

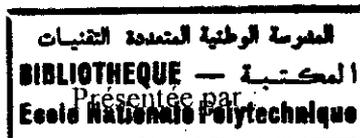
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL**

**THESE DE MAGISTER**



Laabed HAKIMI  
Ingénieur d'Etat

**ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS DES VIBRATIONS  
DES RESERVOIRS FLEXIBLES  
PARTIELLEMENT REMPLIS DE LIQUIDE**

Soutenue le 24 Juin 1998 devant le jury composé de :

MM:

M. K. Berrah

B. Tiliouine

S. Belkacemi

M. Hamoutène

Maître de conférences (ENP)

Professeur (ENP)

Maître de conférences (ENP)

Maître de conférences (ENP)

Président

Directeur de Thèse

Examineur

Examineur

Mme

Z. Laieb

Chargée de cours (ENP)

Examineur

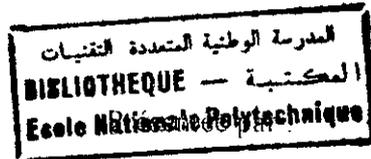
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**DEPARTEMENT DE GENIE-CIVIL**

**THESE DE MAGISTER**



Laabed HAKIMI  
Ingénieur d'Etat

**ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS DES VIBRATIONS  
DES RESERVOIRS FLEXIBLES .  
PARTIELLEMENT REMPLIS DE LIQUIDE**

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*A ma femme  
en témoignage de reconnaissance*

*A Amine et Ahlèm*

## Remerciements



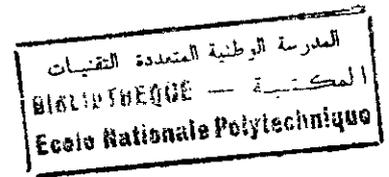
Mes plus vifs remerciements vont, tout d'abord à Monsieur B.TILIOUINE, Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique, qui a suivi et guidé avec un grand enthousiasme, le déroulement de ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de ma très forte reconnaissance.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur . M.K. Berrah Maître de conférence qui a bien voulu accepter de Présider le Jury de soutenance et ce, malgré ses nombreuses occupations.

Je remercie aussi tout particulièrement Messieurs S. Belkacemi et M. Hamoutène., Maîtres de conférence ainsi que Madame B. Laib Chargée de cours, qui ont bien voulu examiner ce travail et me faire part de leurs remarques, et suggestions.

Ce travail n'aurait jamais pu voir le jour sans le soutien, l'amitié, et l'aide de quelques personnes du Centre National d'Etudes et de Recherches Intégrées du Bâtiment (CNERIB; je saisis cette opportunité pour leurs adresser mes chaleureux remerciements.

# SOMMAIRE



## Chapitre I

1. Introduction	1
1.1. Revue bibliographique	2
1.2. Objectifs de la présente étude	5
1.3. Plan de l'étude	5

## Chapitre II

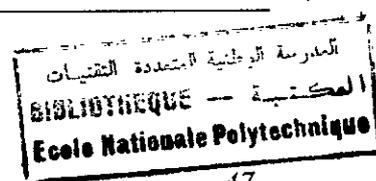
2. THEORIE DE BASE DES COQUES MINCES ET EQUATION DU MOUVEMENT DU FLUIDE	7
2.1. Système considéré	8
2.2. Eléments structuraux des réservoirs considérés	10
2.3. Modes de vibration des systèmes coques-fluide	11
2.4. Equation du mouvement du liquide	13
2.4.1. Hypothèses fondamentales	13
2.4.2. Equation du mouvement	13
2.4.3. Conditions aux limites	14
2.4.4. Solution de L'équation de Laplace	15
2.5. Equations gouvernant le mouvement de la coque	17
2.5.1. Hypothèses fondamentales	17
2.5.2. Energie potentielle de la coque	17
2.5.3. Energie cinétique de la coque	23

## Chapitre III

3. Modélisation numérique	24
3.1. Introduction	25
3.2. Modélisation de la coque	26
3.3. Fonctions de forme	29

## Chapitre IV

4. CONSTRUCTION DES MARTRICES	33
4.1. Matrice de rigidité de la coque	33
4.2. Matrice masse de la coque	39
4.3. Matrice masse ajoutée	40
4.4. Problème aux valeurs propres	46



## Chapitre V

## 5. METHODE DE CALCUL ET PROGRAMMATION

47

## Chapitre VI

6. RESULTATS ET DISCUSSION	51
6.1. Vibration Naturelle d'un réservoir vide	53
6.1.1. Comparaison avec d'autres investigations	53
6.1.2. Effet du rapport d'élanement (L/R)	55
6.1.3. Vibration en modes $\cos(n\theta)$	56
6.1.4. Variation des fréquences naturelles en fonction du nombre d'ondes circonférentielles	57
6.2. Cas du réservoir plein	58
6.2.1. Etude de la convergence de la matrice masse ajoutée en fonction du nombre d'éléments	58
6.2.2. Comparaison des résultats avec d'autres études	60
6.2.3. Influence du rapport L/R (élanement du réservoir)	61
6.2.4. Influence de l'épaisseur sur les fréquences	62
6.2.5. Etude des pressions hydrodynamiques	64
6.3. Réservoirs partiellement pleins	67
6.3.1. Comparaison des résultats	67
6.3.2. Influence de la hauteur du liquide sur les fréquences naturelles	67
6.3.3. Modes propres des réservoirs partiellement remplis	69
6.3.4. Distribution de la pression hydrodynamique	76
6.4. Calcul approché des réservoirs partiellement remplis	77
6.5. Coefficient de masse effective	80
6.6. Résultats pratiques	82
6.6.1. Cas des réservoirs en acier	82
6.6.2. Cas des réservoirs en béton	84
6.7. Réservoirs à épaisseurs variables	85
6.8. Réponse maximale des réservoirs à une excitation sismique	89

## Chapitre VII

## 7. CONCLUSIONS GENERALES

92

## BIBLIOGRAPHIE

96

## ANNEXES

103

liste des symboles	104
Fonctions de Bessel , et coefficient $b_{ni}$	108

ملخص:

إن الهدف من هذه الدراسة هو تحليل السلوك الديناميكي للخزانات المرنة، المملوءة نسبياً بسائل. إن طريقة العناصر المتناهية هي المستعملة في القسم القشري، مرفوقة بمعالجة تحليلية للجزء السائل. تم تحرير برنامج حساب لهذا الغرض. النتائج المحصل عليها تطابق جيداً النتائج المحصل عليها بطرق أخرى. وقد تمت دراسة الخزانات ذوات السمك المتغير بإدخال سمك موحد مكافئ. لقد درس أيضاً مجال صلاحية إحدى الطرق التقريبية وكذا معامل الكتلة الفعالة. لأهداف تطبيقية، نعطي أيضاً بعض الخطوط البيانية لحساب الذبذبات الطبيعية. في النهاية نبين تأثير طريقة حساب الذبذبات على مقادير الجهود الناتجة من جراء الهزات الأرضية.

#### Résumé:

*L'objet de la présente étude est l'analyse du comportement dynamique des réservoirs flexibles partiellement remplis de liquide. La méthode des éléments finis pour la modélisation de la partie coque, est utilisée conjointement avec un traitement analytique de la partie fluide. A cet effet, un programme de calcul est élaboré. Les résultats de cette étude sont en très bonne concordance avec les résultats obtenus par d'autres auteurs. Le cas des réservoirs présentant des épaisseurs variables est étudié ce qui a permis de définir une épaisseur uniforme équivalente. Aussi, le domaine de validité d'une méthode approximative de calcul des fréquences fondamentales ainsi que le coefficient de masse effective sont précisés. Pour les besoins de la pratique, on donne quelques abaques facilitant la détermination du paramètre de fréquence. Enfin une illustration de l'incidence de la fréquence de vibration sur l'évaluation de la réponse sismique est présentée.*

**Mots clés:** réservoir, coque, fluide, interaction, séisme, vibration, élément finis, masse ajoutée, pression, épaisseur variable .

#### Abstract :

*A study on dynamic behavior of flexibles tanks, partially filled with liquid is presented. The finite elements method is used for the discretisation of the shell, combined with an analytical treatment of liquid region. To this effect, a digital program is formulated. The results obtained are in very good agreement with those obtained by other authors. The case of the tanks presenting a variable thickness are studied and an equivalent uniform thickness is obtained. Also, the domain of validity of an approximate approach of computation of the fundamental frequencies and the effective coefficient mass are specified. For the needs of practice, some charts are established facilitating the determination of the frequency parameter. Finally, an illustration of the impact of the frequency of vibration on the assessment of the seismic response is presented.*

**Keys words:** tank, shell, fluid, interaction, earthquake, vibration, finite element,, added mass, pressure, non uniforme thickness

# CHAPITRE 1

## INTRODUCTION

## INTRODUCTION

### 1.1. Revue bibliographique:

Les coques sont des structures très performantes, largement utilisées depuis longtemps. Les publications concernant aussi bien leur comportement statique que dynamique sont abondantes.

Aron, en 1874 a été le premier à présenter une formulation d'une théorie minces, en partant des équations générales de l'élasticité. Il a été suivi par Love en 1888, et sa théorie est communément appelée " approximation de Love ".

Depuis ce temps et jusqu'à nos jours, les chercheurs n'ont pas cessé d'examiner et de réexaminer la théorie élastique des coques minces. [55, 62-64 ]

Les coques cylindriques, ont fait l'objet d'études particulières. A cet effet, Arnold et Waburton [55] ont dérivé les équation dynamiques des coques cylindriques uniformes en utilisant les méthodes énergétiques, les relations contraintes déformations de Timoshenko et les équations de Lagrange.

Par ailleurs, un nombre important de problèmes d'engineering concerne les structures renfermant un fluide. La présence de ce dernier altère le comportement de la structure en mouvement et les déformations de la structure sont à l'origine de la modification des charges transmises par le fluide. Dans ce cas, on parle de **système couplé** et ce type de problèmes est appelé **interaction fluide-structure**.

Le problème de l'interaction dynamique entre le liquide en mouvement et les déformations élastiques des parois des réservoirs est d'un intérêt fondamental dans un nombre important d'applications (génie civil, industrie pétrolière et aérospatiale, installation nucléaire etc.)

Dans l'analyse de ces structures la connaissance de leurs caractéristiques dynamiques (fréquences propres et modes propres associés) constitue l'étape la plus importante dont dépend le reste de l'étude de la réponse sismique.

Une des anciennes études des effets dynamiques sur les récipients cylindriques a porté sur la réponse sismique des réservoirs encastrés au sol. Ce travail a été réalisé dans les

années 40 et 50 par Jacobson [1] et Jacobson et Ayre [2]. Dans ces investigations le réservoir a été considéré **rigide** et la réponse dynamique du fluide a été observée. Un traitement mathématique rigoureux de ce problème a été développé pour le cas des petits déplacements du liquide. Il s'agissait de trouver une expression du potentiel de vitesse du liquide satisfaisant l'équation de Laplace et les conditions aux limites appropriées à la surface du liquide et à l'interface fluide-coque.

Baron et Skalak [3] présentent une étude mathématique du problème en étudiant des réservoirs simplement supportés sur une extrémité et libre à l'autre. Le mode de déformation de la coque vide a été utilisé comme coordonnée généralisée du système coque-fluide. Cette méthode est purement mathématique est d'une application très difficile pour des conditions aux limites beaucoup plus complexes.

Pour analyser les structures, il est de coutume de travailler avec un système mécanique équivalent avec un degré de liberté. Housner [4, 5] a développé en 1963 un modèle simplifié largement utilisé dans les applications du Génie Civil pour la prédiction des effets sismiques des réservoirs, rectangulaires et cylindriques, de stockage des liquides. La pression hydrodynamique est divisée en deux composantes :

- Une pression impulsive due à la partie du liquide rigidement attachée à la coque;
- Une pression convective due à la partie du liquide en oscillation ( mouvement de vagues, ballottement) dans le réservoir.

Ainsi, le modèle de Housner consiste en deux masses et un ressort attaché au réservoir rigide. Les valeurs des paramètres de ce modèle mécanique dépendent des dimensions du réservoir et de la densité et la hauteur du liquide.

Le séisme d'Alaska de 1964 a causé des dégâts trop importants aux réservoirs de conception moderne. ceci est à l'origine de l'accélération des recherches dans ce domaine en vue de mieux appréhender leurs comportement. L'effet de la **flexibilité** des parois sur la réponse sismique des réservoirs a été introduit. D'autre part le développement de la micro informatique, et la mise au point de nouveaux algorithmes de résolution des problèmes d'engineering par les méthodes numériques a permis aux chercheurs et ingénieurs intéressés au sujet de proposer d'autres approches et contributions pour l'analyse de ces structures en utilisant notamment la méthode des éléments finis.

L'une des premières études dans ce sens, est celle de N.W Edwards en 1969 [6] utilisant la méthode des éléments finis. Il a calculé les contraintes et les déplacements induits par les séismes dans les réservoirs cylindriques remplis de liquides dont le rapport de la hauteur au rayon est inférieur à 1. Le problème de l'interaction entre la paroi élastique et le liquide est traité dans cette étude.

Une approche similaire a été développée par H. Hsiung et V. Weingarten [7] pour analyser le comportement des coques cylindriques minces, à symétrie axiale, en vibration libre, partiellement remplis de liquide. Le liquide est discrétisé en éléments annulaires à

sections rectangulaires. Deux simplifications ont été introduites, la première suppose que la masse de la coque est négligeable et la seconde suppose que les mouvements de la surface libre est sans effet.

S. Shabane et W. Nash [8] utilisent la même démarche pour étudier la réponse sismique des réservoirs cylindriques par la M.E.F. .

Une généralisation de cette méthode a été établie par Balendra et W. Nash [9] en incluant un dôme au sommet du réservoir. L'effet du ballonnement a été négligé et en conséquence le problème se réduit à celui d'un réservoir cylindrique vide avec une matrice masse augmentée d'une masse ajoutée représentant l'effet du liquide contenu dans le réservoir.

Une approche différente pour la solution du problème de l'effet de flexibilité des parois a été développée par Veletsos [10]. Elle présente une simple procédure pour l'évaluation des forces hydrodynamiques induites dans les réservoirs à liquide. Les hypothèses considérées dans ce modèles sont :

- Le réservoir se comporte comme un oscillateur à un seul degré de liberté,
- Les vibrations s'effectuent dans un mode donné, et
- Les sections circulaires restent circulaires durant la vibration.

Le moment de renversement, l'effort tranchant à la base, la magnitude et la distribution des forces hydrodynamique ont été évaluées pour différents modes de vibration. Par la suite Veletsos et Yang [11] utilisent la théorie des coques de Flûgee pour l'analyse des réservoirs. Les composantes de déplacements d'un point arbitraire de la coque ont été exprimées en termes du mode de vibration naturelle d'une poutre cantilever avec rigidité flexionnelle, et de cisaillement. L'effet du liquide contenu est considéré en supposant qu'une partie de la masse de ce liquide est attachée à la coque. Il a été constaté que, pour les réservoirs avec rigidités réelles, les forces impulsives sont considérablement plus grandes que celles trouvée pour les réservoirs rigides. La même observation a été confirmée par Kana et Dodge. [12]

Une autre approche d'analyse des réservoirs en vibration a été développé par C. Wu. T. Mouzakis, W. Nash et J. Colonell. [13] Une solution analytique du problème a été obtenue par une procédure itérative. Cependant l'hypothèse prise dans cette analyse suppose que les formes de vibration des réservoirs sont difficiles à les justifier notamment dans le cas des réservoirs longs. Aussi, les fréquences naturelles et les formes modales des modes  $\cos(n\theta)$  ont été évaluées en négligeant l'effet de la précontrainte dû à pression hydrostatique.

Les recherches dans ce domaine se sont poursuivies [14- 22] et ont conduit à une meilleure connaissance du comportement de ce type de problème.

## 1.2. Objectifs de la présente étude:

La présente étude développe une méthode numérique pour l'analyse des caractéristiques vibratoires des réservoirs de stockage des liquides en tenant compte de la flexibilité de leurs parois.

La méthode proposée est basée sur une discrétisation par la méthode des éléments finis de la région occupée par la coque et un traitement analytique de la région occupée par le fluide conduisant au concept de la masse ajoutée. Dans cette approche le nombre d'inconnues se trouve considérablement réduit par rapport aux approches basées sur les éléments finis aussi bien pour la région de la coque que celle du fluide.

Dans un premier temps les bases de cette approche sont établies. Il sera procédé, par la suite à une série d'analyses portant sur:

- la vérification de la précision des résultats de la présente approche comparés avec d'autres résultats de la littérature,
- l'étude de l'influence des différents paramètres,
- la vérification de la validité d'une méthode approximative de calcul des fréquences fondamentales des réservoirs partiellement remplis,
- la quantification de la masse effective du fluide contribuant dans la vibration latérale;
- l'étude du cas des réservoirs à épaisseurs variables suivant la hauteur;
- la présentation d'un certain nombre d'abaques facilitant le calcul de la fréquence fondamentale d'un réservoir. Ces abaques peuvent être injectés par exemple dans un règlement de calcul et de conception de ce type de réservoir,
- l'évaluation de l'incidence de la méthode de calcul des fréquences naturelles sur les valeurs des efforts dans les réservoirs.

## 1.3. Plan de l'étude:

La présente étude est divisée en 5 chapitres, une introduction et une conclusion générale.

Dans l'introduction une revue bibliographique des travaux et recherches effectués dans ce domaine est présentée.

Le chapitre 1 est consacré à la théorie de base des coque minces appliquée dans le cas particulier des réservoirs cylindriques. les équations de base sont ainsi décrites. On trouve également une présentation de l'équation de base régissant le comportement du fluide à l'intérieur du réservoir.

La méthode de résolution du problème de l'interaction fluide - structure étant numérique; on trouve dans le chapitre 2 un développement de la méthode utilisée .

Le chapitre 3 établit les équations finales permettant la construction des matrices définissant les propriétés du système ( matrices masse et des rigidités du réservoirs et matrice masse ajouté du fluide). Le problème aux valeurs propres est également exposé.

Les résultats de l'application de la présente méthode et l'étude du comportement des réservoirs renfermant un fluide en vibration fait l'objet du chapitre 5. des résultats intéressant sur le plan pratique sont notés avec discussion.

Enfin, les conclusions générales de cette étude sont dégagés et des recommandations sont proposées.

## **CHAPITRE 2**

### **THEORIE DE BASE DES COQUES MINCES ET EQUATION DU MOUVEMENT DU FLUIDE**

## THEORIE DE BASE DES COQUES MINCES ET EQUATION DU MOUVEMENT DU FLUIDE

Le but de ce chapitre est d'établir les équations de base régissant le comportement dynamique des systèmes réservoirs-fluide. Ces équations seront essentiellement appliquées sur un réservoir de forme " typique " souvent rencontrée en pratique.

Une présentation du système de coordonnées utilisé et une description du type des réservoirs considérés seront données en guise d'introduction, avec discussion de leurs avantages. Les modes de vibration possibles du système fluide-coque seront exposés également.

### 2.1. SYSTEME CONSIDERE

Le système fluide - structure considéré est représenté sur la fig.1.

Il s'agit d'un réservoir parfaitement cylindrique et circulaire à parois minces de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h$ . Il renferme un liquide de hauteur  $H$ .

Un point quelconque de ce milieu est repéré par les coordonnées cylindriques  $r, \theta, z$  respectivement selon les directions radiale, circonférentielle et axiale.

Les composantes de déplacement correspondant à ces directions, d'un point appartenant à la surface moyenne sont respectivement notées  $u, v, w$  (voir fig.1). Un point de la surface libre du liquide est décrit dans son mouvement par la coordonnée  $\zeta$  qui mesure la hauteur de ce point par rapport au niveau de la surface libre au repos. La surface libre du liquide au repos est notée  $S_1$ , tandis que  $S_2$  et  $S_3$  désignent respectivement les surfaces mouillées de la coque et de la plate forme du réservoir.

Dans l'analyse qui suit le réservoir est supposé parfaitement encastré dans le sol et la rigidité de la couverture n'est pas prise en considération.

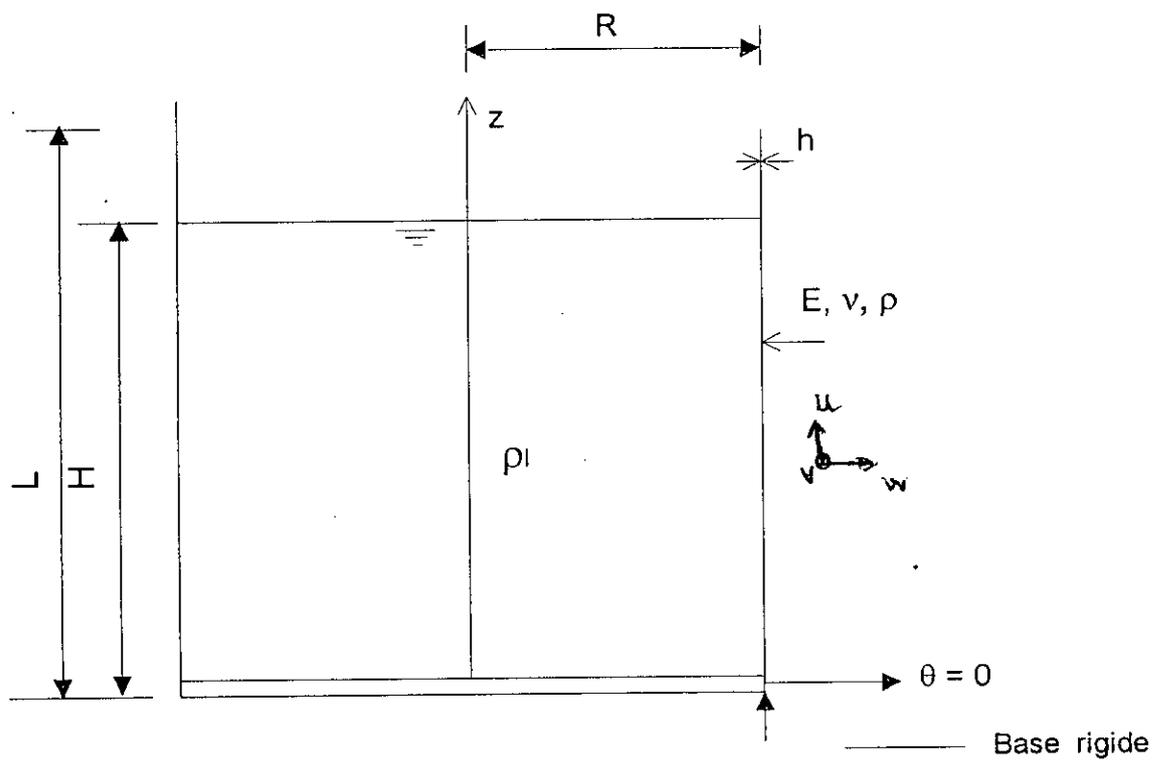


Fig.1 Système coque-fluide considéré.

## 2.2 ELEMENTS STRUCTURAUX DES RESERVOIRS CONSIDERES

On rencontre dans les applications de l'engineering, une multitude de variété dans les configurations des réservoirs de stockage des liquides ( forme circulaire, rectangulaire, sphérique, conique etc.). Cependant, les réservoirs cylindriques encastrés au sol sont largement utilisés par rapport aux autres type de réservoirs, et ce en raison de leur conception simple, leur efficacité vis-à-vis de la résistance aux charges primaires (effets de la pression hydrostatique) et la facilité de leur exécution.

Le type des réservoirs considéré est composé essentiellement:

- d'une paroi métallique, de forme circulaire devant résister aux effets des pressions internes du liquide,
- d'une plate-forme en plaque mince devant rester en contact avec le sol et empêcher le liquide de s'y évacuer,
- d'une couverture fixée ou flottante assurant la protection du liquide de l'atmosphère.

Dans la plus part des cas, la paroi du réservoir est constituée par l'assemblage (soudure ou rivetage) de plusieurs plaques minces métalliques d'épaisseurs variables.

Le dimensionnement de la paroi du réservoir se fait en considérant une membrane devant supporter une contrainte circonférentielle de traction pure et ce, découle du fait que la section transversale circulaire ne subit aucune distorsion sous l'action de la pression hydrostatique. Cette façon de faire conduit à un dimensionnement optimum, sachant que le métal est un matériau économique dans les conditions de contraintes de traction.

Différentes configurations sont employées pour couvrir le liquide contenu dans les réservoirs, telles que: cônes, dômes, plaques.

Une des configurations communément utilisée est celle qui consiste en un système de triangulations supportant une plaque mince en acier. La connexion (liaison) de la couverture à la coque du réservoir est normalement conçue de façon à constituer un point "faible" de sorte que lorsque le réservoir est sur-rempli, la rupture se produit au niveau de la connexion (liaison) et non pas au niveau de la connexion coque - plate-forme.

La fondation destinée à supporter le réservoir peut être réalisée par différentes manières:

- Soit une couronne annulaire en béton.
- Soit un radier général.
- Soit une semelle sur pieux ou à caissons.

L'ancrage du réservoir au sol de fondation doit être assuré. ; Dans ce cas; une attention particulière doit être accordée à la fixation des tiges d'ancrage à la coque du réservoir afin d'éviter toute possibilité de renversement lorsque ce dernier est soumis à une excitation sismique par exemple.

Les réservoirs non ancrés doivent avoir des raidisseurs périphériques au niveau de la plate forme et ce pour réduire le soulèvement.

En conclusion, les réservoirs circulaires cylindriques à parois minces sont des structures très résistantes. Cependant ils sont très flexibles.

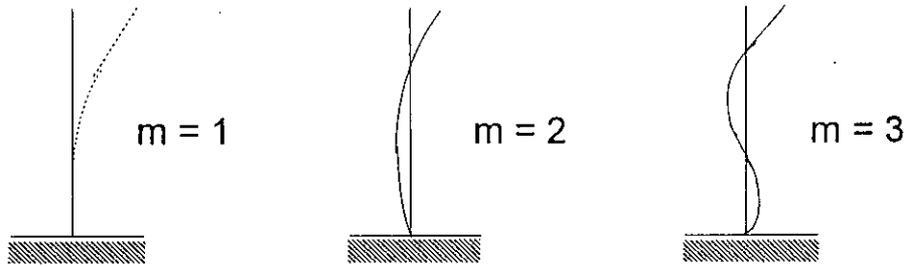
### 2.3. MODES DE VIBRATIONS DES SYSTEMES COQUES-FLUIDE

Les modes naturels de vibration latérale libre d'un réservoir cylindrique circulaire sont de deux types:

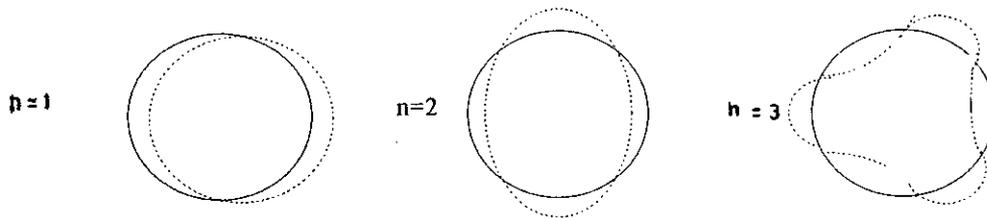
- Les modes de type  $\cos(\theta)$  pour lesquels il y a une seule onde sinusoïdale de flexion dans la direction circonférentielle, et
- Les modes de type  $\cos(n\theta)$  pour lesquels la flexion de la coque induit un nombre d'ondes circonférentielles supérieur à 1. La figure 2a illustre les déformées nodales dans les directions circonférentielle et verticale de ces modes. Les modes naturels de vibration libre sont définis ainsi par deux entiers: le nombre d'ondes circonférentielles ( $n$ ) et les nombre d'ondes axiales ( $m$ ). En théorie, il existe une infinité de modes définis par  $n$  et  $m$ . Dans le cas des réservoirs longs, les modes de type  $\cos(\theta)$  peuvent être qualifiés comme des modes de type poutre (le réservoir se comporte comme une poutre cantilever).

En plus des modes de vibration de la coque, on observe également les modes de vibrations d'oscillation ( ou de ballonnement) du liquide de faible fréquences (en général inférieures à 0,5 Hz pour des réservoirs de géométrie ordinaire).

La fig.(2b) montre les deux premiers modes de vibration de la surface libre dans le cas d'un réservoir rigide.



(i) Modes de flexion

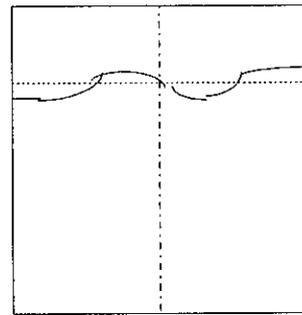
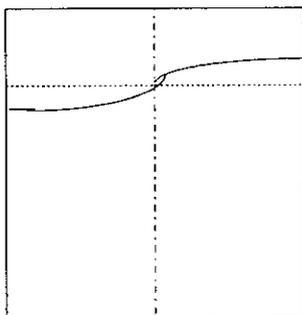


(ii) Modes  $\cos(n\theta)$

(a) Modes de vibration de la coque

1<sup>er</sup> mode

2<sup>nd</sup> mode



(b) Modes d'oscillation du liquide

Fig.2 Types des modes de vibration

## 2.4. EQUATION DU MOUVEMENT DU LIQUIDE

L'équation de base gouvernant le mouvement du liquide à l'intérieur du réservoir sera développée après un rappel des hypothèses fondamentales. L'approche utilisée est basée sur l'équation différentielle du potentiel de vitesse compte tenu des conditions aux limites du problème.

### 2.4.1. Hypothèses fondamentales

Une solution "exacte" du problème générale d'oscillation du fluide dans les réservoirs est extrêmement difficile. L'analyse qui suit, sera basée sur les hypothèses simplificatrices suivantes:

1. Le liquide est homogène, incompressible; l'écoulement est non visqueux. Le champ d'écoulement est irrotationnel. En effet, l'incompressibilité du liquide est en général vérifiée comme le confirment les travaux de Westergaard [1] qui a montré que l'erreur introduite dans le calcul des pressions hydrodynamiques dans le cas des liquides compressibles reste inférieure à 4%.
2. Seules les petites amplitudes d'oscillation sont considérés,
3. Il n'existe pas de cavités ni sources dans le champ d'écoulement;
4. La vitesse du fluide est petite et par conséquent le carré de la vitesse est négligeable.

### 2.4.2. Equation du mouvement

Compte tenu des hypothèses simplificatrices énoncées ci-dessus, il existe un potentiel de vitesse  $\phi$  satisfaisant l'équation de Laplace dans le domaine occupé par le fluide c-à-d: ( $0 \leq r \leq R$  ;  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  ;  $0 \leq z \leq H$ ):

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

Dans un système de coordonnées cylindriques (fig. 1) l'équation (1) s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

Le vecteur vitesse du fluide est le gradient du potentiel vitesse et par conséquent les conditions aux limites peuvent s'écrire comme suit:

### 2.4.3. Conditions aux limites:

1) Au niveau de la base rigide  $z=0$ , la vitesse du liquide dans la direction verticale est nulle:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, \theta, 0, t) = 0 \quad (3)$$

2) Le liquide en contact avec la paroi du réservoir se déplace radialement avec la vitesse de déplacement de la paroi. ( dans le cas contraire, le contact entre la surface de la coque et la couche périphérique du liquide ne serait pas réalisé)

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}(R, \theta, z, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(\theta, z, t) \quad (4)$$

où  $w(\theta, z, t)$  est le déplacement radial de la coque

3) A la surface libre du liquide  $z = H + \xi(r, \theta, t)$ , une particule du fluide à un instant  $t$  reste toujours sur la surface libre (condition cinématique).

Cette condition s'écrit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(r, \theta, H, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(r, \theta, t) \quad (5)$$

4) Une autre condition à la surface libre du liquide peut être obtenue en exprimant que la pression est nulle ( c'est la condition dynamique). Ceci se traduit par l'équation de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho_1} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + g(z - H) = 0 \quad (6)$$

où:

$p$  est la pression du liquide  
 $\rho_1$  est la densité du liquide, et  
 $g$  est l'accélération de la pesanteur

Du fait que  $P=0$ ,  $\nabla \phi \cdot \nabla \phi = 0$ ., alors:

$$\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial t}(r, \theta, H, t) + \rho_1 g \xi(r, \theta, t) = 0 \quad (7)$$

Les équations (6),(7) se combinent pour donner une seule condition en terme du potentiel de vitesse telle:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} (r, \theta, H, t) + g \frac{\partial \phi}{\partial z} (r, \theta, H, t) = 0 \quad (8)$$

La distribution de la pression peut être déterminée à partir de l'équation de Bernoulli :

$$p(r, \theta, z, t) = -\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_1 g(H - z) \quad (9)$$

où le terme non linéaire  $\nabla \phi \cdot \nabla \phi$ , est négligé

Il est à noter que la pression P de l'équation (9) est la somme de:

- de la pression hydrostatique dont la manifestation n'est pas liée au mouvement du liquide:

$$P_s = \rho_1 g(H - z) \quad (10)$$

- de la pression dynamique dont la manifestation est consécutive à un mouvement du liquide donnée par:

$$P_d = -\rho_1 \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (11)$$

#### 2.4.4. Solution de L'équation de LAPLACE

La solution de l'équation de Laplace peut être obtenue par la méthode de séparation des variables. Par conséquent la solution est de la forme suivante:

$$\phi(r, \theta, z, t) = \hat{R}(r) \cdot \hat{\Theta}(\theta) \cdot \hat{Z}(z) \cdot \hat{T}(t) \quad (12)$$

Une des solutions satisfaisant les conditions aux limites, à la base rigide et à la surface libre peut être écrite sous la forme suivante:

$$\phi(r, \theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} [A_{ni} I_n(\alpha_i r) \cos(\alpha_i z) \cos(n\theta)] \quad (13)$$

où:

$I_n$  est la fonction de Bessel modifiée du premier type et d'ordre  $n$   $n$  étant le nombre d'ondes circonférentielles.

$$\alpha_i \text{ est donné par: } \alpha_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H}; (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

L'autre condition aux limites à l'interface fluide-coque ( Eq. 4) peut être réécrite comme suit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} [A_{ni} \alpha_i I'(\alpha_i R) \cos(\alpha_i z)] - \dot{w}_n(z, t) \right\} \cos(n\theta) = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} [A_{ni} \alpha_i I'(\alpha_i R) \cos(\alpha_i z)] = \dot{w}_n(z, t) \quad (16)$$

formule dans laquelle le déplacement radial de la coque est représenté par une série trigonométrique de Fourier.

Les fonctions  $A_{ni}$  peuvent être exprimées en terme de  $\dot{w}_n(z, t)$  en utilisant les relation d'orthogonalité des fonction cosinus, soit:

$$\int_0^H \cos(\alpha_i z) \cdot \cos(\alpha_j z) dz = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{H}{2} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (17)$$

Après quelques traitements algébriques on peut déduire l'expression suivante de  $A_{ni}$

$$A_{ni} = \frac{2 \int_0^H \dot{w}_n(z, t) \cos(\alpha_i z) dz}{\alpha_i H \cdot I'_n(\alpha_i R)}; (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

Par conséquent on obtient l'expression suivante de  $P_d$ , pour une distribution donnée d'ordre  $n$

$$P_d = -\frac{2\rho_l}{H} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^H \dot{w}(\eta, t) \cos(\alpha_i \eta) d\eta}{\alpha_i \cdot I'_n(\alpha_i R)} \cdot I_n(\alpha_i R) \cos(\alpha_i z) \cos(n\theta) \quad (19)$$

## 2.5. EQUATIONS GOUVERNANT LE MOUVEMENT DE LA COQUE

Les coques ont toutes les caractéristiques des plaques avec en plus l'effet de la courbure. Ainsi, un certain nombre d'équations doivent être dérivées afin de définir le mouvement d'une coque donnée et ce contrairement à la théorie des coques minces où une seule équation différentielle d'ordre 4 est suffisante.

Dans la présente analyse, la théorie de V.V.NOVOZILOV sera utilisée pour la dérivation des équations régissant le comportement des coques minces.

### 2.5.1. Hypothèses fondamentales:

La théorie fondamentale des coques minces élastiques est dérivée par une approximation de la théorie d'élasticité tridimensionnelle. Son origine est tirée des travaux de Love et elle est basée sur les hypothèses suivantes:

- L'épaisseur  $h$  de la coque est petite devant le rayon minimum de courbure,
- Les déplacements des parois de la coque sont faibles devant l'épaisseur,
- Les contraintes suivant un axe normal à la surface de référence sont insignifiantes,
- Les points situés sur une normale à la surface moyenne se trouveront, après déformation, sur une normale à la surface déformée.

La première hypothèse représente la définition des coques minces. ( $R/h \geq 10$ ). La deuxième hypothèse découle du fait que les termes de déplacements d'ordre supérieur sont négligeables, lorsque comparés aux termes d'ordre 1, et ce pour assurer la linéarisation des équations différentielles. Les deux dernières hypothèses, supposent que la contrainte normale à la surface moyenne et la déformation transversale de cisaillement sont négligeables.

### 2.5.2. Energie potentielle de la coque:

L'énergie potentielle dans la coque flexible est emmagasinée sous forme d'énergie de déformation. Elle est due aux effets simultanés de la tension, et de la flexion. Les résultantes des forces et moments appliqués sur un élément infinitésimal sont respectivement montrés sur la fig.(3)

L'expression de l'énergie de déformation  $U(t)$  est donnée par:

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (N_z \varepsilon_z + N_\theta \varepsilon_\theta + \tilde{N} \varepsilon_{z\theta} + M_z k_z + M_\theta k_\theta + \tilde{M} k_{z\theta}) R d\theta dz \quad (20)$$

expression dans laquelle:

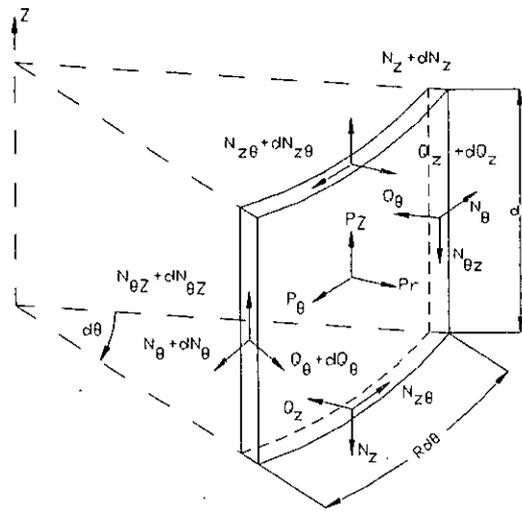
$N_z, N_\theta$  sont les résultantes des forces membranaires respectivement dans les directions  $z$  et  $\theta$

$M_z, M_\theta$  sont les moments de flexion résultant respectivement dans les directions  $z$  et  $\theta$

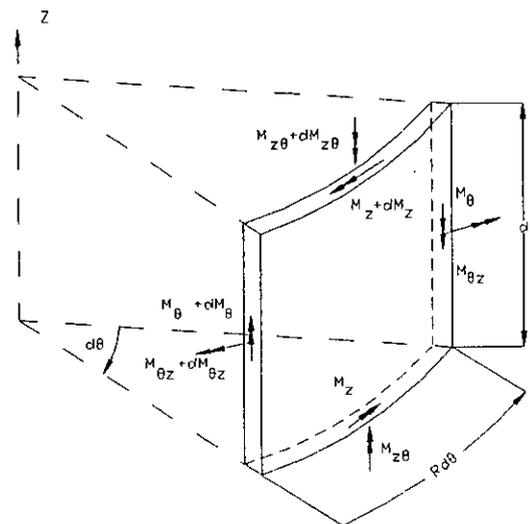
$\tilde{N}$ ,  $\tilde{M}$  les forces membranaires résultantes des cisaillement effectifs et le moment de torsion effectif.

$\tilde{N}$  et  $\tilde{M}$  sont reliés à  $N_{z\theta}$ ,  $N_{\theta z}$ ,  $M_{z\theta}$ , et  $M_{\theta z}$  par les relations suivantes:

$$\begin{aligned}\tilde{N} &= N_{z\theta} - \frac{M_{\theta z}}{R} = N_{\theta z} \\ \tilde{M} &= \frac{M_{z\theta} + M_{\theta z}}{2}\end{aligned}\tag{21}$$



(a) Forces resultantes



(b) Moments resultantes

Fig. 3. Efforts résultants dans un élément de coque

Du fait que le matériau constitutif est supposé homogène, isotrope et linéairement élastique, alors les forces et les moments résultant peuvent être exprimés en termes de:

- la déformation normale(dilatation) et de cisaillement(glissement)de la surface moyenne,  $\varepsilon_z, \varepsilon_\theta$ , et  $\varepsilon_{z\theta}$
- la variation de courbure  $k_z$  et  $k_\theta$  de la surface moyenne,

et en termes

- de la distorsion  $k_{z\theta}$

On obtient ainsi:

$$N_z = k_1(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_\theta) \quad (22.a)$$

$$N_\theta = k_1(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_z) \quad (22.b)$$

$$\tilde{N} = k_1\left(\frac{1-\nu}{2}\right)\varepsilon_{z\theta} \quad (22.c)$$

$$M_z = k_2(k_z + \nu k_\theta) \quad (22.d)$$

$$M_\theta = k_2(k_\theta + \nu k_z) \quad (22.e)$$

$$M_\theta = k_2(k_\theta + \nu k_z) \quad (22.f)$$

$$\tilde{M} = k_2\left(\frac{1-\nu}{2}\right)k_{z\theta} \quad (22.g)$$

Où  $k_1, k_2$  sont respectivement les rigidités de tension et de flexion données par:

$$k_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (23.a)$$

$$k_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (23.b)$$

avec :

$E$  = module d'élasticité du matériau de la coque

$\nu$  = le coefficient de Poisson

$h$  = l'épaisseur de la coque

Il est à noter que les équations (22) sont les plus simples qu'il possible d'obtenir. Cependant, elles sont suffisantes pour la satisfaction des exigences requises pour la validité des théorèmes fondamentaux de la théorie d'élasticité appliquées aux coques.

Les équations (22) et (23) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$[\sigma] = [D].\{\varepsilon\} \quad (24)$$

avec:

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} N_z \\ N_\theta \\ \tilde{N} \\ M_z \\ M_\theta \\ \tilde{M} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (25a)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{z\theta} \\ k_z \\ k_\theta \\ k_{z\theta} \end{pmatrix} \quad (25b)$$

et:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \nu \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{24} h^2 \end{bmatrix} \times k_A \quad (25c)$$

Les déformations normales et de cisaillement  $\varepsilon_z$  et  $\varepsilon_\theta$  de la surface moyenne sont reliées aux composantes du vecteurs déplacement  $u, v, w$  par les relations:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \\ \varepsilon_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (26)$$

De même, les variations de courbure  $k_z$  et  $k_\theta$  et la distorsion de la surface moyenne  $k_{z\theta}$  sont données par:

$$k_z = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (27.a)$$

$$k_\theta = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (27.b)$$

$$k_{z\theta} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} + \frac{2}{R} \frac{\partial v}{R \partial z} \quad (27.c)$$

Par conséquent le vecteur déformation  $\{\varepsilon\}$  peut être écrit en termes du vecteur déplacement  $\{d\}$  comme suit

$$\{\varepsilon\} = [P] \cdot \{d\} \quad (28)$$

où

$$\{d\} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (29)$$

et  $[P]$  représente la matrice de l'opérateur différentiel défini par:

$$[P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \theta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

En vertu des équations (20) (24) et (28) l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}) R d\theta dz = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}) R d\theta dz \quad (31)$$

ou en termes du vecteur déplacement :

$$U(t) = \frac{R}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} ([P]\{d\})^T [D] [P]\{d\} d\theta dz \quad (32)$$

### 2.5.3. Energie cinétique de la coque:

En négligeant l'inertie de rotation l'énergie cinétique de la coque, peut être exprimée par:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left\{ m(z) \left[ \left( \frac{\partial u(\theta, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v(\theta, z, t)}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w(\theta, z, t)}{\partial t} \right)^2 \right] R d\theta dz \right\} \quad (33)$$

expression dans laquelle:

$m(z)$  est la masse de la coque par unité de surface,

Elle peut être réécrite sous la forme suivante:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} (m(z)\{\dot{d}\})^T \{\dot{d}\} R d\theta dz \quad (34)$$

où  $\{\dot{d}\}$  est le vecteur dérivé du vecteur déplacement  $\{d\}$  défini par l'équation (29)

## **CHAPITRE 3**

# **MODELISATION NUMERIQUE**

## MODELISATION NUMERIQUE

### 3.1. Introduction

La méthode des éléments finis constitue de nos jours, un outil très puissant de calcul applicable sur une variété de problèmes d'engineering.

L'analyse numérique d'un problème d'interaction fluide-structure, par un code de calcul en éléments finis est essentiellement basée sur deux approches distinctes:

- **La première** requiert un maillage condensé et un nombre important d'équations pour modéliser la structure et le fluide en utilisant une formulation déplacement de la méthode des éléments finis.

Les matrices de rigidité de chaque élément fini fluide sont obtenues d'une manière analogue avec une méthode standard d'un élément solide à l'exception de la rigidité au cisaillement qui doit être prise égale à zéro et le coefficient de poisson qui approche 0,5 pour les fluides incompressibles.

En plus des tailles importantes des équations résultantes (chaque noeud de fluide a 03 degré de liberté dans une analyse tridimensionnelle), cette méthode présente d'autres inconvénients :

- L'absence de la résistance au cisaillement du fluide introduit un nombre important de mode de fréquence nulle.
- Les noeuds à l'interface fluide-structure sont aussi sources de difficultés.

La tendance est d'avoir des noeuds confondus pour les éléments coques et les éléments fluide. Or le fluide se déplace indépendamment de la coque à l'exception de la direction normale à l'interface. Cette contrainte doit être introduite.

- **La deuxième** méthode est une formulation "pression" des équations gouvernant le fluide.

Les équations couplées sont en termes de déplacement nodaux pour la coque et en terme de pression pour le milieu fluide.

Le nombre d'équation est considérablement réduit du fait qu'on a une seule inconnue par noeud de fluide. Cependant les codes standards en éléments finis ne sont pas dotés de cette formulation.

Le système d'équations se simplifie en un système d'équations dont les inconnues sont les déplacements structuraux dans le cas de fluide incompressible.

Dans ce cas, on aboutit à la formulation dite de la **matrice masse ajoutée** ou la **matrice masse hydrodynamique**. Le découplage des équations signifie simplement que l'effet du liquide peut être représenté en ajoutant des masses aux noeuds de la structures.

L'inconvénient de cette formulation réside dans le fait que la matrice masse de la coque est bandée tandis que celle du fluide est pleine.

Dans ce qui suit, les avantages de la méthode des éléments finis seront exploités dans la modélisation du domaine occupé par la coque. Cependant Le domaine occupé par le fluide sera traité comme un milieu continu auquel sera appliqué une solution analytique de l'équation régissant son mouvement. Naturellement, le nombre d'inconnues se trouve considérablement réduit

### 3.2. Modélisation de la coque

La première étape dans la modélisation par éléments finis de la coque est de la découper en un nombre approprié d'éléments finis. Le nombre de ces éléments finis dépend de la géométrie de la coque. Dans le cas de la présente étude, les éléments considérés sont de formes annulaires (axisymétrique) [53] et ne sont connectés entre eux qu'en un nombre finis de lignes nodales tel qu'indiqué par la fig. (4). ( le terme le plus couramment utilisé dans la théorie des éléments finis, pour désigner un point de connexion entre deux éléments finis est le noeud. Cependant, il ne sera pas fait de distinction entre l'un ou l'autre dans ce qui suit).

La taille de chaque élément est arbitraire; elle peut être constante comme elle peut varier d'un élément à un autre.

L'élément fini considéré est défini par deux noeuds  $i$  et  $j$ . Chaque noeud renferme quatre degrés de libertés  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $\hat{w}$  représentant respectivement les déplacements axial, circonférentiel, radial et de rotation. On constate déjà, qu'à la différence d'un problème de réservoir sous un chargement axisymétrique (une pression hydrostatique par

exemple), la composante de déplacement dans la direction circonférentielle  $v$ , est introduite, et ce afin de tenir compte des distorsions de ces structures dans leurs mouvement de vibration latérale.

Dans l'établissement des équations de mouvement de la coque, on considère que la variation des déplacements dans la direction circonférentielle est trigonométrique. La représentation des composantes du vecteur de déplacement sous la forme de série trigonométrique de Fourier est ainsi introduite.

$$u(\theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t) \cos(n\theta) \quad (35.a)$$

$$v(\theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z, t) \sin(n\theta) \quad (35.b)$$

$$w(\theta, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z, t) \cos(n\theta) \quad (35.c)$$

Où  $(n)$  représente le nombre d'ondes dans la direction circonférentielle.

Le type d'élément fini défini ci-dessus n'est généralement pas disponible dans les codes standards en éléments finis.

Il est intéressant de remarquer également que les séries définies par les équations [35] imposent à la coque un déplacement dans un mode  $\cos(n\theta)$  donné c.-à-d. selon un nombre d'ondes circonférentielles préalablement fixé.

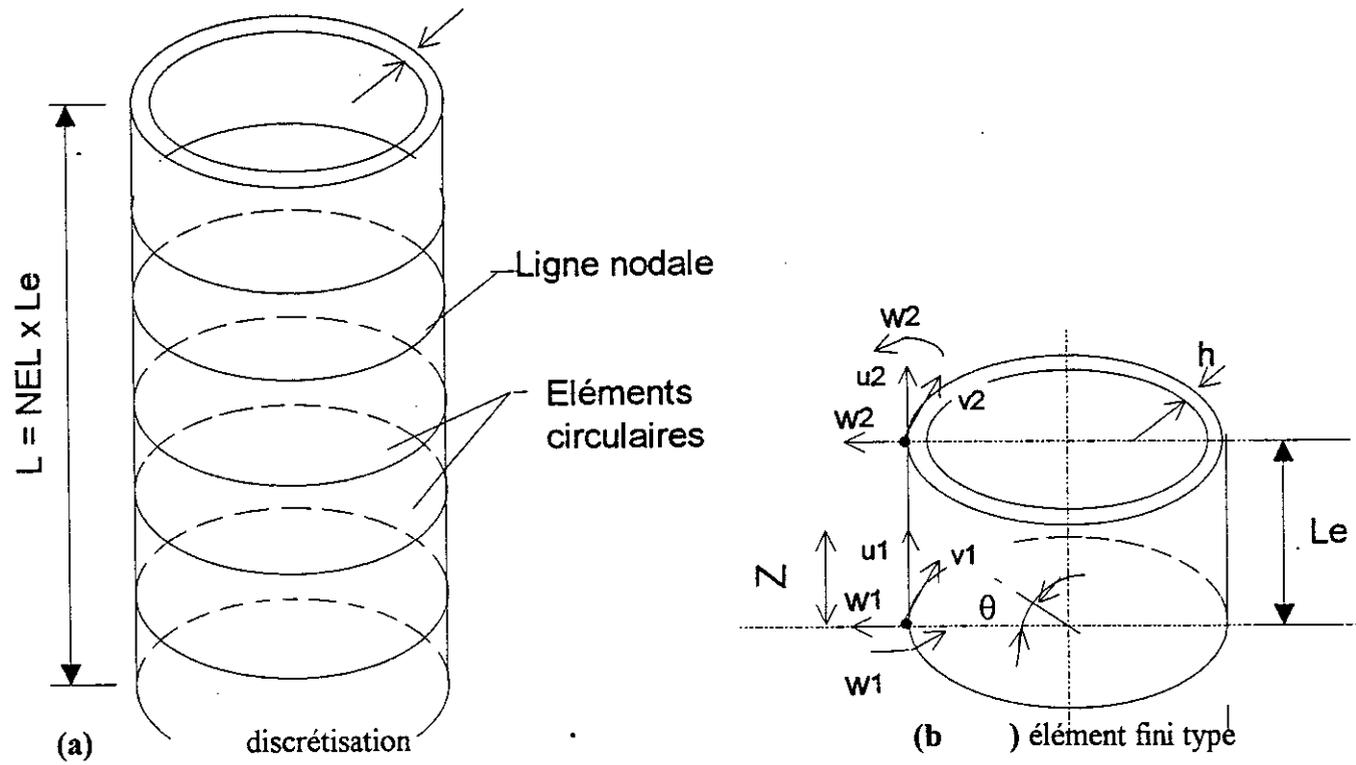


Fig. (4) Modélisation de la coque

### 3.3. Fonctions de forme

Les fonctions de déplacement,  $u_n$ ,  $v_n$  et  $w_n$  peuvent être exprimées en terme de déplacements nodaux des éléments finis au moyen d'un ensemble de fonctions d'interpolation appropriées. Les fonctions de forme associées avec les déplacements axial et tangentiel sont prises linéaires entre les noeuds de l'élément, tandis que celles associées avec le déplacement radial sont des polynômes cubiques d'Hermite pour assurer la continuité des pentes aux noeuds.

Considérons l'élément fini typique de la fig. (4.b) de longueur  $L_e$  avec l'axe local de coordonné  $\bar{z}$

Les déplacements  $u_{ne}(\bar{z}, t)$ ,  $v_{ne}(\bar{z}, t)$ ,  $w_{ne}(\bar{z}, t)$  peuvent s'écrire en terme de déplacements nodaux comme suit :

$$u_{ne}(\bar{z}, t) = \sum_{i=1}^2 S_i(\bar{z}) \bar{u}_{ni}(t) \quad (36.a)$$

$$v_{ne}(\bar{z}, t) = \sum_{i=1}^2 S_i(\bar{z}) \bar{v}_{ni}(t) \quad (36.b)$$

$$w_{ne}(\bar{z}, t) = \sum_{i=1}^2 (N_i(\bar{z}) \bar{w}(t) + \hat{N}_i(\bar{z}) \hat{w}(t)) \quad (36.c)$$

avec  $e$  indice indiquant l'élément, et

$\bar{u}_{ni}(t)$ ,  $\bar{v}_{ni}(t)$ ,  $\bar{w}_{ni}(t)$ ,  $\hat{w}_{ni}(t)$  sont les déplacements nodaux généralisés de l'élément ( $e$ )

Les fonctions de formes sont données par :

$$\begin{aligned}
S_1(\bar{z}) &= 1 - \frac{\bar{z}}{L_e} \\
S_2(\bar{z}) &= \frac{\bar{z}}{L_e} \\
N_1(\bar{z}) &= 1 - 3\frac{\bar{z}^2}{L_e^2} + 2\frac{\bar{z}^3}{L_e^3} \\
N_2(\bar{z}) &= 3\frac{\bar{z}^2}{L_e^2} - 2\frac{\bar{z}^3}{L_e^3} \\
\hat{N}_1 &= \bar{z} - 2\frac{\bar{z}^2}{L_e} + \frac{\bar{z}^3}{L_e^2} \\
\hat{N}_2 &= -\frac{\bar{z}^2}{L_e} + \frac{\bar{z}^3}{L_e^2}
\end{aligned} \tag{37}$$

A cause du découplage entre les déplacements de chaque onde circonférentielle ( $n$ ), il est approprié, pour simplifier l'écriture d'omettre l'indice ( $n$ ).

Les équations (36 et (37)) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\{d(\bar{z}, t)\}_e = [Q(\bar{z})]\{\bar{d}(t)\}_e \tag{38}$$

et

$$w_e(\bar{z}, t) = \{\bar{N}(\bar{z})\}^T \{\bar{d}(t)\}_e \tag{39}$$

où:

$$\{d(\bar{z}, t)\}_e = \begin{Bmatrix} u_e(\bar{z}, t) \\ v_e(\bar{z}, t) \\ w_e(\bar{z}, t) \end{Bmatrix} \tag{40}$$

$$[Q(\bar{z})] = \begin{bmatrix} S_1(\bar{z}) & 0 & 0 & 0 & S_2(\bar{z}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1(\bar{z}) & 0 & 0 & 0 & S_2(\bar{z}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{N}_1(\bar{z}) & \hat{N}_2(\bar{z}) & 0 & 0 & N_2(\bar{z}) & \hat{N}_2(\bar{z}) \end{bmatrix} \tag{41}$$

et

$$\{\bar{d}(t)\}_e = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1(t) \\ \bar{v}_1(t) \\ \bar{w}_1(t) \\ \hat{w}_1(t) \\ \bar{u}_2(t) \\ \bar{v}_2(t) \\ \bar{v}_2(t) \\ \bar{w}_2(t) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

$$\bar{N}(\bar{z})^T = [0 \quad 0 \quad N_1(\bar{z}) \quad \hat{N}_1(\bar{z}) \quad 0 \quad 0 \quad N_2(\bar{z}) \quad \hat{N}_2(\bar{z})] \quad (43)$$

Enfinement , en pose:  $\{q\} = \sum_{e=1}^{NEL} \{\bar{d}(t)\}_e$  (44)

où  $\{q\}$  est le vecteur des déplacements nodaux assemblé et NEL le nombre d'éléments le long de la coque.

# **CHAPITRE 4**

## **CONSTRUCTION DES MARTRICES**

## CONSTRUCTION DES MATRICES

### 4.1. MATRICE DE RIGIDITE DE LA COQUE

Les propriétés élastiques de la coque s'obtiennent par la superposition des propriétés individuelles de chaque élément fini évaluées séparément.

Ainsi, la matrice de rigidité globale de la coque s'obtient par assemblage des matrices de rigidités élémentaires de façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient assurés.

l'énergie de déformation de la coque due à l'extension et à la flexion (Eq.32.) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$U(t) = \frac{R}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} (\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}) d\theta dz \quad (45)$$

où

$$\{\varepsilon\} = [P] \{d\} \quad (46)$$

et  $[P]$  est l'opérateur différentiel défini par l'équation 30.

Considérons, donc un élément typique et proposons nous de déterminer sa matrice de rigidité.

Pour chaque onde circonférentielle  $n$ , le vecteur déplacement  $\{d\}$  d'un point quelconque de la surface moyenne, défini par ces coordonnées  $(R, \theta, z)$ , peut être exprimé en fonction du vecteur de déplacement  $\{d_n\}$  de la façon suivante:

$$\{d\} = [\Theta_n] \cdot \{d_n\} \quad (47)$$

avec:

$$[\Theta_n] = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n\theta) \end{bmatrix} \quad (48)$$

et

$$\{d_n(z, t)\} = \begin{Bmatrix} u_n(z, t) \\ v_n(z, t) \\ w_n(z, t) \end{Bmatrix} \quad (49)$$

$u_n$ ,  $w_n$ , sont les fonctions de déplacements axial et radial, pour  $\theta=0$  et  $v_n$  est la fonction de déplacement tangentiel maximal obtenu pour  $\theta=\pi/2n$

Par substitution de l'équation (47) dans l'équation (46) on obtient:

$$\{\varepsilon\} = [P]\{d\} = [P] \cdot [\Theta_n] \cdot \{d_n\} = [\hat{\Theta}_n] \cdot [\hat{P}_n(z)] \cdot \{d_n\} \quad (50)$$

$$\text{où: } \hat{\Theta}_n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(n\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(n\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(n\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(n\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(n\theta) \end{bmatrix} \quad (51)$$

et

$$[\hat{P}_n(z)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{R} & \frac{1}{R} \\ -\frac{n}{R} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ 0 & \frac{n}{R^2} & \frac{n^2}{R^2} \\ 0 & \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{2n}{R} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
 U(t) &= \frac{R}{2} \int_0^L \left\{ \left( [\hat{P}] \{d_n\} \right)^T \left( \int_0^{2\pi} [\hat{\Theta}_n]^T [D] [\hat{\Theta}_n] d\theta \right) \left( [\hat{P}] \{d_n\} \right) \right\} dz \\
 &= \frac{\pi R}{2} \int_0^L \left\{ \left( [\hat{P}] \{d_n\} \right)^T [D] \left( [\hat{P}] \{d_n\} \right) \right\} dz \quad (53)
 \end{aligned}$$

Remarquons que les déplacements de chaque onde circonférentielle sont découplés. On peut donc, en vue d'alléger l'écriture des équations, enlever l'indice (n)

Exprimons l'énergie potentielle de l'équation (53) en introduisant le modèle élément fini des déplacements, défini par l'équation (36):

alors:

$$U(t) = \frac{\pi R}{2} \sum_{e=1}^{NEL} \int_0^L \left( \left( [\hat{P}] [Q] \{\bar{d}\}_e \right)^T \right) [D]_e \left( [\hat{P}] [Q] \{\bar{d}\}_e \right) dz \quad (54)$$

où:

$[D]_e$  = la matrice constitutive de l'élément, supposée constante le long de l'élément.

NEL = le nombre d'éléments le long de la coque.

l'équation (54) s'exprime conventionnellement comme:

$$U(t) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{NEL} \{\bar{d}\}_e^T [K_s]_e \{\bar{d}\}_e \quad (55)$$

où:

$$[K_s]_e = \pi R \int_0^L [B]^T [D]_e [B] dz \quad (56)$$

$$\text{et} \quad [B] = [\hat{P}] [Q] \quad (57)$$

En développant l'équation(57) on obtient

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}
 -\frac{1}{L_c} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_c} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{n}{R} \left(1 - \frac{\bar{z}}{L_c}\right) & \frac{1}{R} \left(1 - \frac{3\bar{z}^2}{L_c^2} + \frac{2\bar{z}^3}{L_c^3}\right) & \frac{1}{R} \left(\bar{z} - \frac{3\bar{z}^2}{L_c} + \frac{2\bar{z}^3}{L_c^2}\right) & 0 & \frac{n \cdot \bar{z}}{R \cdot L_c} & \frac{1}{R} \left(\frac{3\bar{z}^2}{L_c^2} - \frac{2\bar{z}^3}{L_c^3}\right) & \frac{1}{R} \left(-\frac{\bar{z}^2}{L_c} + \frac{\bar{z}^3}{L_c^2}\right) \\
 -\frac{n}{R} \left(1 - \frac{\bar{z}}{L_c}\right) & -\frac{1}{L_c} & 0 & 0 & -\frac{n \cdot \bar{z}}{R \cdot L_c} & \frac{1}{L_c} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{6}{L_c^2} \left(1 - \frac{2\bar{z}}{L_c}\right) & \frac{2}{L_c} \left(2 - \frac{3\bar{z}}{L_c}\right) & 0 & 0 & -\frac{6}{L_c^2} \left(1 - \frac{2\bar{z}}{L_c}\right) & \frac{2}{L_c} \left(1 - \frac{3\bar{z}}{L_c}\right) \\
 0 & \frac{n}{R^2} \left(1 - \frac{\bar{z}}{L_c}\right) & \frac{n^2}{R^2} \left(1 - \frac{3\bar{z}^2}{L_c^2} + \frac{2\bar{z}^3}{L_c^3}\right) & \frac{n^2}{R^2} \left(\bar{z} - \frac{3\bar{z}^2}{L_c} + \frac{2\bar{z}^3}{L_c^2}\right) & 0 & -\frac{n \cdot \bar{z}}{R^2 \cdot L_c} & \frac{n^2}{R^2} \left(\frac{3\bar{z}^2}{L_c^2} - \frac{2\bar{z}^3}{L_c^3}\right) & \frac{n^2}{R^2} \left(-\frac{\bar{z}^2}{L_c} + \frac{\bar{z}^3}{L_c^2}\right) \\
 0 & -\frac{2}{R \cdot L_c} & -\frac{12 \cdot n}{R \cdot L_c^2} \left(\bar{z} - \frac{3\bar{z}^2}{L_c}\right) & \frac{2 \cdot n}{R} \left(1 - \frac{4\bar{z}}{L_c} + \frac{3\bar{z}^2}{L_c^2}\right) & 0 & \frac{2}{R \cdot L_c} & \frac{12 \cdot n}{R \cdot L_c^2} \left(\bar{z} - \frac{3\bar{z}^2}{L_c}\right) & -\frac{2 \cdot n}{R} \left(\frac{2\bar{z}}{L_c} - \frac{3\bar{z}^2}{L_c^2}\right)
 \end{bmatrix} \quad (58)$$

L'intégrale de l'équation (56) peut être effectuée en utilisant une méthode d'intégration numérique. Dans la présente étude, la méthode de Gauss à 4 points sera utilisée pour calculer exactement les éléments de rigidité de la matrice. Cette méthode est rappelée ci-après.

Soit une fonction  $G(\bar{z})$ , et on se propose de calculer l'intégrale:  $\int_0^{L_e} G(\bar{z}) d\bar{z}$

$$\text{On pose: } \int_0^{L_e} G(\bar{z}) d\bar{z} = \sum_{i=1}^4 G(\bar{z}_i) \cdot W_i \quad (59)$$

avec :

$$\bar{z}_i = \frac{L_e}{2}(1 + \eta_i)_i$$

$$\text{avec: } \begin{cases} \eta_1 = -0.339981 \\ \eta_2 = -0.861136 \\ \eta_3 = +0.861136 \\ \eta_4 = +0.339981 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} W_1 = W_4 = 0.326L_e \\ W_2 = W_3 = \underline{0.326L_e} = 0.174L_e \end{cases}$$

Le processus de construction des équations d'assemblages pour l'obtention des équations globales est basé sur le principe de compatibilité aux noeuds

La matrice globale des rigidités de la coque est une matrice carrée d'ordre  $NDL$  ( $NEL+1$ ) où  $NDL$  est le nombre des degrés de liberté par noeud (4 dans notre cas). Elle est donnée par

$$[K_s] = \sum_{e=1}^{NEL} [K_s]_e \quad (60)$$

La fig. 5.a présente un schéma de la technique d'assemblage.

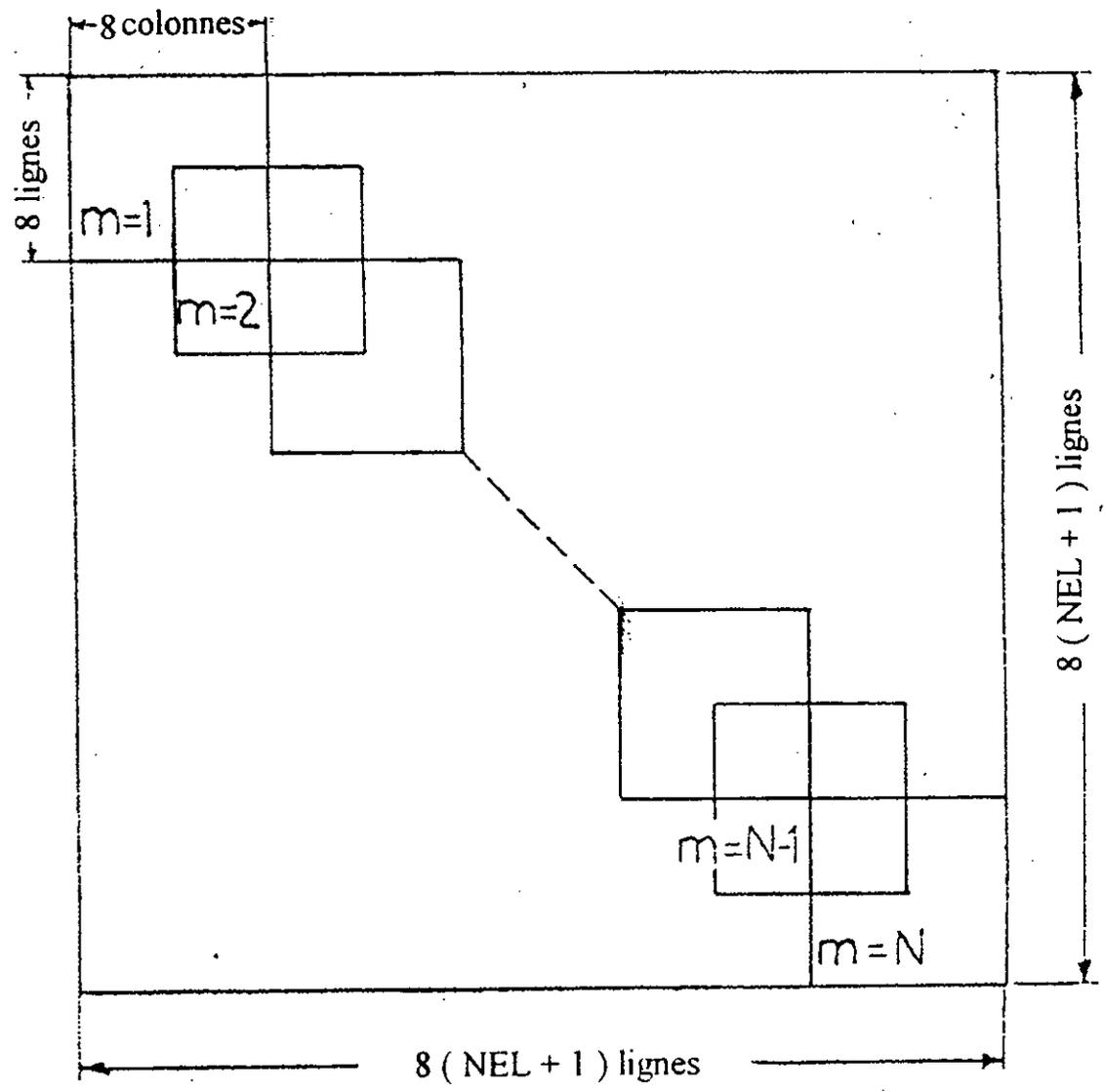
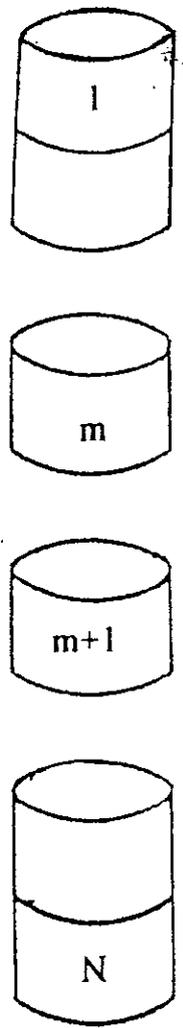


Fig.5.a Diagramme d'assemblage des matrices masse et des rigidités de la coque

## 4.2. MATRICE MASSE DE LA COQUE

Partant de l'équation de l'énergie cinétique de translation (Eq. 34)

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left( m(z) \{\dot{d}\}^T \cdot \{\dot{d}_n\} \right) R \cdot d\theta dz$$

tenant compte de l'équation (47) on peut écrire

$$T(t) = \frac{R}{2} \int_0^R \left\{ m(z) \{\dot{d}_n\}^T \left( \int_0^{2\pi} [\Theta_n]^T [\Theta_n] d\theta \right) \cdot \{\dot{d}_n\} \right\} dz \quad (61)$$

ou encore

$$T(t) = \frac{\pi R}{2} \int_0^R m(z) \{\dot{d}_n\}^T \{\dot{d}_n\} dz \quad (62)$$

En utilisant le modèle des fonctions d'interpolation de l'équation (38) on obtient:

$$T(t) = \frac{\pi R}{2} \sum_{e=1}^{NEL} \left( m_e \int_0^{l_e} ([Q] \cdot \{\dot{d}\}_e)^T \cdot ([Q] \cdot \{\dot{d}\}_e) d\bar{z} \right) \quad (63)$$

avec:

$m_e$ : la masse de la coque par unité de surface supposée uniforme le long de l'élément.

L'équation ( ) peut être réécrite sous la forme

$$T(t) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{NEL} \left\{ \dot{d} \right\}_e^T [M_s]_e \left\{ \dot{d} \right\}_e \quad (64)$$

où  $[M_s]_e$ : la matrice masse consistante d'un élément de la coque définie par

$$[M_s]_e = \pi \cdot R \cdot m_e \int_0^{l_e} [Q]^T [Q] d\bar{z} \quad (65)$$

La forme explicite de la matrice masse élémentaire obtenue par intégration analytique de l'équation est donnée par

$$[M_s] = \pi R m_e \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_e}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L_e}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_e}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{L_e}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13L_e}{35} & \frac{11L_e^2}{210} & 0 & 0 & \frac{9L_e}{70} & \frac{-13L_e^2}{420} \\ 0 & 0 & \frac{11L_e^2}{210} & \frac{L_e^3}{105} & 0 & 0 & \frac{13L_e^2}{420} & \frac{-L_e^3}{140} \\ \frac{L_e}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{L_e}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_e}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{L_e}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9L_e}{70} & \frac{13L_e^2}{420} & 0 & 0 & \frac{13L_e}{35} & \frac{-11L_e^2}{210} \\ 0 & 0 & \frac{-13L_e^2}{420} & \frac{-L_e^3}{140} & 0 & 0 & \frac{-11L_e^2}{210} & \frac{L_e^3}{105} \end{bmatrix} \quad (66)$$

La matrice masse globale s'obtient par la technique d'assemblage identique à la procédure de superposition développée dans la détermination de la matrice de rigidité globale.:

$$[M_s] = \sum_{e=1}^{NEL} [M_s]_e \quad (67)$$

par conséquent l'énergie cinétique de translation de la coque s'obtient par:

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M_s] \{\dot{q}\} \quad (68)$$

### 4.3. MATRICE MASSE AJOUTEE

Comme conséquence de la négligence des modes d'oscillations libres de surface, le mouvement des parois du réservoir peut être analysé par l'introduction d'une matrice masse ajoutée dans l'équation matricielle du mouvement de la coque: elle représente l'effet des pressions hydrodynamiques du liquide durant le mouvement.

La pression hydrodynamique exercée sur les parois du réservoir est donnée par l'équation (19) et par conséquent, le travail produit par une telle pression durant un déplacement virtuel  $\delta_{wn} \cdot \cos(n\theta)$  peut être écrit:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^H \int_0^{2\pi} (p_a(R, \theta, z, t) \delta w_n \cos(n\theta) R) d\theta dz \\ &= -\frac{2\pi R \rho_l}{H} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{I_n(\alpha_i R)}{\alpha_i I'_n(\alpha_i R)} \cdot \left( \int_0^H \delta w \cos(\alpha_i(z)) dz \right) \left( \int_0^H \ddot{w} \cos(\alpha_i(z)) dz \right) \right\} \end{aligned} \quad (69)$$

En posant

$$b_{ni} = \frac{2\pi R \rho_l I_n(\alpha_i R)}{H \alpha_i I'_n(\alpha_i R)} \quad (70)$$

On peut écrire

$$\delta w = -\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ b_{ni} \left( \int_0^H \delta w \cos(\alpha_i z) dz \right) \left( \int_0^H \ddot{w} \cos(\alpha_i z) dz \right) \right\} \quad (71)$$

Le travail exprimé par l'équation (71) donne lieu à la définition de la matrice masse ajoutée [DM]. Pour calculer ses éléments on exprime l'intégrale dans l'équation (71) en termes de vecteur de déplacement nodaux  $\{q\}$  avec le modèle élément fini de déplacement.

alors

$$\int_0^H \ddot{w}(z, t) \cos(\alpha_i z) dz = \sum_{e=1}^{NEH} \int_0^{L_e} \left\{ \bar{N}(\bar{z})^T \{ \ddot{d}(t) \}_e \right\} \cos\{\alpha_i [\bar{z} + (e-1)]\} dz \quad (72)$$

En définissant les vecteurs  $\{f_i\}_e$  comme

$$\{f^{(i)}\}_e^T = \int_0^{L_e} \left\{ \bar{N}(\bar{z}) \right\}^T \cos\{\alpha_i [\bar{z} + (e-1)]\} d\bar{z} = [0, 0, f_3^{(i)}, f_4^{(i)}, 0, 0, f_7^{(i)}, f_8^{(i)}] \quad (73)$$

où:

$$f_3^{(i)} = L_e \left( -\left( \frac{1}{\beta_i} + \frac{6}{\beta_i^3} \right) \sin[\beta_i(e-1)] + \frac{12}{\beta_i^4} \cos[\beta_i(e-1)] - \frac{6}{\beta_i^3} \sin[\beta_i \cdot e] - \frac{12}{\beta_i^4} \cos[\beta_i \cdot e] \right)$$

$$f_4^{(i)} = L_e^2 \left( -\frac{4}{\beta_i^4} \sin[\beta_i(e-1)] - \left( \frac{1}{\beta_i^2} - \frac{6}{\beta_i^4} \right) \cos[\beta_i(e-1)] - \frac{2}{\beta_i^3} \sin[\beta_i \cdot e] - \frac{6}{\beta_i^4} \cos[\beta_i \cdot e] \right)$$

$$f_7^{(i)} = L_e \left( \frac{6}{\beta_i^3} \sin[\beta_i(e-1)] - \frac{12}{\beta_i^4} \cos[\beta_i(e-1)] + \left( \frac{1}{\beta_i} + \frac{6}{\beta_i^3} \right) \sin[\beta_i \cdot e] + \frac{12}{\beta_i^4} \cos[\beta_i \cdot e] \right)$$

$$f_7^{(i)} = L_e^2 \left( -\frac{2}{\beta_i^3} \sin[\beta_i(e-1)] + \frac{6}{\beta_i^4} \cos[\beta_i(e-1)] - \frac{4}{\beta_i^3} \sin[\beta_i \cdot e] + \left( \frac{1}{\beta_i^2} - \frac{6}{\beta_i^4} \right) \cos[\beta_i \cdot e] \right)$$

et

$$\beta_1 = \alpha_1 \cdot L_e$$

et les vecteurs:

$$\{F^{(i)}\} = \sum_{e=1}^{NEL} \{f^{(i)}\}_e \quad (74)$$

L'équation (72) peut être réécrite sous la forme

$$\int_0^H \ddot{w}(z, t) \cos(\alpha_i z) dz = \{F^{(i)}\}^T \{\ddot{q}(t)\} \quad (75)$$

Par conséquent, l'expression du travail devient:

$$\delta W = - \sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} \{\delta q\}^T \{F^{(i)}\} \{F^{(i)}\}^T \{\ddot{q}\} \quad (76)$$

ou encore:

$$\delta W = - \{\delta q\}^T \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} \{F^{(i)}\} \{F^{(i)}\}^T \right) \{\ddot{q}\} \quad (77)$$

On peut ainsi écrire: en définissant la matrice masse ajoutée par:

$$[DM] = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} \{F^{(i)}\} \{F^{(i)}\}^T \quad (78)$$

La matrice  $[DM]$  est une matrice symétrique semi pleine non bandée.

La convergence des termes de la matrice  $[DM]$  sera étudiée par la suite.

Par ailleurs le facteur  $b_{ni}$  ( Eq.70) ou plus précisément le rapport de la fonction de Bessel et sa dérivée permet de distinguer entre le cas des réservoirs courts et celui des réservoirs longs. En effet (voir annexe b) ce rapport converge vers l'unité lorsque  $R/H$  tends vers l'infini (réservoirs courts) et tends vers  $\alpha_i R/2$  lorsque  $R/H$  tends vers zéro (réservoir longs)

Les formes générales de la matrice  $[DM]$  et de la matrice  $[M_s]$  sont données par les figures (5.b) et (5.c)

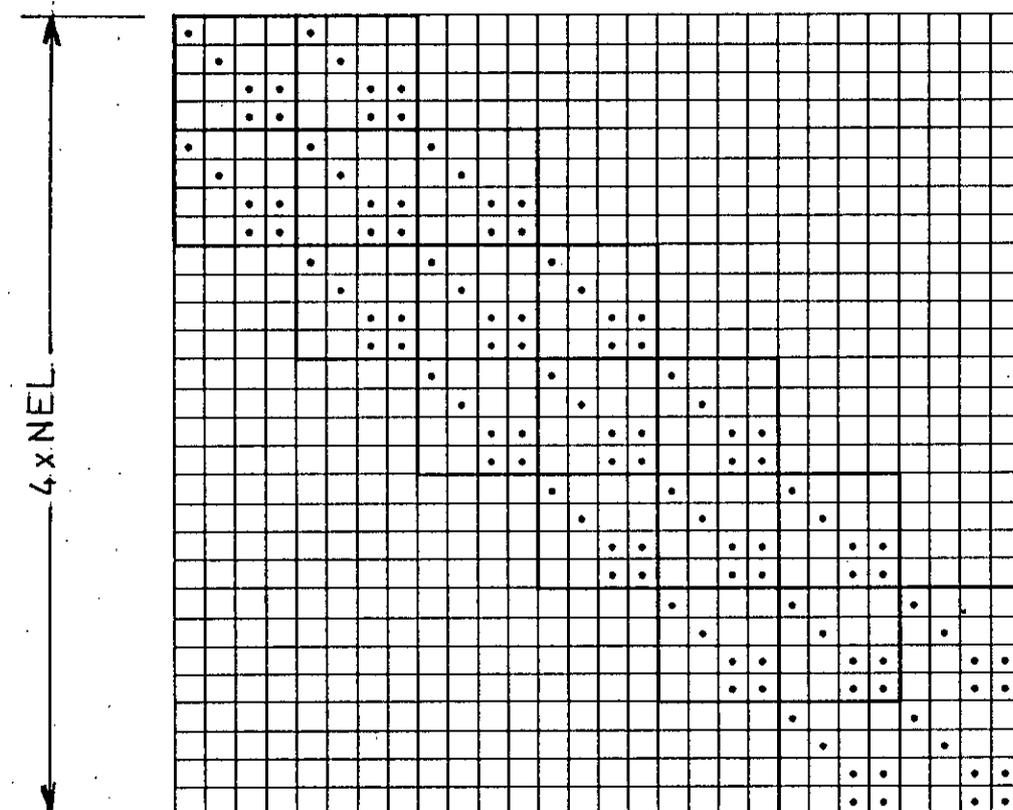


fig.5.b. Forme de la matrice masse de la coque

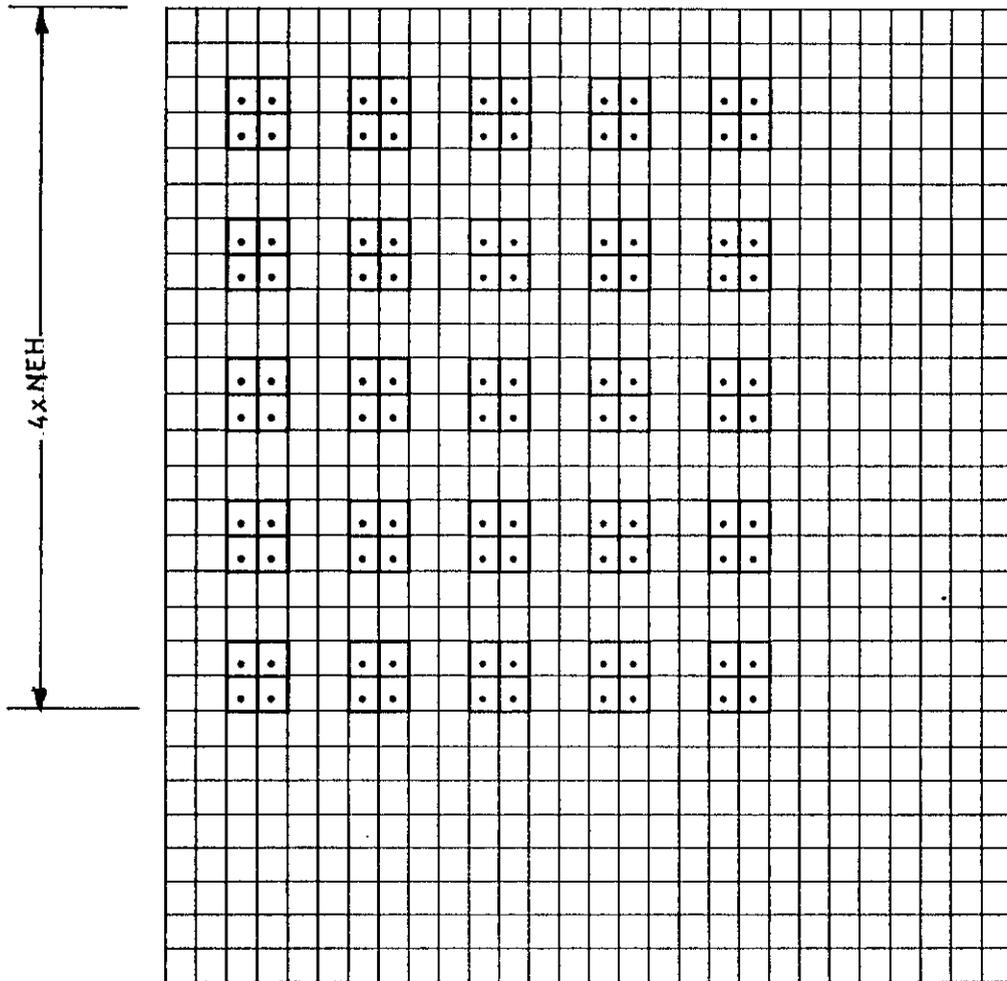


fig. 5.c. Forme de la matrice masse ajoutée

#### 4.4. PROBLEME AUX VALEURS PROPRES

L'équation de vibration latérale libre non amortie du système coque-fluide peut être exprimée en termes des propriétés de la coque, des déplacements ainsi que de la masse ajoutée du fluide :

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (79)$$

où:

$$[M] = [M_s] + [DM] ; \text{ et } : [K] = [K_s] \quad (80)$$

$\{q(t)\}$  est l'inconnue du problème.

En écrivant la solution de l'équation ..... dans la forme habituelle :

$$\{q(t)\} = \left\{ \overset{*}{q} \right\} e^{i\omega t} ; i = \sqrt{-1} \quad (81)$$

et en substituant l'équation (81) dans l'équation (79), on obtient l'équation suivant :

$$(-\omega^2[M] + [K])\left\{ \overset{*}{q} \right\} = \{0\} \quad (82)$$

où :

$\left\{ \overset{*}{q} \right\}$  représente le vecteur des amplitudes des déplacements en vibration (indépendant de la variable temps).

$\omega$  étant la fréquence circulaire naturelle du système.

Une solution non triviale de l'équation (82) n'est possible que si le déterminant des coefficients est nul, c.-à-d.  $| [K] - \omega^2[M] | = 0$

Le développement de ce déterminant donne une équation algébrique de degré N dont la variable est  $\omega^2$  et ce pour un système ayant NEL éléments avec  $N = 4 \times \text{NEL}$ .

Compte tenu de fait que les matrices  $[K]$  et  $[M]$  sont définies positives, les valeurs  $\omega^2_1, \omega^2_2, \omega^2_N$  sont des valeurs réelles et positives. L'équation (82) aboutit donc au vecteur

$\left\{ \overset{*}{q} \right\}$  (vecteur propre) non nul pour chaque valeur propre  $\omega^2$ .

## **CHAPITRE 5**

# **METHODE DE CALCUL ET PROGRAMMATION**

## METHODE DE CALCUL ET PROGRAMMATION

la coque est subdivisée en un nombre suffisant d'éléments finis. Le calcul des caractéristiques vibratoires du système coque-fluide est réalisé à l'aide d'un programme numérique, exécuté sur ordinateur qui génère les matrices masse et de rigidités d'un élément. Les matrices masse et de rigidité de la coque sont obtenues par assemblages des matrices élémentaires. Quant à la matrice masse ajoutée, elle est obtenue séparément.

Le programme est écrit en langage fortran. Les séquences d'exécution sont montrées par l'organigramme de la fig. (5 bis).

a) Le problème est défini par:

- Nombre d'ondes circonférentielles,
- Nombre des modes flexionnelles
- Hauteur de remplissage en liquide

b) Le réservoir est décomposé en un nombre d'éléments finis dont chacun est défini par :

- sa géométrie (rayon, épaisseur, longueur)
- ses caractéristiques physico-mécaniques ( module de Young, coefficient de Poisson, masse volumique du matériau constitutif)

c) Pour chaque élément le programme :

- effectue le produit  $[B]^T [D]_e [B]$ .
- les matrices  $K_e$  et  $M_e$  de chaque élément sont calculées à l'aide des équations (56) et (65).

d) Les matrices masse et des rigidités de la coque sont obtenues par assemblage des matrices élémentaire tels que indiquées par les équations 59bis et 67..

e) La matrice masse ajoutée est obtenue comme suit :

pour un ( $i=1, N_{itér}$ )

- le vecteur  $\{f^i\}_e$  est calculé pour chaque élément,
- les vecteurs  $\{f^i\}_e$  sont assemblés dans un vecteur  $\{F^{(i)}\}$  comme indiqué dans l'équation (74)
- le produit  $b_{ni} \cdot \{F^{(i)}\} \cdot \{F^{(i)}\}^T$  est ensuite effectué

Ces opérations sont répétées pour un nombre d'itérations en général égal à 10

Finalement la matrice [DM] est obtenue par la sommation de l'équation (78).

- g) La matrice masse globale ( Eq.80) est obtenue par sommation de la matrice masse de la coque et de la matrice masse ajoutée du fluide.
- h) Les conditions aux limites sont ensuite appliquées.
- i) Les fréquences  $\omega_i$  et les modes correspondantes  $\phi_i$  sont obtenus par une subroutine utilisant l'algorithme de JACOBI.
- j) Les pressions hydrodynamiques sont calculées selon le cas d'un réservoir à parois rigides ou flexibles.

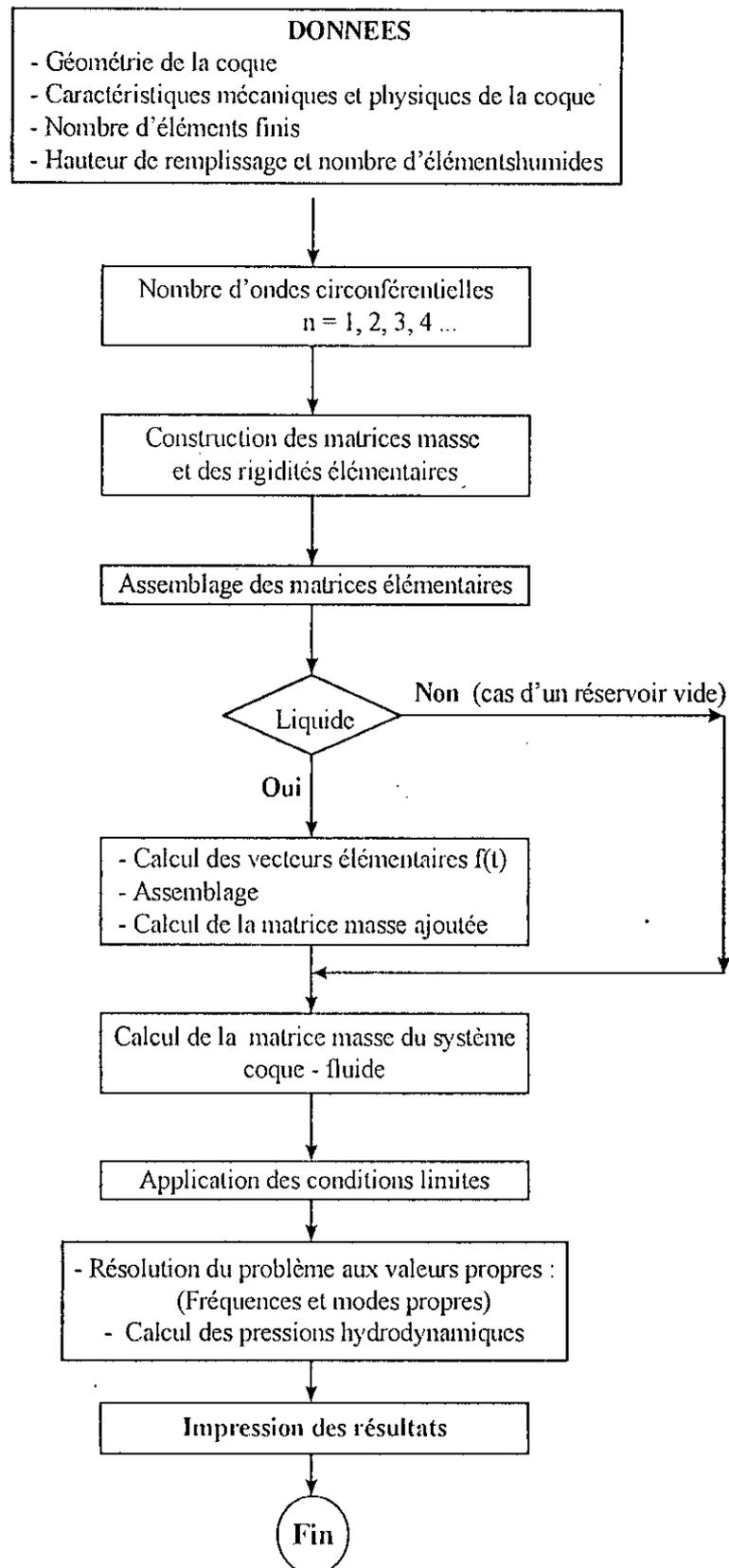


Fig.5.c Organigramme du programme Principal

# **CHAPITRE 6**

## **RESULTATS ET DISCUSSION**

## RESULTATS ET DISCUSSION

L'objectif de cette deuxième partie est:

1. de vérifier la validité des résultats obtenus par la présente méthode en les comparant avec les résultats obtenus par d'autres méthodes d'analyse;
2. de mettre en évidence l'influence des différents paramètres des réservoirs sur les caractéristiques dynamiques de vibration. Il s'agit essentiellement des paramètres suivants exprimés en termes adimensionnels:  $h/R$ ;  $L/R$ . et  $H/L$  ainsi que de la flexibilité
3. de présenter des résultats pratiques sous formes d'abaques afin de faciliter la détermination de la fréquence fondamentale en fonction des différents paramètres précités;
4. de vérifier l'application d'une méthode approchée pour la détermination des caractéristiques de vibration d'un réservoir partiellement rempli dans l'hypothèse où celui-ci est considéré plein;
5. d'évaluer la masse effective du liquide participant à la vibration latérale en fonction de différents paramètres;
6. d'étudier le cas des réservoirs à inerties variables dans le cas d'une variation linéaire de l'épaisseur des parois.
7. De montrer l'incidence de la méthode de calcul des fréquences naturelles sur les efforts dans les réservoirs.

## 5.1.VIBRATION NATURELLE D'UN RESERVOIR VIDE

La vibration des réservoirs vides est contrôlée par les paramètres géométriques du réservoir (épaisseur, hauteur, et rayon) et physico-mécanique (masse volumique du matériau, module de Young et coefficient de Poisson)

### 6.1.1.Comparaison avec d'autres investigations:

Le but de cet exemple est de déterminer les caractéristiques vibratoires d'un réservoir par la présente méthode et de comparer les résultats avec ceux obtenus par d'autres recherches.

#### Exemple 1

Le réservoir considéré présente les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} R &= 18,3 \text{ m,} \\ L &= 12,2 \text{ m,} \\ h &= 2,54 \text{ cm,} \\ E &= 20,67 \cdot 10^7 \text{ Kpa} \\ \nu &= 0,3 \\ \rho_s &= 7,84 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3 \end{aligned}$$

Le nombre d'éléments NEL = 12.

Le nombre d'ondes circonférentielles n est pris égale à 1.

Le tableau (1) montre les résultats obtenus pour les cinq premiers modes (m= 1 à 5) avec ceux obtenus dans d'autres références.

Mode vertical (m)	Présente étude	Méthode des éléments finis		Méthode de Ritz	Solution analytique
		réf. [9]	réf. [10]	réf. [11]	réf. [12]
1	34.0444	34.08	34.03	34.66	34.04
2	43.8556	43.91	43.85	44.02	43.81
3	44.5397	44.64	44.57	44.64	44.44
4	45.0206	45.19	45.07	45.25	44.83
5	45.6830	45.92	45.77		45.40

Tab (1) Fréquences propres pour n=1 et m=1 à 5

## Modes propres

Les modes propres associés à ces fréquences sont présentés ci-dessous( fig. 6 et 7).

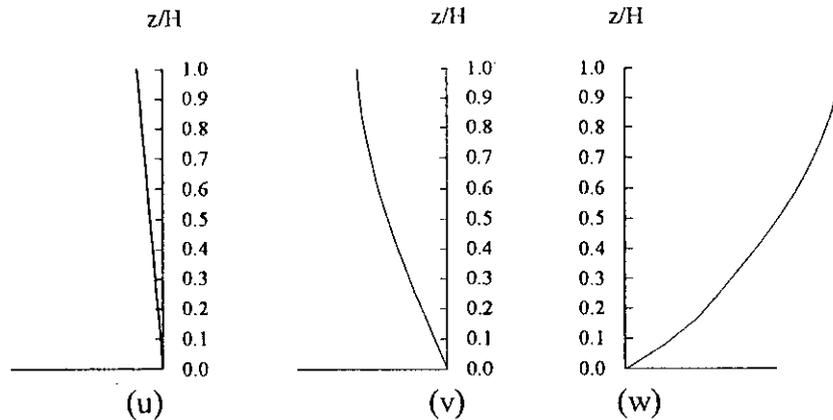


Fig.6. réservoir court: mode fondamental vertical de vibration  $n=1$  et  $m=1$  des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$

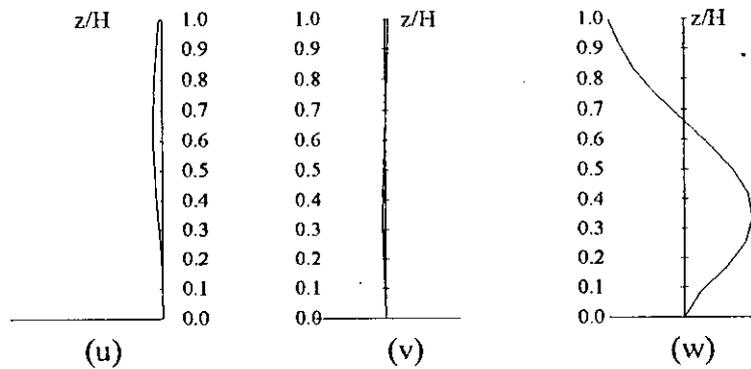


fig.7. réservoir court: second mode vertical de vibration  $n=1$  et  $m=2$  des déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$

On constate que l'allure de variation des déplacements est similaire dans les trois directions: c.-à-d. qu'elle est nulle à la base et augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale au sommet.

Par ailleurs, le tableau 2 montre les valeurs normalisées des déformations dans la direction radiales  $w$  et ce en fonction de l'abscisse adimensionnelle dans le cas d'un calcul avec un nombre d'éléments finis NEL égal à 10. Les valeurs trouvées sont comparées avec celles trouvées dans la référence [12].

Une bonne concordance des résultats est clairement observée.

$z/L$	Présente analyse	réf. [12]	Erreur (%)
0.1	0.2241	0.2242	0.028
0.2	0.3772	0.3773	0.038
0.3	0.6207	0.4920	0.126
0.4	0.6034	0.6036	0.025
0.5	0.7047	0.7054	0.093
0.6	0.7931	0.7949	0.226
0.7	0.8685	0.8702	0.191
0.8	0.9289	0.9298	0.099
0.9	0.972	0.9720	0.002
1.0	1	1.0000	0.000

Tab 2 déplacement modal normalisé dans la direction  $w$ .

### 6.1.2. Effet du rapport d'élancement ( $L/R$ )

Pour étudier l'effet de l'élancement sur les modes propres de vibration, on considère un réservoir long ( $L/R = 3$ ) dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes:

$$R = 7.31\text{m}, \quad L = 22\text{m}, \quad h = 2.54\text{cm}.$$

$$E = 20,67 \cdot 10^7 \text{ Kpa}, \quad \nu = 0,3 \quad \rho_s = 7,84 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

Les modes propres correspondant aux déplacements  $u$ ,  $v$  et  $w$  associés à la fréquence fondamentale de vibration radiale sont donnés dans par la figure .8.

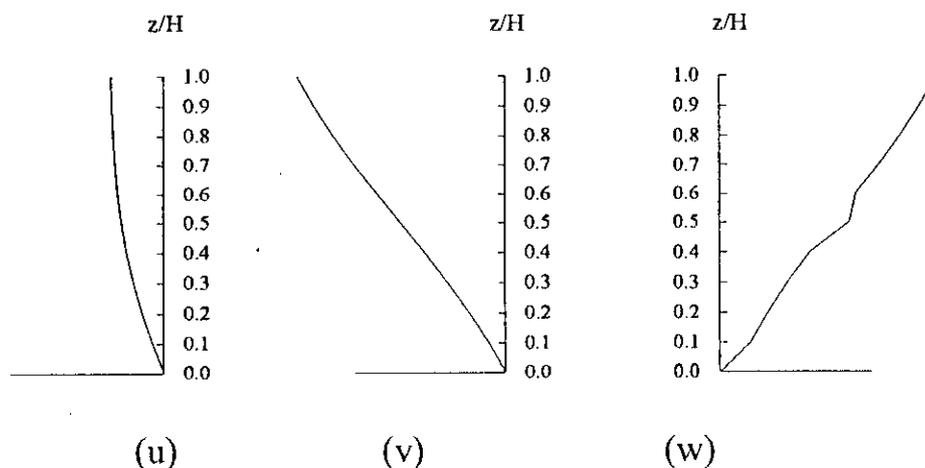


Fig.8. réservoir long: mode vertical de vibration ( $m=1$ ,  $n=1$ ) des déplacements  $u$ ,  $v$  et,  $w$

Le tableau 3 donne les valeurs des déplacements normalisés aux sommets des deux réservoirs:

Type de réservoir	déplacement u	déplacement v	déplacement w
court	0.1131	0.3839	1
long	0.2424	0.9696	1

Tab.3: Déplacements aux sommets des 02 réservoirs

La comparaison avec le cas des réservoirs courts montre que:

- Dans les deux cas, les déplacements (u) peuvent être négligés,
- Le déplacement (v) peut être négligé dans le cas des réservoirs courts, tandis qu'il est du même ordre de grandeur que le déplacement (w) dans le cas des réservoirs longs.

En conséquence, les réservoirs longs dans leurs vibrations radiales s'accompagnent d'une distorsion. Cette distorsion est faible pour les réservoirs courts.

### 6.1.3. Vibration en modes $\cos(n\theta)$

#### Exemple 2:

Considérons le réservoir dont les caractéristiques sont :

$$R = 7,62 \text{ cm,}$$

$$L = 30,48 \text{ cm}$$

$$h = 0,025 \text{ cm}$$

Les fréquences naturelles ( cps) correspondant à  $n = 3$  et  $n = 4$  sont présentées sur le tableau 4

Mode vertical m	n = 3		n = 4	
	Présente analyse	réf. [12]	Présente analyse	réf. [12]
↓				
1	255,8	250	213,6	209
2	1272,4	1240	829,7	797

Tab (4) Fréquences propres ( cps ) pour  $n=3, 4$  et  $m=1$  à  $2$

### 6.1.4. Variation des fréquences naturelles en fonction du nombre d'ondes circonférentielles.

Pour différents modes axiaux ( $m=1,2,3$ ) on étudie la variation de la fréquence de vibration du réservoir et ce en fonction du nombre d'ondes circonférentielles  $n$ . (modes  $\cos n\theta$ )

Le réservoir considéré est défini par:

$R=60.2$  cm,  $R=13.725$  cm,  $h=0.0795$  cm,  $\nu=0.345$ ,  $E=7.2 \cdot 10^4$  bar,  
 $\rho=8$  t/m<sup>3</sup>

Les résultats obtenus pour ce réservoir vide ( $L/R=4.38$ ,  $h/R=0.0057$ ) sont représentés graphiquement par la fig. 9.

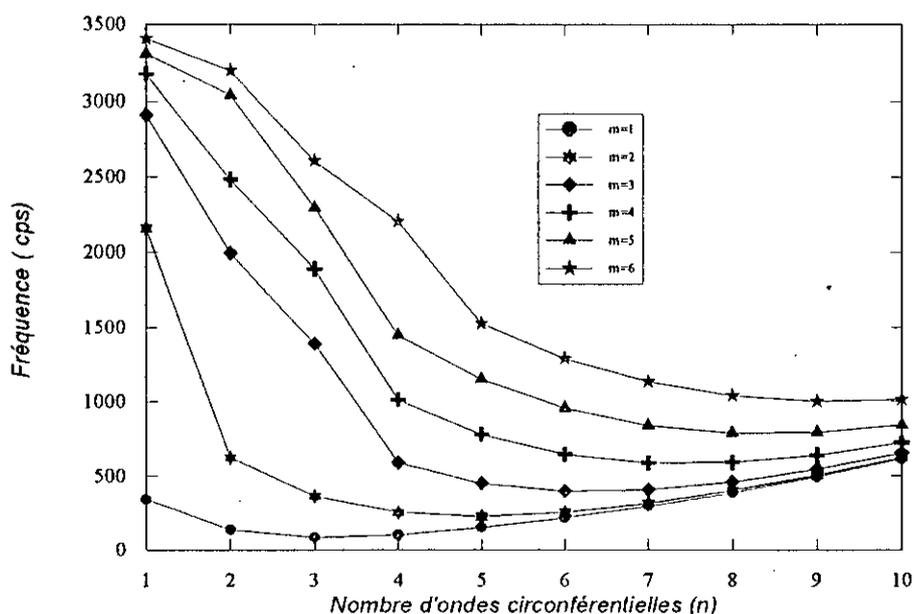


Fig.9. Variation de la fréquence en fonction du nombre d'ondes circonférentielles, pour différents modes de flexion

La lecture de cette courbe montre que la fréquence est relativement élevée pour les faibles valeurs de  $n$  ( par exemple  $n=2$  ou  $3$  ). Sa valeur diminue avec l'augmentation du nombre d'ondes circonférentielle jusqu'à atteindre une valeur minimale pour une certaine valeur de  $n$ . Après cette valeur, la fréquence commence à augmenter de nouveau avec l'accroissement de  $n$ . la plus petite valeur de la fréquence est fonction également de la géométrie du réservoir ( rapport d'élanement  $L/R$ )

## 6.2. CAS DES RESERVOIRS PLEINS

Outre les paramètres de contrôle des réservoirs vide, les caractéristiques vibratoires des réservoirs pleins ou partiellement remplis dépendent de la masse volumique du liquide et du rapport H/L exprimant ou le taux (la profondeur) de remplissage

### 6.2.1. Etude de la convergence de la matrice masse ajoutée en fonction du nombre d'éléments:

Avant d'étudier les caractéristiques des réservoirs dans leurs interactions avec le fluide, il convient de montrer la convergence des fréquences obtenues compte tenu du nombre d'itérations effectuées sur la série infinie définissant l'expression de la matrice masse ajoutée [DM] ( Eq 78 )

Le réservoir considéré est un réservoir long ( $L/R=3$  ) dont les caractéristiques sont:

$$L = 22\text{m (864in)}, \quad R = 7.31\text{m (288in)}, \quad h/R = 0.001$$

Il est supposé rempli de liquide de masse volumique égale à  $1 \text{ t/m}^3$  ( $0.94 \cdot 10^{-4}$  )  
Les fréquences de vibration des quatre premiers modes ( $m = 1$  à  $4$ ) pour un nombre d'ondes circumférentielles  $n = 1$  sont données dans le tableau suivant en fonction du nombre d'itérations I.

Nombre d'itérations (I)	fréquences ( cps )			
	m=1	m=	m=3	m=4
1	3.7665	37.5185	74.8592	96.3432
2	3.0375	9.3089	99.8821	99.8821
5	2.9386	8.5689	12.7022	19.5460
8	2.9252	8.5450	12.6293	16.3384
10	2.9224	8.5374	12.6190	16.3178
15	2.9197	8.5295	12.6088	16.2940
20	2.9187	8.5275	12.6019	16.2867
25	2.9182	8.5261	12.5992	16.2807
30	2.9180	8.5256	12.5969	16.2781
40	2.9178	8.5250	12.5958	16.2760
50	2.9177	8.5247	12.5955	16.2757
70	2.9176	8.5245	12.5952	16.2754
100	2.9175	8.5244	12.5951	16.2753

Tab.5. Convergence de la matrice masse ajoutée  
réservoir long plein (nombre d'élément 20)

La fig.10. visualise clairement cette variation.

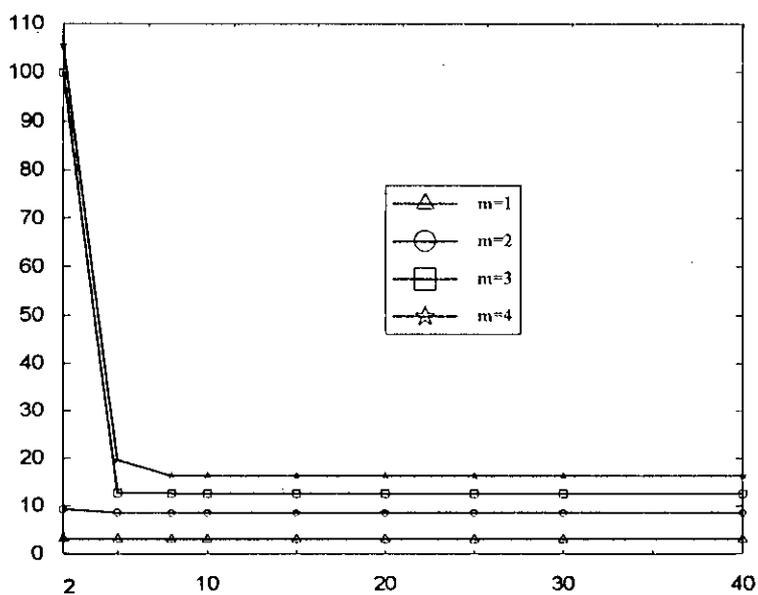


Fig 10. Convergence de la matrice masse ajoutée.

Le tableau 6. donne les erreurs commises pour un I donné par rapport à la valeur I = 10 prise comme valeur de référence

Nombre d'itérations (I)	Erreur par rapport à I=10 ( % )			
	m=1	m=	m=3	m=4
1	28.9	339	493	490
2	3.94	9.04	691	512
5	0.55	0.37	0.659	19.78
8	0.1	0.09	0.082	0.126
10	0	0	0	0
15	0.09	0.09	0.08	0.15
20	0.13	0.12	0.14	0.19
25	0.14	0.13	0.16	0.23
30	0.15	0.14	0.18	0.24
40	0.16	0.15	0.18	0.26
50	0.16	0.15	0.19	0.26
70	0.16	0.15	0.19	0.26
100	0.17	0.15	0.19	0.26

Tab.6. Erreurs sur les fréquences par rapport à la fréquence correspondant à I=10

On constate aisément que la convergence de la matrice est très rapide. Seule donc quelques itérations suffisent ( en générale 10 à 20 ) pour une bonne représentation de la série infinie

### 6.2.2. Comparaison des résultats avec d'autres études :

Considérons le réservoir de l'exemple précédant mais rempli le liquide de masse volumique  $\rho_l = 1t/m^3$

Le réservoir est divisé en un nombre d'éléments égal à 20.

Les fréquences propres de vibrations sont indiquées dans le tableau ( 7 ) :

mode verticale (m)	Présente analyse	réf. [8]	réf. [9]
1	6.1836	6.13	6.20
2	11.2724	11.15	11.41
3	15.0995	15.11	15.54
4	17.7818	18.16	18.72
5	20.1971		

tab.7. fréquences propres (cps)d'un réservoir court plein pour  $n=1$  et  $m=1$  à 5

Une autre manière de représentation de la variation de la fréquence des coques est de la normaliser par rapport à la fréquence de vibration des poutres contilever. Cette dernière est donnée dans le cas de la fréquence fondamentale par l'expression analytique suivante :

$$\omega_1^* = \frac{3.515}{H^2} \sqrt{\left( \frac{E}{2\rho[1 + (R/2h)(\rho_f/\rho)]} \right)}$$

La figure 11. Illustre une telle variation :

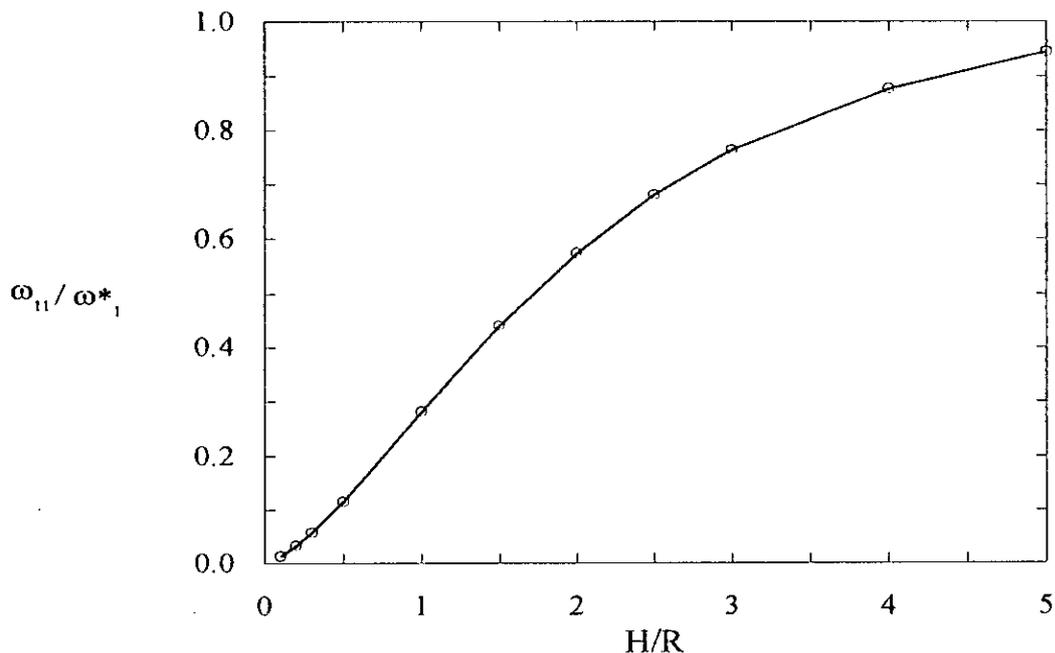


Fig 11. fréquence normalisée du mode fondamentale

### 6.2.3. Influence du rapport L/R ( élancement du réservoir)

L'influence du rapport L/R est mise en évidence par la prise en considération d'un réservoir long L/R = 3 dont les caractéristiques sont :

R = 7.31 m , L = 2.2 , et h = 2.54cm .

Les fréquences sont données au tableau 8.

m	fréquence
1	5.3044
2	15.5598
3	22.9846
4	29.8259
5	34.4573

Tab 8. fréquences ( cps ) d'un réservoir long( L/R = 3) pour n=1

La différence de comportement entre ces deux types de réservoir est également montrée par l'allure des modes propres de vibration. (fig 12 )

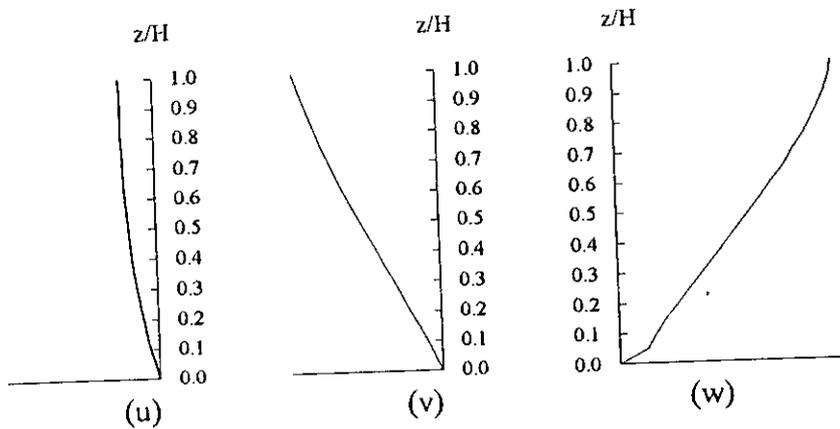


fig. 12.a: cas d'un réservoir long ( $L/R = 3$ )  
fréquence naturelle = 5.31 cps ( $n=1$ )

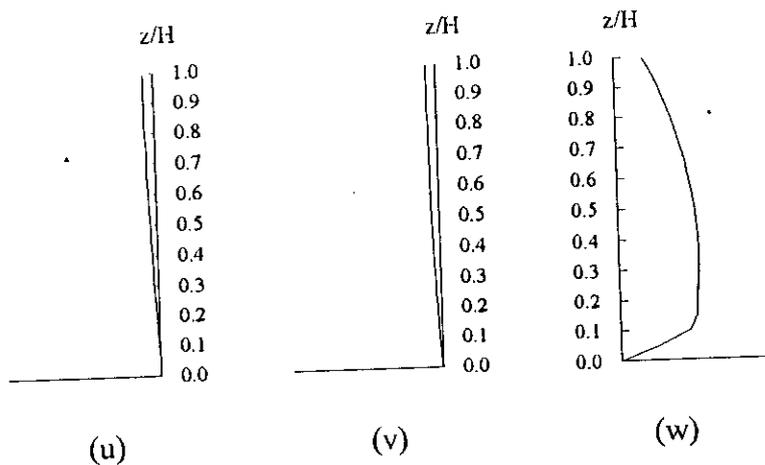


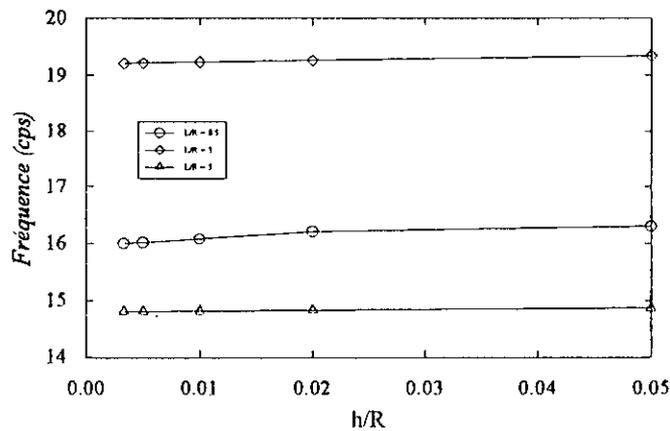
fig 12.b: cas d'un réservoir court ( $L/R = 0.67$ )  
fréquence naturelle = 6.18 cps ( $n=1$ )

L'allure des modes propres d'un réservoir long ( fig. 12.a) est fondamentalement différente de celui d'un réservoir court ( fig. 12.b ). En effet, dans le cas des réservoirs long, les modes propres dans le sens radial présentent la même forme et ils sont du même ordre de grandeur aussi bien quand ils sont remplis ou à vide. Le cas des réservoirs courts est différent: l'allure des déformées à vide et plein n'est pas la même, et les ordres de grandeurs sont incomparables en des points situés à mi hauteur et au sommet.

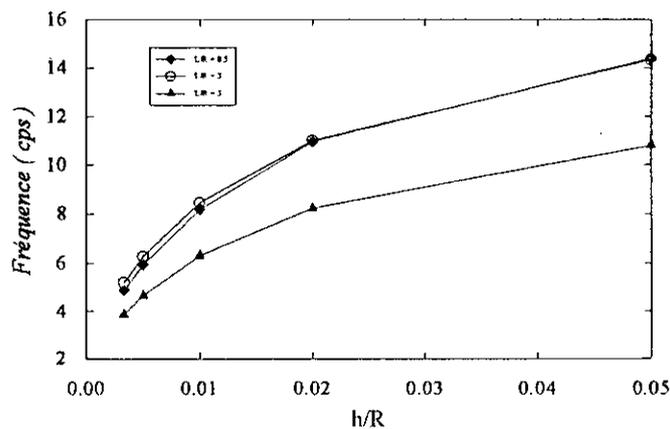
#### 6.2.4. Influence de l'épaisseur sur les fréquences:

Pour étudier l'influence de l'épaisseur de la paroi du réservoir sur les fréquences, l'étude paramétrique suivante a été considérée: L'effet de l'épaisseur est présenté par le rapport

$h/R$ . Pour chaque cas (rempli ou vide) il a été obtenu trois courbes ( fig. 13 a,b ) traduisant l'effet de l'élanement (rapport  $L/R$  ).



(a) cas d'un réservoir vide



(b) Cas d'un réservoir plein

Fig. 13. influence de l'épaisseur  $h$  sur les fréquences

L'examen de ces courbes, fait ressortir clairement que l'épaisseur de la paroi n'influe pratiquement pas sur la fréquence fondamentale des réservoirs vides, tandis que dans le cas des réservoirs pleins l'épaisseur exerce une influence significative.

Il intéressant de signaler également que l'analyse de la variation de la fréquence fondamentale des réservoirs pleins en fonction du rapport  $h/R$  a permis de conclure que cette variation est proportionnelle à la racine carrée de  $h/R$ .

### 6.2.5. Etude des pressions hydrodynamiques

Dans l'étude de la distribution des pressions hydrodynamiques le long de la hauteur des parois du réservoir on considère l'expression de  $P_d$  donnée par l'équation (19).

Il ne sera envisagé que le cas où le nombre d'ondes circonférentielle  $n$  est égal à 1.

Deux cas sont distingués:

#### Cas des réservoirs à parois rigides:

Dans ce cas on a:

$\ddot{w}(z, t) = a(t)$  = accélération du sol; on obtient:

$$P_d(R, \theta, z, t) = -\frac{2\rho_1}{H} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_0^H a(t) \cdot \cos(\alpha_i z) dz}{\alpha_i} \frac{I_1(\alpha_i R)}{I_1'(\alpha_i R)} \cos(\alpha_i z) \cos(\theta)$$

Par conséquent:

$$P_d(R, \theta, z, t) = \frac{-2\rho_1}{H} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} I_1(\alpha_i R)}{\alpha_i^2 \cdot I_1'(\alpha_i R)} \cdot \cos(\alpha_i z) \right] \cos(\theta) \cdot a(t)$$

Le terme entre crochets représente l'allure de répartition de la pression hydrodynamique des réservoirs à parois rigide en fonction de la cordonnée adimensionnelle  $z$  pour  $\theta=0$ .

#### Cas des réservoirs à parois flexibles:

Dans ce cas on a :

$$\int_0^H \ddot{w}(z, t) \cos(\alpha_1 z) = \{F^{(i)}\}^T \{\ddot{q}(t)\}$$

Si on ne considère que l'effet du premier mode de vibration du système déformable coque-fluide, le vecteur déplacement nodal de la coque  $\{q(t)\}$  peut s'écrire comme suit:

$$\{q(t)\} = \{\varphi\}_1 \{Y_1(t)\}$$

avec

$\{\varphi\}_1$  représente le mode fondamental de vibration et,  
 $Y(t)$  l'amplitude du mode fondamental fonction du temps

d'où:

$$\{\ddot{q}(t)\} = \{\varphi_1\} \cdot \ddot{Y}(t)$$

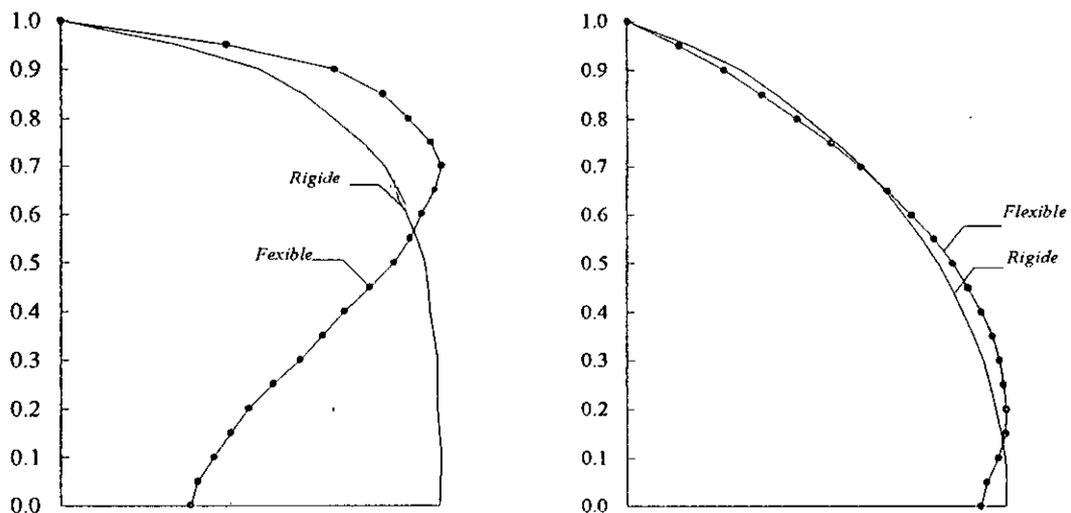
Par conséquent:

$$P_d(R, \theta, z, t) = \frac{-2\rho_l}{H} \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\{F^i\}^T \{\varphi_i\} \cdot I_1(\alpha_i R) \cdot \cos(\alpha_i z)}{\alpha_i I_1'(\alpha_i R)} \right] \cos(\theta) \cdot \ddot{Y}(t)$$

Le terme entre crochets représente la distribution des pressions hydrodynamiques en fonction de  $z/H$ .

**Nota:** Dans les deux cas la distribution des pressions dans la direction circonférentielle est toujours proportionnelles à  $\cos(\theta)$

La figure 14 montre la répartition des pressions hydrodynamiques dans le cas des réservoirs pleins en considérant les parois rigides et flexibles et en faisant la distinction entre les réservoirs courts et les réservoirs longs.



(a)  $L/R = 3$

(b)  $L/R = 0.67$

Fig14. mode fondamental des pressions hydrodynamiques.

L'analyse de ces courbes montre que:

- Les pressions hydrodynamiques des réservoirs courts et des réservoirs longs présentent des allures différentes. Cette différence est essentiellement due à la flexibilité des parois des réservoir qui dans le présent cas est contrôlée par les facteurs géométriques.
- Dans le cas des réservoirs courts une bonne estimation des pressions hydrodynamiques peut être obtenue en supposant un comportement rigides des parois,
- Les réservoirs longs atteignent leurs valeurs maximales près du sommet.

### 6.3. RESERVOIRS PARTIELLEMENT PLEINS

#### 6.3.1. Comparaison des résultats:

Le cas du réservoir court rempli à moitié a été étudié. Les fréquences de vibration correspondant aux (02) premiers modes sont données au tableau ( 9 ), avec les résultats trouvés dans les références [8], et [9 ]

m	Présente étude	réf. [8]	réf. [9]
1	9.847	10.15	9.91
2	16.977	17.85	17.74

Tab. 9. Fréquences des réservoirs partiellement remplis

Une très bonne concordance des résultats est observée.

#### 6.3.2. Influence de la hauteur du liquide sur les fréquences naturelles

L'influence de la hauteur du liquide sur les fréquences naturelles de vibration dans le mode  $\cos(\theta)$  des réservoirs long et court est à présent étudiée, en définissant plusieurs taux de remplissage

##### - Cas d'un réservoir court :

Le tableau 10.a indique les valeurs trouvées en (Hz) des 5 premiers modes de flexion longitudinale pour  $n=1$ .

Pourcentage du liquide (%)	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
100 (plein)	6.1836	11.2724	15.0995	17.7818	20.1971
90	6.6485	12.0090	15.9404	18.7604	21.3889
80	7.2163	12.9096	16.9900	20.0468	23.0730
70	7.8929	13.9593	18.2274	21.6279	25.2737
60	8.7439	15.2726	19.8637	23.9276	28.7521
50	9.8470	16.9770	22.1973	27.6018	34.3815
40	11.3615	19.4029	26.0844	33.9301	36.0320
30	13.6606	23.5750	33.6114	35.4042	44.0610
20	18.0493	33.1146	34.9214	43.9539	44.6218
10	32.8267	34.6049	43.8670	44.5330	44.9990
0	34.0444	43.8556	44.5397	45.0206	45.6830

Tab.10.a Variation des fréquences en fonction du taux de remplissage.

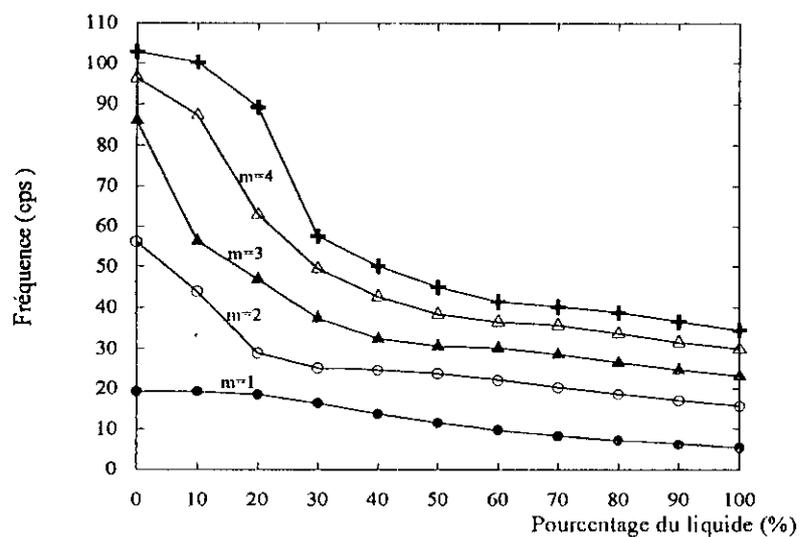
- Cas d'un réservoir long :

Le tableau 10.b indique les valeurs trouvées en (Hz) des 5 premiers modes de flexion longitudinale pour  $n=1$ .

Pourcentage du liquide (%)	m = 1	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5
100 (plein)	5.3044	15.5598	22.9846	29.8259	34.4573
90	6.0836	16.9723	24.6034	31.4573	36.5066
80	7.0245	18.5162	26.4440	33.5794	38.6580
70	8.1733	20.2102	28.4244	35.5921	40.1019
60	9.5932	22.0414	29.9918	36.4023	41.3536
50	11.3700	23.7487	30.4959	38.3106	44.8615
40	13.6067	24.5612	32.3033	42.6467	50.0402
30	16.2857	25.0993	37.3145	49.4424	57.4773
20	18.4839	28.7929	46.8857	62.8764	89.1105
10	19.1516	43.8935	56.3434	87.2438	103.4009
0 (vide)	19.2080	56.1353	85.9961	96.3867	102.8333

Tab.10.b Variation des fréquences en fonction du taux de remplissage

Pour mieux apprécier le comportement de ces deux types de réservoirs compte tenu de hauteur de remplissage, les figures 15,a et b sont établies.



(a) Cas d'un réservoir long

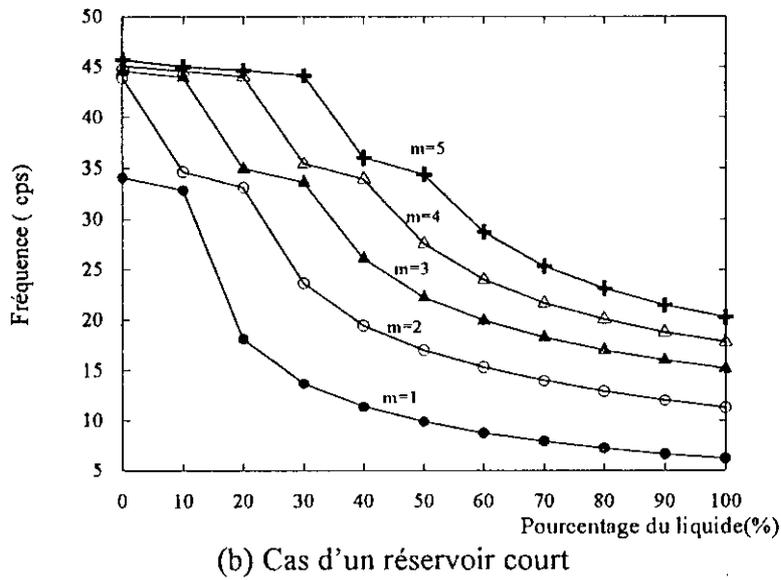


Fig.15 Fréquences naturelles pour des réservoirs partiellement remplis

Il est à noter que la fréquence diminue avec l'augmentation du pourcentage du liquide. Ceci est logique et attendu car la masse du système augmente du fait de la matrice masse ajoutée, tandis que la rigidité de la structure reste inchangée.

Il est intéressant de remarquer également que la réduction de la fréquence naturelle est plus accentuée dans le cas des réservoirs courts que dans les réservoirs longs. A ce titre, un pourcentage de remplissage de 25% peut être considéré sans effet sur la fréquence fondamentale dans le cas d'un réservoir long. Cependant, l'effet du liquide ne peut pas être négligé au-delà de 10% de remplissage dans les réservoirs courts. Ceci peut être expliqué par le fait que le volume du fluide et par conséquent la masse du liquide est proportionnelle au carré du rayon  $R^2$  et à la hauteur de remplissage  $H$ .

### 6.3.3. Modes propres des réservoirs partiellement remplis

La différence de comportement des réservoirs longs et courts, partiellement remplis est également montrée en étudiant les modes propres de vibration dans les trois directions du vecteur déplacement (  $u, v, w$  )

A cet effet les valeurs des taux de remplissage considérés sont  $H/L=0.75$ ,  $H/L=0.50$  et  $H/L=0.25$

réservoirs longs :

H/L=0.75		
u	v	w
- 0.0005	- 0.0010	0 0028
- 0.0009	- 0.0021	0 0036
- 0.0013	- 0.0031	0 0047
- 0.0016	- 0.0042	0 0058
-0.0019	-0.0052	0.0078
-0.0021	-0.0063	0.0088
-0.0024	-0.0072	0.0098
-0.0025	-0.0082	0.0106
-0.0027	-0.0091	0.0114
-0.0028	-0.0099	0.0121
-0.0029	-0.0106	0.0126
-0.0030	-0.0113	0.0130
-0.0032	-0.0119	0.0132
-0.0032	-0.0125	0.0132
-0.0032	-0.0135	0.0136
-0.0032	-0.0140	0.0141
-0.0032	-0.0145	0.0146
-0.0032	-0.0150	0.0151
-0.0032	-0.0155	0.0156

Tab. 11.a. Modes propres des déplacements u,v,w

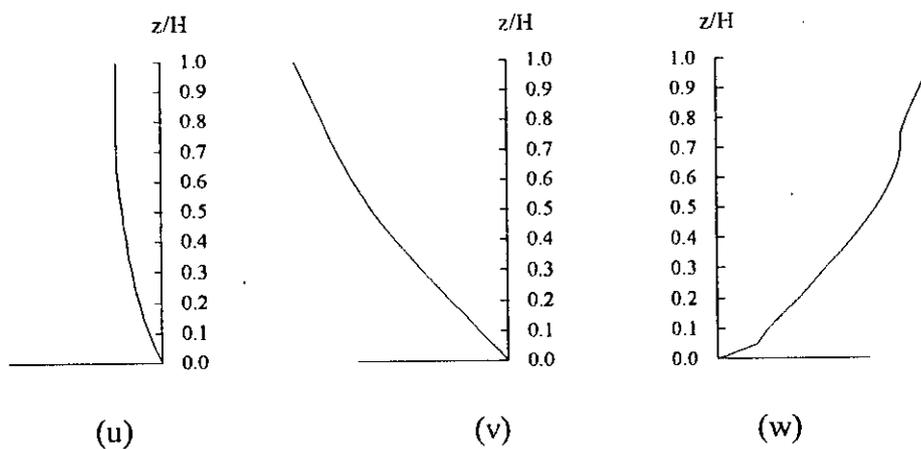


Fig. 16. cas d'un réservoir long H/L = 0,75

H/L=0.50		
u	v	w
-0.0006	-0.0018	0.0059
-0.0013	-0.0035	0.0072
-0.0018	-0.0052	0.0090
-0.0023	-0.0068	0.0106
-0.0027	-0.0082	0.0120
-0.0030	-0.0095	0.0131
-0.0033	-0.0107	0.0140
-0.0036	-0.0117	0.0145
-0.0038	-0.0126	0.0146
-0.0039	-0.0134	0.0139
-0.0040	-0.0142	0.0145
-0.0040	-0.0150	0.0153
-0.0041	-0.0158	0.0160
-0.0041	-0.0165	0.0168
-0.0042	-0.0137	0.0175
-0.0042	-0.0180	0.0182
-0.0042	-0.0187	0.0189
-0.0042	-0.0194	0.0196
-0.0042	-0.0201	0.0203
-0.0043	-0.0208	0.0210

Tab.11.b. Modes propres des déplacements u,v,w

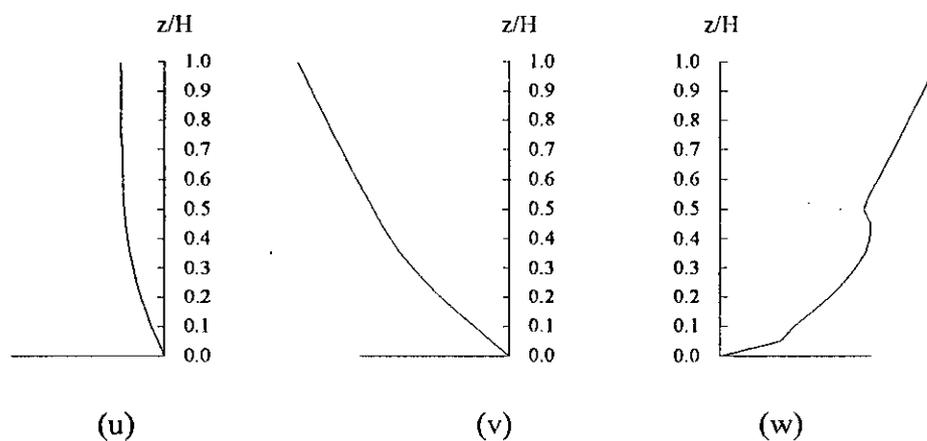


Fig.17. cas d'un réservoir long H/L =0,50

H/L=0.25		
u	v	w
-0.0012	-0.0024	0.0108
-0.0024	-0.0048	0.0122
-0.0035	-0.0070	0.0137
-0.0045	-0.0090	0.0130
-0.0053	-0.0109	0.0141
-0.0059	-0.0129	0.0144
-0.0065	-0.0149	0.0164
-0.0070	-0.0170	0.0184
-0.0075	-0.0191	0.0204
-0.0078	-0.0211	0.0224
-0.0082	-0.0232	0.0244
-0.0085	-0.0253	0.0264
-0.0087	-0.0273	0.0284
-0.0089	-0.0293	0.0303
-0.0091	-0.0312	0.0322
-0.0092	-0.0330	0.0340
-0.0093	-0.0348	0.0357
-0.0093	-0.0365	0.0374
-0.0094	-0.0380	0.0390
-0.0095	-0.0395	0.0405

Tab.11.c. Modes propres des déplacements u,v,w

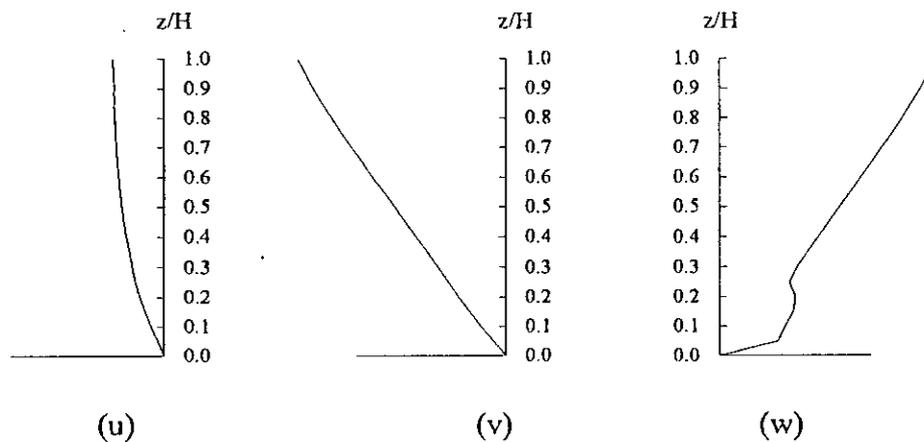


Fig. 18. cas d'un réservoir long H/L =0,25

**Réservoirs courts :**

H/L=0.75		
u	v	w
-0.0000	-0.0002	0.0050
-0.0001	-0.0005	0.0089
-0.0002	-0.0007	0.0097
-0.0003	-0.0009	0.0096
-0.0004	-0.0011	0.0094
-0.0005	-0.0012	0.0092
-0.0006	-0.0014	0.0089
-0.0007	-0.0015	0.0084
-0.0007	-0.0016	0.0079
-0.0008	-0.0016	0.0072
-0.0008	-0.0017	0.0063
-0.0009	-0.0018	0.0054
-0.0009	-0.0018	0.0044
-0.0009	-0.0018	0.0032
-0.0009	-0.0019	0.0023
-0.0009	-0.0019	0.0019
-0.0009	-0.0019	0.0020
-0.0009	-0.0020	0.0020
-0.0009	-0.0020	0.0021
-0.0009	-0.0020	0.0021

Tab.12.a. Modes propres des déplacements u,v,w

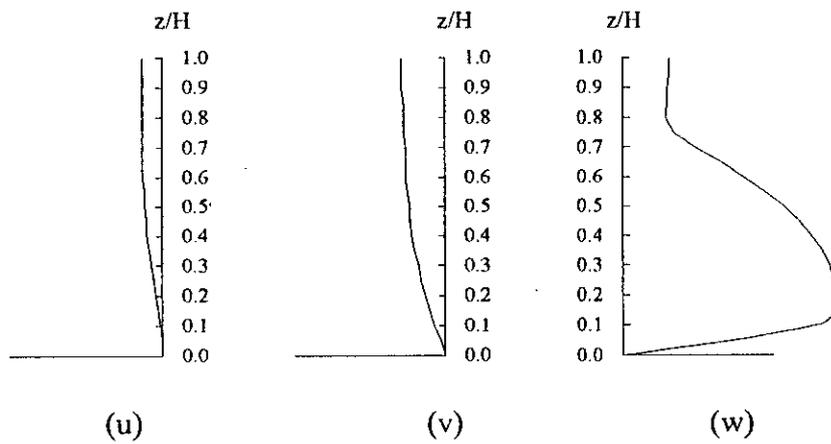


Fig. 19. cas d'un réservoir court H/L = 0,75

H/L=0.50		
u	v	w
-0.0006	-0.0018	0.0059
-0.0013	-0.0035	0.0072
-0.0018	-0.0052	0.0090
-0.0023	-0.0068	0.0106
-0.0027	-0.0082	0.0120
-0.0030	-0.0095	0.0131
-0.0033	-0.0107	0.0140
-0.0036	-0.0117	0.0145
-0.0038	-0.0126	0.0146
-0.0039	-0.0134	0.0139
-0.0040	-0.0142	0.0145
-0.0040	-0.0150	0.0153
-0.0041	-0.0158	0.0160
-0.0041	-0.0165	0.0168
-0.0042	-0.0173	0.0175
-0.0042	-0.0180	0.0182
-0.0042	-0.0187	0.0189
-0.0042	-0.0194	0.0196
-0.0042	-0.0201	0.0203
-0.0043	-0.0208	0.0210

Tab.12.b. Modes propres des déplacements u,v,w

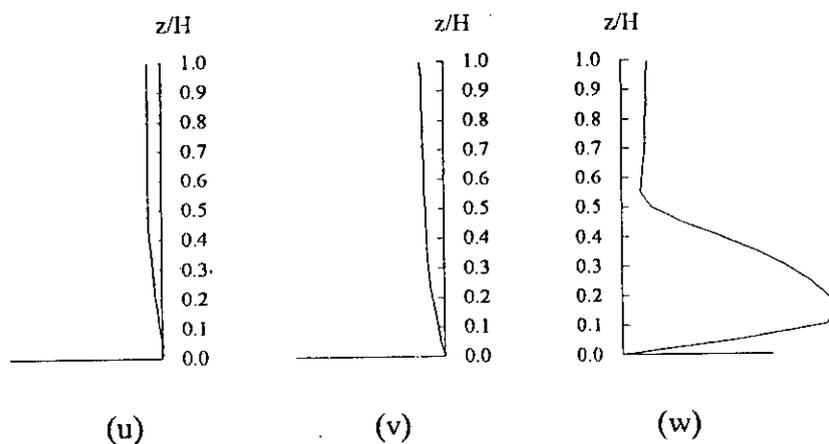


Fig. 20. cas d'un réservoir court H/L =0,50

### 6.3.4. Distribution de la pression hydrodynamique :

Dans une dernière étape, on montre la différence de comportement des réservoirs longs et courts partiellement remplis à partir de la distribution des pressions hydrodynamiques le long des parois pendant les vibration latérales en mode fondamentale.

#### Réservoirs courts :

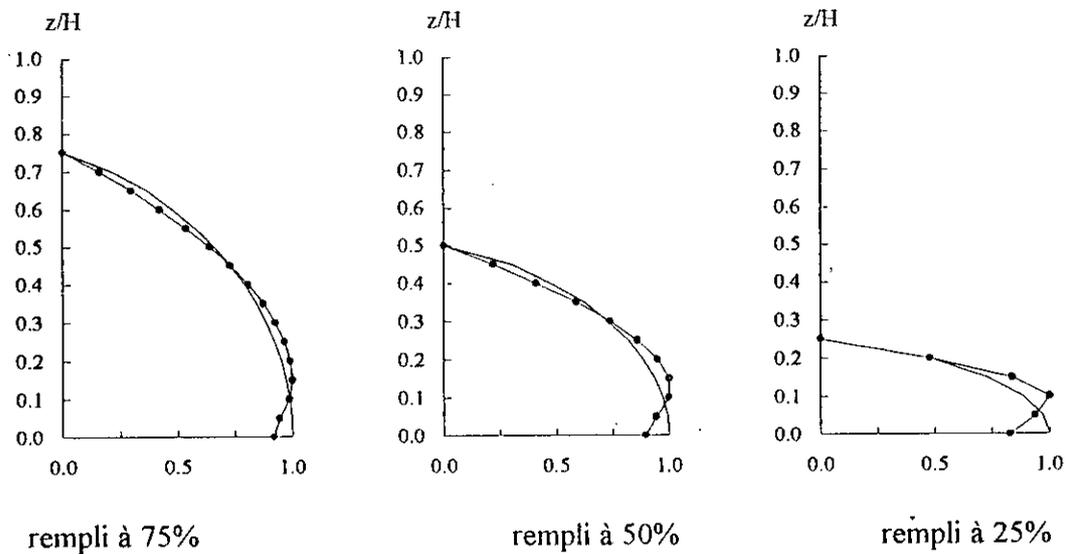


fig. 22. Distribution des pressions hydrodynamiques dans le cas des réservoirs courts

#### Réservoirs longs :

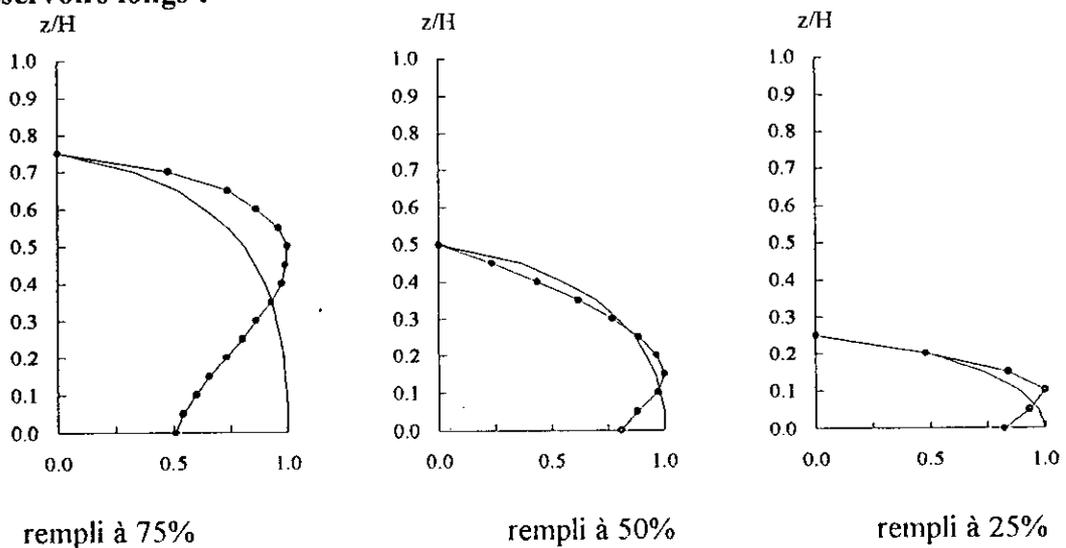


fig. 23. Distribution des pressions hydrodynamiques dans le cas des réservoirs longs

## 6.4. CALCUL APPROCHE DES RESERVOIRS PARTIELLEMENT REMPLIS

Dans certains cas, il est fait appel à une méthode de calcul approchée, pour le calcul de la fréquence fondamentale d'un réservoir partiellement rempli. Cette approximation consiste à calculer la fréquence fondamentale d'un réservoir partiellement rempli en admettant qu'il est plein et en substituant à sa hauteur totale sa hauteur de remplissage. La validité de cette approximation est étudiée dans ce qui suit. L'influence de la masse volumique du matériau constitutif des parois du réservoir est mise en évidence en considérant deux matériaux différents (béton et acier). Quatre rapports H/L ont été considérés: 0.8, 0.5, 0.4 et 0.25. Le rapport h/R est constant..

Les résultats obtenus sont montrés sur les tableaux (13 et 14.) et représentés sur les figures (.24 et 25.) en fonction des rapports L/R.

### Réservoir en acier

L/R ↓	H/L = 0.8		H/L = 0.5		H/L = 0.4		H/L = 0.25	
	exact	approx.	exact	approx.	exact	approx.	exact	approx.
3	0.1055	0.1062	0.1728	0.1818	0.2184	0.2229	0.3174	0.3294
2.5	0.1100	0.1107	0.1770	0.1799	0.2139	0.2163	0.3053	0.3122
2	0.1127	0.1132	0.1720	0.1739	0.2046	0.2054	0.2868	0.2903
1.5	0.1112	0.1116	0.1613	0.1622	0.1892	0.1891	0.2606	0.2621
1.	0.1026	0.1028	0.1428	0.1431	0.1658	0.1655	0.2243	0.2247
0.75	0.0945	0.0946	0.1295	0.1296	0.1495	0.1493	0.2013	0.2012
0.5	0.0828	0.0828	0.1117	0.1117	0.1286	0.1284	0.1755	0.1746
0.3	0.0688	0.0687	0.0928	0.0926	0.1083	0.1076	0.6100	0.1533

Tab. (13) Paramètre de fréquence  $\Omega$  pour réservoir partiellement rempli

(réservoir en acier  $h/R=0.001, \nu=0.3, \rho_s=0.737 \cdot 10^{-3}, \rho_l/\rho_s=0.127$ )

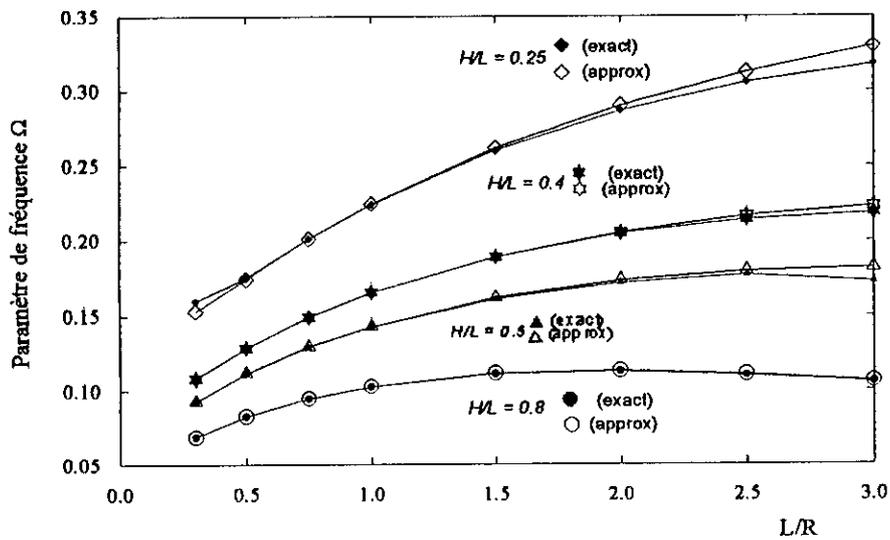


fig. 24. courbe de variation du paramètre de fréquence  $\Omega$  par la méthode exacte et la méthode approchée

**Réservoir en béton**

L/R ↓	H/L = 0.8		H/L = 0.5		H/L = 0.4		H/L = 0.25	
	exact	approx	exact	approx	exact	approx	exact	approx
3	0.1917	0.1958	0.3138	0.3365	0.3778	0.4142	0.4946	0.6075
2.5	0.2013	0.2048	0.3170	0.3332	0.3790	0.4027	0.5123	0.5798
2	0.2071	0.2099	0.3125	0.3224	0.3708	0.3840	0.5146	0.5471
1.5	0.2055	0.2071	0.2927	0.3027	0.3518	0.3576	0.4987	0.5103
1.	0.1914	0.1920	0.2718	0.2731	0.3224	0.3232	0.4802	0.4736
0.75	0.1786	0.1788	0.2554	0.2594	0.3077	0.3054	0.4794	0.4395
0.5	0.1619	0.1616	0.2430	0.2367	0.3028	0.2801	0.4337	0.3975
0.3	0.1503	0.1467	0.2412	0.2052	0.2801	0.2480	0.2895	0.2162

Tabl (14) Coefficient de fréquence  $\Omega$  pour réservoirs partiellement remplis (réservoir en béton  $h/R=0.001, \nu=0.15, \rho_s=0.235 \cdot 10^{-4}, \rho_l/\rho_s=0.4$ )

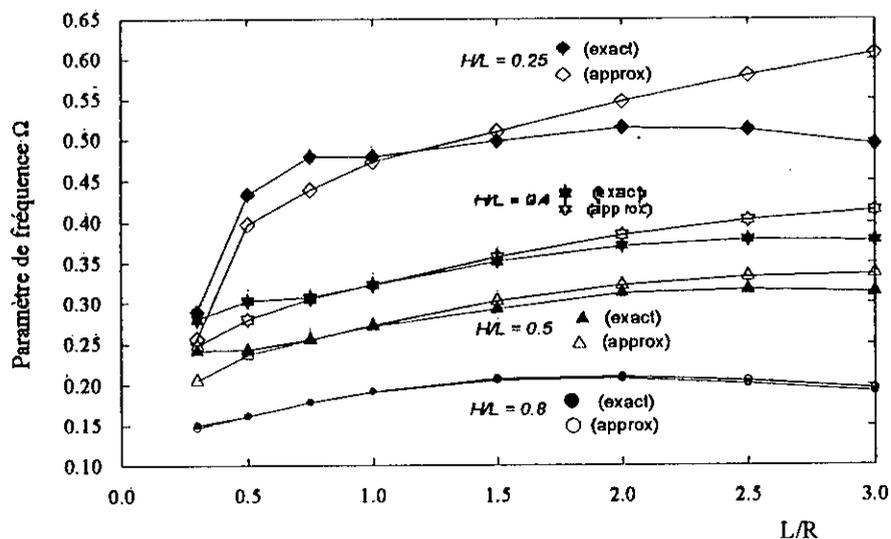


fig. 25. courbe de variation du paramètre de fréquence  $\Omega$  par la méthode exacte et la méthode approchée

Les conclusions qui peuvent être tirées de cette comparaison sont les suivantes:

- Pour des taux de remplissage  $H/L=0.8$  une bonne précision peut être obtenue en utilisant la méthode approximative,
- Le cas des réservoirs en acier est plus insensible à l'utilisation de la méthode approximative, notamment pour  $L/R \leq 2.5$
- L'approximation est très insuffisante dans les réservoirs en béton à faible taux de remplissage ( $H/L \leq 0.25$ ) et pour des rapports  $L/R$  compris entre 0.5 et 1.5

## 6.5. COEFFICIENT DE MASSE EFFECTIVE

Pour une analyse sismique de la réponse des systèmes réservoir-fluide, l'effet dynamique du fluide est en général, simplifié en introduisant une masse virtuelle à effet d'inertie, [3,51]. Par conséquent la densité équivalente du matériau constituant la structure en incluant la masse ajoutée du fluide peut être écrite sous la forme suivante :

$$\rho_e = \rho_s + \frac{1}{2} \frac{R}{h} \cdot \frac{H}{L} \rho_l \cdot C_{eff}.$$

Formule dans laquelle :

- $\rho_s$  = Densité de la coque du réservoir
- R = Rayon du réservoir
- h = Epaisseur du réservoir
- H = Hauteur de remplissage
- L = Hauteur du réservoir
- $\rho_l$  = Densité du liquide
- $C_{eff}$  = Coefficient effectif de masse.

Le coefficient de masse effective représente le rapport entre la masse ajoutée et la masse totale du fluide contenu dans le réservoir.

L'effet de la variation du paramètre  $\frac{H}{L}$  sur le coefficient  $C_{eff}$  est montré sur la figure 26

et ce pour différentes valeurs de l'élanement  $\frac{L}{R}$

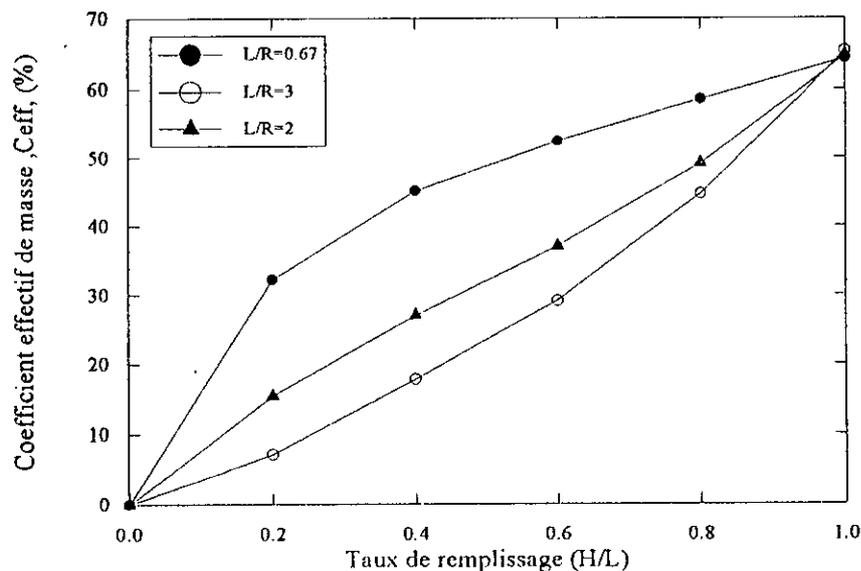


Fig. 26. Coefficient de masse effective

L'examen de ces courbes appelle les observations suivantes:

- En aucun cas, la masse totale du fluide participe dans la vibration;
- Le coefficient de masse effective est pratiquement indépendant du rapport d'élanement  $L/R$  dans le cas des réservoirs pleins;
- Le coefficient de masse effective du fluide en vibration ( $C_{eff}$ ), augmente avec l'augmentation du taux de remplissage et ce d'autant plus que le réservoir est court;
- Par ailleurs, le rapport  $h/R$  n'a pas d'influence significative sur la variation de la masse effective comme le montre le tableau .15.

H/L	Masse effective du liquide (%)			
	$h/R = 0.001$	$h/R = 0.002$	$h/R = 0.003$	$h/R = 0.004$
1	65.35	65.86	65.8	65.73
0.8	44.65	44.48	44.06	43.78
0.6	29.16	28.30	27.53	27.12
0.4	17.81	15.79	14.11	12.81
0.2	7.16	3.54	2.31	1.96

Tab.15 Masse effective en fonction du rapport  $h/R$

## 6.6. RESULTATS PRATIQUES

Afin de faciliter le calcul pratique des fréquences propres de vibration du mode fondamental des réservoirs, les abaques suivants sont établis pour différentes valeurs du rapport  $h/R$  en fonction du rapport  $H/R$  et du paramètre de fréquence  $\Omega$  (Paramètre adimensionnel) donné par :

$$\Omega = \omega_f \cdot H \cdot \sqrt{\frac{\rho_s}{E}} \quad (83)$$

Il est à noter que ces abaques sont établis pour des réservoirs remplis d'eau (masse volumique égale à  $\rho_l = 1t/m^3$ ). Pour d'autres liquides (masse volumique  $\rho_f$ ) on obtient le paramètre de fréquence  $\Omega_f$  par la relation suivante :

$$\Omega_f = \Omega_\omega \cdot \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_\omega}} \quad (84)$$

où :  $\Omega_\omega$  représente le paramètre de fréquence du même réservoir rempli d'eau.

L'équation (84) est basée sur l'hypothèse selon laquelle la masse de la coque seule est négligeable devant la masse du fluide.

### 6.6.1. Cas des réservoirs en acier

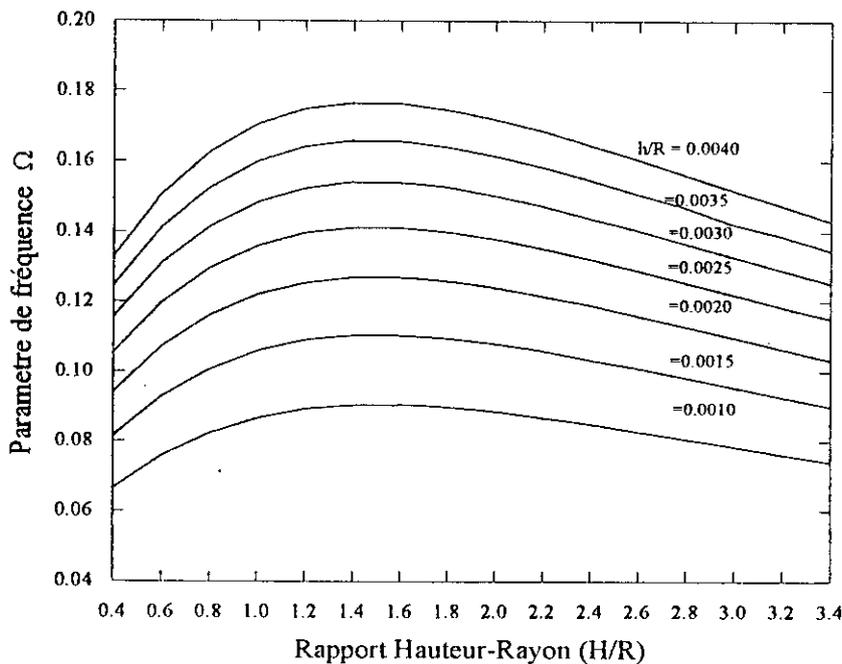


Fig. 27. Paramètre de fréquence, réservoir en acier plein avec épaisseur constante

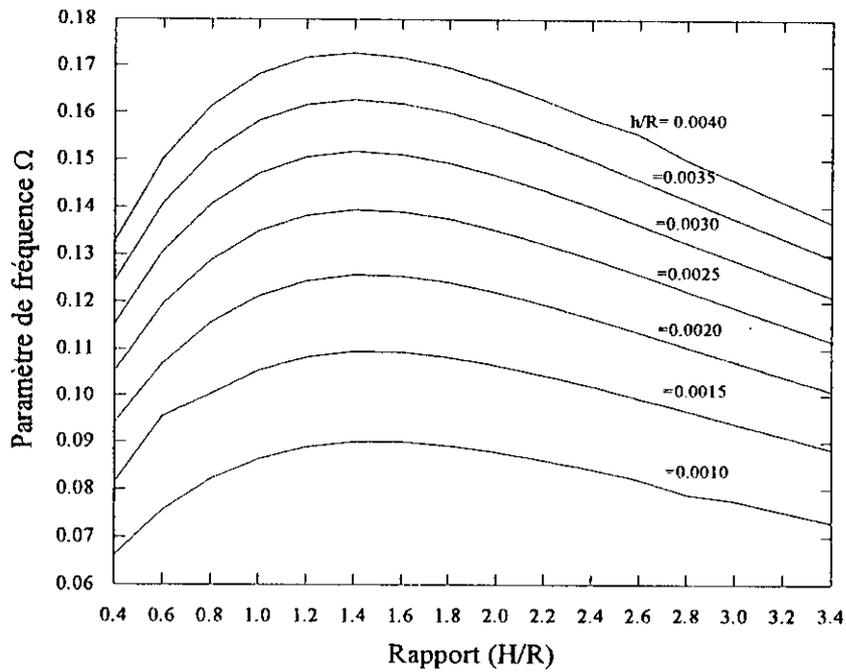


Fig. 28. Paramètre de fréquence, réservoir en acier rempli à 75% avec épaisseur constante

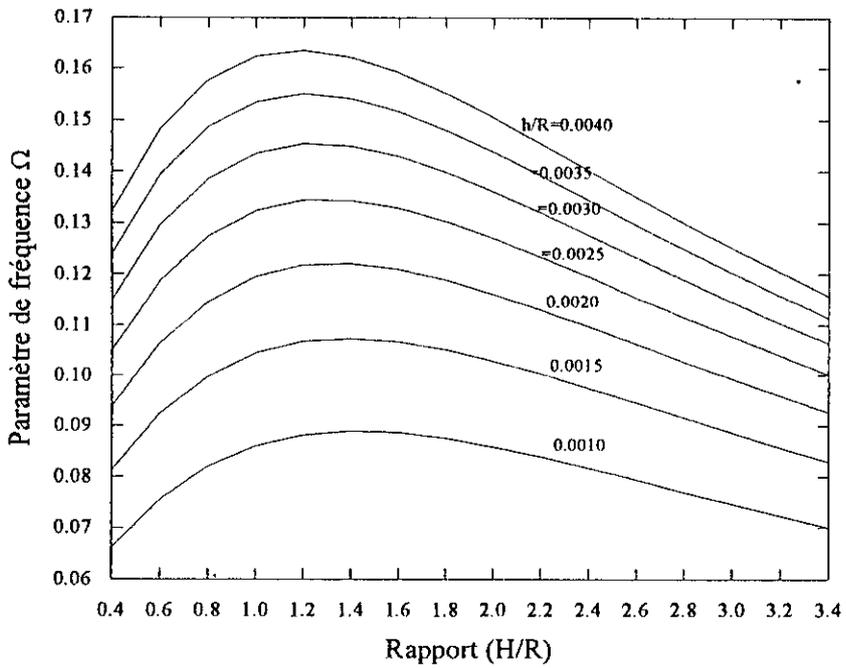


Fig. 29. Paramètre de fréquence, réservoir en acier rempli à 50% avec épaisseur constante

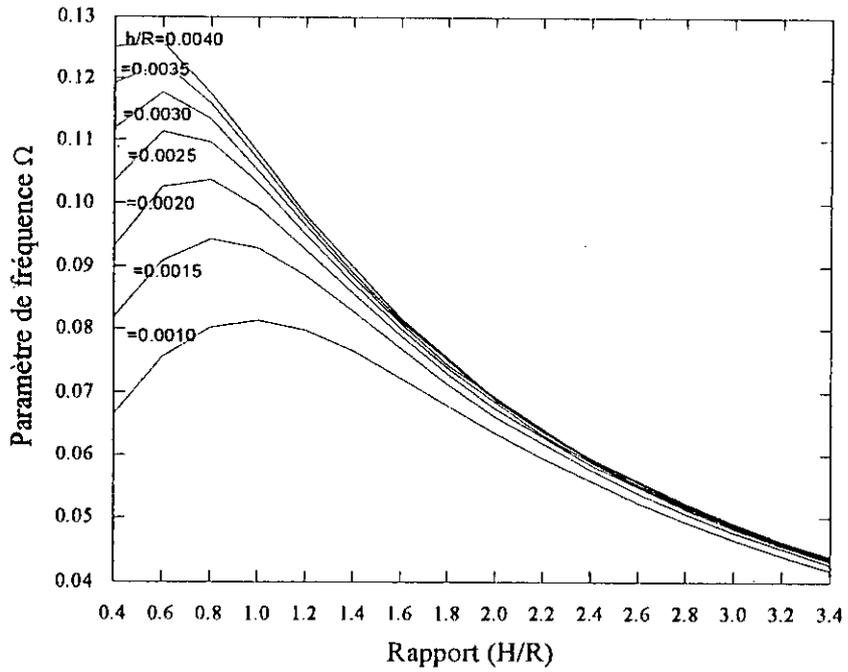


Fig. 30. Paramètre de fréquence, réservoir en acier rempli à 25% avec épaisseur constante

### 6.6.2. Cas des réservoirs en béton

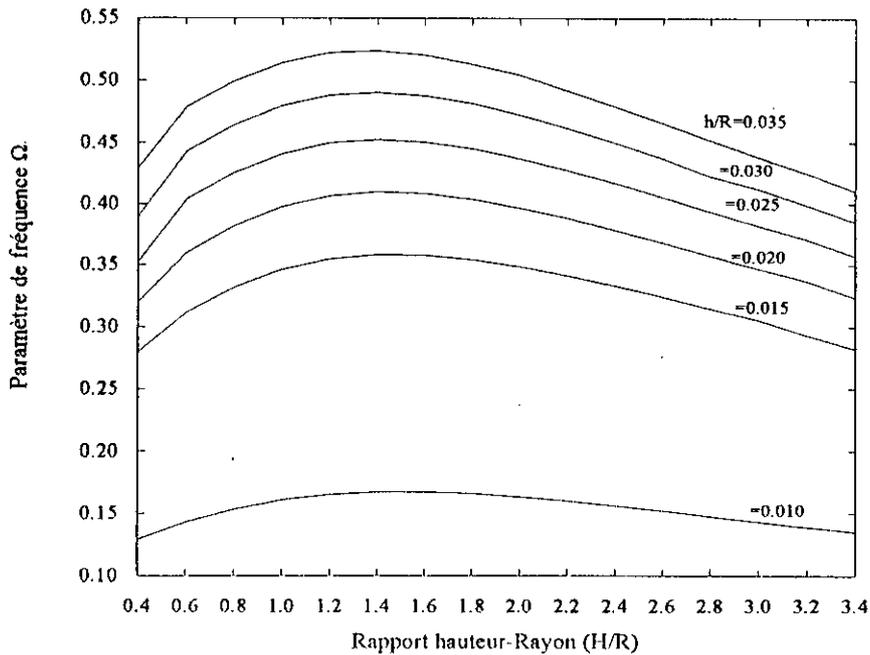


Fig. 31. Paramètre de fréquence, réservoir en béton plein avec épaisseur constante

## 6.7. RESERVOIRS A EPAISSEURS VARIABLES

En pratique, on rencontre souvent des réservoirs de stockage de fluide présentant des parois à épaisseurs non uniformes. La recherche d'une forme géométrique optimale a essentiellement pour but l'optimisation de la quantité de la matière utilisée et ce compte tenu des gains importants que peut générer une bonne distribution de cette dernière.

En revanche, et du fait des contraintes imposées par des considérations de mise en œuvre (façonnage d'acier, coffrage de béton), il est souvent fait recours à une variation linéaire de la paroi du réservoir. Cette variation peut être obtenue de deux manières différentes: (fig.32)

- une variation linéaire du rayon externe avec rayon interne maintenu constant,
- une variation linéaire des rayons interne et externe avec rayon moyen constant.

Dans le premier cas et en raison des limitations imposées par l'application de la présente théorie l'inclinaison de la surface moyenne de la paroi doit rester faible pour pouvoir être négligée.

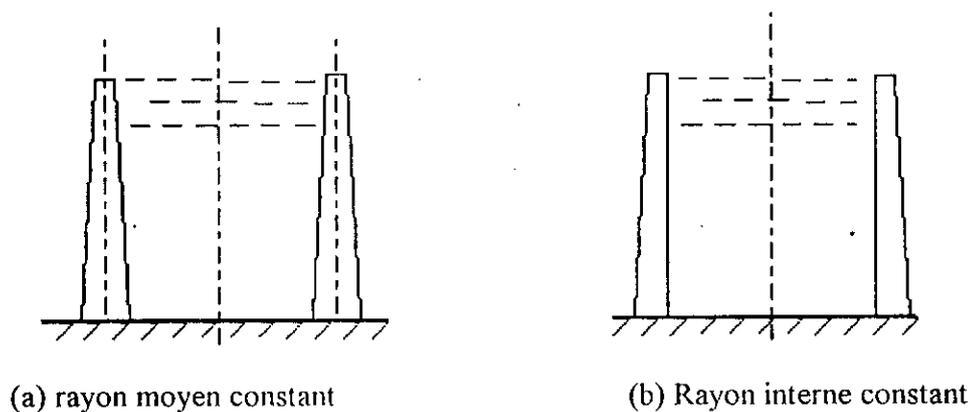


Fig 32. réservoirs à épaisseurs linéairement variables

Une étude des formes optimales des réservoirs d'eau en béton a été effectuée en [36, 37]. Le critère de choix considéré est le poids minimum de la structure et le problème consiste donc à minimiser le volume total du matériau utilisé.

Deux types de variation ont été étudiées pour comparaison.

Aussi, une étude de la réponse dynamique de ces réservoirs requiert la connaissance de leurs caractéristiques vibratoires. Ce chapitre est une contribution à l'analyse et la détermination de ces caractéristiques. La validité de la méthode de calcul qui consiste à prendre des caractéristiques géométriques équivalentes égales aux moyennes géométriques des caractéristiques réelles est également étudiée.

### Comparaisons des paramètres de fréquences :

On considère dans ce qui suit des réservoirs dont le rapport  $h/R$  est égal à 0.001 et 0.01 respectivement en acier et en béton. Le nombre d'élément finis est pris égal à 20.

Les paramètres de fréquence  $\Omega$  de chaque réservoir ont été calculés avec la géométrie réelle.

Aux fins de comparaisons avec les réservoirs à rayon constant la représentation graphique a été paramétrée comme suit :

Le rapport  $h/R$  est remplacé par  $h_{\text{moy}}/R_{\text{moy}}$  avec :

$$h_{\text{moy}} = \frac{h_{\text{base}} + h_{\text{som}}}{2} \quad \text{et} \quad R_{\text{moy}} = \frac{R_{\text{base}} + R_{\text{som}}}{2}$$

Pour mieux visualiser l'influence de l'élanement  $L/R_{\text{moy}}$  les ordonnées des graphes suivants sont représentés par les rapports des paramètres de fréquences du réservoir à épaisseur constante sur celui du réservoir à épaisseur variable.

Les résultats obtenus sont donnés par la fig.

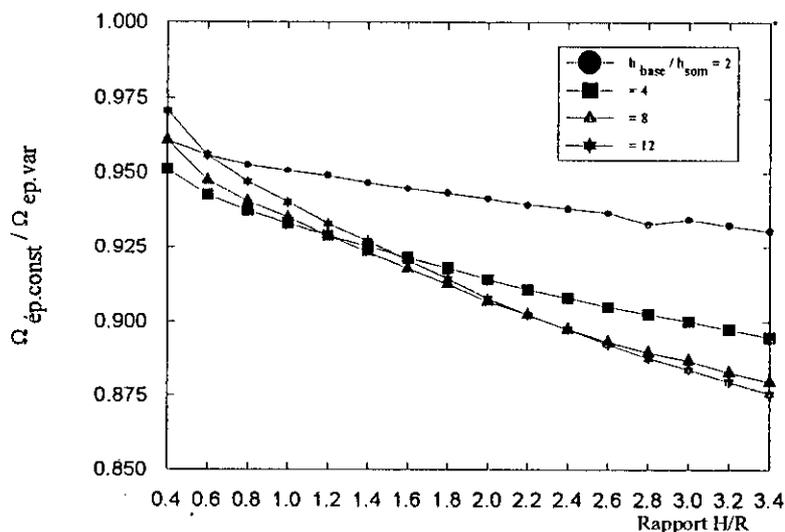


fig.33. influence de la variation des épaisseurs en tête et au sommet (réservoir en acier)

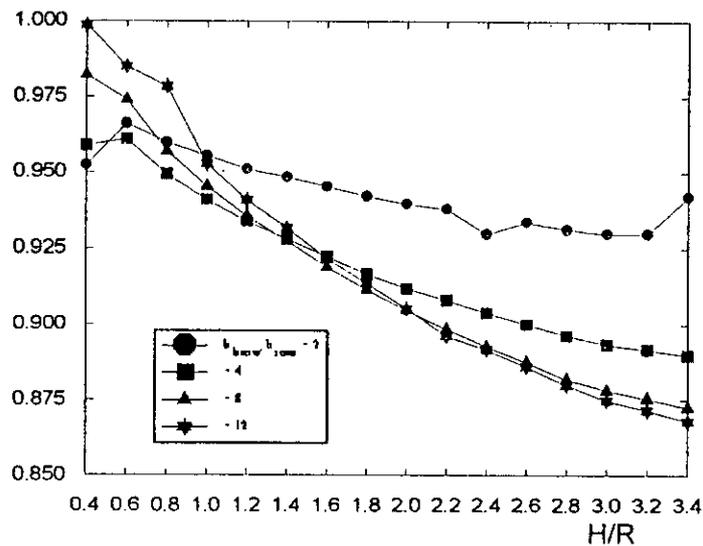


fig. 34. influence de la variation des épaisseurs en tête et au sommet (réservoir en béton)

Conclusion:

L'examen des courbes des la figures 33 et 34 montre que :

- Le paramètre de fréquence ne change pas dans les deux formes géométriques étudiées et ce quel que soit le rapport des épaisseurs à la base et en tête,
- Une augmentation du paramètre de fréquence de plus en plus importante est constatée et ce à mesure que le rapport des épaisseurs augmente. Cette augmentation peut être de l'ordre de 15%
- L'allure de variation du paramètre de fréquence étant la même que celle des réservoirs à épaisseurs constantes

Par ailleurs, le calcul des réservoirs pleins, à épaisseurs variables peut être conduit en considérant une épaisseur équivalente, (fig. 14 ), fonction du rapport H/R et du rapport des épaisseurs à la base et au sommet du réservoir.

En première approximation, l'épaisseur équivalente est de l'ordre de 1.12 à 1.25 fois l'épaisseur moyenne pour les réservoirs longs tandis qu'elle est de 1,10 fois l'épaisseur moyenne pour les réservoirs court.

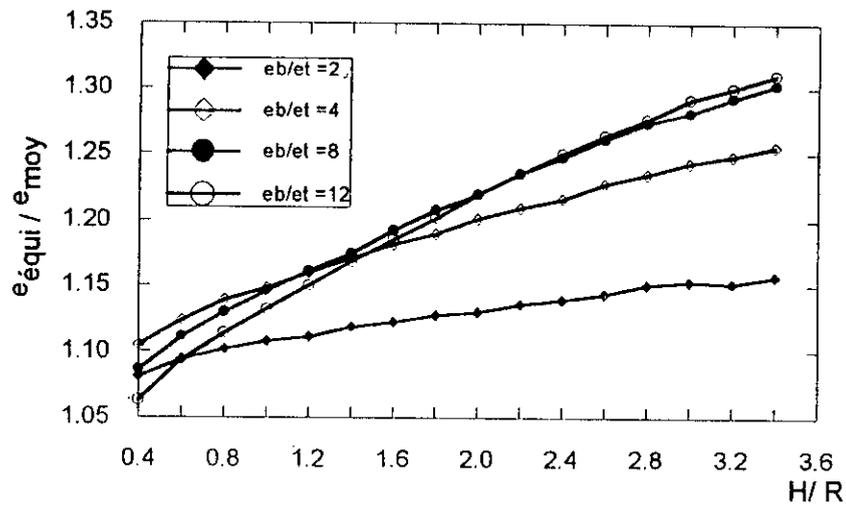


Fig 14. Epaisseur équivalente pour  $h_{moy}/R = 0.001$

**Exemple:** à titre de comparaison l'exemple suivant est considéré:[60].

Considérons le réservoir en acier d'une capacité de rayon  $R = 24.4m$ ,  $L=H = 14.6$ . L'épaisseur varie de 2.9cm à la base à 0.79cm au sommet.

les résultats trouvés sont:

	Réf. [60]	présente analyse
Fréquence fondamentale rd/s	24.80	24.52

Tab. 15. Fréquence fondamentale d'un réservoir à épaisseur variable.

## 6.8. REPONSE MAXIMALE DES RESERVOIRS A UNE EXITATION SISMIQUE

Le but de ce paragraphe est de montrer l'incidence de la méthode de calcul des fréquences sur la valeur des efforts dans les réservoirs.

Outre le fait que les méthodes approximatives ne permettent pas de déterminer les fréquences des modes supérieurs, celles-ci ne sont valables que dans certains cas particuliers [56].

L'excitation sismique est appliquée au système coque-fluide sous la forme d'un mouvement du support. La réponse du système couplé peut être obtenue en utilisant une méthode appropriée. Ainsi la réponse modale maximale du système couplé peut être obtenue en utilisant un spectre de réponse. On obtient la réponse totale maximale en

considérant la racine carrée de la somme des carrés ou encore la somme numérique des maximums modaux (résultat conservatif).

Par ailleurs il a été montré [52] que les basses fréquences d'oscillation du liquide et les fréquences élevées de vibration du système sont faiblement couplées. Par conséquent, la réponse du système couplé peut être décomposée en deux parties : L'effet de la partie impulsive et l'effet de la partie convective.

Les efforts dus à la partie convective peuvent être évalués avec une précision suffisante dans l'hypothèse de parois rigides, et en calculant la fréquence d'oscillation du liquide par la formule bien connue donnée par :

$$\omega^2 = \frac{1.84g}{R} \tanh\left(\frac{1.84H}{R}\right) \quad (85)$$

Dans l'exemple traité ci-après, on ne s'intéressera qu'aux efforts impulsifs et on ne considérera que la participation du premier mode de vibration du système.

La méthode de calcul utilisée pour l'évaluation des efforts est celle développée dans la référence [9]

On considère un réservoir en acier rempli d'eau avec :

$$R = 12,2 \text{ m} ; \quad L = 12,2 \text{ m} ; \quad h = 0,0122 \text{ m}$$

$$E = 207 \cdot 10^3 \text{ KN/m}^2 ; \quad \rho = 7830 \text{ kg/m}^3 ; \quad \rho_l = 1000 \text{ kg/m}^3 ; \quad \nu = 0,3.$$

Le spectre de réponse donnée dans la référence [44] est supposé être le spectre de calcul.

Dans ces conditions, les fréquences fondamentales (rd/sec) calculées par différentes méthodes ainsi que les efforts tranchants sont les moments de renversement correspondants sont donnés par le tableau 17

	Sakai[54]	Haroun et El laithy[52]	Tedesco[43]	Présente analyse
fréquence(rd/s)	64.485	69.593	33.23	60.3198
accélération spectrale	0.3g	0.293g	0.43g	0.313 $\alpha_k$
effort tranchant (kN)	$8.39 \cdot 10^3$	$8.19 \cdot 10^3$	$12.03 \cdot 10^3$	$8.75 \cdot 10^3$
moment. de renversement (kN.m)	$22.02 \cdot 10^3$	$21.50 \cdot 10^3$	$31.65 \cdot 10^3$	$22.97 \cdot 10^3$

Tab 17. Comparaison des efforts impulsifs

On constate qu'une erreur dans la détermination de la fréquence de vibration des réservoirs induit une erreur non négligeable dans l'évaluation des efforts.

## **CHAPITRE 7**

# **CONCLUSIONS GENERALES**

## CONCLUSIONS

La présente étude développe une méthode particulière pour la détermination des caractéristiques vibratoires (fréquences naturelles et modes correspondants, pressions hydrodynamiques, coefficient de masse effective) d'un système réservoir fluide en interaction, ce qui revient à prendre en considération l'effet de la flexibilité des parois considérées parfois comme des parois rigides.

La validité d'une méthode approchée de calcul des fréquences fondamentales des réservoirs partiellement remplis a été également appréhendée en précisant son domaine de validité.

La méthode utilisée est de type hybride basée sur la méthode des éléments finis pour la partie coque et sur une solution analytique conduisant au concept de matrice masse ajoutée pour la région du fluide.

Contrairement aux approches d'analyses des coques en éléments finis utilisant des éléments quadrilatérales ou triangulaires, la présente méthode utilise des éléments annulaires (cylindriques).

Les modes de vibrations longitudinales (ou flexionnelles) sont évalués pour chaque nombre d'ondes circonférentielles  $n$  (mode  $\cos n\theta$ ...) avec  $n \geq 1$ . Cependant il a été axé dans la discussion des résultats obtenus de manière particulière sur les mode  $\cos \theta$ . (c.-à-d.  $n = 1$ ).

Le cas de réservoirs vides, partiellement remplis et plein a été passé en revue.

Les résultats obtenus ont été déterminés moyennant un programme numérique exécuté sur ordinateur.

Les exemples traités montrent l'excellente concordance entre les résultats obtenus avec d'autres résultats obtenus par d'autres recherches analytiques, expérimentales ou numériques.

Les principales conclusions de cette étude sont résumées dans ce qui suit :

- Simplicité et rapidité de calcul : En effet le traitement analytique de la région du fluide permet de réduire extrêmement le nombre de degré de liberté du problème, d'autant plus que seuls des logiciels et codes de calcul spécialisé, rarement disponibles, sont capables de traiter ce type de problème;
- Le fluide contenu dans le réservoir a un effet de réduction de la fréquence naturelle de vibration du système et ce à cause de la masse hydrodynamique ajoutée;
- La fréquence naturelle du système fluide-réservoir augmente avec la diminution du rapport d'élanement  $L/R$ .
- La flexibilité des parois des réservoirs est un paramètre à effet non négligeable sur le comportement des réservoirs notamment ceux présentant un élanement important
- Des abaques pratiques pour la détermination des fréquences fondamentales des réservoirs partiellement remplis ont été présentés. Ces abaques sont applicables uniquement pour des réservoirs parfaitement cylindriques de manière à ne pas faire intervenir les modes circonférentielles élevés ( $n > 2$ );
- La méthode approchée supposant que la hauteur du réservoir peut être confondue avec la hauteur de remplissage, pour la détermination de la réponse des réservoirs partiellement remplis a été examinée. En effet il a été montré que des résultats suffisamment précis peuvent être obtenus pour des valeurs de  $L/R$  situées dans la fourchette 0.5 à 1.5;
- Un résultat très intéressant de la présente étude concerne les réservoirs présentant des épaisseurs variant linéairement avec la hauteur. Ceux ci ont été examinés par éléments finis. Il a été constaté l'influence du rapport des épaisseurs au sommet et à la base. De même la notion de l'épaisseur uniforme équivalente a été introduite qui se substitue à l'épaisseur variable.
- La notion du coefficient de masse effective a été abordée. Outre le fait qu'elle permettra de calculer les réservoirs en interaction avec les fluides qu'ils contiennent en se basant sur les résultats de calcul des réservoirs vides, il a été montré qu'en aucun cas le volume du fluide participe dans sa totalité dans la vibration latérale du réservoir. Le coefficient de masse effective exprime la portion de la masse du fluide rentrant en vibration en fonction de quelques paramètres;

- L'effet de la flexibilité des parois n'est pas négligeable dans le cadre d'une analyse de la réponse sismique des réservoirs de stockage. Les forces hydrodynamiques sur les parois sont amplifiées par rapport à ceux correspondants aux réservoirs à parois rigides.
- Enfin, l'accent est mis sur l'incidence non négligeable de la méthode de calcul des fréquences sur la réponse sismique des réservoirs.

## PERSPECTIVES

Dans le cadre des travaux futurs, en relation avec cet axe de recherche, et compte tenu des résultats mis en évidence à l'occasion de la présente recherche, aussi modeste soit elle, il nous paraît indispensable d'apporter des réponses claires aux questions suivantes liées au problème de vibration des système fluides-réservoirs. Ces réponses constituent à notre avis le prolongement logique de ce qui a été traité dans ce travail.

Tout d'abord, il y a lieu de signaler le problème des vibrations dans les modes circonférentielles élevés qui semblent être un sujet controversé entre un certain nombre d'auteurs, d'autant plus que ces modes de vibration sont significativement excités par d'autres charges autres que les composantes horizontales des séismes, telles que les composantes verticales et les effets locaux dus aux vibrations des différents équipements.

L'influence de la variation de la rigidité aux niveaux des extrémités du réservoir due à la présence d'une couverture rigide au sommet ou à la forme généralement courbe de la base, mérite également d'être étudiée afin d'apporter les corrections nécessaires à l'application de la méthode générale.

Il est à noter aussi que l'hypothèse des fluides incompressibles pourrait être relaxée, et une obtention d'une solution dans le cas des fluides compressibles est possible. Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas des chargements à hautes fréquences.

Par ailleurs, les réservoirs non ancrés dans les sols d'assise accusent un soulèvement de leurs bases. Dans ce cas une analyse linéaire du système n'est pas tout à fait indiquée. Le recours à une analyse non linéaire est indispensable.

En fin, il est aussi à envisager la prise en compte dans le dimensionnement des réservoirs de stockage des liquide de l'effet de précontrainte dû à la pression hydrostatique du fluide.

## VALORISATION :

L'objectif final de toute recherche dans le domaine de la construction est de mettre en place les outils nécessaires et suffisants pour une conception à la fois satisfaisant aux exigences de la sécurité et de l'économie. A ce titre, et dans le cadre des réservoirs de stockage des liquide, les concepteurs ont un besoin pressant d'avoir à leurs disposition un document de base permettant le respect de ces critères. Ce document peut être un document technique réglementaire (D.T.R) qui doit être élaboré sur la base des résultats de recherche dans ce domaine et conformément à la spécificité et contexte de notre pays.

# **BIBLIOGRAPHIE**

---

**BIBLIOGRAPHIE**

1. Jacobsen, L.S., Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier. ", Bulletin Seism. Soc. America, Vol. 39, 1949, PP. 189 - 204.
2. Jacobsen, L.S., and AYRE, R.S " Cylindrical tanks subjected to transient motions . ", Bulletin Seism. Soc. America, Vol. 41, 1951, PP. 313 - 346.
3. Baron, M.L., and skalak, R., " Free vibrations of fluid filled cylindrical shells, ", Journal of the In gineering Mechanics Division, ASCE, Vol . 88, N° EM3, Proc, Paper, 3159, June 1962, PP. 17 - 43.
4. Housner, G.W., " The dynamic pressures on accelerated fluid containers. ", Bulletin Seism. Soc. America, Vol. 47, N° 1, PP. 15 - 35.
5. Housner, G.W., " The dynamic behavior of water tanks. ", Bulletin Seism. Soc. America, Vol. 53, N° 1, 1963, PP. 381 - 387.
6. Edwards, N.N., " A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquids storage tanks subjected to lateral ground motions ", D4.D thesis, University of Michignan, Ann. Arbor, Michignan 1969.
7. Hsiung, H.H., and Weingarten, V.I., " Dynamic analysis of hydroelastic systems using the FEM. ", Department of Civil Engineering, University of Southern, Californian Report USCCE 013, Nov.1973.
8. Shaaban, S.H., and Nash, W.A., " Finite Element analysis of seismically excited cylindrical storage tank, ground supported and partially filled with liquid. ", University of Massachussets, Report to National Science Foundation, August 1975.
9. Shaaban, S.H., and Nash, W.A., " Response of an empty cylindrical ground supported liquid storage tank to base excitation" .University of massachussets science foundation, august 1975.

10. Edwards, N.W., " A procedure for dynamic analysis of thin walled cylindrical liquid storage tank subjected to lateral ground motions " Ph. D. Thesis University of Michigan. Ann Arbor. Michigan 1969
11. Yang, J.Y., "Dynamic behavior of fluid-tank system, " Ph.D Thesis, Rice university, Houston, Texas, 1976
12. Mouzakis, WU, C.I., T., Nash, W.A., and Colonnell, J.M., " Natural frequencies of cylindrical liquid storage containers. ", Department of Civil Engineering, University of Massachusetts, June 1975.
13. Balendra, T., and Nash, W.A., " Earthquake analysis of cylindrical liquid storage tank with a dome by F.E.M. ", Department of Civil Engineering, University of Civil University of Massachusetts, Amherst, Massachusetts, may 1978.
14. Veletsos, A.S., " Seism effects in flexible liquid storage tanks. ", Proceedings of the international Association of Earthquake Engineering, Fifth World Conference? Rome, Italie, 1974, Vol. I, PP. 630 - 639.
15. Veletsos, A.S., " Seism effects in flexible liquid storage tanks. ", Proceedings of the international Association of Earthquake Engineering, Fifth World Conference? Rome, Italie, 1974, Vol. I, PP. 630 - 639
16. Veletsos, A.S., and Yang, J.Y., " Earthquake response of liquid storage tanks. ", Advances in Civil Engineering Mechanics Proceedings of the Annal EMD Speciality Conferences, Raleigh, NC., ASCE, 1977, PP. 1 - 24.
17. Kana, D.D., and Dodge, F.T., " Design support modelling of liquid slosh in storage tanks subject to seismic excitation. ", Proc. ASCE Conf. Struct. Des. Nucl. Plant Facilities, PP. 307 - 337 (1975).
18. Haroun, M.A., and Housner, G.W., "Seismic design of liquid storage tanks. ", Journal of Technical Councils, ASCE, Vol. 107, N° TCI, April 1981, PP.191 - 207.
19. Balendra, T., et al. "Seismic design of flexible cylindrical storage tanks", J. Earthq; engrg. Struct. Dyn., Vol./10, pp. 477-496, 1982
20. Balendra, T., Ang, K.K., Paramasivan, P., and LEE, S.L., "Seismic desing of flexible cylindrical liquid storage tanks. ", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, 1982, PP477 - 496.
21. Kennedy, J.M., and Belytschko, T., " A survey of computational methods of fluid structure analysis of reaction safety. ", Nuclear Engineering, Dec.69, (1982), PP.379-398.

22. Haroun, M.A., and Housner, G.W., " Dynamic characteristics of liquid storage tanks." , Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 108, N° EM5, 1982, PP. 783 - 800.
23. Yun, C.B., et al., "Fluid structure interaction analysis for spent fuel storage structure", Proceedings of the Tenth World Conference of Earthquake Engineering, Madrid, Spain, July 1992, Vol.9, PP. 4975 - 4980.
24. Tang, Y., " Study of dynamic response of liquid storage tanks. ", Thesis présentée to Rice University, Houston TX., in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctorat of philisophy, 1986.
25. Pearge, H.T., " Some experiments with the F.E analysis of the vibration of liquid filled tank. ", Proceedings of the Conference of F.E methods in South Africa, 1995, PP. 90 - 105.
26. N., Ungureanu, and Negoica, " About the earthquake response of the flexible storage tanks. " Proceedings of the Tenth World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 9, July 1992, PP. 4989 - 4993.
27. Novozhilov., V.V., " Thin shell theoey",. P.Noordhof LTD., Croningen, The Netherlands, 1964.
28. Gibert, R.J. , " Vibrations des stuctures, Interactions avec les fluides " Editions EYROLLES, 1988.
29. Zienkiewics, o.c., "The finite element" McGraw-Hill BOOK. Company, third Edition. 1977
30. Wilson. E.L., and Khalfati. M., " Finite elements for the dynamic analysis of fluid-solid systems " International Journal for numerical methods in engineering, Vol. 19, pp. 1657-1668, 1983.
31. Hwang, I.T. and Ting. K. , "Boundary element method for fluid-structure interaction problems in liquid storage tanks" ,Journal of pressure vessel technology, Nov 1989 Vol.111/435
32. Stuart. et al., "Dynamic analysis of high-level waste storage tanks"., Computer and structures .Vol. 56, N° 2/3, pp 415-424, 1995. .
33. Peek, R. and Jennings, P.C., " Simplified analysis of unanchored tanks" Earthquake engineerig and stuctural dynamics, Vol. 16, pp 1073-1085. 1988
34. Peek, R., " Analysis of unanchored liquid storage tanks under lareral loads" Earthquake engineerig and stuctural dynamics, Vol. 16, pp 1087-1100. 1988

35. Veletsos, A.S., and Yang, Y., "Rocking response of liquid storage tanks", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 11, Nov. 1987, ASCE. pp.1774-1792
36. Thevendran, V., and Thambiratnam., "Optimal shapes of cylindrical concrete" *Computer and Structures*, Vol. 26, pp. 805-810, 1987
37. Ghali, A., "Circular Storage tanks and Silos" pp. 124-127., E. and F. N. Spon. London 1979
38. Westergaard, M., "Water pressures on dams during earthquakes" *Transaction of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 79 : 1933
39. Epstein, H. J., " Seismic effects in flexible liquid storage tanks", *Proceedings of 5 th W.C.E.E*, Vol./1, pp. 630 - 639, Rome, Italy 1974,
40. Abramson, H.N. "The dynamic behavior of liquid in moving containers", NASA SP6106, National Aeronautic and Space Administration, Washington, D.C. , 1966.
41. Arya, A.S., Thakkar, S.K., and Goyal, A.C., "Vibration analysis of thin cylindrical containers", *J. of the Eng. Mech. Div.*, ASCE Vol./97, pp. 317 - 333, 1971.
42. Veletsos, A.S. and Yang, J.Y., "Dynamics of fixed base liquid storage tanks", *Proceedings of U.S-Japan Seminar for Earthquake Engineering Research With Emphasis on Lifeline Systems*, pp.317 - 341, Tokyo, Japan, 1976.
43. Tedesco, J.W., Kostem C.N., and Kalnins A. , , " Free vibration analysis of cylindrical liquid tanks", *Comput, struct.* , Vol./26, pp. 957-964, 1987.
44. Tedesco, J.W., Landis D.W. and C.N. Kostem. "Seismic analysis of cylindrical liquid storage tanks", *Comput. Struct.* Vol./32, pp.1165-1 174, 1989.
45. Chiba, M., "Experimental studies on a nonlinear hydroelastic vibration of a clamped cylindrical tank partially filled with liquid" *J. of Press. Vess. Techno.*, Vol./115, pp. 381-388, 1993.
46. Leeds, D.J. , " Imperial County, California, earth. October 15, 1979". *Reconnaissance Report*, Earth. Eng. Research. Instit., Berkeley, Calif., 1980.
47. Kalnins A. "Vibration o fluid-filled thin shells". *Trans. 5<sup>th</sup> Int. Conf. Strcutural Mechanics in Réactor Tehnology*, Paper B4/8, Berlin, Germany, 1978.
48. Tedesco, J.W. and Kostem C.N. , "Vibrational characteristics and seismic analysis of cylindrical liquid storage tanks" *Fritz Engineering Laboratory Report N°433.5*, Departement of Civil Engineering, Lehigh University, Bethlehem, pa 1982

49. Clough, D.P. "Expérimental evaluation of seismic design methods for Broad cylindrical tanks". Report -UCB / EERC - 77/ 10, 1977.
50. Niwa, A. and Clough, R.W., "Buckling of cylindrical liquid-storage tanks under earthquake loading" J. Earthq. Engng. And struct. Dyn., vol./10, pp.107 - 122, 1982.
51. Mikam, T., and, Yoshimura, J., « Free vibrations of submerged floating cylindrical shells » Proceedings of the Tenth World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 9, July 1992, PP. 5025-5029.
52. Haroun M.A, and El laithy, H.M, " Model for flexible tanks undergoing rocking", J. of the Eng. Mech. Div., ASCE Vol.111, 1985
53. John. W. Bull, " Finite element analysis of thin walled structures", Elsevier Sciences Publishers LTD, 1988, Chap.7.
54. Sakai. F et al, " Horizontal, vertical and rocking fluid-elastic response and design cylindrical liquid storage tanks ", Proceeding of 8<sup>th</sup> C.C.C.E, Vol. V, pp 263-270 San Francisco, USA 1984
55. Aouni. A. Lakis and Marwan Sinno" Free vibration of axisymmetric and beam-like cylindrical shells, partially filled with liquid", Technical Report? Depart. of Mec. Eng. Ecole Poly. Tech. de Montréal. (1986)
56. Yahiaoui, A. "Analyse statique et dynamique des systèmes . fluide-coques cylindriques", thèse de Magister, Ecole Nationale Polytechnique, 1995.
57. Veletsos. A.S., et Y. Yang. " Soil-Structure interaction effects for laterally excited liquid storage tanks " Earth. Eng. and Struct. Dyn. Vol. 9. pp 473-496 (1990)
58. Koyama. K. et al."Dynamic earth pressures acting on LNG in ground storage tank during earthquakes" Proc. of the 10<sup>th</sup> World Conf. on Earth. Eng., Vol. 9, (1992).pp 5005-5010.
59. Lau.D.T. et al " Dynamic uplift analysis of unanchored cylindrical tanks Proc. of the 10<sup>th</sup> World Conf. on Earth. Eng., Vol. 9, (1992). pp.5011-5016.
60. Praveen.K. K.Malhotra." New Method for isolation of liquid Storage Tanks". Earth. Eng. and Struct. Dyn. Vol.26. pp 839-847.(1997)
61. Veletsos.A.S. , et al. " Seismic Response of anchored steel Tanks" Proc. 3<sup>rd</sup> Sympos. on current issues related to nuclear power plant struct. North California state univ. (1990)
62. U.C.Ugural," Stresses in plates and shells " McGraw Hill Bouuk Compapgy. (1981), New york

- 
63. Timoshenko. P.S. " Théorie des plaques et coques " Béranger 1961.
  64. H. M. Koh, J. K. Kim and J. H. Park. " Fluid structure interaction Analysis of 3D Rectangular tanks By a variationaly coupled BEM. FEM and comparaisn with test results " Earthquake engng and struct. Dyn. Jan (1998)
  65. F.G. Rammersorfer, et al. " Storage Tanks under earthquake loading", Appl. Mech. Rev. ASME. 43 PP 261-282. (1990)
  66. A.S. Veletsos, Y. Tang and A.T. Tang, " Dynamic Response of flexibility supported liquid storage Tanks " J. Stuct. Engng. ASCE.118. PP 264-283 (1992)
  67. Malhotra and A.S. Veletsos, " Uplifting response of unanchored liquid storage Tanks " J. Stuct. Engng ASCE.120. PP 3525-3547 (1994)
  68. J.K. Kim, H. M. Koh " Dynamic response of rectangular flexible fluid container " J. Mech. Engng. ASCE.122. PP 807-817 (1996)

# **ANNEXES**

## LISTE DES SYMBOLES

$A_{ni}(t)$	Coefficients dépendant du temps du potentiel de vitesse
[B]	Matrice carrée définie par l'équation 57
$b_{ni}$	Coefficients définis par l'équation 70
[DM]	Matrice masse ajoutée définie par l'équation 78
[D]	Matrice constitutive définie par l'équation
[DM] <sub>e</sub>	Matrice constitutive d'un élément définie par l'équation
$\{d(\theta, z, t)\}$	Vecteur déplacement de la coque défini par l'équation 29
$\{d(\bar{z}, t)\}$ et $\{d_n\}$	Vecteurs des composantes max du déplacement du mode définis par l'équation 40 et l'équation 49
$\{\bar{d}_e\}$	Vecteur déplacement généralisé de l'élément (e) d'ordre $8 \times 1$ ,
E	Module de Young du matériau de la coque
e	Indice de l'élément
$\{f^i\}_e$ et $\{F^i\}_e$	vecteurs respectivement définis par les équations 73 et 74
g:	Accélération de la pesanteur
H	Profondeur du liquide
h	Epaisseur de la coque
In ( )	fonction de Bessel modifiée du 1 <sup>er</sup> type et d'ordre n

$I_n()$ radiale,	Dérivée de la fonction de Bessel par rapport à la coordonnée
$i$	$\sqrt{-1}$
$[K_s]_e$ et $[K_s]$	respectivement matrice de rigidité d'un élément et matrice de rigidité assemblée Eq.56 et Eq.60
$k_z$ et $k_\theta$	variation de la courbure de la surface moyenne
$k_{z0}$	Distorsion de la surface moyenne
$k_1$	Rigidité de tension Eq.23.a
$k_2$	Rigidité à la flexion Eq.23.b
$L$	Longueur de la coque
$L_e$	Longueur d'un élément
$[M_s]_e$ et $[M_s]$	Matrice masse d'un élément et matrice masse assemblée respectivement définies par les Eq. 65 et 67.
$[M]$	Matrice Masse du système Eq 80.
$M_{z0}$ et $M_{\theta z}$	Moments de flexion résultants
$M_{z\theta}$ et $M_{\theta z}$	Moments de torsion résultants
$\tilde{M}$	Moment effectif de torsion
$m$	Nombre de modes de flexion longitudinale
$m(z)$	Masse de la coque par unité de surface
$m_e$	Masse d'un élément par unité de surface
$N$	Constante égale à $4 \times NEL$
$NEL$	Nombre d'éléments de long de la longueur de la coque
$NEH$	Nombre d'éléments de coque en contact avec le liquide
$N_z$ et $N_\theta$	Force membrane résultants

$N_{z\theta}$ et $N_{\theta z}$	Résultants membranaire de cisaillement
$\tilde{N}$	Cisaillement effectif de membrane
$N_i$ et $\hat{N}_i$	Fonction d'interpolation Eq.37
$\{\bar{N}_i\}$	Vecteur des fonctions d'interpolation défini par les Eqs 43
$n$	nombre d'ordres circonférentielles
$[P]$	Matrice de l'opérateur différentiel pour le nombre d'ordres circonférentielles d'ordre $n$
$P, P_s,$ et $P_d$	respectivement les pression du liquide, la pression hydrostatique et la pression dynamique.
$\{q\}$	Vecteur assemblé des déplacements Eq .44
$R$	Rayon de la coque
$\{\hat{R}(r)\}$	Fonction de séparation des variables introduite dans l'Eq.12.
$r$	Coordonnée radiale du système de coordonnée
$S, S_1, S_2$ et $S_3$	Respectivement la surface du liquide, surface libre au repos, surfaces mouillée de la coque et à la base
$S_i$	Fonctions d'interpolation Eq.37
$T(t)$	Energie cinétique.
$\hat{T}(r)$	Fonction de séparation des variables, Eq.12
$t$	Variable temps.
$t_1$ et $t_2$	Bornes de l'intervalle du temps considéré, Eq.
$U(t)$	Energie potentielle ou de déformations.
$V$	Volume du liquide.
$W(t)$	Travail des forces extérieures.
$u, v,$ et $w$	Déplacement de la coque respectivement dans la direction axiale, circonférentielle et radiale

$u_{nc}(z,t), v_{nc}(z,t), w_{nc}(z,t)$	Fonctions de déplacement pour l'onde circonférentielle n dans le repère local, Eq.36 a-c
$\bar{u}_{ni}, \bar{v}_{ni}, \bar{w}_{ni},$ et $\hat{w}_{ni}$	Déplacement nodaux généralisé de l'élément,
$\hat{Z}(z)$	Fonction de séparation de variable Eq.12
$z$	Coordonnée axiale du système de coordonnée.
$\bar{z}$	Coordonnée axiale locale.
$\alpha_i$	Constante définie par l'Eq.14
$\beta_i$	Coefficients = $\alpha_i L_c$ .
$\epsilon_z$ et $\epsilon_\theta$	Déformation normale de la surface moyenne.
$\epsilon_{z\theta}$	Déformation de cisaillement de la surface moyenne
$\{\epsilon\}$	Vecteur de déformation généralisée Eq 25.b
$\zeta$	Déplacement de la surface libre.
$\eta_1, \eta_2, \eta_3$ et $\eta_4$	Points d'intégration Eq.59
$\hat{\Theta}(\theta)$	Fonction de séparation des variables Eq.12
$\theta$	Coordonnée circonférentielle du système de coordonnées cylindriques.
$\nu$	Coefficient de Poisson.
$\rho_f$ et $\rho_s$	Masse volumique du fluide et du matériau de la coque.
$\{\sigma\}$	Vecteur des forces résultantes généralisées Eq.25.a
$\phi$	Fonction de potentiel de vitesse.
$\omega, \omega_m, \omega_{mn}$	Fréquences naturelles circulaires.
$\nabla^2$	Opérateurs de LAPLACE

## Fonctions de Bessel et coefficient $b_{ni}$

Dans la solution de l'équation de Laplace, la fonction de Bessel modifiée de premier type  $I_n(x)$  a été introduite. Un algorithme très développé a été utilisé pour l'approximation de cette fonction.

Nous étudierons dans ce qui suit l'allure de variation du rapport de la fonction de Bessel modifiée de premier type à sa dérivée première par rapport à la coordonnée radiale :

$$\frac{I_n(\alpha_i \cdot R)}{I_n'(\alpha_i \cdot R)}$$

avec :  $n$  entier  $\geq 1$  et

$$\alpha_i = \frac{(2i - 1) \cdot \pi}{2 \cdot H}$$

Ce rapport apparaît dans l'expression du coefficient  $b_{ni}$  (Eq. )

pour  $n=1$  et  $n=2$  on obtient les graphes suivants :

**cas où :  $n=1$**

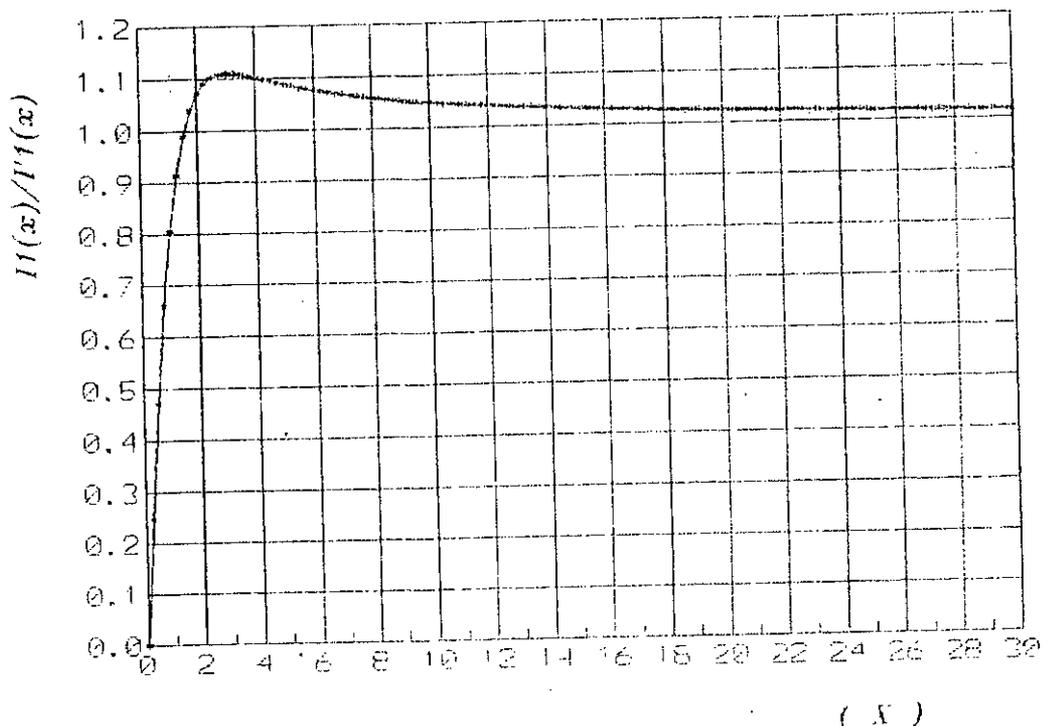


FIG. - Rapport  $I_1(x)/I_1'(x)$  en fonction de  $x$

cas où :  $n=2$

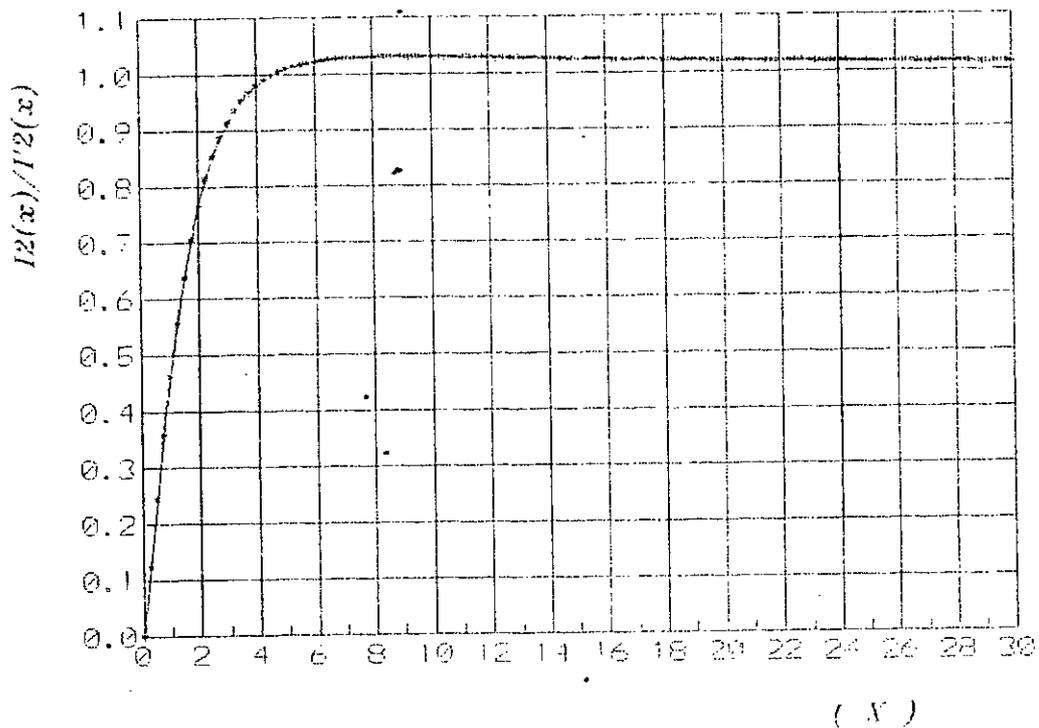


FIG. - Rapport  $I_2(x)/I_2'(x)$  en fonction de  $x$

On remarque que la fonction étudiée présente deux intervalles distincts :

- Pour les faibles valeurs de  $R/H$  ( cas des réservoirs longs) le rapport tend vers  $\alpha_j R/2$
- Pour les grandes valeurs  $R/H$  ( cas des réservoirs courts) le rapport tend vers l'unité.

Cette constatation permet d'introduire une simplification dans l'analyse des réservoirs selon qu'il s'agisse d'un réservoir courts ou d'un réservoir long.