}_2 ; \quad \vec{CB}_2 = -L_2 \cdot \vec{y}_3 \quad \text{donc :}$$

#### a. Position de B<sub>2</sub> :

$$\bullet \bullet \text{ dans le repère } (0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : \vec{OB}_2 = \begin{pmatrix} R \cos(\theta - \gamma) - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta - \gamma) - L_2 \cos \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} \quad (26)$$

$\bullet \bullet$  dans le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  : on obtient en utilisant la relation (5)

$$\vec{OB}_2 = \begin{pmatrix} x_{B_2} \\ y_{B_2} \\ z_{B_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} \sin \gamma [-R \cos(\theta - \gamma) + r_{B_1} \cos(\varphi + \beta - \gamma) + L_2 \cos \varphi] \\ \cos \gamma [R \cos(\theta - \gamma) - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta - \gamma) - L_2 \cos \varphi] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (26')$$

b. Vitesse de B<sub>2</sub> :  $\vec{V}_{B_2} = \frac{d^0 \vec{OB}_2}{dt}$  dans le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{V}_{B_2} = \frac{d^0 \vec{OB}_2}{dt} \quad \text{dans le repère } (0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

$\bullet \bullet$  Dans le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{V}_{B_2} = \begin{pmatrix} -R\omega \sin(\theta - \gamma) + r_{B_1} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \gamma) + L_2 \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

oo dans le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\vec{V}_{B_2} = \begin{pmatrix} \sin \delta [R\omega \sin(\theta - \delta) - r_{B_1} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \delta) - L_2 \dot{\psi} \sin \psi] \\ \cos \delta [-R\omega \sin(\theta - \delta) + r_{B_1} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \delta) + L_2 \dot{\psi} \sin \psi] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (26')$$

a- Accélération de  $B_2$  :

oo Dans le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos(\theta - \delta) + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \delta) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta - \delta)] + L_2 [\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

oo Dans le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\vec{T}_{B_2} = \begin{pmatrix} \sin \delta (R\omega^2 \cos(\theta - \delta) - r_{B_1} [\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \delta) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta - \delta)] - L_2 [\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi]) \\ \cos \delta (-R\omega^2 \cos(\theta - \delta) + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \delta) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi + \beta - \delta)] + L_2 [\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi]) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (26'')$$

4.6 o Point  $G_2$  : CDG de La bielle de coordonné  $(0, y_{3G_2}, 0)$  sur  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$\vec{OG}_2 = \vec{OC} + \vec{CG}_2 ; \vec{CG}_2 = -(L_2 - y_{3G_2}) \vec{y}_3 \quad (\text{Fig. A4})$$

a- Position de  $G_2$  :

oo Dans le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{OG}_2 = \begin{pmatrix} -y_{3G_2} \cdot \sin \psi \\ R \cos(\theta - \delta) - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta - \delta) - (L_2 - y_{3G_2}) \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

oo Dans le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  : nous obtenons en utilisant (6)

$$\vec{OG}_2 = \begin{pmatrix} x_{G_2} \\ y_{G_2} \\ z_{G_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta + r_{B_1} \sin(\varphi + \beta) + (L_2 - y_{3G_2}) \sin(\varphi + \delta) \\ R \cos \theta - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta) - (L_2 - y_{3G_2}) \cos(\varphi + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (27)$$

b- Vitesse de  $G_2$  :

oo Dans le repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\vec{V}_{G_2} = \begin{pmatrix} -R\omega \cos(\theta - \delta) + r_{B_1} \dot{\varphi} \cos(\varphi + \beta - \delta) + (L_2 - y_{3G_2}) \dot{\psi} \cos \psi \\ -R\omega \sin(\theta - \delta) + r_{B_1} \dot{\varphi} \sin(\varphi + \beta - \delta) + (L_2 - y_{3G_2}) \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

(20)

•• Dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\vec{V}_{G_2} = \begin{pmatrix} -R\omega \cos\theta + r_{B_1} \dot{\varphi} \cos(\varphi+\beta) + (L_2 - \gamma_{3G_2}) \dot{\psi} \cos(\psi+\gamma) \\ -R\omega \sin\theta + r_{B_1} \dot{\varphi} \sin(\varphi+\beta) + (L_2 - \gamma_{3G_2}) \dot{\psi} \sin(\psi+\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \quad (27')$$

a- Accélération de  $G_2$  :

•• Dans le repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{T}_{G_2} = \begin{pmatrix} R\omega^2 \sin(\theta-\gamma) + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \cos(\varphi+\beta-\gamma) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi+\beta-\gamma)] + (L_2 - \gamma_{3G_2}) [\ddot{\psi} \cos\psi - \dot{\psi}^2 \sin\psi] \\ -R\omega^2 \cos(\theta-\gamma) + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \sin(\varphi+\beta-\gamma) + \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi+\beta-\gamma)] + (L_2 - \gamma_{3G_2}) [\ddot{\psi} \sin\psi + \dot{\psi}^2 \cos\psi] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

•• Dans le repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :  $\vec{T}_{G_2} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_2} \\ \ddot{y}_{G_2} \\ \ddot{z}_{G_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$

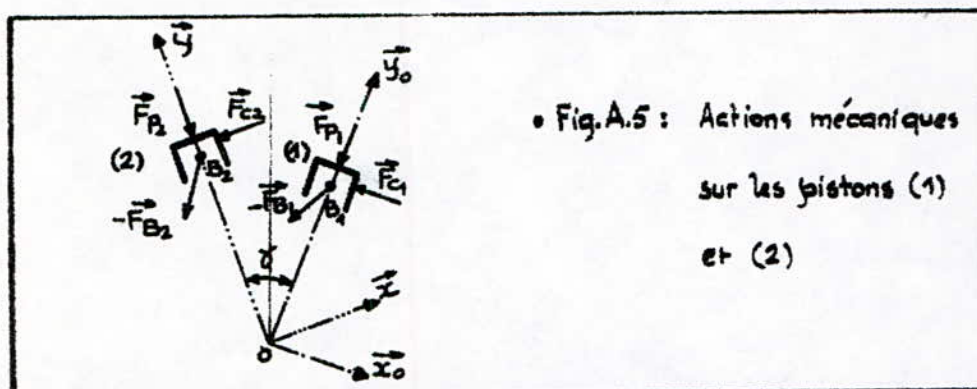
$$\vec{T}_{G_2} = \begin{pmatrix} R\omega^2 \sin\theta + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \cos(\varphi+\beta) - \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi+\beta)] + (L_2 - \gamma_{3G_2}) [\ddot{\psi} \cos(\psi+\gamma) - \dot{\psi}^2 \sin(\psi+\gamma)] \\ -R\omega^2 \cos\theta + r_{B_1} [\ddot{\varphi} \sin(\varphi+\beta) + \dot{\varphi} \cos(\varphi+\beta)] + (L_2 - \gamma_{3G_2}) [\ddot{\psi} \sin(\psi+\gamma) + \dot{\psi}^2 \cos(\psi+\gamma)] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

(27'')

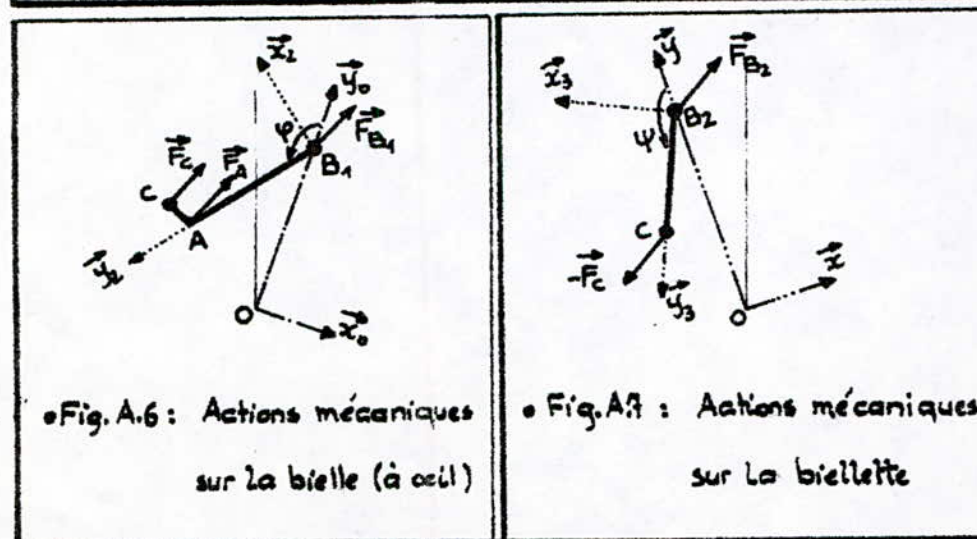
## A.2) ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME BIELLE-BIELLETTE - MANIVELLE

Dans toute cette étude dynamique :

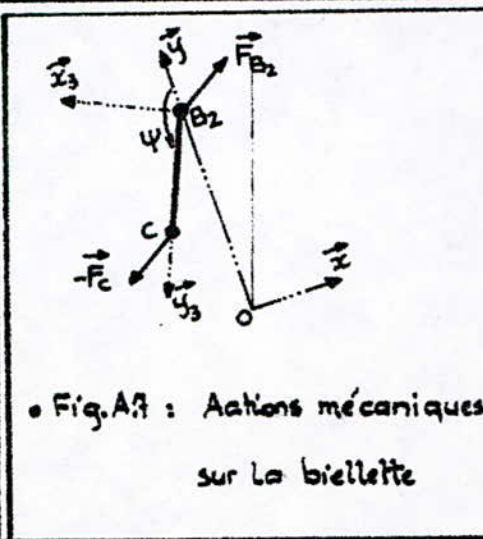
- On néglige les efforts de pesanteur face aux efforts des gaz
- On suppose que les contacts sont ponctuels et sans frottement



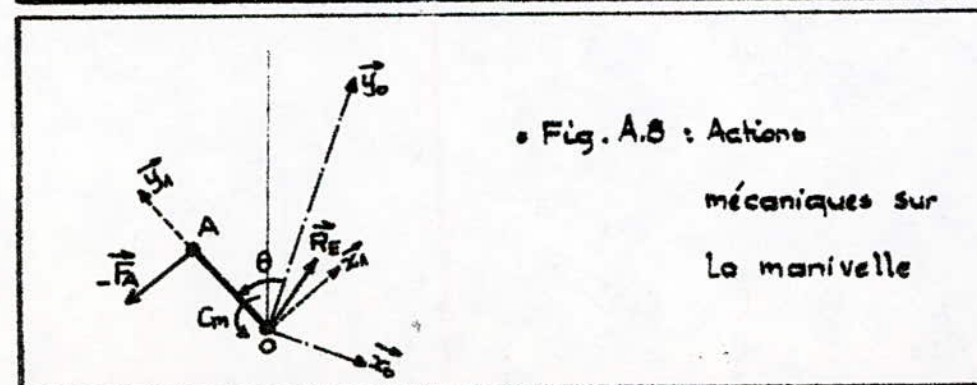
• Fig. A.5 : Actions mécaniques sur les pistons (1) et (2)



• Fig. A.6 : Actions mécaniques sur la bielle (à œil)



• Fig. A.7 : Actions mécaniques sur la bielle



• Fig. A.8 : Actions mécaniques sur la manivelle

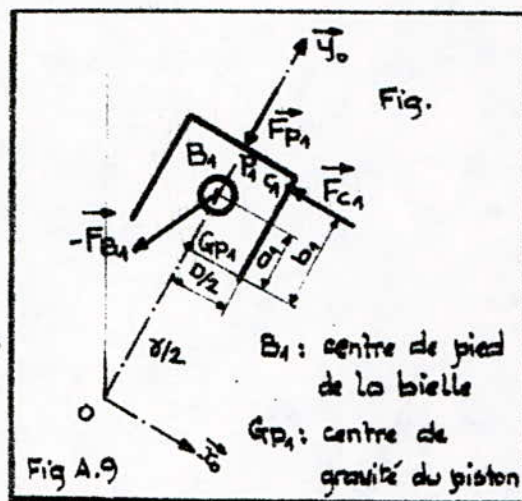


# 1- ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON (1) :

1-1) Analyse des actions mécaniques sur le piston (1) : 1ère rangée de cylindres

On isole le piston (Fig. ci contre) ; seules les trois actions mécaniques extérieures suivantes sont mises en évidence :

- Action de l'axe du piston sur le piston au point  $B_1$
- Action de la chemise sur le piston en  $C_1$
- Action des gaz de combustion sur le piston en  $P_1$



a- Action de l'axe du piston sur le piston : en  $B_1$  (Fig A.9)

• Torseur des actions mécaniques au point  $B_1$  :  $\tau_{B_1} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{B_1} \\ \vec{m}_{B_1} \end{Bmatrix}$

$$-\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} -X_{B_1} \\ -Y_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \vec{m}_{B_1} = \vec{0} \text{ car l'effort } \vec{F}_{B_1} \text{ passe par } B_1$$

b- Action de la chemise sur le piston : en  $C_1$  (Fig A.9)

• Torseur des actions mécaniques au point  $C_1$  :  $\tau_{C_1} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{C_1} \\ \vec{m}_{C_1} \end{Bmatrix}$

La chemise étant immobile en translation et en rotation ; elle est géométriquement parfaite et elle n'exerce aucun moment sur le piston. Le torseur des actions mécaniques au point  $C_1$  se résumera donc à :

$$\vec{F}_{C_1} = \begin{pmatrix} X_{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \vec{m}_{C_1} = \vec{0}$$

c- Action des gaz sur le piston : en  $P_1$  (Fig A.9)

• Torseur des actions mécaniques au point  $P_1$  :  $\tau_{P_1} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{P_1} \\ \vec{m}_{P_1} \end{Bmatrix}$

Le piston est considéré comme étant géométriquement parfait, et que sa tête est plate donc les gaz n'exercent aucun effort sur  $\vec{x}_0$  et  $\vec{z}_0$ .

On suppose aussi que la pression des gaz est uniformément répartie sur la tête du piston et que l'effort résultant s'applique sur le centre; dans ce cas les gaz n'exercent pas de moment sur le piston.

Il en résulte donc un seul effort  $\vec{F}_{P_1}$  ( $\vec{F}_{P_2}$  sur le piston (2)) appliqué au centre de la tête du piston et porté uniquement par  $(-\vec{y}_0)$  (par  $(-\vec{y})$  pour  $\vec{F}_{P_2}$ ).

- Le torseur des actions mécaniques au point  $P_1$  sera donc:

$$\vec{F}_{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P_1}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \quad \vec{M}_{P_1} = \vec{0}$$

$$Y_{P_1}(\theta) = \begin{cases} P_1(\theta) \cdot S & \Rightarrow \text{s'il s'agit d'un cycle thermodynamique théorique} \\ (P_1(\theta) - P_0) \cdot S & \Rightarrow \text{s'il s'agit d'un cycle quasi-reel ou reel} \end{cases}$$

Avec;  $S = \pi D^2/4$ : surface de la tête du piston

$P_1(\theta)$ : Pression des gaz en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin  $\theta$

$P_0$ : Pression à l'intérieur du carter.

Remarques:

1- On aura besoin des diagrammes de pression en fonction de  $\theta$ ; ceci sera traité dans la partie: Etude des cycles thermodynamiques industriels des moteurs à combustion interne.

2- Afin de rendre le problème moins complexe et d'éviter d'intervenir d'autres paramètres indéfinis; on a négligé les frottements entre chemise et piston.

1.2) Equations vectorielles fondamentales du piston (1):

$$\text{Elle sont données par: } \begin{cases} \text{MP. } \vec{T}(G_{P_1}, \text{piston(1)/o}) = \sum \vec{F}_{\text{ext/piston(1)}} & (a) \\ \text{(I) } \vec{\delta}(\text{piston(1)/}G_{P_1}) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}}) / G_{P_1} & (b) \end{cases}$$

où ; MP : masse du piston + accessoires (segments + axe du piston + ...)

$\vec{T}_{Gp_1}$  : vecteur accélération du centre de gravité du piston (1)

$\vec{T}_{Gp_1} = \vec{T}_{B_1}$  (ainsi que  $\vec{V}_{Gp_1} = \vec{V}_{B_1}$ ) car les points  $B_1$  et  $Gp_1$  sont liés au piston (1) considéré indéformable.

$\vec{\delta}(\text{Piston}(1)/Gp_1)$  : vecteur moment dynamique du piston (1) par rapport à son centre de gravité  $Gp_1$ .

a- Calcul du moment dynamique :

$$\vec{\delta}(\text{Piston}(1)/Gp_1) = \frac{d^0}{dt} \left( \vec{\sigma}(\text{Piston}(1)/Gp_1) \right) \quad \vec{\sigma} \text{ étant le moment cinétique du piston (1) / en CG : } Gp_1$$

le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(\text{piston}(1)/Gp_1) = \overline{\overline{I(\text{Piston}(1)/Gp_1)}} \cdot \vec{\Omega}(\text{piston}(1)/0)$$

( $Gp_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ )

le vecteur rotation instantané du piston (1) par rapport au repère fixe

$(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :  $\vec{\Omega}(\text{Piston}(1)/0) = \vec{0}$  car le piston n'a aucune rotation

par rapport au repère 0 donc :

$$\vec{\sigma}(\text{piston}(1)/Gp_1) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\delta}(\text{piston}(1)/Gp_1) = \vec{0}$$

b- Calcul des moments :

Les moments des forces extérieures au piston (1) seront ramenés à son centre de gravité  $Gp_1$ .

b.1) Moment de  $(-\vec{F}_{B_1})$  : (Fig. A.9)

$$\vec{M}(-\vec{F}_{B_1})/Gp_1 = \vec{M}(-\vec{F}_{B_1})/B_1 + \overline{Gp_1 B_1} \wedge (-\vec{F}_{B_1}) \quad ; \quad \vec{M}(-\vec{F}_{B_1})/B_1 = \vec{0}$$

$$\overline{Gp_1 B_1} = a_1 \vec{y}_0$$

$$\text{Donc ; } \vec{M}(-\vec{F}_{B_1})/Gp_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \wedge \begin{bmatrix} -x_{B_1} \\ -y_{B_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 x_{B_1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.2) Moment de  $(\vec{F}_{C_1})$  : (Fig. A.9)

$$\vec{M}(\vec{F}_{C_1})/Gp_1 = \vec{M}(\vec{F}_{C_1})/C_1 + \overline{Gp_1 C_1} \wedge \vec{F}_{C_1} \quad ; \quad \vec{M}(\vec{F}_{C_1})/C_1 = \vec{0}$$

$$\overline{Gp_1 C_1} = \frac{D}{2} \cdot \vec{x}_0 + b_1 \cdot \vec{y}_0$$

D'où :

$$\vec{M}(\vec{F}_{C_1})/G_{P_1} = \begin{pmatrix} D/2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_1 X_{C_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.3) Moment de  $\vec{F}_{P_1}$  : (Fig. A.9)

$\vec{M}(\vec{F}_{P_1})/G_{P_1} = \vec{0}$  car  $\vec{F}_{P_1}$  passe par le centre de gravité  $G_{P_1}$ .

1.3) Equations scalaires du piston (1) :

• Projection de l'équation vectorielle fondamentale (a) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

sur  $\vec{x}_0$  : MP.  $\ddot{x}_{B_1} = -X_{B_1} + X_{C_1}$  ; or  $\ddot{x}_{B_1} = 0$  alors ;  
 $0 = -X_{B_1} + X_{C_1}$

sur  $\vec{y}_0$  : MP.  $\ddot{y}_{B_1} = -Y_{B_1} - Y_{P_1}(\theta)$  ;  $\ddot{y}_{B_1}$  est donné par la relation (23')

sur  $\vec{z}_0$  :  $0 = 0$

• Projection de l'équation vectorielle fondamentale (b) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

sur  $\vec{x}_0$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{y}_0$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{z}_0$  :  $0 = a_1 X_{B_1} - b_1 X_{C_1}$

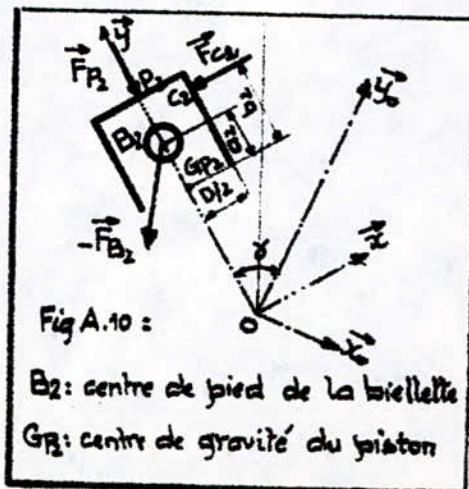
## 2 - ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON (2)

2-1) Analyse des actions mécaniques sur le piston (2) : 2<sup>ème</sup> rangée de cylindres

On isole le piston (2) de la 2<sup>ème</sup> rangée de cylindres et on mettra en évidence les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées.

Remarque :

Ces actions seront simultanément dans les deux repères fixes  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$



a. Action de l'axe du piston sur le piston : en  $B_2$  (Fig. A.10)

• Torseur des actions mécaniques au point  $B_2$  :  $\tau_{B_2} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{B_2} \\ \vec{M}_{B_2} \end{Bmatrix}$

- Dans le repère lié au piston (2) :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$-\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} -X_{B_2} \\ -Y_{B_2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} ; \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ; obtenu en utilisant la relation (5)

$$-\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} -X_{B_2} \cdot \cos \delta + Y_{B_2} \cdot \sin \delta \\ -X_{B_2} \cdot \sin \delta - Y_{B_2} \cdot \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

b. Action mécanique de la chemise sur le piston : en  $C_2$  (Fig. A.10)

• Torseur des actions mécaniques au point  $C_2$  :  $\tau_{C_2} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{C_2} \\ \vec{M}_{C_2} \end{Bmatrix}$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$+\vec{F}_{C_2} = \begin{pmatrix} X_{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} ; \vec{M}_{C_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$+\vec{F}_{C_2} = \begin{pmatrix} X_{C_2} \cos \delta \\ X_{C_2} \sin \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \vec{M}_{C_2} = \vec{0}$$

c. Action des gaz sur le piston : en  $P_2$  (Fig. A.10)

• Torseur au point  $P_2$  :  $\tau_{P_2} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{P_2} \\ \vec{M}_{P_2} \end{Bmatrix}$

Le piston est supposé géométriquement parfait, sa tête est aussi considérée comme étant plate et la pression des gaz est répartie d'une manière uniforme sur sa surface, il en résulte donc un seul effort appliqué au centre de la tête du piston et porté uniquement par  $(-\vec{y})$ .

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au piston (2)

$$\vec{F}_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_{P_2}(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} ; \vec{M}_{P_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_{P_2} = \begin{pmatrix} Y_{P_2}(\theta) \sin \delta \\ -Y_{P_2}(\theta) \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{P_2} = \vec{0}$$

2.2) Equations vectorielles fondamentales du piston (2) :

$$\text{II} \begin{cases} \text{MP. } \vec{T}(\text{Gr}_{P_2}, \text{piston}(2)/0) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}/\text{piston}(2) & (c) \\ \vec{\delta}(\text{piston}(2)/\text{Gr}_{P_2}) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}})/\text{Gr}_{P_2} & (d) \end{cases}$$

Avec ;  $\vec{T}_{\text{Gr}_{P_2}}$  : vecteur accélération du centre de gravité du piston (2)

$\vec{\delta}(\text{Piston}(2)/\text{Gr}_{P_2})$  : vecteur moment dynamique du piston (2) par rapport à son centre de gravité  $\text{Gr}_{P_2}$

Les points  $B_2$  et  $\text{Gr}_{P_2}$  ont même vitesse et même accélération ( $\vec{T}_{B_2} = \vec{T}_{\text{Gr}_{P_2}}$ ) car il appartiennent au même piston considéré comme solide indéformable.

a- Calcul du moment dynamique :

le piston (2) est immobile en rotation donc  $\vec{\Omega}(\text{Piston}(2)/0) = \vec{0}$ , il vient alors ;  $\vec{\delta}(\text{Piston}(2)/\text{Gr}_{P_2}) = \vec{0}$  ; le moment dynamique du piston (2) par rapport à son centre de gravité est nul :  $\vec{\delta}(\text{Piston}(2)/\text{Gr}_{P_2}) = \vec{0}$

b- Calcul des moments :

Les moments des forces extérieures au piston (2) seront ramenés à son centre de gravité et seront donnés dans les deux repères :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

En effet la procédure de calcul étant exactement la même que celle faite pour le piston (1) ; on donnera donc uniquement les résultats.

b.1) Moment de  $(-\vec{F}_{B_2})$  :

- Dans le repère lié au piston (2) :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{M}(-\vec{F}_{B_2})/\text{Gr}_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \times B_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix}$$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  obtenu en utilisant la relation (5)

$$\vec{M}(-\vec{F}_{B_2})/G_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 X_{B_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.2) Moment de  $\vec{F}_{C_2}$  :

- Dans le repère lié au piston (2) :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{M}(\vec{F}_{C_2})/G_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_2 X_{C_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{M}(\vec{F}_{C_2})/G_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b_2 X_{C_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.3) Moment de  $\vec{F}_{P_2}$  :

$$\vec{M}(\vec{F}_{P_2})/G_{P_2} = \vec{0} \text{ dans les deux repères. } \vec{M}(\vec{F}_{P_2})/G_{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2-3) Equations scalaires du piston (2) :

• Projection de l'équation (c) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\text{sur } \vec{x}_0 : MP. \ddot{x}_{B_2} = -X_{B_2} \cos \delta + Y_{B_2} \sin \delta + X_{C_2} \cos \delta + Y_{P_2}(\theta) \sin \delta$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : MP. \ddot{y}_{B_2} = -X_{B_2} \sin \delta - Y_{B_2} \cos \delta + X_{C_2} \sin \delta - Y_{P_2}(\theta) \cos \delta$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

• Projection de l'équation (d) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = a_2 X_{B_2} - b_2 X_{C_2}$$

Les accélérations du point  $B_2$  :  $\ddot{x}_{B_2}$  et  $\ddot{y}_{B_2}$  sont données par les relations (26").

### 3- ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE

(29)

#### 3.1) Analyse des actions mécaniques sur la bielle : (Fig. A.6)

On isole la bielle, seules les actions mécaniques extérieures  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_{B_1}$  et  $\vec{F}_C$  seront mises en évidence. Opérons de la même façon que pour les pistons (1) et (2); nous obtenons alors;

##### a- Action du piston (1) sur la bielle : en $B_1$ (Fig. A.6)

• Torseur au point  $B_1$  :  $\tau_{B_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{B_1} \\ \vec{M}_{B_1} \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_{B_1} \\ Y_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{B_1} = \vec{0}$$

- Dans le repère lié à la bielle :  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_{B_1} \cos\varphi + Y_{B_1} \sin\varphi \\ -X_{B_1} \sin\varphi + Y_{B_1} \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{B_1} = \vec{0}$$

##### b- Action de la manivelle sur la bielle : en A (Fig. A.6)

• Torseur au point A :  $\tau_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_A = \vec{0}$$

- Dans le repère lié à la bielle :  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi \\ -X_A \sin\varphi + Y_A \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} ; \vec{M}_A = \vec{0}$$

##### c- Action de la biellette sur la bielle : en C (Fig. A.6)

• Torseur au point C :  $\tau_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_C = \vec{0}$$



- Dans le repère lié à La bielle :  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} X_C \cos \varphi + Y_C \sin \varphi \\ -X_C \sin \varphi + Y_C \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

3.2) Equations vectorielles fondamentales de La bielle :

$$(I) \begin{cases} MB \cdot \vec{T}(G_1, \text{bielle}/o) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}/\text{bielle} & (e) \\ \vec{\delta}(\text{bielle}/G_1) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}})/G_1 & (f) \end{cases}$$

Avec ;

MB : masse de La bielle

$\vec{T}_{G_1}$  : vecteur accélération du centre de gravité de La bielle :  $G_1$

$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_1)$  : vecteur moment dynamique de La bielle /  $G_1$

a- Calcul du moment dynamique :

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_1) = \frac{d^0}{dt} (\vec{S}(\text{bielle}/G_1))$$

Le moment cinétique de La bielle /  $G_1$  est donné par le produit du tenseur d'inertie de La bielle /  $G_1$  dans le repère  $(G_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié à La bielle par le vecteur rotation instantané de La bielle par rapport au repère fixe .

$$\vec{S}(\text{bielle}/G_1) = \overline{\overline{I(\text{bielle}/G_1)}}_{(G_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \cdot \vec{\Omega}(\text{bielle}/o)$$

oo le vecteur rotation instantané de La bielle /  $o$  a été déjà défini :

$$\vec{\Omega}(\text{bielle}/o) = \vec{\Omega}(2/o) = \dot{\varphi} \vec{z}_2 = \dot{\varphi} \vec{z}_0 \text{ car } \vec{z}_2 = \vec{z}_0$$

oo Tenseur d'inertie de La bielle /  $G_1$  :

$$I(\text{bielle}/G_1)_{(G_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} = \begin{vmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{vmatrix}$$

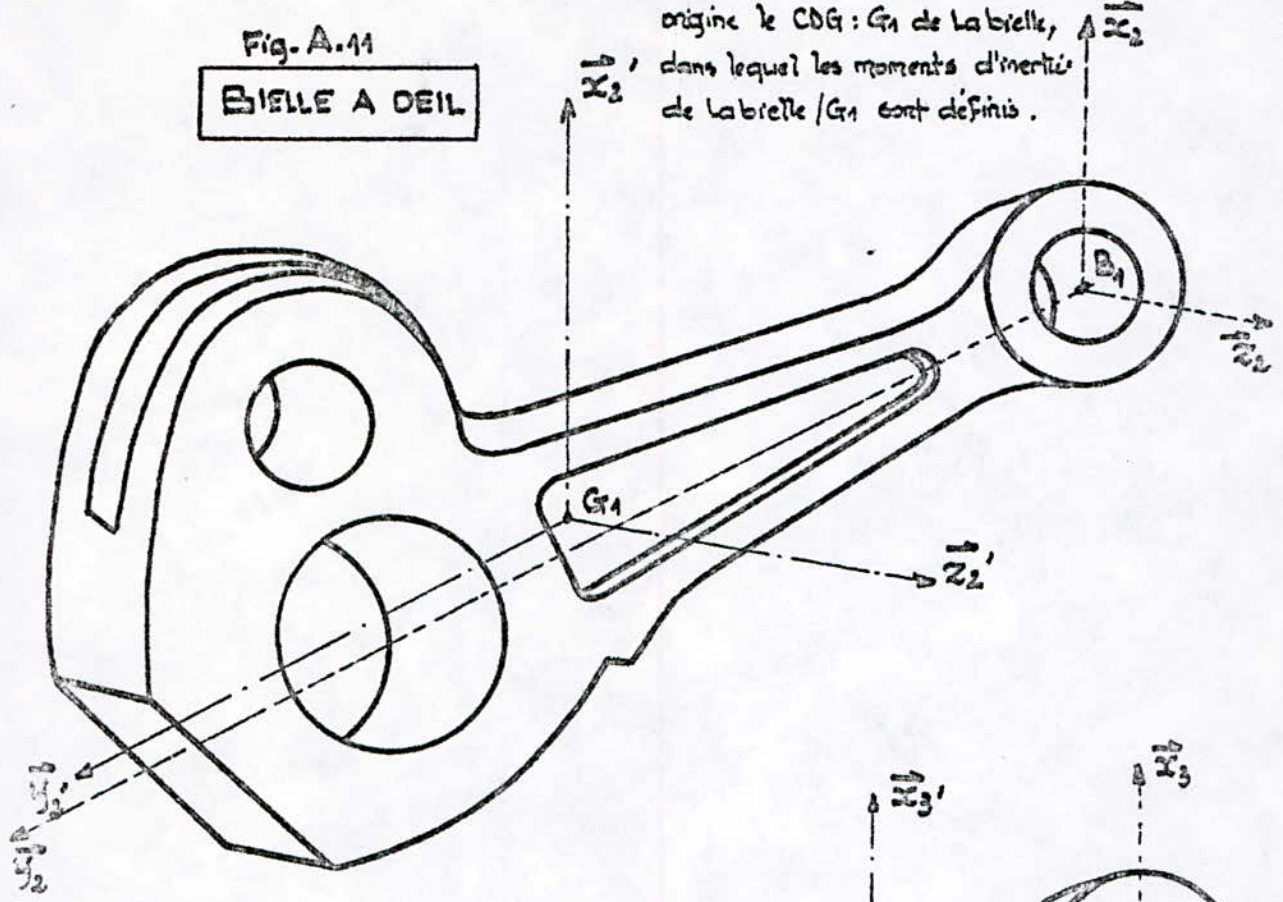
où ; A, B et C : Moments d'inertie de La bielle par rapport aux axes

$\vec{x}_2, \vec{y}_2$  et  $\vec{z}_2$  passant par le centre de gravité  $G_1$  .

D, E et F : Produits d'inertie de La bielle par rapport aux plans

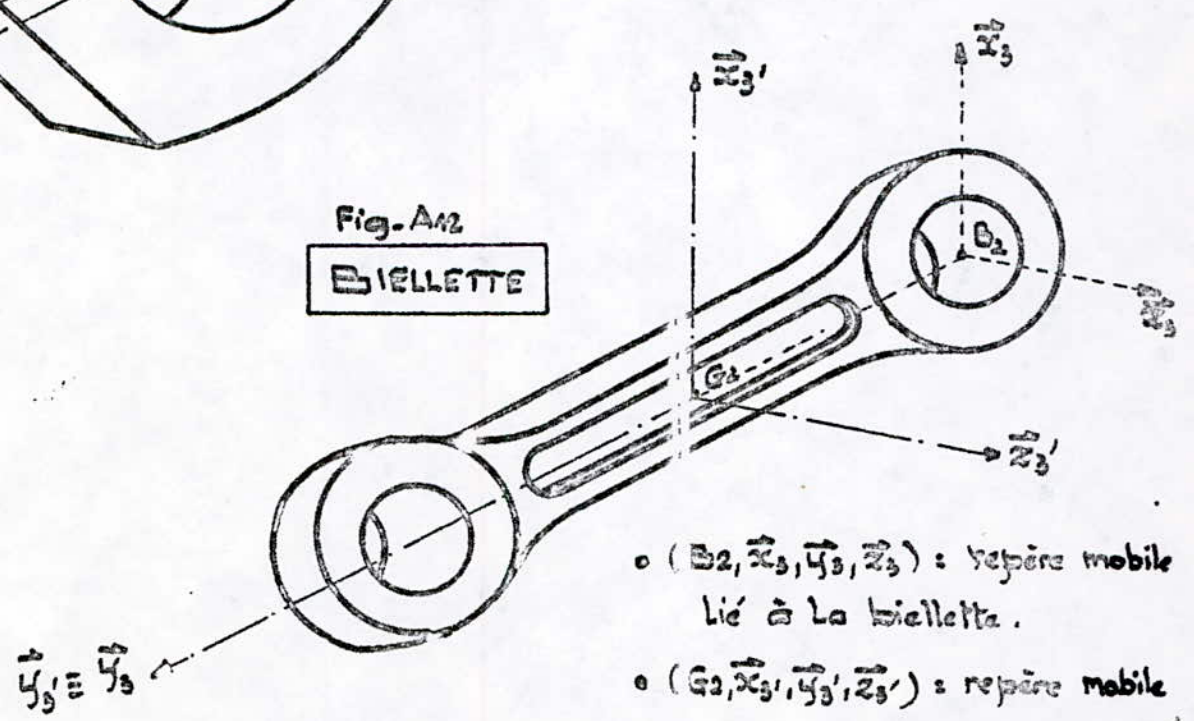
$x_2 y_2, x_2 z_2$  et  $z_2 y_2$  passant par le centre de gravité  $G_1$  .

Fig. A.41  
BIELLE A OEIL



o  $(B_1, \vec{z}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_1)$  : repère mobile lié à la bielie  
 o  $(G_1, \vec{z}_2', \vec{y}_3', \vec{z}_1')$  : repère mobile lié à la bielie ayant comme origine le CDG :  $G_1$  de la bielie, dans lequel les moments d'inertie de la bielie /  $G_1$  sont définis.

Fig. A.42  
BIELLETTE



o  $(B_2, \vec{z}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  : repère mobile lié à la biellette.  
 o  $(G_2, \vec{z}_3', \vec{y}_3', \vec{z}_3')$  : repère mobile lié à la biellette ayant comme origine le CDG :  $G_2$  de la biellette. Les moments d'inertie de la biellette /  $G_2$  sont définis dans ce repère.

Remarque :

La présence de l'axe de bielle a permis de distinguer un produit d'inertie non nul ; il s'agit de  $D = I_{Gx_2y_2}$  par rapport au plan  $x_2y_2$  qui est l'unique plan de symétrie de la bielle. (Fig. A.11)

$E = I_{Gz_2x_2} = 0$  ;  $F = I_{Gz_2y_2} = 0$  donc le tenseur d'inertie devient :

$$\overline{\overline{I}}(bielle/G_1)_{(G_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix} \quad A = I_{G_1x} ; B = I_{G_1y} ; C = I_{G_1z}$$

•• Le vecteur moment cinétique sera alors ;

$$\begin{aligned} \vec{J}(bielle/G_1) &= \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -D\dot{\varphi} \\ C\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D\dot{\varphi} \sin\varphi \\ -D\dot{\varphi} \cos\varphi \\ C\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad \text{obtenu en utilisant les relations (3)} \end{aligned}$$

•• D'où le vecteur moment dynamique : dans le repère fixe  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{\delta}(bielle/G_1) = \begin{pmatrix} D\ddot{\varphi} \sin\varphi + D\dot{\varphi}^2 \cos\varphi \\ -D\ddot{\varphi} \cos\varphi + D\dot{\varphi}^2 \sin\varphi \\ C\ddot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

b- Calcul des moments :

Opérons de la même manière que les deux pistons (1) et (2) et ramenons tous les moments au centre de gravité  $G_1$  : nous aurons donc ;

b-1) Moment de  $\vec{F}_{B_1}$  :

$$\vec{M}(\vec{F}_{B_1})/G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_{B_1}(x_{2G_1} \sin\varphi + y_{2G_1} \cos\varphi) + Y_{B_1}(-x_{2G_1} \cos\varphi + y_{2G_1} \sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

b-2) Moment de  $\vec{F}_A$  :

$$\vec{M}(\vec{F}_A)/G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X_A(-(L_1 - y_{2G_1}) \cos\varphi + x_{2G_1} \sin\varphi) - Y_A((L_1 - y_{2G_1}) \sin\varphi + x_{2G_1} \cos\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

b-3) Moment de  $\vec{F}_C$  :

$$\text{Posons } A_1 = (L_1 - y_{2G_1}) \cos \varphi - x_{2G_1} \sin \varphi - r_{B_1} \cos(\varphi + \beta)$$

$$A_2 = -(L_1 - y_{2G_1}) \sin \varphi - x_{2G_1} \cos \varphi + r_{B_1} \sin(\varphi + \beta)$$

Donc ;

$$\vec{M}(\vec{F}_C)_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -X_C \cdot A_1 + Y_C \cdot A_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

3.3) Equations scalaires de La bielle :

• Projection de l'équation (e) sur le repère  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : MB \cdot \ddot{x}_{G_1} = X_{B_1} + X_A + X_C$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : MB \cdot \ddot{y}_{G_1} = Y_{B_1} + Y_A + Y_C$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

• Projection de l'équation (f) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{Posons encore } B_1 = x_{2G_1} \sin \varphi + y_{2G_1} \cos \varphi$$

$$B_2 = -x_{2G_1} \cos \varphi + y_{2G_1} \sin \varphi$$

$$C'_1 = -(L_1 - y_{2G_1}) \cos \varphi + x_{2G_1} \sin \varphi$$

$$C'_2 = (L_1 - y_{2G_1}) \sin \varphi + x_{2G_1} \cos \varphi$$

Donc ;

$$\text{sur } \vec{x}_0 : D(\ddot{\varphi} \sin \varphi) + D(\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) = 0$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : -D(\ddot{\varphi} \cos \varphi) + D(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = 0$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : C \ddot{\varphi} = X_{B_1} \cdot B_1 + Y_{B_1} \cdot B_2 + X_A \cdot C'_1 + Y_A \cdot C'_2 - X_C \cdot A_1 + Y_C \cdot A_2$$

Avec ;  $\ddot{x}_{G_1}$  et  $\ddot{y}_{G_1}$  : composantes du vecteur accélération du centre de gravité de La bielle données par les relations (24")

Remarque : Etant donné que le système (Bielle - Biellette) n'est pas à notre disposition et comme les coordonnées des centres de gravité des deux bielles ainsi que leur moment par rapport à leur CDG s'avèrent être nécessaires comme données du moteur ; on a envisagé un modèle (planches 1, 2 et 3) à partir duquel on a calculé les deux moments d'inertie ( $I_{G_1}$ ,  $I_{G_2}$ ) (Annexe: Appendix 5)

#### 4- ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLETTE

4-1) Analyse des actions mécaniques sur la bielle : (Fig. A.7)

La bielle étant isolée, on mettra en évidence les actions mécaniques extérieures  $\vec{F}_{B_2}$  et  $(-\vec{F}_C)$ ; on opérera de la même façon que les deux pistons et la bielle. Nous aurons ainsi :

a- Action du piston (2) sur la bielle : en  $B_2$  (Fig. A.7)

• Effort au point  $B_2$  :  $\tau_{B_2} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{B_2} \\ \vec{M}_{B_2} \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  dans lequel sont écrites les composantes de  $\vec{F}_{B_2}$

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \\ Y_{B_2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}} ; \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère fixe d'étude :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} +X_{B_2} \cos \delta - Y_{B_2} \sin \delta \\ +X_{B_2} \sin \delta + Y_{B_2} \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} ; \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère lié à la bielle :  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi \\ -X_{B_2} \sin \psi + Y_{B_2} \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3} ; \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

b- Action de la bielle sur la bielle : en C (Fig. A.7)

• Effort au point C :  $\tau_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$-\vec{F}_C = \begin{pmatrix} -X_C \\ -Y_C \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} ; \vec{M}_C = \vec{0}$$

- Dans le repère lié à la bielle :  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$-\vec{F}_C = \begin{pmatrix} -X_C \cos(\psi + \delta) - Y_C \sin(\psi + \delta) \\ X_C \sin(\psi + \delta) - Y_C \cos(\psi + \delta) \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3} ; \vec{M}_C = \vec{0}$$

4-2) Equations vectorielles fondamentales de la bielle :

$$\begin{cases} MB_t \cdot \vec{T}(G_2, \text{bielle}/O) = \sum \vec{F}_{ext}/\text{bielle} & (g) \\ \vec{\delta}(\text{bielle}/G_2) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{ext})/G_2 & (h) \end{cases}$$

$MB_t$  : Masse de la bielle

$\vec{T}_{G_2}$  : vecteur accélération du centre de gravité de la bielle :  $G_2$

$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_2)$  : vecteur moment dynamique de la bielle /  $G_2$

a- Calcul du moment dynamique :

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_2) = \frac{d^0}{dt} (\vec{\sigma}(\text{bielle}/G_2))$$

le moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(\text{bielle}/G_2) = \overline{\overline{I(\text{bielle}/G_2)}}_{(G_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \cdot \vec{\Omega}(\text{bielle}/O)$$

La bielle (Fig. A.12) possède deux plans de symétries  $(x_3y_3)$  et  $(y_3z_3)$

donc tous ses produits d'inertie par rapport aux 3 plans  $(x_3y_3)$ ,  $(y_3z_3)$

et  $(z_3x_3)$  sont nuls :  $D = F = E = 0$

le tenseur d'inertie sera alors ;

$$\overline{\overline{I(\text{bielle}/G_2)}}_{(G_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} A_1 &= I_{G_2x_3} \\ B_1 &= I_{G_2y_3} \\ C_1 &= I_{G_2z_3} = I_{G_2z} \end{aligned}$$

•• Vecteur rotation instantané de la bielle /  $O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  :

$$\vec{\Omega}(\text{bielle}/O) = \vec{\Omega}(B/O) = \dot{\psi} \vec{z}_0 = \dot{\psi} \vec{z}_3 \quad \text{car } \vec{z}_0 = \vec{z}_3$$

•• le vecteur moment cinétique sera :

$$\vec{\sigma}(\text{bielle}/G_2) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \dot{\psi} \end{pmatrix} \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \dot{\psi} \end{pmatrix} \vec{z}_0$$

D'où le vecteur moment dynamique : obtenu en dérivant  $\vec{\sigma}$  / temps

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \dot{\psi} \end{pmatrix} \vec{z}_0$$

b- Calcul des moments :

Ces moments seront ramenés au centre de gravité :  $G_2$

Résultat :

b-1) Moment de  $\vec{F}_{B_2}$  :

- Dans le repère fixe :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{M}(\vec{F}_{B_2})/G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G_2} (X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

- Dans le repère lié à la bielle :  $(B_2, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$

$$\vec{M}(\vec{F}_{B_2})/G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G_2} (X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_s \\ \vec{y}_s \\ \vec{z}_s \end{matrix}$$

b-2) Moment de  $(-\vec{F}_C)$  :

$$\vec{M}(-\vec{F}_C)/G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_2 - L_{G_2}) [X_C \cos(\psi + \delta) + Y_C \sin(\psi + \delta)] \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (L_2 - L_{G_2}) (X_C \cos(\psi + \delta) + Y_C \sin(\psi + \delta)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_s \\ \vec{y}_s \\ \vec{z}_s \end{matrix}$$

4-3) Equations scalaires de la bielle :

• Projection de l'équation (g) sur  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  :

sur  $\vec{x}_0$  :  $M B t \cdot \ddot{x}_{G_2} = X_{B_2} \cos \delta - Y_{B_2} \sin \delta - X_C$

sur  $\vec{y}_0$  :  $M B t \cdot \ddot{y}_{G_2} = X_{B_2} \sin \delta + Y_{B_2} \cos \delta - Y_C$

sur  $\vec{z}_0$  :  $0 = 0$

• Projection de l'équation (h) sur  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

sur  $\vec{x}_0$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{y}_0$  :  $0 = 0$

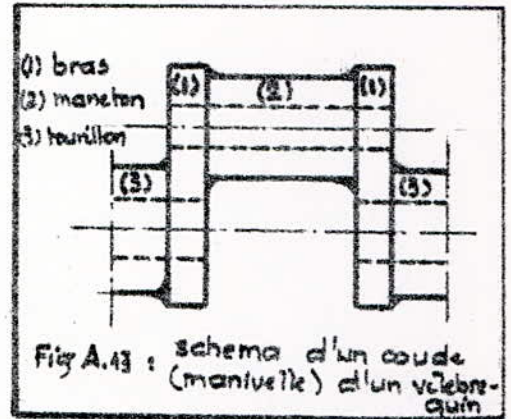
sur  $\vec{z}_0$  :  $C_4 \ddot{\psi} = L_{G_2} (X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi) + (L_2 - L_{G_2}) (X_C \cos(\psi + \delta) + Y_C \sin(\psi + \delta))$

Avec  $\ddot{x}_{G_2}$ ,  $\ddot{y}_{G_2}$  et  $\ddot{\psi}$  donnés par les relations (29'') et (29)

## 5- ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE

5.1) Analyse des actions mécaniques sur la manivelle : (Fig. A.8)

La figure ci-contre montre les différents éléments constituant la manivelle (maneton + flasques avec contre poids + tourillons)



Isolons la manivelle, elle sera donc

soumise aux actions suivantes :

-  $\vec{F}_A$  : action de la bielle sur la manivelle

$\vec{R}_E$  : Réaction des paliers sur les tourillons

a- Action de la bielle sur le maneton : en A

• Torseur au point A :  $\tau_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;  $-\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$  ;  $\vec{M}_A = \vec{0}$  car  $\vec{F}_A$  passe par le point A

- Dans le repère lié à la manivelle :

$$(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) ; -\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -X_A \cos\theta - Y_A \sin\theta \\ X_A \sin\theta - Y_A \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} ; \vec{M}_A = \vec{0}$$

b- Réaction des paliers sur les tourillons : en O (Fig A.8)

• Torseur au point O :  $\tau_E = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_E \\ \vec{M}_E \end{array} \right\}$  (notation : OEE)

- Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{R}_E = \begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \vec{M}_E = \vec{0} \text{ car } \vec{R}_E \text{ passe par l'origine O (EE)}$$

- Dans le repère lié à la manivelle :  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\vec{R}_E = \begin{pmatrix} X_E \cos\theta + Y_E \sin\theta \\ -X_E \sin\theta + Y_E \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} ; \vec{M}_E = \vec{0}$$

5.2) Equations vectorielles fondamentales de la manivelle

$$\begin{cases} Mm \cdot \vec{T}(G_m, \text{manivelle}/0) = \sum \vec{F}_{ext}/\text{manivelle} & (i) \\ \vec{\delta}(\text{manivelle}/G_m) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{ext})/G_m & (j) \end{cases}$$



$M_m$ : masse de la manivelle

$\vec{\delta}(\text{manivelle}/G_m)$ : vecteur moment dynamique de la manivelle /  $G_m$

$\vec{T}_{G_m}$ : vecteur accélération du CDG de la manivelle /  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{T}_{G_m} = \vec{T}_{G_m}^R + \vec{T}_{G_m}^Z \quad ; \quad \vec{T}_{G_m}^Z = \frac{d}{dt}(\omega r) \text{ so car } \omega = \text{cte}$$

$\vec{T}_{G_m}^R = -\omega^2 r \vec{y}_1$ : accélération centripète

$$\text{comme } \vec{y}_1 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{z}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{x}_0 \end{matrix} \quad \text{donc } \vec{T}_{G_m} = \begin{bmatrix} \omega^2 r \sin\theta \\ -\omega^2 r \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

a- Calcul du moment dynamique :

$$\text{so } \vec{L}(\text{manivelle}/0) = \vec{L}(1/0) = \omega \vec{z}_0 = \omega \vec{z}_1 \quad \text{car } \vec{z}_0 = \vec{z}_1$$

so tenseur d'inertie /  $G_m$ :

$$\overline{\overline{I}}(\text{man}/G_m)_{(G_m, \vec{z}_1, \vec{y}_1, \vec{x}_1)} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} D=E=F \text{ car la manivelle} \\ \text{a deux plans de symétrie} \end{matrix}$$

$$\text{so } \vec{\sigma}(\text{man}/G_m) = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{z}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{x}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \omega \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

$$\text{so } \vec{\delta}(\text{man}/G_m) = \frac{d}{dt} \vec{\sigma}(\text{man}/G_m) = \vec{0} \quad \text{car } \frac{d\omega}{dt} = 0$$

b- Calcul des moments :

les moments des actions extérieures  $(-\vec{F}_A)$  et  $\vec{R}_B$  seront ramenés au centre de gravité  $G_m$  de la manivelle.

b.1) Moment de  $(-\vec{F}_A)$ :

$$\vec{M}_{G_m}(-\vec{F}_A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)(X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta) \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.2) Moment de  $\vec{R}_B$ :

$$\vec{M}_{G_m}(+\vec{R}_B) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r(X_B \cos\theta + Y_B \sin\theta) \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

5-3) Equations scalaires de La manivelle :

• Projection de l'équation (i) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : Mm. \omega r \sin \theta = -X_A + X_E$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : -Mm. \omega r \cos \theta = -Y_A + Y_E$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

• Projection de l'équation (j) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

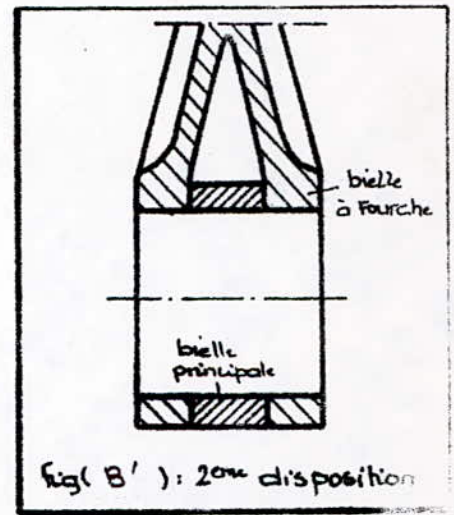
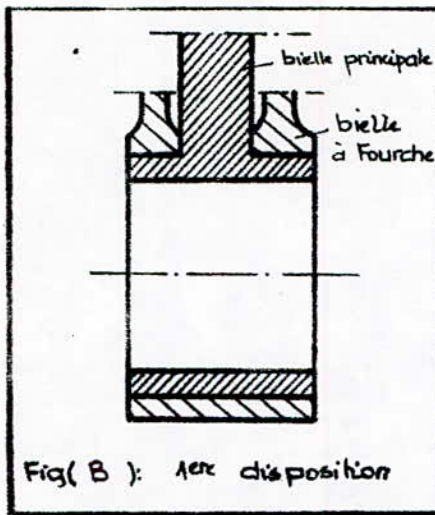
$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = (R-r)(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) + r(X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta) + C_m$$


---

## B. ETUDE CINEMATIQUE ET DYNAMIQUE DE L'EMBIELLAGE (BIELLE - BIELLE A FOURCHE) DE MOTEURS EN V

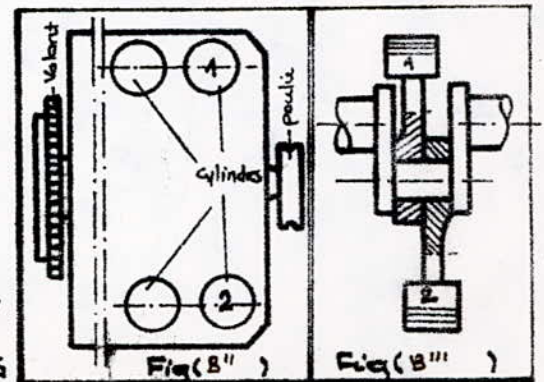
• L'embiellage (bielle-bielle à fourche) dans les moteurs en V existe suivant deux dispositions :

- 1<sup>ère</sup> disposition : La bielle à fourche s'articule sur la bielle principale qui est articulée seule sur le maneton (Fig. B )
- 2<sup>ème</sup> disposition : Articulation des deux bielles sur le maneton. Mais la bielle principale s'articule au centre du maneton et la bielle à fourche aux extrémités de celui-ci (Fig. B' )



• Dans la pratique il existe d'autres types de moteurs en V autres que ceux avec embiellages (Bielle-Biellette) et (Bielle-Bielle à fourche), il s'agit du système de bielles déportés ou accolés (Fig B'') ou les deux bielles sont disposées côte à côte sur le maneton.

La différence existante entre les systèmes (Bielles accolés) et (Bielle-Bielle à fourche) est que dans le premier, le maneton est plus long et les cylindres sont décalés dans chaque rangée (Fig B''). Dans notre projet on ne traitera pas le syst (Bielle accolés) étant donné que son étude cinématique et dynamique est tout à la même que celles du système (Bielle-Bielle à fourche).



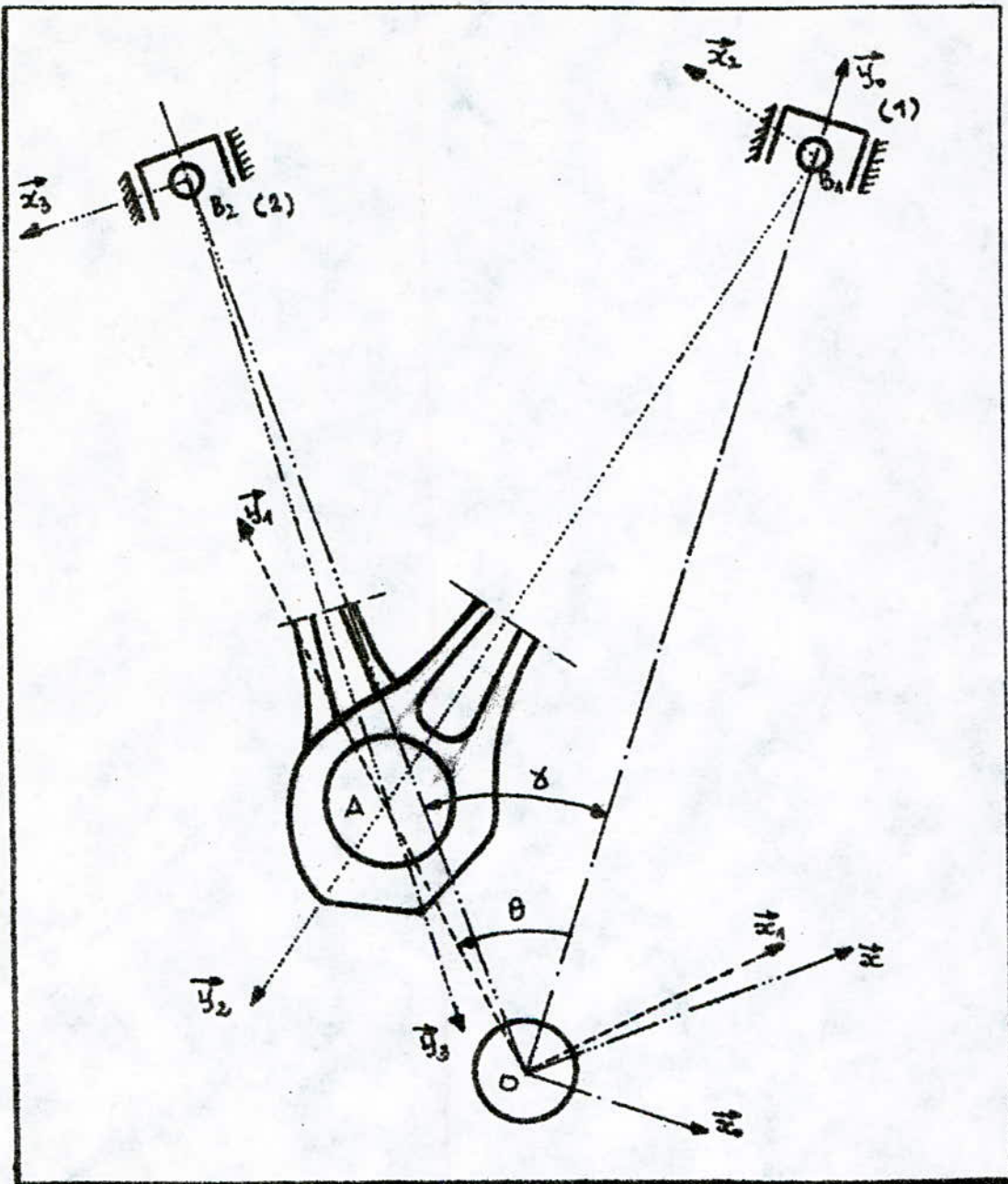
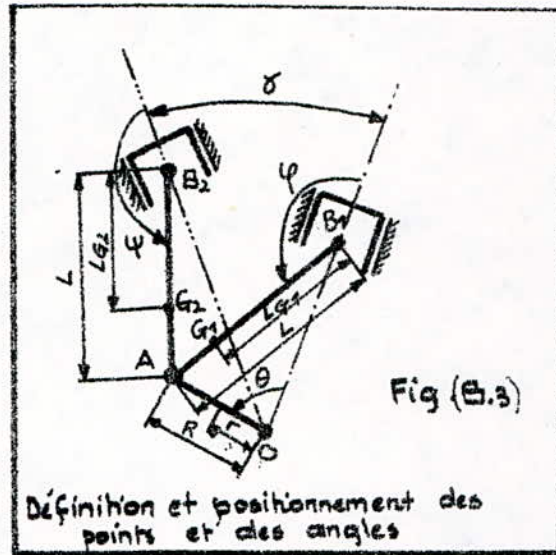
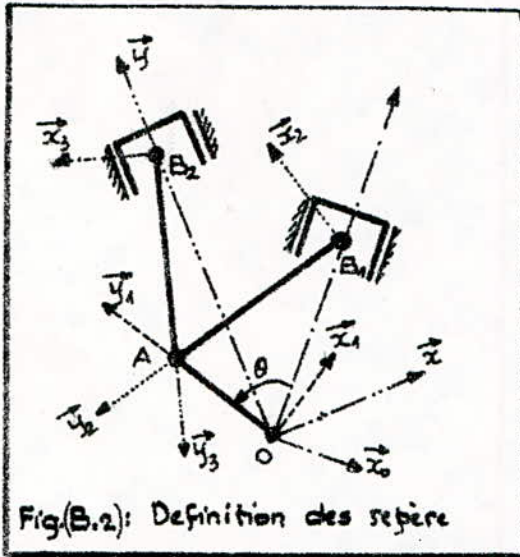


Figure (B.1) : Embléage (Bielle - Bielle à fourche) de moteurs en V  
 $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  ;  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  : repères fixes  
 $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  [resp.  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ ] : repères mobiles liés à  
 la manivelle (resp. à la bielle et à la bielle à fourche).  
 $B_1$  (resp.  $B_2$ ) : centre de pied de la bielle (resp. de la bielle à fourche)  
 $\delta$  : angle d'ouverture du V  
 $\theta$  : angle de rotation du vilebrequin.

## B.1 ) ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME BIELLE - BIELLE A FOURCHE - MANIVELLE



### Remarques:

- 1- Les formules de passage entre repères sont tout à fait les mêmes que celles utilisées pour le système (Bielle - Biellette)
- 2- La cinématique des points A et B<sub>1</sub> a été déjà définie dans le système (Bielle - Biellette); on étudiera uniquement celle relative au points G<sub>1</sub>, B<sub>2</sub> et G<sub>2</sub> car on est dans le cas où la bielle de la 2<sup>ème</sup> rangée de cylindres est une bielle à fourche et que la bielle maîtresse n'a pas d'œil.
- 3- Dans le système (Bielle - Bielle à fourche) la bielle maîtresse n'a pas d'œil et elle est avec la bielle à fourche à entraxe égale; il s'en suit donc que les relations cinématiques entre les angles de rotation ( $\varphi, \theta, \psi$ ) changent d'expression par rapport à ceux trouvés dans le système (Bielle - Biellette).
- 4- Les deux systèmes (Bielle - Bielle à fourche) et (Bielles accolées) sont dynamiquement équivalents; ils ne diffèrent qu'au point de vue dimensionnement de la manivelle où dans le 2<sup>ème</sup> système il y a allonge-

ment et distribution des diamètres du maneton par rapport au 1<sup>er</sup> système. Donc  
 l'étude dynamique du 2<sup>or</sup> système est identique à celle du 1<sup>er</sup> système.

## 1- RELATIONS CINEMATIQUES

1-1) Définition des angles  $\varphi$  et  $\psi$  de rotation des deux bielles : (fig B.3)

• Angle  $\varphi$  :  $\vec{OA} = R\vec{y}_1 = -R\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + R\cos\theta \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{OA}/\vec{x}_0 = -R\sin\theta$

$\vec{B}_1A = L\vec{y}_2 = -L\sin\varphi \cdot \vec{x}_0 + L\cos\varphi \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{B}_1A/\vec{x}_0 = -L\sin\varphi$

$\vec{OA}/\vec{x}_0 = \vec{B}_1A/\vec{x}_0$  donne :  $R\sin\theta = L\sin\varphi$

d'où  $\sin\varphi = (R/L)\sin\theta$  (28)

Donc  $\varphi$  est déterminé par son sinus et par son cosinus ;

$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \sin^2\varphi} < 0$  car  $\varphi$  varie légèrement  
 autour de  $\pi$

$\cos\varphi = -\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2}\sin^2\theta}$  (29)

• Angle  $\psi$  :  $\vec{OA} = R\vec{y}_1 = -R\sin(\theta-\delta) \cdot \vec{x} + R\cos(\theta-\delta) \cdot \vec{y} \Rightarrow \vec{OA}/\vec{x} = -R\sin(\theta-\delta)$

$\vec{B}_2A = L\vec{y}_3 = -L\sin\psi \cdot \vec{x} + L\cos\psi \cdot \vec{y} \Rightarrow \vec{B}_2A/\vec{x} = -L\sin\psi$

$\vec{OA}/\vec{x} = \vec{B}_2A/\vec{x}$  donne :  $R\sin(\theta-\delta) = L\sin\psi$

d'où :  $\sin\psi = (R/L)\sin(\theta-\delta)$  (30)

$\cos\psi = -\sqrt{1 - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2(\theta-\delta)}$  (31)

1-2) Définition des vitesses angulaires  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\psi}$  :

•  $\dot{\varphi}$  : s'obtient en dérivant la relation (28) par rapport au temps ;

$\dot{\varphi} = \frac{R\omega \cos\theta}{L \cos\varphi}$  (32)

•  $\dot{\psi}$  : s'obtient en dérivant la relation (30) par rapport au temps ;

$\dot{\psi} = \frac{R\omega \cos(\theta-\delta)}{L \cos\psi}$  (33)

1-3) Définition des accélérations angulaires  $\ddot{\varphi}$  et  $\ddot{\psi}$  :

•  $\ddot{\varphi}$  : dérivons la relation (32) par rapport au temps ; on aura

$$\ddot{\varphi} \cos \psi - \dot{\varphi}^2 \sin \psi = -\frac{R}{L} \omega^2 \sin \theta$$

d'où ;  $\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi}^2 \sin \psi - (R\omega^2/L) \sin \theta}{\cos \psi}$  comme  $\sin \theta = (L/R) \sin \psi$

il vient alors ;

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2) \operatorname{tg} \psi \quad (34)$$

•  $\ddot{\psi}$  : dérivons la relation (33) par rapport au temps ; on aura

$$\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi = -\frac{R}{L} \omega^2 \sin (\theta - \delta) \quad \text{qui deviendra en remplaçant}$$

$\sin(\theta - \delta)$  par  $(L/R) \sin \psi$  :

$$\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi = -\omega^2 \sin \psi$$

d'où ;

$$\ddot{\psi} = (\dot{\psi}^2 - \omega^2) \operatorname{tg} \psi \quad (35)$$

## 2 - CINEMATIQUE DES POINTS $G_1, B_2, G_2$

2.1) Point  $G_1$  : Centre de gravité de la bielle. (Fig. B.3)

Ce point a une seule composante sur  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ . cette composante est  $LG_1$  qui est égale à la distance entre l'axe de pivot de la bielle et le point  $G_1$ .

(B.3.3.3)

Donc  $G_1(0, LG_1, 0)$  sur  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{OG}_1 = \vec{OA} + \vec{AG}_1 = R\vec{y}_1 - (L - LG_1)\vec{y}_2$$

A l'aide des relations (1) et (3) on obtient :

a- Position de  $G_1$  :

$$\vec{OG}_1 = \begin{pmatrix} x_{G_1} \\ y_{G_1} \\ z_{G_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \sin \theta + (L - LG_1) \sin \psi \\ R \cos \theta - (L - LG_1) \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Comme  $\sin \psi = \frac{R}{L} \sin \theta$  Alors ;

$$\vec{OG}_1 = \begin{pmatrix} -(L_{G_1}/L)R \sin \theta \\ R \cos \theta - (L - LG_1) \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

b- Vitesse de  $G_1$  :  $\vec{V}_{G_1} = \frac{d(\vec{OG}_1)}{dt}$

$$\vec{V}_{G_1} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{G_1} \\ \dot{y}_{G_1} \\ \dot{z}_{G_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -(L_{G_1}/L) R \omega \cos \theta \\ R \sin \theta [ (1 - L_{G_1}/L) \dot{\varphi} - \omega ] \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

c- Accélération de  $G_1$  :  $\vec{T}_{G_1} = \frac{d(\vec{V}_{G_1})}{dt}$

$$\vec{T}_{G_1} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_{G_1} \\ \ddot{y}_{G_1} \\ \ddot{z}_{G_1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} (L_{G_1}/L) R \omega^2 \sin \theta \\ R \omega \cos \theta [ (1 - L_{G_1}/L) \ddot{\varphi} - \dot{\omega} ] + R \sin \theta (1 - L_{G_1}/L) \ddot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2.2) • Point  $B_2$  : centre de pied de la brique à fourche

$$\vec{OB}_2 = \vec{OA} + \vec{AB}_2 = R \vec{y}_1 - L \vec{y}_3 \quad ; \quad \vec{y}_1 = -\sin(\theta - \alpha) \cdot \vec{x} + \cos(\theta - \alpha) \cdot \vec{y}$$

Les relations (10) permettent de définir le point  $B_2$  sur :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

les relations (6) et (8) définissent  $B_2$  sur :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

a- Position de  $B_2$  :

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{OB}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cos(\theta - \alpha) - L \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{OB}_2 = \begin{pmatrix} x_{B_2} \\ y_{B_2} \\ z_{B_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha (R \cos(\theta - \alpha) - L \cos \psi) \\ \cos \alpha (R \cos(\theta - \alpha) - L \cos \psi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b- Vitesse de  $B_2$  : obtenue avec utilisation de la relation (30)

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{V}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\dot{\varphi} - \omega) R \sin(\theta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$



$$\vec{v}_{B_2} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{B_2} \\ \dot{y}_{B_2} \\ \dot{z}_{B_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -(\dot{\psi} - \omega) R \sin(\theta - \gamma) \sin \delta \\ (\dot{\psi} - \omega) R \sin(\theta - \gamma) \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

c. Accélération de  $B_2$  :

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{T}_{B_2} = \begin{pmatrix} R\dot{\psi} \sin(\theta - \gamma) + R\omega(\dot{\psi} - \omega) \cos(\theta - \gamma) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{T}_{B_2} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{B_2} \\ \dot{y}_{B_2} \\ \dot{z}_{B_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -\sin \delta (R\dot{\psi} \sin(\theta - \gamma) + R\omega(\dot{\psi} - \omega) \cos(\theta - \gamma)) \\ \cos \delta (R\dot{\psi} \sin(\theta - \gamma) + R\omega(\dot{\psi} - \omega) \cos(\theta - \gamma)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2.3) o Point  $G_2$  : centre de gravité de la bielle à fourche

$$\vec{OG}_2 = \vec{OA} + \vec{AG}_2 = R\vec{y}_4 - (L - LG_2)\vec{y}_3$$

a - position de  $G_2$  :

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{OG}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} \cdot LG_2 \cdot \sin(\theta - \gamma) \\ R \cos(\theta - \gamma) - (L - LG_2) \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{OG}_2 = \begin{pmatrix} x_{G_2} \\ y_{G_2} \\ z_{G_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -LG_2 \sin \psi \cos \delta - \sin \delta (R \cos(\theta - \gamma) - (L - LG_2) \cos \psi) \\ -LG_2 \sin \psi \sin \delta + \cos \delta (R \cos(\theta - \gamma) - (L - LG_2) \cos \psi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b - vitesse de  $G_2$  :

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  ;  $\vec{v}_{G_2} = \begin{pmatrix} -LG_2 \cdot \dot{\psi} \cdot \cos \psi \\ -R\omega \sin(\theta - \gamma) + (L - LG_2) \dot{\psi} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{v}_{G_2} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{G_2} \\ \dot{y}_{G_2} \\ \dot{z}_{G_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} -LG_2 \dot{\psi} \cos \psi \cos \delta - (-R\omega \sin(\theta - \gamma) + (L - LG_2) \dot{\psi} \sin \psi) \sin \delta \\ -LG_2 \dot{\psi} \cos \psi \sin \delta + (-R\omega \sin(\theta - \gamma) + (L - LG_2) \dot{\psi} \sin \psi) \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

c- Accélération de  $G_2$  :

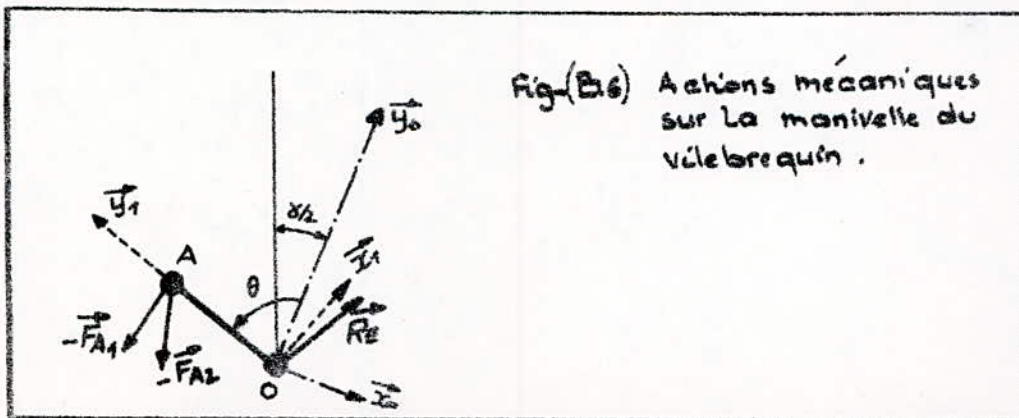
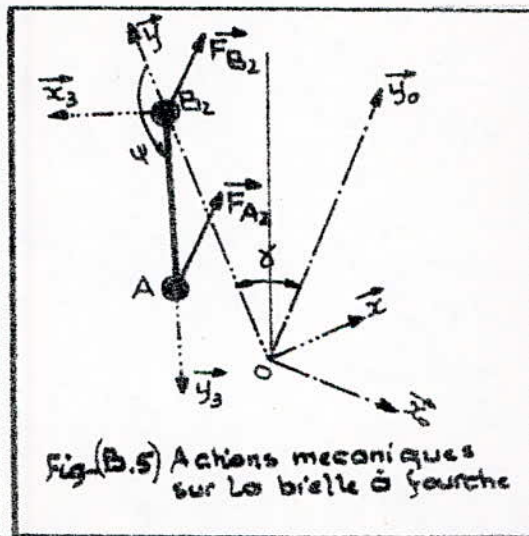
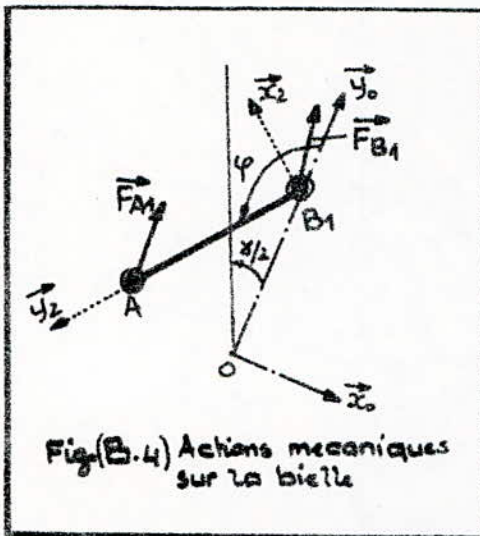
- Dans le repère :  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{T}_{G_2} = \begin{pmatrix} LG_2 \cdot \omega^2 \cdot \sin\psi \\ -R\omega^2 \cos(\theta - \delta) + (L - LG_2)(\ddot{\psi} \sin\psi + \dot{\psi}^2 \cos\psi) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

- Dans le repère :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{T}_{G_2} = \begin{pmatrix} \vec{x}_{G_2} \\ \vec{y}_{G_2} \\ \vec{z}_{G_2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} LG_2 \omega^2 \sin\psi \cos\delta + \sin\delta (R\omega^2 \cos(\theta - \delta) - (L - LG_2)(\ddot{\psi} \sin\psi + \dot{\psi}^2 \cos\psi)) \\ LG_2 \omega^2 \sin\psi \sin\delta + \cos\delta (-R\omega^2 \cos(\theta - \delta) + (L - LG_2)(\ddot{\psi} \sin\psi + \dot{\psi}^2 \cos\psi)) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

## B.2 ) ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME BIELLE - BIELLE A FOURCHE - MANIVELLE



Remarques:

1. L'étude dynamique des pistons (1) et (2) étant tout à fait la même que celle faite dans le système (Bielle-Bielllette), on va donc faire uniquement l'analyse dynamique des actions mécaniques sur la bielle, la bielle à fourche et la manivelle.
2. Dans toute cette étude dynamique:
  - On néglige les efforts de pesanteur devant ceux des gaz
  - Les contacts entre les éléments sont ponctuels et se font sans frottement.

## 1. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE (fig. B.7)

1-1) Analyse des actions mécaniques sur la bielle: (Fig. B.4)

La bielle étant isolée, on mettra en évidence les actions  $\vec{F}_A$  (au niveau du maneton),  $\vec{F}_{B_1}$  (au niveau de l'axe du piston (1)) et  $\vec{F}_2$  (au niveau de la fourche).

a. Action du piston (1) sur la bielle: en  $B_1$

• Baseur au point  $B_1$ :  $\mathcal{C}_{B_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{B_1} \\ \vec{M}_{B_1} \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe:  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$   $\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_{B_1} \\ Y_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{M}_{B_1} = \vec{0}$

- Dans le repère lié à la bielle:  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_{B_1} \cos\varphi + Y_{B_1} \sin\varphi \\ -X_{B_1} \sin\varphi + Y_{B_1} \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}; \vec{M}_{B_1} = \vec{0}$$

b. Action du maneton sur la bielle: en A

• Baseur au point A:  $\mathcal{C}_{A_1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{A_1} \\ \vec{M}_{A_1} \end{array} \right\}$

- Dans le repère fixe:  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$   $\vec{F}_{A_1} = \begin{pmatrix} X_{A_1} \\ Y_{A_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{M}_{A_1} = \vec{0}$

- Dans le repère lié à la bielle:  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$

$$\vec{F}_{A_1} = \begin{pmatrix} X_{A_1} \cos\varphi + Y_{A_1} \sin\varphi \\ -X_{A_1} \sin\varphi + Y_{A_1} \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{pmatrix}; \vec{M}_{A_1} = \vec{0}$$

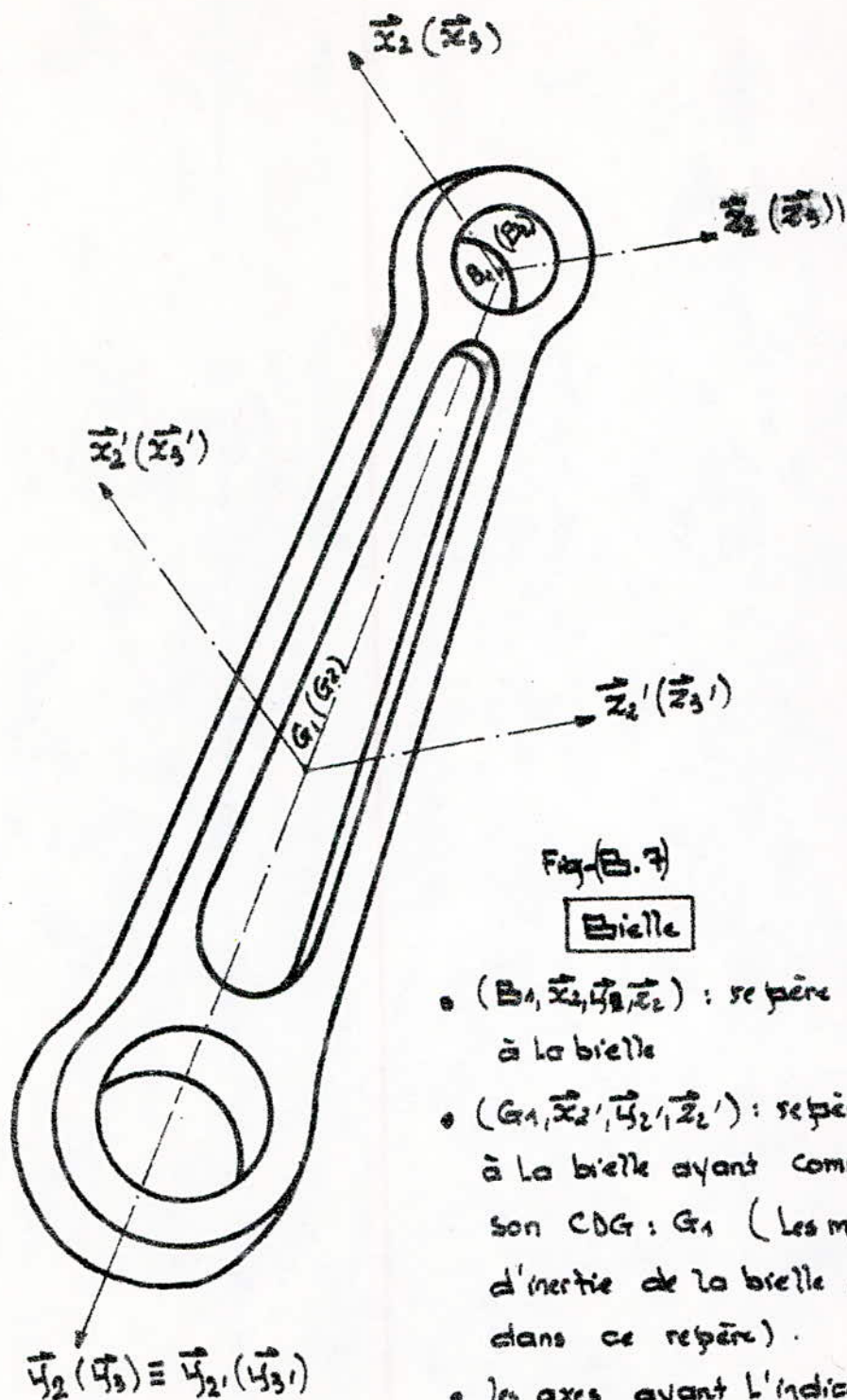


Fig. (B. 7)

## Bielle

- $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  : repère mobile lié à la bielle
- $(G_1, \vec{x}_2', \vec{y}_2', \vec{z}_2')$  : repère mobile lié à la bielle ayant comme origine son CDG :  $G_1$  (Les moments d'inertie de la bielle sont définis dans ce repère).
- les axes ayant l'indice 3 sont liés à la bielle à fourche ou accolé à la 1<sup>re</sup> bielle.

4-2) Equations vectorielles fondamentales de La bielle :

$$\begin{cases} MB \cdot \vec{T}(G_1, \text{bielle}/O) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}/\text{bielle} & (a_1) \\ \vec{\delta}(\text{bielle}/G_1) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}})/G_1 & (b_1) \end{cases}$$

$MB$  : masse de La bielle

$\vec{T}_{G_1}$  : vecteur accélération du centre de gravité de La bielle :  $G_1$

$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_1)$  : vecteur moment dynamique de La bielle /  $G_1$

a- Calcul du moment dynamique :

• Vecteur rotation instantané de La bielle /  $(B_1, x_2, y_2, z_2)$

$$\vec{\Omega}(\text{bielle}/2) = \dot{\varphi} \vec{z}_2$$

• La bielle ayant deux plans de symétrie, donc tous les produits d'inertie sont nuls et le tenseur d'inertie sera :

$$\overline{\overline{\overline{I}(\text{bielle}/G_1)}}_{(G_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix}$$

• Moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(\text{bielle}/G_1) = \begin{vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\dot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

• Moment dynamique :

$$\vec{\delta}(\text{bielle}/G_1) = \frac{d^0}{dt} (\vec{\sigma}(\text{bielle}/G_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\ddot{\varphi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

b- Calcul des moments :

Les moments des actions extérieures exercées sur La bielle seront ramenés au centre de gravité  $G_1$ .

b.1) Moment de  $\vec{F}_{B_1}$  :  $[A \cdot 2 - 1 - 1 \cdot B - b \cdot 2]$

$$\vec{M}(\vec{F}_{B_1})/G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G_1} (X_{B_1} \cdot \cos \varphi + Y_{B_1} \cdot \sin \varphi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix}$$

b-2) Moment de  $\vec{F}_{A_1}$ :

$$\vec{M}(\vec{F}_{A_1}) / G_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-LG_1)(X_{A_1} \cos\varphi + Y_{A_1} \sin\varphi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

1-3) Equations scalaires de La bielle:

• Projection de l'équation (a<sub>1</sub>) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

sur  $\vec{x}_0$ :  $M_B \cdot \ddot{x}_{G_1} = X_{B_1} + X_{A_1}$

sur  $\vec{y}_0$ :  $M_B \cdot \ddot{y}_{G_1} = Y_{B_1} + Y_{A_1}$

sur  $\vec{z}_0$ :  $0 = 0$

Avec:  $\ddot{x}_{G_1} = (LG_1/L)R\omega^2 \sin\theta$

$$\ddot{y}_{G_1} = R[\omega \cos\theta((1-LG_1/L)\dot{\varphi} - \omega) + \sin\theta(1-LG_1/L)\ddot{\varphi}]$$

• Projection de l'équation (b<sub>1</sub>) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

sur  $\vec{x}_0$ :  $0 = 0$

sur  $\vec{y}_0$ :  $0 = 0$

sur  $\vec{z}_0$ :  $C\ddot{\varphi} = LG_1 [X_{B_1} \cos\varphi + Y_{B_1} \sin\varphi] - (L-LG_1) [X_{A_1} \cos\varphi + Y_{A_1} \sin\varphi]$

Avec:  $C = IG_{1z}$  et  $\ddot{\varphi}$  donnée par la relation (34)

## 2. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE A FOURCHE

2-1) Analyse des actions mécaniques sur la bielle à fourche: (Fig.B.5)

On opère de la même façon que pour la bielle; nous obtenons:

a- Action du piston sur la bielle: en B<sub>2</sub>

- Dans le repère:  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \\ Y_{B_2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}; \quad \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère:  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \cos\delta - Y_{B_2} \sin\delta \\ X_{B_2} \sin\delta + Y_{B_2} \cos\delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}; \quad \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

- Dans le repère :  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié à la bielle à fourche

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi \\ -X_{B_2} \sin \psi + Y_{B_2} \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} ; \vec{M}_{B_2} = \vec{0}$$

b- Action du maneton sur la bielle à fourche : en A. Forceur en A :  $\mathcal{C}_A \begin{pmatrix} \vec{F}_{A_2} \\ \vec{M}_A \end{pmatrix}$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{F}_{A_2} = \begin{pmatrix} X_{A_2} \\ Y_{A_2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{pmatrix} ; \vec{M}_A = \vec{0}$$

- Dans le repère :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_{A_2} = \begin{pmatrix} X_{A_2} \cos \delta - Y_{A_2} \sin \delta \\ X_{A_2} \sin \delta + Y_{A_2} \cos \delta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_A = \vec{0}$$

- Dans le repère :  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié à la bielle à fourche

$$\vec{F}_{A_2} = \begin{pmatrix} X_{A_2} \cos \psi + Y_{A_2} \sin \psi \\ -X_{A_2} \sin \psi + Y_{A_2} \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{pmatrix} ; \vec{M}_A = \vec{0}$$

2-2) Equations vectorielles fondamentales de la bielle à fourche :

$$\left\{ \begin{aligned} MB_f \cdot \vec{T}(G_2, \text{bielle à f}) &= \sum \vec{F}_{ext} / \text{bielle à f.} & (a_1) \\ \vec{\delta}(\text{bielle à f.} / G_2) &= \sum \vec{J}_i (\vec{F}_{ext}) / \text{bielle à f.} & (b_2) \end{aligned} \right.$$

$MB_f$  : masse de la bielle à fourche

$\vec{T}_{G_2}$  : vecteur accélération du CG de la bielle à fourche.

$\vec{\delta}(\text{bielle à f.} / G_2)$  : vecteur moment dynamique de la bielle à fourche /  $G_2$ .

a- Calcul du moment dynamique :

• Vecteur moment cinétique :  $\vec{J}(\text{bielle à f.} / G_2) = \overline{\overline{I(\text{bielle à f.} / G_2)}} \cdot \vec{\omega}(\text{bàf}/0)$

•  $\vec{\omega}(\text{bielle à fourche} / 0) = \psi \vec{z}_3$

• le tenseur d'inertie :

$$\overline{\overline{I(\text{bielle à f.} / G_2)}}_{(G_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G_2x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_2z} \end{pmatrix}$$

Le moment cinétique devient donc :

$$\vec{L}(\text{bielle à f.}/G_2) = \begin{vmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

• Vecteur moment dynamique :

$$\vec{\delta}(\text{bielle à f.}/G_2) = \frac{d}{dt}(C_2 \dot{\psi} \vec{z}_0) = C_2 \ddot{\psi} \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_2 \ddot{\psi} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b. Calcul des moments des forces extérieures :

Ces moments seront ramenés au centre de gravité  $G_2$  de la bielle à f.

b.1) Moment de  $\vec{F}_{B_2}$  :

$$\vec{M}(\vec{F}_{B_2})/G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G_2}(X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L_{G_2}(X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.2) Moment de  $\vec{F}_{A_2}$  :

$$\vec{M}(\vec{F}_{A_2})/G_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-L_{G_2})(X_{A_2} \cos(\psi+\delta) + Y_{A_2} \sin(\psi+\delta)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-L_{G_2})(X_{A_2} \cos(\psi+\delta) + Y_{A_2} \sin(\psi+\delta)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

2-3) Equations scalaires de la bielle à fourche :

• Projection de l'équation (a<sub>2</sub>) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : M B_f \cdot \ddot{x}_{G_2} = (X_{B_2} + X_{A_2}) \cos \delta - (Y_{B_2} + Y_{A_2}) \sin \delta$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : M B_f \cdot \ddot{y}_{G_2} = (X_{B_2} + X_{A_2}) \sin \delta + (Y_{B_2} + Y_{A_2}) \cos \delta$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

$$\text{Avec ; } \ddot{x}_{G_2} = L_{G_2} \omega^2 \sin \psi \cos \delta + \sin \delta (R \omega^2 \cos(\theta - \delta) - (L - L_{G_2})(\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi))$$

$$\ddot{y}_{G_2} = L_{G_2} \omega^2 \sin \psi \sin \delta + \cos \delta (-R \omega^2 \cos(\theta - \delta) + (L - L_{G_2})(\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi))$$

• Projection de l'équation (b<sub>2</sub>) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : C_2 \ddot{\psi} = L_{G_2}(X_{B_2} \cos \psi + Y_{B_2} \sin \psi) - (L - L_{G_2})(X_{A_2} \cos(\psi + \delta) + Y_{A_2} \sin(\psi + \delta))$$

$$\text{Avec ; } C_2 = I_{G_2 z}$$



### 3. ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE

3-1) Analyse des actions mécaniques sur la manivelle : (Fig.B6)

La manivelle étant isolée. Les actions mécaniques extérieures à mettre en évidence sont :

- $\vec{F}_{A_1}$  : Action de la bielle sur le maneton
- $\vec{F}_{A_2}$  : Action de la bielle à fourche sur le maneton
- $\vec{R}_E$  : Réaction des paliers sur les tourillons

$\vec{F}_{A_1}$  et  $\vec{F}_{A_2}$  ont été déjà définies dans l'étude dynamique de la bielle et de la bielle à fourche.

o Réaction des paliers sur les tourillons: en O

o - Torseur au point O :  $\tau_O = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_E \\ \vec{M}_E \end{matrix} \right\}$

- Dans le repère fixe :  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$R_E = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} ; \vec{M}_E = \vec{0}$$

3-2) Equations vectorielles fondamentales de la manivelle :

$$\begin{cases} Mm \cdot \vec{T}^n(G_m, \text{manivelle}/o) = \sum \vec{F}_{ext} / \text{manivelle} & (a) \\ \vec{\delta}(\text{manivelle} / G_m) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{ext}) / G_m & (b) \end{cases}$$

Mm : masse de la manivelle

$\vec{T}^n_{G_m}$  : vecteur accélération du CG de la manivelle /  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$\vec{T}^n_{G_m} = \vec{T}^n_{G_m}{}^n + \vec{T}^e_{G_m}{}^n$  ;  $\vec{T}^e_{G_m}{}^n = \frac{d}{dt}(\omega r) = 0$  car  $\omega = \text{cte}$

$\vec{T}^n_{G_m}{}^n = -\omega r \vec{y}_1$  : accélération centripète

$\vec{y}_1 = -\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0 \Rightarrow \vec{T}^n_{G_m}{}^n = \omega r \sin\theta \cdot \vec{x}_0 - \omega r \cos\theta \cdot \vec{y}_0$

a- calcul du moment dynamique :

$\vec{\delta}(\text{manivelle} / G_m) = \vec{0}$  car  $\omega = \text{cte}$

b- Calcul des moments /  $G_m$  :

b.1) Moment de  $(-\vec{F}_{A_1})$  :

$$\vec{M}(-\vec{F}_{A1})/Gm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)(X_{A1}\cos\theta + Y_{A1}\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.2) Moment de  $(-\vec{F}_{A2})$ :

$$\vec{M}(-\vec{F}_{A2})/Gm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (R-r)(X_{A2}\cos(\theta-\gamma) + Y_{A2}\sin(\theta-\gamma)) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

b.3) Moment de  $\vec{R}_E$ :

$$\vec{M}(\vec{R}_E)/Gm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(X_E\cos\theta + Y_E\sin\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}$$

3.3) Equations scalaires de la manivelle:

• Projection de l'équation (a<sub>3</sub>) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : Mm.\omega r \sin\theta = -X_{A1} + X_E - X_{A2}\cos(\theta-\gamma) - Y_{A2}\sin(\theta-\gamma)$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : -Mm.\omega r \cos\theta = -Y_{A1} + Y_E + X_{A2}\sin(\theta-\gamma) - Y_{A2}\cos(\theta-\gamma)$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = 0$$

• Projection de l'équation (b<sub>3</sub>) sur  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\text{sur } \vec{x}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 = 0$$

$$\text{sur } \vec{z}_0 : 0 = (R-r)(X_{A1}\cos\theta + Y_{A1}\sin\theta + X_{A2}\cos(\theta-\gamma) + Y_{A2}\sin(\theta-\gamma)) + r(X_E\cos\theta + Y_E\sin\theta) + C_m$$

Avec;  $C_m$ : couple moteur s'exerçant sur la manivelle.

C.1 ) ETUDE CINEMATIQUE DU SYSTEME : BIELLE-MANIVELLE

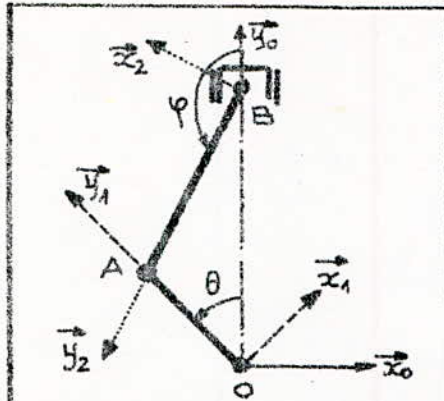


Figure C.1 :  
Représentation schématique  
du système bielle-manivelle  
(définition des repères)

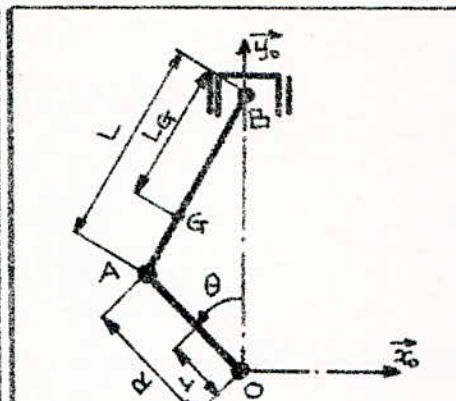


Figure C.2 :  
Définition des points et  
des angles de rotation.

1- Relations cinématiques :

Ces relations sont exactement les mêmes que celles trouvées au niveau de l'ensemble ( piston(1) - Bielle principale - manivelle ) du système (Bielle - Bielle à fourche) .

Resultat :

• angle  $\varphi$  :  $\sin \varphi = (R/L) \sin \theta$  ;  $\cos \varphi = -\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$

• vitesse angulaire :  $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{R \omega \cos \theta}{L \cos \varphi}$$

• accélération angulaire :  $\ddot{\varphi}$

$$\ddot{\varphi} = (\dot{\varphi}^2 - \omega^2) \tan \varphi$$

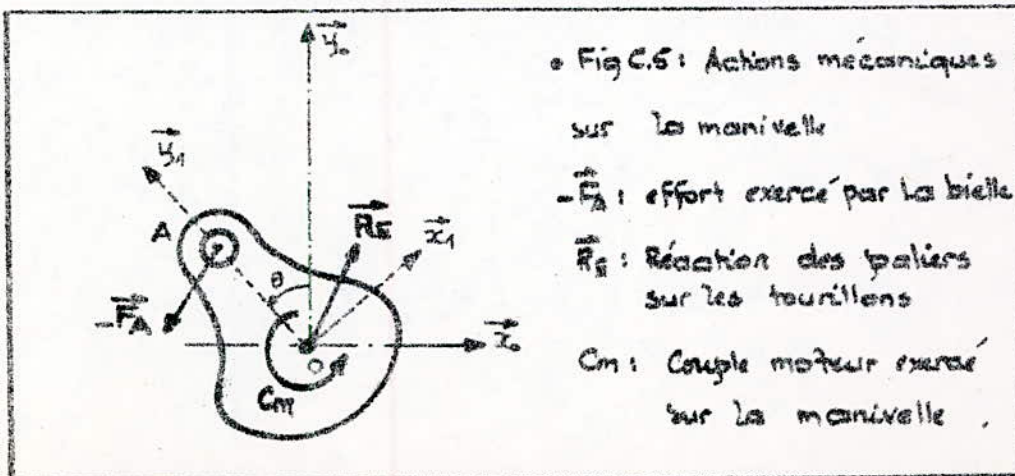
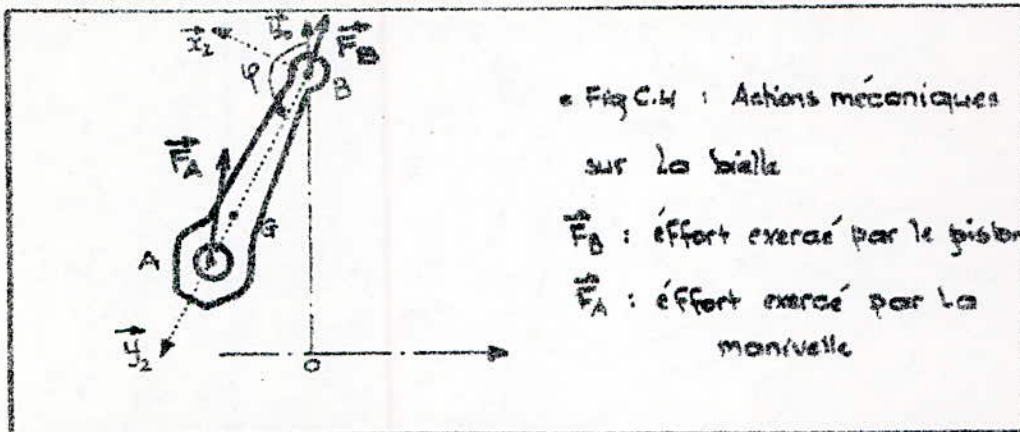
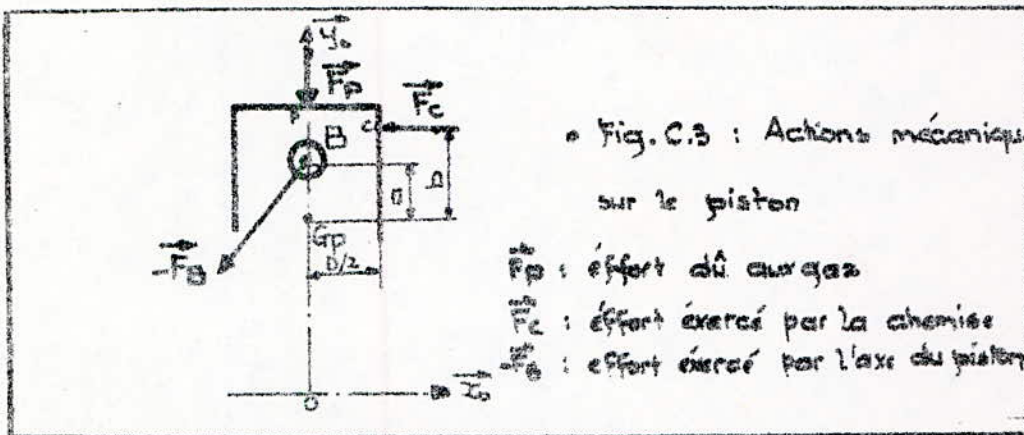
2- Cinématiques des points B, G et A (fig C.2)

• cinématique du point B = idem à celle du point B<sub>1</sub> du système (Bielle - Bielle) et (Bielle - Bielle en fourche) avec L<sub>1</sub> = L et L<sub>G1</sub> = L<sub>G</sub>

• Cinématique de G = idem à celle du point G<sub>1</sub> du système (Bielle - Bielle à fourche) avec L<sub>G1</sub> = L<sub>G</sub>

a Cinématique de A a l'elem à celle du point A des système d'embrayage en -V- .

## C-2) ETUDE DYNAMIQUE DU SYSTEME : BIELLE-MANIVELLE



L'étude dynamique du système (Bielle-Manivelle) d'un monocylindre est équivalente à celle faite pour le système (Bielle principale-Manivelle) de l'embellage (Bielle-Bielle à fourche) du moteur en -V-

Résultats:

#### 4. ETUDE DYNAMIQUE DU PISTON (Fig. C.3)

4-1) Equations vectorielles fondamentales du piston :

$$\begin{cases} \text{M.P. } \vec{T}(G_p, \text{piston}/o) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}/\text{piston} & (a_{91}) \\ \vec{\delta}(\text{piston}/G_p) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}})/G_p & (b_{91}) \end{cases} ; \vec{T}_{G_p} = \vec{T}_B$$

4-2) Equations scalaires du piston :

• projection de l'équation (a<sub>91</sub>) sur (0,  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ )

sur  $\vec{x}_0$  : M.P.  $\ddot{x}_B = X_c - X_B$  ;  $\ddot{x}_B = 0$  car B se déplace uniquement sur  $\vec{y}_0$

sur  $\vec{y}_0$  : M.P.  $\ddot{y}_B = -Y_B(\theta) - Y_B$  ;  $\ddot{y}_B = R\ddot{\varphi}\sin\theta + R\omega(\dot{\varphi} - \omega)\cos\theta$

sur  $\vec{z}_0$  :  $0 = 0$

• projection de l'équation (b<sub>91</sub>) sur (0,  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ )

sur  $\vec{x}_0$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{y}_0$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{z}_0$  :  $0 = a X_B - b X_c$

#### 2. ETUDE DYNAMIQUE DE LA BIELLE (Fig. C.4)

2-1) Equations vectorielles fondamentales de la bielle :

$$\begin{cases} \text{M.B. } \vec{T}(G, \text{bielle}/o) = \sum \vec{F}_{\text{ext}}/\text{bielle} & (a_{32}) \\ \vec{\delta}(\text{bielle}/G) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{\text{ext}})/G & (b_{32}) \end{cases}$$

2-2) Equations scalaires de la bielle :

• Projection de l'équation (a<sub>32</sub>) sur (0,  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ )

sur  $\vec{x}_0$  : M.B.  $\ddot{x}_G = X_A + X_B$  ;  $\ddot{x}_G = (L_G/L) R\omega^2 \sin\theta$

sur  $\vec{y}_0$  : M.B.  $\ddot{y}_G = Y_A + Y_B$  ;  $\ddot{y}_G = R[\omega \cos\theta(1 - L_G/L)\dot{\varphi} - \omega] + \sin\theta(1 - L_G/L)\ddot{\varphi}$

sur  $\vec{z}_0$  :  $0 = 0$

### 3- ETUDE DYNAMIQUE DE LA MANIVELLE (Fig. C.5)

3.1) Equations vectorielles fondamentales de la manivelle :

$$\begin{cases} Mm \cdot \vec{T}(G_m, \text{manivelle} / o) = \sum \vec{F}_{ext} / \text{manivelle} & (a_{33}) \\ \vec{\delta}(\text{manivelle} / G_m) = \sum \vec{M}(\vec{F}_{ext}) / G_m & (b_{33}) \end{cases}$$

3.2) Equations scalaires de la manivelle :

• Projection de de l'équation (a<sub>33</sub>) sur  $(o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$

sur  $\vec{x}_o$  :  $Mm \omega^2 r \sin \theta = -X_A + X_E$

sur  $\vec{y}_o$  :  $-Mm \omega^2 r \cos \theta = -Y_A + Y_E$

sur  $\vec{z}_o$  :  $0 = 0$

• Projection de l'équation (b<sub>33</sub>) sur  $(o, \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$

sur  $\vec{x}_o$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{y}_o$  :  $0 = 0$

sur  $\vec{z}_o$  :  $0 = (R+r)(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) + r(X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta) + C_m$

Avec;  $C_m$  : couple moteur s'exerçant sur la manivelle .

## D. EQUATIONS DE MOUVEMENT DES MOTEURS EN LIGNE ET EN V

## 1. EQUATIONS DU MOTEUR EN V, Système = Bielle-Bielle (II)

o Piston (1) :

$$X_{C1} - X_{B1} = 0 \quad (1)$$

$$-Y_{B1} = MP \cdot \ddot{y}_{E1} + Y_{P1}(\theta) \quad (2)$$

$$a_1 X_{B1} - b_1 X_{C1} = 0 \quad (3)$$

o Piston (2) :

$$-X_{B2} \cos \delta + Y_{B2} \sin \delta + X_{C2} \cos \delta = MP \cdot \ddot{x}_{B2} - Y_{P2}(\theta) \sin \delta \quad (4)$$

$$-X_{B2} \sin \delta - Y_{B2} \cos \delta + X_{C2} \sin \delta = MP \cdot \ddot{y}_{B2} + Y_{P2}(\theta) \cos \delta \quad (5)$$

$$a_2 X_{B2} - b_2 X_{C2} = 0 \quad (6)$$

o Bielle principale (à ceu) :

$$X_{B1} + X_A + X_C = MB \cdot \ddot{x}_{G1} \quad (7)$$

$$Y_{B1} + Y_A + Y_C = MB \cdot \ddot{y}_{G1} \quad (8)$$

$$I_{G1z} \ddot{\varphi} = A \cdot X_{B1} + B \cdot Y_{B1} + C \cdot X_A + D \cdot Y_A + (C + r_{B1} \cos(\varphi + \beta)) \cdot X_C + (D + r_{B1} \sin(\varphi + \beta)) \cdot Y_C \quad (9)$$

$$a_1; A = x_{2G1} \sin \varphi + y_{2G1} \cos \varphi \quad ; \quad B = -x_{2G1} \cos \varphi + y_{2G1} \sin \varphi$$

$$C = +x_{2G1} \sin \varphi - (L_1 - y_{2G1}) \cos \varphi \quad ; \quad D = -x_{2G1} \cos \varphi - (L_1 - y_{2G1}) \sin \varphi$$

o Biellette :

$$X_{B2} \cos \delta - Y_{B2} \sin \delta - X_C = MB_t \cdot \ddot{x}_{G2} \quad (10)$$

$$X_{B2} \sin \delta + Y_{B2} \cos \delta - Y_C = MB_t \cdot \ddot{y}_{G2} \quad (11)$$

$$L_{G2} (X_{B2} \cos \psi + Y_{B2} \sin \psi) + (L_2 - L_{G2}) (X_C \cos(\psi + \delta) + Y_C \sin(\psi + \delta)) = I_{G2z} \cdot \ddot{\psi} \quad (12)$$

o Manivelle :

$$-X_A + X_E = Mm \omega^2 r \sin \theta \quad (13)$$

$$-Y_A + Y_E = -Mm \omega^2 r \cos \theta \quad (14)$$

$$(R-r) (X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) + r (X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta) + C_m = 0 \quad (15)$$

2. EQUATIONS DU MOTEUR EN V, Système : Bielle-Bielle à fourche (II)

• Piston (1) :

$$X_{C1} - X_{B1} = 0 \quad (1)$$

$$-Y_{B1} = M_P \ddot{y}_{B1} + Y_{P1}(\theta) \quad (2)$$

$$a_1 X_{B1} - b_1 X_{C1} = 0 \quad (3)$$

• Piston (2) :

$$-X_{B2} \cos \delta + Y_{B2} \sin \delta + X_{C2} \cos \delta = M_P \ddot{x}_{B2} - Y_{P2}(\theta) \sin \delta \quad (4)$$

$$-X_{B2} \sin \delta - Y_{B2} \cos \delta + X_{C2} \sin \delta = M_P \ddot{y}_{B2} + Y_{P2}(\theta) \cos \delta \quad (5)$$

$$a_2 X_{B2} - b_2 X_{C2} = 0 \quad (6)$$

• Bielle :

$$X_{B1} + X_{A1} = M_B \ddot{x}_{G1} \quad (7)$$

$$Y_{B1} + Y_{A1} = M_B \ddot{y}_{G1} \quad (8)$$

$$L_{G1} (X_{B1} \cos \varphi + Y_{B1} \sin \varphi) - (L - L_{G1}) (X_{A1} \cos \varphi + Y_{A1} \sin \varphi) = I_{G1z} \ddot{\varphi} \quad (9)$$

• Bielle à fourche :

$$(X_{B2} + X_{A2}) \cos \delta - (Y_{B2} + Y_{A2}) \sin \delta = M_B \ddot{x}_{G2} \quad (10)$$

$$(X_{B2} + X_{A2}) \sin \delta + (Y_{B2} + Y_{A2}) \cos \delta = M_B \ddot{y}_{G2} \quad (11)$$

$$L_{G2} (X_{B2} \cos \psi + Y_{B2} \sin \psi) - (L - L_{G2}) (X_{A2} \cos(\psi + \delta) + Y_{A2} \sin(\psi + \delta)) = I_{G2z} \ddot{\psi} \quad (12)$$

• Manivelle :

$$-X_{A1} - X_{A2} \cos(\theta - \delta) - Y_{A2} \sin(\theta - \delta) + X_E = M_m \omega^2 r \sin \theta \quad (13)$$

$$-Y_{A1} + X_{A2} \sin(\theta - \delta) - Y_{A2} \cos(\theta - \delta) + Y_E = -M_m \omega^2 r \cos \theta \quad (14)$$

$$(R - r) (X_{A1} \cos \theta + Y_{A1} \sin \theta + X_{A2} \cos(\theta - \delta) + Y_{A2} \sin(\theta - \delta)) + r (X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta) + C_m = 0 \quad (15)$$



### 3. EQUATIONS DU MOTEUR EN LIGNE / Système : Bielle-manivelle (III)

• Piston :

$$X_C - X_B = 0 \quad (1)$$

$$-Y_B = M_P \cdot \ddot{y}_B + Y_P(\theta) \quad (2)$$

$$a X_B - b X_C = 0 \quad (3)$$

• Bielle :

$$X_A + X_B = M_B \cdot \ddot{x}_G \quad (4)$$

$$Y_A + Y_B = M_B \cdot \ddot{y}_G \quad (5)$$

$$L_G (X_B \cos \varphi + Y_B \sin \varphi) - (L - L_G) (X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi) \quad (6)$$

• Manivelle :

$$-X_A + X_E = M_m \cdot \omega^2 r \sin \theta \quad (7)$$

$$-Y_A + Y_E = -M_m \cdot \omega^2 r \cos \theta \quad (8)$$

$$(R-r) (X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) + r (X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta) + C_m = 0 \quad (9)$$

### 4. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS (I), (II) et (III)

Système (I) : 15 équations à 17 inconnues	} systèmes indéterminés
Système (II) : 15 équation à 17 inconnues	
Système (III) : 9 équations à 11 inconnues	

D'autre part :

Les équations (1) et (3) des système (I) et (II) deviennent compatibles si l'on pose  $a_1 = b_1$  (respectivement  $a = b$  pour le système (III)) ce qui conduit à dire que l'effort au niveau de la chemise est appliqué en un point défini sur la génératrice verticale du cylindre et aligné avec le centre de pied de la bielle  $B_1$  (B pour moteur monocylindre) suivant un axe parallèle à  $\vec{x}_0$ .

Même remarque pour le 2<sup>ème</sup> rangé de cylindres des moteurs V système

d'équation (I) et (II) : équation (6)  $\Rightarrow a_2 = b_2$ .

On a donc lever l'indétermination, les 3<sup>em</sup> système deviennent :

système (I), (II) : 14 équations à 13 inconnues

système : (III) : 8 équations à 8 inconnues

a- Résolution du système d'équation (I) : (Bielle - Bielle)

$$Y_{B1} = -MP \cdot \ddot{\varphi}_{B1} - Y_A(\theta)$$

$$Y_{B2} = (MP/\sin\delta) \ddot{X}_{B2} - Y_{P2}(\theta)$$

$$X_C = \frac{(L_2 - L_{G2}) \sin(\psi + \delta) (NN1 - Y_{B2}) + I_{G2} \ddot{\varphi} \cos\delta - L_{G2} \cos\psi \cdot NN2}{-L_{G2} - (L_2 - L_{G2}) \cos(\psi + 2\delta)}$$

$$\text{Avec; } \left. \begin{aligned} NN1 &= MB_1 (-\ddot{X}_{G2} \sin\delta + \ddot{\varphi}_{G2} \cos\delta) \\ NN2 &= MB_1 \cdot \ddot{X}_{G2} + Y_{B2} \sin\delta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \ddot{X}_{G2} \text{ et } \ddot{\varphi}_{G2} \text{ sont} \\ \text{donnés par les} \\ \text{relations (27'')} \end{array}$$

$$X_{B2} = [MB_1 \cdot \ddot{X}_{G2} + Y_{B2} \cdot \sin\delta + X_C] / \cos\delta$$

$$Y_C = -MB_1 \cdot \ddot{\varphi}_{G2} + X_{B2} \cdot \sin\delta + Y_{B2} \cdot \cos\delta$$

$$X_{C2} = X_{B2}$$

$$Y_A = \frac{I_{G1} \ddot{\varphi} - A(MB_1 \ddot{X}_{G1} - X_C) - B \cdot Y_{B1} - D \cdot Y_A - (C - r_{B1} \cos(\psi + \theta)) X_C - (D - r_{B1} \sin(\psi + \theta)) Y_C}{C - A}$$

Avec;

$$A = X_{2G1} \sin\psi + Y_{2G1} \cos\psi$$

$$B = -X_{2G1} \cos\psi + Y_{2G1} \sin\psi$$

$$C = X_{2G1} \sin\psi - (L_1 - Y_{2G1}) \cos\psi$$

$$D = -X_{2G1} \cos\psi - (L_1 - Y_{2G1}) \sin\psi$$

$$X_{B1} = MB_1 \cdot \ddot{X}_{G1} - X_A - X_C$$

$$X_{C1} = X_{B1}$$

$$X_E = Mm \omega^2 r \sin\theta + X_A$$

$$Y_E = -Mm \omega^2 r \cos\theta + Y_A$$

$$C_m = -(R - r) (X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta) - r (X_E \cos\theta + Y_E \sin\theta)$$

b. Résolution du système d'équation (II) : (Bielle - Bielle à fourche)

$$Y_{B1} = -MP \cdot \ddot{y}_{B1} - Y_P(\theta)$$

$$Y_{A1} = MB \cdot \ddot{y}_{G1} - Y_{B1}$$

$$X_{A1} = \frac{1}{L \cos \psi} \left( -I_{G1} \ddot{\varphi} + LG_1 (MB \cdot \ddot{x}_{G1} \cos \psi + Y_{B1} \sin \psi) - (L - LG_1) X_{A1} \sin \psi \right)$$

$$X_{B1} = MB \cdot \ddot{x}_{G1} - X_{A1}$$

$$X_{C1} = X_{B1}$$

$$Y_{B2} = (MP / \sin \delta) \ddot{x}_{B2} - Y_P(\theta)$$

$$Y_{A2} = MB_f (\ddot{y}_{G2} \cos \delta - \ddot{x}_{G2} \sin \delta) - Y_{B2}$$

$$X_{A2} = \frac{-I_{G2} \ddot{\varphi} + LG_2 Y_{B2} \sin \psi - (L - LG_2) Y_{A2} \sin(\psi + \delta) + MB_f LG_2 \cos \psi (\ddot{x}_{G2} + \ddot{y}_{G2})}{LG_2 \cos \psi - (L - LG_2) \cos(\psi + \delta)}$$

$$X_{B2} = -X_{A2} + MB_f (\ddot{x}_{G2} + \ddot{y}_{G2})$$

$$X_{C2} = X_{B2}$$

$$X_E = M_m \omega^2 r \sin \theta + X_{A1} + X_{A2} \cos(\theta - \delta) + Y_{A2} \sin(\theta - \delta)$$

$$Y_E = -M_m \omega^2 r \cos \theta + Y_{A1} + X_{A2} \sin(\theta - \delta) + Y_{A2} \cos(\theta - \delta)$$

$$C_m = -(R - r) (X_{A1} \cos \theta + Y_{A1} \sin \theta + X_{A2} \cos(\theta - \delta) + Y_{A2} \sin(\theta - \delta)) - r (X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta)$$

c. Résolution du système d'équation (III) : moteur monocylindre

$$Y_B = -Y_P(\theta) - MP \ddot{y}_B$$

$$Y_A = MB \cdot \ddot{y}_G - Y_B$$

$$X_A = (1 / L \cos \psi) \left( -I_{G2} \ddot{\varphi} - (L - LG) Y_A \sin \psi + LG (MB \cdot \ddot{x}_G \cos \psi + Y_B \sin \psi) \right)$$

$$X_B = MB \cdot \ddot{x}_G - X_A$$

$$X_C = X_B$$

$$X_E = M_m \omega^2 r \sin \theta + X_A$$

$$Y_E = -M_m \omega^2 r \cos \theta + Y_A$$

$$C_m = -(R - r) (X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) - r (X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta)$$

Remarque: Les actions mécaniques des trois systèmes d'équations (I), (II) et (III) seront calculées et tracées sur ordinateur (VAX 11/750) en fonction de  $\theta$ .

#### d- Comparaison des résultats :

La résolution des 3 systèmes d'équations étant faite. On peut ainsi faire une vérification des solutions trouvées pour le moteur monocylindre à partir de celles trouvées pour les deux types de moteur en V.

##### d-1) A partir de L'embriellage : (Bielle - Bielle) :

On vérifie que si :

- L'angle d'ouverture <sup>du V</sup> est nul :  $\gamma = 0$

- La masse de la bielle :  $M_{Bt} = 0$  car  $I_{G_{2z}} = 0$

- La pression des gaz dans la 2<sup>ème</sup> rangée de cylindres est :

•  $P_2(\theta) = 0 \rightarrow$  cycle théorique

•  $P_2(\theta) = P_0$  : pression dans le carter  $\rightarrow$  cycle quasi-réel et réel,

autrement dit l'effort des gaz :  $\begin{cases} \gamma P_2(\theta) = S(P_2(\theta) - P_0) = 0 \rightarrow \text{cycle théorique} \\ \text{ou } \gamma P_2(\theta) = S P_2(\theta) = 0 \rightarrow \text{cycle quasi-réel et réel} \end{cases}$

- La masse du piston (2) :  $M_P = 0$

Alors ; Les solutions du système (I) (Bielle - Bielle) deviennent celles du système (III) (Moteur monocylindre) [Annexe : Appendice 3-1].

##### d-2) A partir de L'embriellage : (Bielle - Bielle à fourche) :

On vérifie aussi que si :

- L'angle du V :  $\gamma = 0$

- La masse de la bielle à fourche :  $M_{Bf} = 0 \Rightarrow I_{G_{2z}} = 0$

- L'effort des gaz dans la 2<sup>ème</sup> rangée de cylindres :  $\gamma P_2(\theta) = 0$

- La masse du piston (2) :  $M_P = 0$

Alors ; Les solutions du système (II) (Bielle - Bielle à fourche) auront les mêmes expressions que celles trouvées à partir du système (III) (moteur monocylindre). [Annexe : Appendice 3.2].

## 5- Calcul des efforts au niveau de chaque élément de l'embellage mobile : (Dans le repère cartésien)

### 5.1) Moteur en V avec embellage : Bielle - Bielle

#### a. Effort au niveau des chemises : $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ (Fig A-5)

• Piston (1) :  $\|\vec{F}_1\| = |X_{c1}|$  avec  $\vec{F}_1 \parallel \vec{x}_0$

• Piston (2) :  $\|\vec{F}_2\| = |X_{c2}|$  ; La direction de  $\vec{F}_2$  :

- est // à  $\vec{x}$  du repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au piston

- fait un angle  $\delta$  avec  $\vec{x}_0$  du repère fixe  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

#### b. Effort au niveau de l'axe du piston : $\vec{F}_{B1}$ et $\vec{F}_{B2}$ (Fig A-6 et A-7)

• Axe du piston (1) :  $\|\vec{F}_{B1}\| = (X_{B1}^2 + Y_{B1}^2)^{1/2}$

\*  $\vec{F}_{B1}$  fait un angle  $\delta_{B1} = \text{Arctg}(Y_{B1}/X_{B1})$  avec  $\vec{x}_0$  de  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

• Axe du piston (2) :  $\|\vec{F}_{B2}\| = (X_{B2}^2 + Y_{B2}^2)^{1/2}$

\* La direction de  $\vec{F}_{B2}$  :

- fait un angle  $\delta_{B2} = \text{Arctg}(Y_{B2}/X_{B2})$  avec  $\vec{x}$  de  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

- fait un angle  $\delta_{B2} = \text{Arctg} \frac{-X_{B2} \sin \delta - Y_{B2} \cos \delta}{-X_{B2} \cos \delta + Y_{B2} \sin \delta}$  avec  $\vec{x}_0$  de  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

#### c. Effort au niveau du maneton : $\vec{F}_A$ (Fig A-6 et A-8)

$\|\vec{F}_A\| = (X_A^2 + Y_A^2)^{1/2}$  ; La direction de  $\vec{F}_A$  :

- fait un angle  $\delta_A = \text{Arctg}(Y_A/X_A)$  avec  $\vec{x}_0$

- fait un angle  $\alpha_A = \text{Arctg} \left( \frac{-X_A \sin \varphi + Y_A \cos \varphi}{X_A \cos \varphi + Y_A \sin \varphi} \right)$  avec  $\vec{x}_2$  du repère

$(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié à la bielle.

#### d. Effort au niveau de l'articulation des têtes (Bielle - Bielle) : $\vec{F}_C$ (Fig A-6)

$\|\vec{F}_C\| = (X_C^2 + Y_C^2)^{1/2}$  ; La direction de  $\vec{F}_C$  :

- fait un angle  $\delta_C = \text{Arctg}(Y_C/X_C)$  avec  $\vec{x}_0$  du rep.  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

- fait un angle  $\alpha_C = \text{Arctg} \left( \frac{-X_C \sin \varphi + Y_C \cos \varphi}{X_C \cos \varphi + Y_C \sin \varphi} \right)$  avec l'axe  $\vec{x}_2$  du

repère  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié à la bielle.

e- Action ou effort au niveau des tourillons :  $\vec{R}_E$

$$\|\vec{R}_E\| = (X_E^2 + Y_E^2)^{1/2} ; \vec{R}_E \text{ est inclinée de } \gamma_E = \text{Arctg}(Y_E/X_E) \text{ avec}$$

L'axe  $\vec{x}_0$  du repère fixe  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

5-2) Moteur en V avec embiellage : Bielle - Bielle à fourche

Les efforts aux niveau des chemises, de l'axe du piston (1) et (2) et des tourillons sont exactement les mêmes que ceux trouvés précédemment au niveau du système (Bielle - Bielle) ; sauf que dans notre cas les solutions utilisées sont celles trouvées après résolution du système (II).

a- Effort au niveau du maneton :  $\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}$  (Fig B-4, B-5 et B-6)

• Dû à l'action de la bielle sur le maneton :  $\vec{F}_{A1}$  ;

$$\|\vec{F}_{A1}\| = (X_{A1}^2 + Y_{A1}^2)^{1/2} , \text{ elle fait un angle } \gamma_{A1} = \text{Arctg}(Y_{A1}/X_{A1}) \text{ avec l'axe } \vec{x}_0$$

• Dû à l'action de la bielle sur le maneton :  $\vec{F}_{A2}$  ;

$$\|\vec{F}_{A2}\| = (X_{A2}^2 + Y_{A2}^2)^{1/2} \text{ inclinée de } \gamma_{A2} = \text{Arctg}(Y_{A2}/X_{A2}) \text{ à l'axe } \vec{x}$$

du repère  $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  et de  $\alpha_{A2} = \text{Arctg}\left(\frac{X_{A2} \sin \delta + Y_{A2} \cos \delta}{X_{A2} \cos \delta - Y_{A2} \sin \delta}\right)$  à l'axe  $\vec{x}_0$ .

Donc ;

$$\|\vec{F}_A\| = (F_{A1}^2 + F_{A2}^2 + 2\|\vec{F}_{A1}\|\|\vec{F}_{A2}\|\cos(\vec{F}_{A1}, \vec{F}_{A2}))^{1/2}$$

5-3) Moteur en ligne

Utilisation des solutions du système d'équation (III).

a- Effort au niveau de la chemise :  $\vec{F}_C$  (Fig C-3)

$$\|\vec{F}_C\| = |X_C| ; \text{ la direction de } \vec{F}_C \text{ est parallèle à } \vec{x}_0 \text{ du rep. } (0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$$

b- Effort au niveau de l'axe du piston :  $\vec{F}_B$  (Fig C-4) et (Fig C-3)

$$\|\vec{F}_B\| = (X_B^2 + Y_B^2)^{1/2} \text{ avec } \vec{F}_B : \text{ inclinée de } \gamma_B = \text{Arctg}(Y_B/X_B) \text{ à } \vec{x}_0$$

c- Effort au niveau du maneton :  $\vec{F}_A$  (Fig C-4 et C-5)

$$\|\vec{F}_A\| = (X_A^2 + Y_A^2)^{1/2} \text{ avec } \vec{F}_A : \text{ inclinée de } \gamma_A = \text{Arctg}(Y_A/X_A) \text{ à } \vec{x}_0$$

d- Effort au niveau des tourillons :  $\vec{R}_E$  (Fig C-5)

$$\|\vec{R}_E\| = (X_E^2 + Y_E^2)^{1/2} \text{ avec } \vec{R}_E : \text{ inclinée de } \gamma_E = \text{Arctg}(Y_E/X_E) \text{ à } \vec{x}_0$$

6- Calcul des efforts au niveau de chaque élément de l'embellage mobile : (dans le repère polaire)

6-1) Moteur en V avec embellage : (Bielle-Biellette)

• Exploitation des solutions du système d'équation (I).

a- Diagramme polaire des efforts du maneton sur la bielle à œil dans le repère lié au maneton :  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

• Ce diagramme est obtenu en traçant les composantes de la force  $\vec{F}_A$  du maneton sur la bielle dans le repère 1.

• Ce diagramme a deux utilités essentielles :

- Il indique l'intensité de l'effort maximal et de l'effort moyen, ce qui permet de choisir la matière de coussinet et la longueur utile du coussinet de tête de bielle.

- Il indique la direction des efforts, ce qui permet de déterminer la position des trous <sup>d'arrivée</sup> d'huile sur le maneton pour le graissage du coussinet de tête de bielle.

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} X_A \cos\theta + Y_A \sin\theta \\ -X_A \sin\theta + Y_A \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme: } Y_{1A} = f(X_{1A})$$

b- Diagramme polaire des efforts du maneton sur la bielle à œil dans le repère lié à la bielle :  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \Rightarrow \text{TABLEAU 3}$

En utilisant la relation (c3) on aura :

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} X_{2A} \\ Y_{2A} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} X_A \cos\varphi + Y_A \sin\varphi \\ -X_A \sin\varphi + Y_A \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \quad \text{Diagramme polaire: } Y_{2A} = f(X_{2A})$$

Remarque : Les composantes de  $\vec{F}_A$  dans les repères 1 et 2 sont obtenues en utilisant le Tableau 3 (relation (c1) et (c3))

c- Diagramme polaire des efforts de l'axe du piston<sup>(1)</sup> sur la bielle :

• Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_{B_1} \\ Y_{B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme polaire : } Y_{B_1} = f(X_{B_1})$$

• Dans le repère lié à la bielle :  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \Rightarrow \text{TAB.3 : (c3)}$

$$\vec{F}_{B_1} = \begin{pmatrix} X_{2B_1} \\ Y_{2B_1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{B_1} \cos \varphi + Y_{B_1} \sin \varphi \\ -X_{B_1} \sin \varphi + Y_{B_1} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme polaire : } Y_{2B_1} = f(X_{2B_1})$$

d- Diagramme polaire des efforts de l'axe du piston<sup>(2)</sup> sur la bielle :

• Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au piston<sup>(2)</sup>

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \\ Y_{B_2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme polaire : } Y_{B_2} = f(X_{B_2})$$

• Dans le repère lié à la bielle :  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \Rightarrow \text{TAB.4 : (d2)}$

$$\vec{F}_{B_2} = \begin{pmatrix} X_{3B_2} \\ Y_{3B_2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{B_2} \cos \varphi + Y_{B_2} \sin \varphi \\ -X_{B_2} \sin \varphi + Y_{B_2} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire : } Y_{3B_2} = f(X_{3B_2})$$

e- Diagramme polaire des efforts de la bielle sur la bielle :

• Dans le repère lié à la bielle :  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \Rightarrow \text{TAB.3 : (c3)}$

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} X_{2C} \\ Y_{2C} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_C \cos \varphi + Y_C \sin \varphi \\ -X_C \sin \varphi + Y_C \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme polaire : } Y_{2C} = f(X_{2C})$$

• Dans le repère lié à la bielle :  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \Rightarrow \text{TAB.3 : (c4)}$

$$\vec{F}_C = \begin{pmatrix} X_{3C} \\ Y_{3C} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_C \cos(\varphi + \delta) + Y_C \sin(\varphi + \delta) \\ -X_C \sin(\varphi + \delta) + Y_C \cos(\varphi + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire : } Y_{3C} = f(X_{3C})$$

f- Diagramme polaire des efforts de réaction des paliers sur les tourillons :

• Dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{R}_E = \begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme polaire : } Y_E = f(X_E)$$

• Dans le repère lié à la manivelle :  $(0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \Rightarrow \text{TAB.3 : (c1)}$

$$\vec{R}_E = \begin{pmatrix} X_{1E} \\ Y_{1E} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_E \cos \theta + Y_E \sin \theta \\ -X_E \sin \theta + Y_E \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diagramme polaire : } Y_{1E} = f(X_{1E})$$



## 6-2) Moteur en V avec embiellage : Bielle - Bielle à fourche

o exploitation des solutions du système d'équations (II)

Les diagrammes polaires des efforts:  $\vec{F}_{B1}$ ,  $\vec{F}_{B2}$  et  $\vec{R}_E$  sont déjà mentionnés dans le paragraphe précédent.

a- Diagramme polaire des efforts du maneton sur la bielle :  $\vec{F}_{A1}$

o Dans le repère lié au maneton:  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \Rightarrow$  TAB.3: (a1)

$$\vec{F}_{A1} = \begin{pmatrix} X_{1A1} \\ Y_{1A1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{A1} \cos \theta + Y_{A1} \sin \theta \\ -X_{A1} \sin \theta + Y_{A1} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire:} \\ Y_{1A1} = f(X_{1A1})$$

o Dans le repère lié à la bielle:  $(B_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \Rightarrow$  TAB.3: (c3)

$$\vec{F}_{A1} = \begin{pmatrix} X_{2A1} \\ Y_{2A1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{A1} \cos \varphi + Y_{A1} \sin \varphi \\ -X_{A1} \sin \varphi + Y_{A1} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire} \\ Y_{2A1} = f(X_{2A1})$$

b- Diagramme polaire des efforts du maneton sur la bielle à fourche:  $\vec{F}_{A2}$

o Dans le repère lié au maneton:  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \Rightarrow$  TAB.4: (d1)

$$\vec{F}_{A2} = \begin{pmatrix} X_{1A2} \\ Y_{1A2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{A2} \cos(\theta - \delta) + Y_{A2} \sin(\theta - \delta) \\ -X_{A2} \sin(\theta - \delta) + Y_{A2} \cos(\theta - \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire:} \\ Y_{1A2} = f(X_{1A2})$$

o Dans le repère lié à la bielle à fourche:  $(B_2, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3) \Rightarrow$  TAB.4: (d2)

$$\vec{F}_{A2} = \begin{pmatrix} X_{3A2} \\ Y_{3A2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{A2} \cos \psi + Y_{A2} \sin \psi \\ -X_{A2} \sin \psi + Y_{A2} \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_3 \\ \vec{y}_3 \\ \vec{z}_3 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire:} \\ Y_{3A2} = f(X_{3A2})$$

c- Diagramme polaire de l'effort résultant au niveau du maneton:  $\vec{F}_A$

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}$$

o Dans le repère lié à la manivelle:  $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_{A1} \cos \theta + Y_{A1} \sin \theta + X_{A2} \cos(\theta - \delta) + Y_{A2} \sin(\theta - \delta) \\ -X_{A1} \sin \theta + Y_{A1} \cos \theta - X_{A2} \sin(\theta - \delta) + Y_{A2} \cos(\theta - \delta) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

Diagramme polaire:  $Y_{1A} = f(X_{1A})$

## 6-3) Moteur monocylindre :

- Exploitation des solutions du système d'équation (III).

Pour le diagramme polaire des efforts du maneton sur la bielle :  $\vec{F}_A$ , se reporter au paragraphe 6.4). Même chose pour l'effort de réaction  $\vec{R}_E$ .

• au niveau des tourillons. [ $\vec{F}_A \Rightarrow$  paragraphe 6.1-a], [ $\vec{R}_E \Rightarrow$  paragraphe 6.1-f].

a- Diagramme polaire des efforts de l'axe du piston sur la bielle :  $\vec{F}_B$

- dans le repère fixe :  $(0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire : } Y_B = f(X_B)$$

- dans le repère lié à la bielle :  $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \Rightarrow \text{TAB.3 : (c3)}$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_{2B} \\ Y_{2B} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} X_B \cos\varphi + Y_B \sin\varphi \\ -X_B \sin\varphi + Y_B \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{matrix} \Rightarrow \text{Diag. polaire : } Y_{2B} = f(X_{2B})$$

## Remarque :

Tous les diagrammes polaires des efforts au niveau de chaque élément composant les trois types d'embellages mobiles seront exploités et donnés sous forme de tableaux de valeurs, de courbes sur le VAX 11/750 disposé au niveau du centre de calcul de l'École Nationale Polytechnique.

CHAPITRE :

---

---

II

● ETUDE DU COUPLE  
MOTEUR ET DE SES  
HARMONIQUES POUR  
UN MONOCYLINDRE.

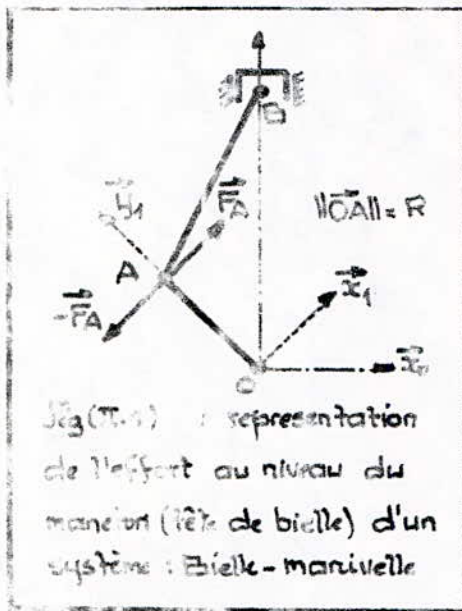
---

—● En general le couple moteur pendant le temps moteur est continuellement variable. Pour le monocylindre (4 temps) le temps moteur ne se produit qu'une seule fois pendant les deux tours du vilebrequin, le couple moteur variera donc dans de très grandes proportions au cours d'un cycle.

—● Cette irrégularité du couple entraîne des variations de vitesse de rotation importante auxquelles on remédie généralement grâce à l'artifice du volant moteur, et des vibrations préjudiciables à la mécanique auxquelles on remédie encore en plaçant un amortisseur de vibrations.

—● Dans ce chapitre nous allons définir le couple moteur d'un monocylindre ( le couple total et les deux autres couples antagonistes : couple dû aux gaz et celui dû aux inerties ) ainsi que les harmoniques relatives à chaque couple.

## II.1) CALCUL DU COUPLE MOTEUR POUR UN CYLINDRE



$\vec{F}_A$  : effort du maneton sur la bielle  
 $-\vec{F}_A$  : effort de la bielle sur le maneton

• Pour le calcul du couple moteur pour un cylindre, on s'intéressera à l'effort de la bielle sur le maneton ( $-\vec{F}_A$ ).

• Erreurs au point A :  $\vec{e}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}$

$$-\vec{F}_A = \begin{pmatrix} -X_A \\ -Y_A \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} ; \vec{M}_A = \vec{0} \quad \left( -\vec{F}_A \text{ passe par } A \right)$$

Par définition le couple moteur est le produit vectoriel de l'effort résultant de la bielle sur le maneton par le rayon vecteur  $\vec{OA}$  de la manivelle.

Notons par  $C_m$  ce couple moteur ; donc

$$\vec{C}_m = -\vec{F}_A \wedge \vec{OA} \quad (\text{I.1})$$

$$\vec{C}_A = R \cdot \vec{y}_1 = -R \sin \theta \cdot \vec{x}_0 + R \cos \theta \cdot \vec{y}_0 \quad (\text{d'après TAB.1 (a1)}).$$

$-X_A \cdot \vec{x}_0 - Y_A \cdot \vec{y}_0$  ; où  $X_A$  et  $Y_A$  sont deux solutions des équations du moteur en ligne, système : Bielle-manivelle (D-3).

Reprenons ces solutions :

$$X_A = \frac{1}{L \cos \varphi} \left( -I_G z \cdot \ddot{\varphi} - (L-L_G) Y_A \cdot \sin \varphi + L_G (M_B \cdot \ddot{x}_G \cos \varphi + Y_B \sin \varphi) \right)$$

$$Y_A = M_B \ddot{y}_G - Y_B \quad ; \quad \text{Avec } Y_B = -Y_P(\theta) - M_P \ddot{y}_B$$

$M_P$  : masse du piston et  $M_B$  : masse de la bielle

$$Y_P(\theta) = S \cdot (P(\theta) - P_0) \Rightarrow \text{cycle quasi-réal et réel ; } P_0 : \text{pression dans le carter}$$

$$= S \cdot P(\theta) \Rightarrow \text{cycle théorique ; } S = \frac{\pi D^2}{4} ; D : \text{alésage du cylindre}$$

L'expression (II.1) devient :

$$\vec{C}_m = - \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ 0 \end{pmatrix}_{\substack{\text{dans} \\ \text{le rep. } \mathcal{R}_0}} \wedge \begin{pmatrix} -R \sin \theta \\ R \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\substack{\text{dans} \\ \text{le rep. } \mathcal{R}_0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) \end{pmatrix}_{\substack{\text{dans} \\ \text{le rep. } \mathcal{R}_0}}$$

Donc :  $\vec{C}_m = -R(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow$  en vecteur

$C_m = R(X_A \cos \theta + Y_A \sin \theta) \Rightarrow$  en valeur algébrique (II.2)

Remarque :

Le couple moteur  $C_m$  étant le couple total, il peut être décomposé en deux couples antagonistes :

- le couple dû aux pressions des gaz.
- le couple dû aux inerties des pièces en mouvement.

a- Couple dû aux pressions des gaz :

- La pression régnant dans le cylindre à un instant donné exerce des efforts sur la chemise, la culasse et le piston, les pressions ainsi mises en jeu sont des forces purement intérieures au moteur.

- Résultat : • les pressions radiales agissant sur la chemise s'auto-équilibrent et n'auront plus d'effet sur le piston.

- les forces de pression agissant sur le piston sont de direction et de sens fixe, de grandeur variable et de période  $4\pi$ .

- Ces forces ayant agi sur le piston se transmettent intégralement (aux frottements près) au maneton par l'intermédiaire de la bielle pour fournir le couple moteur dû à la pression des gaz.

- Ce couple étant obtenu en égalant les masses du piston et de la bielle à zéro ainsi que le moment d'inertie de la bielle par rapport à l'axe  $Gz$  passant par le centre de gravité  $G$ . ( $M_P = M_B = I_{Gz} = 0$ ).

Notons par  $C_G$  le couple dû aux gaz.

$$C_G(\theta) = R (X_{AG} \cdot \cos\theta + Y_{AG} \cdot \sin\theta) \quad (\text{I.3})$$

où  $X_{AG} = X_A$  avec  $M_P = M_B = I_{Gz} = 0$

$$Y_{AG} = Y_A \text{ avec } M_P = M_B = 0$$

Donc:  $X_{AG} = -Y_P(\theta) \cdot \operatorname{tg}\varphi$  et  $Y_{AG} = Y_P(\theta)$

b. Couple dû aux inerties des pièces en mouvement:

- C'est le couple moteur à charge vide. Il est calculé en faisant tourner le moteur sans être alimenté en combustible.
- Ce couple est produit par une force d'inertie sinusoïdale de période  $2\pi$  engendrée par le déplacement rectiligne alternatif du piston sur l'axe  $\vec{y}_0$  (Fig (II.1)), le mouvement elliptique complexe de La bielle et la rotation de La manivelle par rapport à l'axe de rotation  $\vec{z}_0$ .
- L'expression du couple dû aux inerties se déduit de celle du couple total mais en éliminant l'effet de La pression des gaz.

Notons par  $C_I$  le couple dû aux inerties.

$$C_I(\theta) = R (X_{AI} \cdot \cos\theta + Y_{AI} \cdot \sin\theta) \quad (\text{II.4})$$

où  $X_{AI} = X_A$  avec  $Y_P(\theta) = 0$

$$Y_{AI} = Y_A \text{ avec } Y_P(\theta) = 0$$

Donc:  $X_{AI} = \frac{1}{L \cos\varphi} \left( -I_{Gz} \ddot{\varphi} - (L \cdot L_G) \cdot Y_{AI} \cdot \sin\varphi + L_G \cdot (M_B \cdot \ddot{x}_G \cos\varphi + Y_{BI} \cdot \sin\varphi) \right)$

$$Y_{AI} = M_B \cdot \ddot{y}_G - Y_{BI} \quad ; \quad Y_{BI} = -M_P \cdot \ddot{y}_B$$

Remarques:

- le couple moteur dû aux inerties peut être calculé sous une autre façon.
- On avait dit auparavant que le couple total est la somme des deux autres couples (dû aux gaz + dû aux inerties)

$$C_m(\theta) = C_G(\theta) + C_I(\theta)$$

alors que:  $C_I(\theta) = C_m(\theta) - C_G(\theta)$

• Les résultats de ces 3 couples seront donnés sous forme de tableaux de valeurs et de courbes pour un angle  $\theta$  de rotation du vilebrequin variant entre 0 et 720° étudiés sur l'ordinateur (VAX 11/750) de l'ENSA.

---



## II.2) ETUDE DES HARMONIQUES DU COUPLE MOTEUR D'UN MONOCYLINDRE (4 temps)

Etant donné que le couple moteur est une grandeur périodique (Période  $4\pi$  pour un moteur 4 temps), il est donc développable en série de Fourier.

Le développement harmonique du couple moteur est nécessaire à l'étude des vibrations de torsion du vilebrequin, autrement dit la connaissance des harmoniques du couple moteur nous permettra de savoir à quelle fréquence va se produire la résonance du système (chapitre V)

1) Développement du couple moteur en série de Fourier :

a- Rappel mathématique :

Théorème :

Soit une fonction  $f(x)$  périodique de période  $T$ , monotone par tranche et bornée sur l'intervalle  $[0, T]$ .

Alors  $f(x)$  est décomposable en série de Fourier et la somme de la série converge en tous points vers sa somme  $f(x)$ , donc :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{2\pi}{T} n x + b_n \sin \frac{2\pi}{T} n x)$$

où  $a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  sont les coefficients de Fourier donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx ; a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \left( \frac{2\pi}{T} n x \right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \left( \frac{2\pi}{T} n x \right) dx$$

b- Décomposition du couple total :  $C_m(\theta)$

L'expression du couple total pour un cylindre (relation II.2) satisfait aux conditions du théorème. Sa période est de  $T=4\pi$ , sa décomposition en série de Fourier sera donc donnée par :

$$C_m(\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos \frac{n}{2} \theta + b_n \cdot \sin \frac{n}{2} \theta \right) \quad (\text{II.5})$$

$C_0$  est le couple moteur moyen résultant au 2<sup>e</sup> harmonique d'ordre zéro.

$a_n$  et  $b_n$  sont les amplitudes de l'harmonique d'ordre  $n$ .

$C_0, a_n$  et  $b_n$  sont données par :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} C_m(\theta) d\theta \quad ; \quad C_m(\theta) \text{ donné par (II.2)} \\ a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C_m(\theta) \cos \frac{n}{2} \theta d\theta \\ b_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C_m(\theta) \sin \frac{n}{2} \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.6})$$

c- Décomposition du couple dû aux gaz en série de Fourier :  $C_g(\theta)$

Le couple dû aux gaz est périodique et de période  $4\pi$ , sa décomposition en série de Fourier sera donnée par :

$$C_g(\theta) = C_{g0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_{ng} \cdot \cos \frac{n}{2} \theta + b_{ng} \cdot \sin \frac{n}{2} \theta \right) \quad (\text{II.7})$$

$C_{g0} = C_0$  : couple moteur moyen

$a_{ng}, b_{ng}$  : amplitudes de l'harmonique d'ordre  $n$  du couple

du aux gaz  $C_g(\theta)$  donné par la relation (II.3)

$$\left. \begin{aligned} a_{ng} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C_g(\theta) \cdot \cos \frac{n}{2} \theta d\theta \\ b_{ng} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} C_g(\theta) \cdot \sin \frac{n}{2} \theta d\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.8})$$

c - Décomposition du couple dû aux inerties en série de Fourier :  $C_I(\theta)$

Le couple dû aux inerties est périodique et de période  $2\pi$ , sa décomposition en série de Fourier sera donnée par :

$$C_I(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_{nI} \cdot \cos n\theta + b_{nI} \cdot \sin n\theta) \quad (\text{II.9})$$

$a_{nI}$ ,  $b_{nI}$  : amplitudes de l'harmonique d'ordre  $n$  du couple dû aux inerties  $C_I(\theta)$  donné par la relation (II.4). Le couple moyen dans ce cas est nul.

$a_{nI}$  et  $b_{nI}$  sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} a_{nI} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_I(\theta) \cdot \cos n\theta \, d\theta \\ b_{nI} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} C_I(\theta) \cdot \sin n\theta \, d\theta \end{aligned} \right\} (\text{II.10})$$

## 2) Applications :

• Il existe plusieurs procédés pour effectuer la décomposition en série de Fourier d'un phénomène périodique, mais le moyen le plus rapide est à l'heure actuelle l'utilisation de l'ordinateur.

• Pour avoir une approximation suffisante du couple d'excitation (couple moteur) il convient de prendre :

- Les 10 premières harmoniques du couple total et celui dû aux gaz
- Les 5 premières harmoniques du couple dû aux inerties.

Car en général les harmoniques d'ordre  $> 5$  (pour couple total, dû aux gaz et dû aux inerties) sont à amplitudes négligeables devant celles des harmoniques d'ordre inférieur.

• Concernant le logiciel de synthèse, toutes les harmoniques sont prises en considération. Pour avoir 10 harmoniques il suffit d'écrire  $n=10$ .

Le chapitre III n'était pas nécessaire,  
il a été donc enlevé.

Veuillez excuser cette erreur. --- Merci

## CHAPITRE :



● CALCUL DES PULSA-  
TIONS PROPRES D'UNE  
LIGNE D'ARBRES NON  
RAMIFIEE EN VIBRATION  
DE TORSION.

● ETUDE DES RESONA-  
NCES.

• Les anciens moteurs thermiques avaient un poids élevé, une vitesse réduite et des dimensions trop exagérées, ils avaient des pulsations propres supérieures aux pulsations des forces perturbatrices. Mais petit à petit grâce au développement de la technique on est parvenu à alléger ces machines et à accroître leur vitesse de travail mais malheureusement un nouveau phénomène est mis en jeu : L'apparition des vibrations...

• En effet les vibrations ont des causes assez variées ; du mode de fonctionnement du moteur (jusqu'aux usures, aux défauts de fonctionnement...

• Ce n'est qu'en faisant usage à la théorie des vibrations que l'on pourra assigner aux divers organes les dimensions qui permettront de maintenir les conditions de travail aussi éloignées que possible des conditions critiques dans lesquels risque de se produire de fortes vibrations permettant au moteur d'accéder au régime destructeur.

• Cette théorie a permis d'élaborer des moyens très variés pour lutter contre genre de vibration ; les moyens les plus naturels consistent à éliminer les forces extérieures qui peuvent créer ce phénomène, d'autre part on peut résoudre le problème des vibrations en modifier les moments d'inertie des masses et la flexibilité des assemblages. En cas où ce dernier moyen n'est pas efficace on ajoutera ainsi au système des appareils spéciaux pour étouffer les vibrations, c'est le cas des amortisseurs de vibrations (Fig III.1 et III.2)

(Fig III.1) : Amortisseur viscoélastique

B : barre équivalent de rigidité torsionnelle  $c$  et de moment d'inertie  $I$

E : Elastomère

V : volant de moment d'inertie  $\bar{I}$ .

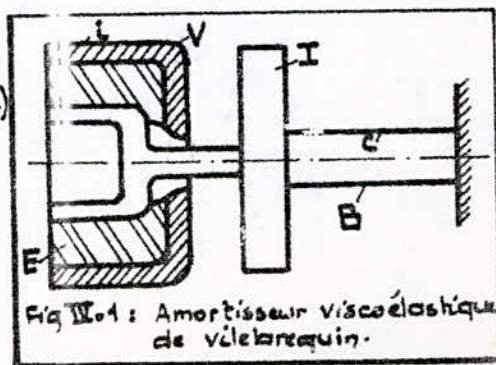


Fig II.2 : Amortisseur visqueux

- B : barre équivalente de rigidité torsionnelle  $c$  et de moment d'inertie  $I$   
 F : Fluide visqueux  
 V : Volant de moment d'inertie  $i$ .

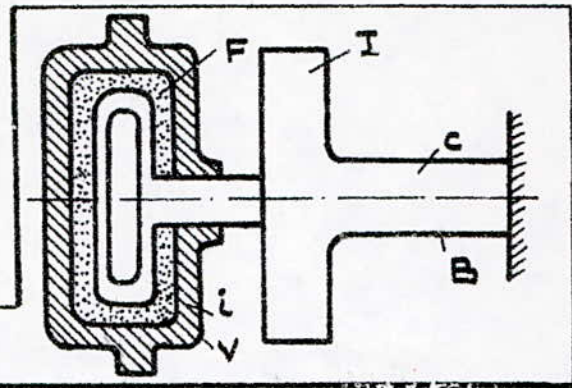


Fig II.2 : Amortisseur visqueux de vilebrequin

- Concernant les vibrations de torsion des vilebrequins de moteurs thermiques à combustion interne, si on parvient à connaître les pulsations propres; on peut alors s'éloigner des pulsations de résonance.
- Dans notre présent projet; on se limitera à une méthode de calcul des pulsations propres (Méthode de Ritz) caractérisée par sa convergence rapide et la bonne précision des résultats obtenus. C'est une méthode numérique exploitable par ordinateur.

## VI.1 ) MODELISATION DES LIGNES D'ARBRE

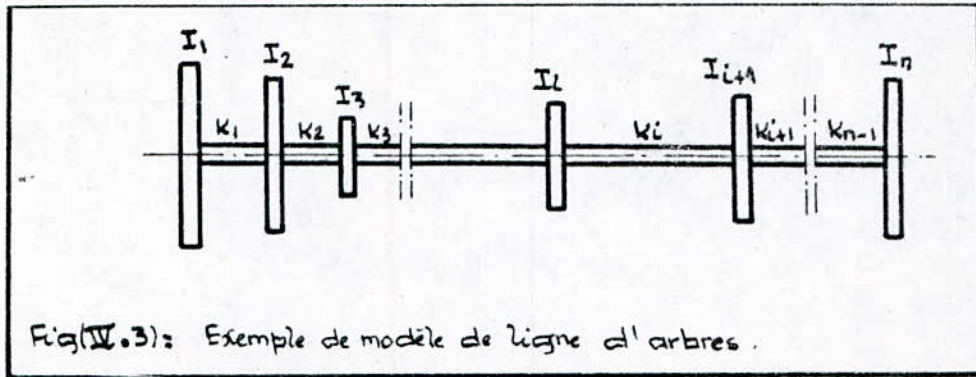
### 1) Généralités. Pourquoi la modélisation ?

- Une ligne d'arbre projetée aux diverses sollicitations du milieu dans lequel elle évolue doit avoir des réactions que le concepteur doit prédire aussi précisément que possible. L'état de connaissance de certaines manifestations et la complexité de cette ligne d'arbre conduisent à envisager des modèles auxquels s'appliquent les lois de la physique, ainsi chaque modèle exprime l'une des manifestations sollicitant la ligne d'arbre.
- Dans la pratique, on y trouve plusieurs types de modèles. Dans le cas des lignes d'arbre par exemple on peut proposer des modèles :
  - Pour réaliser l'équilibrage d'un vilebrequin
  - Pour connaître les fréquences (pulsations) propres des vibrations de flexion, de torsion ou axiales.
  - Pour déterminer les amplitudes en quelques points particuliers des oscillations forcées de torsion, de flexion ou axiales.
  - Pour donner une image de l'état de contrainte du matériaux
  - Etc ...
- Dans notre cas on se penchera sur la caractérisation d'un modèle de lignes d'arbres traduisant les  $n$  premières pulsations propres de torsion et procéder après à une application sur un vilebrequin à plat quatre coudes d'un moteur en V (8 cylindres).
- Les éléments de ce modèle (Fig. VI.3) doivent satisfaire à des règles bien connues :
  - Proportionnalité entre efforts et déformations

• Conservation des masses.

Et ceci pour deux raisons :

1. Validité de l'application des lois de la mécanique sur ces éléments.
2. Résolution numérique: des équations conduisant à l'utilisation de schémas mathématiques classiques.



## 2) Constituants d'un modèle de ligne d'arbres : (Fig IV.3)

Considérons le modèle de la Figure (IV.3), il est constitué par une ligne d'arbre comportant  $(n)$  disques de moment d'inertie  $I_1, I_2, \dots, I_n$  reliés entre eux par  $(n-1)$  portions d'arbres présentant des rigidités torsionnelles  $K_1, K_2, \dots, K_{n-1}$ .



## IV.2 ) DETERMINATION DES PULSATIONS PROPRES D'UNE LIGNE D'ARBRES EN VIBRATIONS DE TORSION

• Les méthodes de calcul des pulsations propres d'une ligne d'arbre en vibrations de torsion sont nombreuses et augmentent en nombre avec le développement des moyens de calcul et les progrès en analyse numérique notamment avec l'invention de l'ordinateur.

• On distingue les méthodes énergétiques, dérivées des équations intégrales et des équations différentielles, ...

Mais chaque méthode présente des avantages par rapport à d'autres du point de vue convergence rapide et précision meilleure de la solution.

• Avant d'appliquer certaines méthodes, il faut distinguer les hypothèses suivantes :

- le système obéit à la loi de Hooke ( les déformations sont proportionnelles aux efforts ) .
- Seules les déformations de torsion sont prises en considération .
- le système est conservatif .
- l'axe de rotation est un axe référentiel fixe .
- les centres de gravité des disques sont supportés par l'axe de rotation .
- l'axe de rotation est axe principal d'inertie
- les paliers sont considérés comme étant des liaisons de type rotatoire parfait ( les moments des actions mécaniques des paliers sur l'arbre ont une composante nulle sur l'axe de rotation ) .

## 1. Calcul des fréquences propres

On considérera un cas général de lignes d'arbres non ramifiées ayant les deux extrémités encastrees (Fig. IV.4), puis on en déduira le cas particulier de lignes d'arbres aux extrémités libres relatives aux vilebrequins.

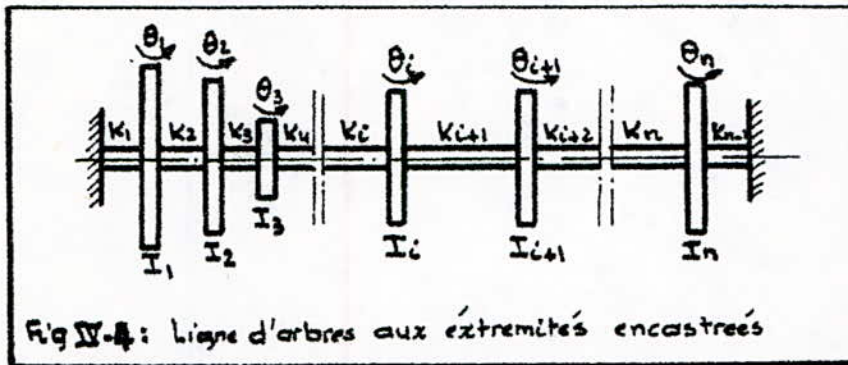


Fig. IV.4 : Ligne d'arbres aux extrémités encastrees

$I_i$  : moment d'inertie du disque ( $i$ ) par rapport à l'axe de rotation.

$\theta_i$  : Déplacement angulaire du disque ( $i$ ) par rapport à sa position d'équilibre (à l'instant  $t$ )

$K_i$  : Rigidité torsionnelle du ressort (tronçon d'arbre) séparant le disque ( $i$ ) du disque ( $i-1$ )

## 2. Equations de mouvement des disques : Fig (IV.4)

• Energie cinétique du système :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (I_i \dot{\theta}_i^2) \quad (\text{IV.1})$$

• Energie potentielle du système :

$$V = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} K_{i+1} (\theta_i - \theta_{i+1})^2 + \frac{1}{2} K_{n+1} \theta_n^2 \quad (\text{IV.2})$$

• Equation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = Q_i \quad (\text{IV.3})$$

où  $Q_i$  est la force généralisée.

Comme le système est conservatif alors :  $Q_i = - \frac{\delta V}{\delta \theta_i}$

L'équation (IV.3) devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} = - \frac{\delta V}{\delta \theta_i} \quad (\text{IV.4})$$

Le système différentiel du second ordre en  $\theta_i$  sera donc :

$$(I) \quad \begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 = - [k_1 \theta_1 + k_2 \theta_1 - k_2 \theta_2] \\ I_2 \ddot{\theta}_2 = - [-k_2 (\theta_1 - \theta_2) + k_3 (\theta_2 - \theta_3)] \\ \dots \\ I_i \ddot{\theta}_i = - [-k_i (\theta_{i-1} - \theta_i) + k_{i+1} (\theta_i - \theta_{i+1})] \\ \dots \\ I_n \ddot{\theta}_n = - [-k_n (\theta_{n-1} - \theta_n) + k_{n+1} \theta_n] \end{cases}$$

Le système (I) devient :

$$(II) \quad \begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + (k_1 + k_2) \theta_1 + (-k_2) \theta_2 = 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + (-k_2) \theta_1 + (k_2 + k_3) \theta_2 + (-k_3) \theta_3 = 0 \\ \dots \\ I_i \ddot{\theta}_i + (-k_i) \theta_{i-1} + (k_i + k_{i+1}) \theta_i + (-k_{i+1}) \theta_{i+1} = 0 \\ \dots \\ I_n \ddot{\theta}_n + (-k_n) \theta_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) \theta_n = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations différentielles du second ordre à coefficient constant. Pour chercher les pulsations propres de la ligne d'arbres considérée il suffit prendre la solution écrite sous la forme :

$$\theta_i = A_i \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{IV.5})$$

où  $A_i$  : Amplitude relative des déformées modales

La substitution des valeurs de  $\theta_i$  dans le système différentiel (II) donne un 3<sup>em</sup> système différentiel à  $n$  équations cette fois si linéaires et homogènes en  $A_1, A_2, \dots, A_n$  qui n'est résoluble que si son déterminant est nul (d'après la théorie des équations linéaires homogènes).

Pour cela on va choisir une méthode de calcul des pulsations propres des systèmes à plusieurs degrés de liberté basé sur les matrices tri-diagonales (Méthode de RUTISHAUSER).

### 3. Résolution du système différentiel par la méthode de RUTISHAUSER :

• La méthode de RUTISHAUSER est une méthode matricielle appliquée pour des lignes d'arbres non ramifiées. Elle calcule toutes les pulsations propres de torsion d'un système mécanique conservatif avec une rapidité importante et une précision acceptable, ce qui constitue l'avantage de sa convergence rapide par rapport aux autres méthodes.

#### 3 - 1 ) Ecriture matricielle du système différentiel (II) :

$$(II) \Rightarrow [I][\ddot{\theta}] + [K][\theta] = 0 \quad (IIM)$$

Avec :

- $[I]$  : Matrice carrée d'ordre  $n$  des inerties ( $I_i$ )
- $[K]$  : Matrice carrée d'ordre  $n$  des rigidités torsionnelle ( $K_i$ )
- $[\theta]$  : Matrice à  $n$  lignes des degrés de liberté en rotation des disques ( $\theta_i$ )
- $[\ddot{\theta}]$  : Matrice à  $n$  lignes des accélérations angulaires des disques ( $\ddot{\theta}_i$ )

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & & & \\ & & -k_i & k_i+k_{i+1} & -k_{i+1} & \\ & & & & & -k_n & k_n+k_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & & & & & \\ & I_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & I_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_n \end{bmatrix} ; [\theta] = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_i \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} ; [\ddot{\theta}] = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_i \\ \vdots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix}$$

3 - 2 ) Ecriture matricielle de la solution adoptée :

$$[\theta] = [A] \sin(\omega t + \varphi)$$

où ;

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} ; \text{matrice à } n \text{ lignes des amplitudes maximales des déplacements angulaires des disques.}$$

Considérons le vecteur  $\theta_i = A_i \sin(\omega t + \varphi)$

Il vient donc :  $\dot{\theta}_i = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi)$

$$\ddot{\theta}_i = -\omega^2 \theta_i$$

matriciellement :  $[\ddot{\theta}] = -\omega^2 [\theta] \quad (\text{IV.6})$

En effet, pour un mode donné tous les disques vibrent en phase et à la même pulsation. Reportons l'équation matricielle (IV.6) dans le système matriciel (II<sup>M</sup>) ; on aura donc :

$$-[I][\theta]\omega^2 + [K][\theta] = 0$$

$$(-[I]\omega^2 + [K])[\theta] = 0$$

$$\text{ou encore } (-[I_d]\omega^2 + [I]^{-1}[K])[\theta] = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Avec ;  $[I_d]$  : matrice identité et  $[I]^{-1}$  : matrice inverse de  $[I]$

l'équation (IV.7) est le système d'équations linéaires homogènes

de Cramer. Pour que ce système admette une solution autre que la

solution triviale  $[\theta] = [0]$  ; il faut et il suffit que le déterminant associé

à ce système soit nul :

$\det([I]^{-1}[K] - \omega^2[I_d]) = 0$  : Polynôme caractéristique

donnant les valeurs propres  $\lambda_i = \omega_i^2$  de la matrice produit  $[I]^{-1}[K]$  et

les pulsations propres sont données par  $\omega_i = (\lambda)^{1/2}$ .

• Calcul de la matrice inverse des inerties :  $[I]^{-1}$  :

On utilisera la méthode des cofacteurs qui définit  $[I]^{-1}$  comme étant

égale à :  $\frac{[I]^*}{\det[I]}$  où  $[I]^*$  est la comatrice de  $[I]$  définie par :

$[I]^* = {}^t[N]$  : transposé d'une matrice  $[N]$  définie par :

$$[N] = \begin{pmatrix} (I_2 \times I_3 \times \dots \times I_n) & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & 0 \\ (I_1 \times I_3 \times \dots \times I_n) & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & (I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$\det[I] = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  car  $[I]$  est une matrice diagonale

Il vient alors :

$$[I]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{I_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{I_n} \end{pmatrix}$$

soit  $[C]$  le produit matriciel  $[I]^{-1}[K]$  ; Alors

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{K_1 + K_2}{I_1} & -\frac{K_2}{I_1} & & 0 \\ -\frac{K_2}{I_2} & \frac{K_2 + K_3}{I_2} & -\frac{K_3}{I_2} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & -\frac{K_n}{I_{n-1}} \\ & & & -\frac{K_n}{I_n} & \frac{K_n + K_{n+1}}{I_n} \end{pmatrix}$$

$[C]$  est une matrice quasi-triangulaire particulière : c'est une matrice tridiagonale.

4. Détermination des valeurs propres  $\lambda = \omega^2$  de la matrice tridiagonale  $[C]$  :

$$\det([C] - \lambda [Id]) = 0 \quad (\text{IV.8})$$

- Le polynôme caractéristique du  $n^{\text{ème}}$  degré en  $(\lambda = \omega^2)$  constitue l'équation aux pulsations propres.

- Solutions du polynôme caractéristique (IV.8) :

- (\*)  $\lambda = \omega^2 = 0$  : traduit la liberté en rotation de l'ensemble sans oscillations autour de l'axe de rotation.

- (\*)  $(n-1)$  valeurs propres, ceci fait correspondre  $(n-1)$  pulsations propres  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ , qui de leur part fait correspondre  $(n-1)$  modes couplés d'oscillations libres angulaires.

( $n$  : nombre de disques).

- Exemple : Pour une ligne d'arbres de 14 disques ; il y aura 13 pulsations propres correspondant à 13 modes de vibrations.

- Le polynôme caractéristique (IV.8) est une équations d'ordre  $n$  difficile à résoudre. On se propose d'utiliser une méthode numérique itérative de détermination des  $\lambda_i$  ; qui consiste à utiliser l'algorithme de RUTISHAUSER appliqué au matrices tri-diagonales.

Une des propriétés de la matrice tri-diagonale est que les termes de part et d'autre de la diagonale principale n'interviennent que par leur produit ; on peut les modifier à condition que leur produit reste constant.

Utilisons la notation suivante des éléments de la matrice  $[C]$ :

$$[C] = \begin{bmatrix} c_1 & b_1 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & 0 \\ a_1 & c_2 & & \\ \begin{matrix} 0 \\ \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & & & b_{n-1} \\ & & a_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \quad \text{Avec;} \quad \begin{aligned} c_i &= \frac{k_i + k_{i+1}}{I_i} ; i=1, n \\ a_i &= -\frac{k_{i+1}}{I_{i+1}} ; i=1, n-1 \\ b_i &= -\frac{k_{i+1}}{I_i} ; i=1, n-1 \end{aligned}$$

Définissons la matrice de départ:  $[C^0]$

$$[C^0] = \begin{bmatrix} c_1 & a_1 b_1 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & 0 \\ 1 & c_2 & a_2 b_2 & \\ \begin{matrix} 0 \\ \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & & & a_{n-1} b_{n-1} \\ & & 1 & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & \begin{matrix} \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & 0 \\ 1 & c_2 & a_2 & \\ \begin{matrix} 0 \\ \diagdown \\ \diagup \end{matrix} & & & k_{n-1} \\ & & 1 & c_n \end{bmatrix} \quad \text{Avec} \quad \begin{aligned} d_i &= a_i b_i \\ i &= 1, n-1 \end{aligned}$$

La matrice  $[C^0]$  a les mêmes valeurs propres que la matrice  $[C]$  mais elle n'a pas les mêmes vecteurs propres.

#### 4.1) Algorithme de RUTISHAUSER

L'algorithme de Rutishauser s'applique plus particulièrement aux matrices quasi triangulaires.

Soit  $[C_0]$  une matrice quasi triangulaire. D'après Gauss;  $[C_0]$  peut être décomposé en un produit de deux matrices  $[R]$  et  $[S]$  d'une façon unique:  $[C_0] = [R][S]$ ; ceci dans le cas où l'une des

$$[C_0] = \begin{bmatrix} \diagdown & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \diagup \end{bmatrix} ; [R] = \begin{bmatrix} \diagdown & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \diagup \end{bmatrix} ; [S] = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \diagup \end{bmatrix}$$

matrices  $[R]$  ou  $[C]$  possède des 1 sur sa diagonale principale. Alors; avec cette condition on peut construire la suite matricielle suivante:

$$\begin{aligned} [C_0] &= [R_1] \times [S_1] \\ [C_1] &= [S_1] \times [R_1] = [R_2] \times [S_2] \\ \dots & \\ [C_n] &= [S_n] \times [R_n] = [R_{n+1}] \times [S_{n+1}] \end{aligned}$$



• Propriétés des éléments de cette suite :

- $[C_0]$  et  $[C_n]$  ont les mêmes valeurs propres
- $[C_1], [C_2], \dots, [C_n]$  sont des matrices quasi triangulaires
- Si  $n \rightarrow \infty$  ;  $[C_n]$  tend vers une matrice triangulaire inférieure
- Les valeurs propres apparaissent donc sur la diagonale principale dans l'ordre décroissant à partir du haut.

4-2) Application de l'algorithme de Rutishauser :

a - Détermination des éléments des matrices  $[R]$  et  $[S]$

Soit comme avant :  $[C^0] = [R][S]$  : matrice de départ

Abs :

$$\begin{bmatrix} c_1^0 & \alpha_1^0 & & & 0 \\ 1 & c_2^0 & \alpha_2^0 & & \\ & & & & \\ 0 & 1 & c_{n-1}^0 & \alpha_{n-1}^0 & \\ & & & & \\ & & & & 1 & c_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & & & & 0 \\ 1 & b_2 & & & \\ & & & & \\ 0 & 1 & b_{n-1} & & \\ & & & & \\ & & & & 1 & b_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & 0 \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & & & \\ 0 & & & & 1 & \beta_{n-1} \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_1 & b_1\beta_1 & & & 0 \\ 1 & b_2+\beta_1 & b_2\beta_2 & & \\ & & & & \\ 0 & 1 & b_{n-1}+\beta_{n-2} & b_{n-1}\beta_{n-1} & \\ & & & & \\ & & & & 1 & b_n+\beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

On aura donc :

$$\left. \begin{cases} c_1^0 = b_1 \\ c_2^0 = b_2 + \beta_1 \\ \vdots \\ c_n^0 = b_n + \beta_{n-1} \end{cases} \right| \text{ Avec } i=1, n \quad \text{et} \quad \left. \begin{cases} \alpha_1^0 = b_1\beta_1 \\ \alpha_2^0 = b_2\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^0 = b_{n-1}\beta_{n-1} \end{cases} \right| \text{ Avec } i=1, n-1 \quad \left. \right\} \text{(II.9)}$$

De ces deux systèmes d'équations on détermine les éléments des matrices  $[R]$  et  $[S]$  :

$$\left. \begin{cases} b_1 = c_1^0 \\ b_2 = c_2^0 - \frac{\alpha_1^0}{b_1} \\ \vdots \\ b_i = c_i^0 - \frac{\alpha_{i-1}^0}{b_{i-1}} \\ \vdots \\ b_n = c_n^0 - \frac{\alpha_{n-1}^0}{b_{n-1}} \end{cases} \right| \text{ Avec } i=1, n \quad \text{et} \quad \left. \begin{cases} \beta_1 = \frac{\alpha_1^0}{b_1} \\ \beta_2 = \frac{\alpha_2^0}{b_2} \\ \vdots \\ \beta_i = \frac{\alpha_i^0}{b_i} \\ \vdots \\ \beta_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}^0}{b_{n-1}} \end{cases} \right| \text{ Avec } i=1, n-1 \quad \left. \right\} \text{(II.10)}$$

b- Calcul des éléments de la matrice tridiagonale [C] de la

suite matricielle :  $[C] = [S] \times [R]$

$$[C] = [S] \times [R]$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & & & \\ 1 & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ 0 & & & & 1 & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 & & & \\ & 1 & \beta_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \beta_{n-1} & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ 1 & b_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + \beta_1 & b_2 \beta_1 & & & \\ 1 & b_2 + \beta_2 & b_3 \beta_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & b_{n-1} + \beta_{n-1} & b_n \beta_{n-1} \\ 0 & & & & & 1 & b_n \end{bmatrix}$$

d'où les valeurs des éléments de [C] :

$$\left. \begin{cases} c_1 = b_1 + \beta_1 \\ c_2 = b_2 + \beta_2 \\ \dots \\ c_i = b_i + \beta_i \\ \dots \\ c_n = b_n \end{cases} \right| \text{Avec } i=1, n \quad \text{et} \quad \left. \begin{cases} d_1 = b_2 \beta_1 \\ d_2 = b_3 \beta_2 \\ \dots \\ d_i = b_{i+1} \beta_i \\ \dots \\ d_{n-1} = b_n \beta_{n-1} \end{cases} \right| \text{Avec } i=2, n-1 \quad \left. \right\} \text{(II.11)}$$

c- Organisation des calculs :

- Les données sont les éléments  $d_i^0$  et  $c_i^0$  de la matrice de départ  $[C^0]$ .
- Travaux de calcul :
  - 1- On calcule les éléments des matrices triangulaires [R] et [S]  $\Rightarrow$  groupe de relations (II.10) : (cad  $b_i$  et  $\beta_i$  en fonction de  $d_i^0$  et  $c_i^0$ ).
  - 2- On calcule les éléments de la matrice quasi triangulaire partielle [C] (tridiagonale)  $\Rightarrow$  groupe de relations (II.11) : (cad  $d_i$  et  $c_i$  en fonction de  $b_i$  et  $\beta_i$ ).
  - 3- On transpose le tableau [C] dans le tableau  $[C^0]$  (Les matrices ont la même forme).
  - 4- On examine les termes situés au-dessus de la diagonale principale du tableau  $[C^0]$  ou bien la variation relative des termes de la diagonale principale. Deux cas peuvent se présenter :

- 1<sup>er</sup> Cas : Les  $\alpha_i^0$  sont pratiquement nuls (ou la variation relative des termes de la diagonale principale est négligeable), alors les  $c_i^0$  sont les valeurs propres de la matrice de départ  $[C^0]$
- 2<sup>ème</sup> Cas : Les  $\alpha_i^0$  sont différents de zéro (ou la variation relative des termes de la diagonale principale est importante), alors on recommence le même processus à partir de 1-

• Remarques :

- 1- Concernant l'organigramme de calcul des valeurs propres de la matrice  $[C]$  sera tracé à la fin du projet en liaison avec l'organigramme principale.
- 2- Ce chapitre sur les vibrations de torsion calcule les pulsations propres d'une ligne d'arbres encastrée à ses deux extrémités (Fig IV-4). On veut faire l'application sur une ligne d'arbres aux deux extrémités libres (Fig IV-5) : cas des vilebrequins des moteurs alternatifs.

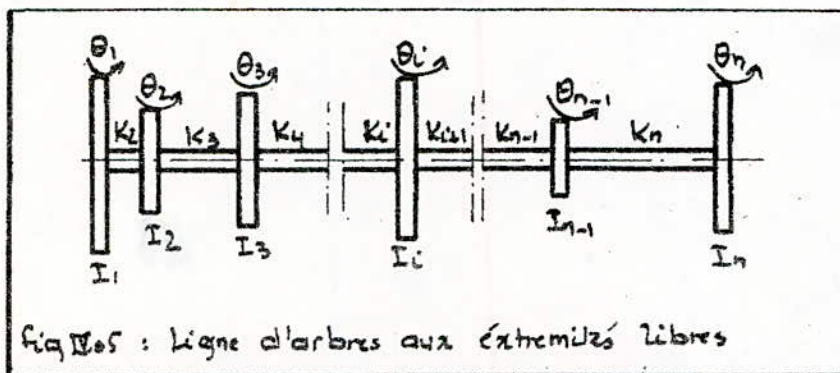


Fig IV-5 : Ligne d'arbres aux extrémités libres

Pour cela on considère la ligne d'arbres encastrée à ses deux extrémités mais on pose la 1<sup>ère</sup> et la dernière rigidité torsionnelle nulles ( $K_1 = K_{n+1} = 0$ ).

- 3- Il faut prévoir un test de convergence de l'algorithme de Rutishauser ; ceci est nécessaire pour voir la rapidité de cette

convergence et la précision des résultats.

- Les termes  $c_i$  de  $[C]$ , situés sur la diagonale principale, ne seront strictement égaux aux valeurs propres qu'après un nombre infini d'itérations.
- La précision désirée pour le calcul des pulsations propres est telle qu'il suffit d'examiner la variation de la différence entre l'élément  $c_i$ , calculé à l'itération  $k$ , et le même élément, calculé à l'itération  $k+1$ .
- Le test d'arrêt peut être exprimé de la façon suivante :

$$\frac{\sum_{i=1}^n |c_i^k - c_i^{k+1}|}{\sum_{i=1}^n c_i^{k+1}} < \epsilon \quad (\text{IV-12})$$

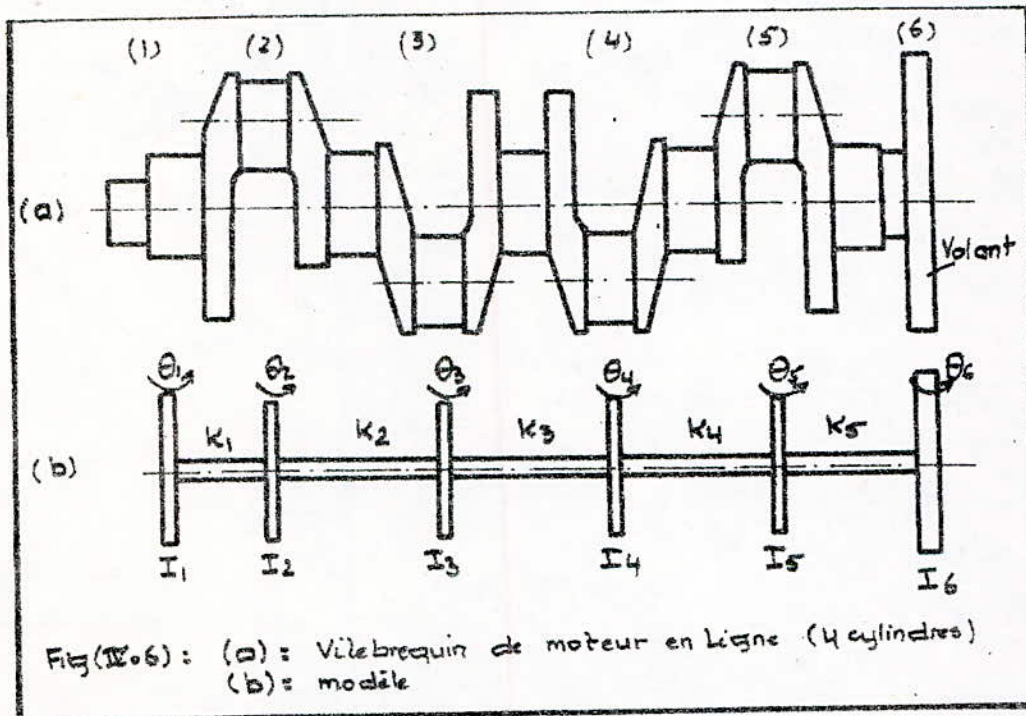
En prenant  $\epsilon = 10^{-8}$ , les valeurs propres de la matrice  $[C]$  sont obtenues avec suffisamment de précision pour le calcul des pulsations propres des lignes d'arbres.

---

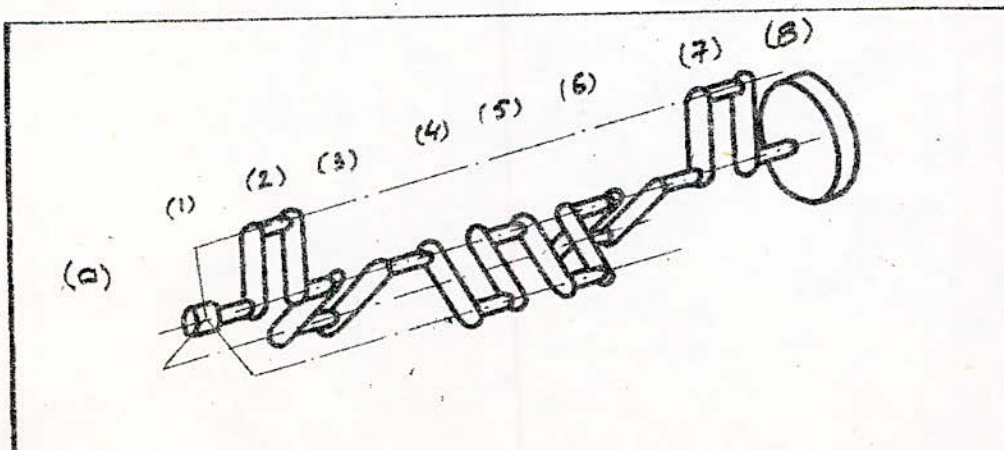
IV.3 ) APPLICATION DE L'ALGORITHME DE RUTISHAUSER POUR LA DETERMINATION DES PULSATIONS PROPRES DE TORSION DES VILEBREQUINS DE MOTEURS ALTERNATIFS (4 TEMPS).

IV.3-1 ) MOTEURS EN LIGNE

a - Moteur 4 cylindres : Fig (IV.6)



b - Moteur 6 cylindres : (Fig IV.7)



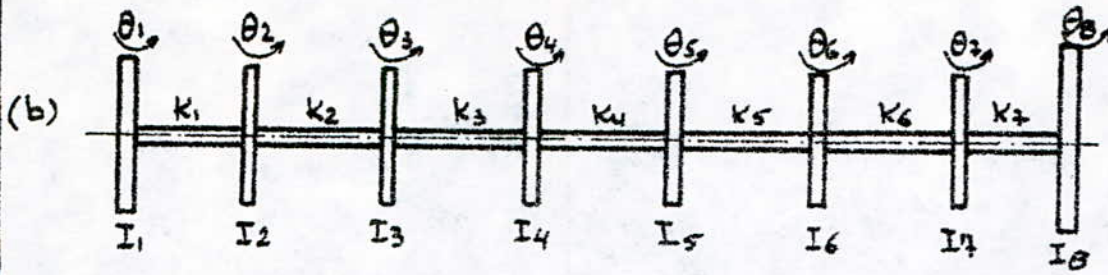


Fig (II.7) : (a) : vilebrequin de moteur en ligne (6 cylindres)  
(b) : modèle

### II.3-2) MOYEUR EN V :

a- Moteur 6 cylindres (V6) : Fig (II.8)

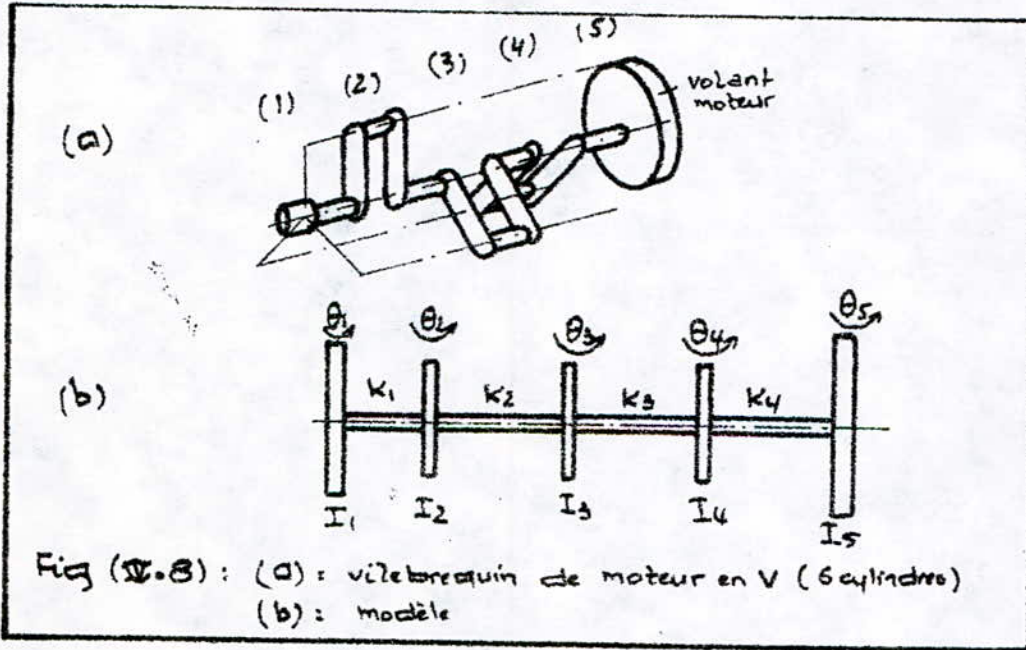
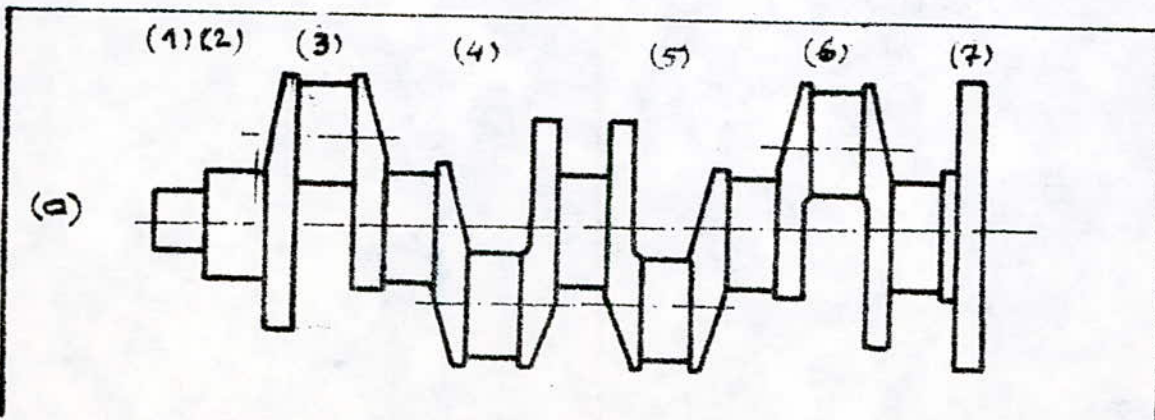
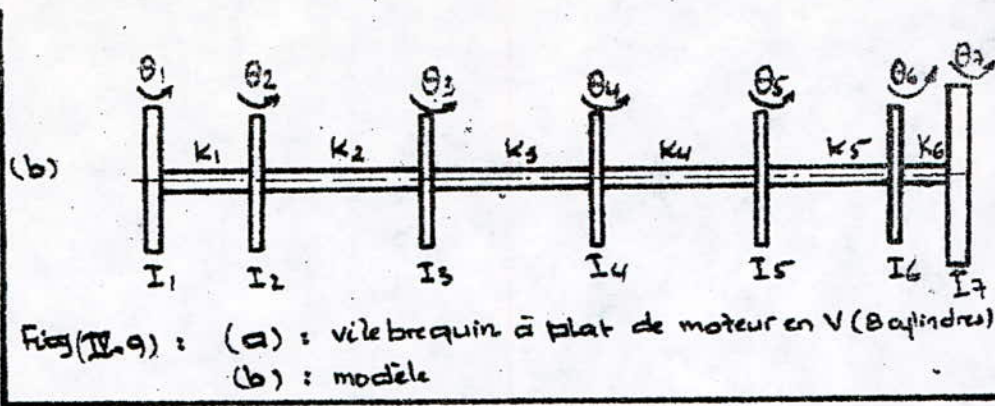


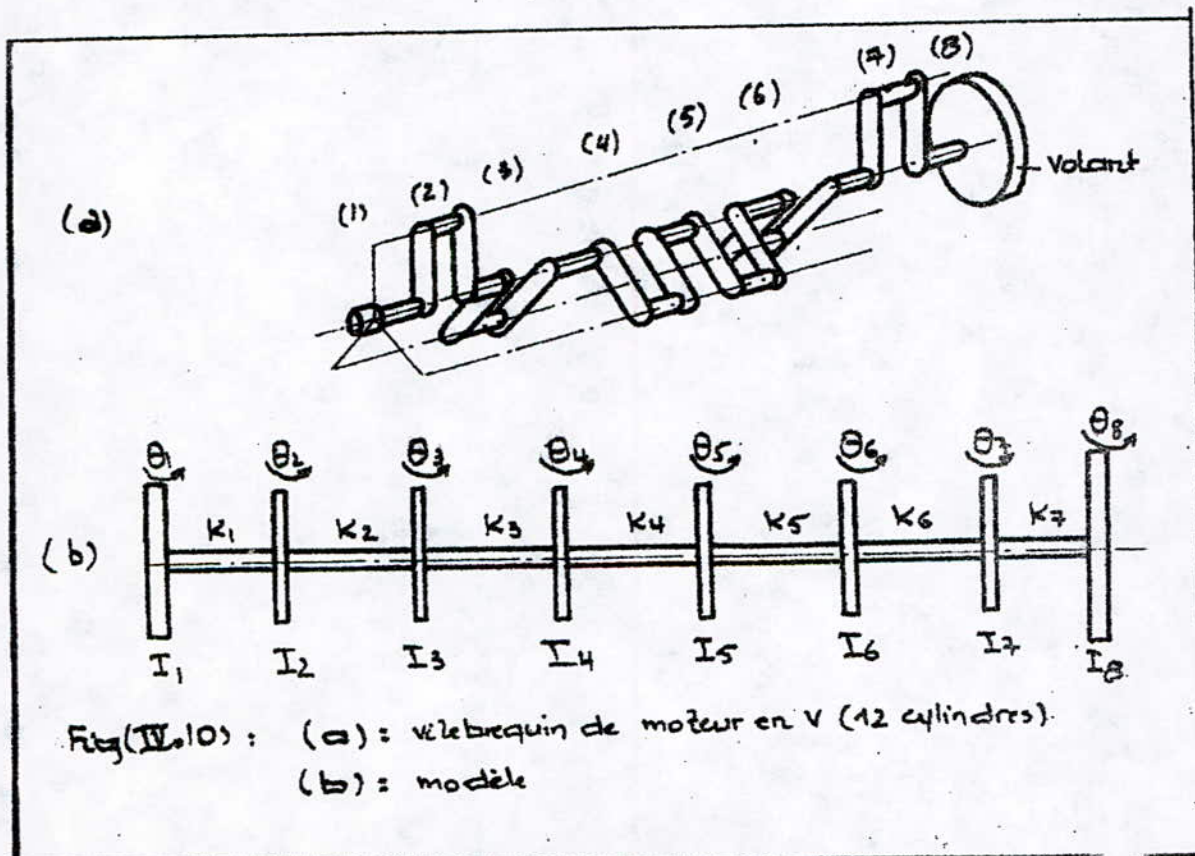
Fig (II.8) : (a) : vilebrequin de moteur en V (6 cylindres)  
(b) : modèle

b- Moteur 8 cylindres (V8) : Fig (II.9)





C- Moteur 12 cylindres (V12) : Fig(IV.10) :



### IV.3-3) DETERMINATION DES FREQUENCES PROPRES DE TORSION RELATIVES AU MOTEUR FBL413 :

Le vilebrequin et son modèle sont schématisés sur la figure (IV.9)

TAB.5: Tableau des moments d'inertie et des rigidités torsionnelles relatives au modèle du moteur FBL413

No des disques	Désignation	Moments d'inertie $I_i$ (kgm <sup>2</sup> )	Rigidités torsionnelles $K_i$ (Nm/rad)
1	Volant de l'amortisseur torsionnel	0,0930	98039
2	Poulie	0,0460	1282051
3	Manivelle du 1 <sup>er</sup> et 5 <sup>em</sup> cylindre	0,1430	1400560
4	Manivelle du 2 <sup>em</sup> et 6 <sup>em</sup> cylindre	0,0990	1400560
5	Manivelle du 3 <sup>em</sup> et 7 <sup>em</sup> cylindre	0,0990	1400560
6	Manivelle du 4 <sup>em</sup> et 8 <sup>em</sup> cylindre	0,1450	2252252
7	Volant moteur + couronne	1,5400	

Résultat :

Les pulsations propres du modèle de ligne d'arbres du vilebrequin à plat du FBL413 seront données sur une feuille à part au verso de la présente.



CALCUL DES PULSATIONS PROPRES DU VILEBREQUIN

DU MOTEUR F8L413 EN VIBRATIONS DE TORSION

=====

Disque No	Mt d'inertie ( kgm2 )	Troncon d'arbre No	Rigidite ( nm/rad )
1	.093	1	0
2	.046	2	98039
3	.143	3	.128205E+07
4	.099	4	.140056E+07
5	.099	5	.140056E+07
6	.145	6	.140056E+07
7	1.54	7	.225225E+07
		8	0

La ligne d'arbre est libre a ses deux extremités

\*\*\*\*\*  
 \* PULSATIONS PROPRES \*  
 \*\*\*\*\*

Mode No: !	OMEGA ! (rd/s)	! Vitesse de rotation ! (tr/min)
1	884.045	8446.29
2	1519.49	14517.5
3	3564.24	34053.2
4	5244.82	50109.7
5	6359.65	60761
6	7022.17	67090.8

#### IV.4 ) ETUDE DES RESONANCES

##### 1. Notion de vitesses dangereuses :

- Une ligne d'arbres qui est un système mécanique conservatif possédant des inerties et raideurs est caractérisée du point de vue vibratoire par :
  - des pulsations bien déterminées, les pulsations propres
  - des configurations particulières à chaque pulsation propre, les modes propres.
- La réponse d'un système excité par une action extérieure dépendra de la nature de cette action et de son point d'application. Il est donc important avant de faire l'étude d'un système en vibrations forcées, ou libres ou ralenti, de définir les vitesses dangereuses, la nature et l'intensité des actions mécaniques excitatrices.
- On entend par vitesses dangereuses (régime critique, fréquences de résonance) les vitesses pour lesquelles les pulsations des harmoniques de l'excitation périodique (Couple excitateur : couple dû aux gaz + celui dû aux inerties) d'amplitude non négligeable sont égales à l'une des pulsations propres de la ligne d'arbres.
- Ces oscillations sont souvent à l'origine de la destruction des engrenages, des clavettes et d'une façon générale, des lignes d'arbres par dépassement local de la limite de la fatigue.
- Le régime critique peut être schématisé sur un diagramme : (Résonance - excitation) qui consiste à placer :
  - en abscisses : les pulsations d'excitation.
  - en ordonnées : les pulsations propres de la ligne d'arbres.

L'intersection des horizontales correspondant aux pulsations propres avec les harmoniques nous permettra d'obtenir en abscisses le régime critique (vitesses dangereuses à éviter).

- On se limitera dans notre analyse au domaine de fonctionnement normal du moteur (Pour le moteur FBL413 :  $(1500 \div 2650) \text{ tr/min}$ ).

## 2. Sources d'excitations :

On distingue différemment :

- les sources électromagnétiques (cas de l'alternateur)
- les sources hydrauliques (hélices de bateaux, roues de pompes et turbines hydrauliques)
- les sources mécaniques (Balourds, engrenages, roulements, système bielle manivelle).

Etant donné que ce chapitre étudie les fréquences propres et les vitesses dangereuses des lignes d'arbres en vibrations de torsion ; nous nous contenterons uniquement de définir les sources mécaniques.

### 2.1) Balourds :

- Tous les rotors sont imparfaitement équilibrés statiquement, il existe toujours un balourd résiduel qui provoque des déformations de flexion responsables d'excitations en torsion. Ce phénomène de balourds peut être négligeable si une étude très poussée sur l'équilibrage des rotors avec application est faite.

- Lorsque les balourds existent, la pulsation de l'excitation qu'ils provoquent sera :

$$\omega_b = \frac{\pi N}{30} \text{ (rd/s)} ; N \text{ (tr/min)} : \text{vitesse de rotation du rotor.}$$

Il faut vérifier dans ce cas que :

$$\omega_i \pm 10\% \neq \frac{z N_j}{30} \quad \text{pour éviter la résonance.}$$

Avec ;  $\omega_i$  : pulsation propre du mode n° i (rd/s)

$N_j$  : vitesse de rotation de la branche j du système.

## 2.2 ) Engrenages :

- Soit  $N$  : la vitesse de rotation d'une roue dentée portant  $(n)$  dents.  
Alors la pulsation d'excitation correspondante est :  $\omega_d = n \cdot \frac{\pi \cdot N}{30}$ ,  $N$  (tr/m)
- La transmission du couple par les dentures est discontinue car le nombre de dents en prise n'est pas constant dans le temps ; ce qui entraîne une variation périodique du couple. Alors les harmoniques de ce couple auront pour pulsations  $\omega_d, 2\omega_d, 3\omega_d, \dots$
- Remarque :  
Les erreurs d'exécution de l'engrenage et de son support (erreurs de profil, de division, déformations de flexion, arbres mal alignés ou pignons excentrés) sont aussi génératrices des vibrations de torsion.
- Condition de non résonance :  

$$k\omega_d \neq \omega_i \quad \begin{cases} k=1,2,\dots \\ \omega_i: \text{pulsation propre du mode } (i) \end{cases}$$

## 2.3 ) Roulements :

- Les excitations provoquées par les roulements montés sur la ligne d'arbre considérée sont quelques fois considérables, on y trouve des spectres d'excitation relativement riches. En plus d'un spectre fondamental de pulsation  $\omega_f = n \cdot \frac{\pi N}{30}$ , ( $n$  : nombre d'éléments roulants) ; il peut exister d'autres pulsations telles :
  - Pulsation du train d'éléments roulants

- Pulsation de l'élément roulant
- Pulsation de leur harmoniques

Ces trois dernières pulsations sont possibles dans le cas où le roulement est usagé ou si sa qualité laisse à désirer.

#### 2.4) Système bielle-manivelle :

- Les vibrations de torsion sont surtout dues aux excitations provoquées par le système (bielle-manivelle).

La bielle exerce sur le maneton du vilebrequin un effort cyclique dont la composante tangentielle donne un couple périodique de période :  $T = 2\pi / \omega$ ,  $\omega$  (rd/s) : vitesse de rotation du vilebrequin.

Pour un moteur (4 temps) : la période en radians est de  $4\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\omega}$ .

- Reprenons le développement en série de Fourier du couple total  $C_m(\theta)$  défini dans le chapitre (II).

$$C_m(\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n}{2} \theta + b_n \sin \frac{n}{2} \theta \right) ; \text{ comme } \theta = \omega t$$

$$\text{Alors ; } C_m(\theta) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n}{2} \omega t + b_n \sin \frac{n}{2} \omega t \right) \quad (\text{IV-13})$$

Donc il y a vitesse dangereuse lorsque :

$$\omega_i = \frac{n}{2} \omega \quad (\text{IV-14})$$

Avec ;  $\omega_i$  : pulsation propre du mode propre  $n^\circ$  (i)  
 $n/2$  : ordre de l'harmonique  $n$  ( $n$  : nbre d'harmoniques)  
 $\omega$  : vitesse de rotation du vilebrequin.

- La vitesse dangereuse  $\omega_i = (n/2)\omega$  est à prendre en considération lorsque le travail de l'harmonique d'ordre  $(n/2)$  est suffisant pour induire des oscillations de torsion relativement importantes. Il faut donc rechercher le travail exercé par toutes les harmoniques (es

Couples extérieures pour déceler ceux qui risquent d'être dangereux. Cette étude peut être traduite par le diagramme (Résonance-excitation) défini précédemment.

### 3. Adaptation de la ligne d'arbre dans la plage de fonctionnement du moteur :

- La connaissance des pulsations propres et des sources d'excitations possibles permet de définir, si elles existent, les vitesses dangereuses (régime critique) dans la plage de fonctionnement du moteur.
- Si une ou plusieurs vitesses dangereuses appartiennent à la plage de fonctionnement, alors dans ce cas il serait nécessaire d'apporter des modifications à la ligne d'arbre, soit pour rejeter les vitesses dangereuses en dehors de la plage de fonctionnement, soit pour diminuer les amplitudes des oscillations de torsion.
- Ces modifications portent souvent sur les rigidités torsionnelles de certains éléments (paliers, accouplements élastiques, ...) et sur les moments d'inerties des disques. Si ces opérations ne sont pas suffisantes, dans ce cas il faut faire une étude de vibrations forcées en tenant compte des amortissements internes et externes ; on déterminera ainsi les contraintes dues aux oscillations de torsion de la ligne d'arbres. Si ces contraintes dépassent les limites imposées par les conditions de résistance des matériaux, il serait nécessaire dans ce cas de monter à une extrémité libre de la ligne d'arbres, un ou plusieurs amortisseurs de torsion.

### 3.1) Influence de la rigidité torsionnelle des tronçons d'arbres sur les pulsations propres :

- La modification de la rigidité torsionnelle d'un tronçon d'arbre n'est possible que si ce tronçon est le siège d'un nœud de vibration, il serait donc inutile de modifier les rigidités torsionnelles des autres tronçons pour déplacer la vitesse dangereuse.
- Pour les premiers modes, les nœuds de vibration sont situés près des disques à inertie grande ou dans les tronçons à rigidité torsionnelle faible. Comme en général le montage des accouplements élastique de liaison se fait près des disques de grandes inerties (Volant), les nœuds de vibration sont donc presque toujours localisés dans les accouplements. Il serait possible alors en modifiant la rigidité torsionnelle de ces accouplements de changer la pulsation propre de la ligne d'arbre, autrement dit s'éloigner du régime critique  $\Rightarrow$  1<sup>ère</sup> opération à envisager.
- Remarque :  
Pour faciliter le choix de la rigidité torsionnelle de l'accouplement on notera que pour le 1<sup>er</sup> mode de vibrations la pulsation propre varie sensiblement comme la racine carrée de la rigidité torsionnelle du tronçon situé au niveau du nœud de vibration. Mais si cette modification n'est pas suffisante, on agira sur les inerties, car toute modification sur les autres rigidités est pratiquement sans influence.

### 3.2 ) Influence du moment d'inertie des disques sur les pulsations propres :

- La modification du moment d'inertie du disque le plus éloigné du nœud de vibration a une grande influence sur les pulsations propres que celle des inerties des disques situés de part et d'autre d'un nœud.
- D'une façon générale on évite, pour le 1er mode, que le nœud de vibration soit dans le vilebrequin et l'on choisit l'inertie du volant pour que ce nœud soit dans l'accouplement.

### 3.3 ) Solution Damper (Amortisseur de torsion) :

Cas de la non suffisance des opérations précédentes.

- Lorsque les deux opérations précédentes ne donnent pas satisfaction, on peut monter sur la ligne d'arbre un amortisseur de torsion. Ce dernier est d'autant plus efficace que sa position est éloignée du nœud car son oscillation et par suite son amortissement sont importants.

### 4. Application :

- Etude de la courbe (Résonance - Excitation) relative au vilebrequin du moteur FBL413.

Reprenons les valeurs des 6 pulsations propres trouvées par la méthode de Ritzschawser :

$$\omega_1 = 884,045 \text{ (rd/s)}, \omega_2 = 1519,49 \text{ (rd/s)}, \omega_3 = 3564,24 \text{ (rd/s)}, \omega_4 = 5244,82 \text{ (rd/s)}$$

$$\omega_5 = 6359,65 \text{ (rd/s)}, \omega_6 = 7022,17 \text{ (rd/s)}$$



Il y a résonance si :

$$\omega_i = \frac{n}{2} \omega \quad ; \quad i = 1, \dots, 6 \quad \text{or} \quad \omega = \frac{\pi N}{30}$$

il vient :  $\omega_i = \frac{\pi N}{60} \cdot n$  ,  $N$  (tr/min)

•• choix du nombre d'harmoniques :  $n = 10$

•• plage de fonctionnement normal du moteur FBL413 :

$$( 1500 \div 2650 ) \text{ tr/min}$$

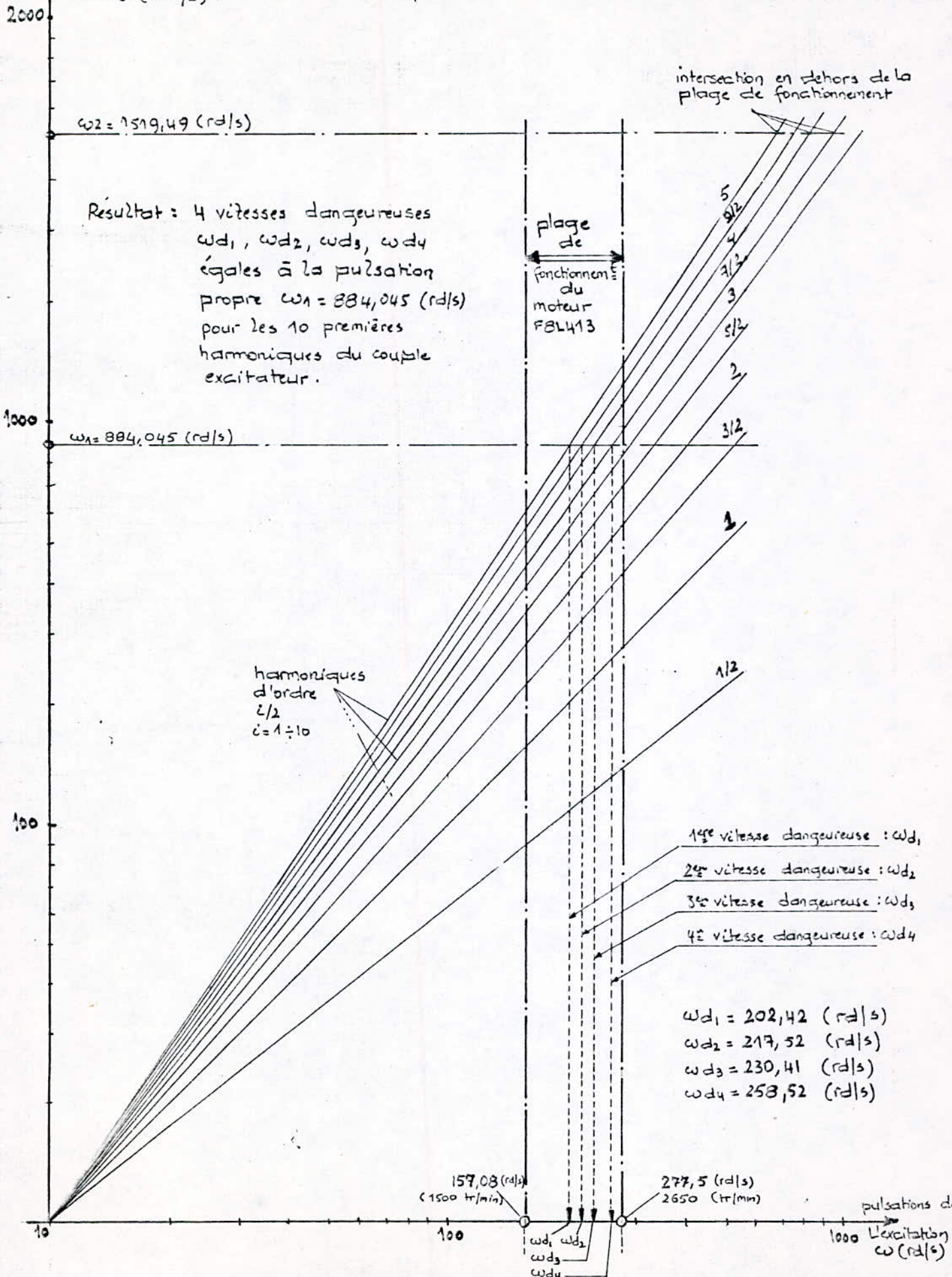
Alors , pour  $N = 2650$  (tr/min), la condition de résonance devient :

$$\omega_i = (138,7536) \cdot n$$

• La courbe (Résonance - Excitation) sera tracé à part sur une feuille de papier millimétré. ( Voir fig. IX.11 ) .

$\omega_i$  (rad/s)

Fig (II.11) : Courbe (Résonance - Excitation)



intersection en dehors de la plage de fonctionnement

Résultat : 4 vitesses dangereuses  $\omega_{d1}, \omega_{d2}, \omega_{d3}, \omega_{d4}$  égales à la pulsation propre  $\omega_1 = 384,045$  (rad/s) pour les 10 premières harmoniques du couple excitateur.

plage de fonctionnement du moteur FBL413

harmoniques d'ordre  $i/2$   
 $i = 1 \div 10$

- 1<sup>ère</sup> vitesse dangereuse :  $\omega_{d1}$
- 2<sup>ème</sup> vitesse dangereuse :  $\omega_{d2}$
- 3<sup>ème</sup> vitesse dangereuse :  $\omega_{d3}$
- 4<sup>ème</sup> vitesse dangereuse :  $\omega_{d4}$

$\omega_{d1} = 202,42$  (rad/s)  
 $\omega_{d2} = 217,52$  (rad/s)  
 $\omega_{d3} = 230,41$  (rad/s)  
 $\omega_{d4} = 253,52$  (rad/s)

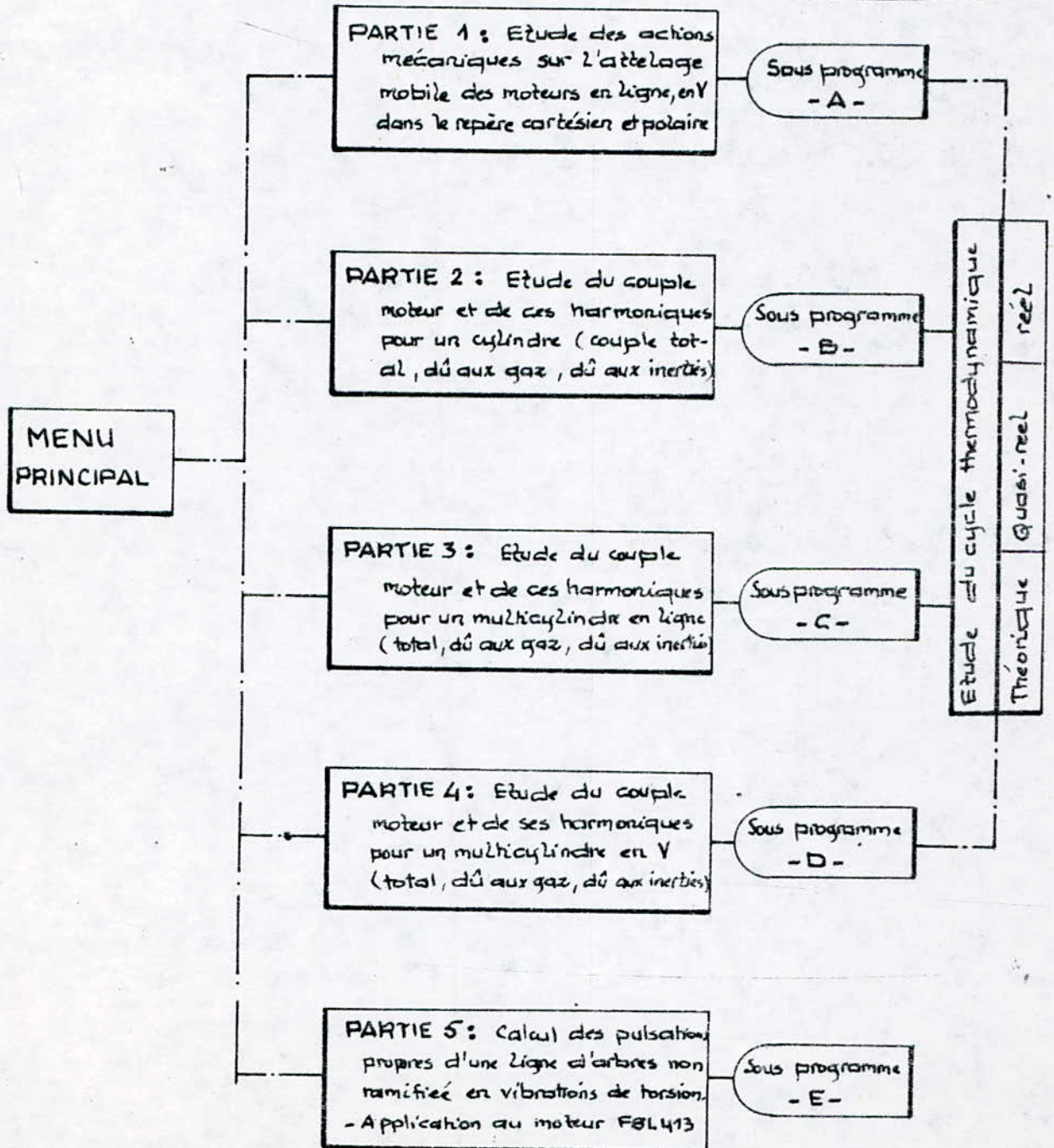
157,08 (rad/s)  
 (1500 tr/min)

277,5 (rad/s)  
 2650 (tr/min)

pulsations de l'excitation  $\omega$  (rad/s)

$\omega_{d1}$   
 $\omega_{d2}$   
 $\omega_{d3}$   
 $\omega_{d4}$

# Organigramme du programme SYNTHESE



• SOUS PROGRAMME -A- :

- Etude cinématique et dynamique du moteur en ligne, en V avec embiellage (Bielle-Bielle) et (Bielle-Bielle à fourche), pour un angle de rotation de vilebrequin variant de 0 à 720° avec un pas de 1°.
- Etude des actions mécaniques dans le repère cartésien.
- Etude actions mécaniques dans le repère polaire.

Actions mécaniques	Moteur en ligne		Moteur en V (Bielle-Bielle)		Moteur en V (Bielle-Bielle à fourche)	
	repère cartésien	repère polaire	repère cartésien	repère polaire	repère cartésien	repère polaire
1- Au niveau du maneton	$\left. \begin{matrix} X_A \\ Y_A \end{matrix} \right\} \rightarrow F_A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 1 <math>X_{1A}</math> <math>Y_{1A}</math></li> <li>• repère 2 <math>X_{2A}</math> <math>Y_{2A}</math></li> </ul>	$\left. \begin{matrix} X_A \\ Y_A \end{matrix} \right\} \rightarrow F_A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ds le repère 1 <math>X_{1A}, Y_{1A}</math></li> <li>• ds le repère 2 <math>X_{2A}, Y_{2A}</math></li> </ul>	$\left. \begin{matrix} X_{A1} \\ Y_{A1} \\ X_{A2} \\ Y_{A2} \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} F_{A1} \\ F_{A2} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 1 <math>X_{1A}, Y_{1A}</math> <math>X_{1A2}, Y_{1A2}</math> <math>X_{1A}, Y_{1A}</math></li> <li>• repère 2 <math>X_{2A1}, Y_{2A1}</math></li> <li>• repère 3</li> </ul>
2- Au niveau de l'axe du piston	$\left. \begin{matrix} X_B \\ Y_B \end{matrix} \right\} \rightarrow F_B$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 2 <math>X_{2B}</math> <math>Y_{2B}</math></li> </ul>	Piston (1) $\left. \begin{matrix} X_{B1} \\ Y_{B1} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{B1}$ Piston (2) $\left. \begin{matrix} X_{B2} \\ Y_{B2} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{B2}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 2 <math>X_{2B1}</math> <math>Y_{2B1}</math></li> <li>• repère 3 <math>X_{3B2}</math> <math>Y_{3B2}</math></li> </ul>	Piston (1) $\left. \begin{matrix} X_{B1} \\ Y_{B1} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{B1}$ Piston (2) $\left. \begin{matrix} X_{B2} \\ Y_{B2} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{B2}$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 2 <math>X_{2B1}</math> <math>Y_{2B1}</math></li> <li>• repère 3 <math>X_{3B2}</math> <math>Y_{3B2}</math></li> </ul>
3- Au niveau de la chemise piston	$\left. \begin{matrix} X_C \\ Y_C \end{matrix} \right\} \rightarrow F_C$		Piston (1) $\left. \begin{matrix} X_{C1} \\ Y_{C1} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{C1}$ Piston (2) $\left. \begin{matrix} X_{C2} \\ Y_{C2} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{C2}$		Piston (1) $\left. \begin{matrix} X_{C1} \\ Y_{C1} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{C1}$ Piston (2) $\left. \begin{matrix} X_{C2} \\ Y_{C2} \end{matrix} \right\} \rightarrow F_{C2}$	
4- Aux niveaux des tourillons	$\left. \begin{matrix} X_E \\ Y_E \end{matrix} \right\} \rightarrow R_E$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 1 <math>X_{1E}</math> <math>Y_{1E}</math></li> </ul>	$\left. \begin{matrix} X_E \\ Y_E \end{matrix} \right\} \rightarrow R_E$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 1 <math>X_{1E}</math> <math>Y_{1E}</math></li> </ul>	$\left. \begin{matrix} X_E \\ Y_E \end{matrix} \right\} \rightarrow R_E$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 1 <math>X_{1E}</math> <math>Y_{1E}</math></li> </ul>
5- Au niveau de l'articulation des têtes de bielles pour l'embellage (Bielle-Bielle)			$\left. \begin{matrix} X_C \\ Y_C \end{matrix} \right\} \rightarrow F_C$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• repère 2 <math>X_{2C}</math> <math>Y_{2C}</math></li> <li>• repère 3 <math>X_{3C}</math> <math>Y_{3C}</math></li> </ul>		

### • SOUS PROGRAMME - B - :

- Etude du couple moteur pour un cylindre  
(Couple total, dû aux gaz, dû aux inerties)
- Etude des harmoniques du couple moteur pour un cylindre (harmonique du couple total, dû aux gaz, dû aux inerties).

Angle de rotation  $\theta$  variant de  $0^\circ$  à  $720^\circ$  (Pas:  $1^\circ$ )

Notations utilisées dans ce sous programme :

		amplitudes des :
- Couple moteur total : CPT1		- harmonique du couple total : AN, BN
- Couple dû aux gaz : CPG1		- harmonique du couple dû aux gaz : ANG, BNG
- Couple dû aux inerties : CPI1		- harmonique du couple dû aux inerties : ANI, BNI

### • SOUS PROGRAMME - C - :

- Etude du couple moteur pour un multicylindre en ligne  
(Couple total, dû aux gaz, dû aux inerties)
- Etude des harmoniques du couple moteur pour un multicylindre en ligne (harmonique du couple total, dû aux gaz, dû aux inerties).

Angle de rotation  $\theta$  variant de  $0^\circ$  à  $720^\circ$  (Pas:  $1^\circ$ )

Notations utilisées dans ce sous programme :

		amplitudes des :
- Couple total : CPTL		- harmoniques du couple total : ANL, BNL
- couple dû aux inerties : CPIL		- harmoniques du couple dû aux gaz : ANGL, BNGL
- couple dû aux gaz : CPG L		- harmoniques du couple dû aux inerties : ANIL, BNIL

- Le sous programme - C - dépend du sous programme - B - car le couple moteur d'un multicylindre est obtenu par composition du couple instantané du monocylindre.

### • SOUS PROGRAMME - D - :

- Il exécute le même travail que le sous programme - C - mais dans ce cas pour un multicylindre en V.

• le sous programme - D - dépend aussi du sous programme - B -

- Notons que les trois sous programme B, C et D dépendent du sous programme - A - car sans les résultats de l'étude dynamique pour un cylindre on ne pourra jamais calculer le couple moteur et ses harmoniques.
- En effet le sous programme - A - dépend du type de combustible utilisé ( Diesel ou Essence ) et du type de cycle thermodynamique utilisé ( cycles théoriques , quasi-reels et reels ) .

#### • SOUS PROGRAMME - E -

• Il calcule les pulsations propres de n'importe quel type de lignes d'arbres non ramifié ( ligne d'arbres encastree à ses extrémités , libre à ses extrémités , libre à l'une ou moins de ses extrémités ) .

• Notations utilisées :

- Erreur relative entre deux itérations des éléments de la matrice quasi triangulaire ( rigidité - inertie ) relatifs aux valeurs propres  $\lambda_i = \omega_i^2$  ,  $\omega_i$  : pulsation propre
- Moment d'inertie des disques :  $IN(I)$  ,  $I = 1 \div NN$
- Rigidité torsionnelle des tronçons d'arbre :  $K(I)$  ,  $I = 1 \div NN+1$   
ou  $NN$  : nombre de disques d'inertie .

# Conclusion

Le présent ouvrage a été réalisé en vue d'atteindre le but recherché, autrement dit la mise au point d'un outil nécessaire pour analyser et contrôler le comportement vibratoire des moteurs à combustion interne (en vibration de torsion). Donc c'est une bonne partie d'une synthèse d'analyse dynamique de leurs parties internes qu'on souhaitera être complétée dans les semestres à venir par des études d'équilibrage des vilebrequins et de dimensionnement des principaux organes (Piston, bielle, manivelle, volant, amortisseur de vibrations, ...) et si c'est possible une étude de vibrations de flexion des lignes d'arbres non ramifiées.

Par ailleurs, deux sérieux problèmes ont été rencontrés durant l'étude, le premier s'est manifesté par l'absence d'appareils enregistreurs de cycles thermodynamiques réels de moteurs thermiques (Voir Remarque en annexe : Fin de l'appendice 2) afin de faire une vérification pratique et réelle des résultats de notre étude. La solution de remède à ce problème ne nous a pas semblé très efficace étant donné qu'on s'est basé sur des cycles théoriques et sur des cycles quasi-réels proches des réels mais obéissant à des hypothèses théoriques.

Le second problème préoccupant est la mise en œuvre d'un appareil de mesure des fréquences propres de torsion dont le but est de les assimiler à celles trouvées par le phénomène

de modélisation de lignes d'arbres en utilisant des algorithmes exploitables par ordinateur.

Le projet de conception du moteur thermique alternatif à combustion interne est appelé à entrer en réalisation, il lui faut donc tous les moyens matériels possibles, à commencer par ceux mentionnés auparavant.

Pour terminer notre étude, il nous a semblé intéressant d'appliquer nos résultats au moteur F4L912 pour le calcul des actions mécaniques s'exerçant sur son attelage mobile, et au moteur F8L413 pour le calcul des pulsations propres de son vilebrequin en vibration de torsion et la vérification de l'existence de l'état critique (vitesses dangereuses) par une courbe caractéristique (Résonance - Excitation)

Enfin, pour terminer, j'espère que ce modeste travail a atteint de près ou de loin le but recherché et qu'il puisse enrichir la compréhension de l'analyse dynamique des moteurs et contribuer à la future réalisation du premier moteur en Algérie.

---



# Bibliographie

- M. MENARDON, D. JOLIVET :

## LES MOTEURS

(Moteur à explosion, Moteur rotatif, Moteur diesel) . . . . . Editions  
CHOTARD

- B. SWOBODA :

Mécanique des moteurs alternatifs . . . . . Société des  
éditions technip

- R. BRUN :

Science et technique du moteur diesel

industriel et de transport . . . . . Société des  
éditions technip

Tome 2

- QUILLET :

Encyclopédie des sciences industrielles . . . . . Editions  
QUILLET

- M. BOUKABACHE

Etude des vibrations de torsion du  
groupe motopropulseur des camions SNI

SONACOME (Thèse de magister) . . . . .

- Y. BOROVSKIKH

Organisation, entretien et réparation des

automobiles . . . . . Editions  
MIR Moscou

- S. TIMOSHENKO \*

Théorie des vibrations . . . . . Librairie  
Polytechnique Paris 1954

- B. GIRONNET, G. LOURADOUR

Vibrations et vitesses dangereuses de torsion

des lignes d'arbres . . . . . Technique  
de l'ingénieur

••• Thèses d'ingénieur •••

• BOUTALEB. S

Dimensionnement de La manivelle  
d'un vilebrequin . . . . . Promotion  
JAN 87

• LAAROUSSI. M

Programme pour la détermination des  
pulsations propres et déformées modales  
des arbres en vibrations de torsion . . . . . Promotion  
JUN 86

• BOUAFIA. A

Logiciel calculant le couple moteur et  
l'irrégularité cyclique d'un multicylindre . . . . . Promotion  
JUN 86

• HAMIDI. L

Elaboration d'un programme pour le calcul  
des actions mécaniques appliquées par  
la bielle sur le maneton d'un vilebrequin . . . . . Promotion  
JUN 86

---

• Cahier de F102 (RDM1) Professeur: A. ALDJANOV . . . . . Année  
84-85

• Cahier de MTH1

Machines thermiques 1 (Professeur: I. GAD)

(Théorie des moteurs à combustion interne) . . . . . Année  
85-86

• Avant projet de MTH1 (Professeur: M. Dobré)

Etude thermodynamique d'un  
moteur BMW B50 . . . . . Année  
78-79

• Cours (extraits) de Machine thermique 1

F147 Assistant: JF. Cousirier  
Assistant: JP. Muller . . . . . Année 88

REV. 2. THE DIME