الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية 12/86

République Algérienne Démocratique et Populaire

«O»

وزارة التعليم والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique

«O»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE 1ex

«O»

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Calcul de Resistance des Matrices Precontraintes de Filage à Froid à Conteneur Hexagonal

Proposé et dirigé par :
ELEOD Andras
Maître assistant à l'E.N.P.

Etudié par :
SATOR Toufik

PROMOTION JANVIER 1986

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH - ALGER

الجمهــورية الجزائــرية الديمقــراطية الشعبيــة
République Algérienne Démocratique et Populaire
«o»

وزارة التعليــم والبــحــث العلمــي
Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique
«o»

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
«o»

DEPARTEMENT : GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Calcul de Resistance des Matrices Precontraintes de Filage a Froid Conteneur Hexagonal

Proposé et dirigé par :
ELEOD Audras
Maître asistant à l'E.N.P.

Etudié par :
SATOR Toufik

PROMOTION JANVIER 1986

E.N.P. 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH - ALGER

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

mon père et à ma mère qui m'ont tant apporté et que je ne remercierai jamais assez

mes frères et à ma sœur

à toute ma famille

à tous mes amis

REMERCIEMENTS

Je remercie toutes les personnes qui ont contribué à l'élaboration de cette etude.

En particulier, je remercie Monsieur ELEOD Andras dont l'aide m'a été trés précieuse

Je remercie aussi toutes les personnes du corps enseignant qui ont participé à ma formation.

Je remercie Abdelkader pour les services qu'il m'a rendu

Merci à tous mes amis

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR — وزارة التعليم العالي

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE — المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

Département Génie mécanique — فرع الهندسة الميكانيكية

Promoteur ELEOD Andras — الموجه إيليود أندراس

Elève ingénieur SATOR Toufik — الطالب المهندس ساطور توفيق

الموضوع : حساب مقاومة قالب ذي ثقب مسدس الشكل لقولبة المعادن يعمل على البارد معرض لضغط خارجي.

الملخص : نستهدف في هذه الدراسة حساب الإجهادات المؤثرة على الحافة الداخلية المسدسة الشكل لقالب يعمل على البارد معرض لضغط خارجي.
يتم هذا بحل معادلات المرونة في حالة الوضع الإجهادي المستوي، بطريقة موسخيليشفيلي حيث نستنتج الدالة الجهدية المركبة التي تعين الإجهادات.
تدرس ثلاثة نماذج من التأثيرات : ضغط خارجي معدوم، ضغط داخلي ثابت، ضغط خارجي ثابت، ضغط داخلي ثابت، ثم متغير.
الحساب يتم على ناظمة آلية مبرمجة بلغة البازيك.

Sujet : Calcul de résistance des matrices précontraintes du filage à froid à conteneur héxagonal.

Résumé : Dans cette étude, nous nous proposons de calculer les contraintes sur le contour interieur héxagonal d'une matrice précontrainte de filage à froid.

Le calcul se fait aprés résolution des équations de l'élasticité plane par la méthode de "MUSKHELISHVILI" dont on déduit la fonction potentiel complexe définissant les contraintes.

Trois modèles de sollicitations seront étudiés : Pression exterieure nulle, pression interieure constante. Pression ext. constante, pression int. const., puis variable.

Le calcul se fait sur micro-ordinateur programmé en langage Basic.

Subject : Résistances calculation for extrusion of a prestressed matrix with an héxagonal hole.

Abstract : In this study, we prepound the calculation of the constraints in a héxagonal internal contour of a cold ëxtrusion matrix subject to a prestress.

The calculation is made after résolution of the plane élasticity équations with the théory of "MUSKHELISHVILI" so we need résolve a system of linéar équations to détermine the potentiel complex function which défine constraint.

Three paterns of sollicitations will be studied : zéro external pressure, internal pressure constant. External pressure constant, internal pressure constant and then variable.

The calculation is carried on by computer programmed in Basic.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le filage est un procédé de façonnage de la matière qui permet la fabrication des moyennes et grandes séries de pièces, à des coûts relativement bas, avec un gain de temps, une diminution du nombre des opérateurs par rapport aux procédés classiques (Fraisage, tournage,...).

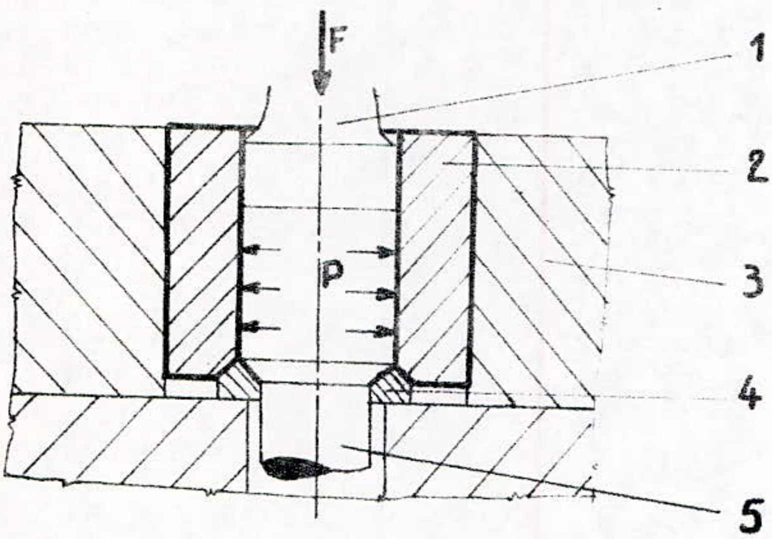
Du point de vue mécanique, les pièces obtenues sont plus homogènes, plus résistantes du fait de la régularité du fibrage, présentent un bon état de surface, ce qui évite les finitions onéreuses, et ont des propriétés mécaniques plus favorables (Ecrouissage des surfaces, dureté superficielle).

Le filage est un procédé dit de déformation volumétrique, et ayant comme principes de base la déformation plastique de la matière, avec conservation du volume initial.

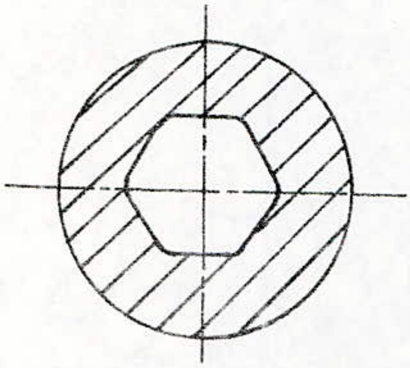
La déscription du procédé se résume ainsi :

Une barre cylindrique est introduite dans une pièce ayant une forme géométrique détèrminée _ En l'occurence un cylindre percé d'un trou héxagonal _ appelée matrice. Elle est alors soumise à une pression générée par la descente d'un poinçon au dessus de la barre . Au fond de la matrice se trouve une autre forme géométrique appelée filière.

Sous l'action de la pression, la matière s'écoule à travers la filière où il se produit une réduction de section, et s'élargit au niveau de la matrice jusqu'à en épouser la forme



1 Poinçon
2 Matrice
3 Frette
4 Filière
5 Pièce



Une telle étude se justifie par la néssécité de détèrminer les formes et matèriaux constituants la machine à filer (Frette, filière, matrice,...), et pour étudier la forme et la dimension des contraintes en vue de les minimiser, surtout au niveau des angles où il éxiste une concentration des contraintes.

Pour cela, il faudra remplacer les angles par des arrondis.

La pression étant identiquement en hauteur _ vu les symétries de forme et de sollicitation _, il en sera de même pour les contraintes. Nous sommes donc en présence d'un état de contraintes plan.

Il faudra déterminer les contraintes aux endroits où elles sont maximales, c'est à dire sur le contour interieur de la matrice.

Nous utiliserons pour cela les équations de l'élasticité plane, ainsi que la méthode de Muskhelishvili *

La détermination de la précontrainte sera déduite d'une règle empirique (assemblage forcé).

Trois cas de figures seront étudiés :

Premièrement : La pression interieure sera prise constante tandis que la pression exterieure sera nulle.

Deuxiemement : Les pressions interieures et exterieures seront prises constantes et non nulles.

Troisiemement : La pression interieure sera variable et la pression exterieure sera constante.

La variation de la pression interieure sur le contour interieur sera déduite empiriquement en tenant compte des conditions physiques définissant la pression.

* N.I. Muskhelishvili : Physicien_Mathématicien russe. Un de ses grands ouvrages est : " Some basic problèms of the mathématical théory of élasticity ; Fondamental équations, Plane théory of élasticity, torsion and bending.

CHAPITRE I

RAPPEL DE QUELQUES RESULTATS FONDAMENTAUX

I1 EQUATIONS DE L'ELASTICITE PLANE

La théorie de l'élasticité plane est à la base de notre étude, et de ce fait, les équations de l'élasticité plane requièrent une grande importance pour la suite de notre travail.

I1a Equations fondamentales

Il éxiste deux conditions fondamentales dans l'étude de l'élasticité de tout corps. En effet, le volume de la pièce étudieé reste toujours le même. D'autre part, il éxiste un équilibre des contraintes au sein même de la matière (compatibilité)

Ces deux conditions s'écrivent:

1 – Equilibre en volume

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + X_i = 0 \qquad (i,j) = (x,y) \qquad (1)$$

σ_{ij} désigne les contraintes

X_i désigne les composantes des forces de volume.

Dans un état de contraintes plan – Ce qui est notre cas – cette équation s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad & (a) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \quad & (b) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

2 – Equation de compatibilité

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\lambda + 2G}{2(\lambda + G)}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (3)$$

I1b Fonctions d'Airy

Au cours du filage, les déplacements de matière etant assez lent, les accélérations de la masse sont pratiquement nulles, et comme les quantités X et Y sont égales respectivement à $m \cdot a_x$ et $m \cdot a_y$ (a_x et a_y sont les composantes de l'accéleration et m la masse), nous pouvons donc simplifier les équations ci dessus ($X \equiv 0$ et $Y \equiv 0$)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad & (a) \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad & (b) \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \qquad (3')$$

Cela nous permet d'écrire un résultat intéressant des mathématiques qui est :

Les équations ci dessus (2'a) et (2'b) représentent respéctivement la condition nécéssaire et suffisante d'éxistance de deux fonctions $A(x,y)$ et $B(x,y)$ telles que :

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\sigma_y \qquad ; \quad \frac{\partial A}{\partial y}=-\tau_{xy}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=-\tau_{xy} \qquad ; \quad \frac{\partial B}{\partial y}=\sigma_x$$

Nous écrirons alors $\dfrac{\partial A}{\partial y}=\dfrac{\partial B}{\partial x}$ (4)

La condition ci-dessus (4) introduit alors une autre fonction $U(x,y)$ telle que

$$A=\frac{\partial U}{\partial x} \qquad B=\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (5)$$

U est appeleé fonetion potentiel où fonction d'Airy

Cela nous amène à écrire, d'aprés (4) et (5) :

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (a) \quad ; \quad \sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (b)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \quad (c) \qquad (6)$$

En additionnant (6a) et (6b) et en injectant ceci dans (3'), nous obtenons :

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = \nabla^4 U = 0 \qquad (7)$$

($\nabla^4 U = 0$ implique que U est une fonction biharmonique. (Cf aux définitions des fonctions harmoniques et biharmoniques).

La connaissance d'une fonction U qui vérifie les conditions ci-dessus nous permettra de résoudre rapidement les problèmes de l'élasticité plane.

I1c Utilisation des fonctions analytiques des variables complèxes

L'utilisation des variables complèxes nous permet de mieux résoudre notre problème car cela permet de doubler le nombre d'équations

Le laplacien de l'équation (3) s'écrit dans le plan complexe

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \qquad (8)$$

Les équations (2'a) et (2'b) s'écriront :

$$\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = 0 \qquad (a)$$

9

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \qquad (b)$$

Nous aboutissons à un système de deux équations aux dérivées partielles complèxes. Sa résolution permet de tirer directement les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} dans n'importe quel point de la matière (Dans notre cas la matrice).

I1d Intégration des équations (9a) et (9b)

Posons :

$$\sigma_x + \sigma_y = \nabla^2 U = \theta$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = \chi$$

Les équations 9 s'écriront alors :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}} = 0 \qquad (a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \qquad (b) \qquad\qquad 10$$

Les fonctions θ et χ sont toutes deux analytiques.

L'intégration des équations (10 a) et (10 b) donne

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4 \; Re\left[\,\varphi'(z)\,\right] \qquad (a)$$

$$(11)$$

$$\chi = \sigma_y - \sigma_x + 2i\,\tau_{xy} = 2\left(\bar{z}\,.\,\varphi''(z) + \psi'(z)\right) \qquad (b)$$

(Voir démonstration P.11 [7])

$\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont deux fonctions analytiques. La résolution des équations (11) revient aussi à résoudre (9). Donc la résolution revient à trouver deux fonctions analytiques φ et ψ qui permettront de trouver directement les contraintes en les tirant des équations (9).

Les fonctions φ et ψ sont appelées fonctions potentiels complexes.

De (10), nous tirons

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \, Re\left(\Theta - X\right) \qquad (a)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2} \, Re\left(\Theta + X\right) \qquad (b) \qquad\qquad (12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \, Im\left(X\right) \qquad (c)$$

En remplaçant Θ et X par leur expression en (11), nous obtenons les équations donnant directement les contraintes σ_x, σ_y et τ_{xy} en fonction des fonctions potentiels complèxes

CHAPITRE II

PRELIMINAIRES A LA METHODE DE MUSKHELISHVILI

II 1 GENERALITES

Notre matrice etant limitées par deux contours dont l'un est à l'interieur de l'autre, nous avons affaire à un domaine doublement connexe.

La connexité est la limitation du domaine d'étude par un certain nombre de frontières fermées et différentes.

L'ordre de connexité est le nombre de ces frontières.

II 2 QUELQUES DEFINITIONS

II 2 a Les transformations conformes

Nous abordons ici une partie trés importante de cette étude. En effet, elle permet de simplifier énormement toute la compréhension du sujet.

Les transformations conformes sont trés usitées en mathématiques et en physique où elles permettent la transformation de domaines trés compliqués en domaines plus simples par l'intermédiaire de l'utilisation d'une fonction mathématique.

Ainsi donc, Soit D le domaine étudié (mais dont l'étude est difficile) et soit D' le domaine transformé (dont l'étude est plus abordable). La transformation conforme permet de décrire complètement le domaine D et de le transformer en domaine D' par la fonction f telle que $\omega = f(z)$.

Dans ce cas, ω décrit entièrement D' lorsque z décrit entièrement D

II 2 b Théorèmes

Il éxiste une seule représentation conforme $\omega = f(z)$ d'un domaine D sur un domaine D' qui fait correspondre à trois points frontières z_k du domaine D, trois point frontières ω_k du domaine D'. Les points z_k et ω_k sont donnés arbitrairement, mais en conservant l'ordre de succéssion lorsqu'on décrit les deux frontières *

Tout domaine doublement connexe peut être transformé en une couronne de rayons r_1 et r_2 avec $r_1 \leq |\omega| \leq r_2$. La connaissance de l'un des deux implique la définition d'une maniére unique de l'autre par le domaine étudié. (**)

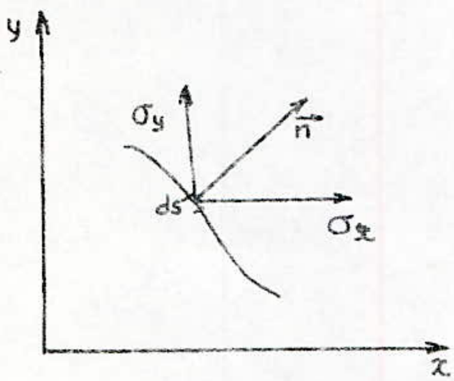
*[4] p. 161 ** [6] P.15

Lors de la transformation d'un polygone régulier en cercle, aux sommets du polygone correspondent des points divisant la circonférence du cercle en parties égales (*)

II 2 c Lien entre les transformations conforme et notre étude

Les transformations conformes nous permettront de travailler sur un domaine D' (anneau) et d'y déterminer les contraintes. Le domaine D' est plus facilement abordable que le domaine D.

II 3 SOMME DES EFFORTS SUR UN CONTOUR



Soit un domaine D sur lequel est définie une coordonnée curviligne S. Le domaine est soumis à une force répartie sur tout le contour. La somme des efforts sur S sera égale à :

$$X_1 + i Y_1 = \int_S (X_n + i Y_n)\, dS$$

$$\ell = \frac{dy}{dS} \qquad ; \quad m = -\frac{dx}{dS}$$

* [5] p.165

$$X_n = \sigma_x . l + \tau_{xy} . m$$

$$Y_n = \tau_{xy} . l + \sigma_y . m$$

En remplaçant x et y par z et $\bar{z}$ et σ_x, σ_y et τ_{xy} par leur éxpression en (12 a), (12 b) et (12c). En remplaçant θ et χ par les formules (11 a) et (11 b), nous en déduisons :

$$\varphi(z) + z\,\overline{\varphi}'(z) + \overline{\Psi}(z) = i \int_s (X_n + i\,Y_n)\, dS \qquad (13)(x)$$

Posons $f(z) = i \int_s (X_n + i\,Y_n)\, dS$

Cette équation est calculable pour un domaine simplement connexe.

Pour un domaine doublement connexe, il faut se servir des transformations conformes et poser que D est l'image d'un domaine D' par $z = \omega(\zeta)$. S sera alors l'image d'un contour S' de D', que l'on choisira circulaire puisque les conditions aux limites pour un cercle sont connues

ζ sera alors donnée en coordonnées polaire :

$$\zeta = \rho . e^{i\theta}$$

II 4 COORDONNEE POLAIRE ET TRANSFORMATION

Dans ce système de coordonnées, nous avons comme base le couple (ρ, θ). Un vecteur de coordonnées (A_x, A_y) dans le repère cartésien s'écrit (A_ρ, A_θ) dans le système

(x) [7] p. 17

polaire et nous avons :

$$A_\rho + i A_\theta = e^{i\alpha} \mid A_x + i A_y \mid \quad \text{avec} \quad e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|}$$

Si de plus, nous posons $z = \omega(\xi)$, alors (11 a) et (11 b) s'écriront :

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \; Re \left[\varphi'(\xi) / \omega'(\xi) \right] \qquad (a)$$

(14)

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho + 2 i \; \tau_{\rho\theta} = 2 \frac{\xi^2}{\rho^2 . \bar{\omega}'(\xi)} . \left[\bar{\omega}'(\xi) \frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \psi'(\xi) \right] \quad (b)$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de (13), nous obtenons :

$$\varphi(\xi) + \omega(\xi) \frac{\varphi'(\xi)}{\bar{\omega}'(\xi)} + \bar{\psi}(\xi) = i \int_S (X_n + i Y_n) \, dS = f \qquad (15a)$$

En conjuguant cette équation, nous obtenons :

$$\bar{\varphi}(\xi) + \bar{\omega}(\xi) \frac{\bar{\varphi}'(\xi)}{\omega'(\xi)} + \psi(\xi) = \bar{f} \qquad (15b)$$

II 5 LA METHODE DE MUSKHELISHVILI

Enoncé de la méthode

Muskhelishvili considère que les fonctions φ et ψ décrites ci-dessus et qui doivent résoudre les équations (15 a) et (15 b) sont composées de séries de Laurent. Il transcrit ainsi toutes les fonction de (15a) et (15b) en séries de Laurent. L'identification terme à terme de ces séries permettra de connaitre les fonctions φ et ψ.

CHAPITRE III

ETUDE DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION

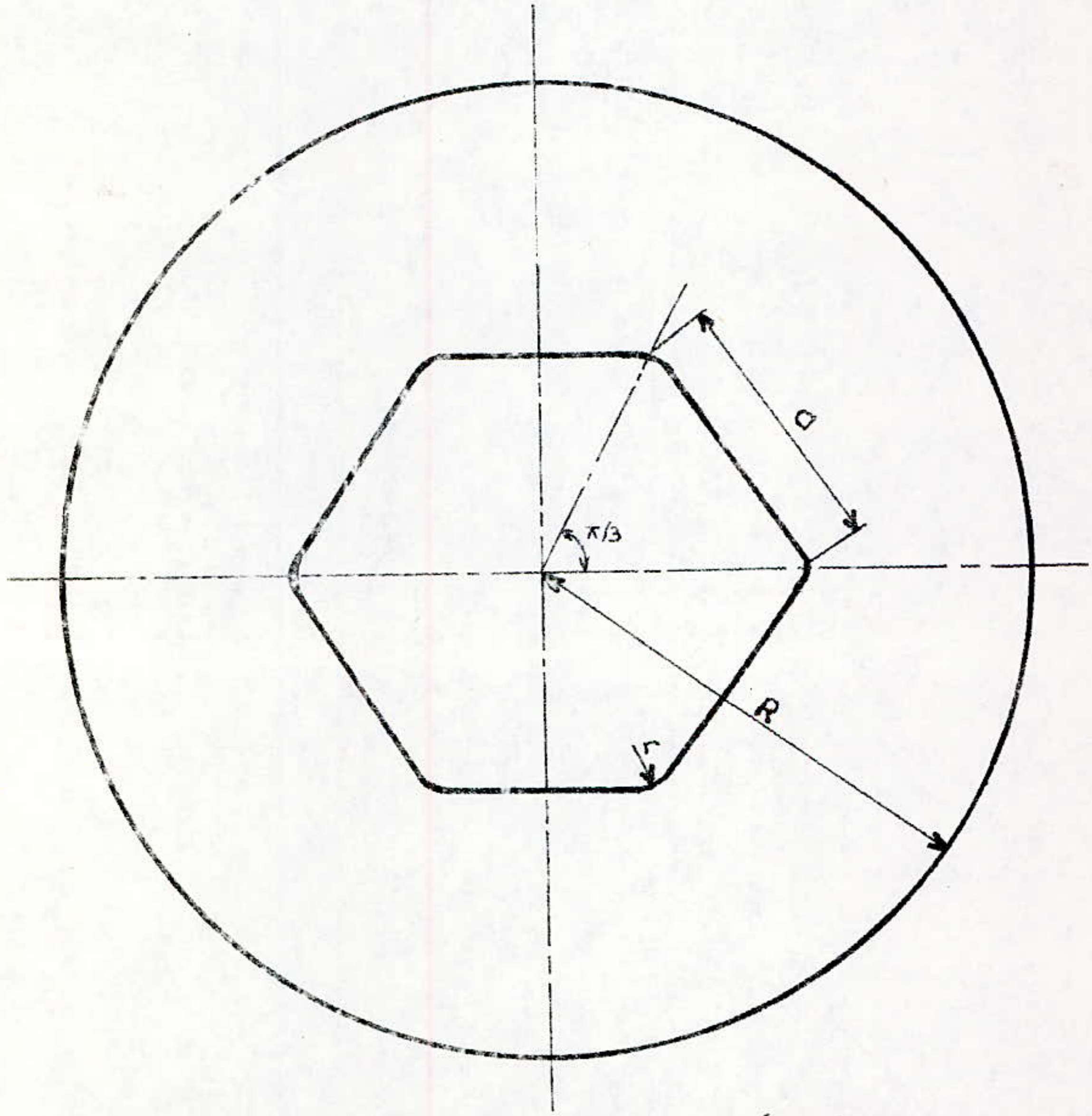


fig 1. forme et dimensions générales de la matrice

Soit la matrice de la figure 1.

Notre but est de transformer cette matrice en un anneau cylindrique. La méthode d'obtention de cette transformation est proposée par une étude qui traite de ces problèmes et qui se trouve dans un livre hongrois (*)

Elle est basée sur une étude analytique et numérique établie entre un anneau et un domaine doublement connèxe quelconque. Le rayon exterieur de l'anneau est unitaire. Le rayon intérieur est donné par la transformation. Il est à noter que cette transformation tient compte du nombre des axes de symetries (q). Cette fonction de transformation s'écrit sous forme de séries de Laurent (Plus éxactement, elle s'écrit sous forme de somme de Laurent). Nous aurons donc :

$$z = \omega(\xi) = \sum_{l=-2m}^{2m-1} C_{qk+1}\, \xi^{qk+1} \qquad (16)$$

q etant le nombre d'axes de symétries, nous aurons dans notre cas $q = 3$

Pour le cercle interieur $\rho = \rho_1$ donc $\xi = \rho_1 e^{i\theta}$

Pour le cercle exterieur $\rho = 1$ donc $\xi = e^{i\theta}$

D'autre part, l'anneau est divisé en m parties égales, en faisant varier θ en posant $\theta = \theta_j = \frac{\pi}{2qm}(2j-1) \quad j=1,..,m$

Les coefficients C_k sont donnés par les expressions ci-dessous :

(*) [6]

$$C_k = \frac{1}{m(1-\rho_1^{2qm})} \sum_{j=1} \left\{ x_j \cos\left(\frac{\pi.k.(2j-1)}{2qm}\right) + y_j \sin\left(\frac{\pi.k.(2j-1)}{2qm}\right) - \right.$$

$$\left. - \rho_1^{2qm-k} \left[x'_j \cos\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2qm}\right) + y'_j \sin\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2qm}\right)\right] \right\}$$

$$k = 1, q+1, \ldots, (2m-1)q+1 \tag{17}$$

$$C_{-k} = \frac{1}{m(1-\rho_1^{2qm})} \sum_{j=1}^{m} \left\{ \rho_1^{k} \left[x'_j \cos\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2qm}\right) - y'_j \sin\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2qm}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \rho_1^{2qm} \left[x_j \cos\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2qm}\right) - y_j \sin\left(\frac{\pi k(2j-1)}{2qm}\right)\right] \right\}$$

$$k = q-1, \ldots, 2mq-1 \tag{18}$$

Le rayon ρ_1 est donné par :

$$\rho_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m} \left[x'_j \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2qm}\right) + y'_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2qm}\right)\right]}{\sum_{j=1}^{m} \left[x_j \cos\left(\frac{\pi(2j-1)}{2qm}\right) + y_j \sin\left(\frac{\pi(2j-1)}{2qm}\right)\right]} \tag{19}$$

x_j et y_j sont les coordonnées des points du trou

x'_j et y'_j sont les coordonnées des points du cercle exterieurs.

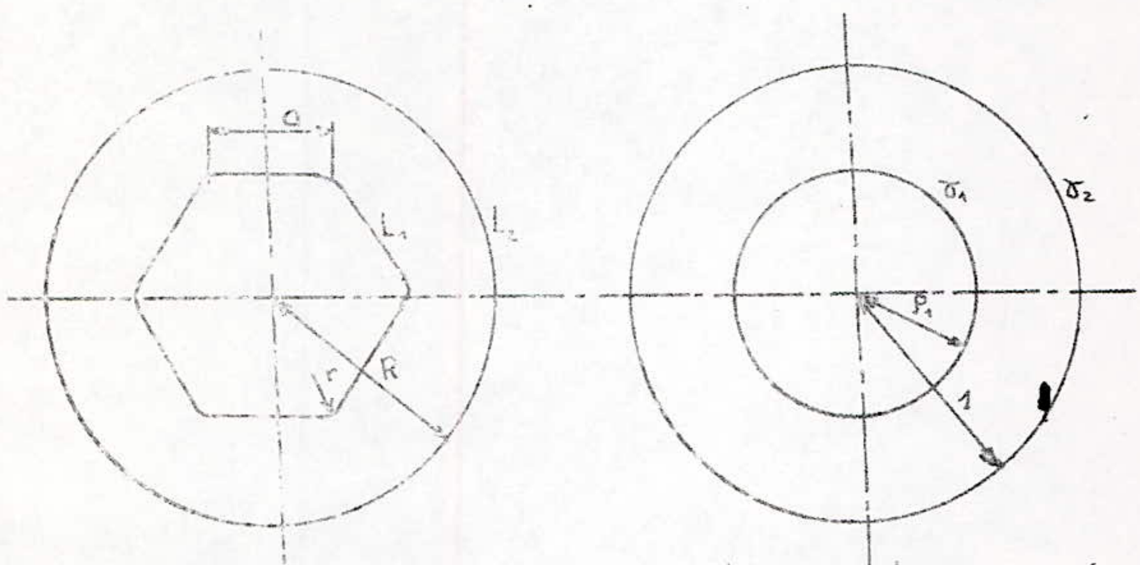
Cette méthode étant numérique, on introduit C_k, C_{-k} et ρ_1 sur micro-ordinateur et on ne retient que les coefficient s qui ont une importance. On remarque que ce sont les coéfficients C_1, C_7 et C_{-5}. Ainsi, la série (16) s'écrira

$$z = \omega(\xi) = C_1 \xi + C_7 \xi^7 + C_{-5} \xi^{-5} \tag{20}$$

Le programme permettant le calcul de C_1, C_7 et C_{-5}, ainsi que ρ_1 est donné en annexe

Les vérifications donnent des résultats interessants.

En conclusion, nous avons transfoumé le domaine D en un domaine D' (Voir figure 2)



Domaine initial . domaine transformé

fig. 2 _ Transformation du domaine initial par ω

CHAPITRE IV

APPLICATION DE LA TRANSFORMATION

DETERMINATION DE LA FONCTION POTENTIEL

IV 1 DETERMINATION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE AUX BORNES

IV 1a Notations

Soit la fonction polynomiale f de la variable complexe ξ. Cett fonction s'écrit en ξ uniquement et ne possède pas de tèrmes en $\bar{\xi}$. On dit que f est holomorphe. La fonction $\bar{f}$ conjuguée de f sera elle fonction uniquement de $\bar{\xi}$; Donc :

$$f = f(\xi) \qquad \text{et} \qquad \bar{f} = \bar{f}(\bar{\xi}).$$

$$\text{Or} \quad \bar{\xi} = \rho e^{-i\theta} = \frac{\rho}{e^{i\theta}} = \frac{\rho^2}{\rho e^{i\theta}} = \frac{\rho^2}{\xi} \quad \text{avec } \xi = \rho e^{i\theta}$$

Nous conviendrons de noter les fonctions holomorphes conjuguées $\bar{f}$ sous forme polynomiale de la variable $\frac{\rho^2}{\xi}$ de la manière suivante :

$$\bar{f}(\bar{\xi}) = \bar{f}\left(\frac{\rho^2}{\xi}\right)$$

Cette forme permet une meilleure lécture des éxpressions tout en mettant en évidence l'apparition de ρ. L'utilité de ceci apparaitra plus tard.

IV 1 b Transformation des équations (15 a) et (15 b)

Les équations (15 a) et (15 b) etant conjuguées, cela revient au même de prendre l'une ou l'autre. Prenons donc l'équation (15 b) et appliquons là sur les contours interieur et exterieur de l'anneau, puis multiplions là par $\omega'(\xi)$. En réarrengeant les termes de l'équation, cela donne :

Sur γ_2 : $\rho = 1$

$$\omega'(\xi)\,\psi(\xi) = -\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot\omega'(\xi) - \bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right)\varphi'(\xi) + \bar{f}_2(\xi)\cdot\omega'(\xi)$$

Sur γ_1 : $\rho = \rho_1$

$$\omega'(\xi)\,\psi(\xi) = -\bar{\varphi}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\cdot\omega'(\xi) - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\cdot\varphi'(\xi) + \bar{f}_1(\xi)\cdot\omega'(\xi)$$

Les fonctions f_2 et f_1 ne sont que les expressions de l'application des efforts réspectivement sur le contour exterieur et interieur.

En égalisant les deux éxpréssions, et en multipliant le tout par ξ – Dans le but d'homogénéiser les puissances dans toute l'éxpression –, nous obtenons :

$$\xi\,\omega'(\xi)\left[\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\xi}\right)-\bar{\varphi}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right]+\xi\,\varphi'(\xi)\left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right)-\bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right]=\xi\,\omega'(\xi)\left[\bar{f}_2\left(\frac{1}{\xi}\right)-\bar{f}_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right] \quad (21\,b)$$

Si nous avions considéré l'éxpression (15a), cela nous aurait conduit à l'expression conjuguée de (21b) qui est :

$$\bar{\xi}\,\bar{\omega}'(\bar{\xi})\left[\varphi\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)-\varphi\left(\frac{\rho_1^2}{\bar{\xi}}\right)\right]+\bar{\xi}\,\bar{\varphi}'(\bar{\xi})\left[\omega\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)-\omega\left(\frac{\rho_1^2}{\bar{\xi}}\right)\right]=\bar{\xi}\,\bar{\omega}'(\bar{\xi})\left[f_2\left(\frac{1}{\bar{\xi}}\right)-f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\bar{\xi}}\right)\right] (21a)$$

De même que pour (15a) et (15b), la considération de l'une des expressions ci-dessus revient à la considération de l'autre

IV 2 RESOLUTION DE L'EQUATION (21c)

Application de la méthode de Muskhélishvili

Muskhélishvili conseille de prendre l'expression (15b), donc aussi l'éxpression (21b). En effet, toutes les éxpressions de (21b) sont écrites en fonction de ξ tandis que dans (21a) il n'y a que des fonctions de $\bar{\xi}$. Le travail avec les ξ est plus aisé qu'avec les $\bar{\xi}$, ce qui explique ce choix.

Soit à expliciter l'équation (21b).

Muskhelishvili conseille de transcrire toutes les fonctions de cette équation sous forme de series de Laurent.

Occuppons-nous d'abord des termes de gauche de cette équation :

Une série de Laurent s'écrit :

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, z^n$$

$$\boxed{\omega(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \xi^\nu}$$ $c_\nu \in \mathbb{R}$ voir Chapitre III

$$\bar{\omega}(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu (\bar{\xi})^\nu \quad \text{or} \quad \bar{\xi} = \frac{\rho^2}{\xi} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\bar{\omega}(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{\rho_1^{2\nu}}{\xi^\nu}}$$

$$\boxed{\omega'(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \xi^{\nu-1}}$$

$$\boxed{\varphi(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \xi^k}$$

$$\bar{\varphi}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \bar{\xi}^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{\rho_1^{2k}}{\xi^k}$$

$$\boxed{\bar{\varphi}(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{\rho_1^{2k}}{\xi^k}}$$

$$\boxed{\varphi'(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k \xi^{k-1}}$$

Calculons $\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\varphi}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)$

$$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\varphi}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{1}{\xi^k} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{\rho_1^{2k}}{\xi^k}$$

$$\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\varphi}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{1}{\xi^k}\left(1 - \rho_1^{2k}\right)$$

Calculons $\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)$

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{1}{\xi^\nu} - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{\rho_1^{2\nu}}{\xi^\nu}$$

$$\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{1}{\xi^\nu}\left(1 - \rho_1^{2\nu}\right)$$

Calculons $A(\xi) = \xi \cdot \omega'(\xi) \cdot \left[\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\varphi}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right]$

$$A(\xi) = \xi \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \xi^{\nu-1}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{1}{\xi^k}\left(1-\rho_1^{2k}\right)\right]$$

$$= \left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \xi^{\nu}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_k \frac{1}{\xi^k}\left(1-\rho_1^{2k}\right)\right]$$

$$A(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \bar{a}_k \xi^{(\nu-k)} \left(1-\rho_1^{2k}\right) \qquad (22a)$$

Calculons $B(\xi) = \xi . \varphi'(\xi) . \left[\bar{\omega}\left(\frac{1}{\xi}\right) - \bar{\omega}\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right]$

$$B(\xi) = \xi \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k \xi^{k-1}\right]\left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{1}{\xi^\nu}\left(1-\rho_1^{2\nu}\right)\right]$$

$$B(\xi) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k \xi^{k}\right]\left[\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \frac{1}{\xi^\nu}\left(1-\rho_1^{2\nu}\right)\right]$$

$$B(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_\nu \left(1-\rho_1^{2\nu}\right) k a_k \xi^{(k-\nu)} \qquad (22b)$$

Opérons quelques changements d'indices :

Prenons (22 a)

$$A(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \bar{a}_k \left(1-\rho_1^{2k}\right) \xi^{(\nu-k)}$$

Posons $h = \nu - k$, donc $k = \nu - h$

$k = -\infty, \dots, +\infty$. $h = -\infty, \dots, \infty$

$$A(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \bar{a}_{\nu-h} \left(1-\rho_1^{2(\nu-h)}\right) \xi^{h}$$

en faisant $k = h$, on retrouve

$$A(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \bar{a}_{\nu-k} \left(1-\rho_1^{2(\nu-k)}\right) \xi^{k} \qquad (23a)$$

Prenons (22 b)

$$B(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_\nu (1-\rho_1^{2\nu})\, k\, a_k \,.\, \xi^{(k-\nu)}$$

Posons $h = k - \nu$, donc $k = h + \nu$

$k = -\infty, \dots, +\infty \quad . \quad h = -\infty, \dots, +\infty$

$$B(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_\nu (1-\rho_1^{2\nu})(h+\nu)\, a_{h+\nu}\, \xi^h$$

En remplaçant h par k, on trouve:

$$B(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_\nu (1-\rho_1^{2\nu})(k+\nu)\, a_{k+\nu}\, \xi^k \qquad (23b)$$

Maintenant que nous avons calculé tous les termes du membre de gauche de l'expression (21 b), celte dèrnière s'écrira :

$$B(\xi) + A(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu\, \bar{a}_{\nu-k} (1-\rho_1^{2(\nu-k)})\, \xi^k + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_\nu (1-\rho_1^{2\nu})(k+\nu)\, a_{k+\nu}\, \xi^k$$

En identifiant terme à terme les puissances de ξ, nous pouvons écrire :

$$\boxed{B(\xi) + A(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\nu c_\nu\, \bar{a}_{\nu-k} (1-\rho_1^{2(\nu-k)}) + c_\nu (1-\rho_1^{2\nu})(k+\nu)\, a_{k+\nu}\right] \xi^k} \qquad (23d)$$

Occuppons-nous maintenant du terme de droite de (21 b)

$$S_d = \xi\, \omega'(\xi) \left[\bar{f}_2\left(\frac{1}{\xi}\right) - f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right]$$

Ecrivons, comme le conseille Muskhelishvili, toutes les fonctions du membre de droite sous forme de series de Laurent:

$$\omega'(\xi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \, \xi^{\nu-1}$$

Posons $f(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \xi^j$ (la fonction f est aussi holomorphe). Donc :

$$\bar{f}(\bar{\xi}) = \bar{f}\left(\frac{\rho^2}{\xi}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{b}_j \, \bar{\xi}^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{b}_j \frac{\rho_1^{2j}}{\xi^j}$$

Appliquons la sur les contours exterieur et interieur.

$$f_2\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{B}_j \frac{1}{\xi^j} \qquad \text{en posant } \bar{b}_j = \bar{B}_j \text{ sur } \gamma_2$$

$$f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \frac{\rho_1^{2j}}{\xi^j} \qquad \text{en posant } \bar{b}_j = \bar{A}_j \text{ sur } \gamma_1$$

Calculons $f_2\left(\frac{1}{\xi}\right) - f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)$.

$$f_2\left(\frac{1}{\xi}\right) - f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{B}_j \frac{1}{\xi^j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \frac{\rho_1^{2j}}{\xi^j}$$

$$f_2\left(\frac{1}{\xi}\right) - f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\bar{B}_j - \bar{A}_j \rho_1^{2j}\right) \frac{1}{\xi^j}$$

Calculons $S_d = \xi \cdot \omega'(\xi)\left[f_2\left(\frac{1}{\xi}\right) - f_1\left(\frac{\rho_1^2}{\xi}\right)\right]$

$$S_d = \xi \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \, \xi^{\nu-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\bar{B}_j - \bar{A}_j \rho_1^{2j}\right) \frac{1}{\xi^j}$$

$$S_d = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \, \xi^{\nu} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\bar{B}_j - \bar{A}_j \rho_1^{2j}\right) \frac{1}{\xi^j}$$

$$S_d = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \left(B_j - A_j \rho_1^{2j}\right) \xi^{\nu-j} \qquad (22c)$$

Posons $k = \nu - j$; donc $j = \nu - k$

$j = -\infty, \dots, +\infty$. $k = -\infty, \dots, +\infty$

$$\boxed{S_d = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \left(\overline{B}_{\nu-k} - \overline{A}_{\nu-k}\, \rho_1^{2(\nu-k)} \right) \xi^k} \quad (23c)$$

Pour retrouver l'égalité (21b), nous n'avons qu'à faire $A(\xi) + B(\xi) = S_d$.

Remplaçons les deux parties de cette égalité par leur expression en (23d) et (23c) :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\nu c_\nu\, \overline{a}_{\nu-k} \left(1 - \rho_1^{2(\nu-k)}\right) + c_\nu (k+\nu) \left(1 - \rho_1^{2\nu}\right) a_{k+\nu} \right] \xi^k =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \left(\overline{B}_{\nu-k} - A_{\nu-k}\, \rho_1^{2(\nu-k)} \right) \xi^k \quad (24)$$

Comme ξ est complexe et variable, alors (24) n'a de solutions dans $\mathbb{C}$ (ensemble des complexes) que si tout les termes de la série de gauche sont égaux aux termes de la série de droite. Ceci n'est possible qu'en identifiant les deux séries terme à terme. Cela donne :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu\, \overline{a}_{\nu-k} \left(1 - \rho_1^{2(\nu-k)}\right) + c_\nu (k+\nu)\left(1 - \rho_1^{2\nu}\right) a_{k+\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \left(\overline{B}_{\nu-k} - \overline{A}_{\nu-k}\, \rho_1^{2(\nu-k)} \right) \quad (25)$$

$$k = -\infty, \dots, +\infty$$

Pratiquement les variations de ν sont limitées (voir Chap. III).

Nous supposerons qu'il en est de même pour k et nous posons $k = -2m, \dots, 2m-1$

$\nu = -2m, \dots, 2m-1$

Le système (25) s'écrit alors :

$$\sum_{\nu=-2m}^{2m-1} \nu\, c_\nu\, \bar{a}_{\nu-k} \left(1-\rho_1^{2(\nu-k)}\right) + c_\nu (k+\nu)\left(1+\rho_1^{2\nu}\right) a_{k+\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=-2m}^{2m-1} \nu c_\nu \left(\bar{B}_{\nu-k} - \bar{A}_{\nu-k}\, \rho_1^{2(\nu-k)}\right) \qquad (26)$$

$k = -2m, \dots, 2m-1$

La résolution de ce système d'équation (En fait, il éxiste deux systèmes à cause des nombres complexes) nous donne les a_k en fonction des B_k, A_k et c_ν. **La fonction potentiel φ sera ainsi détèrminée**

IV 3 DETERMINATION DE LA FONCTION DE LA CONTRAINTE EXTERIEURE

Au chapitre II, nous avons établie

$$f(\sigma) = i \int_c (X_n + i Y_n)\, dS$$

En derivant cette expression, nous obtenons :

$$f'(\sigma)\, d\sigma = i\,(X_n + i Y_n)\, dS$$

Or $\cos\alpha = \dfrac{dy}{ds}$ et $\sin\alpha = -\dfrac{dx}{ds}$ donc

$$dy = \cos\alpha \; dS \qquad \text{et} \qquad dx = -\sin\alpha \, dS$$

$$dx + i\,dy = d(x+iy) = dz = -ds \sin\alpha + i\, ds \cos\alpha$$

$$dz = i \; dS\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) = i\, ds\, e^{i\alpha}$$

Donc $\quad dz = i \; ds \; e^{i\alpha}$

d'où $\quad ds = \frac{dz}{i} \; e^{-i\alpha}$

Comme $\quad dz = \omega'(\sigma)\, d\sigma$

Donc $\quad dS = \frac{\omega'(\sigma)}{i}\, e^{-i\alpha} \; d\sigma$

En remplaçant ceci dans l'expression de $f'(\sigma)$, nous obtenons :

$$f'(\sigma)\, d\sigma = (X_n + i\,Y_n)\; e^{-i\alpha}\, \omega'(\sigma)\, d\sigma$$

Or $(X_n + i\,Y_n) = \sigma_\rho + i\,\tau_{\rho\theta} \; e^{i\alpha}$

Donc $\quad f'(\sigma) = (\sigma_\rho + i\,\tau_{\rho\theta})\, \omega'(\sigma) \qquad (27)$

Cette expression est trés importante car elle permet de connaitre $f(\sigma)$ à partir des contraintes aux bornes.

Dans notre cas, il n'yà pas de rotation de la pièce lors du filage. Ceci veut dire que : $\tau_{\rho\theta} = 0$. En remplaçant ceci dans (27) nous tirons :

$$f'(\sigma) = \sigma_\rho \cdot \omega'(\sigma) \qquad (27')$$

Comme nous l'avons écrit précédement, la résolution du problème passe par la détèrmination des coéfficients a_K par la résolution de (25) (ou de (26)). Pour cela, nous avons besoin de determiner les coefficient A_K et B_K des fonctions f_1 et f_2. La determination des A_K et B_K depend de la forme de la sollicitation. Chaque cas donnera des B_K et A_K différents.

IV 3 a Premier cas : Pression interieure constante _ Pression exterieure nulle.

En posant : P1 = pression agissant sur le contour interieur

P2 = Pression agissant sur le contour exterieur

$P_1 = \text{constante} \quad ; \quad P_2 = 0$

Reprenons (27').

$f'(\sigma) = \sigma_\rho \, \omega'(\sigma)$ or $\sigma_\rho = -P$ donc

$f'_1(\sigma) = -P_1 \, \omega'(\sigma)$

$f'_2(\sigma) = 0$

Cela donne $f_1(\sigma) = -P_1 \, \omega(\sigma)$

$f_2(\sigma) = 0$

Or $\omega(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} C_\nu \sigma^\nu$. Nous aurons donc

$$f_1(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} -P_1 C_\nu \sigma^\nu$$

Donc $A_k = \bar{A}_k = -P_1 C_k$

$f_2(\sigma) = 0$ donc $B_k = \bar{B}_k = 0$

En conclusion.

$$\begin{cases} A_k = \bar{A}_k = -P_1 C_k \\ B_k = \bar{B}_k = 0 \end{cases}$$

En remplacent ceci dans l'expression (26) nous aurons

$$\sum_{\nu=-2m}^{2m-1} \nu c_\nu \bar{a}_{\nu-k}\left(1-\rho_1^{2(\nu-k)}\right) + c_\nu (k+\nu)\, a_{k+\nu}\left(1-\rho_1^{2\nu}\right) =$$

$$\sum_{\nu=-2m}^{2m-1} \nu c_\nu \; P_1 \, C_{\nu-k} \, \rho_1^{2(\nu-k)} \qquad (28)$$

$$k = -2m, \dots, 2m-1$$

La résolution par programmation de (28) donnera directement les a_k.

IV 3b Deuxième cas : Pressions interieure et exterieure constantes

La matrice etant maintenue dans une frette qui exerce une pression régulière sur elle, la frette etant cylindrique, la pression exterieure est constante (à cause de la symétrie du cercle) (x)

Par contre, en supposant que la pression interieure est constante, nous étudions un cas purement théorique.

$$P_1 = \text{constante} \quad : \quad P_2 = \text{constante}$$

$$f_2'(\sigma) = -P_2\,\omega'(\sigma).$$

$$f_1'(\sigma) = -P_1\,\omega'(\sigma)$$

Dececi nous tirons :

$$f_2(\sigma) = -P_2\,\omega(\sigma) = -P_2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu\,\sigma^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} -P_2\, c_\nu\,\sigma^\nu$$

$$f_1(\sigma) = -P_1\,\omega(\sigma) = -P_1 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu\,\sigma^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} -P_1\, c_\nu\,\sigma^\nu$$

(x) Voir determination de P2 en annexe.

Donc $B_k = \bar{B}_k = -P_2 C_k$

$A_k = \bar{A}_k = -P_1 C_k.$

En remplaçant ceci dans (26), nous aurons :

$$\sum_{\nu=-2m}^{2m-1} \nu C_\nu \bar{a}_{\nu-k} \left(1-\rho_1^{2(\nu-k)}\right) + C_\nu (k+\nu)\, a_{k+\nu} \left(1-\rho_1^{2\nu}\right) =$$

$$\sum_{\nu=-2m}^{2m-1} \nu C_\nu \left(-P_2 + P_1 \rho_1^{2(\nu-k)}\right) C_{\nu-k} \qquad (29).$$

IV 3c Troisième cas : Pression interieure variable, pression exterieure constante :

Nous essayons par approximations succéssives de nous rapprocher le plus possible de la réalité. En effet, dans ce cas la pression exterieure est constante, mais la pression interieure est variable.

L'expression de P_2 est étudieé en annexe.

Quelles sont les propriétés de la fonction P_1 ?

Le domaine étudié est un anneau de rayons exterieur et interieur respectifs 1 et ρ_1. Sur ce domaine, P_1 est periodique, à cause de la symétrie de forme et de sollicitation. En effet, sur la matrice, la pression est répartie de la même manière sur tous les pans.

Les transformations conformes conservants les angles, nous pouvons écrire : $|P(z)| = |P(\sigma)|$. Nous noterons $|P(z)| = P_1$

D'autre part, $\int_c P(\sigma)\, d\sigma = 0$ ou c = Contour de l'anneau en entier.

La période est de $\pi/3$ qui est l'angle constitué par un seul pan. ρ_1 = constante , donc $\sigma = \rho_1 e^{i\alpha}$ donc $P(\sigma) = P(\alpha)$.

La périodicité s'écrit :

$$P(\alpha) = P(\alpha + \pi/3)$$

D'autre part, la symétrie de forme et de sollicitation implique nécessairement la symetrie de répartition des contraintes, ce qui veut dire que la fonction est paire, ce qui s'écrit :

$$P_1(\alpha) = P_1(-\alpha)$$

La pression P_1 est majorée, car la matrice ne se casse pas sous l'effet de la pression

$$P_1 \leqslant P_0$$

Enfin, la fonction donnant P_1 est continue et dérivable sur tout le contour car elle y est définie en tout point et ses variations sont régulieres.

En conclusion :

P est : - continue

- dérivable $\frac{dP}{d\alpha}$ existe en tout point de C
- majorée $|P_1| \leqslant P_0$
- periodique $P(\alpha) = P(\alpha + \pi/3)$
- paire $P(\alpha) = P(-\alpha)$. (30)

D'autre part, et à cause de la symétrie,

- $\frac{d\,P(\pi/3)}{d\,\alpha} = \frac{d\,P(0)}{d\,\alpha} = 0$
- $\frac{d\,P(\pi/6)}{d\,\alpha} = 0$
- $P(0) = P(\pi/3) = P_{min}$
- $P(\pi/6) = P_{max} = P_0$

La fonction représentant P_1 doit remplir les conditions ci dessus

La détermination de P_{min} et $P_{max} = P_o$ est faite en annexe.

La connaissance de la fonction est primordiale pour l'étude des contraintes. Si la fonction est connue en tout point, nous n'aurons qu'à l'injecter dans l'expression de f' et intégrer le tout par une méthode ou une autre, puis en tirer les A_k. Si la fonction n'est connue qu'en un nombre limité de points, nous utiliserons pour l'intégration de $f'(\sigma)$ la méthode dite des trapèzes enseignée en analyse numérique.

N'ayant ni l'expression mathématique de la pression, ni ses valeurs en un nombre limité de points, nous ne pouvons qu'étudier un cas arbitraire qui se rapproche de la réalité.

IV 3d Supposons que la fonction $P(\alpha)$ s'écrive sous la forme

$$P_1(\alpha) = P_{min} + f(a,\sigma)$$

$$\text{avec} \begin{cases} P_{min} = k f_o \text{ (contrainte d'écoulement)} \\ f(a,\sigma) = \frac{a}{2} \,\mathrm{Ln}\,(1{,}35)\,(1 - \cos 6\alpha) \qquad (*) \\ P_2 = \text{Constante} \end{cases}$$

La fonction $P(\alpha)$ ainsi définie vérifie bien les conditions énoncées en (30).

Injectons P_1 et P_2 dans l'expression donnant $f'(\sigma)$.

$$f'_2(\sigma) = -P_2\ \omega'(\sigma)$$

$$f'_1(\sigma) = -P_1(\alpha)\cdot\omega'(\sigma).$$

(*) voir annexe

Cela donne :

$$f_2(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \sigma^k = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} -P_2 c_\nu \sigma^\nu \Rightarrow B_k = \overline{B_k} = -P_2 C_k$$

$$f_1(\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k \qquad (*)$$

$$A_k = \overline{A_k} = -\left[K f_0 + \frac{a}{2} \operatorname{Ln}(1{,}35) \right] C_k + \frac{a}{2} \operatorname{Ln}(1{,}35)(k-6)\, C_{k-6} \frac{1}{k \rho_1^6} + (k+6)\, C_{k+6} \frac{\rho_1^6}{k}$$

En injectant B_k et A_k dans (26) nous obtiendrons, par résolution du système d'équations linéaires, les a_k.

IV 3 e Méthode de résolution.

Le système d'equation (26) est résolue numériquement sur micro ordinateur aprés programmation de l'expression (26) sur ce dernier. Il est à noter que les résultats dependent du nombre d'équations considérées. Plus ce nombre est grand, et plus la précision est meilleure. Le resultat depend donc aussi de la capacité du micro-ordinateur utilisé.

(*) Voir annexe : calcul de A_k.

CHAPITRE V

CALCUL DES CONTRAINTES

ET

RESULTATS

V 1 CALCUL DES CONTRAINTES

Reprenons l'expression (14a):

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4 \ \mathrm{Re}\left[\frac{\varphi'(\xi)}{\omega'(\xi)}\right] = 4 \ \mathrm{Re}\left[\frac{\varphi'(\xi)\cdot\bar{\omega}'(\xi)}{\omega'(\xi)\ \omega'(\xi)}\right]$$

or $\omega'(\xi)\cdot\bar{\omega}'(\xi) = |\omega'(\xi)|^2 = |\bar{\omega}'(\xi)|^2 \ (\in \mathbb{R})$.

Reécrivons φ' et $\bar{\omega}'$ en séparant les parties réels et imaginaires.

$$\varphi'(\xi) = \mathrm{Re}(\varphi'(\xi)) + i\ \mathrm{Im}(\varphi'(\xi))$$

$$\bar{\omega}'(\xi) = \mathrm{Re}(\bar{\omega}'(\xi)) + i\ \mathrm{Im}(\bar{\omega}'(\xi))$$

Calculons maintenant $\varphi'(\xi)\cdot\bar{\omega}'(\xi)$.

$$\varphi'(\xi)\cdot\bar{\omega}'(\xi) = \left[\mathrm{Re}(\varphi'(\xi))\ \mathrm{Re}(\bar{\omega}'(\xi)) - \mathrm{Im}(\varphi'(\xi))\ \mathrm{Im}(\bar{\omega}'(\xi))\right] + i\left[\mathrm{Re}(\varphi'(\xi))\ \mathrm{Im}(\bar{\omega}'(\xi)) + \mathrm{Im}(\varphi'(\xi))\ \mathrm{Re}(\bar{\omega}'(\xi))\right]$$

Donc $\mathrm{Re}\left[\varphi'(\xi)\,\bar{\omega}'(\xi)\right] = \mathrm{Re}\left(\varphi'(\xi)\right)\mathrm{Re}\left(\bar{\omega}'(\xi)\right) - \mathrm{Im}\left(\varphi'(\xi)\right)\mathrm{Im}\left(\bar{\omega}'(\xi)\right)$.

En remplaçant ceci dans l'expression de $\sigma_\rho + \sigma_\theta$, nous obtenons :

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4\left[\frac{\mathrm{Re}\left(\varphi'(\xi)\right)\mathrm{Re}\left(\bar{\omega}'(\xi)\right) - \mathrm{Im}\left(\varphi'(\xi)\right)\mathrm{Im}\left(\bar{\omega}'(\xi)\right)}{|\omega'(\xi)|^2}\right]$$

$$|\omega'(\xi)|^2 = \mathrm{Re}\left(\omega'(\xi)\right)^2 + \mathrm{Im}\left(\omega'(\xi)\right)^2.$$

D'autre part $\sigma_\rho = -P_1$ sur le contour γ_1, or nous voulons justement calculer les contraintes sur ce contour. Nous écrirons donc

$$\sigma_\rho = 4\left[\frac{\mathrm{Re}\,\varphi'(\xi)\,\mathrm{Re}\,\bar{\omega}'(\xi) - \mathrm{Im}\left(\varphi'(\xi)\right)\mathrm{Im}\,\bar{\omega}'(\xi)}{\mathrm{Re}^2\left(\omega'(\xi)\right) + \mathrm{Im}^2\left(\omega'(\xi)\right)}\right] + P_1$$

V 2 RESULTATS

Nous avons réalisé plusieurs séries d'essais. Nous avons fait varier dans chaque cas les différents paramètres influants sur les variations des contraintes. Ainsi, au premier cas, nous avons fait varier la pression P1 en gardant les grandeurs restantes constantes, puis nous avons fait varier le rayon r en gardant P1 constant. Au deuxième cas, nous avons introduit la précontrainte et nous avons ainsi étudié les deux essais du premier cas, puis un essai où la précontrainte varie avec les autres paramètres constants. Au troisieme cas, l'acier étant défini, nous avons étudié l'influence de la précontrainte et du rayon. En fin, nous avons réalisé une serie d'essais de vérifications avec le cercle (Voir verification). Pour la majorité, nous avons choisi une matrice dont les dimensions

1er cas Influence de r

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 NULLE P2= 0
r= 4

SIGMA

885.6784
850.032
819.4448
811.4838
819.4446
850.0314
885.6779

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 NULLE P2= 0
r= 1

SIGMA

876.162
873.4849
866.4151
857.1064
847.5959
839.1289
832.2115
826.9145
823.1273
820.7025
819.5216
819.5215
820.7021
823.1268
826.9137
832.2106
839.1279
847.5948
857.1052
866.4139
873.4836
876.1608

2ème cas Influence de r

P1 CONSTANTE,P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 25.89844
r= 4

SIGMA

810.2751
789.1046
770.9388
766.2107
770.9386
789.1043
810.2748

P1 CONSTANTE,P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 26.22812
r= 1

SIGMA

804.6626
803.072
798.8717
793.3411
787.6907
782.6602
778.5505
775.4033
773.1532
771.7125
771.011
771.011
771.7124
773.1529
775.4028
778.5499
782.6596
787.69
793.3405
798.871
803.0713
804.6618

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 NULLE P2= 0
r= 9.999999E-06

SIGMA

879.839
876.1544
866.7836
855.1984
844.1958
835.097
828.1936
823.334
820.2666
818.7872
818.7871
820.2665
823.3338
828.1935
835.0968
844.1956
855.1982
866.7835
876.1543
879.8389

P1 CONSTANTE,P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 26.25
r= 9.999999E-06

SIGMA

807.085
804.8911
799.3113
792.4128
785.8613
780.4434
776.3328
773.4391
771.6127
770.7318
770.7318
771.6127
773.4391
776.3328
780.4433
785.8612
792.4128
799.3111
804.891
807.085

9ème cas Influence de la precontrainte

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 13.0812
r= 2

SIGMA

845.7813
836.484
819.0342
805.1551
796.9242
793.2351
793.2349
796.9237
805.1545
819.0333
836.4831
845.7804

P1 CONSTANTE,P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 91.56841
r= 2

SIGMA

776.0988
771.2435
762.1321
754.8876
750.593
748.669
748.669
750.5929
754.8873
762.1318
771.2431
776.0983

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 45.7842
r= 2

SIGMA

753.3313
749.9301
743.5463
738.469
735.4578
734.1083
734.1082
735.4577
738.4688
743.546
749.9297
753.331

P1 CONSTANTE,P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 130.812
r= 2

SIGMA

887.0388
875.1054
852.7111
834.905
824.3498
819.6208
819.6208
824.3495
834.9045
852.7103
875.1043
887.0376

1er cas Influence de P1

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 NULLE P2= 0
r= 2

SIGMA

882.7614
871.1056
849.2292
831.8296
821.5108
816.8858
816.8856
821.5101
831.8288
849.2281
871.1044
882.7601

P1 CONSTANTE P1= 900
P2 NULLE P2= 0
r= 2

SIGMA

1134.979
1119.993
1091.866
1069.495
1056.228
1050.282
1050.282
1056.227
1069.494
1091.865
1119.991
1134.977

P1 CONSTANTE P1= 1100
P2 NULLE P2= 0
r= 2

SIGMA

1387.196
1368.88
1334.503
1307.161
1290.945
1283.678
1283.677
1290.945
1307.159
1334.501
1368.878
1387.195

2ème cas Influence de P1

P1 CONSTANTE,P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 26.16241
r= 2

SIGMA

808.8013
801.8625
788.8391
778.4806
772.3376
769.5844
769.5843
772.3373
778.4801
788.8384
801.8617
808.8006

P1 CONSTANTE,P1= 900
P2 CONSTANTE P2= 26.16241
r= 2

SIGMA

1061.019
1050.75
1031.476
1016.146
1007.055
1002.98
1002.98
1007.055
1016.145
1031.475
1050.749
1061.018

P1 CONSTANTE,P1= 1100
P2 CONSTANTE P2= 26.16241
r= 2

SIGMA

1313.236
1299.637
1274.113
1253.812
1241.772
1236.376
1236.376
1241.772
1253.811
1274.112
1299.636
1313.235

3ème cas Influence du rayon

P1 VARIABLE
P2 CONSTANTE P2= 26.16241
r= 2

SIGMA

475.2342
491.041
539.8921
611.6013
681.3962
723.9143
723.9139
681.3948
611.5994
539.8895
491.038
475.231

P1 VARIABLE
P2 CONSTANTE P2= 25.89844
r= 4

SIGMA

503.9164
549.3208
673.9256
742.316
673.9254
549.32
503.9157

P1 VARIABLE
P2 CONSTANTE P2= 26.22812
r= 1

SIGMA

456.7981
461.8342
476.935
501.6865
534.6253
573.068
613.4489
651.8495
684.5041
708.2171
720.6781
720.678
708.2167
684.5034
651.8484
613.4475
573.0664
534.6234
501.6844
476.9328
461.8319
456.7958

3ème cas Influence de la precontrainte

P1 VARIABLE
P2 CONSTANTE P2= 13.0812
r= 2

SIGMA

512.2142
525.6626
570.0873
638.2758
705.9828
747.5651
747.5646
705.9813
638.2737
570.0844
525.6593
512.2108

P1 VARIABLE
P2 CONSTANTE P2= 58.86541
r= 2

SIGMA

382.7842
404.4871
464.4044
544.9153
619.9298
664.7875
664.7873
619.9288
544.9137
464.4023
404.4846
382.7816

P1 VARIABLE
P2 CONSTANTE P2= 130.812
r= 2

SIGMA

520.606
533.5391
577.0078
644.455
711.7381
753.1373
753.1373
711.7383
644.4553
577.0083
533.5401
520.6072

Verification avec un trou annulaire

P1 CONSTANTE P1= 700
P2 NULLE P2= 0
r= 8.660254

SIGMA

832.9919
832.635
831.6235
830.117
828.3325
826.4962
824.8073
823.4201
822.4416
821.9371
821.9371
822.4415
823.42
824.8071
826.4961
828.3324
830.117
831.6235
832.635
832.9918

P1 CONSTANTE.P1= 700
P2 CONSTANTE P2= 43.00532
r= 8.660254

SIGMA

734.9458
734.8521
734.5863
734.1904
733.7215
733.239
732.7952
732.4307
732.1735
732.041
732.041
732.1735
732.4306
732.7951
733.239
733.7215
734.1904
734.5863
734.8521
734.9458

sont $\left(R = 30 \;,\; r = 2 \;,\; a = 10\right)$, une frette de rayon exterieur $R2 = 60$, une pression interieure $P1 = 700$ et une précontrainte extérieure $P2 = 26{,}15$.

V 3 INTERPRETATION DES RESULTATS

V 3a Premier cas :

Nous voyons que pour une pression interieure constante, sans précontrainte, la variation de la contrainte σ_θ sur un pan est fonction du rayon r de l'arrondi. On remarque aussi que la contrainte est maximale aux coins (Concentration des contraintes) et est minimale au milieu du pan $(\alpha = \pi/6)$, ce qui confirme les observations. D'autre part, une augmentation du rayon crée une diminution de la contrainte maximale. Cela est aussi normal car plus l'angle est "arrondi", et plus la discontinuité de la forme de la pièce est faible, donc la contrainte est plus répartie. Ces observations rejoignent celles faites auparavant (*).

Rappelons que sur γ_1.

$$\begin{cases} \sigma_\rho = -P_1 \\ \tau_{\rho\theta} = 0 \end{cases}$$

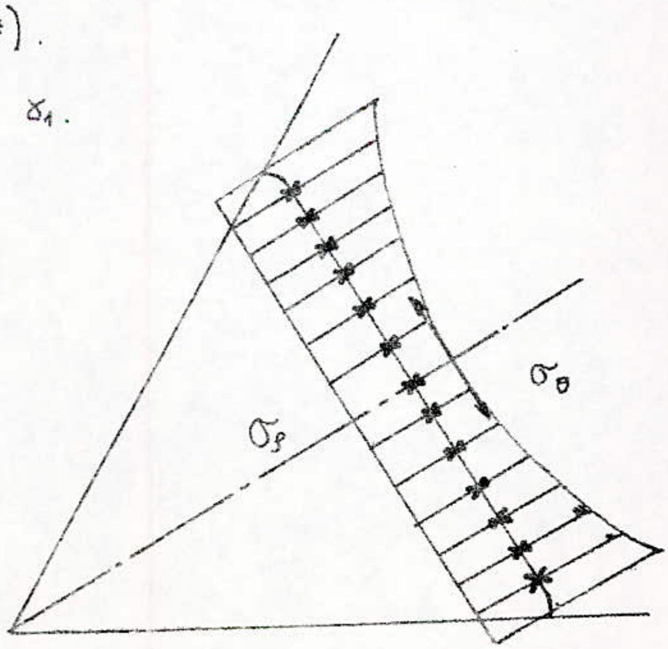


fig 3 Répartition des contraintes sur le contour interieur.

* [7]

V 3b Deuxième cas

L'apparition de la précontrainte amène une différence au niveau des contraintes. En effet, on remarque que σ_θ diminue avec l'augmentation de la précontrainte puis augmente aprés avoir atteint un minimum. Cela revient au fait qu'en augmentant la précontrainte, on agit inversement à l'action de la pression P_1 existante sur le contour interieur à cause de l'équilibre des contraintes dans la matière. Mais à partir d'une certaine valeur, c'est la précontrainte qui devient prédominante et on a alors augmentation de σ_θ avec l'augmentation de la précontrainte.

Il est à noter que la variation de rayon n'a pas d'effet direct sur la contrainte lorsque c'est la précontrainte qui est prédominante.

Ce cas de figure (Précontrainte prédominante) n'est pas utile car cela revient à rendre important le rôle de la précontrainte, alors que le but recherché en créant cette précontrainte est la diminution de la p contrainte σ_θ, sans plus, et aussi le maintien de la matrice dans la frette.

Le cas idéal serait de créer une précontrainte qui diminuerait au maximum la contrainte σ_θ dans la matrice.

La répartition des contraintes σ_ξ et σ_θ est la même que dans le premier cas fig3

V 3c Troisième cas

Ce cas est plus proche de la réalité. En effet, la pression P_1 variable est dûe à la géométrie de la matrice, car plus on s'éloigne de l'axe de la matrice – qui en résistance des matériaux est appelé axe neutre – plus la contrainte est faible.

Les conditions enoncées en découlent de l'observation. Leur vérification nécéssite des experiences. Néanmoins, la fonction étudieé au troisième cas se rapproche de la fonction réèlle en ce sens que ses variations sont a priori identiques.

En consultant les résultats, on remarque que la contrainte σ_θ est minimale aux coins et est maximale au milieu du pan, lorsque la précontrainte est minimale. Cela est normal car la seule cause de l'éxistance de σ_θ est la pression P_1, d'où des variations similaires.

En augmentant la précontrainte, cette variation devient moins grande jusqu'à s'inverser et augmenter (mais dans le sens inverse). Cela est dû à la prédominance de la précontrainte en ce cas là

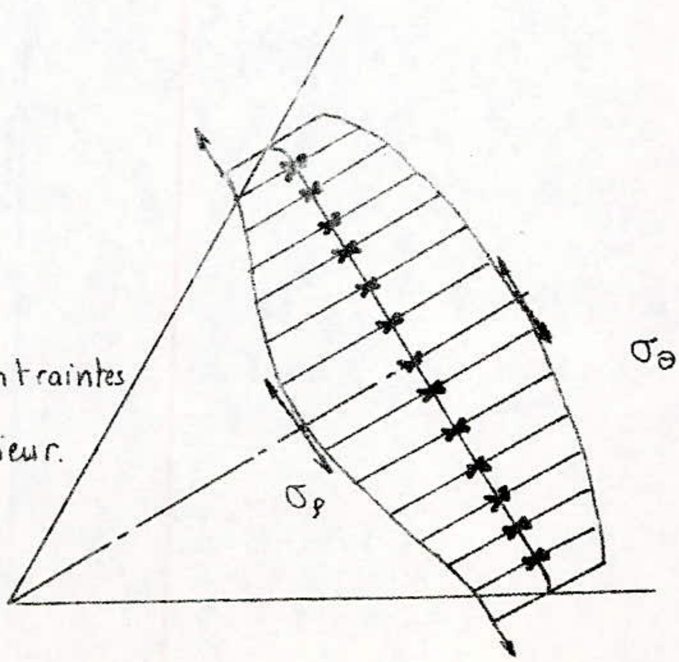
Sur γ_1

$\sigma_\rho = -P_1$

$\tau_{\rho\theta} = 0$

fig 4:

Répartition des contraintes sur le contour interieur.



CONCLUSION

La théorie de Muskhelishvili est intéressante pour la détèrmination des contraintes. Sa mise en oeuvre nécéssite l'emploi de moyens informatiques (dans notre cas, un micro-ordinateur). Plus la capacité de l'appareil est grande, plus les résultats sont précis

Nous avons établie que la présence de la précontrainte a un effet certain sur les variations des contraintes, allant jusqu'à jouer un rôle prédominant lorsqu'elle devient importante.

Nous avons établie pour les trois cas étudiés la variation des contraintes le long d'un pan de l'hexagone, ce qui pourrait être étendu à tout l'héxagone par symétrie.

Nous pouvons détèrminer la valeur du rayon pour laquelle les contraintes sont minimisé, et en combinant ceci avec l'augmentation de la précontrainte, diminuer au maximum les contraintes à l'interieur de la matrice.

Ainsi, avec ces trois résultats, nous pouvons concevoir la forme de la matrice pour laquelle les contraintes seront minimales.

L'augmentation du rayon amène la diminution de la contrainte maximale, mais aussi une augmentation de la contrainte minimale. Cela est dû au fait que plus le rayon est grand, et plus la contrainte est répartie sur le contour, donc plus l'écart entre les pressions maximale et minimale est faible.

V4 VERIFICATION DE LA METHODE

Une moyen rapide de vérification de la méthode consiste à appliquer celle ci pour un cercle. En effet, lorsque le trou de la matrice devient circulaire, la formule donnant σ_θ est connue (Tubes epais)

$$\sigma_\theta = P\left(\frac{r^2}{R^2 - r^2}\right)\left(1 + \frac{R^2}{x^2}\right) \qquad r \leq x \leq R$$

Pour trouver les contraintes sur le contour intérieur, il faut faire $P = P_1$ et $x = r$.

La verification de la methode consiste à prende une matrice de dimensions :

$a = a$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $R = R$.

Tout ceci nous amène à concevoir quelques suites possibles à cette étude, et qui sont :

Etude de l'action de la précontrainte sur d'autres formes de la matrice

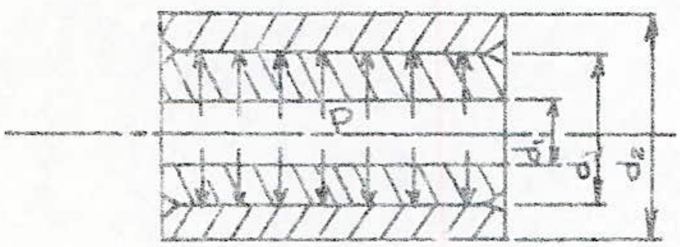
Généralisation de l'action de la pression interieure variable à des formes plus complexes de matrices. Ces formes pourrait être : carré, pentagone, décagone... .

Nous ésperons que ce modeste travail puisse enrichir la compréhension des mécanismes régissants la déformation de la matière, et ainsi contribuer contribuer à agrandir le domaine d'étude de la résistance des matériaux.

ANNEXE I

DETERMINATION DE LA PRECONTRAINTE

La précontrainte P2 est tirée du principe des assemblages forcés. La formule qui détermine P2 est empirique.



La formule s'écrit : $P = \dfrac{S \cdot 10^{-3}}{d \left(\dfrac{C_1}{E_1} + \dfrac{C_2}{E_2} \right)}$

P = Pression générée par le serrage (Précontrainte) (daN/mm^2)

S = Serrage = différence de diamètres des pieces assemblées

S : [μm]

E_1, E_2 = Modules d'élasticité longitudinale pour les deux pieces [daN/mm^2]

C_1 et C_2 = Coéfficient déterminés par la relation de Lamé

$$C_1 = \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \mu_1 \quad ; \quad C_2 = \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} + \mu_2$$

μ_1, μ_2 = coefficients de Poisson $\mu_{acier} = 0,3$, $\mu_{fonte} = 0,25$

ANNEXE II

DETERMINATION DE LA VARIATION DE LA PRESSION POUR LE TROISIEME CAS

Determination de Pmin.

$P_{min} = k_{f0}$ (Contrainte d'écoulement)

En effet, il n'est pas utile de déformer encore plus le métal pour obtenir la forme désirée.

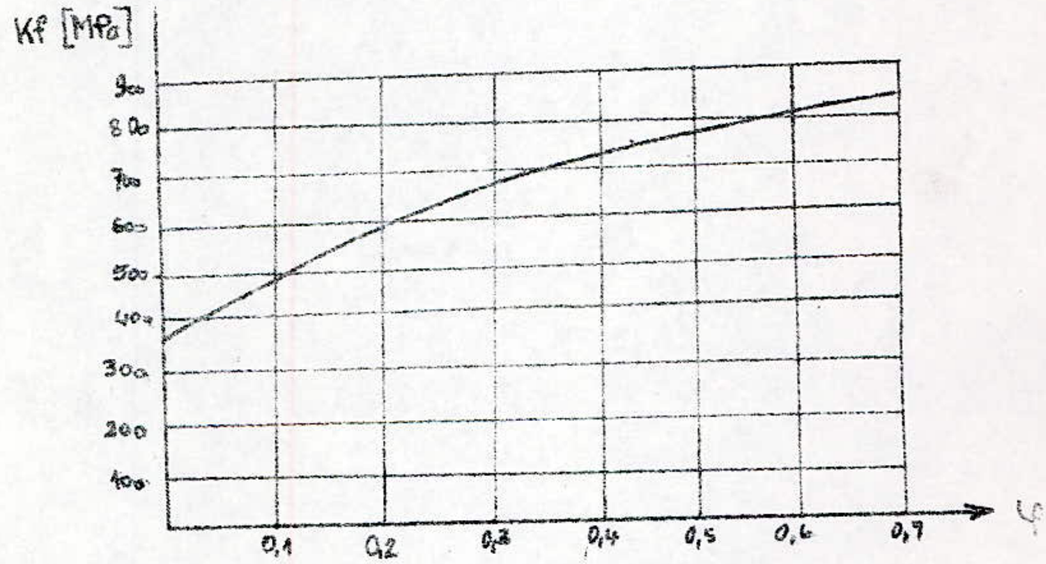
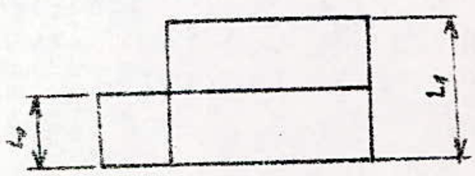


fig 1 XC 15

Pour l'acier XC15 $K_{f0} = 370$ MPa

Determination de a



$\varphi = \ln\left(\frac{L_0}{L_1}\right)$

L_0 : Longueur initiale, L_1 : Longueur finale

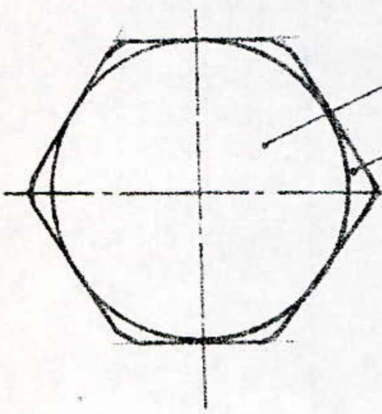
D'après les lois sur les déformations plastiques : $P = a\varphi^{\circ}$.

Cette loi est expérimentale. x et a sont determinées par la fig. 1

$\varphi = 0 \Rightarrow x = P = kf_o$

$$a \simeq \frac{P - x}{\varphi} = \frac{Kf - kf_o}{\varphi} \quad \text{car} \quad P \equiv Kf.$$

Determination de φ



$$\varphi = Ln\left(\frac{L_o}{L_1}\right)$$

Comme nous avons égalité des volumes alors :

$V_{final} = V_{initial}$.

$S_f L_1 = S_i L_o$

$$Sf = 6 . \frac{a^2}{4}\sqrt{2} = 3 a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_i = \pi \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{L_o}{L_1} = \frac{S_f}{S_i} = \frac{3a^2\sqrt{2}/2}{\pi a^2/2} = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \simeq 1{,}35$$

$\varphi = Ln(1{,}35) = 0{,}3 \Rightarrow Kf = 650$ MPa.

Calcul de $f_1(\sigma)$ pour la préssion intérieure variable

$$f'_1(\sigma) = -\left[Kf_o + \frac{a}{2} Ln(1{,}35)\left(1 - \cos 6\alpha\right)\right] \omega'(\sigma)$$

$$f_1(\sigma) = \int -\left[Kf_o + \frac{a}{2} Ln(1{,}35)\left(1 - \cos 6\alpha\right)\right] \omega'(\sigma)\, d\sigma$$

$$= -\left[Kf_o + \frac{a}{2} Ln(1{,}35)\right] \omega(\sigma) + \int \frac{a}{2} Ln(1{,}35) \cos(6\alpha)\, \omega'(\sigma)\, d\sigma$$

$$\cos 6\alpha = \frac{\sigma^6 + \bar{\sigma}^6}{|\sigma^6|} \quad \text{or } |\sigma| = \rho_1 \Rightarrow |\sigma|^6 = \rho_1^{\,6}$$

$$(\bar{\sigma})^6 = \left(\frac{\rho_1}{\sigma}\right)^6 = \frac{\rho_1^{12}}{\sigma^6}$$

D'où $f_1(\sigma) = -\left[K f_0 + \frac{a}{2} Ln(1,35)\right] \omega(\sigma) + I$

$$I = \int \frac{a}{2} Ln(1,35) \left(\frac{\sigma^6}{\rho_1^6} + \frac{\rho_1^6}{\sigma^6}\right) \omega'(\sigma)\, d\sigma$$

$$\omega'(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \sigma^{\nu-1}$$

$$I = \int \frac{a}{2} Ln(1,35) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\nu c_\nu \frac{\sigma^{\nu+5}}{\rho_1^6} + \nu c_\nu \sigma^{\nu-7} \rho_1^6\right] d\sigma$$

$$I = \frac{a}{2} Ln(1,35) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[\nu c_\nu \frac{\sigma^{\nu+6}}{(\nu+6)\rho_1^6} + \nu c_\nu \frac{\sigma^{\nu-6}}{\nu-6} \rho_1^6\right]$$

Opérons quelques changements de variables.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \frac{\sigma^{\nu+6}}{(\nu+6)\rho_1^6} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-6) c_{k-6} \frac{\sigma^k}{k \rho_1^6} \quad \text{avec } k = \nu+6$$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nu c_\nu \frac{\sigma^{\nu-6}}{\nu-6} \rho_1^6 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+6) c_{k+6} \frac{\sigma^k}{\cancel{k^6}} \rho_1^6 \quad \text{avec } k = \nu-6$$

$$I = \frac{a}{2} Ln(1,35) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left[(\nu-6) c_{\nu-6} \frac{1}{\nu \rho_1^6} + (\nu+6) c_{\nu+6} \frac{\rho_1^6}{\nu}\right] \sigma^\nu$$

En remplaçant ceci dans $f_1(\sigma)$ avec $\omega(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_\nu \sigma^\nu$, on tire

$$f_1(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Big\{ -\left(K f_0 + \frac{a}{2} Ln(1,35)\right) c_\nu + \frac{a}{2} Ln(1,35) \Big((\nu-6) c_{\nu-6} \frac{1}{\nu \rho_1^6} +$$

$$\nu+6\, c_{\nu+6} \frac{\rho_1^6}{\nu} \Big) \Big\} \sigma^\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k \quad \text{d'où par identification.}$$

$$A_k = \overline{A}_k = -\left[K f_0 + \frac{a}{2} Ln(1,35)\right] c_\nu + \frac{a}{2} Ln(1,35) \left[(\nu-6) c_{\nu-6} \frac{1}{\nu \rho_1^6} + (\nu+6) c_{\nu+6} \frac{\rho_1^6}{\nu}\right].$$

ANNEXE III

PROGRAMME

Voici la liste des notations utilisées dans le programme:

Notation dans le texte	Not. dans le prog.	Remarque
a	Ao	Dimensions de la matrice
r	Ro	
R	R1	
$R2$	R2	rayon frette
π	PI	
β	BE	
m	M	
l	L	
α	AL	Coord. des points matrice
γ	GA	
ρ_1	RH1	
$x_i, y_i,$	XI, YI	Pts de la matrices . hexagone
x_j', y_j'	XJ , YJ	certle exterieur
	ZXI, ZXI, ZXJ, ZYJ	Pts de la matrice calculés.
c_k	CK(I)	
c_{-k}	CMK(I).	
P1	P1	Det. contraintes exterieures.

P2 Kf Kfo S c_1, c_2, E_1, E_2 μ_1, μ_2	P2 KF KFO S C_1 C_2, E_1, E_2 NU1 , NU2	
$Re(\omega')$ $Im(\omega')$	ROM (I) IOM (I)	Det des coef de oméga dérivée
$Re\varphi'$ $Im\,\varphi'$ σ_θ	RFI (I) IFI (I). S(I)	Calcul des contraintes

```
10 REM "KOL MUSK"
20 REM "************************************************************************
30 REM "    CALCUL DE RESISTANCE DES MATRICES PRECONTRAINTES DU FILAGE
40 REM "                    A FROID A CONTENEUR HEXAGONAL
50 REM "************************************************************************
60 '
70 REM "Ce programme permet de determiner les contraintes de compression "
80 REM "et de traction Sn et St et de cisaillement T produites par une    "
90 REM "pression P1 sur le contour interieur d'une matrice hexagonale,et "
100 REM "subissant une precontrainte P2 sur le contour exterieur,en fonc-"
110 REM "tion des dimensions de la matrice a,r et R.La methode utilisee  "
120 REM "est celle de MUSKHELISHVILI.                                    "
130 REM "                                                                "
140 REM "On choisira une pression exterieur unitaire et constante sur le "
150 REM "contour exterieur.                                              "
160 REM "la pression interieur sera d'abord prise constante,puis variable"
170 REM "Le nombre de points est choisi car le calcul se fait point par  "
180 REM "point.                                                          "
190 '
210 REM "****************************************************************"
220 REM "                    DIMENSIONS DE LA MATRICE                    "
230 REM "****************************************************************"
240 INPUT "Cote de l'hexagone a=";A0
250 INPUT "Rayon de courbure des coins r=";R0
260 INPUT "Rayon exterieur de la matrice R=";R1
270 PI=3.14159265359#
280 BE=ATN(R0/2/(A0-R0*3^.5/6))
290 PRINT "BETA =";BE
300 MMIN=PI/3/BE+1
310 PRINT "Le nombre de points m doit etre superieur ou egal a";INT(MMIN+1)
320 INPUT "Nombre de points consideres m=";M
330 '
340 REM "****************************************************************
350 REM "          COORDONNEES DES POINTS DE LA MATRICE (UN SEUL PAN)     "
360 REM "****************************************************************"
370 '
380 DIM XI(M),YI(M),XJ(M),YJ(M),CK(40),CMK(40)
390 L=A0-2*R0/3^.5
400 RA=L/R0
410 PRINT "l=";L:PRINT:PRINT
415 PRINT "************************************************************"
420 PRINT TAB(5);"XI(I)";TAB(20);"YI(I)";TAB(35);"XJ(I)";TAB(50);"YJ(I)"
425 PRINT "************************************************************"
427 PRINT
430 NUM=0
440 DEN=0
450 FOR I=1 TO M
460 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
470 IF AL>BE THEN 480 ELSE 520
480 IF AL<(PI/3-BE) THEN 490 ELSE 560
490 XI(I)=A0*3^.5/(TAN(AL)+3^.5)
500 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
500 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
510 GOTO 630
520 GA=ATN(RA*SIN(AL)/SQR(1-(RA*SIN(AL))^2))
530 XI(I)=R0*COS(AL)*(COS(GA)+RA*COS(AL))
540 YI(I)=R0*SIN(AL+GA)
550 GOTO 630
560 IF AL=PI/3 THEN 610 ELSE 570
570 GA=ATN(RA*SIN(PI/3-AL)/SQR(1-(RA*SIN(PI/3-AL))^2))
580 XI(I)=R0*(SIN(PI/3-AL)*COS(GA)+SIN(GA)*COS(PI/3-AL))*COS(AL)/SIN(PI/3-AL)
590 YI(I)=XI(I)*TAN(AL)
600 GOTO 630
```

```
600 GOTO 630
610 XI(I)=(L+R0)*COS(AL)
620 YI(I)=(L+R0)*SIN(AL)
630 XJ(I)=R1*COS(AL)
640 YJ(I)=R1*SIN(AL)
650 PRINT I;TAB(5);XI(I);TAB(20);YI(I);TAB(35);XJ(I);TAB(50);YJ(I)
660 '
670 REM "          RAYON DU CERCLE INTERIEUR DE L'ANNEAU          "
680 '
690 NUM=NUM+XI(I)*COS(PI*(2*I-1)/6/M)+YI(I)*SIN(PI*(2*I-1)/6/M)
700 DEN=DEN+XJ(I)*COS(PI*(2*I-1)/6/M)+YJ(I)*SIN(PI*(2*I-1)/6/M)
710 NEXT I
720 PRINT:PRINT:PRINT
730 RH1=NUM/DEN
740 PRINT "Rho=";NUM;"/";DEN;"=";RH1
750 PRINT:PRINT:PRINT
760 '
770 REM "************************************************************"
780 REM "       COEFFICIENTS DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION        "
790 REM "************************************************************"
800 '
810 PRINT "CALCULS EN COURS:VEUILLEZ PATIENTER."
815 PRINT "************************************************************"
820 PRINT TAB(20);"CK(J)";TAB(45);"CMK(J)"
825 PRINT "************************************************************"
827 PRINT
830 FOR J=1 TO (6*M-2) STEP 3
840 IF J>28 THEN 1010 ELSE 850
850 S1=0:S2=0:S3=0:S4=0
860 FOR I=1 TO M
870 P1=COS(PI*J*(2*I-1)/6/M)
880 P2=SIN(PI*J*(2*I-1)/6/M)
890 S1=S1+XJ(I)*P1+YJ(I)*P2
900 S2=S2+XI(I)*P1+YI(I)*P2
910 P1=COS(PI*(J+1)*(2*I-1)/6/M)
920 P2=SIN(PI*(J+1)*(2*I-1)/6/M)
930 S3=S3+XI(I)*P1-YI(I)*P2
940 S4=S4+XJ(I)*P1-YJ(I)*P2
950 NEXT I
960 CK(J)=S1-S2*RH1^(6*M-J)
970 CK(J)=CK(J)/M/(1-RH1^(6*M))
980 CMK(J+1)=S3*RH1^(J+1)-S4*RH1^(6*M)
990 CMK(J+1)=CMK(J+1)/M/(1-RH1^(6*M))
1000 NEXT J
1000 NEXT J
1010 FOR H=1 TO 28 STEP 3
1020 PRINT H;TAB(15);CK(H);TAB(35);H+1;TAB(40);CMK(H+1)
1030 NEXT H
1040 PRINT:PRINT:PRINT
1050 '
1060 PRINT "************************************************************"
1070 PRINT "     VERIFICATION DE LA FONCTION DE TRANSFORMATION          "
1080 PRINT "************************************************************"
1090 PRINT
1100 PRINT TAB(7);"XI";TAB(22);"YI";TAB(37);"XJ";TAB(52);"YJ"
```

```
1100 PRINT TAB(7);"XI";TAB(22);"YI";TAB(37);"XJ";TAB(52);"YJ"
1110 PRINT
1120 FOR I=1 TO M
1130 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
1140 ZXI=0:ZYI=0:ZXJ=0:ZYJ=0
1150 FOR H=1 TO 13 STEP 6
1170 ZXI=ZXI+CK(H)*COS(H*AL)*RH1^H
1180 ZYI=ZYI+CK(H)*SIN(H*AL)*RH1^H
1190 ZXJ=ZXJ+CK(H)*COS(H*AL)
1200 ZYJ=ZYJ+CK(H)*SIN(H*AL)
1210 NEXT H
1220 ZXI=ZXI+CMK(5)*COS(5*AL)/RH1^5+CMK(11)*COS(11*AL)/RH1^11
1230 ZYI=ZYI-CMK(5)*SIN(5*AL)/RH1^5-CMK(11)*SIN(11*AL)/RH1^11
1240 ZXJ=ZXJ+CMK(5)*COS(5*AL)+CMK(11)*COS(11*AL)
1250 ZYJ=ZYJ-CMK(5)*SIN(5*AL)-CMK(11)*SIN(11*AL)
1260 PRINT I;TAB(5);ZXI;TAB(20);ZYI;TAB(35);ZXJ;TAB(50);ZYJ
1270 NEXT I
1280 PRINT:PRINT
1290 '
1300 REM "**************************************************************"
1310 REM "              DETERMINATION DE LA CONTRAINTE EXTERIEURE        "
1320 REM "**************************************************************"
1330 '
1340 PRINT "Trois modeles de contraintes exterieures:":PRINT:PRINT
1350 PRINT "DEFINITION:  P1=Pression sur le contour interieur"
1360 PRINT "             P2=Pression sur le contour exterieur"
1370 PRINT
1380 PRINT "Cas 1=P1 constante;P2 nulle      (Cas 1)"
1390 PRINT "Cas 2=P1 constante;P2 constante (Cas 1)"
1400 PRINT "CAS 3=P1 variable;P2 constante (Cas 2)"
1400 PRINT:PRINT
1410 INPUT "Cas choisi=Cas";CAS
1420 PRINT:PRINT
1430 IF CAS=1 THEN 1440 ELSE 1460
1440 INPUT "QUELLE EST LA VALEUR DE LA PRESSION EXTERIEUR P1:P1=";P1
1450 GOTO 1520
1460 PRINT "La pression P1 variable varie suivant l'expression:"
1470 PRINT "P1=KF0+(KF-KF0)/LOG(1.35)*(1-COS(6*AL))"
1480 PRINT
1490 INPUT "QUELLE EST LA VALEUR DE KF ?";KF
1500 INPUT "QUELLE EST LE VALEUR DE KF0 ?";KF0
1510 A=(KF-KF0)/LOG(1.35)
1520 PRINT
1530 PRINT "DETERMINATION DE LA PRESSION EXTERIEURE P2 (ASSEM. FORCE)
1540 PRINT
1550 INPUT "QUELLE EST LA VALEUR DU SERRAGE S ?";S
1560 IF S=0 THEN 1710
1570 PRINT
1580 PRINT "QULLES SONT LES VALEURS DES COEFFICIENTS DE POISSON ?"
1590 INPUT "NU1=";NU1
1600 INPUT "NU2=";NU2
1610 PRINT
1620 PRINT "QUELLES SONT LES VALEURS DES MODULES D'ELASTICITE ?"
1630 INPUT "E1=";E1
1640 INPUT "E2=";E2
1650 PRINT
1660 INPUT "QUELLE EST LA VALEUR DU RAYON EXTERIEUR DE LA FRETTE ?";R2
1670 C1=(R1^2+R0^2)/(R1^2-R0^2)-NU1
1680 C2=(R2^2+R1^2)/(R2^2-R1^2)+NU2
1690 P2=S*.001/(2*R1)/(C1/E1+C2/E2)
1700 GOTO 1720
```

```
1700 GOTO 1720
1710 P2=0
1720 PRINT:PRINT
1730 PRINT "**********************************************************************
1740 PRINT "LA PRESSION P2 SUR LE CONTOUR EXTERIEUR EST EGALE A:";P2
1750 PRINT "**********************************************************************
1760 PRINT:PRINT
1770 PRINT "CALCULS EN COURS:VEUILLEZ PATIENTER."
1780 '
1790 REM "**********************************************************************
1800 REM "    DETERMINATION DES COEFFICIENTS ak DE LA FONCTION POTENTIEL
1810 REM "**********************************************************************
1820 N=7
1830 DIM A(N,N),F(N)
1840 FOR I=1 TO N
1850 FOR J=1 TO N
1860 A(I,J)=0
1870 NEXT J
1880 F(I)=0
1890 NEXT I
1900 FOR V=-9 TO 9 STEP 3
1910 S1=0
1920 FOR K=-8 TO 10 STEP 3
1930 I=4+V/3:J=4+(K-1)/3
1940 S=V+K  :D=K-V
1950 IF S<0 THEN C=CMK(ABS(S))
1960 IF S>0 THEN C=CK(S)
1970 IF D<0 THEN F=CMK(ABS(D))
1980 IF D>0 THEN F=CK(D)
1990 IF S>10 THEN C=0
2000 IF S<-8 THEN C=0
2000 IF S<-8 THEN C=0
2010 IF D>10 THEN F=0
2020 IF D<-8 THEN F=0
2030 A(I,J)=(1-RH1^(2*K))*S*C+(1-RH1^(2*D))*K*F
2040 G=V-K
2045 IF K<0 THEN C=CMK(ABS(K))
2048 IF K>0 THEN C=CK(K)
2050 IF G>0 THEN H=CMK(G)
2060 IF G<0 THEN H=CK(ABS(G))
2070 IF G>10 THEN H=0
2080 IF G<-8 THEN H=0
2090 IF CAS=1 THEN 2100 ELSE 2130
2100 BK=-P2*H
2110 AK=-P1*H
2120 GOTO 2250
2130 L1=V-K-6:L2=V-K+6
2140 IF L1>0 THEN Q1=CMK(L1)
2150 IF L1<0 THEN Q1=CK(ABS(L1))
2160 IF L1<-8 THEN Q1=0
2170 IF L1>10 THEN Q1=0
2180 IF L2>0 THEN Q2=CMK(L2)
2190 IF L2<0 THEN Q2=CK(ABS(L2))
2200 IF L2<-8 THEN Q2=0
```

```
2240 AK=-(KF0+A*LG)*H-A*LG*RH1*L2*Q2/G+A*LG*L1*Q1/RH1/G
2250 S1=S1+(BK-AK*RH1^2)*C*K
2260 NEXT K
2270 F(I)=S1
2280 NEXT V
2290 PRINT:PRINT
2300 GOSUB 5500
2310 '
2320 REM "*************************************************************
2330 REM "     DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE OMEGA (DERIVEE)
2340 REM"**************************************************************
2350 DIM ROM(M),IOM(M)
2360 FOR I=1 TO M
2370 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
2380 S1=0:S2=0
2390 FOR K=-8 TO 10 STEP 3
2400 IF K<0 THEN R=CMK(ABS(K)) ELSE R=CK(K)
2410 S1=S1+K*R*COS((K-1)*AL)*RH1^(K-1)
2420 S2=S2+K*R*SIN((K-1)*AL)*RH1^(K-1)
2430 NEXT K
2440 ROM(I)=S1:IOM(I)=S2
2450 NEXT I
2460 IF CAS=1 THEN 2470 ELSE 2530
2470 '
2480 DIM P1(M)
2490 FOR I=1 TO M
2500 P1(I)=P1
2510 NEXT I
2520 GOTO 2640
2530 DIM P1(M)
2540 FOR I=1 TO M
2550 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
2560 P1(I)=KF0+A*LG*(1-COS(6*AL))/2
2570 NEXT I
2590 '
2600 REM "*************************************************************
2610 REM "                   CALCUL DES CONTRAINTES
2620 REM "*************************************************************
2630 '
2640 DIM S(M),RFI(M),IFI(M)
2650 PRINT:PRINT
2660 PRINT TAB(15);"-----------"
2670 PRINT TAB(15);"*  SIGMA  *"
2680 PRINT TAB(15);"-----------"
2690 FOR I=1 TO M
2700 AL=PI/3/(M-1)*(I-1)
2710 S1=0:S2=0
2720 FOR K=-2 TO 10 STEP 3
2730 J=4+(K-1)/3
2740 L=K-1
2750 S1=S1+K*E(J)*RH1^L*COS(L*AL)
2760 S2=S2+K*E(J)*RH1^L*SIN(L*AL)
2770 NEXT K
2780 RFI(I)=ABS(S1)
2790 IFI(I)=S2
2800 K1=ROM(I)^2+IOM(I)^2
2810 S(I)=4*(RFI(I)*ROM(I)-IFI(I)*IOM(I))/K1+P1(I)
2820 PRINT I;TAB(15);S(I)
2830 NEXT I
2840 GOTO 8000
8000 END
```

```
5500 REM "************************************************************"
5510 REM "                    RESOLUTION DU SYSTEME AX=B                 "
5520 REM "************************************************************"
5540 DIM G(N)
5550 FOR H=1 TO N-1
5555 FOR I=H+1 TO N-1
5560 IF A(H,H)<>0 THEN 5710
5570 PRINT "PIVOT A(";H;",";H;")EST NUL"
5580 FOR L=H+1 TO N-1
5590 IF A(L,H)<>0 THEN 5620
5610 NEXT L
5611 GOTO 5620
5615 IF A(N,H)=0 THEN 5617 ELSE 5620
5617 PRINT "SYSTEME ILLEGAL:RESULTATS ERRONES"
5618 GOTO 8000
5620 PRINT "SYSTEME IRREGULIER"
5630 PRINT " PERMUTATION DE LA LIGNE ";H;"AVEC LA LIGNE ";L
5640 FOR W=1 TO N
5650 G(W)=A(L,W)
5660 A(L,W)=A(H,W)
5670 A(H,W)=G(W)
5680 NEXT W
5690 Q=F(L)
5700 F(L)=F(H)
5705 F(H)=Q
5710 FOR J=H TO N
5720 A(I,J)=A(I,J)-A(I,H)/A(H,H)*A(H,J)
5730 NEXT J
5740 F(I)=F(I)-A(I,H)/A(H,H)*F(H)
5750 NEXT I
5760 NEXT H
5770 PRINT "CALCUL DU DETERMINANT=PRODUIT DES PIVOTS"
5780 D=1
5790 FOR I=1 TO N
5800 D=D*A(I,I)
5810 NEXT I
5820 PRINT "DET:D=";D
5830 PRINT " VOICI LES SOLUTION DE AX=B"
5840 DIM E(N)
5850 E(N)=F(N)/A(N,N)
5860 FOR I=N-1 TO 1 STEP -1
5870 S=0
5880 FOR K=N TO I+1 STEP -1
5890 S=S+A(I,K)*E(K)
5900 NEXT K
5910 E(I)=(F(I)-S)/A(I,I)
5920 NEXT I
5930 FOR J=1 TO N
5940 PRINT "E(";J;")=  ";E(J)
5950 NEXT J
5960 RETURN
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] N.I. MUSKHELISHVILI "Some basic problems of the mathematical théory of élasticity ; Fondamental équations, plane théory of élasticity, torsion and bending." Ltd Groningen Nordhoff.

[2] Dr FRANÇOIS et L. JOLY ." La rupture des métauxs" Ecole d'été de la colle sur loup Sept. 70

[3] A. DONEDU "Mathématiques superieures et spéciales mp1, mp2" - Compléments d'analyse T.4. Ed dunod Paris.

[4] V. SMIRNOV " Cours de Math. Sup." T III Edition MIR Moscou 1972

[5] A.G. UGODSCIKOV et A.E. SZTYEPANOV : "Résolution des problèmes de l'élasticité plane sur ordinateur analogique et digital" Moscou 70 Traduit en hongrois par ELter Pàlné Budapest 1978.

[7] Projet de fin d'études = Calcul de résistance d'une matrice du filage à froid à conteneur héxagonal." étudié par S. ZEBDI proposé et dirigé par A. ELEOD Promotion Juin 1985 E.N.P.A.