

52/80

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

1ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

## PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

### SUJET

**Calcul de Resistance des  
Matrices de Filage á Froid  
à Conteneur Non Cylindrique  
Contournées Doublement Par  
les Anneaux de Précontraintes**

Proposé par :

A. ELEOD

Etudié par :

ZEHANA A.

Dirigé par :

A. ELEOD

PROMOTION : JUIN 1986



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم والبحث العلمي  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## PROJET DE FIN D'ETUDES

(En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat)

### SUJET

**Calcul de Resistance des  
Matrices de Filage à Froid  
à Conteneur Non Cylindrique  
Contournées Doublement Par  
les Anneaux de Précontraintes**

Proposé par :

A. ELEOD

Etudié par :

ZEHANA A.

Dirigé par :

A. ELEOD

PROMOTION : JUIN 1986



\*\*\* بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ \*\*\*

﴿ وَقُلْ رَبِّ اَدْخِلْنِيْ مَدْخَلَ صِدْقٍ

وَاَخْرِجْنِيْ مَخْرَجَ صِدْقٍ وَاَجْعَلْ

لِيْ مِنْ لَّدُنْكَ سُلْطٰنًا نَّصِيْرًا ﴾

صدقة الله العظيم.



## DEDICACES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Je dédie ce modeste travail à :

- ma mère
  - mon père
  - mes frères
- et à tous mes amis

## REMERCIEMENT

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Que Mr ELEOD andras trouve, ici, ma profonde  
et sincère gratitude pour son aide précieuse.

Que tous les Professeurs ayant contribué à ma formation  
soient remercié de leurs efforts et dévouement pour  
la promotion de la recherche dans notre jeune pays.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية  
الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE  
DEPARTEMENT MECANIQUE

PROPOSE PAR : A.ELEOD

ETUDIE PAR : ZEHANA ABDELHALIM

الموضوع:

حساب مقاومة قوالب الفتل على الباراد  
عبر الة سطوانية و المدعومة بحلقتين  
مستقيمي الة جهاد.

التمليص:

تتمثل هذه الدراسة في إعداد برنامج لتقييم  
الباراد . كالة الة جهاد في أي نقطة ضمن قالب الفتل  
ويستمد هذا البرنامج أفكاره من حلول معادلات على  
المونة المستوية بل اعتماد طريقة ميرسكيليشفيللي  
المطبقة على مجال مضاعف التحديب.

SUJET:

CALCUL DE RESISTANCE DES MATRICES DE FILAGE A  
FROID A CONTENEUR NON CYLINDRIQUE DOUBLEMENT  
CONTOURNEES PAR LES ANNEAUX DE PRECONTRAINTES.

RESUME:

CETTE ETUDE CONSISTE A ELABORER UN PROGRAMME QUI  
EVALUE L ETAT DE CONTRAINTE EN N IMPORTE QUEL  
POINT D UNE MATRICE DE FILAGE A FROID A CONTENEUR  
POLYGONAL . CE PROGRAMME S INSPIRE DE LA RESOLUTION  
DES EQUATIONS DE MUSKHELISHVILLI APPLIQUEE A UN  
DOMAINE DOUBLEMENT CONNEXE.

SUBJECT:

STRENGTH CALCULATION OF COOL EXTRUSION DIES WITH  
NON CYLINDRICAL CONTAINER DOUBLE ROUNDED WITH  
PRESTRESSED RINGS.

ABSTRACT:

THIS STUDY CONSIST IN ELABORATING A PROGRAM WHICH  
ESTIMATES THE STAT OF STRESS IN ANY POINT OF A  
COOL EXTRUSION DIE WITH POLYGONAL .  
THIS PROGRAM IS INSPIRED FROM THE RESOLUTION OF  
PLANE ELASTICITY EQUATIONS USING THE MUSKELISHVILLI  
METHODE APPLIED TO DOUBLE CONNEX DOMAIN.



# TABLE DES MATIERES

## Introduction

### I Etude des matrices cylindriques.

#### I.1 Theorie

##### I.1.1 Nature des contraintes

##### I.1.2 Utilisation du Programme

#### I.2. Représentation des répartitions des contraintes.

##### I.2.1 Effet de la pression intérieure.

#### I.3 Introduction du Premier anneau de précontraintes

##### I.3.1 Matrice précontraintes à vide.

##### I.3.2 Matrice précontraintes active

#### I.4 Matrice doublement contournée.

### II Etude des matrices polygonales.

#### II.1 Avant-Propos

#### II.2 Theorie de l'élasticité

##### II.2.1 Formulation d'un problème d'élasticité.

##### II.2.2 Fonction de contrainte d'Airy

#### II.3 Theorie

##### II.3.1 Equation d'équilibre.

II.3.2 Equations de compatibilité

II.3.3 Utilisation des variables complexes

II.3.4 Equation de l'équilibre aux bornes

III Rappels

III.1 Fonction de transformation

III.2 Fonction Potentiel.

III.3 Resolution des équations de MUSKHELISHVILI

IV Algorithmes et Programmation

V Interpretation des résultats

V.1 Influence du rayon de courbure

V.2 Matrice sans Précontraintes.

V.3 Matrice Précontraintes Passive

V.4 Matrice Précontraintes active.

Conclusion.



## INTRODUCTION

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

Le filage direct à froid est un procédé de déformation plastique qui permet l'obtention de grande série de pièces avec d'excellentes caractéristiques mécaniques et un faible prix de revient.

Son utilisation est devenue plus fréquente dans les industries de fabrication par série.

La figure 1 représente un montage permettant le filage direct. Le porte-matrice 1, en acier forgé, comporte un grain de chuc 2 en acier trempé et rectifié sur lequel seul la matrice de filage 3 vient prendre appui. Le conteneur 4, en acier trempé également centre la matrice par un alésage conique et se centre lui-même dans le porte-matrice 1 ou le grain 2. L'anneau 5 serre le tout sur le porte-matrice 1, par exemple par les boulons 6 et sert en même temps de frette au conteneur 4.

Le corps poinçon doit entrer avec le minimum de jeu (moins de 0,05 mm) dans le conteneur, tout en provoquant une pression  $P_i = \frac{F_{max}}{\pi \frac{d_0^2}{4}}$  qui doit être supérieure à la contrainte d'écoulement du métal à filer  $\sigma_{f_0}$ .



## INTRODUCTION

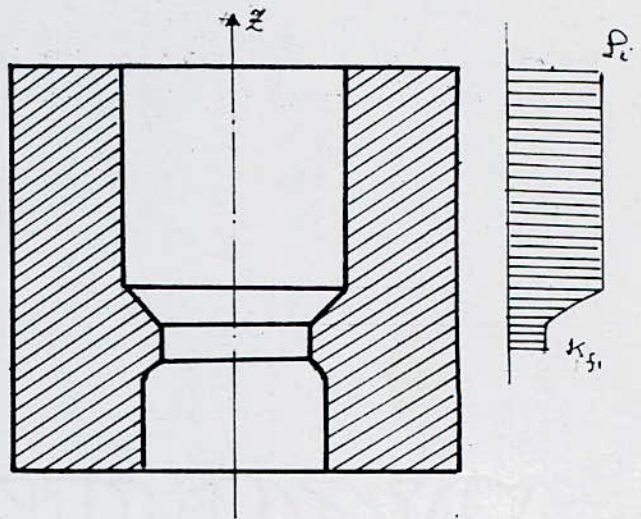
Le filage direct à froid est un procédé de déformation plastique qui permet l'obtention de grande série de pièces avec d'excellentes caractéristiques mécaniques et un faible prix de revient.

Son utilisation est devenue plus fréquente dans les industries de fabrication par série.

La figure 1 représente un montage permettant le filage direct. Le porte-matrice 1, en acier forgé, comporte un grain de chuc 2 en acier trempé et rectifié sur lequel seul la matrice de filage 3 vient prendre appui. Le conteneur 4, en acier trempé également centre la matrice par un alésage conique et se centre lui-même dans le porte-matrice 1 ou le grain 2. L'anneau 5 serre le tout sur le porte-matrice 1, par exemple par les boulons 6 et sert en même temps de frettre au conteneur 4.

Le corps poinçon doit entrer avec le minimum de jeu (moins de 0,05 mm) dans le conteneur, tout en provoquant une pression  $P_i = \frac{F_{max}}{\frac{\pi}{4} d_0^2}$  qui doit être supérieure à la contrainte d'écoulement du métal à filer  $K_{f_0}$ .

La figure ci-contre montre la répartition de la pression due à l'écrasement du métal, sur le contour intérieur de la matrice.



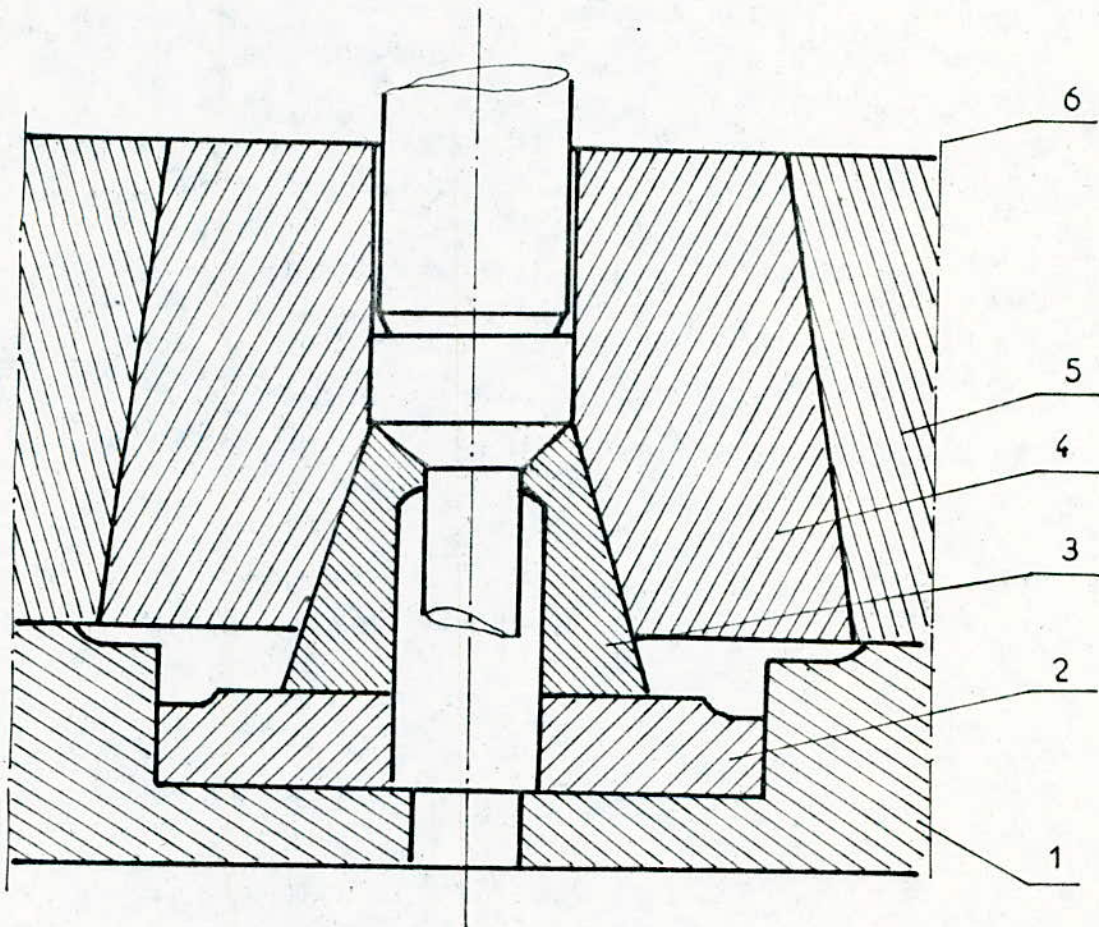
Celle-ci nous montre que la pression est constante jusqu'au rétrécissement ou elle diminue et devient égale à la contrainte d'écoulement du métal filé. " $K_{f1}$ ".

Ceci prouve qu'il n'est pas nécessaire d'étudier les contraintes tout le long de l'axe  $z$ , il suffit de considérer un plan perpendiculaire à l'axe  $z$  et d'étudier l'état de contrainte qui sera analogue pour tout plan normal à l'axe  $z$ .

Le plan en question sera pris avant le rétrécissement car la pression est maximale avant celui-ci.

On a donc un état de contrainte plan.





- figure 1.



# I ETUDE DES MATRICES CYLINDRIQUES

## I-1 Théorie

L'étude des matrices cylindriques est analogue à celle des tubes épais. Nous allons tout d'abord définir les dimensions de la matrice et les forces agissant sur la matrice.

- forces internes : elles sont dues à la pression provoquée par l'écrasement du métal, à l'intérieur de la matrice.
- forces externes : dues au serrage de la matrice par l'anneau de précontrainte.
- Dimensions : les rayons extérieurs et intérieurs sont respectivement  $R_2$  et  $R_1$ .

L'état de contrainte d'un point de la matrice situé sur un contour de rayon  $\rho$ , est défini par les formules de LAMÉ qui sont données comme suit :

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_1 R_1^2 \left(1 + \frac{R_2^2}{\rho^2}\right) - P_2 R_2^2 \left(1 + \frac{R_1^2}{\rho^2}\right)}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\sigma_{\rho} = \frac{P_1 R_1^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{\rho^2}\right) - P_2 R_2^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{\rho^2}\right)}{R_2^2 - R_1^2}$$

L'étude théorique des contraintes normale  $\sigma_{\rho}$  et tangentielle  $\sigma_{\theta}$  consiste à déterminer en fonction du rayon  $\rho$  et des pressions  $P_1$  et  $P_2$  :

a) la nature des contraintes (traction ou compression)

b) l'accroissement c'est à dire les variations des modules des contraintes lorsqu'on passe d'un contour à un autre.

## I-1.1 Nature des contraintes

a/ Contrainte normale

$$\sigma_f = \frac{P_1 R_1^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{f^2}\right) - P_2 R_2^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{f^2}\right)}{R_2^2 - R_1^2}$$

sachant que  $R_1 < f < R_2$

alors :  $1 - \frac{R_2^2}{f^2} < 0$  et  $1 - \frac{R_1^2}{f^2} > 0$

donc :  $P_1 R_1^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{f^2}\right) < 0$  et  $-P_2 R_2^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{f^2}\right) < 0$

la somme des deux dernières expressions reste toujours négative, Par conséquent :  $\sigma_f < 0$  (compression).

Posons :  $f(p) = P_1 R_1^2 \left(1 - \frac{R_2^2}{f^2}\right) - P_2 R_2^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{f^2}\right)$

il est évident que  $f(p)$  possède les mêmes variations que  $\sigma_f$  puisque  $R_2^2 - R_1^2 > 0$

$f(p)$  : est continue dérivable sur  $[R_1, R_2]$ , et sa dérivée vaut :

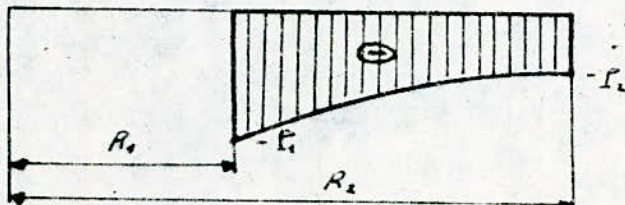
$\frac{d}{df} f(p) = 2 \frac{R_1^2 R_2^2}{f^3} (P_1 - P_2)$  ; comme  $P_1 > P_2$  et  $f > 0$  donc :

$\frac{d}{df} f(p) > 0$  et en conclusion :

$\sigma_f$  est une contrainte de compression, croissante

Pour  $f = R_1$  ;  $\sigma_f = \sigma_{f \min} = -P_1$

Pour  $f = R_2$  ;  $\sigma_f = \sigma_{f \max} = -P_2$





b/ contrainte tangentielle

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_1 R_1^2 \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) - P_2 R_2^2 \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right)}{R_2^2 - R_1^2}$$

Posons :  $g(r) = P_1 R_1^2 \left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right) - P_2 R_2^2 \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right)$

Commençons par étudier les variations de cette fonction.

$$\frac{d}{dr} g(r) = \frac{2 R_1^2 R_2^2 (P_2 - P_1)}{r^3} \quad \text{or } P_1 > P_2 \text{ donc}$$

$\frac{d}{dr} g(r) < 0$  sur tous les contours

alors  $\frac{d}{dr} \sigma_{\theta}$  est décroissante.

Ceci nous permet d'avancer les Propositions suivantes :

- Pour que  $\sigma_{\theta}$  soit une contrainte de compression (négative) sur tous les contours de la matrice, il est nécessaire que son maximum soit négatif (le max est atteint sur le contour intérieur)
- Pour qu'elle soit une contrainte de traction, il faut que son minimum soit positif.

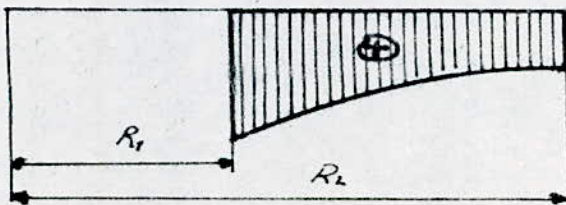
1. b/ Traction

le minimum de  $\sigma_{\theta}$  est atteint sur le contour extérieur de la matrice

$$r = R_2 ; \quad \sigma_{\theta \min} = \frac{2 P_1 R_1^2 - P_2 (R_1^2 + R_2^2)}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\sigma_{\theta \min} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_1 > P_2 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2 R_1^2}$$

Dans ce cas on a la représentation suivante :





## 2 b/ Compression

La contrainte  $\sigma_{\max}$  est sur le contour interieur et elle vaut:

$$P = R_1 : \sigma_{\max} = \frac{P_1 (R_1^2 + R_2^2) - 2 P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$$

$$\sigma_{\max} < 0 \Rightarrow P_1 < P_2 \cdot \frac{2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$$

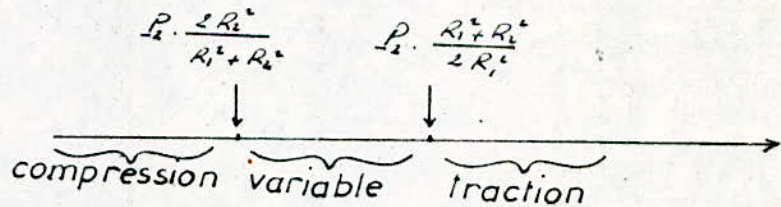
Dans ce cas on a la même représentation que précédemment sauf que le signe change.

Par comparaison on vérifie que :  $\frac{2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} < \frac{R_2^2 + R_1^2}{2 R_1^2}$

Il reste le cas où :  $\frac{2 P_2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2} < P_1 < \frac{P_2 (R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1^2}$

Dans ce cas la contrainte  $\sigma_0$  reste variable d'un contour à un autre.

En conclusion :



## I.12 Utilisation du programme

L'élaboration du programme s'est effectuée en se basant sur certaines formules qui découlent de l'étude théorique des matrices polygonales.

N'empêche qu'on peut exploiter le programme pour étudier les matrices cylindriques, expliquons le procédé.

Les matrices polygonales possèdent un contour interieur de forme polygone régulier (côtés égaux), ses côtés sont reliés l'un à l'autre par un arrondi ou arc de rayon  $r$ .

Si on considère une matrice hexagonale de côté "a" et si le rayon de courbure de l'arrondi vaut :  $r = a\sqrt{3}/2$  alors la matrice devient cylindrique de rayon interieur  $R_1 = a\sqrt{3}/2$ .

Ceci nous permet de justifier les résultats du programme en comparant les résultats de celui-ci avec ceux obtenus par les formules de LAMÉ.

Noys allons représenter la répartition des contraintes d'après les résultats du programme et comparer avec les données théoriques.

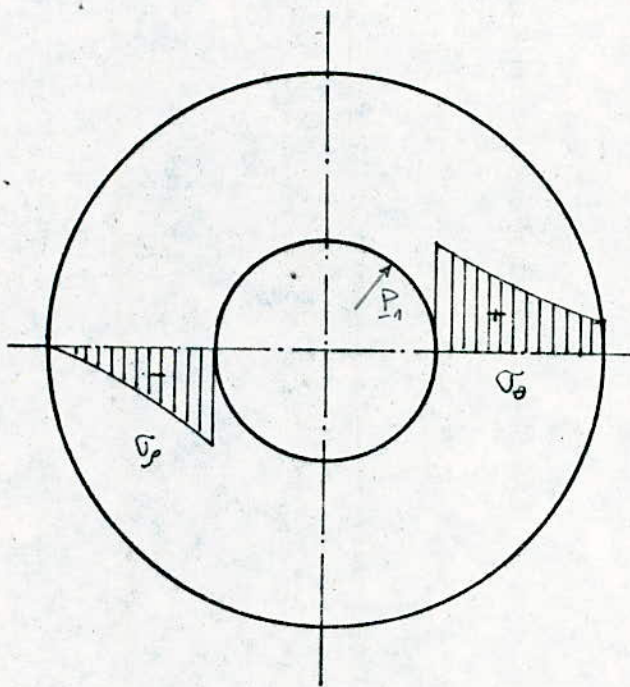
## I-2 Représentation des répartitions des Contraintes

### I-2-1 Effet de la pression intérieure

Considérons le cas où la matrice travaille sous une pression intérieure sans précontraintes.

Prenons par exemple le cas où :  $P_1 = 700 \text{ MPa}$  ;  $P_2 = 0$

On prendra toujours une matrice hexagonale de côté  $a = 10 \text{ mm}$ , rayon de courbure  $r = 8.660254 \text{ mm}$ ,  $R = 30 \text{ mm}$



$$\sigma_{\theta \max} = 927,2728 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta \min} = 127,2551 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r \min = -700 \text{ MPa}$$



Pour  $-P_2 = 0$ , les formules de Lamé deviennent :

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_1 R_1^2 (1 + \frac{R_2^2}{r^2})}{R_2^2 - R_1^2} ; \quad \sigma_r = \frac{P_1 R_1^2 (1 - \frac{R_2^2}{r^2})}{R_2^2 - R_1^2}$$

Sur le contour intérieur et pour les mêmes dimensions utilisées dans le programme, ces formules donnent :

$$\sigma_{\theta} = 827,272 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \sigma_r = -P_1 = -700 \text{ MPa}$$

On voit que la différence est négligeable entre les résultats du programme et ceux donnés par les formules de Lamé. de plus on remarque que la répartition concorde bien avec la théorie déjà vue.

Dans ce cas  $P_1 > P_2$ ,  $\frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1^2}$  d'après la théorie :

$\sigma_{\theta}$  est une contrainte de traction, et  $\sigma_r$  contrainte de compression.

$\sigma_{\theta}$  décroissante du contour intérieur ou  $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta \text{ max}}$  vers le contour extérieur  $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta \text{ min}}$

$\sigma_r$  croissante du contour intérieur  $\sigma_r = -P_1 = \sigma_{r \text{ min}}$  vers le contour extérieur ou  $\sigma_r = -P_2 = 0$

tout ces résultats ont été obtenu par le programme, ceci est un moyen de vérification du programme.



MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 700  
 P2= 0  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .2886750

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-700	827.2728
2	-700	827.2728
3	-700	827.2728
4	-700	827.2727
5	-700	827.2726
6	-700	827.2725
7	-700	827.2725
8	-700	827.2726
9	-700	827.2726
10	-700	827.2728
11	-700	827.2729
12	-700	827.273

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 700  
 P2= 0  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .5

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-190.8914	318.1641
2	-190.9018	318.1745
3	-190.9164	318.1892
4	-190.9268	318.1995
5	-190.9267	318.1995
6	-190.9163	318.189
7	-190.9016	318.1744
8	-190.8913	318.164
9	-190.8914	318.1641
10	-190.9018	318.1745
11	-190.9165	318.1893
12	-190.9269	318.1997

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 700  
 P2= 0  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .8

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-35.78883	163.0592
2	-35.79272	163.0645
3	-35.79822	163.0719
4	-35.8021	163.0772
5	-35.80208	163.0772
6	-35.79818	163.0719
7	-35.79267	163.0644
8	-35.78879	163.0592
9	-35.7888	163.0592
10	-35.79271	163.0644
11	-35.79824	163.072
12	-35.80214	163.0772

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 700  
 P2= 0  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= 1

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	127.2551
2	0	127.2654
3	0	127.28
4	0	127.2903
5	0	127.2903
6	0	127.28
7	0	127.2654
8	0	127.2551
9	0	127.2551
10	0	127.2654
11	0	127.28
12	0	127.2903

Le premier anneau de précontrainte provoque un serrage  $S$  qui produit une pression " $P_2$ " agissant sur le contour extérieur de la matrice (toutes les formules concernant le serrage sont dans l'annexe).

Nous avons déjà vu que lorsque la matrice est soumise à la pression intérieure, la contrainte interne tangentielle est une traction, or les matériaux constituant les matrices de filage à froid sont durs (Aciers durs, fortement allié...ect...) qui ne résistent pas à la traction mais ils ont une grande résistance à la compression.

Ainsi le but de la précontrainte est de créer à l'intérieur de la matrice une contrainte de compression de telle manière à ce que lorsque la matrice commence à travailler la contrainte dont elle sera soumise est de compression.

Dans cette étude nous suivrons un plan à 3 phases  
a) matrice précontrainte à vide ( $P_1 = 0 ; P_2 \neq 0$ ).

b) matrice précontrainte pleine ( $P_1 \neq 0 ; P_2 \neq 0$ ).

c) matrice doublement contrainte par les anneaux de précontraintes.

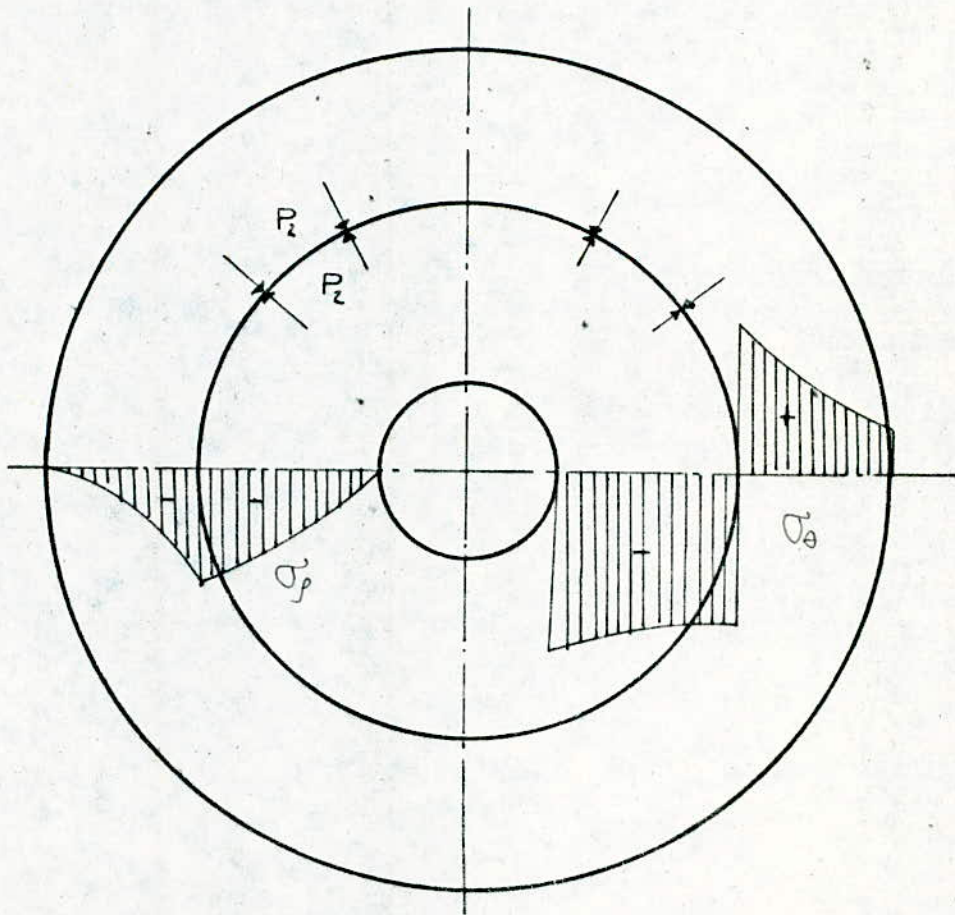
En premier lieu nous ferons travailler la matrice sans anneau pour vérifier que la contrainte est de traction et pouvoir remarquer la transformation de celle-ci en compression, après avoir introduit l'anneau.



Dans ce cas la matrice est introduite dans l'anneau par frotage (emmenchement conique ou dilatation de l'anneau par chauffage). La matrice se trouve donc comprimée et l'anneau se trouve dans une situation analogue à celle d'une matrice sans précontraintes travaillant sous une pression intérieure  $P_2$ .

Ceci nous permet déjà de prévoir la répartition des contraintes dans l'anneau.

Voici la répartition donnée par le Programme :



Cette répartition correspond aux pressions  $P_1 = 0$  ;  
 $P_2 = 282,8926 \text{ MPa}$  et aux dimensions :  $R_2 = 30 \text{ mm}$   
 $r = R_1 = 8,660254 \text{ mm}$ , qui restent invariants.

La comparaison des résultats obtenues avec ceux que donnent les formules de LAMÉ :

$$\sigma_\theta = - \frac{P_2 R_2^2 \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right)}{R_2^2 - R_1^2} \quad ; \quad \sigma_r = - \frac{P_2 R_2^2 \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2}\right)}{R_2^2 - R_1^2}$$

sur le contour intérieur par exemple :

$$\sigma_\theta = - \frac{2 P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad ; \quad \sigma_r = 0$$

Pour les mêmes données :

$$\sigma_\theta = - 617,2202 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_r = 0.$$

On voit qu'il n'y a pas de différence appréciable avec les résultats du programme.

Quant à la répartition la théorie montre que pour  $P_2 > P_1$   $\frac{d\sigma_\theta}{dr} > 0$ , donc  $\sigma_\theta$  est croissante et pour qu'elle soit dP une contrainte de compression il suffit que sa valeur minimum soit négative ( $\sigma_{\theta \text{ min}}$  sur le contour extérieur).

$$P = R_2 \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{2 P_1 R_1^2 - P_2 (R_1^2 + R_2^2)}{R_2^2 - R_1^2} < 0$$

$$\Rightarrow P_1 < P_2 \cdot \frac{(R_1^2 + R_2^2)}{2 R_1^2}$$

On est bien dans ce cas puisque  $P_1 = 0$  ;  $P_2 = 282,8926 \text{ MPa}$ .



MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 0  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .2886751

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	-617.2208
2	0	-617.2206
3	0	-617.2204
4	0	-617.22
5	0	-617.2196
6	0	-617.2194
7	0	-617.2194
8	0	-617.2195
9	0	-617.2199
10	0	-617.2205
11	0	-617.221
12	0	-617.2211

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 0  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .5

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-205.8256	-411.3944
2	-205.7755	-411.4447
3	-205.7046	-411.5157
4	-205.6545	-411.5658
5	-205.6544	-411.5659
6	-205.7046	-411.5157
7	-205.7755	-411.4447
8	-205.8256	-411.3944
9	-205.8256	-411.3944
10	-205.7755	-411.4447
11	-205.7045	-411.5158
12	-205.6544	-411.5661



MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 0  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .8

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-268.4586	-348.7502
2	-268.4398	-348.7758
3	-268.4132	-348.8118
4	-268.3944	-348.8374
5	-268.3944	-348.8373
6	-268.4132	-348.8118
7	-268.4398	-348.7757
8	-268.4586	-348.7502
9	-268.4586	-348.7501
10	-268.4398	-348.7755
11	-268.4132	-348.8118
12	-268.3944	-348.8373

MATRICE CYLINDRIQUE

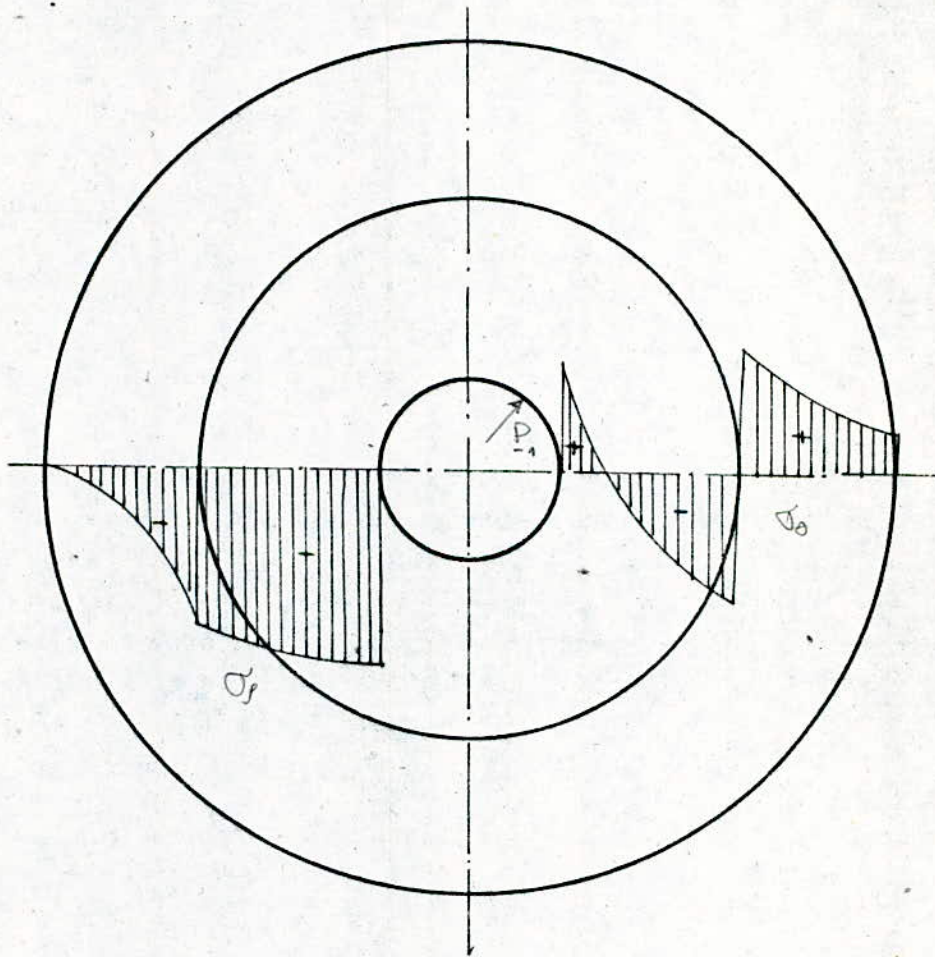
r= 8.660254  
 P1= 0  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= 1

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-282.8926	-334.2422
2	-282.8926	-334.2922
3	-282.8926	-334.363
4	-282.8926	-334.413
5	-282.8926	-334.4131
6	-282.8926	-334.363
7	-282.8926	-334.2922
8	-282.8926	-334.2422
9	-282.8926	-334.2421
10	-282.8926	-334.2922
11	-282.8926	-334.363
12	-282.8926	-334.413

### I.3.2 Matrice précontrainte active

Maintenant nous allons introduire à la matrice précédente une pression intérieure  $P_i = 700 \text{ MPa}$ , en plus nous allons comparer les résultats actuels des contraintes avec ceux de la matrice sans précontrainte pour voir l'amélioration du point de vue résistance.

Le programme a donné les répartitions suivantes:





MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 0  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .2886751

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	-617.2208
2	0	-617.2206
3	0	-617.2204
4	0	-617.22
5	0	-617.2196
6	0	-617.2194
7	0	-617.2194
8	0	-617.2195
9	0	-617.2199
10	0	-617.2205
11	0	-617.221
12	0	-617.2211

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 0  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .5

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-205.8256	-411.3944
2	-205.7755	-411.4447
3	-205.7046	-411.5157
4	-205.6545	-411.5658
5	-205.6544	-411.5659
6	-205.7046	-411.5157
7	-205.7755	-411.4447
8	-205.8256	-411.3944
9	-205.8256	-411.3944
10	-205.7755	-411.4447
11	-205.7045	-411.5158
12	-205.6544	-411.5661

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 700  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .8

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-304.2474	-185.6909
2	-304.2325	-185.7112
3	-304.2114	-185.7398
4	-304.1965	-185.7601
5	-304.1965	-185.76
6	-304.2114	-185.7398
7	-304.2325	-185.7112
8	-304.2474	-185.691
9	-304.2474	-185.6909
10	-304.2326	-185.7111
11	-304.2114	-185.7398
12	-304.1965	-185.76

MATRICE CYLINDRIQUE

r= 8.660254  
 P1= 700  
 P2= 282.8926  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= 1

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-282.8926	-206.987
2	-282.8926	-207.0268
3	-282.8926	-207.083
4	-282.8926	-207.1227
5	-282.8926	-207.1227
6	-282.8926	-207.083
7	-282.8926	-207.0268
8	-282.8926	-206.9871
9	-282.8926	-206.987
10	-282.8926	-207.0267
11	-282.8926	-207.0829
12	-282.8926	-207.1226



1er ANNEAU DE PRECONTRAINTES

r= 30  
 P2= 282.8926  
 P3= 0  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .6000001

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-282.8926	601.1472
2	-282.8926	601.1472
3	-282.8926	601.1471
4	-282.8926	601.1469
5	-282.8926	601.1466
6	-282.8926	601.1464
7	-282.8926	601.1463
8	-282.8926	601.1463
9	-282.8926	601.1466
10	-282.8926	601.147
11	-282.8926	601.1473
12	-282.8926	601.1476

1er ANNEAU DE PRECONTRAINTES

r= 30  
 P2= 282.8926  
 P3= 0  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .7

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-165.6216	483.876
2	-165.622	483.8763
3	-165.6225	483.8769
4	-165.6228	483.8771
5	-165.6227	483.877
6	-165.6223	483.8764
7	-165.6217	483.8758
8	-165.6214	483.8755
9	-165.6214	483.8756
10	-165.6219	483.8763
11	-165.6225	483.8771
12	-165.623	483.8776

1er ANNEAU DE PRECONTRAINT

r= 30  
P2= 282.8926  
P3= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .8499999

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-61.11768	379.3717
2	-61.11791	379.3721
3	-61.11821	379.3726
4	-61.11844	379.373
5	-61.11841	379.373
6	-61.1182	379.3727
7	-61.11785	379.3721
8	-61.11765	379.3717
9	-61.11765	379.3717
10	-61.11788	379.3721
11	-61.11825	379.3727
12	-61.11845	379.373

1er ANNEAU DE PRECONTRAINT

r= 30  
P2= 282.8926  
P3= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= 1

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	318.2531
2	0	318.2537
3	0	318.2547
4	0	318.2554
5	0	318.2555
6	0	318.255
7	0	318.2541
8	0	318.2535
9	0	318.2534
10	0	318.2538
11	0	318.2546
12	0	318.2551



On a déjà montré par la théorie, lorsque :

$$P_2 \cdot \frac{2R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} < P_1 < P_2 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1^2}, \quad \sigma_\theta \text{ est variable}$$

On est bien dans ce cas puisque :

$$P_2 \cdot \frac{2R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} = 522,2632 \text{ MPa} \quad \text{et} \quad P_2 \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{2R_1^2} = 1838,8019 \text{ MPa}$$

et  $P_1 = 700 \text{ MPa}$ .

Ceci explique la variation de la nature de  $\sigma_\theta$  obtenue par les résultats du programme.

Il existe un autre moyen de vérification qui est le "Principe de la superposition".

Logiquement lorsqu'on superpose (somme algébrique) les résultats obtenus pour une matrice sans précontraintes avec ceux d'une matrice précontrainte passive (à vide) on obtient les résultats actuels (matrice simplement contrainte active).

En effet si on prend les premiers points sur le contour  $\rho = 0,5 \text{ mm}$ , on a :

$$\sigma_{\theta_1} = 318,1641 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{\theta_2} = -411,3944 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\theta_3} = -93,25026 \text{ MPa}$$

$$\text{On a : } \sigma_{\theta_1} + \sigma_{\theta_2} = -93,2303 \text{ MPa}$$

Il est clair que la différence entre  $\sigma_{\theta_1} + \sigma_{\theta_2}$  et  $\sigma_{\theta_3}$  est négligeable par rapport à  $\sigma_{\theta_3}$ , ceci justifie l'efficacité du programme.

On remarque que l'anneau est soumis à une contrainte tangentielle de traction et que plus la pression induite par frottement augmente, plus cette contrainte est importante et il y a risque d'atteindre la contrainte admissible de traction  $[\sigma_{adm}]$  par conséquent rupture de l'anneau. On y remédie à cela en introduisant un second anneau qui contourne le premier et qui provoque sur celui-ci une pression  $P_2$  qui se choisit d'une façon judicieuse de telle manière que la contrainte  $\sigma_a$  induite dans le deuxième anneau soit inférieure à  $[\sigma_{adm}]$  et qu'elle diminue de l'importance de la contrainte dans le premier anneau.

#### I.4 Matrice doublement contournée active

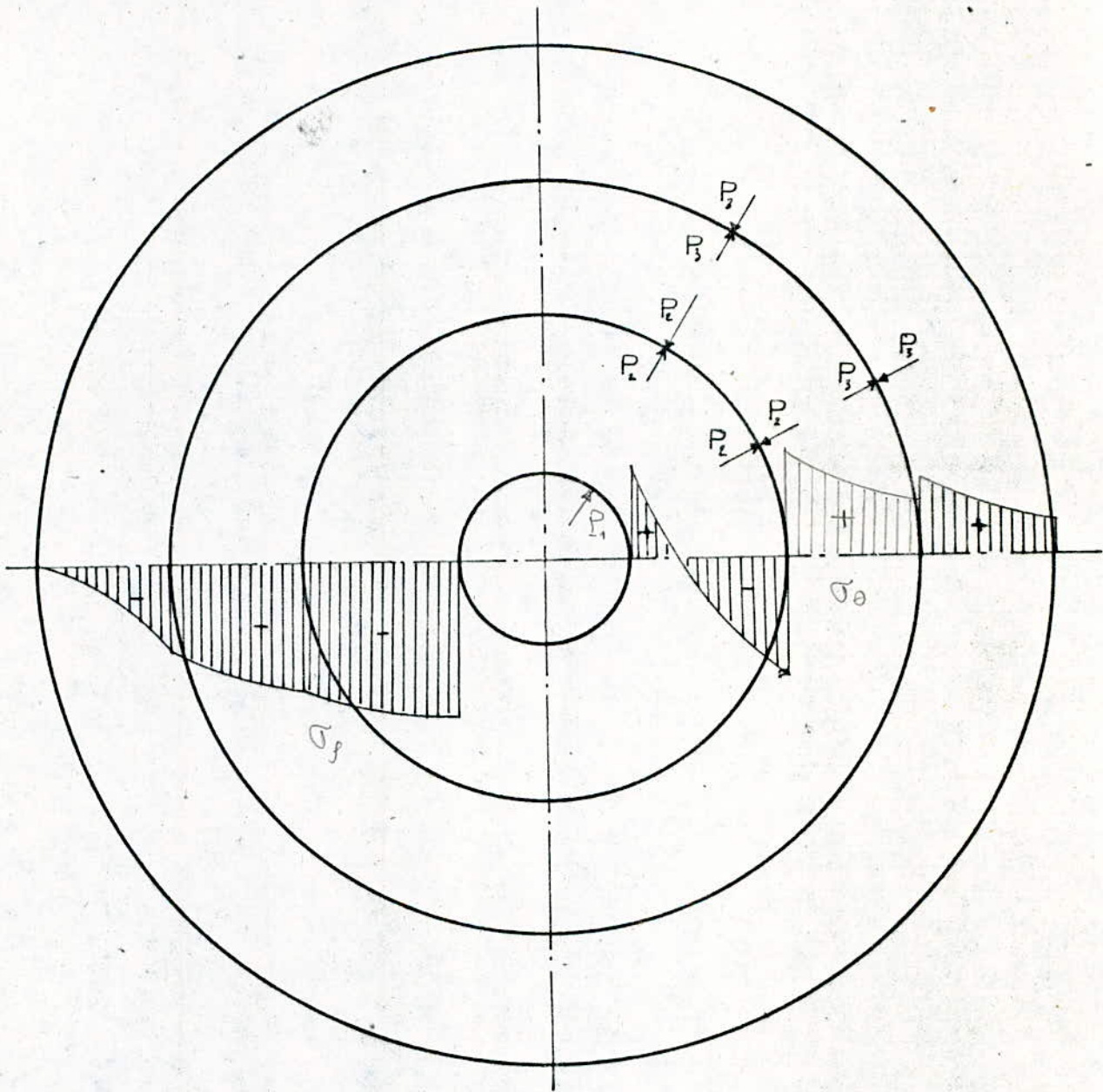
L'introduction du deuxième anneau se fait avant que la matrice ne commence à travailler, celui-ci n'a aucun effet sur les contraintes de la matrice par contre il réduit celles du premier anneau, ce dernier se comportera comme une matrice précontrainte active dont les pressions sont :

Pression intérieure :  $P_2$  ; Pression extérieure :  $P_3$ .

avec  $P_3 < P_2$

la figure 1.1. montre la répartition des contraintes obtenues par le programme.





- figure 1.1.

1er ANNEAU DE PRECONTRAINTE

r= 30  
 P2= 282.8926  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .6000001

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-282.8926	388.9775
2	-282.8926	388.9775
3	-282.8926	388.9775
4	-282.8926	388.9774
5	-282.8926	388.9773
6	-282.8926	388.9772
7	-282.8926	388.9772
8	-282.8926	388.9772
9	-282.8926	388.9773
10	-282.8926	388.9775
11	-282.8926	388.9776
12	-282.8926	388.9776

1er ANNEAU DE PRECONTRAINTE

r= 30  
 P2= 282.8926  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .7

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-193.7669	299.8517
2	-193.767	299.8519
3	-193.7672	299.8521
4	-193.7673	299.8521
5	-193.7672	299.8521
6	-193.767	299.8517
7	-193.7668	299.8515
8	-193.7667	299.8514
9	-193.7667	299.8515
10	-193.767	299.8518
11	-193.7673	299.8522
12	-193.7675	299.8524



1er ANNEAU DE PRECONTRAINTE

r= 30  
 P2= 282.8926  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .8499999

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-114.3438	220.4286
2	-114.3439	220.4287
3	-114.344	220.4289
4	-114.3441	220.429
5	-114.3441	220.429
6	-114.3439	220.4288
7	-114.3438	220.4286
8	-114.3437	220.4285
9	-114.3437	220.4285
10	-114.3439	220.4287
11	-114.3441	220.4289
12	-114.3441	220.429

1er ANNEAU DE PRECONTRAINTE

r= 30  
 P2= 282.8926  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= 1

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-67.89422	173.9786
2	-67.89422	173.9789
3	-67.89422	173.9792
4	-67.89422	173.9794
5	-67.89422	173.9794
6	-67.89422	173.9793
7	-67.89422	173.979
8	-67.89422	173.9788
9	-67.89422	173.9787
10	-67.89422	173.9789
11	-67.89422	173.9791
12	-67.89422	173.9793

2eme ANNEAU DE PRECONTRAINT

r= 50  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .7142856

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-67.89422	209.3405
2	-67.89422	209.3405
3	-67.89422	209.3404
4	-67.89422	209.3403
5	-67.89422	209.3402
6	-67.89422	209.3401
7	-67.89422	209.3401
8	-67.89422	209.3401
9	-67.89422	209.3402
10	-67.89422	209.3405
11	-67.89422	209.3407
12	-67.89422	209.3408

2eme ANNEAU DE PRECONTRAINT

r= 50  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .8499999

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-27.16347	168.6096
2	-27.16351	168.6097
3	-27.16357	168.6097
4	-27.16362	168.6098
5	-27.16363	168.6098
6	-27.16359	168.6097
7	-27.16352	168.6096
8	-27.16348	168.6096
9	-27.16347	168.6096
10	-27.16349	168.6096
11	-27.16353	168.6097
12	-27.16357	168.6098



2eme ANNEAU DE PRECONTRAINTE

r= 50  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .9

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-16.5893	158.0353
2	-16.58933	158.0354
3	-16.58938	158.0355
4	-16.58942	158.0357
5	-16.58942	158.0357
6	-16.5894	158.0356
7	-16.58936	158.0355
8	-16.58932	158.0354
9	-16.58931	158.0354
10	-16.58933	158.0354
11	-16.58935	158.0355
12	-16.58937	158.0355

2eme ANNEAU DE PRECONTRAINTE

r= 50  
 P3= 67.89422  
 SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= 1

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	141.4459
2	0	141.446
3	0	141.4462
4	0	141.4464
5	0	141.4464
6	0	141.4464
7	0	141.4463
8	0	141.4461
9	0	141.4461
10	0	141.446
11	0	141.446
12	0	141.446

## II MATRICES POLYGONALES

### II-1 Avant propos

Avant d'aborder l'étude des matrices polygonales nous allons rappeler quelques théories mathématiques qui ont permis l'établissement de quelques formules qui sont la base de notre étude.

### II-2 Théorie de l'élasticité

L'application de la théorie de l'élasticité permet d'obtenir une information détaillée et précise sur l'état des contraintes et des déformations en un point quelconque de l'intérieur du corps étudié (matrice dans notre cas).  
En particulier, la théorie de l'élasticité convient remarquablement bien pour l'étude de l'état des contraintes au voisinage immédiat de petits trous, entailles, encoches, ou coins dans la matrice.

#### II - 2.1 Formulation d'un problème d'élasticité

La résolution d'un problème selon la théorie de l'élasticité, consiste à déterminer les composantes des contraintes satisfaisant les équations différentielles



d'équilibre, les composantes de déformations satisfaisant les conditions de compatibilité et les composantes de déplacement satisfaisant les conditions aux limites.

## II-2-2

### Fonction de contrainte d'AIRY

La satisfaction simultanée des conditions d'équilibre et de compatibilité peut être simplifiée par l'introduction d'une fonction définie de manière à satisfaire automatiquement l'équilibre. Il ne restera plus alors qu'à satisfaire les conditions de compatibilité.

Cette fonction est appelée fonction de contrainte d'Airy en l'honneur du mathématicien anglais qui l'a introduite en 1862. Elle rend le problème plus concis du moment qu'il ne reste qu'à satisfaire les équations de compatibilité avec les conditions aux limites.

## II-3 Théorie

### II-3-1 Equations d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$X$  et  $Y$  sont les forces massiques par unité de volume dans les directions  $ox$  et  $oy$ , elles sont nulles car la déformation est statique.

- Introduisons la fonction de contrainte d'Hirry  $u(x, y)$ .

- Posons :  $\sigma_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  ;  $\sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  et  $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

alors :

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \nabla^2 u \quad (3)$$

où  $\nabla^2$  désigne le laplacien carré.

### II-3-2 Equations de compatibilité

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)} \left[ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right]$$

comme  $X = Y = 0$ , donc :  $\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4)$

$$(4) \text{ et } (3) \Rightarrow \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^2 (\nabla^2 u) = \nabla^4 u = 0$$

donc  $u$  est biharmonique.

### II-3-3 Utilisation des variables complexes

Posons :  $P = \nabla u$  et  $Q = \overline{\nabla u}$  ( $Q$  conjugué de  $P$ )

On considère les fonctions  $f(z) = P + iQ$  et

$$\varphi(z) = \frac{1}{4} \int f(z) dz = \mu + i\nu$$

$$\psi(z) = \int (P + iQ)(dx + i dy)$$



$$\psi(z) = \left[ \int P dx - \int Q dy \right] + i \left[ \int P dy + \int Q dx \right]$$

Puisque  $u = \operatorname{Re}(\psi(z)) = \frac{1}{4} \operatorname{Re}(\int f(z) dz)$

et 
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{4} \int f(z) dz \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4} \int P dx - \frac{1}{4} \int Q dy \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{4} \int f(z) dz \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{4} \int P dy + \frac{1}{4} \int Q dx \right) \end{cases}$$

or  $\frac{\partial}{\partial x} \int Q dy = 0$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \int Q dx = 0$

et  $\frac{\partial}{\partial x} \int P dx = P$  ;  $\frac{\partial}{\partial y} \int P dy = P$

donc  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4} P$  et  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4} P$

de la même manière on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{4} Q \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4} Q$$

donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Soit la fonction  $P_i = u - \mu \cdot x - v \cdot y$   
montrons que  $P_i$  est harmonique.

on a :

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{P}{2} - \frac{x}{4} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{y}{4} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{P}{2} + \frac{x}{4} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{y}{4} \frac{\partial P}{\partial y}$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) - P_1 - \frac{x}{4} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) - \frac{y}{4} \left( \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$$

comme  $P = \nabla U$  et  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$  ;  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$  alors :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} = \nabla^2 P_1 = 0 \text{ donc } P_1 \text{ est harmonique.}$$

Soit  $X(z)$  tel que  $\operatorname{Re}[X(z)] = P_1$

$$P_1 = 4 - \mu \cdot x - 9 \cdot y \text{ donc } U = \mu \cdot x + 9 \cdot y + P_1$$

$$\text{or } \mu \cdot x + 9 \cdot y = \operatorname{Re}[(x - iy)(\mu + iq)]$$

$$\text{ou encore } \mu \cdot x + 9 \cdot y = \operatorname{Re}[\bar{z} \cdot \psi(z)] = \frac{1}{2} [\bar{z} \cdot \psi(z) + z \bar{\psi}(z)]$$

$$\text{alors } U = \frac{1}{2} [\bar{z} \psi(z) + z \bar{\psi}(z)] + P_1$$

$$\text{comme } P_1 = \operatorname{Re}[X(z)] = \frac{1}{2} [X(z) + \bar{X}(z)] \text{ donc :}$$

$$U = \frac{1}{2} [\bar{z} \psi(z) + z \bar{\psi}(z) + X(z) + \bar{X}(z)]$$

et en tenant compte du fait que :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{ et } \frac{\partial}{\partial y} = \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \cdot i, \text{ on obtient :}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} [\bar{z} \psi'(z) + \psi(z) + \bar{\psi}(z) + z \bar{\psi}'(z) + X'(z) + \bar{X}'(z)] \quad (a)$$

(8)

et

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} [\bar{z} \psi'(z) - \psi(z) - z \bar{\psi}'(z) + \bar{\psi}(z) + X'(z) - \bar{X}'(z)] \quad (b)$$

les fonctions  $\bar{X}(z)$  et  $\bar{\psi}(z)$  dépendent uniquement de la variable  $\bar{z}$ .

En dérivant les expressions (8a) et (8b)

On obtient :



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z \left( \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(z) \right) = 4 \operatorname{Re} \left[ \varphi'(z) \right]$$

et sachant que :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

On a alors :

$$\sigma_x + i \tau_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = i \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (11)$$

et

$$\tau_{xy} + i \sigma_y = - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = i \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (12)$$

En multipliant l'équation (11b) par  $-i$  et en la sommant avec l'équation (11a) on obtient :

$$\sigma_x + \sigma_y = i \frac{\partial}{\partial y} \left( i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

or d'après les équations (8a) et (8b) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z) + z \bar{\varphi}'(z) + \psi(z)$$

avec  $\psi(z) = \bar{\chi}'(z)$

$$\text{donc : } \sigma_x + \sigma_y = -i \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi(z) + z \bar{\varphi}'(z) + \psi(z) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi(z) + z \bar{\varphi}'(z) + \psi(z) \right)$$

$$\text{et comme : } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$$

alors :

$$\sigma_x + \sigma_y = \left( \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(z) - z \bar{\varphi}''(z) - \psi'(z) \right) + \left( \varphi'(z) + \bar{\varphi}'(z) + z \varphi''(z) + \psi'(z) \right)$$

donc :  $\sigma_x + \sigma_y = 2 \left( \psi'(z) + \bar{\psi}'(z) \right) = 4 \cdot \text{Re}[\psi'(z)]$

On multiplie l'équation 11b par (i) et on l'ajoute à l'équation (11a) On obtient :

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i \tau_{xy} = -i \frac{\partial}{\partial y} \left( i \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( i \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

alors :

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i \tau_{xy} = \left( \psi'(z) + \bar{\psi}'(z) - z \bar{\psi}''(z) - \psi'(z) \right) + \left( -\psi'(z) - \bar{\psi}'(z) - z \bar{\psi}''(z) - \psi'(z) \right)$$

et finalement :

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i \tau_{xy} = -2 \left( \bar{z} \psi''(z) + \psi'(z) \right)$$

Nous avons donc deux équations fondamentales pour notre étude. Les équations sont appelées équation de Muskhelishvili.

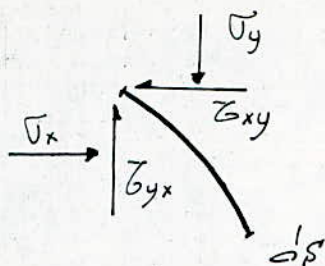
$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 2 \left( \psi'(z) + \bar{\psi}'(z) \right) = 4 \cdot \text{Re}[\psi'(z)] & (a) \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2 \left[ \bar{z} \psi''(z) + \psi'(z) \right] & (b) \end{cases} \quad (12)$$

Néanmoins il reste une équation pour compléter notre système qui est l'équation de l'équilibre aux bornes.

## II - 3.4 Equation de l'équilibre aux bornes

Soit  $\Gamma$  un contour sur lequel est appliqué une force de composantes  $X_1, Y_1$  suivant les axes  $ox$  et  $oy$ . Étudions un élément infinitésimal de ce contour "ds"





Soient  $X_n, Y_n$  les composantes de la pression provoquée par la force  $\bar{F}$ , suivant  $ox$  et  $oy$ .

$$\bar{F} = X_n + i Y_n = \int_s (X_n + i Y_n) ds$$

$$\int \bar{F}_x = X_n \cdot ds = \sigma_x \cdot dy - \tau_{xy} \cdot dx$$

$$\int \bar{F}_y = Y_n \cdot ds = \tau_{xy} \cdot dy - \sigma_y \cdot dx.$$

donc :

$$X_n + i Y_n = \frac{1}{ds} \left[ \sigma_x \cdot dy - i \sigma_y \cdot dx + \tau_{xy} (-dx + i dy) \right]$$

comme

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad ; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\text{alors : } dx = \frac{\partial x}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z} = \frac{1}{2} (dz + d\bar{z})$$

$$\text{et } dy = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \cdot d\bar{z} = -\frac{i}{2} (dz - d\bar{z}).$$

et donc :

$$X_n + i Y_n = \frac{1}{2 \cdot ds} \left[ -\sigma_x \cdot i \cdot (dz - d\bar{z}) - i \sigma_y (dz + d\bar{z}) - 2\tau_{xy} d\bar{z} \right]$$

alors :

$$X_n + i Y_n = \frac{-i}{2 ds} \left[ (\sigma_x + \sigma_y) dz + (\sigma_y - \sigma_x - 2\tau_{xy}) d\bar{z} \right]$$

or les équations (12 a) et (12 b) donnent :

$$\sigma_x + \sigma_y = 2(\psi'(z) + \bar{\psi}'(\bar{z}))$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\bar{z}\psi''(z) + \psi'(z))$$

$$\text{donc : } X_n + iY_n = \frac{-i}{ds} d. (\varphi(z) + z \bar{\varphi}'(z) + \bar{\varphi}(z))$$

$$\text{Car } d(z \bar{\varphi}'(z)) = \bar{\varphi}'(z) dz + z \bar{\varphi}''(z) d\bar{z}.$$

$$\text{donc : } \varphi(z) + z \bar{\varphi}'(z) + \bar{\varphi}(z) = i \int (X_n + iY_n) ds \quad (13)$$

l'équation (13) n'est calculable que le domaine  $S$  est simplement connexe ; dans le cas contraire on doit utiliser une transformation conforme  $z = w(\zeta)$  qui transforme le contour  $S$  en un contour  $S'$  que l'on choisira circulaire  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ .

Ceci nécessite d'exprimer les contraintes en coordonnées polaire.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{\rho\theta} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos 2\theta. \end{cases}$$

Ce système est obtenu en faisant une rotation au système d'axes  $(ox, oy)$  d'un angle  $\theta$ .

d'après ce système on peut écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_\rho + \sigma_\theta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\theta} \end{aligned}$$

$$\text{or on sait que : } \begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} [\varphi'(z)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \cdot [\bar{z} \cdot \varphi''(z) + \varphi'(z)]. \end{cases}$$



Il reste donc à exprimer les fonctions  $\varphi'(z)$ ,  $\varphi''(z)$  et  $\varphi'(z)$  dans le plan  $\zeta$ .

sachant que  $z = \omega(\zeta)$ , alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad \text{or} \quad dz = \omega'(\zeta) d\zeta \Rightarrow \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\omega'(\zeta)}$$

$$\text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)}$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)} \right)$$

donc :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)^2} + \frac{d}{d\zeta} \left( -\frac{\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)^3} \right)$$

Ceci nous permet d'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p + \bar{\sigma}_0 = 4 \cdot \text{Re} \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_0 - \sigma_p + 2i\zeta\sigma_{p0} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\zeta)} \cdot \left[ \bar{\omega}(\zeta) \cdot \left( \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right)' + \varphi'(\zeta) \right] \end{array} \right. \quad (15)$$

Nous allons maintenant exprimer l'équation (13) dans le plan  $\zeta$ , pour entamer la résolution des équations de MUSKHELISHVILI.

$$(13) \Rightarrow \varphi(\zeta) + \omega(\zeta) \cdot \frac{\bar{\varphi}'(\zeta)}{\bar{\omega}'(\zeta)} + \bar{\varphi}(\zeta) = i \int_{\gamma} (x_n + iy_n) ds = f(\zeta)$$

l'équation conjuguée de celle-ci est :

$$\bar{\varphi}(\zeta) + \bar{\omega}(\zeta) \cdot \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \varphi(\zeta) = \bar{f}(\zeta).$$

On a donc obtenu le système final :

$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_p = 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(z)}{\bar{w}'(z)} \right] \\ \sigma_0 - \sigma_p + 2i\tau_{p0} = \frac{2z^2}{\rho^2 \bar{w}'(z)} \cdot \left[ \bar{w}(z) \cdot \left( \frac{\varphi'(z)}{\bar{w}'(z)} \right)' + \varphi'(z) \right] \\ \varphi(z) + \bar{\varphi}(z) + \bar{w}(z) \cdot \frac{\varphi'(z)}{w'(z)} = \bar{f}(z). \end{cases}$$

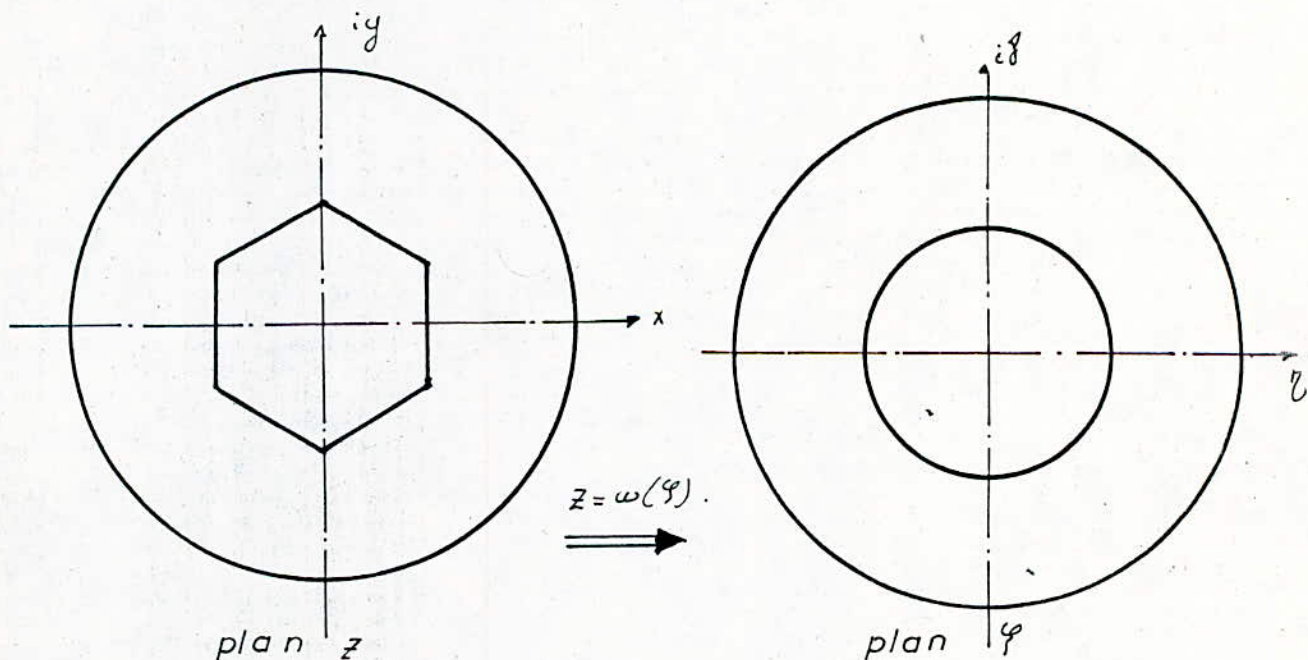
La résolution de ce système d'équation nécessite la connaissance des fonctions  $w(z)$  et  $\varphi(z)$ , nous allons donc rappeler les expressions permettant de définir ces fonctions, celles-ci ont été déjà établies dans la thèse de Mr: NEKBIL. (Promotion: Janvier 86).



### III RAPPEL

#### III-1 Fonction de transformation

C'est la fonction qui permet de transformer le domaine doublement connexe, délimité par le contour intérieur "Polygone" et le contour extérieur "cercle" en un domaine annulaire, dont les contours sont des cercles de rayon intérieur  $\rho_1$  et de rayon extérieur 1.



La fonction  $w(q)$  est définie par son développement en série de Laurent :

$$w(q) = \sum_{\kappa} C_{\kappa} q^{\kappa}$$

avec :

$$C_{\kappa} = \frac{1}{m(1-f_1^{2qm})} \cdot \sum_{j=1}^m \left\{ x_j \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot \kappa (2j-1)}{2qm}\right) + y_j \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \kappa (2j-1)}{2qm}\right) \right. \\ \left. - f_1^{2qm-\kappa} \cdot \left[ x'_j \cos\left(\frac{\pi \cdot \kappa \cdot (2j-1)}{2qm}\right) + y'_j \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot \kappa \cdot (2j-1)}{2qm}\right) \right] \right\}$$

$$C_{-\kappa} = \frac{1}{m(1-f_1^{2qm})} \cdot \sum_{j=1}^m \left\{ f_1^{\kappa} \cdot \left[ x'_j \cos\left(\frac{\pi \cdot \kappa (2j-1)}{2qm}\right) - y'_j \sin\left(\frac{\pi \cdot \kappa (2j-1)}{2qm}\right) \right] \right. \\ \left. - f_1^{2qm} \cdot \left[ x_j \cos\left(\frac{\pi \cdot \kappa \cdot (2j-1)}{2qm}\right) - y_j \sin\left(\frac{\pi \cdot \kappa \cdot (2j-1)}{2qm}\right) \right] \right\}$$

et

$$f_1 = \frac{\sum_{j=1}^m \left[ x'_j \cdot \cos\left(\frac{\pi (2j-1)}{2qm}\right) + y'_j \cdot \sin\left(\frac{\pi (2j-1)}{2qm}\right) \right]}{\sum_{j=1}^m \left[ x_j \cdot \cos\left(\frac{\pi (2j-1)}{2qm}\right) + y_j \cdot \sin\left(\frac{\pi (2j-1)}{2qm}\right) \right]}$$



où :

$m$  : nombre de points considérés sur le pan du polygone, pour le calcul des contraintes en ces points.

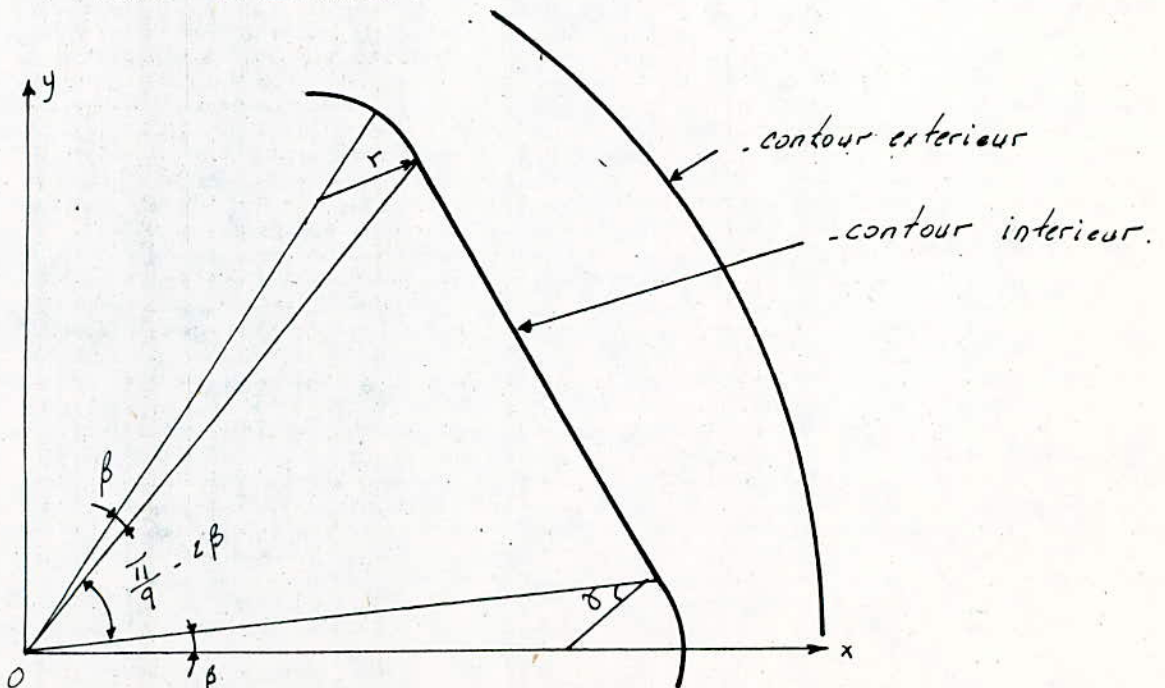
$q$  : nombre d'axes de symétrie passant par les sommets du polygone (ex: 3 pour l'hexagone 2 pour le carré ...ect..).

$x_j$  : désigne l'abscisse du  $j^{\text{ème}}$  points considérée sur le contour extérieur dans le plan  $z$ .

$y_j$  : son ordonnée.

$x'_j$  : l'abscisse du  $j^{\text{ème}}$  point considéré sur le contour intérieur dans le plan  $z$ .

$y'_j$  : son ordonnée.



### III. 2 Fonction potentiel

Cette fonction a été introduite dans le but de déterminer les contraintes  $\sigma_p$  et  $\sigma_0$ .

Elle a été déterminée par la résolution du système (I) qui nous a donné les coefficients  $a_n$  de la série :

$$\varphi(\varphi) = \sum_n a_n \varphi^n \quad \text{avec} \quad a_n = \alpha_n + i\beta_n$$

$$(I) : \sum_{k=2m}^{2m-1} \left\{ k C_k \bar{a}_{k-m} (1 - P_1^{2(k-m)}) + C_k (k+1) a_{k+1} (1 - P_1^{2k}) \right\} \\ = \sum_{k=2m}^{2m-1} k C_k (-P_2 + P_1 \cdot P_1^{2(k-m)}) \cdot C_{k-m}$$

La résolution de ce système nous a donné  $\beta_n$  négligeable devant  $\alpha_n$ , ceci permet d'écrire :

$$\varphi(\varphi) = \sum_n \alpha_n \varphi^n$$



### III - 3 Résolution des équations de MUSKHELISHVILI

Voici le système à résoudre :

$$\begin{cases} \sigma_0 + \sigma_p = 4 \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right] \\ \sigma_0 - \sigma_p + 2i \zeta \sigma_0 = \frac{2z^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)} \cdot \left[ \bar{\omega}(z) \cdot \left( \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right)' + \varphi'(z) \right] \\ \varphi(z) + \bar{\varphi}(z) + \bar{\omega}(z) \cdot \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} = \bar{f}(z) \end{cases}$$

nous allons suivre les étapes suivantes :

nous exprimerons la fonction  $\varphi'(z)$  de la 3<sup>ème</sup> équation puis nous la remplacerons par son expression dans la 2<sup>ème</sup> équation, nous obtiendrons ainsi un système de deux équations à deux inconnues.

$$\varphi(z) + \bar{\varphi}(z) + \bar{\omega}(z) \cdot \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} = \bar{f}(z) \quad (1)$$

sur le contour intérieur :  $\rho = 1$ .

$$z = e^{i\theta}, \quad \bar{z} = e^{-i\theta} \text{ donc } \bar{z} = 1/z$$

Puisque les fonctions conjuguées ne contiennent que  $\bar{z}$ , l'équation (1) devient alors :

$$\varphi(z) + \bar{\varphi}(1/z) + \bar{\omega}(1/z) \cdot \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} = \bar{f}(1/z) \quad (2)$$

En dérivant les deux membres de l'équation (2)  
On obtient :

$$f'(y) = \frac{1}{\xi^2} \bar{\varphi}'(\frac{1}{\xi}) + \bar{\omega}(\frac{1}{\xi}) \cdot \left( \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right)' - \frac{1}{\xi^2} \cdot \bar{\omega}'(\frac{1}{\xi}) \cdot \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)}$$

$$= -\frac{1}{\xi^2} \bar{f}'(\frac{1}{\xi})$$

il faut tenir compte du fait que :

$$\frac{d}{dy} \left( f(\frac{1}{y}) \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{y} \right) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} \cdot f\left(\frac{1}{y}\right)$$

alors :

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\xi^2} \left( \bar{\varphi}'(\frac{1}{\xi}) + \bar{\omega}'(\frac{1}{\xi}) \cdot \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} - \bar{f}'(\frac{1}{\xi}) \right) - \bar{\omega}(\frac{1}{\xi}) \cdot \left( \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right)'$$

Lorsqu'on remplace  $\varphi'(y)$  par son expression dans la deuxième équation du système initial, celle-ci devient :

$$\sigma_0 - \sigma_f = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\xi)} \left[ \left( \bar{\omega}(\xi) \left( \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right)' - \bar{\omega}(\frac{1}{\xi}) \cdot \left( \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right)' + \frac{1}{\xi^2} \left( \bar{\varphi}'(\frac{1}{\xi}) + \bar{\omega}'(\frac{1}{\xi}) \cdot \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} - \bar{f}'(\frac{1}{\xi}) \right) \right) \right]$$

En séparant les deux expressions entre parenthèses on obtient :

$$\sigma_0 - \sigma_f = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\xi)} \left[ \left( \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right)' \left( \bar{\omega}(\xi) - \bar{\omega}(\frac{1}{\xi}) \right) \right] + \frac{2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\xi)} \left[ \varphi'(\frac{1}{\xi}) + \bar{\omega}'(\frac{1}{\xi}) \cdot \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} - \bar{f}'(\frac{1}{\xi}) \right]$$

On obtient donc le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 + \sigma_f = 4 \cdot \text{Re} \left[ \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right] \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0 - \sigma_f + 2i\zeta\rho_0 = \frac{2\xi^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\xi)} \left[ \left( \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} \right)' \left( \bar{\omega}(\xi) - \bar{\omega}(\frac{1}{\xi}) \right) \right] + \frac{2}{\rho^2 \bar{\omega}'(\xi)} \left[ \varphi'(\frac{1}{\xi}) + \bar{\omega}'(\frac{1}{\xi}) \cdot \frac{\varphi'(y)}{\omega'(y)} - \bar{f}'(\frac{1}{\xi}) \right] \quad (4) \end{array} \right.$$



Nous transformons encore une fois l'équation (3)

$$2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right] = \frac{2}{|\omega'(z)|^2} \cdot \operatorname{Re} \left[ \varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z) \right]$$

et comme  $\varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z) + \overline{\varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z)} = 2 \operatorname{Re} \left[ \varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z) \right]$

donc :

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = \frac{2}{|\omega'(z)|^2} \left( \varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z) + \bar{\varphi}'(z) \cdot \omega'(z) \right) \quad (3)'$$

si on substitue (4) de (3)' on obtient :

$$2\sigma_\rho = \frac{2}{|\omega'(z)|^2} \left( \varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z) \right) + \frac{2}{|\omega'(z)|^2} \left( \bar{\varphi}'(z) \cdot \omega'(z) \right) - \frac{z^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)} \left[ \left( \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right)' \right. \\ \left. \left( \bar{\omega}(z) - \bar{\omega}(1/z) \right) \right] - \frac{2}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)} \left[ \varphi'(1/z) + \bar{\omega}'(1/z) \cdot \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} - \bar{f}'(1/z) \right]$$

donc :

$$\sigma_\rho = \frac{1}{|\omega'(z)|^2} \left( \varphi'(z) \cdot \bar{\omega}'(z) \right) + \frac{1}{|\omega'(z)|^2} \left( \bar{\varphi}'(z) \cdot \omega'(z) \right) - \frac{z^2}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)} \left[ \left( \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right)' \right. \\ \left. \left( \bar{\omega}(z) - \bar{\omega}(1/z) \right) \right] - \frac{1}{\rho^2 |\omega'(z)|^2} \left[ \varphi'(z) \cdot \omega'(z) + \bar{\omega}'(1/z) \cdot \varphi'(z) \right] + \frac{\bar{f}'(1/z)}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)}$$

$$\sigma_\rho = \frac{z^2}{\rho^2 \omega'(z)} \cdot \left[ \left( \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right)' \left( \bar{\omega}(1/z) - \bar{\omega}(z) \right) \right] + \frac{\bar{f}'(1/z)}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)} + \frac{\varphi'(z)}{\rho^2 |\omega'(z)|^2} \left( \right. \\ \left. \rho^2 \bar{\omega}'(z) - \bar{\omega}(1/z) \right) + \frac{1}{\bar{\omega}'(z)} \cdot \left( \bar{\varphi}'(z) - \frac{\varphi'(z)}{\rho^2} \right)$$

En développant l'expression  $\left( \frac{\varphi'(z)}{\omega'(z)} \right)'$  on obtient la formule finale de  $\sigma_\rho$ .

$$\sigma_p = \frac{\rho^2}{\rho^2 |\omega'(z)|^2} \left[ (\bar{\omega}(z) - \bar{\omega}(z)) \left( \varphi''(z) - \varphi'(z) \cdot \frac{\omega''(z)}{\omega'(z)} \right) \right] + \frac{\bar{f}'(z)}{\rho^2 \bar{\omega}'(z)}$$

$$+ \frac{\varphi'(z)}{\rho^2 |\omega'(z)|^2} \left[ \bar{\omega}'(z) \cdot \rho^2 - \omega'(z) \right] + \frac{1}{\bar{\omega}'(z)} \cdot \left( \bar{\varphi}'(z) - \frac{\varphi'(z)}{\rho^2} \right)$$

et

$$\sigma_{\theta} = 4 \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(z)}{\bar{\omega}'(z)} \right] - \sigma_p.$$

Les quantités  $\sigma_{\theta}$  et  $\sigma_p$  sont des fonctions réelles, il faut donc exprimer  $\operatorname{Re}[\sigma_p]$  avant de commencer le programme.



#### IV ALGORITHME ET PROGRAMMATION

Dans ce chapitre nous allons exprimer les parties réelles de chaque contrainte, et nous allons expliquer leur programmation en définissant chaque indice utilisé dans le programme.

Après cela nous interpréterons les résultats du programme appliqué à une matrice polygonale et en fin nous donnerons une conclusion de toute cette étude.

On rappelle les expressions des contraintes :

$$(4) \quad \sigma_p = \frac{\rho^2}{\rho^2 |\omega'(\rho)|^2} \left[ (\bar{\omega}(\rho) - \bar{\omega}(\rho)) \left( \varphi''(\rho) - \varphi'(\rho) \cdot \frac{\omega''(\rho)}{\omega'(\rho)} \right) \right] + \frac{\bar{f}'(\rho)}{\rho^2 \bar{\omega}'(\rho)}$$

$$+ \frac{\varphi'(\rho)}{\rho^2 |\omega'(\rho)|^2} \left[ \bar{\omega}'(\rho) \cdot \rho^2 - \omega'(\rho) \right] + \frac{1}{\bar{\omega}'(\rho)} \cdot \left( \varphi'(\rho) - \frac{1}{\rho} \cdot \varphi'(\rho) \right)$$

$$(5) \quad \sigma_{\theta} = 4 \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{\varphi'(\rho)}{\omega'(\rho)} \right] - \sigma_p.$$

Il s'agit de déterminer  $\operatorname{Re}[\sigma_p]$  en fonction des développements en série de Laurent des fonctions figurant dans les expressions (4) et (5), puis établir un algorithme qui permettra la programmation de  $\operatorname{Re}[\sigma_p]$ .

Commençons par exprimer les fonctions par leur développement en série de Laurent.

$$w(z) = \sum C_k \cdot z^k$$

$$w'(z) = \sum k \cdot C_k \cdot z^{k-1}$$

$$w''(z) = \sum k(k-1) \cdot C_k \cdot z^{k-2}$$

Sur un contour de la matrice de rayon  $\rho$ , avec  
 $\rho_1 < \rho < 1$  on a:

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

donc :

$$\operatorname{Re}[w(z)] = \sum C_k \cdot \rho^k \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[w(z)] = \sum C_k \cdot \rho^k \sin(k\theta)$$

$$\operatorname{Re}[w'(z)] = \sum C_k \cdot k \cdot \rho^{k-1} \cos((k-1)\theta) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[w'(z)] = \sum k \cdot C_k \cdot \rho^{k-1} \sin((k-1)\theta)$$

$$\operatorname{Re}[w''(z)] = \sum k(k-1) C_k \cdot \rho^{k-2} \cos((k-2)\theta) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[w''(z)] = \sum k(k-1) C_k \cdot \rho^{k-2} \sin((k-2)\theta)$$

$$\text{maintenant} \quad \varphi(z) = \sum \alpha_n \cdot z^n$$

de même :

$$\operatorname{Re}[\varphi(z)] = \sum \alpha_n \cdot \rho^n \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[\varphi(z)] = \sum \alpha_n \cdot \rho^n \sin(n\theta)$$

$$\operatorname{Re}[\varphi'(z)] = \sum n \alpha_n \cdot \rho^{n-1} \cos((n-1)\theta) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[\varphi'(z)] = \sum n \alpha_n \cdot \rho^{n-1} \sin((n-1)\theta)$$

$$\operatorname{Re}[\varphi''(z)] = \sum n(n-1) \alpha_n \cdot \rho^{n-2} \cos((n-2)\theta) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}[\varphi''(z)] = \sum n(n-1) \alpha_n \cdot \rho^{n-2} \sin((n-2)\theta)$$

Pour simplifier la démonstration nous allons affecter  
une variable à chaque somme



D  
usons :

$$S_1 = \operatorname{Re}[\psi'(z)] ; S_2 = \operatorname{Re}[\omega'(z)] ; S_3 = \operatorname{Re}[\omega'(1/4)]$$

$$S_4 = \operatorname{Re}[\psi'(1/4)] ; S_5 = \operatorname{Re}[\omega''(z)] ; S_6 = \operatorname{Re}[\psi''(z)]$$

on sait que

$$\operatorname{Re}[\omega'(1/4)] = \sum \kappa \cdot C_\kappa \cos((\kappa-1)\theta)$$

$$\operatorname{Im}[\omega'(1/4)] = -\sum \kappa C_\kappa \sin((\kappa-1)\theta) =$$

$$\operatorname{Re}[\psi'(1/4)] = \sum n \alpha_n \cos((n-1)\theta)$$

$$\operatorname{Im}[\psi'(1/4)] = -\sum n \alpha_n \sin((n-1)\theta)$$

et soient les  $P_i ; i = 1, 2, \dots, 6$ . leurs parties imaginaires  
on signale que

$$\operatorname{Re}[\bar{\omega}(z)] = \operatorname{Re}[\omega(z)]$$

$$\operatorname{Im}[\bar{\omega}(z)] = -\operatorname{Im}[\omega(z)]$$

de même pour les fonction  $\bar{\omega}'(z)$ ,  $\bar{\psi}'(z)$  et  $\bar{\psi}(z)$ .

sachant que :  $f(z) = i \int (x_n + iy_n) ds$  alors

$$f'(z) dz = i (x_n + iy_n) ds \quad (*)$$

$$\sin \alpha = -\frac{dx}{ds}$$

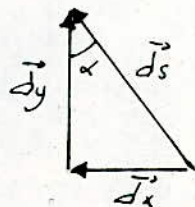
$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds}$$

d'où

$$dx = -\sin \alpha \cdot ds, \quad dy = \cos \alpha \cdot ds$$

$$dx + i dy = i (\cos \alpha + i \sin \alpha) ds$$

$$d'où \quad dz = i \cdot e^{i\alpha} ds$$



l'expression (\*) devient alors :

$$(x_n + iy_n) e^{-i\alpha} dz = f'(g) \cdot dg.$$

la quantité  $x_n + iy_n$  peut se mettre sous la forme :

$$x_n + iy_n = (\sigma_g + i \tau_{g0}) e^{i\alpha} \quad (\text{par changement de repère}).$$

donc

$$(\sigma_g + i \tau_{g0}) dz = f'(g) dg.$$

$$\text{or } \frac{dz}{dg} = \omega'(g) \quad \text{donc.}$$

$$(\sigma_g + i \tau_{g0}) \cdot \omega'(g) = f'(g).$$

et

$$f(g) = (\sigma_g + i \tau_{g0}) \cdot \omega(g).$$

$$\text{Si } f(g) = \sum B_k \cdot g^k \quad \text{alors.}$$

$$\sum B_k \cdot g^k = (\sigma_g + i \tau_{g0}) \cdot \sum C_k \cdot g^k$$

$$\text{donc } B_k = (\sigma_g + i \tau_{g0}) \cdot C_k.$$

le cisaillement n'existe pas au cours du filage  
donc  $\tau_{g0} = 0$  alors :

$$B_k = \sigma_g \cdot C_k$$

$$\text{et } f(g) = \sum \sigma_g \cdot C_k \cdot g^k = \sigma_g \cdot \omega(g).$$

Sur le contour extérieur  $\bar{g} = 1/g$  et  $\bar{\sigma}_g = -\frac{P}{2}$

$\frac{P}{2}$  : Pression extérieure.



$$\text{donc } f(1/g) = -P_2 \cdot \omega(1/g)$$

lorsqu'on dérive les deux quantités par rapport à  $1/g$  on obtient :

$$f'(1/g) = -P_2 \omega'(1/g)$$

nous récrivons l'expression de  $\sigma_p$ .

$$\begin{aligned} \sigma_p' &= \frac{g^2}{p^2 |\omega'(g)|^2} \left[ (\bar{\omega}(1/g) - \bar{\omega}(g)) \left( \varphi''(g) - \varphi'(g) \cdot \frac{\omega''(g)}{\omega'(g)} \right) \right] + \frac{\bar{f}'(1/g)}{p^2 \bar{\omega}'(g)} \\ &+ \frac{\varphi'(g)}{p^2 |\omega'(g)|^2} \left[ \bar{\omega}'(g) \cdot p^2 - \omega'(g) \right] + \frac{1}{\bar{\omega}'(g)} \cdot \left( \varphi'(g) - \frac{1}{p^2} \varphi'(1/g) \right). \end{aligned}$$

nous allons partager l'expression de  $\sigma_p$  en plusieurs termes puis nous leur calculerons les parties réelles et imaginaires afin d'établir  $\text{Re}[\sigma_p]$

$$\text{Soit } T_1 = \frac{\varphi'(g)}{p^2 |\omega'(g)|^2} \left[ p^2 \bar{\omega}'(g) - \omega'(1/g) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Re}[T_1] &= \frac{\text{Re}[\varphi'(g)]}{p^2 |\omega'(g)|^2} \left[ \text{Re}(p^2 \bar{\omega}'(g) - \omega'(1/g)) \right] - \frac{\text{Im}[\varphi'(g)]}{p^2 |\omega'(g)|^2} \\ &\quad \text{Im}[(p^2 \bar{\omega}'(g) - \omega'(1/g))] \end{aligned}$$

$$\text{or } \text{Re}[(p^2 \bar{\omega}'(g) - \omega'(1/g))] = p^2 \cdot \text{Re}[\bar{\omega}'(g)] - \text{Re}[(\omega'(1/g))]$$

$$\text{et } \text{Im}[(p^2 \bar{\omega}'(g) - \omega'(1/g))] = p^2 \cdot \text{Im}[\bar{\omega}'(g)] - \text{Im}[(\omega'(1/g))]$$

donc :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [p^2 \bar{\omega}'(g) - \bar{\omega}'(1/g)] &= p^2 s_2 - s_3 \\ \text{et } \operatorname{Im} [p^2 \bar{\omega}'(g) - \bar{\omega}'(1/g)] &= -p^2 P_2 + P_3 \\ |\omega'(g)|^2 &= \operatorname{Re} [\omega'(g)]^2 + \operatorname{Im} [\omega'(g)]^2 = s_2^2 + P_2^2 \end{aligned}$$

alors :

$$R_1 = \operatorname{Re} [\bar{T}_1] = \frac{s_1}{p^2 (s_2^2 + P_2^2)} (p^2 s_2 - s_3) + \frac{P_1}{p^2 (s_2^2 + P_2^2)} (p^2 P_2 - P_3)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \frac{1}{\bar{\omega}'(g)} \cdot \left[ \bar{\varphi}'(g) - \frac{\varphi'(1/g)}{p^2} \right] \\ \bar{T}_2 &= \frac{\omega'(g)}{p^2 |\omega'(g)|^2} \cdot \left[ p^2 \bar{\varphi}'(g) - \varphi'(1/g) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 = \operatorname{Re} [\bar{T}_2] &= \frac{\operatorname{Re} [\omega'(g)]}{p^2 |\omega'(g)|^2} \cdot \operatorname{Re} [p^2 \bar{\varphi}'(g) - \varphi'(1/g)] - \frac{\operatorname{Im} [\omega'(g)]}{p^2 |\omega'(g)|^2} \cdot \\ &\quad \operatorname{Im} [p^2 \bar{\varphi}'(g) - \varphi'(1/g)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \operatorname{Re} [p^2 \bar{\varphi}'(g) - \varphi'(1/g)] &= p^2 \operatorname{Re} [\bar{\varphi}'(g)] - \operatorname{Re} [\varphi'(1/g)] \\ &= p^2 s_1 - s_4 \end{aligned}$$

$$\text{et } \operatorname{Im} [p^2 \bar{\varphi}'(g) - \varphi'(1/g)] = -p^2 P_1 + P_4$$

donc :

$$R_2 = \operatorname{Re} [\bar{T}_2] = \frac{s_2}{p^2 (s_2^2 + P_2^2)} \cdot (p^2 s_1 - s_4) + \frac{P_2}{p^2 (s_2^2 + P_2^2)} (p^2 P_1 - P_4)$$

$$\text{Soit } \bar{T}_3 = \frac{\bar{f}'(1/g)}{p^2 \bar{\omega}'(g)} = \frac{\bar{f}'(1/g) \cdot \omega'(g)}{p^2 |\omega'(g)|^2}$$

$$\operatorname{Re} [\bar{T}_3] = \frac{1}{p^2 |\omega'(g)|^2} \cdot \left[ \operatorname{Re} [\bar{f}'(1/g)] \cdot \operatorname{Re} [\omega'(g)] - \operatorname{Im} [\bar{f}'(1/g)] \cdot \operatorname{Im} [\omega'(g)] \right]$$



or  $\bar{f}'(1/4) = -P_e \cdot \bar{\omega}'(1/4)$  avec  $P_e$ : Pression extérieure.

$$\text{donc: } R_3 = \operatorname{Re}[\bar{T}_3] = \frac{-P_e}{\rho^2 (S_1^2 + P_1^2)} \cdot [S_2 S_3 + P_2 P_3]$$

$$\text{Soit } \bar{T}_4 = \frac{\rho^2 |\omega'(y)|^2}{\rho^2 |\omega'(y)|^2} (\bar{\omega}(y) - \bar{\omega}(1/4))$$

$$\bar{T}_4 = \frac{e^{2i\theta}}{|\omega'(y)|^2} \cdot (\bar{\omega}(y) - \bar{\omega}(1/4)).$$

alors :

$$R_4 = \operatorname{Re}[\bar{T}_4] = \frac{1}{|\omega'(y)|^2} (\cos 2\theta (S_2 - S_3) + \sin(2\theta) \cdot (P_2 - P_3))$$

$$R_4 = \frac{1}{(S_1^2 + P_1^2)} \cdot [\cos(2\theta) \cdot (S_2 - S_3) + \sin(2\theta) \cdot (P_2 - P_3)]$$

$$\text{et } \bar{I}_4 = \bar{\operatorname{Im}}[\bar{T}_4] = \frac{1}{(S_1^2 + P_1^2)} \cdot [-\cos(2\theta) \cdot (P_2 - P_3) + \sin(2\theta) (S_2 - S_3)]$$

$$\text{Posons } \bar{T}_5 = y''(y) - y'(y) \cdot \frac{\omega''(y)}{\omega'(y)}$$

$$\bar{T}_5 = y''(y) - \frac{1}{|\omega'(y)|^2} \cdot (y'(y) \cdot \omega''(y) \cdot \bar{\omega}'(y))$$

et

$$R_5 = \operatorname{Re}[\bar{T}_5] = S_6 - \frac{1}{(S_1^2 + P_1^2)} [S_1 S_2 S_5 + S_1 P_2 P_5 - S_2 P_1 P_5 + S_5 P_1 P_2]$$

$$\bar{I}_5 = \bar{\operatorname{Im}}[\bar{T}_5] = -P_6 - \frac{1}{(S_1^2 + P_1^2)} [P_1 \cdot P_2 P_5 + P_1 S_2 S_5 + P_5 \cdot S_1 S_2 - P_2 \cdot S_1 S_5]$$

$$\text{Puisque } \sigma_f = -\bar{T}_4 \cdot \bar{T}_5 + \bar{T}_3 + \bar{T}_1 + \bar{T}_2.$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}[\sigma_f] = R_1 + R_2 + R_3 - R_4 R_5 + \bar{I}_4 \cdot \bar{I}_5$$

$$\text{et } \sigma_\theta = \frac{4}{S_1^2 + P_1^2} (S_1 \cdot S_2 + P_1 P_2).$$

$$\sigma_f = R_1 + R_2 + R_3 - R_4 \cdot R_5 + T_4 \cdot T_5.$$

$$\sigma_\theta = \frac{4}{S_2^2 + P_2^2} (S_1 S_2 + P_1 P_2)$$

Ce sont les expressions utilisées dans le programme pour le calcul de  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_f$ .

vous trouverez tous les termes figurant dans les expressions de  $\sigma_f$  et  $\sigma_\theta$ , avec les mêmes affectations dans le programme.



## V INTERPRETATION DES RESULTATS

Après avoir introduit dans le programme les expressions de  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$ , et après avoir vérifié les résultats de celui-ci par l'étude des matrices cylindriques.

Nous allons exploiter ce programme pour commenter la répartition des contraintes sur les différents contours d'une matrice polygonale.

nous prendrons pour l'étude une matrice hexagonale ( $n=3$ ) de côté  $a=10\text{ mm}$  et de rayon extérieur  $R=30\text{ mm}$ . L'étude portera sur l'influence du rayon de courbure  $r$  sur la répartition, puis l'influence de la pression extérieure sur la contrainte  $\sigma_{\max}$ , et en fin sur l'effet de l'introduction d'un deuxième anneau de précontrainte sur le premier.

### V1 Influence du rayon de courbure

Prends le cas où  $P_1 = 700\text{ MPa}$  ;  $P_2 = 0$ .

Calculons les contraintes  $\sigma_\theta$  et  $\sigma_r$  en 12 points du pan de l'hexagone pour différentes valeurs du rayon de courbure  $r$ .

d'après les résultats obtenus on remarque :

- la contrainte  $\sigma_r$  est constante et est égale à  $-P_1$

- La contrainte tangentielle est maximale aux coins, symétrique par rapport au milieu du Pan et est minimale en celui-ci
- Plus le rayon de courbure  $r$  s'agrandit, plus la répartition des contraintes  $\sigma_0$  devient homogène

Le premier résultat est logique puisqu'on a considéré que la pression intérieure est constante.

Le deuxième résultat nous confirme ce qui a été affirmé dans le paragraphe "théorie de l'élasticité".

Le troisième résultat peut s'expliquer par le fait que plus le rayon de courbure s'agrandit plus la forme polygonale tend vers une forme circulaire.

En comparant les résultats de ce cas " $r = 8 \text{ mm}$ " avec ceux de la matrice circulaire on voit qu'il n'y a pas une grande différence entre les répartitions.

La figure 2 nous montre la représentation des résultats.

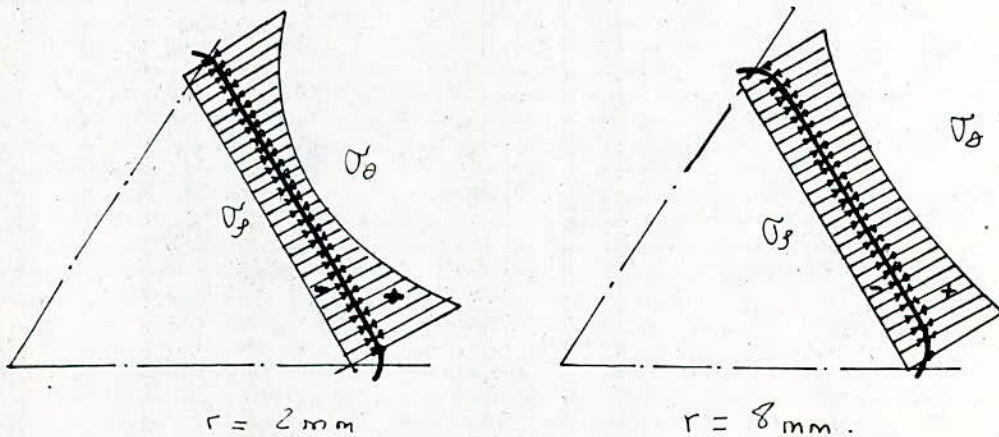


fig. 2.



r= 2  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .3021293

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-700	882.0571
2	-700	866.7943
3	-700	845.6448
4	-700	827.0429
5	-700	814.3896
6	-700	808.1693
7	-700	808.1693
8	-700	814.3896
9	-700	827.0429
10	-700	845.6449
11	-700	866.7944
12	-700	882.0574

r= 2  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .5

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-213.5603	356.0258
2	-212.8848	354.8651
3	-211.7245	352.8719
4	-210.3986	350.5964
5	-209.2598	348.6456
6	-208.6016	347.5229
7	-208.591	347.5123
8	-209.2332	348.619
9	-210.3688	350.5667
10	-211.7047	352.8521
11	-212.8803	354.8606
12	-213.5659	356.0315

r= 6  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .2962394

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-700	850.7078
2	-700	845.764
3	-700	837.9273
4	-700	829.865
5	-700	823.6076
6	-700	820.262
7	-700	820.262
8	-700	823.6076
9	-700	829.865
10	-700	837.9273
11	-700	845.7641
12	-700	850.7079

r= 8  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .2908381

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-700	832.6136
2	-700	831.7152
3	-700	830.1876
4	-700	828.4671
5	-700	827.0135
6	-700	826.189
7	-700	826.189
8	-700	827.0135
9	-700	828.4671
10	-700	830.1876
11	-700	831.7153
12	-700	832.6138



## V 2 Matrice sans précontraintes

fixons la valeur de  $r$  ( $r = 2 \text{ mm}$ ), et examinons la répartition des contraintes sur les différents contours d'une matrice hexagonale sans précontrainte et sous une pression intérieure  $P_1 = 700 \text{ MPa}$ , avec les dimensions indiquées précédemment.

On remarque que :

- La contrainte normale  $\sigma_r$  est négative (compression) sur tout les contours de la matrice, et elle est croissante de  $-\underline{P}_1 = -700 \text{ MPa}$  à  $-\underline{P}_2 = 0$

- La contrainte tangentielle  $\sigma_\theta$  est positive (traction) et est décroissante.

Quand à la répartition de celle-ci on constate que plus on s'éloigne du contour intérieur plus sa répartition devient homogène, jusqu'au contour extérieur où celle-ci devient pratiquement constante.

Ceci nous permet d'affirmer que la contrainte dangereuse se trouve aux coins, sur le contour intérieur de la matrice.

La figure 3 nous montre les différentes répartitions.

r= 2  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .3021293

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-700	882.0571
2	-700	866.7943
3	-700	845.6448
4	-700	827.0429
5	-700	814.3896
6	-700	808.1693
7	-700	808.1693
8	-700	814.3896
9	-700	827.0429
10	-700	845.6449
11	-700	866.7944
12	-700	882.0574

r= 4  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .2999807

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-700	868.7808
2	-700	858.3838
3	-700	843.1136
4	-700	828.7768
5	-700	818.496
6	-700	813.2748
7	-700	813.2748
8	-700	818.496
9	-700	828.7768
10	-700	843.1136
11	-700	858.3838
12	-700	868.7809



r= 2  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON  $R_0 = .8$

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-39.52899	180.2702
2	-39.54051	180.2666
3	-39.55969	180.2593
4	-39.58039	180.2489
5	-39.59622	180.2371
6	-39.60295	180.2271
7	-39.59952	180.2224
8	-39.58795	180.226
9	-39.57211	180.2377
10	-39.55628	180.2546
11	-39.54394	180.2712
12	-39.53723	180.2813

r= 2  
P1= 700  
P2= 0  
SUR LE CONTOUR DE RAYON  $R_0 = 1$

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	140.5235
2	0	140.5697
3	0	140.6477
4	0	140.7338
5	0	140.8028
6	0	140.8362
7	0	140.8272
8	0	140.781
9	0	140.712
10	0	140.6387
11	0	140.5787
12	0	140.5453

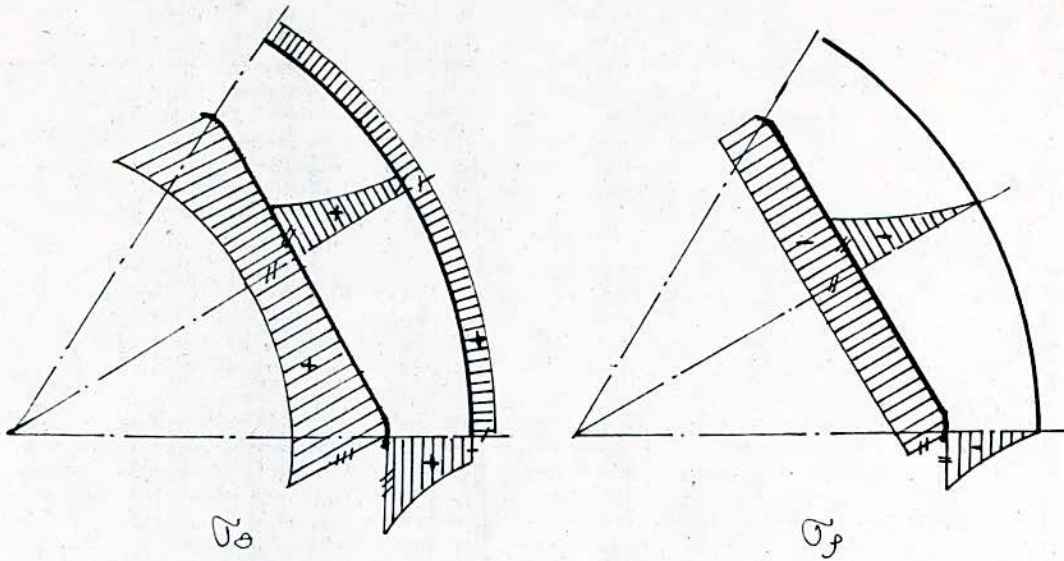


figure - 3 .

### V.3 Matrice précontrainte passive

dans ce cas la matrice travaille sous la pression de serrage du premier anneau et sans pression intérieure. Les résultats nous ont permis de faire les constatations suivantes :

- La forme de la répartition des contraintes normales a changé, mais la nature reste toujours la même.
- La répartition des contraintes tangentielles n'a pas changé mais la nature a changé. (compression).

Ceci nous permet de voir le rôle de l'anneau de précontrainte, qui est de créer une compression de telle manière que lorsqu'on introduit la pression intérieure on ne risque pas de dépasser  $\sigma_{adm}$ . (voir figure 4).



r= 2  
P1= 0  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .3021293

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	0	-967.2232
2	0	-886.1355
3	0	-773.7738
4	0	-674.9462
5	0	-607.7227
6	0	-574.6759
7	0	-574.6759
8	0	-607.7228
9	0	-674.9464
10	0	-773.7741
11	0	-886.1362
12	0	-967.2242

r= 2  
P1= 0  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .5

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-231.7722	-525.1108
2	-233.0523	-521.2525
3	-235.2555	-514.6246
4	-237.7828	-507.0528
5	-239.9694	-500.552
6	-241.256	-496.7972
7	-241.3123	-496.7409
8	-240.1102	-500.411
9	-237.9399	-506.8954
10	-235.3608	-514.5193
11	-233.0769	-521.2281
12	-231.7441	-525.1393

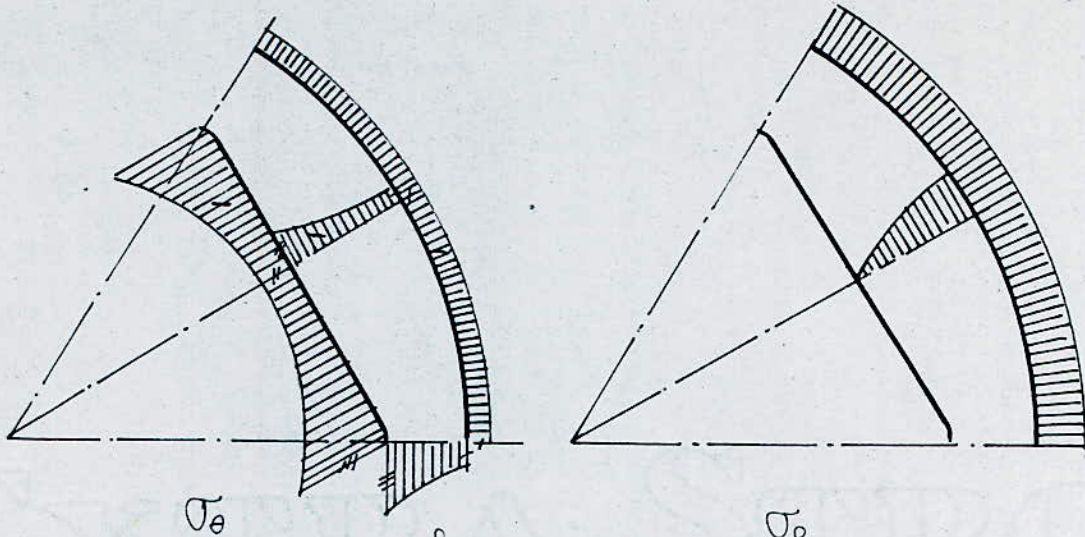
r= 2  
P1= 0  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .8

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-320.563	-427.159
2	-320.4626	-427.1789
3	-320.2924	-427.2085
4	-320.1039	-427.232
5	-319.9514	-427.2378
6	-319.8762	-427.2238
7	-319.8943	-427.1992
8	-319.9951	-427.1786
9	-320.1474	-427.1729
10	-320.3104	-427.1839
11	-320.4445	-427.2035
12	-320.5198	-427.2178

r= 2  
P1= 0  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= 1

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-339.4711	-407.095
2	-339.4711	-407.3402
3	-339.4711	-407.7545
4	-339.4711	-408.2113
5	-339.4711	-408.5776
6	-339.4711	-408.7553
7	-339.4711	-408.7073
8	-339.4711	-408.462
9	-339.4711	-408.0956
10	-339.4711	-407.7064
11	-339.4711	-407.3881
12	-339.4711	-407.2106

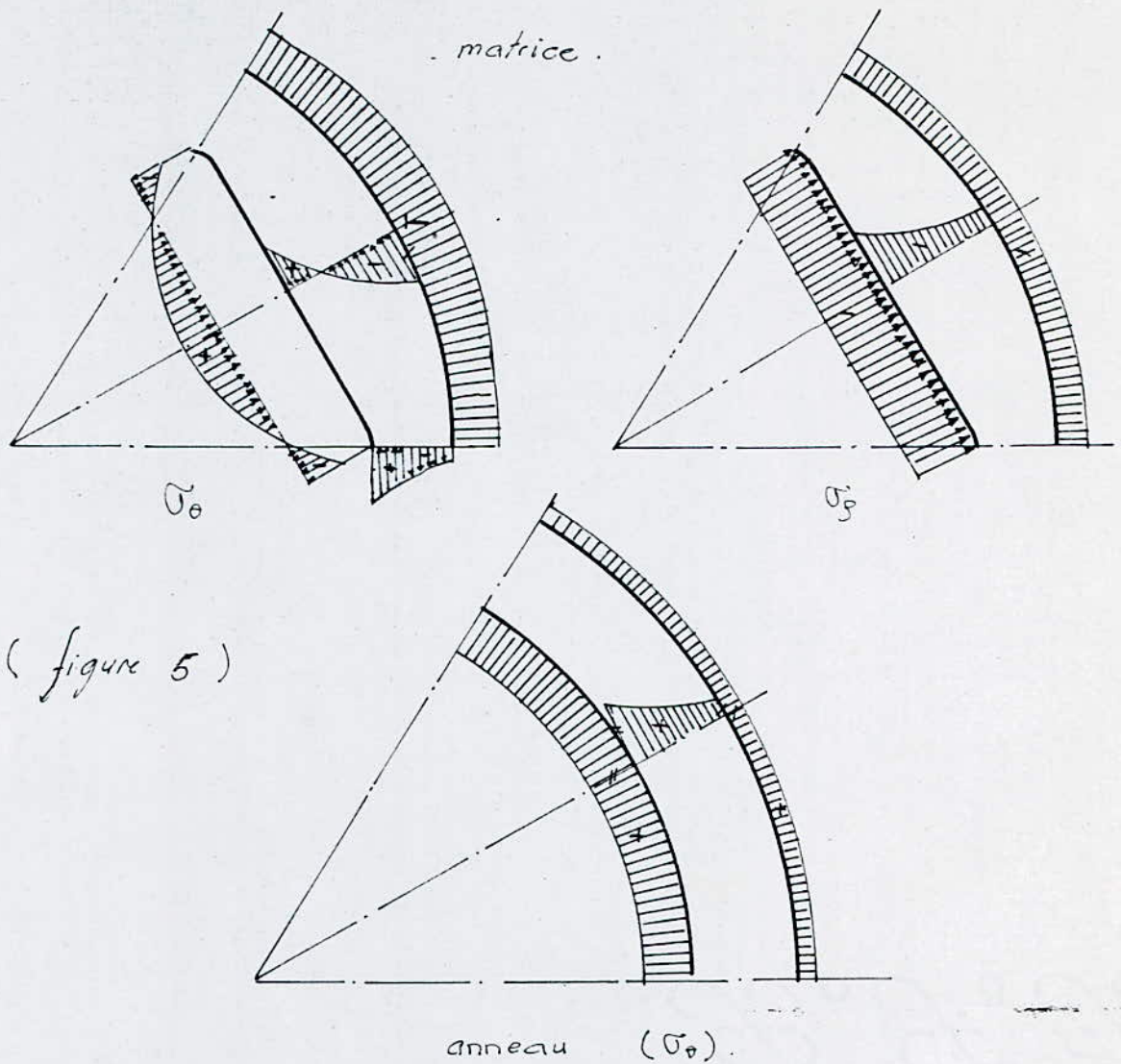




$\sigma_0$

fig. 4.

$\sigma_p$



( figure 5 )

- . On remarque que la contrainte tangentielle sur le contour extérieur de la matrice est maximale au milieu.
  - . La répartition des contraintes dans l'anneau de précontrainte reste inchangée par rapport à celle des matrices cylindriques. Ceci est tout à fait évident puisque la pression intérieure de l'anneau est constante, et donc l'étude des anneaux déjà faite suffira.
- l'importance de la contrainte tangentielle sur le contour
- La figure 5 montre la représentation des contraintes sur les différents contours.



interieur de l'anneau, nous indique s'il faut utiliser un deuxième anneau ou non.

On signale aussi que la superposition des resultats precedente terme a terme donne le resultats actuel.

Nota :

L'etude d'une matrice doublement contournee donne les meme resultats que celle d'une matrice simplement contournee (comme ce qu'on vient de voir), donc il n'est pas necessaire d'etudier ce cas.

La difference entre les deux cas reste au niveau des anneaux de precontraintes, mais comme on a déjà étudié la repartition des contraintes dans les anneaux au chapitre I, ceci nous permet d'éviter la répétition de cette étude.

r= 2  
P1= 700  
P2= 339.471  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .3021293

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-700	-85.16614
2	-700	-19.34131
3	-700	71.8711
4	-700	152.0966
5	-700	206.6669
6	-700	233.4933
7	-700	233.4934
8	-700	206.6667
9	-700	152.0965
10	-700	71.87073
11	-700	-19.3418
12	-700	-85.16693

r= 2  
P1= 700  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON Ro= .5

	SIGMA RO	SIGMA TETA
1	-445.3326	-169.0849
2	-445.9373	-166.3871
3	-446.9799	-161.753
4	-448.1812	-156.4564
5	-449.2291	-151.9066
6	-449.8573	-149.2747
7	-449.9029	-149.2291
8	-449.3433	-151.7922
9	-448.3086	-156.329
10	-447.0655	-161.6673
11	-445.9574	-166.3673
12	-445.3101	-169.1077



r= 2  
P1= 0  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= .8

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-320.563	-427.159
2	-320.4626	-427.1789
3	-320.2924	-427.2085
4	-320.1039	-427.232
5	-319.9514	-427.2378
6	-319.8762	-427.2238
7	-319.8943	-427.1992
8	-319.9951	-427.1786
9	-320.1474	-427.1729
10	-320.3104	-427.1839
11	-320.4445	-427.2035
12	-320.5198	-427.2178

r= 2  
P1= 0  
P2= 339.4711  
SUR LE CONTOUR DE RAYON R<sub>0</sub>= 1

	SIGMA R0	SIGMA TETA
1	-339.4711	-407.095
2	-339.4711	-407.3402
3	-339.4711	-407.7545
4	-339.4711	-408.2113
5	-339.4711	-408.5776
6	-339.4711	-408.7553
7	-339.4711	-408.7073
8	-339.4711	-408.462
9	-339.4711	-408.0956
10	-339.4711	-407.7064
11	-339.4711	-407.3881
12	-339.4711	-407.2106

## CONCLUSION

Cette étude nous permet de tirer les conclusions suivantes.

- La contrainte normale est toujours une contrainte de compression, par conséquent elle ne présente aucun danger pour la matrice
- dans le cas d'une matrice polygonale, sans précontraintes et travaillant sous une pression intérieure  $P_1$ , la contrainte tangentielle maximale se situe aux coins, sur le contour intérieur.

Cette contrainte ne doit en aucun cas dépasser la contrainte admissible, dans le cas où elle s'approche de celle-ci on introduit le premier anneau de précontraintes, celui-ci agit sur la matrice en créant une pression extérieure " $P_2$ " induite par serrage. Il diminue de l'importance des contraintes à l'intérieur de la matrice, mais la pression  $P_2$  agit sur l'anneau comme une pression intérieure, donc provoque à l'intérieur de celui-ci une contrainte  $\sigma_0$  de traction.

Dans le cas des pressions " $P_1$ " grandes (écrouissage des aciers), la pression  $P_2$  doit être importante aussi pour



Equilibrer l'effet de  $P_i$ . Par conséquent la contrainte induite à l'intérieur de l'anneau risque d'atteindre la contrainte admissible de celui-ci. Dans ce cas on prévoit un deuxième anneau qui contourne le premier par frottement. Le serrage entre les deux anneaux doit être choisis d'une façon judicieuse, il doit vérifier les deux conditions suivantes:

- a. Diminuer l'effet de la contrainte tangentielle à l'intérieur du premier anneau pour éviter la rupture de ce dernier.
- b. La contrainte à l'intérieur du deuxième anneau ne doit pas ~~atteindre~~ sa contrainte admissible.

# ANNEXE

## 1 Calcul de la pression extérieure

La Pression induite par frottement entre matrice et anneau ou entre deux anneaux est donnée par la formule suivante:

$$P_e = - 2 \frac{\delta_1}{1 + \chi}$$

où  $\delta_1 = 2 \cdot G \cdot \delta'_1 \cdot P^{-1}$  et  $\delta'_1 = R - R_a$ .

avec :

$R$  : rayon extérieur de la matrice

$R_a$  : rayon intérieur de la matrice.

$P$  : rayon commun entre matrice et anneau.

$G$  : module de Young

$$\chi = \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G} ; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$P_e = - 4 \cdot \frac{\frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \delta'_1 \cdot P^{-1}}{1 + \frac{\lambda + 3G}{\lambda + G}}$$



## 2 Dimensions des anneaux

Nous avons vu au chapitre I comment introduire dans le programme les dimensions d'une matrice cylindrique, l'essentiel est que la matrice cylindrique est une matrice hexagonale dont le rayon intérieur est  $r = a\sqrt{3}/2$  avec  $a$ : côté de l'hexagone.

Nous allons appliquer la même chose pour le premier anneau donc le premier anneau est une matrice cylindrique dont le rayon intérieur est égal au rayon extérieur de la matrice, soit  $r = 30 \text{ mm}$  or on sait que

$$r = a\sqrt{3}/2 \quad \text{donc} \quad a = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 30}{\sqrt{3}} = 34,641 \text{ mm}$$

On prendra un rayon extérieur de  $R_1 = 50 \text{ mm}$ .

On applique la même chose au deuxième anneau avec le rayon intérieur  $r = 50 \text{ mm}$ ,  $a = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 57,735 \text{ mm}$  et le rayon extérieur vaut:  $R_2 = 70 \text{ mm}$ .

$$P_0 = -4 \cdot \frac{2(1+\nu) \cdot \delta'_1 \cdot \rho^{-1}}{1 + 3 \cdot \frac{E}{2(1+\nu)}} = \frac{\frac{2E\delta'_1 \cdot \rho^{-1}}{1+\nu}}{\frac{4A(1+\nu) + 4E}{2A(1+\nu) + E}}$$

$$4[A(1+\nu) + E] = 4 \left[ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot (1+\nu) + E \right]$$

$$= \frac{4E(1-\nu)}{1-2\nu}$$

$$2A(1+\nu) + E = \frac{2E\nu}{1-2\nu} + E = \frac{E}{1-2\nu}$$

$$\text{d'où } P_e = \frac{2E\delta'_1 \cdot \rho^{-1}}{1+\nu} \cdot \frac{E}{1-2\nu} \cdot \frac{1-2\nu}{4E(1-\nu)}$$

$$= \frac{E\delta'_1}{2(1-\nu^2) \cdot \rho}$$

$$\delta'_1 = \frac{2P_e(1-\nu^2) \cdot \rho}{E}$$

$\delta'_1$  est le serrage c'est à dire la différence des rayons intérieur de l'anneau et extérieur de la matrice.



```

5 REM *****
10 REM * FFFFF IIIII L AAAAA GGGGG EEEEE *
15 REM * F I L A A G G E *
17 REM * F I L A A G E *
20 REM * FFFF I L AAAAA G GGG EEE *
25 REM * F I L A A G G G E *
30 REM * F I L A A G G E *
32 REM * F IIIII LLLLLL A A GGGGG EEEEE *
35 REM *****
40 REM ***** SUJET *****
45 REM =====
50 REM CALCUL DE RESISTANCE DES MATRICES DE FILAGE
55 REM A FROID A CONTENEUR NON CYLINDRIQUE DOUBLEMENT
60 REM CONTOURNEES PAR LES ANNEAUX DE PRECONTRAINTES
65 REM =====
70 REM ***** RESUME *****
75 REM =====
80 REM CETTE ETUDE CONSISTE A ELABORER UN PROGRAMME QUI EVALUE
85 REM L'ETAT DE CONTRAINTE EN N'IMPORTE QUEL POINT D'UNE
90 REM MATRICE DE FILAGE A FROID A CONTENEUR POLYGONAL.
95 REM CE PROGRAMME S'INSPIRE DE LA RESOLUTION DES EQUATION DE
100 REM L'ELASTICITE PLANE PAR LA METHODE DE MUSKHELISHVILLI
110 REM APPLIQUE A UN DOMAINE DOUBLEMENT CONNEXE.
120 REM =====
130 REM ***** DIMENSIONS DE LA MATRICE *****
140 REM =====
150 INPUT"COTE DU POLYGONE a= ";A0
160 INPUT"RAYON DE COURBURE r= ";R0
170 INPUT"RAYON EXTERIEUR R= ";R
180 INPUT"NOMBRE D'AXES DE SYMETRIE q= ";Q
190 PI=3.14159265359#
200 SA=PI/2/Q
210 L=A0/(2*SIN(SA))-R0/COS(SA)
220 RA=L/R0
230 BE=ATN(R0*SIN(SA)/(L+R0*COS(SA)))
240 MMIN=PI/Q/BE+1
250 PRINT"LE NOMBRE DE POINTS m DOIT ETRE >= ";INT(MMIN+1)
260 INPUT"NOMBRE DE POINTS CONSIDERES m";M:PRINT
270 REM =====
280 REM ===== CALCUL DES POINTS DE LA MATRICE =====
285 REM =====
290 DIM XI(M),YI(M),XJ(M),YJ(M),CK(60),CMK(60)
300 PRINT;TAB(5);"XI(I)";TAB(20);"YI(I)";TAB(35);"XJ(I)";
310 PRINT;TAB(50);"YJ(I)":PRINT
320 NUM=0:DEN=0
330 FOR I=1 TO M
340 AL=PI*(2*I-1)/2/Q/M
350 IF AL>BE THEN 470 ELSE 510
360 IF AL<(PI/Q-BE) THEN 480 ELSE 550
480 XI(I)=(A0/(2*SIN(SA))*TAN(PI/2-SA))/(TAN(PI/2-SA)+TAN(AL))
490 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
500 GOTO 620
510 GA=ATN(RA*SIN(AL)/SQR(1-(RA*SIN(AL))^2)

```



```

520 XI(I)=R0*COS(AL)*(COS(GA)+RA*COS(AL))
530 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
540 GOTO 620
550 IF AL=PI/Q THEN 600 ELSE 560
560 GA=ATN(RA*SIN(PI/Q-AL)/SQR(1-(RA*SIN(PI/Q-AL))^2))
570 XI(I)=R0*SIN(PI/Q-AL+GA)*COS(AL)/SIN(PI/Q-AL)
580 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
590 GOTO 620
600 XI(I)=(L+R0)*COS(AL)
610 YI(I)=(L+R0)*SIN(AL)
620 XJ(I)=R*COS(AL)
630 YJ(I)=R*SIN(AL)
650 PRINT I;TAB(5);XI(I);TAB(20);YI(I);TAB(35);XJ(I);TAB(50);
655 PRINT YJ(I)
658 REM =====
670 REM ***** RAYON DU CERCLE INTERIEUR DE L'ANNEAU *****
672 REM =====
690 S=S+XI(I)*COS(PI*(2*I-1)/2/Q/M)+YI(I)*SIN(PI*(2*I-1)/2/Q/M)
700 P=P+XJ(I)*COS(PI*(2*I-1)/2/Q/M)+YJ(I)*SIN(PI*(2*I-1)/2/Q/M)
710 NEXT I
750 PRINT:PRINT
760 RH1=S/P
770 PRINT"Rho1= ";S;"/";P;"=";RH1
780 PRINT:PRINT
790 REM =====
800 REM *** COEFFICIENTS DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION ***
810 REM =====
820 PRINT"CALCUL EN COURS"
830 PRINT;TAB(20);"CK(J)";TAB(45);"CMK(J)":PRINT
840 FOR J=1 TO (2*M-1)*Q+1 STEP Q
850 IF J>30 THEN 1050 ELSE 860
860 S1=0:S2=0:S3=0:S4=0
870 FOR I=1 TO M
880 P1=COS(PI*J*(2*I-1)/2/Q/M)
890 P2=SIN(PI*J*(2*I-1)/2/Q/M)
900 S1=S1+XJ(I)*P1+YJ(I)*P2
910 S2=S2+XI(I)*P1+YI(I)*P2
920 P3=COS(PI*(J+Q-2)*(2*I-1)/2/Q/M)
930 P4=SIN(PI*(J+Q-2)*(2*I-1)/2/Q/M)
940 S3=S3+XI(I)*P3-YI(I)*P4
950 S4=S4+XJ(I)*P3-YJ(I)*P4
960 NEXT I
980 CK(J)=S1-S2*RH1^(2*Q*M-J)
985 CK(J)=CK(J)/M
986 N=J+Q-2
987 C=2*Q*M
990 CMK(N)=(S3*RH1^N-S4*RH1^C)
992 CMK(N)=CMK(N)/M
1030 NEXT J
1050 FOR H=1 TO 30 STEP Q
1060 PRINT H;TAB(15);CK(H);TAB(35);(H+Q-2);TAB(40);CMK(H+Q-2)
1070 NEXT H
1080 PRINT:PRINT
1090 REM =====
1100 REM ***** VERIFICATION DE LA FONCTION *****

```



```

1110 REM =====
1130 PRINT"VERIFICATION":PRINT
1140 PRINT;TAB(8);"ZXI";TAB(25);"ZYI";TAB(40);"ZXJ";
1145 PRINT TAB(55);"ZYJ":PRINT
1150 FOR I=1 TO M
1160 AL=PI/Q/(M-1)*(I-1)
1170 ZXI=0:ZYI=0:ZXJ=0:ZYJ=0
1180 FOR H=1 TO M+1 STEP Q
1190 V=Q+H-2
1200 ZXI=ZXI+CK(H)*RH1^H*COS(H*AL)+CMK(V)*COS(V*AL)/RH1^V
1210 ZYI=ZYI+CK(H)*RH1^H*SIN(H*AL)-CMK(V)*SIN(V*AL)/RH1^V
1220 ZXJ=ZXJ+CK(H)*COS(H*AL)+CMK(V)*COS(V*AL)
1230 ZYJ=ZYJ+CK(H)*SIN(H*AL)-CMK(V)*SIN(V*AL)
1240 NEXT H
1250 PRINT I;TAB(5);ZXI;TAB(20);ZYI;TAB(35);ZXJ;TAB(50);ZYJ
1260 NEXT I
1270 PRINT:PRINT
1560 REM =====
1570 REM ***** INTRODUCTION DE LA PRESSION INTERIEURE *****
1580 REM =====
1590 INPUT"DONNER LA PRESSION INTRIEURE EN MPa P1= ";PT
1600 GOSUB 3700
1800 PRINT:PRINT"CALCUL EN COURS":PRINT
1820 GOTO 3220
1830 REM =====
1840 REM *** SOUS PROGRAMME DE RESOLUTION DU SYSTEM:A*E=F ***
1850 REM ***** ALGORITHME DE GAUSS *****
1860 REM =====
2210 INPUT"N= ";N
2220 DIM A(N,N),F(N),E(N)
2230 FOR I=1 TO N
2240 FOR J=1 TO N
2250 INPUT"A(I,J)= ";A(I,J)
2260 NEXT J
2270 INPUT"F(I)= ";F(I)
2280 NEXT
2300 FOR H=N TO 2 STEP -1
2310 FOR I=H-1 TO 1 STEP -1
2320 IF A(H,H) >0 THEN 2440
2330 FOR L=H-1 TO 1 STEP -1
2340 IF A(L,H) >0 THEN 2355
2350 NEXT L
2355 PRINT"SYSTEM IRREGULIER"
2360 FOR W=1 TO N
2370 G(W)=A(L,W)
2380 A(L,W)=A(H,W)
2390 A(H,W)=G(W)
2400 NEXT W
2410 Q=F(L)
2420 F(L)=F(H)
2430 F(H)=0
2440 F(I)=F(I)-A(I,H)/A(H,H)*F(H)
2450 FOR J=1 TO H
2460 A(I,J)=A(I,J)-A(I,H)/A(H,H)*A(H,J)
2470 NEXT J

```

```

2480 NEXT I
2490 NEXT H
2500 D=1
2510 FOR I=1 TO N
2520 D=D*A(I,I)
2530 NEXT I
2540 PRINT"LE DETERMINANT EST:D= ";D
2545 PRINT
2550 IF A(N,N)=0 THEN 2710
2555 E(N)=F(N)/A(N,N)
2570 E(1)=F(1)/A(1,1)
2580 FOR I=2 TO N
2590 S=0
2600 FOR K=1 TO I-1
2610 S=S+A(I,K)*E(K)
2620 NEXT K
2630 E(I)=(F(I)-S)/A(I,I)
2640 NEXT I
2649 RETURN
2650 FOR J=1 TO N
2660 PRINT "E(";J;")= ";E(J)
2670 NEXT J
2730 STOP
2740 REM =====
2750 REM *** CALCUL DES COEFFICIENTS DE LA FONCTION (PHI) ***
2760 REM =====
3220 N=7
3240 FOR I=1 TO N
3250 FOR J=1 TO N
3260 A(I,J)=0:F(I)=0
3270 NEXT J,I
3290 FOR V=-3*Q TO 3*Q STEP Q
3295 S1=0
3300 FOR K=1-3*Q TO 1+3*Q STEP Q
3310 I=4+V/Q;J=4+(K-1)/Q
3320 S=V+K;D=K-V
3330 IF S < 0 THEN C=CMK(ABS(S))
3340 IF S > 0 THEN C=CK(S)
3350 IF D < 0 THEN F=CMK(ABS(D))
3360 IF D > 0 THEN F=CK(D)
3370 IF S > (1+3*Q) THEN C=0
3380 IF S < (1-3*Q) THEN C=0
3390 IF D > (1+3*Q) THEN F=0
3400 IF D < (1-3*Q) THEN F=0
3410 A(I,J)=(1-RH1^(2*K))*S*C+(1-RH1^(2*D))*K*F
3431 G=V-K
3432 IF G > 0 THEN H=CMK(G)
3433 IF G < 0 THEN H=CK(ABS(G))
3434 IF G > (1+3*Q) THEN H=0
3435 IF G < (1-3*Q) THEN H=0
3436 BK=-PE*H
3437 AK=-PT*H
3440 S1=S1+(BK-AK*RH1^2)*C*K
3450 NEXT K
3455 F(I)=S1

```



```

3460 NEXT V
3470 GOSUB 2300
3486 REM =====
3487 REM ***** CALCUL DES CONTRAINTES en MPa *****
3488 REM =====
3490 DIM SIG(M),SR(M)
3500 FOR I=1 TO M
3505 AL=PI/Q/(M-1)*(I-1)
3510 S1=0:S2=0:S3=0:S4=0:S5=0:S6=0:P1=0:P2=0:P3=0:P4=0:P5=0:P6=0
3515 FOR K=(1-3*Q) TO (1+3*Q) STEP Q
3520 J=4+(K-1)/Q
3525 IF K 0 THEN C=CMK(ABS(K)) ELSE C=CK(K)
3530 S1=S1+K*E(J)*RO^(K-1)*COS((K-1)*AL)
3535 P1=P1+K*E(J)*RO^(K-1)*SIN((K-1)*AL)
3540 S2=S2+K*C*RO^(K-1)*COS((K-1)*AL)
3545 P2=P2+K*C*RO^(K-1)*SIN((K-1)*AL)
3550 S3=S3+K*C*COS((K-1)*AL)
3555 P3=P3+K*C*SIN((K-1)*AL)
3560 S4=S4+K*E(J)*COS((K-1)*AL)
3565 P4=P4+K*E(J)*SIN((K-1)*AL)
3570 S5=S5+K*(K-1)*C*RO^(K-2)*COS((K-2)*AL)
3575 P5=P5+K*(K-1)*C*RO^(K-2)*SIN((K-2)*AL)
3580 S6=S6+K*(K-1)*E(J)*RO^(K-2)*COS((K-2)*AL)
3585 P6=P6+K*(K-1)*E(J)*RO^(K-2)*SIN((K-2)*AL)
3590 NEXT K
3595 R1=((RO^2*S2-S3)*S1+(RO^2*P2-P3)*P1)/((S2^2+P2^2)*RO^2)
3600 R2=((RO^2*S1-S4)*S2+(RO^2*P1-P4)*P2)/((S2^2+P2^2)*RO^2)
3610 R3=-PE*(S2*S3+P2*P3)/(RO^2*(S2^2+P2^2))
3615 R4=(COS(2*AL)*(S2-S3)+SIN(2*AL)*(P2-P3))/(S2^2+P2^2)
3620 I4=(SIN(2*AL)*(S2-S3)-COS(2*AL)*(P2-P3))/(S2^2+P2^2)
3625 R5=S6-(S1*S5+S2*S1*P5*P2-S2*P1*P5+S5*P1*P2)/(S2^2+P2^2)
3630 I5=P6-(P1*P2*P5+P1*S2*S5+P5*S1*S2-P2*S1*S5)/(S2^2+P2^2)
3635 SR(I)=R1+R2+R3-R4*R5+I4*I5
3640 SIG(I)=4*(S1*S2+P1*P2)/(S2^2+P2^2)-SR(I)
3645 NEXT I
3650 PRINT TAB(10);"SIGMA RO";TAB(40);"SIGMA TETA":PRINT:PRINT
3655 FOR I=1 TO M
3660 PRINT TAB(10);SR(I);TAB(38);SIG(I)
3670 NEXT I
3680 END
3700 REM =====
3710 REM ** SOUS PROG INTRODUCTION DE LA PRESSION EXTERIEURE **
3720 REM =====
3730 PRINT"Donner les modules d'elasticite longitudinal"
3740 INPUT"E1= ";E1:INPUT"E2= ";E2
3750 PRINT"Donner les coefficients de POISSON"
3760 INPUT"NU1= ";NU1:INPUT"NU2= ";NU2
3770 E=2*((1-NU1^2)/E1+(1-NU2^2)/E2)^-1
3780 INPUT"Donner la valeur du serrage S= ";S
3790 PE=E*S/(2*R*(1-NU1^2))
3800 PRINT:PRINT TAB(5);"LA PRESSION EXTERIEURE P2= ";PE
3810 RETURN

```

## BIBLIOGRAPHIE

1. Problèmes de Résistance des matériaux  
I. Mirosliobov S. Engalytchev .Ed. Mir 1977
2. Généralisation du calcul de résistance des matrices  
de filage à froid (Projet fin d'étude)  
A. Nekbil . Promotion . Janv. 1986
3. Résolution des Problèmes d'élasticité plane sur  
ordinateur analogique et digital  
A.G Ugodscikov A.E Szttyepanov  
~~Traduit~~ en hongrois Par E Palne Budapest. 78
4. Résistance des matériaux  
Series schaum.
5. Encyclopedie des sciences industrielles  
Mécanique généralités transport.



