

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT DE L'HYDRAULIQUE
LABORATOIRE DE RECHERCHE DES SCIENCES DE L'EAU (L.R.S.E)

MEMOIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

En vue de l'obtention du diplôme de:

**Magister
EN HYDRAULIQUE**

THEME :

**ETUDE DU REGIME TRANSITOIRE A COUP DE
BELIER IMPOSE : PAR LA METHODE DES
CARACTERISTIQUES**

Soutenu publiquement le 22/09/2002 par M^r DERNOUNI Youcef

devant le jury composé de :

MM : D ^r KETTAB . A	Professeur	E.N.P	Président
D ^r SALAH . B	Chargé de cours	E.N.S.H	Rapporteur
D ^r REMINI . B	Maître de conférences	U.S.T.S.D	Membre
D ^r BERKANI . M	Chargé de cours	E.N.P	Membre
D ^r BILEK .	Chargé de cours	E.N.P	Membre

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE L'HYDRAULIQUE

ETUDE DU REGIME TRANSITOIRE A COUP DE BELIER IMPOSE : PAR LA METHODE DES CARACTERISTIQUES.

ملخص :

حسب المفهوم العلمي ، توجد ظاهرة صدمة الضغط المرتفع المتزايدة أو المتناقصة و التي لا تخضع للمراقبة بواسطة قانون التشغيل. و بالتالي فإن هذه الظاهرة ، تصبح مضرّة جداً بالنسبة لقنوات توزيع المياه و تظهر خاصة في توسعها و انكماشها ، مما ينتج عن ذلك تلفها. قمنا في هذا العمل بدراسة مفصلة للنظام الانتقالي و الذي يتولد في قنوات السيلان بواسطة الدفع الجاذبي ، عندما نفرض ظاهرة صدمة الضغط المرتفع التي لا يمكن أن تتجاوز القيمة القصوى التي تتحملها قسنة التوزيع. و لضمان هذه الأخيرة، يجب توفير هذه الوسيلة غير المباشرة من أجل حماية الشبكة و طريقة عامة محددة لقانون أمثل لتشغيل الحنفية المقترح. و قد أكملنا هذا العمل بدراسة مقارنة بين حنفيتين من خلال أمثلة عديدة.

تتميز هذه الدراسة بفائدة كبيرة من الناحية العملية ذلك أنها تقوم بحماية شبكات التوزيع
المصطلحات الرمزية: ضربات الكبش، سرعة الموجة، الانتقالية

RESUME :

Dans la littérature, il existe des coups de béliers croissants et décroissants, qui ne sont pas contrôlés par la loi de manœuvre. Par conséquent ces phénomènes deviennent très nuisibles à la canalisation. Ils se manifestent notamment par des cassures et des implosions. Dans ce travail il a été procédé à une étude détaillée du régime transitoire engendré dans une conduite à écoulement en charge gravitaire, tout en imposant un coup de bélier à la conduite, ne dépassant pas la valeur majorante. Afin d'assurer ce dernier, considéré comme moyen indirect de protection, un procédé général de détermination d'une loi optimale de manœuvre d'un robinet-vanne a été proposé.

Ce travail a été complété par une étude comparative de deux robinets-vannes, à travers un exemple numérique. Cette étude est d'un intérêt important dans le domaine pratique pour la protection des canalisations.

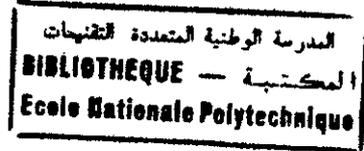
Mots clés : conduites ; coups de bélier ; célérité d'onde ; transitoires.

ABSTRACT :

In the literature it exists increasing and decreasing water hammers, that are not controlled by the operation law consequently these phenomena became very harmful to the channeling. They appear in the form of breaks and implosions. In this work we have done an exhaustive study of the transitory flow generated in a pipe with a gravitary load flow, by imposing a water hammer to the pipe, without exceeding the major value. In order to assure this later, considered as an indirect protection mean a general process of the optimal law determination of the sluice-water tap operation has been proposed. This work has been completed by a comparative study of two sluice-water taps, through a numerical example. This study has a significant interest in the practical domain for the channeling protection.

Key words ; pipe, water-hammer, wave celerity, transitories.

REMERCIEMENT



A l'orée de ce modeste travail, je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma profonde gratitude

A; mon promoteur Docteur SALAH Bouâlem, pour ses conseils, son aide précieuse, ses orientations, sa disponibilité et ses encouragements.

Au Professeur KETTAB Ahmed , pour avoir bien voulu présider ce jury.

Aux membres de jury : - Mr REMINI B
- Mr BERKANI M
- Mr BILLEK

qui me feront l'honneur d'apprécier et de juger ce travail.

Y. DERNOUNI

SOMMAIRE

CHAPITRE 1

Présentation du régime transitoire

Introduction

1.	Présentation du régime transitoire	
1.1	Introduction	1
1.2	Aperçus bibliographiques sur les travaux antérieurs	2
1.3	Coups de bélier	4
1.3.1	Généralités	4
1.3.2	Analyse du coup de bélier	6
1.3.2.1	Formulation du phénomène	6
1.3.2.2	Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une conduite après une fermeture instantanée dans la vanne	10
1.4.	Conclusion	14

CHAPITRE 2

Analyse du régime transitoire

2.1	Introduction	15
2.2	Expression des contraintes dans les tuyaux sous pression	16
2.3	Equation de continuité	18
2.4	Equation dynamique	21
2.5	Equations aux caractéristiques	23
2.6	Conclusion.	27

CHAPITRE 3

Méthodes d'Analyse du régime transitoire

3.1.	Introduction	28
3.2	Présentation des méthodes de solution	28
3.2.1	Méthode graphique de SCHNYDER-BERGERON	28
3.2.1.1	Principe de la méthode	28
3.2.2.	Méthode arithmétique	30
3.2.3.	Méthode des différences finies	31
3.2.3.1	Méthodes implicites	32
3.2.3.2	Méthodes explicites	32
3.2.4.	Méthodes des caractéristiques	32
3.2.5.	Application de la méthode des caractéristiques à la résolution des équations de SAINT-VENANT	36
3.2.6.	Intégration du système différentiel	39
3.3.	Conditions aux limites	43
3.4.	Méthode d'interpolation de HARTREE	49
3.5	Convergence et stabilité des calculs par la méthode des caractéristiques.	52
3.6	Conclusion	53

CHAPITRE 4

Célérité de propagation des ondes du coup de bélier

4.1	Introduction	54
4.2	Aperçu bibliographique	54
4.3	Propagation de l'onde dans une conduite.	57
4.4	Expressions générales de la célérité d'onde de propagation	60
4.4.1	Rappel des équations de base	60
4.4.2	Célérité dans les conduites élastiques	62
4.4.2.1	Prise en compte des ancrages	63
4.4.2.2	Expression du coefficient de déformabilité C	64
4.4.3	Expression particulière de la célérité.	65
4.5	Conclusion.	66

CHAPITRE 5

Etude du régime transitoire à coup de bélier imposé

5.1	Généralités	67
5.2	Détermination du couple charge-vitesse sans prise en compte des pertes de charge.	67
5.2.1	Détermination du paramètre h_{Li} en phase de fermeture	69
5.2.2	Détermination de la vitesse U_{vi} durant la phase de fermeture	72
5.2.3	Cas d'un coup de bélier imposé au système considéré.	74
5.2.3.1	Cas de la fermeture	74
5.2.3.2	Cas d'une ouverture	77
5.3	Détermination du couple charge-vitesse tenant compte de pertes de charge.	80
5.3.1	Analyse de la perte de charge par variation parabolique de la vitesse.	80
5-3-2	Détermination de la charge b_{li} en phase de fermeture.	81
5-3-3	Détermination de la vitesse U_n en phase de fermeture.	83
5-3-4	Cas d'un coup de bélier au système considéré.	87
5-3-5	Influence de la perte de charge sur le temps de fermeture à coup de bélier imposé.	89
5-3-6	Influence de la perte de charge sur le temps d'ouverture à coup de bélier imposé.	90
5.4	Etude comparative.	92
5.5	Conclusion .	94

CHAPITRE 6

Détermination de la loi de manœuvre optimale

6.1	Introduction.	95
6.2	Présentation des types de robinets vannes choisis	95
6-2-1	Généralités sur les robinets vannes.	95
6-2-2	Robinet vannes à opercule	96
6-2-3	Robinet vannes à boisseau.	
6-3	Détermination de la loi de manœuvre à coup de bélier imposé :	
	cas de robinet vanne à opercule.	96
6-3-1	Cas sans pertes de charge.	97
6-3-1-1	Détermination de la loi de variation de débit Q_{vi}	97
6-3-1-2	Détermination du débit Q_k en fonction des caractéristiques de robinet vanne.	98
6-3-2	Cas avec pertes de charge.	100
6-3-2-1	Détermination de la vitesse V_{vi} et du débit Q_{vi}	100
6-3-2-2	Détermination des valeurs de débit Q_{kv}	103
6-3-2-3	Déduction graphique de la loi de manœuvre.	104
6-3-2-4	Interprétation.	104
6.4	Détermination de la loi de manœuvre à coup de bélier imposé.	105
	Cas de robinet vanne à boisseau.	
6-4-1	Détermination des débits Q_{vi}	105
6-4-1-1	Cas sans perte de charge.	105
6-4-1-2	Cas avec pertes de charge.	106
6-4-2	Détermination de débit Q_{kv} à travers le robinet vanne à boisseau.	107
6-4-2-1	Cas sans pertes de charge.	108
6-4-2-2	Cas avec pertes de charge.	109
6-4-3	Déduction de la loi de manœuvre de robinet vanne à boisseau.	109
6-4-4	Interprétation des résultats et comparaison entre les deux lois de manœuvre avec et sans pertes de charge.	111
6.5	Conclusion.	111

Conclusion générale

CHAPITRE 6

Détermination de la loi de manœuvre optimale

6.1	Introduction.	95
6.2	Présentation des types de robinets vannes choisis	95
6-2-1	Généralités sur les robinets vannes.	95
6-2-2	Robinet vannes à opercule	96
6-2-3	Robinet vannes à boisseau.	
6-3	Détermination de la loi de manœuvre à coup de bélier imposé :	
	cas de robinet vanne à opercule.	96
6-3-1	Cas sans pertes de charge.	97
6-3-1-1	Détermination de la loi de variation de débit Q_{vi}	97
6-3-1-2	Détermination du débit Q_k en fonction des caractéristiques de robinet vanne.	98
6-3-2	Cas avec pertes de charge.	100
6-3-2-1	Détermination de la vitesse V_{vi} et du débit Q_{vi}	100
6-3-2-2	Détermination des valeurs de débit Q_{kv}	103
6-3-2-3	Déduction graphique de la loi de manœuvre.	104
6-3-2-4	Interprétation.	104
6.4	Détermination de la loi de manœuvre à coup de bélier imposé.	105
	Cas de robinet vanne à boisseau.	
6-4-1	Détermination des débits Q_{vi}	105
6-4-1-1	Cas sans perte de charge.	105
6-4-1-2	Cas avec pertes de charge.	106
6-4-2	Détermination de débit Q_{kv} à travers le robinet vanne à boisseau.	107
6-4-2-1	Cas sans pertes de charge.	108
6-4-2-2	Cas avec pertes de charge.	109
6-4-3	Déduction de la loi de manœuvre de robinet vanne à boisseau.	109
6-4-4	Interprétation des résultats et comparaison entre les deux lois de manœuvre avec et sans pertes de charge.	111
6.5	Conclusion.	111

Conclusion générale

INTRODUCTION



La bibliographie montre qu'au niveau des systèmes hydrauliques en charge, les transitoires à forte variation de pression engendrent souvent des désordres dans des écoulements. Il en résulte, au niveau des conduites, des décollements d'enduits de protection interne, des dislocations des joints et leur aspiration, des implosions, des ébullitions pouvant entraîner des fortes cavitations, et voire même des cassures des conduites. Ces inconvénients mettent souvent les ingénieurs gestionnaires dans le centre des problèmes à résoudre. Dans le domaine pratique, ces problèmes nocifs dus aux transitoires sont souvent rencontrés au niveau des adductions en charge, soit en refoulement juste à la sortie de la pompe en absence des moyens de protection anti-bélier, soit en gravitaire juste à l'amont des robinets-vannes. Les points hauts des profils en long de ces adductions, peuvent également être le siège des problèmes sus-cités.

Dans le cas gravitaire, faisant l'objet de la présente étude, il sera étudié le phénomène transitoire provoqué d'une façon générale par la manœuvre d'un robinet-vanne supposé placé à l'extrémité aval de la conduite. Le raisonnement sera mené d'abord par l'examen de la célérité d'onde, qui est le paramètre fondamental caractérisant le régime transitoire, ensuite la présentation des différentes méthodes d'étude du régime transitoire, à titre descriptif. Bien qu'on lui reconnaisse des faiblesses (erreurs dans le temps et dans l'espace), la méthode des caractéristiques, outil d'étude fiable en informatique, servira de base pour le présent travail, sans discrétisation de la conduite à étudier.

Des modèles mathématiques, avec et sans pertes de charge, à variation parabolique de la vitesse dans l'espace seront développés avec l'idée d'un coup de bélier imposé au système hydraulique considérée ne dépassant pas la pression de rupture. Cette initiative, tributaire du comportement mécanique de la conduite vu l'effet nocif des coups de bélier croissants et décroissants en pratique. Ces derniers peuvent être provoqués par une manœuvre non contrôlée des robinets-vannes.

Il sera donc proposé une méthode d'abord comparative et de détermination d'une loi de manœuvre optimale comme moyen de protection assurant un coup de bélier imposé, et qui sera proposée au constructeur.

CHAPITRE I

PRESENTATION DU REGIME TRANSITOIRE

1.1- INTRODUCTION

A travers ce chapitre, il sera examiné la présentation de l'écoulement transitoire en général. Dans le domaine des réseaux, ce phénomène le plus souvent occasionné, est connu sous le nom de coups de bélier.

Dans ce sens, on définit l'écoulement transitoire comme étant un écoulement variable dans le temps et dans l'espace. Il peut se présenter ainsi comme un phénomène varié qui peut se produire soit à surface libre, soit en charge, soit à surface libre et en charge. Dans ce cas, les paramètres hydrauliques, décrivant cet écoulement, changent dans le temps et dans l'espace.

En fonction des perturbations provoquées dans un tel écoulement, les variations de ces paramètres peuvent s'amplifier d'une façon plus notable. Ainsi la pression et la vitesse, paramètres fondamentaux, peuvent être importants. Ces variations sont accompagnées par le phénomène de propagation des ondes de pression qui parcourent la conduite pendant un certain temps jusqu'à leur amortissement et l'établissement d'un nouveau régime permanent. En fonction de la nature de la source de perturbation provoquant le régime transitoire, les ondes de pression ou de dépression émises sont tellement importantes qu'elles provoquent des cassures du réseau, et des perturbations des écoulements. En conséquence, dans un régime transitoire, le but communément recherché est donc le contrôle des ondes de pression.

Afin de dimensionner et de prévoir ainsi les moyens de protection anti-bélier adéquats, la connaissance de l'origine et l'importance de ces ondes s'avère indispensable. En principe l'étude du régime transitoire sert à vérifier le comportement des conduites déjà choisies, cependant il n'existe pas de méthodes directes qui permettent de dimensionner des conduites tout en tenant compte du coups de bélier.

I.2 APERCUS BIBLIOGRAPHIQUES SUR LES TRAVAUX ANTERIEURS.

Plusieurs travaux antérieurs ont été consacrés à l'étude des écoulements transitoires. Ces travaux ont commencé primordialement par l'examen des ondes sonores dans l'air, ensuite par l'étude de la propagation des ondes dans l'eau peu profonde et l'écoulement du sang dans les artères.

A travers des constatations pratiques, **NEWTON** a étudié la propagation des ondes dans les canaux en déduisant expérimentalement la vitesse du son dans l'air comme étant égale à 348 m/s. C'est une vitesse approximative qui a été reprise ultérieurement par les chercheurs. En succédant les travaux de Newton, **MONGE (1789)** a eu l'idée sur le développement d'une méthode graphique d'intégration des équations hyperboliques aux dérivées partielles connue sous le nom de « méthode des caractéristiques ».

En analysant les travaux de Newton, et d'une façon plus appréciable, **THOMAS YOUNG (1808)** a élaboré expérimentalement sa théorie de la propagation des ondes de pression, qu'il a étalée dans le domaine des pulsations cardiaques. Sa théorie a été rendue célèbre car, à l'occasion de ces études, il introduisit le célèbre « module de **YOUNG** ». Malgré tous ces travaux, le problème de la célérité reste toujours posé au point de vue grandeur dans les canaux et les conduites. [1]

En s'intéressant à ce problème, **HELMHOLTZ (1853)** fut le premier à montrer que la célérité d'onde dans les canaux est supérieure à celle dans les conduites. Il a correctement attribué cette différence à l'élasticité de la conduite. A travers des recherches plus poussées, et en analysant le mouvement de la propagation des ondes sonores, et des cordes vibrantes, **RIEMANN (1869)** a développé et appliqué une équation tridimensionnelle de ce mouvement et de sa forme simplifiée unidimensionnelle.

La combinaison des travaux antérieurs ont permis à **KOTTEWITZ** comme étant le premier à déterminer la célérité d'onde en considérant l'élasticité de la conduite et la compressibilité du fluide en même temps. Bien que **WOOD (1825)** considère **MICHAUD (1820)** comme étant le premier à avoir traité le problème du coup de bélier ; des enquêtes faites par **ANDERSON (1830)** montrent que **MANABREA**

(1858) fût le premier à avoir étudié ce phénomène de coup de bélier. [1]

A partir de cette date, la compréhension du phénomène s'améliore jusqu'à ce qu'au début du siècle, elle devance les méthodes de calcul disponibles. C'est à ce moment que les ingénieurs praticiens ont développé des méthodes pour résoudre des formes simplifiées des équations principales. [2]

En constatant les amortissements du phénomène transitoire, **GROMEKA** (1920) a introduit pour la première fois, les frottements dans l'analyse du coup de bélier. Il a considéré cependant que le liquide est incompressible et que les frottements étaient directement proportionnels à la vitesse d'écoulement. **JOUKOVSKY** (1897) a publié son rapport classique sur la théorie de base du coup de bélier qui est basée sur ses études expérimentales et théoriques. En reprenant les travaux de **KOTWERG**, il a développé une formule pour la célérité des ondes, en tenant compte de l'élasticité de la conduite et de la compressibilité de l'eau. Il a aussi développé la relation entre la variation de la vitesse d'écoulement et celle de la pression en utilisant deux principes : le principe de la conservation d'énergie et celui de la continuité. Ces deux principes seront développés dans le prochain chapitre. [2]

La solution définitive du problème a été donnée par l'italien **LORENZO ALLIEVI** (1925) dans un mémoire magistral publié en décembre 1901 dans les annales de la société des ingénieurs et des architectes italiens. En reprenant les travaux de **KOTWERG**, **MANABREA**, et autres, le Suisse **OTHMAR SCHNYDER** (1929) a proposé une méthode graphique qu'il a par la suite appliquée aux systèmes en charge quelconques, et en particulier aux conduites forcées (1932). Indépendamment de **SCHNYDER**, le Français **LOUIS BERGERON** (1931) [3] a proposé la même méthode.

Le principe de cette méthode avait été donné par les autrichiens **KREITNER** et **LOWY** en 1928. Une procédure numérique s'appuyant sur la méthode des caractéristiques a été élaborée par les contributions de **PARMAKIAN** (1963) [4], de **WYLIE** et **STREETER** (1967) [5]. Ces auteurs (**WILLIE** et **STREETER**) ont présenté une étude des écoulements transitoires dans les tuyaux en utilisant une loi de

comportement élastique linéaire et non linéaire. **YOUNG DAHL** et **KOT** (1975 ; 1980) [5] ont développé et élargi la méthode des caractéristiques et ont rendu compte des divers phénomènes qui accompagnent le passage des ondes de coup de bélier dans les tuyauteries.

I. 3 .COUPS DE BELIER.

I.3.1. Généralités :

On définit habituellement le coup de bélier dans une conduite en charge comme étant des variations de pression résultant d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement, notamment lorsque les paramètres modificateurs sont importants. Le terme « coup de bélier » est synonyme d'un choc occasionné, (lors d'une perturbation transitoire dans un écoulement non permanent des fluides), dans une conduite en charge. Le terme en lui-même est expressif, et dans la plupart des cas sa présence nuisible est distinguée par son bruit caractéristique. Cependant, il y a eu plusieurs cas où le coup de bélier n'a pas été entendu mais a causé des dégâts au niveau des conduites, en créant des fissurations:

Une étude de coup de bélier vise à vérifier si la pression dans l'ensemble d'un système est à l'intérieur des limites prescrites suite à une perturbation de l'écoulement.[2]. L'étude classique des phénomènes du coup de bélier en conduite est habituellement menée dans l'hypothèse où la conduite est supposée constituée d'un empilement d'anneaux indépendants et sans masse .[7]

Des installations dans lesquelles des coups de bélier sont susceptibles de se produire se retrouvent dans une foule de champs d'activité [2] :

- Aqueducs
- Stations de pompage.
- Centrales hydro-électriques
- Refoulement des eaux usées.
- Transport d'Hydrocarbures.

- Boucles thermiques.
- Systèmes de refroidissement.
- Montage et procédé industriels.
- Systèmes d'irrigation.
- La manœuvre des robinets-vannes placés au milieu ou aux extrémités des conduites.
- Le remplissage ou la vidange d'un réseau d'eau.
- Variation des puissances des pompes.

Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes. Elles deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variation de pression et de débit dans le temps et dans l'espace). Ces variations de pression engendrées par des sources de perturbation, se produisant dans une conduite en charge peuvent causer d'énormes dégâts au réseau.

La surpression est une conséquence du coup de bélier engendré par une pression importante, se produisant à la suite d'une fermeture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement, ou bien à la suite d'une dépression causée par l'arrêt brusque d'une pompe. Si la pression totale, (c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier) dépasse la pression maximale admissible des tuyaux, il y a risque de rupture de ces derniers et déboîtement des joints (les anneaux d'étanchéité seront délogés). Pratiquement, ces ruptures sont fréquentes au niveau des bouts morts (accessoires). [6]

La dépression est une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée d'une vanne de sectionnement.

Si cette dépression devient inférieure à la pression atmosphérique (10 m.c.e), il se produit une poche de cavitation, la canalisation peut-être aplatie par implosion, et les joints peuvent être aspirés. Ce phénomène nocif est très fréquent, notamment au niveau des points hauts d'un profil en long.

En régime transitoire, les alternances des surpressions et des dépressions qui sont une conséquence inévitable du phénomène de coup de bélier, provoquent la fatigue du matériau de la canalisation même si leur amplitude est faible. [6]

I.3.2 - Analyse du Coup de Bélier :

I.3.2.1- formulation du phénomène :

Afin d'illustrer la formulation, on examine le cas où le coup de bélier est provoqué par la fermeture d'un robinet-vanne. On considère que ce dernier est placé à l'extrémité aval d'une conduite en charge, supposée horizontale. Cette conduite véhiculant de l'eau, de forme circulaire, et de caractéristiques uniques, est alimentée par un réservoir à niveau supposé constant (figure 1.1).

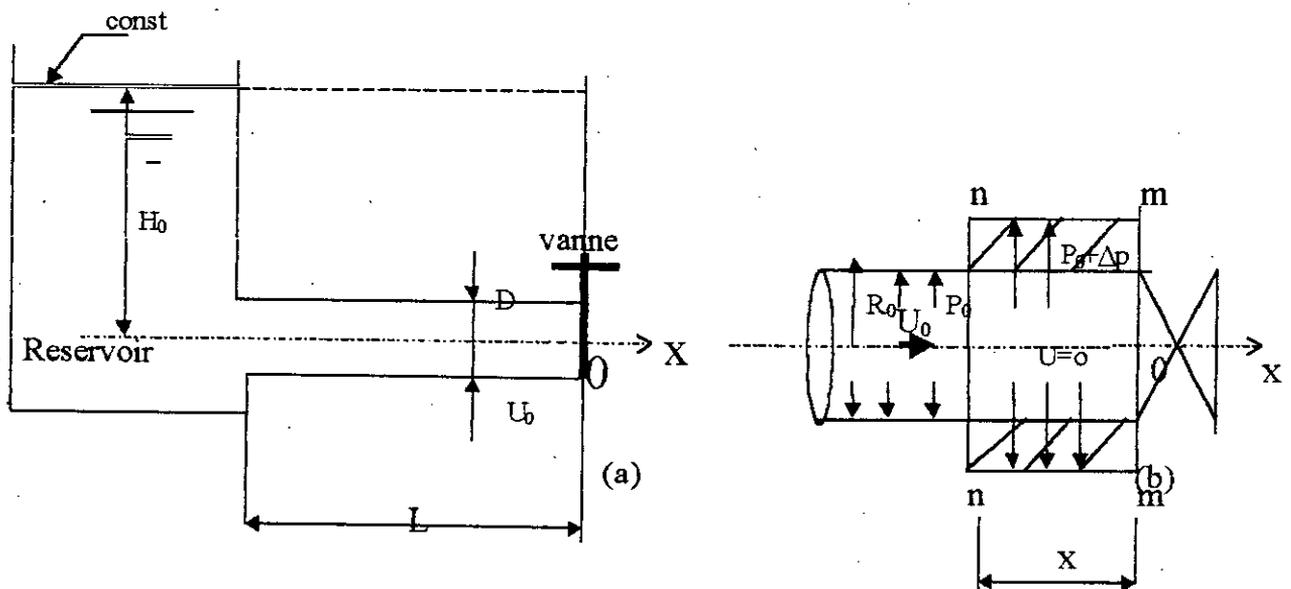


Figure 1.1 : Système gravitaire considéré

On désigne par :

D : diamètre intérieur de la conduite.

E : module d'élasticité du matériau constituant la paroi de la conduite.

e : épaisseur de la paroi de la conduite.

U_0 : vitesse d'écoulement en régime permanent.

P_0 : pression dans la conduite avant le coup de bélier.

$H_0 = P_0 / \rho.g$: hauteur piézométrique dans la conduite avant le coup de bélier.

S_0 : section de la conduite avant le coup de bélier.

S : section de la conduite après le coup de bélier.

On admet que :

- Les pertes de charge dans la conduite et la pression cinétique $\frac{U_0^2}{2.g}$ sont telles

qu'on peut les négliger.

- Les dimensions du réservoir sont telles que le niveau y sera pratiquement constant indépendamment de la variation du débit dans la conduite.

- A l'établissement des formules de calcul et à l'analyse du phénomène on ne tient pas compte de l'inertie de la paroi de la tuyauterie.

- Le temps de fermeture de la vanne est pris égal à zéro ($T_f = 0$) c'est-à-dire, on considère que la vanne se ferme instantanément.

- De plus on tient compte en même temps de la compressibilité du liquide et la déformation des parois de la conduite, suite à la variation de la pression.

- L'origine de la lecture des distances (point 0) est pris au niveau de la vanne.

- L'axe x est orienté positivement dans le sens de l'écoulement.

On suppose qu'au temps t_0 la vanne se ferme complètement d'une façon instantanée. Alors si le liquide est incompressible et les parois de la conduite non élastiques, on aura un arrêt instantané de toute la masse du liquide. Ainsi la quantité de mouvement deviendrait nulle en entraînant une élévation énorme de la pression sur toute la longueur de la conduite.

Au moment $t = (t_0 + \Delta t)$, les couches liquides disposées à gauche de la section n-n (figure I.1.b) continuent à se déplacer avec la vitesse U_0 vers la vanne.

Sous l'influence de la pression de ces couches, la masse du liquide arrêtée dans le compartiment m-n se trouve comprimée. Les parois de la conduite se dilatent et la pression augmente d'une valeur ΔP pour devenir égale à :

$$P = P_0 + \Delta P \quad (1.1)$$

De ce fait dans le compartiment m- n , le liquide qui n'est pas encore arrêté arrive par la section n-n durant le temps Δt avec une vitesse U_0 qui va en diminuant en réalité .

Pour déterminer la variation de la pression ΔP due à la fermeture instantanée de la vanne, on appliquera au compartiment m -n la loi de la variation de la quantité de mouvement.

Conformément à cette loi, la projection de l'accroissement de la quantité de mouvement d'un système matériel dans une direction quelconque est égale à la projection dans la même direction d'une impulsion des forces extérieures effectives.

Au moment $t = t_0$ la pression au point « 0 » est égale à P_0 (figure 1.1).

Au moment $t = t_0 + \Delta t$ la pression augmente et devient égale à :

$$P = P_0 + \Delta P.$$

Au moment $t = t_0 + \Delta t$ la section (n -n) subit la pression P_0 et la section m- m, la pression $P = P_0 + \Delta P$.

En négligeant les frottements, la projection sur l'axe de l'impulsion des forces extérieures agissant sur le compartiment m- n durant l'intervalle Δt (dans l'hypothèse d'une conduite horizontale), est égale à :

$$[P.S - (P_0 + \Delta P).S]\Delta t = -\Delta P.S.\Delta t \quad (1.2)$$

La variation de la quantité de mouvement de la tranche du liquide arrêté sera égale à :

$$\Delta M = -m.U_0 \quad (1.3)$$

avec : $m = \rho \Delta V$ - la masse de la tranche de liquide considéré.

$$d'où : \quad \Delta M = -\rho \Delta V.U_0 \quad (1.4)$$

V : désigne le volume

ρ : désigne la masse volumique de liquide

avec :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (1.5)$$

ΔV_1 : désigne le volume de la tranche liquide avant le coup de bélier

ΔV_2 : désigne l'augmentation du volume dû à la dilatation de la conduite.

On peut alors écrire :

$$\Delta P \cdot S \cdot \Delta t = \rho S \cdot \Delta x \cdot U_0 \quad (1.6)$$

En divisant par S, et en supposant $S=S_0$ (cas où l'augmentation de la section est négligeable devant la section initiale) ; on obtient :

$$\Delta P \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta x \cdot U_0 \quad (1.7)$$

d'où :

$$\Delta P = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} U_0 \quad (1.8)$$

En désignant le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ (quant Δt tend vers zéro) par « a » ; on obtient :

$$\Delta P = \rho a U_0 \quad (1.9)$$

La formule (1.9) a été établie par N. JOUKOVSKY

Comme

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot \Delta h \quad (1.10)$$

On obtient finalement :

$$\Delta h = \frac{a}{g} U_0 \quad (1.21)$$

le paramètre Δh désigne le coup de bélier dû à la vitesse U_0 .

le paramètre " a " désigne la vitesse de propagation de l'onde du coup de bélier dans la conduite.

Après la modification du régime dans le compartiment (m -n), une propagation de l'augmentation de pression atteindra le réservoir. L'équilibre de pression entre la conduite et le réservoir ne sera plus respecté, et il y aura alors détente et propagation d'une onde de dépression qui ramènera la conduite à son état initial mais avec un débit inverse ($-U_0 \cdot S_0$).

Lorsque l'onde de réflexion arrivera à la vanne, le débit appelé $(-U_0 S_0)$ provoquera une mise en dépression de la canalisation. Le phénomène de transformation de l'énergie cinétique en énergie de pression se poursuivra indéfiniment en maintenant l'énergie du système constante. [8]

I.3.2.2- Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une conduite après une fermeture instantanée de la vanne. [8]

Le front $(n - n)$ d'une onde de coup de bélier qui se propage le long de la conduite avec une célérité « a » entraîne des variations de pression et de vitesse dans les différentes sections de la conduite.

Ainsi au moment $t = t_0 + \frac{x}{a}$; ce front d'onde parcourt la distance x . (fig I.3)

Au moment $t = t_0 + \frac{L}{a}$; ce même front d'onde parcourt toute la longueur de la conduite. Dans ce cas, la pression augmente de ΔP sur tout le tronçon que l'onde de choc a parcouru et la vitesse du liquide diminue jusqu'à zéro (fig.I.4).

La figure (I.3) montre les épures de répartition de la hauteur de pression et du sens de la vitesse suivant la longueur de la conduite pour un état instantané au moment $t = t_0 + \frac{x}{a}$.

Sur ce tronçon de conduite, la pression a augmenté de ΔP pour devenir égale à $P_0 + \Delta P$ alors que le liquide se trouve en état contracté : sa vitesse tend vers zéro.

Au moment $t = t_0 + \frac{L}{a}$ le front « $n - n$ » de l'onde a atteint le réservoir et occupe la position « $n - n'$ » (Fig.I.4). A ce moment, le liquide dans la conduite se trouve en état de repos instantané ($U_0 = 0$).

Suivant toute la longueur L de la conduite, la pression a augmenté de ΔP et est devenue égale à $P = P_0 + \Delta P$.

Un tel état du système n'est pas du tout stable parce que, conformément à la supposition initiale, la pression dans le réservoir près de l'origine de la conduite garde sa

valeur initiale égale à P_0 ; c'est pourquoi au moment $t = t_0 + \frac{L}{a}$ l'élévation de pression ΔP dans la section n-n diminue d'une façon instantanée et devient égale à P_0 dans le réservoir.

Par conséquent au moment $t = t_0 + \frac{L}{a}$ apparaît une vitesse de mouvement du liquide égale à celle initiale dirigée dans le sens opposé, en même temps, apparaît une onde réfléchie qui avec une vitesse « a » se propage du réservoir vers la vanne en rétablissant dans la conduite la pression initiale P_0 et en créant la vitesse ($-U_0$).

La figure (I.5) représente un état instantané de la conduite, des épures de répartition de la hauteur de pression $\frac{P}{\rho.g}$ et du sens de la vitesse suivant la longueur au

moment $t = t_0 + \frac{2.L - x}{a}$

Au moment $t = t_0 + \frac{2.L}{a}$ (fig.I.6), l'onde réfléchie atteint la vanne et la masse du liquide contenue dans la conduite reprend son volume et sa pression initiaux, mais elle se trouve en état de mouvement vers le réservoir.

Comme c'est toute la masse du liquide qui commence à s'écouler vers le réservoir, alors au moment $t = t_0 + \frac{2.L}{a}$, la pression dans la section (m-m) doit diminuer d'une valeur qui doit être égale à $\Delta P = \rho.a.U_0$ équivalente à une hauteur $\Delta h = \frac{a.U_0}{g}$.

La réduction de la pression entraîne l'arrêt du liquide. Ainsi au moment.

$t = t_0 + \frac{2.L + x}{a}$; (fig.I.7) près de la vanne, il apparaît une onde de dépression

dont la pression devient $P = P_0 - \Delta P$ et la vitesse nulle ($U = 0$).

Cette onde atteint la vitesse "a " et, commence à se déplacer de la vanne vers le réservoir en créant dans la conduite un nouvel état de pression réduite à

$P = P_0 - \Delta P$ et à la vitesse du liquide U nulle.

Au moment $t = t_0 + 3 \frac{L}{a}$ (fig.I.8) ; l'onde de dépression atteint le réservoir.

Comme le repos survenu dans cet état décontracté (à $P < P_0$) ne peut pas être gardé parce que la pression dans le réservoir est toujours constante $P = P_0$, la section n-n devient de nouveau siège du mouvement du liquide du réservoir vers la vanne. C'est-à-dire au moment $t = t_0 + 3 \frac{L}{a}$, il apparaît une onde réfléchie dans le réservoir qui se propage vers la vanne avec la vitesse "a" en créant dans la conduite un nouvel état de pression initial P_0 et de vitesse U_0

La figure (I.9) représente un état instantané de la conduite et l'épure de répartition de la hauteur de pression $H = \frac{P}{\rho \cdot g}$ suivant la longueur, à l'instant

$$t = t_0 + \frac{3L}{a} + \frac{L-x}{a} = t_0 + \frac{4L-x}{a}$$

Sur le tronçon de longueur x, la pression à ce moment est égale à

$P = P_0 - \Delta P$, et la vitesse $U = 0$: le liquide est décontracté et les parois de la conduite sont comprimées. Mais sur le tronçon de longueur $L-x$; la pression est égale à P_0 , la vitesse $U = U_0$ et la paroi de la conduite revient à son état initial.

A l'instant $t = t_0 + \frac{4L}{a}$ (Fig I.10) l'onde réfléchie atteint la vanne. A ce moment tout le liquide dans la conduite se trouve à l'état initial, à la pression $P = P_0$, et à la vitesse $U = U_0$ dirigée vers la vanne fermée. Ceci provoque un nouveau coup de bélier. La pression au droit de la vanne augmente brusquement jusqu'à $P = P_0 + \Delta P$ et, le phénomène reprend à nouveau et indéfiniment avec un intervalle de période égale à : $\frac{4L}{a}$, puisque on suppose que le fluide est parfait (fig.1.2)

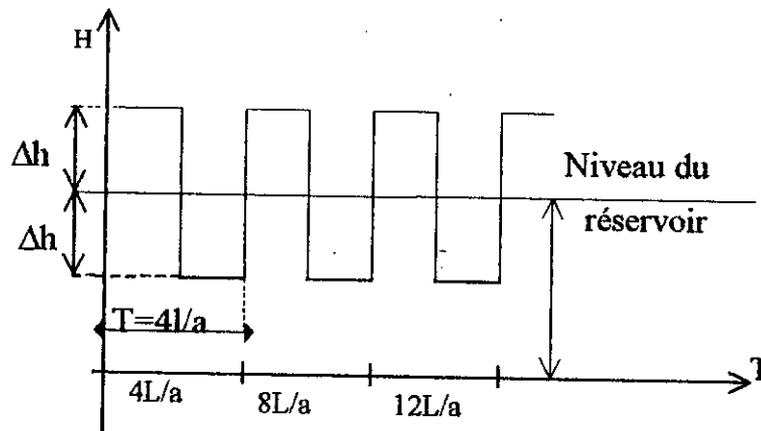


Figure 1.2 : Variation de la pression au niveau de la vanne
(frottement négligés)

Dans un fluide réel les frottements contribuent à la dissipation de l'énergie de pression, ce qui permet au fluide de reprendre son état initial au bout d'un certain temps (fig 1.3)

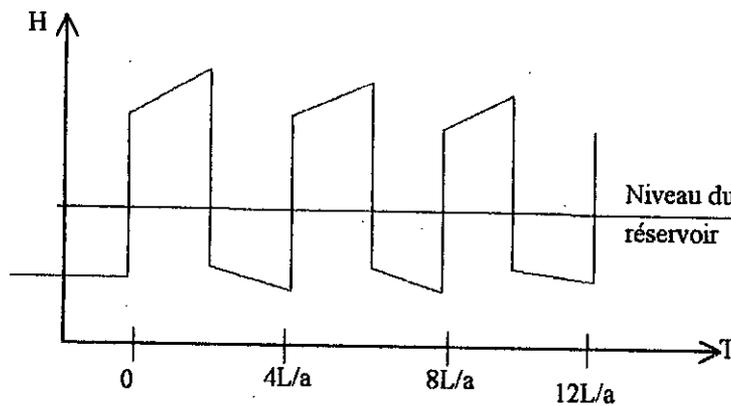
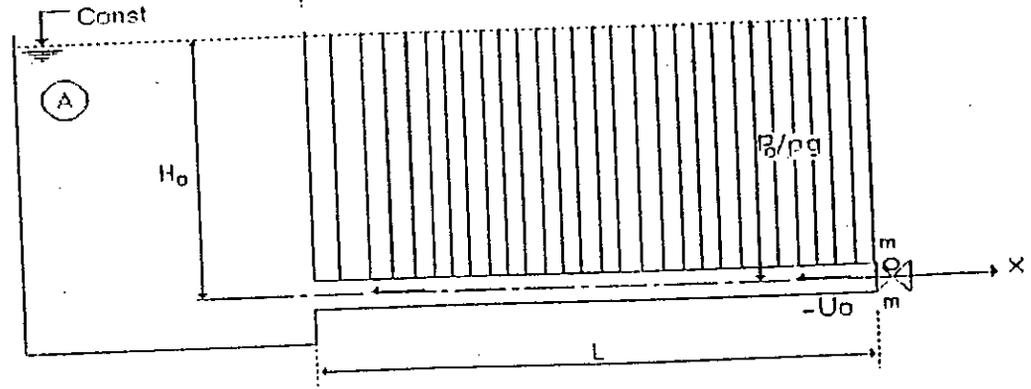
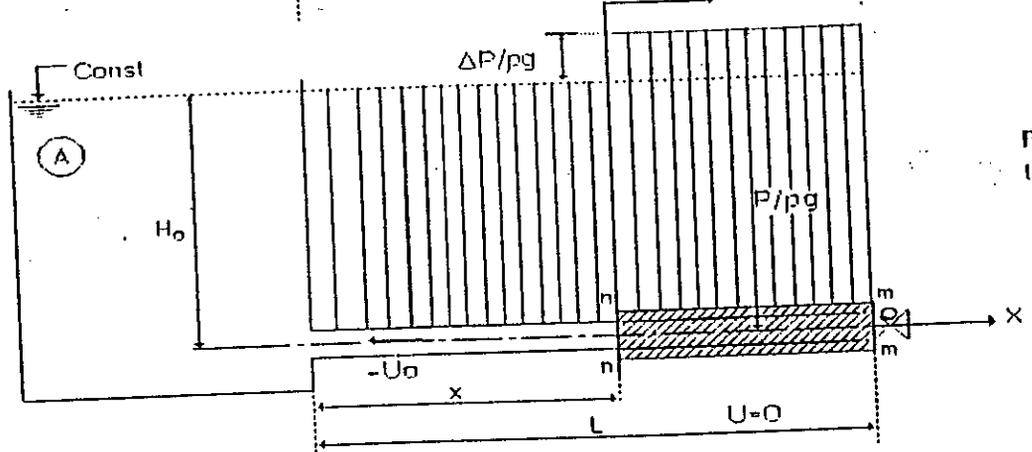
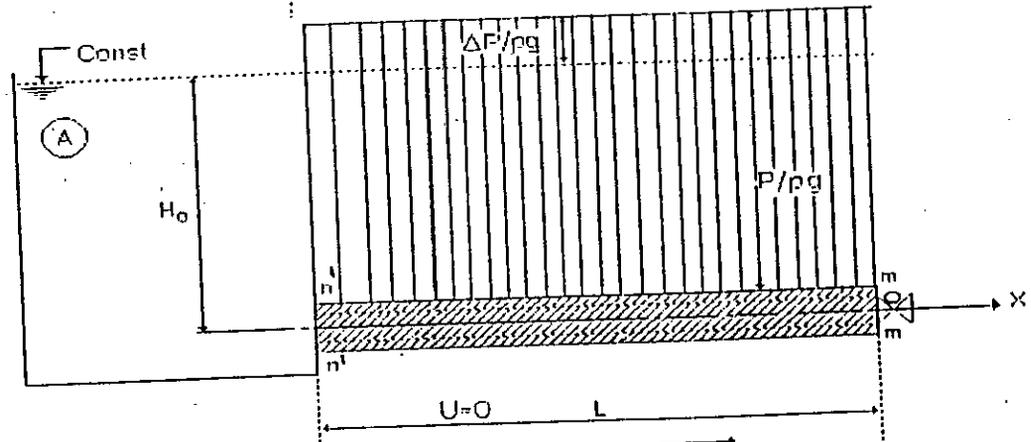
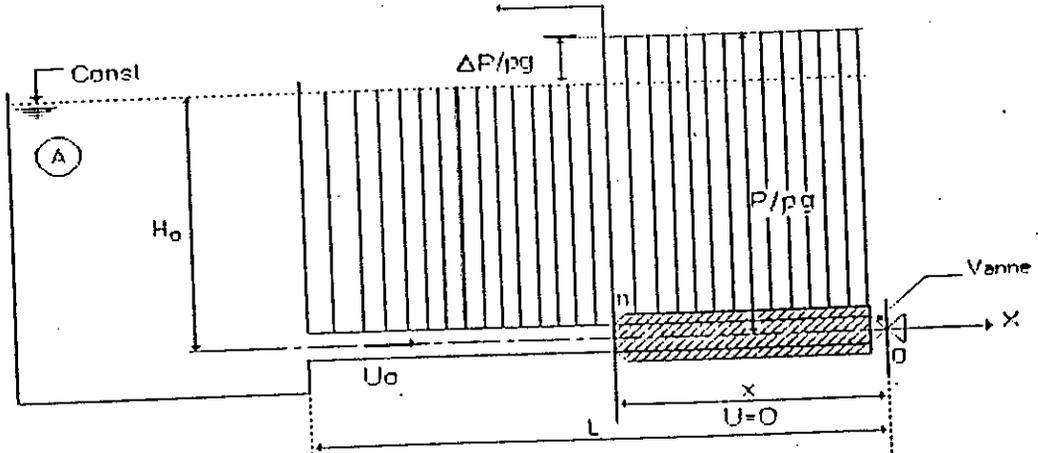
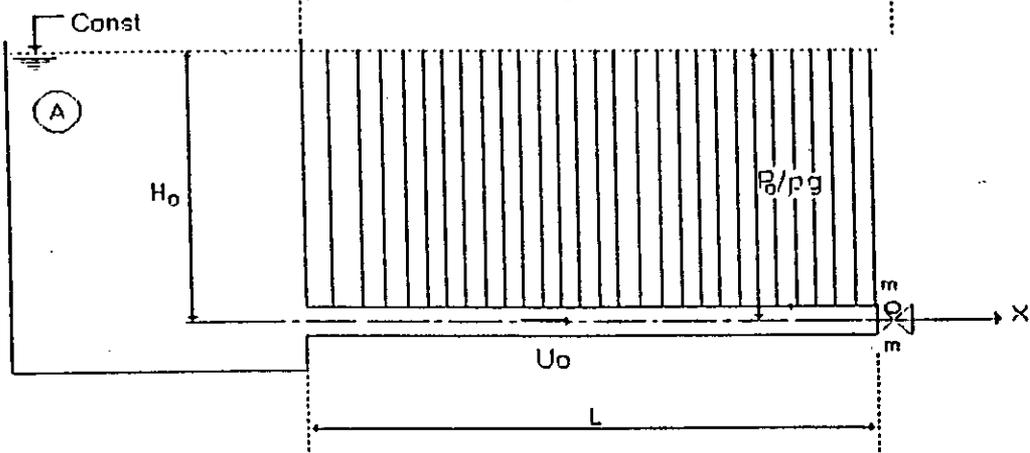
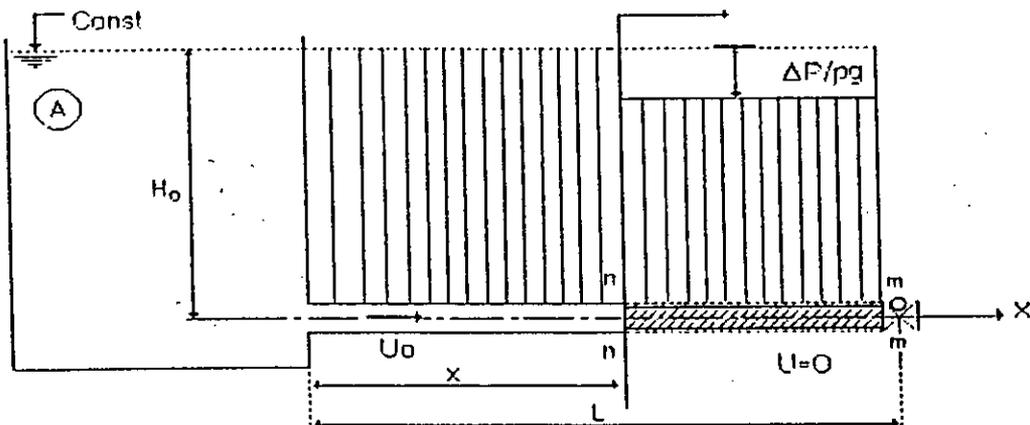
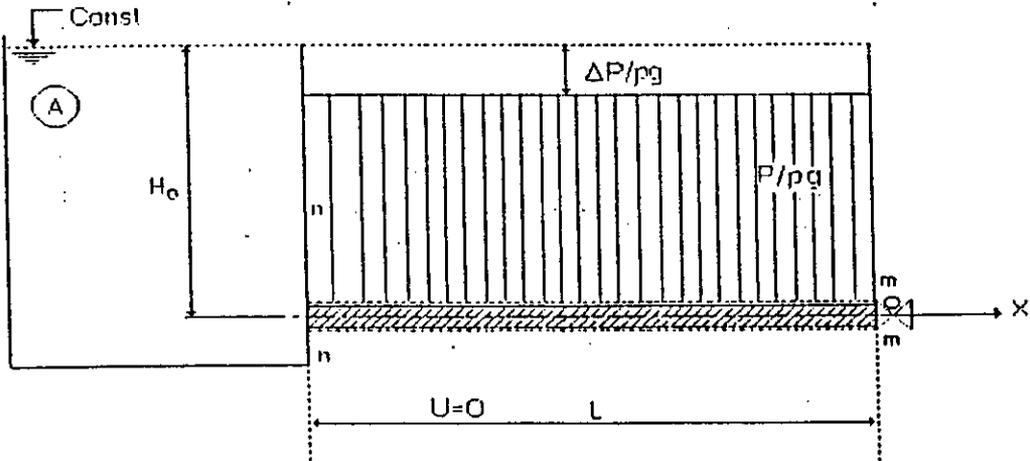
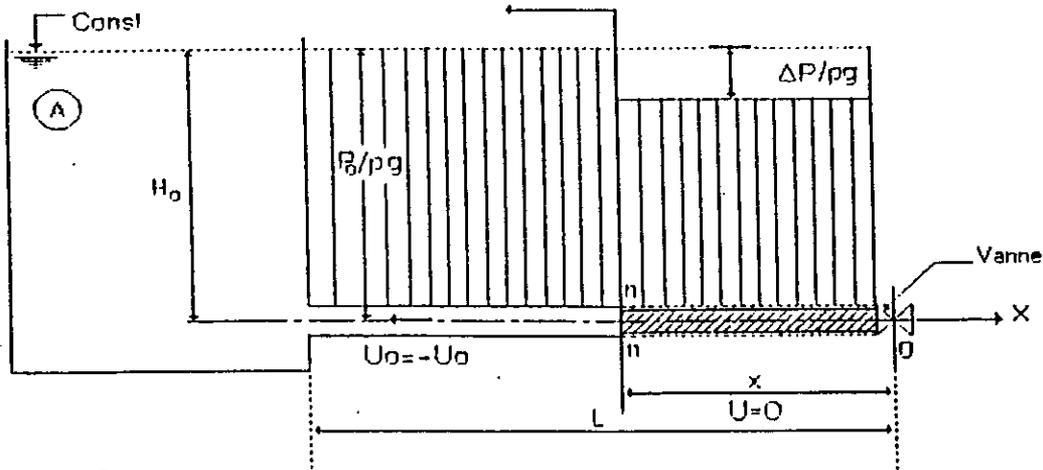


Figure 1.3 : Variation de la pression au niveau de la vanne
(tenant compte des frottements)





1.4:CONCLUSION

A travers ce chapitre, différents travaux sur le régime transitoire et le coup de bélier ont été présentés. Les points de vue des auteurs divergent quant à la contribution à la détermination des paramètres hydrauliques fondamentaux variables dans le temps et dans l'espace, régissant le régime transitoire. Certaines hypothèses ont été émises par les auteurs notamment quant à la variation de la vitesse dans l'espace comparativement au temps. Cette considération, bien qu'elle est toujours considérée par les hydrauliciens, a émis certaines confusions dans l'étude du régime transitoire, par suite de l'application des autres méthodes issues des équations de compatibilité, telle que la méthode des caractéristiques. Cette dernière sera reprise dans un autre chapitre afin d'examiner ces hypothèses. Dans tous les cas, il a été constaté que l'étude du coup de bélier a été toujours faite pour un système fluide -enveloppe linéairement élastique, et que la pression externe agissant sur la conduite a été prise comme nulle. Ce qui n'est pas le cas en réalité. La déformabilité de la conduite et la compressibilité du liquide ont été utilisées d'une façon simplifiée pour la détermination de la célérité d'onde de propagation des perturbations.

CHAPITRE 2

ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE

2.1. INTRODUCTION.

Dans l'analyse des transitoires du coup de bélier dans les conduites , le but communément recherché est le contrôle des ondes de pression.

En régime transitoire, les grandeurs définissant les conditions d'écoulement en un point de la conduite sont définies par la pression et la vitesse. Ces deux paramètres sont fonction du temps et de l'espace. Elles seront déterminées par la résolution d'un système de deux équations appelées équations de SAINT-VENANT' dérivant elles mêmes des deux équations qui sont :

- Equation de continuité
- Equation dynamique

Leurs contributions peuvent illustrer une approche mathématique du problème régissant le phénomène du régime transitoire selon deux formes.

Le paramètre modificateur peut engendrer une variation lente du débit et de la pression dans la conduite: on admet que la loi de l'évolution de l'écoulement est donnée d'une façon approchée par l'équation régissant les mouvements non permanents .Cette approche suppose un fluide incompressible et une conduite indéformable.

Le paramètre modificateur peut engendrer une variation rapide provoquant un gradient de débit ou de pression important, la déformation de l'enveloppe de la conduite et la compressibilité de l'eau sont à considérer . Ces variations rapides n'étant plus constantes en un instant "t" se présentent et se propagent sous forme d'ondes provoquant ainsi le coup de bélier. Dans ce présent travail, on fait abstraction du premier cas, où la déformabilité de la conduite et la compressibilité du liquide sont négligées, et on s'intéresse au cas réel; c'est- à dire la deuxième considération.

Il est nécessaire de rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous pression.

Le cas des matériaux élastiques sera seulement traité.

2.2 . EXPRESSION DES CONTRAINTES DANS LES TUYAUX SOUS PRESSION [6], [9], [10].

En se basant sur les notions de la résistance des matériaux, la détermination des contraintes dans les conduites est basée essentiellement sur le développement de la loi de HOOKE. Si on note par :

σ_1, σ_2 : respectivement les contraintes longitudinale et radiale

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$: les déformations correspondantes à ces contraintes

E : le module d'élasticité longitudinal du tuyau (Module de YOUNG)

ν : le coefficient de POISSON

Le coefficient de Poisson est défini comme étant le rapport entre la déformation longitudinale et la déformation radiale :

$$\nu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.1)$$

La loi de HOOKE permet d'écrire les expressions des déformations comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Afin d'expliciter la relation (2.2), on détermine les expressions donnant les contraintes σ_1 et σ_2 :

a) Contrainte σ_2

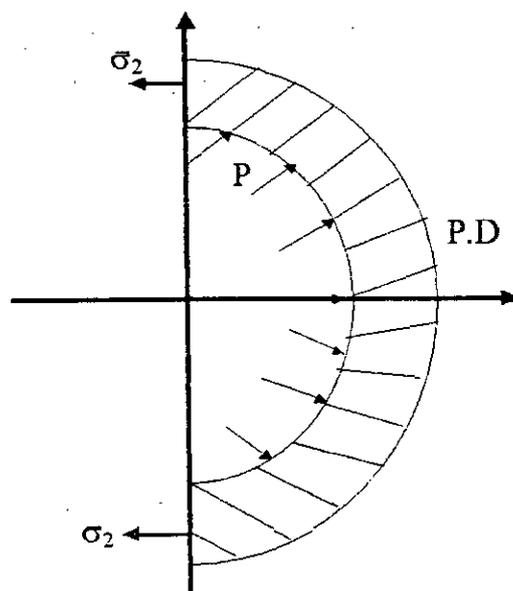


Figure 2.1 : Forces et contraintes radiales dans une conduite

Si D est le diamètre et " e " l'épaisseur du tuyau, la pression interne, exerce une force $P.D$ sur la demi - circonférence (Fig. 2.1)

on aura donc :
$$2\sigma_2 e = P.D \quad (2.3)$$

Ce qui donne :
$$\sigma_2 = \frac{P.D}{2.e}$$

$$\sigma_2 = \frac{P.D}{2e} \quad (2.4)$$

b) Contrainte σ_2 :

La détermination de la contrainte longitudinale σ_2 dépend du mode d'ancrage de la conduite dans le domaine pratique.

- **Premier cas d'ancrage:**

Si la conduite a suffisamment de joints, on peut considérer que la contrainte longitudinale et les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\sigma_2 = 0 \quad (2.5)$$

- **Deuxième cas d'ancrage :**

C'est un cas qui est également répandu dans le domaine de conception des réseaux en pratique. La contrainte longitudinale doit être prise en compte pour tout calcul mécanique. Elle dépend dans ce cas de la façon dont la conduite est ancrée aux extrémités.

- Conduite ancrée aux deux extrémités :

On a dans ce cas, et à la suite d'un passage d'un front d'onde, que la conduite ne peut se déformer longitudinalement, et par conséquent, on peut écrire :

$$\varepsilon_1 = 0 \quad (2.6)$$

et selon l'expression (2.2), on déduit :

$$\sigma_1 = \nu \sigma_2 \quad (2.7)$$

- Conduite libre à l'une de ses extrémités:

La force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est égale à : $\frac{P\pi D^2}{4}$

Cette force s'exerce sur le périmètre entier du tuyau πD , donc sur la surface $\pi D e$; ce qui permet d'écrire que :

$$\sigma_1 = \frac{P \pi D^2}{4 \pi D e} = \frac{P D}{4 e} \quad (2.8)$$

Et tenant compte de l'expression (2.4), on aboutit à :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2} \quad (2.9)$$

A la suite de ces différents modes d'ancrages sus-cités, on peut écrire qu'il existe une liaison entre les deux contraintes σ_1 et σ_2 et que dans tous les cas la contrainte σ_2 est égale à :

$$\sigma_2 = \frac{P.D}{2.e}$$

Ainsi on peut écrire que :

$$\sigma_1 = n\sigma_2 \quad (2.10)$$

A travers ce raisonnement sur les modes d'ancrage , on conclut que :

$n = \frac{1}{2}$ conduites sans joints libres à une extrémité.

$n = v$ conduites sans joints ancrés aux deux extrémités.

$n = 0$ conduite avec de nombreux joints.

2.3 . EQUATION DE CONTINUITÉ .

En analysant les déformations à masse constante d'un volume de liquide entre les instants t et $t + \Delta t$ (Figure 2.1), la masse du volume d'eau V se trouvant dans l'espace ΔL est donnée par :

$$m = \rho V = \rho.S.\Delta L. \quad (2.11)$$

Puisque la masse du liquide est supposée invariable, on peut écrire que la somme des rapports des variations de la masse volumique, de la section et de la longueur est nulle, par conséquent on peut écrire :

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dS}{S} + \frac{d\Delta L}{\Delta L} = 0 \quad (2.12)$$

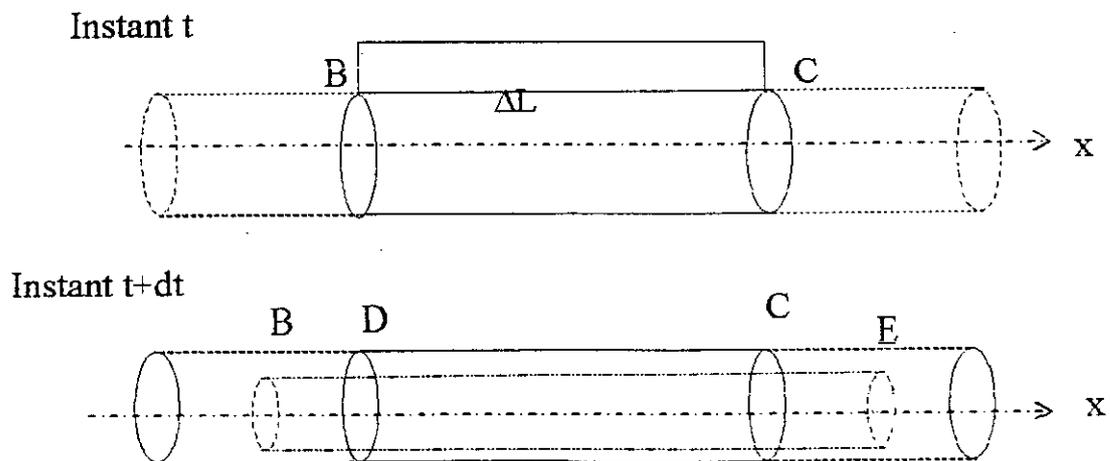


Figure 2.2 : Déplacement d'un élément liquide

- **La variation de la longueur de l'élément liquide considéré**

$$\Delta L(t) = X_c - X_b$$

$$\Delta L(t + \Delta t) = X_x - X_D$$

d'où il vient :

$$d(\Delta L) = \Delta L(t + \Delta t) - \Delta L(t) = (X_x - X_D) - (X_c - X_b)$$

$$d\Delta L = U_c dt - U_b dt = (U_c - U_b) dt = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta L dt$$

$$d'où : \quad \frac{d\Delta L}{\Delta L} = \frac{\partial u}{\partial x} dt \quad (2.13)$$

- **La variation de la masse volumique de l'élément fluide.**

En considérant la figure 2.1 et tenant compte du paramètre modificateur qui est la pression, le volume d'eau compris entre les deux sections S et S' distantes de dx subira une diminution dV lorsque ce paramètre passera de P à P+dP dans le temps.

Par définition, la compressibilité du liquide est donnée par :

$$K_e = - \frac{dV}{V \cdot dP} \quad , \text{ en fonction du volume} \quad (2.14)$$

$$\text{ou bien} \quad K_e = \frac{d\rho}{\rho dP} \quad \text{en fonction la masse volumique} \quad (2.15)$$

d'où l'on déduit l'égalité suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{K} \quad (2.16)$$

- **La variation de la section :**

Les variations de la section de la canalisation (aussi bien la dilatation que la contraction de cette dernière) traduisent la loi d'évolution du phénomène :

On désigne par:

$S = \pi R^2$ la section de la canalisation

et : $dS = 2 \pi R dR$. la dérivée de cette dernière.

Le rapport de la seconde équation sur la première donne :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2\pi R dR}{\pi R^2} = \frac{2dR}{R} = 2d\varepsilon_2 \quad (2.17)$$

où :

ε_2 désigne la déformation radiale

$$\text{et : } \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \quad (2.18)$$

Ce qui donne :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2}{E}(d\sigma_2 - \nu d\sigma_1) \quad (2.19)$$

Puisque

$$\sigma_1 = n\sigma_2 \quad (2.20)$$

on aura :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2}{E}(d\sigma_2 - \nu n d\sigma_2) = \frac{2}{E}d\sigma_2 (1 - \nu n) \quad (2.21)$$

en désignant : $(1 - \nu n)$ par C, on obtient :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2.C}{E}d\sigma_2 \quad (2.22)$$

où : C désigne le coefficient de déformabilité

$$\text{Puisque : } \sigma_2 = \frac{P.D}{2e} \quad (2.23)$$

on peut écrire :

$$\frac{dS}{S} = \frac{2.C}{E}d\left(\frac{P.D}{2.e}\right) \quad (2.24)$$

Et finalement , on peut écrire :

$$\frac{dS}{S} = \frac{C.D}{E.e}dP \quad (2.25)$$

On remplace chaque terme de l'équation (2.12) par les expressions des équations (2.13., 2.16, et 2.25). En divisant par dt et, en multipliant par ρ , on aboutit à la relation suivante :

$$\rho \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \rho \left(\frac{1}{K_e} + \frac{C.D}{E.e} \right) \frac{dP}{dt} = 0 \quad (2.26)$$

On remarque que le terme $\left(\frac{1}{K_e} + \frac{D}{E.e} \cdot C \right)$ dépend d'une part de la compressibilité du liquide $1/K_e$ d'autre part des caractéristiques de la conduite $\left(\frac{D}{E.e} \right)$ et de la façon dont cette dernière est assemblée et ancrée .

$$\text{On pose: } \frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{E.e} \cdot C \right) \quad (2.27)$$

On constate que "a" possède les dimensions d'une vitesse, et représente donc la vitesse de propagation de l'onde du coup de bélier .

Comme :
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (2.28)$$

Ou :
$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \quad (2.29)$$

La nouvelle expression donnée par (2.26) est donc

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial X} \right) \right) = 0 \quad (2.30)$$

Cette dernière expression est la première équation de SAINT-VENANT.

2.4. EQUATION DYNAMIQUE :

Une nouvelle équation s'ajoutant à l'équation (2.26) peut être obtenue en étudiant le mouvement d'une tranche liquide pendant la propagation de l'onde de coup de bélier (Figure ?).

On applique à cette tranche liquide, le théorème des quantités de mouvement, qui indique que la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(mU)}{dt} = \sum F_{\alpha} \quad (2.32)$$

$$\frac{d(mU)}{dt} = U \frac{dm}{dt} + m \frac{dU}{dt} \quad (2.33)$$

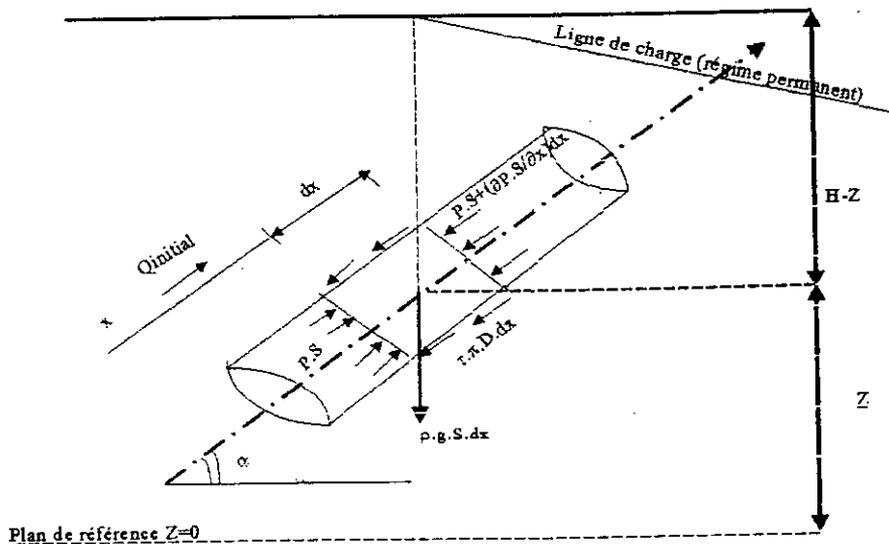


Figure 2.3: différentes forces s'exerçant sur un élément liquide.

Selon le schéma , on considère les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite sont :

- La pression : $-\frac{\partial P}{\partial x} S dx$
- La gravité : $-\rho g S dx \cdot \sin \alpha$
- Les frottements : $-\tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx$.

On note tout d'abord par:

$$\frac{dZ}{dx} = \sin \alpha \quad (2.34)$$

et

$$P = \rho g (H - Z) \quad (2.35)$$

où le paramètre P désigne la pression du liquide, et H représente la côte piézométrique à la côte géométrique Z.

On détermine la somme des forces appliquées $\sum F_x$ tout en se basant sur la figure (2.2), qui peut s'écrire :

$$\sum F_x = PS - (PS + S dx \cdot \frac{\partial P}{\partial x}) - \rho g S \cdot dx \sin \alpha - \tau \cdot \pi \cdot D dx \quad (2.36)$$

Dans cette dernière expression, on a négligé la variation de la section de la conduite le long de cette dernière. Par conséquent tout terme contenant le $\frac{\partial S}{\partial x}$ ne sera pas pris en considération.

On détermine l'expression de $\tau \cdot \pi \cdot D$:

Les pertes de charge linéaires sont données par la Formule de DARCY WEISBACH du régime permanent appliquée au régime transitoire. La variation de la vitesse n'a pas été prise en considération pour le moment. Ainsi on peut écrire :

$$\Delta H = \lambda \frac{L U^2}{D 2g} \quad (2.37)$$

ou

$$\Delta P = \rho \cdot g \lambda \frac{L U^2}{D 2g} \quad (2.38)$$

A partir de l'équilibre des forces dans la conduite en régime permanent, on a :

$$\Delta P \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L \quad (2.39)$$

D'où l'on déduit facilement :

$$\tau \cdot \pi \cdot D = \frac{\pi D^2}{4} \rho g \cdot \frac{\lambda \cdot U^2}{D \cdot 2g} \quad (2.30)$$

où :

$$\tau \cdot \pi \cdot D = J \cdot \rho g \cdot S \quad (2.31)$$

où J : désigne le gradient hydraulique de la perte de charge égal à : $\frac{\lambda U^2}{D 2g}$

τ : désigne la tension unitaire de frottement à la paroi

λ : Coefficient de frottement.

D : Diamètre de la conduite

U : Vitesse d'écoulement en régime permanent.

On porte l'expression de $\tau \cdot \pi \cdot D$ dans l'équation (2.36) , on obtient donc :

$$\sum F_x = \frac{\partial P}{\partial X} S dX - \rho g S \sin \alpha \cdot dx - J \cdot \rho g \cdot S \cdot dx \quad (2.32)$$

En portant l'équation (2.32) dans (2.33) on aura après simplification par $\rho \cdot S \cdot dx$:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - g(\sin \alpha + J) \quad (2.33)$$

ou autrement écrit : $\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin \alpha + j)$ (2.34)

L'expression (2.34) est la deuxième équation de SAINT-VENANT .

comme : $P = \rho g(H - Z)$ (2.35)

Donc : $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$

Et puisque: $\frac{\partial Z}{\partial X} = \sin \alpha$

L'équation (2.34) prendra alors la forme suivante :

$$\frac{dU}{dt} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -gJ \quad (2.36)$$

En exprimant $\frac{dU}{dt}$ en fonction de ses dérivées partielles, on obtient donc :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = -gJ \quad (2.37)$$

2.5. EQUATIONS AUX CARACTERISTIQUES [9].

Les deux équations de SAINT VENANT établies ci-dessus permettent de traduire tous les mouvements transitoires. Ces équations seront transformées pour obtenir des équations plus maniables et ayant un sens physique plus évident.

Le système à résoudre est le suivant :

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= -g(\sin \alpha + J) \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

On effectue les opérations suivantes :

- On multiplie la première équation du système (2.38) par $\frac{a}{g}$
- On ajoute puis on retranche après cela membre à membre les deux équations

Le système à résoudre prend alors la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U+a) \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= -g(\sin \alpha + J) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + (U-a) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U-a) \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= -g(\sin \alpha + J) \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

a) On prend : $\frac{dx}{dt} = U + a$, la quantité $\frac{\partial U}{\partial t} + (a+U) \frac{\partial U}{\partial x}$ exprime la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse; c'est à dire :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.40)$$

Et la même expression peut être écrite pour la pression :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (2.41)$$

Alors la première équation du système (2.39) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin \alpha + J). \quad (2.42)$$

b) Si on prend $\frac{dx}{dt} = U - a$ et, en suivant le même raisonnement que précédemment alors la seconde équation du système (2.39) s'écrit sous la forme:

$$\frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} = -g(\sin \alpha + J) \quad (2.43)$$

Le système (2.39) devient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} &= -g(\sin \alpha + J) \\ \frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} &= -g(\sin \alpha + J) \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \sin \alpha \text{ car } \frac{\partial Z}{\partial x} = \sin \alpha \text{ et } \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \\ P &= \rho g(H - Z) \text{ ce qui donne} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{d[\rho g(H - Z)]}{dt} = \rho g \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right) = \rho g \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \sin \alpha \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Le système d'équations (2.44) et leurs conditions respectives s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= U + a \\ \frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= \frac{g}{a} (U + a) \sin \alpha + J \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= U - a \\ \frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= -\frac{g}{a} (U - a) \sin \alpha - g(\sin \alpha - J) \end{aligned} \right\}$$

* Les deux premières équations des systèmes (2.46)) c'est à dire celle donnant $\frac{dx}{dt}$ sont dites "équations aux caractéristiques"

* Les deux dernières équations de ces mêmes systèmes sont dites "équations de compatibilité".

D'une façon générale, on a toujours $a \gg U$ d'où les systèmes (2.46) s'écrivent tout simplement sous la forme suivante :

1°) Pour $\frac{dx}{dt} = U + a \approx a$ on a :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot J \quad (2.47)$$

2°) Pour $\frac{dx}{dt} = U - a \approx -a$ on a :

$$\frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot J \quad (2.48)$$

Qu'on peut écrire également sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{g}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{g} U \pm H \right) + g \cdot j = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

ou autrement écrites :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{g}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{g} U \pm H \right) + g J = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

On fait intervenir le débit $Q = US$ dans cette dernière équation tout en la multipliant par $\frac{a}{g}$, on aura :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a}{g \cdot S} Q \pm H \right) + a J = 0 \quad (2.51)$$

Comme $dx = \pm a dt$, on aura donc l'équation suivante :

$$d \left(\frac{a}{g \cdot S} Q \pm H \right) + J dx = 0 \quad (2.52)$$

Rappelons que le signe (+) doit être pris si $dx = a dt$, le signe (-) n'est valable que dans le cas où $dx = - a dt$.

Finalement en admettant que $\frac{a}{g \cdot S}$ est constant, on obtient le système des équations aux caractéristiques suivant :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm a \\ dH \pm \frac{a}{g \cdot S} dQ &= -J \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

2.6.CONCLUSION.

Les systèmes ainsi obtenus expriment que si on se déplace le long d'un trajet d'un tronçon avec une vitesse $dx/dt = a$, la quantité $H + \frac{a}{gS} dQ$ reste constante aux pertes de charge près. L'application de ces systèmes est plus simple notamment lorsqu'on considère que la quantité a/gS est constante. Ils permettent de déterminer facilement le couple (H,Q) en un point de la conduite. Ces systèmes, originaires des équations aux dérivées partielles représentent les équations aux dérivées totales qui peuvent ensuite être intégrées le long des courbes qu'on nomme caractéristiques. Ces courbes délimitent la zone d'influence dans le temps et dans l'espace d'un événement qui s'est produit à un endroit et à un moment donné.

CHAPITRE 3

METHODES D'ANALYSE DU REGIME TRANSITOIRE

3.1. INTRODUCTION :

Dans ce chapitre , il sera exposé les différentes méthodes traitant le régime transitoire. Ces différentes méthodes sont basées sur les équations de SAINT VENANT. Elles forment un système d'équations différentielles partielles du premier ordre de type hyperbolique.

En l'absence de solution analytique à ce système plusieurs méthodes graphiques et numériques de solution ont été développées. Parmi ces méthodes, on note :

- Méthode graphique
- Méthode arithmétique
- Méthode des différences finies
- Méthode des éléments finis.
- Méthode des caractéristiques.

3.2 . PRESENTATION DES METHODES DE SOLUTION

3.2.1 - Méthode graphique de SCHNYDER-BERGERON :

Cette méthode a été mise au point simultanément par SCHNYDER et BERGERON en 1931. Elle permet de résoudre tous les problèmes, aussi complexes soient ils mais c'est alors au prix d'un travail long et délicat. Toutefois, cette méthode qui a rendu de très grands services, reste encore très intéressante du point de vue de la compréhension physique du phénomène.

3.2.1.1. - Principe de la méthode :

La théorie d'ALLIEVI a montré que la surpression existant en un point quelconque d'une conduite à caractéristiques uniques, à un instant déterminé résulte de la superposition de deux ondes de pression. Ces ondes provoquées par la manœuvre d'une vanne par exemple, se déplacent le long de la conduite, en sens inverse l'une de l'autre , avec une même célérité. Ainsi la pression occasionnée par ces ondes, s'ajoute à la pression statique.

On considère les équations d'ALLIEVI qui sont les suivantes:

$$\begin{cases} H - H_0 = F - f \\ U - U_0 = -\frac{g}{a}(F - f) \end{cases} \quad (3.1)$$

Avec :

$$F = F\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

$$f = f\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

Les paramètres F et f qui sont de signe fonctionnel, représentent l'un des paramètres hydrauliques. La fonction F se déplace en sens inverse de la vitesse « a ». La fonction f dans le même sens .

En introduisant le débit $Q = U.S$ le système (3.1) prend la forme :

$$\begin{cases} H - H_0 = F - f \\ \frac{a}{g.S} (Q_0 - Q) = F - f \end{cases} \quad (3.2)$$

Considérons un point M de la conduite et portant sur un graphique les valeurs de Q en abscisses et les valeurs de H_M en ordonnées (Fig. 3.1) ; Q_M et H_M sont respectivement le débit et la hauteur d'eau au point M à l'instant "t".

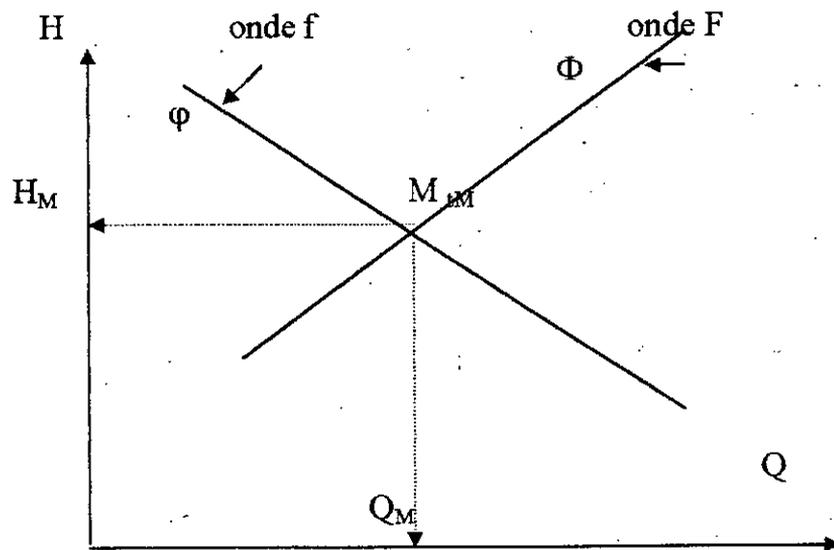


Figure 3.1 : Diagramme (H,Q)

On suppose un observateur partant de M au temps t où l'onde F passe en M et se déplace le long de la conduite avec la vitesse "a" en sens inverse de la vitesse d'écoulement, c'est à dire de M vers A (figure.3.1). Cet observateur verra l'onde F conserver sa valeur $F = F_M$ en tout lieu où il constatera que :

$$\begin{cases} \frac{a}{g.S} (Q_0 - Q) = F_M + f \\ H - H_0 = F_M + f \end{cases} \quad (3.3)$$

Alors qu'au départ en M on avait :

$$\begin{cases} \frac{a}{g.S} (Q_0 - Q_M) = F_M - F_M \\ H_M - H_0 = F_M + F_M \end{cases} \quad (3.4)$$

En éliminant Q_0 et H_0 entre les deux équations (3.3) et (3.4) on aura :

$$\begin{cases} \frac{a}{gS} \cdot (Q_M - Q) = F_M - f \\ H_M - H = F_M + f \end{cases} \quad (3.5)$$

Et en éliminant $F_M - f$; on obtient finalement:

$$H - H_M = \frac{a}{gS} \cdot (Q - Q_M) \quad (3.6)$$

Sur le diagramme (H-Q) l'équation (3.6) est représentée par une droite ϕ passant par le point M.

Si l'observateur se déplace en sens inverse, c'est à dire de M vers B, avec la vitesse "a" en quittant M en même temps que l'onde f, c'est cette onde qui restera constante et égale à F_M . Les mêmes calculs que ceux effectués précédemment montreraient alors que pour cet observateur on a :

$$H - H_M = - \frac{a}{gS} (Q - Q_M) \quad (3.7)$$

L'expression (3.7) représente l'équation de la droite ϕ de pente $-\frac{a}{gS}$ passant par M

En définitive le principe de base de la méthode graphique peut s'énoncer comme suit :

Si le long de la conduite, un observateur part d'un point M avec la vitesse "a" au temps t où le régime est $(H_M ; Q_M)$, il constate que les paramètres H, Q sont liés. Cette liaison caractérisée par la même loi linéaire, dépend des constantes a et S, du régime (H_M, Q_M) existant à l'instant, au lieu de son départ, et dans le sens de son déplacement.

La prise en compte des pertes de charges suppose une vitesse constante par hypothèse. Leur considération, quand elles sont importantes, permet de diminuer favorablement le coup de bélier. Cette diminution résulte d'une dissipation d'énergie engendrée par le frottement de l'eau contre les parois de la conduite.

Pour simplifier la résolution du problème en un cas simple, La méthode graphique de Bergeron suppose que toutes ces pertes de charge sont concentrées en un point. Ce dernier est représenté par un diagramme fictif, supposé installé à l'extrémité aval de la conduite, et créant ainsi une perte de charge singulière équivalente.

3.2.2. - Méthode arithmétique :

La méthode arithmétique est une méthode simple et classique basée sur le principe de conservation d'énergie ; donnée par la relation suivante :

$$H \pm \frac{a \cdot U}{g} = \text{Cte} \quad (3.8)$$

Le terme à gauche exprime la charge en régime transitoire dont les pertes de charge sont négligées.

Le signe (+) dans l'équation (3.8) est valable pour une onde qui parcourt la conduite en allant de B vers A inversement au sens d'écoulement (Fig. 3.3).

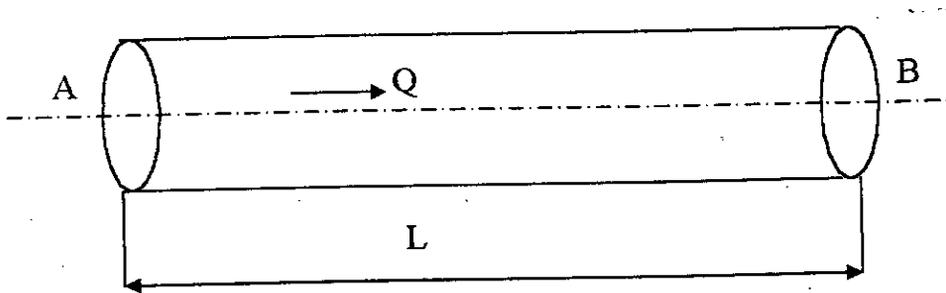


Figure 3.3 : cas de la méthode arithmétique

3.2.3 - Méthodes des différences finies :

La méthode des différences finies consiste à estimer par approximations, des valeurs d'une ou de plusieurs fonctions à partir d'une ou de plusieurs conditions. Ces approximations représentent une discrétisation du domaine d'étude et remplacent l'opérateur différentiel par une différence finie.

Les méthodes aux différences finies se divisent en deux grandes familles :

3.2.3.1 - Méthodes implicites :

Les schémas implicites calculent les caractéristiques de l'écoulement à un instant donné en fonction des caractéristiques de l'écoulement à ce même instant. Ces schémas ont été appliqués dans plusieurs domaines (l'aérodynamique, coup de bélier dans les réseaux simples.[2])

Généralement ce type de schémas est utilisé pour la résolution des problèmes d'écoulement à surface libre.

Leurs résultats démontrent clairement l'intérêt de ces méthodes, en plus elles nous permettent de prendre en compte les termes non linéaires qui apparaissent dans les équations principales.

Pratiquement ce modèle a été mis en œuvre pour étudier l'écoulement non permanent du liquide dans les réseaux multibranches avec différents appareils de protection. [2]

Dans le cas de son application aux problèmes transitoires en charge, il est nécessaire de garder une relation entre le pas de temps " dt " et le pas d'espace " dx ". Or ce dernier n'est pas toujours proportionnel à la longueur de la conduite ; par conséquent la méthode devient imprécise, il est donc recommandé d'utiliser une autre méthode.

3. 2.3.2 - Méthodes explicites :

Les schémas explicites permettent de calculer directement de façon explicite les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné en fonction des caractéristiques au pas de temps précédent.

En ce qui concerne leur emploi ; CHAUDHRY et HUSSAINI (1985) ont appliqué ces méthodes dans le domaine de l'aéronautique et au calcul des coups de bélier dans des réseaux simples.

BEAUCHEMIN et MARCHE [2] 1992 ont étendu la formulation de ce modèle aux différences finies explicites pour prendre en compte tous les termes non linéaires des équations principales permettant ainsi le calcul d'écoulement encore plus complexe. Ce modèle a été appliqué avec succès à plusieurs cas pratiques.

On comprendra donc qu'il existe plusieurs méthodes numériques qui, lorsque appliquées avec soin, permettent de calculer de façon très satisfaisante les conditions d'écoulement en régime non permanent d'un liquide monophasique. L'intérêt de tous les efforts de modélisation numérique mentionnés plus haut réside principalement dans le calcul des écoulements diphasiques dans lesquels les phases gazeuses et liquides cohabitent. Ces écoulements sont des plus complexes et leur calcul exact va au-delà de l'état présent des connaissances. [2]

3.2.4 - Méthode des caractéristiques :[9]

Dans le chapitre 2, il a été développé les équations aux caractéristiques qui servent de base à une méthode numérique de résolution des équations de SAINT-VENANT, dite méthode des caractéristiques"

Dans ce qui suit, on présente cette dernière en se limitant :

- 1) Aux problèmes n'ayant que deux variables indépendantes
- 2) Aux équations aux dérivées partielles linéaires par rapport aux dérivées partielles, mais, peuvent dépendre, dans le cas général, des fonctions inconnues et des variables indépendantes.

Avant d'aborder cette méthode, il est utile de donner en premier lieu quelques notions sur l'analyse matricielle.

Présentation matricielle :

On considère le système aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + B_1 \frac{\partial U}{\partial t} + C_1 \frac{\partial P}{\partial x} + D_1 \frac{\partial P}{\partial t} = F \\ A_2 \frac{\partial U}{\partial x} + B_2 \frac{\partial U}{\partial t} + C_2 \frac{\partial P}{\partial x} + D_2 \frac{\partial P}{\partial t} = G \end{cases} \quad (3.9)$$

Les coefficients $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont dans le cas général des fonctions des variables (x, t) ainsi que des fonctions $u(x, t)$ et $P(x, t)$. Les termes F et G peuvent elles aussi être des fonctions de (x, t) de U et de P .

Supposons que le système précédent possède une solution dans un domaine (S) . Le problème qui consiste à trouver la solution du système au voisinage d'une courbe (B) connue dans (S) est dit problème de CAUCHY.

Au système (3.9) on ajoute les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt + 0 + 0 = dU \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt = dP \end{cases} \quad (3.10)$$

Les deux systèmes (3.9) et (3.10) peuvent être regroupés sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ G \\ dU \\ dP \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Où sous forme condensé :

$$T.X = R \quad (3.12)$$

En utilisant la règle de CRAMER pour calculer la dérivée de $\frac{\partial U}{\partial x}$, on aura :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F & B_1 & C_1 & D_1 \\ G & B_2 & C_2 & D_2 \\ dU & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{vmatrix}} = \frac{Dx(U)}{D_T} \quad (3.13)$$

De la même manière on pourra calculer :

$$\frac{\frac{U}{t} \frac{D_t(U)}{D_T} \frac{P}{t} \frac{D_t(P)}{D_T}}{\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{D_x(P)}{D_T}} \quad (3.14)$$

Où $D_t(U)$; $D_x(P)$, $D_t(P)$ sont des déterminants propres aux dérivées partielles correspondantes (grandeur inconnues).

On remarque ici, selon les valeurs de D_T que trois cas peuvent se présenter :

premier cas : $D_T=0$

Dans ce cas, la solution sera déterminée de manière univoque.

Deuxième cas : $D_t = 0$ et $[D_x(U), D_t(U), D_x(P), D_t(P)] \neq 0$

Dans ce cas, la solution du problème devient infinie.

Troisième cas : D_t ; $D_x(U)$, $D_t(U)$; $D_x(P)$ et $D_t(P)$ sont tous nuls :

Dans ce cas, la solution est théoriquement indéterminée : mais comme une solution existe dans le domaine (S), les lignes (données par les différentielles dx et dt) le long desquelles $D_T=0$ sont appelées "caractéristiques" du système (3.9).

- La relation $D_T=0$ est dite "Condition de direction".
- Les relations $dx = dx(dt)$ obtenues après résolution de $D_T=0$ sont dites "équation de direction ou des caractéristiques".

Détermination des équations des caractéristiques (de direction)

On développe le déterminant D_T

$$D_T \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0 \quad (3.15)$$

$$\Rightarrow -dx (B_1 D_2 dx + D_1 A_2 dt - dx B_2 D_1 - dt D_2 A_1) + dt (B_1 C_2 dx + C_1 A_2 dt - dx B_2 C_1 - dt C_2 A_1) = 0$$

(3.16)

En divisant cette dernière expression par dt et après un arrangement des termes, on obtient :

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0 \quad (3.17)$$

L'expression (3.17) est une équation du 2^{ème} degré ayant comme inconnue $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et dont la solution dépend du discriminant (Δ).

$$\Delta^2 = (D_2A_1 + B_1C_2 - B_2C_1 - D_1A_2)^2 - 4(B_2D_1 - B_1D_2)(C_1A_2 - C_2A_1) \quad (3.18)$$

En fonction du discriminant Δ , on distingue trois (03) types de systèmes :

- $\Delta < 0$: le système (3.17) est dit de type elliptique.
- $\Delta = 0$: le système (3.17) est dit de type parabolique
- $\Delta > 0$: le système (3.17) est dit de type hyperbolique.

Pour ce dernier cas, il est clair que la résolution de l'équation du 2^{ème} degré donne deux racines distinctes de $\left(\frac{dx}{dt}\right)$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = f_1(x; t; U; P)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = f_2(x; t; U; P)$$

à partir de ces deux racines, on tire les équations des courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} X_1 = X_1(t) \\ X_2 = X_2(t) \end{cases} \quad (3.19)$$

Détermination des équations de comptabilité :

Posons par exemple : $D_U = 0$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} F & B_1 & C_1 & D_1 \\ G & B_2 & C_2 & D_2 \\ dU & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0 \quad (3.20)$$

Cette dernière relation est dite "condition de compatibilité"

En développant et en résolvant ce déterminant par rapport à $\frac{dU}{dP}$, on aura :

$$\begin{cases} \left(\begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right)_1 = \dots \\ \left(\begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right)_2 = \dots \end{cases} \quad (3.21)$$

Les équations de ce dernier système sont dites "équations de compatibilité"

3.2.5 - Application de la méthode des caractéristiques à la résolution des équations de SAINT VENANT. [9]

Dans ce qui suit, on applique la méthode des caractéristiques, développée au chapitre 2, à la résolution des équations de SAINT-VENANT :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= -g(\sin \alpha + J) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Les équations (3.22), ont été déjà transformées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial P}{\partial x} \right] &= -g(\sin \alpha + J) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial P}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial P}{\partial x} \right] &= -g(\sin \alpha + J) \end{aligned} \quad (3.23)$$

A ce système on, ajoutera le système (3.10)

Pour former un nouveau système avec quatre (04) équations à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -g(\sin \alpha + J) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -g(\sin \alpha + J) \\ \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx + 0 + 0 = dU \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial x} dx = dP \end{cases} \quad (3.24)$$

Sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{bmatrix} U+a & 1 & \frac{U+a}{\rho a} & \frac{1}{\rho a} \\ U-a & 1 & -\frac{(U-a)}{\rho a} & -\frac{1}{\rho a} \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g(\sin\alpha + J) \\ -g(\sin\alpha + J) \\ dU \\ dP \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

En comparant le système (3.25) avec celui donné par l'équation (3.11), on aura par analogie :

$$A_1 = (U+a); B_1 = B_2 = 1; C_1 = \frac{U+a}{\rho a}; D_1 = D_2 = \frac{1}{\rho a}; A_2 = U-a \quad (3.26)$$

$$C_2 = -\left(\frac{U-a}{\rho a}\right); F = G = -g(\sin\alpha + J) \quad (3.27)$$

En portant les expressions (3.26) et (3.27) on obtient :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2U \frac{dx}{dt} + (U^2 - a^2) = 0 \quad (3.28)$$

Le discriminant de l'équation (3.28) est égal à :

$$\Delta = 4U^2 - 4(U^2 - a^2) = 4a^2 \quad (3.29)$$

' Δ ' étant positif donc le système (3.21) est de type hyperbolique.

En résolvant l'équation (3.28) on trouve deux caractéristiques :

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = U+a \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = U-a \end{cases} \quad (3.30)$$

Equations de compatibilité :

D'après la relation de la condition de compatibilité (3.20), on a :

$$\text{Dét} \begin{bmatrix} F & B & C & D \\ G & B & C & D \\ du & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

En remplaçant chaque élément de cette matrice par sa valeur on aura :

$$\text{Det} \begin{bmatrix} -g(\text{Sin}\alpha + J) & 1 & \frac{U+a}{\rho a} & \frac{1}{\rho a} \\ -g(\text{Sin}\alpha + J) & 1 & -\frac{(U-a)}{\rho a} & -\frac{1}{\rho a} \\ du & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

En développant ce déterminant (3.32) et après avoir divisé l'équation obtenue par "dt", on aboutira à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - U \right) \frac{dU}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - U \right) + g(\text{Sin}\alpha + J) = 0 \quad (3.33)$$

En portant la valeur de $\frac{dx}{dt} = U \pm a$ dans l'expression (3.33) on aura :

a) pour $\frac{dx}{dt} = U + a$

on a : $\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{dU}{dt} + g(\text{Sin}\alpha + J) = 0 \quad (3.34)$

l'expression (3.34) représente la première équation de compatibilité.

b) Pour $\frac{dx}{dt} = U - a$,

On a : $-\frac{1}{\rho a} \frac{dP}{dt} + \frac{dU}{dt} + g(\text{Sin}\alpha + J) = 0 \quad (3.35)$

C'est la deuxième équation de compatibilité

On écrit les expressions (3.34) et (3.35) sous une autre forme; sachant que:

La pression $P = \rho g(H - Z)$; sa dérivée par rapport au temps est:

$$\frac{dP}{dt} = \rho g \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right) \quad (3.36)$$

Sachant que $\frac{\partial Z}{\partial X} = \sin \alpha$ (le plan de référence étant horizontal)

et

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

On aura :

$$\frac{dZ}{dt} = \sin \alpha \frac{dx}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = 0 \quad (3.37)$$

Donc :

$$\frac{dP}{dt} = \rho g \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \sin \alpha \right) \quad (3.38)$$

En portant l'expression (3.38) dans les équations de compatibilité (3.21) et en négligeant la vitesse d'écoulement "U" par rapport à la célérité "a" : c'est à dire :

$$U \ll a \Rightarrow U \pm a = a$$

On aboutira à :

$$\frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g.J \quad (3.39)$$

$$\frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g.J \quad (3.40)$$

Les deux équations (3.39) et (3.40) rassemblées en une seule s'écrivent :

$$\frac{dU}{dt} \pm \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g.J \quad (3.41)$$

En faisant intervenir le débit dans l'équation précédente on aura :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a.Q}{g.S} \pm H \right) = -a.J \quad (3.42)$$

Comme $dx = \pm a.dt$ on obtient finalement:

$$d \left(\frac{a.Q}{g.S} \pm H \right) + J.dx = 0 \quad (3.43)$$

La méthode des caractéristiques transforme les deux équations de SAINT-VENANT aux dérivées partielles en quatre équations différentielles totales qui peuvent être résolus numériquement.

La solution de ces équations consiste à déterminer H et Q à chaque instant et à n'importe quelle position (x), cela revient à intégrer numériquement le système. Donc l'étape suivante est de détailler la méthodologie de discrétisation.

3.2.6 - Intégration du système différentiel :

Au paragraphe précédent on a aboutit au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ d\left(\frac{a}{gs} Q \pm H\right) + J \cdot dx = 0 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Pour effectuer l'intégration du système (3.44), on prend comme exemple une conduite simple de longueur "L" (fig.III.2.1) et on discrétise en un certain nombre de points suffisamment proches pour nous permettre d'écrire :

$$DF(x, t) = F(i + 1) - F(i)$$

Avec F : une fonction telle que H ou Q aux points de discrétisation successifs i et i+1.

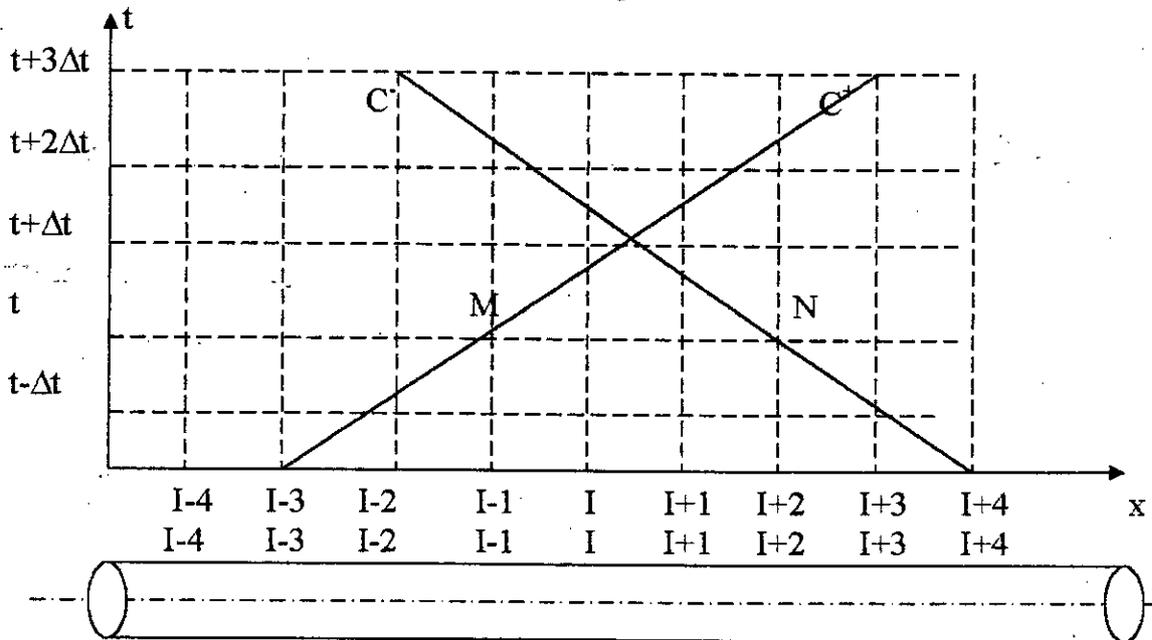


Fig.ure (3.3) Discrétisation de la conduite

On supposera que la charge H et le débit Q sont connus le long de la conduite au temps t.

On écrit l'équation (3.44) sous la forme suivante :

- Le long de la caractéristique de pente "a" (c'est à dire pour le cas où $dx = a dt$) dite caractéristique C^+ on a :

$$d \left[H + \frac{a}{gs} Q \right] + J \cdot dx = 0 \quad (3.46)$$

- Le long de la caractéristique de pente "- a" dite caractéristique C^- on a :

$$d \left[H - \frac{a}{gs} Q \right] + J \cdot dx = 0 \quad (3.47)$$

On intègre l'équation (3.46) le long de la caractéristique C^+ , passant par le point M de coordonnées (I;t) entre deux temps t et (t + Δt) donc nous passons du point I au temps t au point I+1 au temps (t + Δt) ;

Soit :

$$\int dH + \frac{a}{gs} \int dQ + \int J dx = 0 \quad (3.48)$$

Comme dans le cas général on n'a aucune idée sur le sens d'écoulement du liquide dans la canalisation. Il est beaucoup plus logique de calculer le gradient de pertes de charge "J" par la relation suivante :

$$J = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot D \cdot S^2} \cdot Q \cdot |Q| = R \cdot Q \cdot |Q| \quad (3.49)$$

Où :

$$R = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot D \cdot S^2} \quad (3.50)$$

Et l'expression (3.48) devient:

$$\int dH + \frac{a}{gs} \int dQ + R \int Q |Q| dx \quad (3.51)$$

Donc en intégrant l'équation (3.51) tout en posant : $B = \frac{a}{g \cdot S}$ on obtient:

$$\left[H_{(I+1)} - H_I \right] + B \left[Q_{(I+1)} - Q_I \right] + R \int Q |Q| dx = 0 \quad (3.52)$$

on remarque que les deux premières intégrales de l'équation (III.29) peuvent être évaluées facilement. Cependant, on ne peut pas faire de même pour la troisième intégrale, représentant les pertes de charge, car on ne connaît pas explicitement la variation de Q avec le temps.

Pour calculer cette dernière intégrale on utilisera soit :

- Une approximation de premier ordre, ou en d'autre terme, on supposera que le débit est constant dans cet espace durant ce laps de temps Δt, ce qui nous donne :

$$R \int Q|Q|dx = RQ_{(I)}|Q_{(I)}| \int dx = R.Q_{(I)}|Q_{(I)}|\Delta x \quad (3.53)$$

En remplaçant ce dernier résultat dans (3.52) on aura :

$$[H_{(I+1)} - H_{(I)}] + B[Q_{(I+1)} - Q_{(I)}] + R.Q_{(I)} \cdot |Q_{(I)}| \Delta x = 0 \quad (3.54)$$

On note qu'en général l'approximation du premier ordre donne des résultats satisfaisants pour des applications pratiques d'après STREETER [5].

Cependant, cette approximation peut conduire à des résultats instables. Pour éviter cela, on peut utiliser un intervalle de temps Δt plus petit ou utiliser une approximation d'ordre supérieur ou une procédure itérative pour l'évaluation du terme de frottement.

- Soit l'approximation du second ordre suivante :

$$R.Q \int |Q| dx = \frac{1}{2} [R.Q_{(I+1)}|Q_{(I+1)}| + R.Q_{(I)}|Q_{(I)}|] \Delta x = 0 \quad (3.55)$$

Et l'équation (3.52) devient :

$$[H_{(I+1)} - H_{(I)}] + B[Q_{(I+1)} - Q_{(I)}] + \frac{1}{2} [R.Q_{(I+1)}|Q_{(I+1)}| + R.Q_{(I)}|Q_{(I)}|] \Delta x = 0 \quad (3.56)$$

Dans ce présent travail, on se limitera à l'approximation du premier ordre car comme on l'a énoncé plus haut, donne des résultats satisfaisants.

Considérant l'équation (3.54) et regroupant les termes correspondant au point (I+1) dans le premier membre et ceux correspondant au point (I) dans le second membre on aura :

$$H_{(I+1)} + B.Q_{(I+1)} = H_{(I)} + Q_{(I)}(B - T) \cdot |Q_{(I)}| = 0 \quad (3.57)$$

avec $T = R \Delta x$

$$\text{On pose :} \quad H_{(I)} + Q_{(I)}(B - T) \cdot |Q_{(I)}| = CP \quad (3.58)$$

L'équation (3.57) devient :

$$H_{(I+1)} + B.Q_{(I+1)} = CP \quad (3.59)$$

C.P : caractéristique positive notée aussi C^+

En procédant de la même manière que précédemment pour intégrer l'équation (3.47) on aura :

$$H_{(I+1)} - B.Q_{(I+1)} = CM \quad (3.60)$$

Avec :
$$CM = H_{(i+2)} - Q_{(i+2)} [B-T] \cdot |Q_{(i+2)}| \quad (3.61)$$

C.M : caractéristique négative notée C^-

Les intégrations qu'on vient d'effectuer, ont pour base les conditions suivantes :

- Les caractéristiques de la conduite restent constantes : section, épaisseur et module d'élasticité
- Le point (I+1) est encadré de part et d'autre par les points (I) et (I+2).

Remarque :

Dans le cas où le point (I) est un point limite, on dispose alors que d'une seule équation (le long de C^+ ou de C^-) pour déterminer les inconnues $H_{(I)}$ et $Q_{(I)}$. Dans ce cas on fera appel à une équation spéciale adaptée à la condition limite considérée.

3.4 - Conditions aux limites :

En pratique plusieurs types des conditions aux limites peuvent être rencontrées au niveau d'une vanne, d'un clapet, d'un point de connexion, etc....

Les conditions aux limites permettent de simplifier les équations du mouvement généralement difficiles à résoudre, afin de les rendre plus maniables. Dans ce qui suit, on développe quelques cas simples de ces dernières.

-Cas d'un réservoir à niveau constant à l'amont :

On considère le schéma de la figure 3.5 qui comporte un réservoir muni d'une conduite horizontale.

On supposera tout d'abord que le réservoir est de grandes dimensions afin de négliger la variation du plan d'eau.

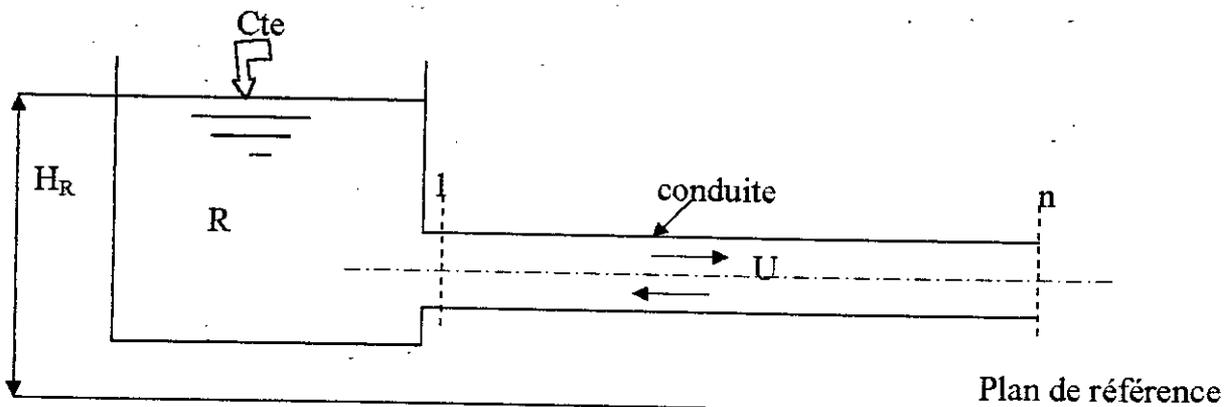


Figure.3.5: Système réservoir- conduite

On discrétise la conduite en n petits tronçons ($i= 1, \dots, n$). En négligeant les pertes de charge à l'entrée du réservoir ainsi que l'énergie cinétique $\frac{U^2}{2g}$, on aura $H_{(1)} = H_{(R)}$

Où $-H_{(R)}$ désigne la hauteur d'eau dans le réservoir au dessus du plan de référence.

$-H_{(1)}$: désigne la Charge à l'entrée de la conduite

Lorsque une vanne est placée à l'extrémité aval de la conduite est subitement fermée, une onde de surpression est générée pour se propager vers le réservoir où elle sera réfléchiée en une onde de dépression dont l'équation dans le plan (Q, H) est :
D'après l'équation (3.60) On aura:

$$H_{(1)} - B \cdot Q_{(1)} = CM \quad (3.63)$$

D'où :

$$Q_{(1)} = \frac{H_{(1)} - CM}{B} \quad (3.64)$$

Donc :

$$Q_{(1)} = \frac{H_R - CM}{B} \quad (3.65)$$

-Cas d'un réservoir à niveau constant à l'aval :

La figure 3.6 représente un système formé d'une conduite munie d'un réservoir à niveau constant à l'aval.

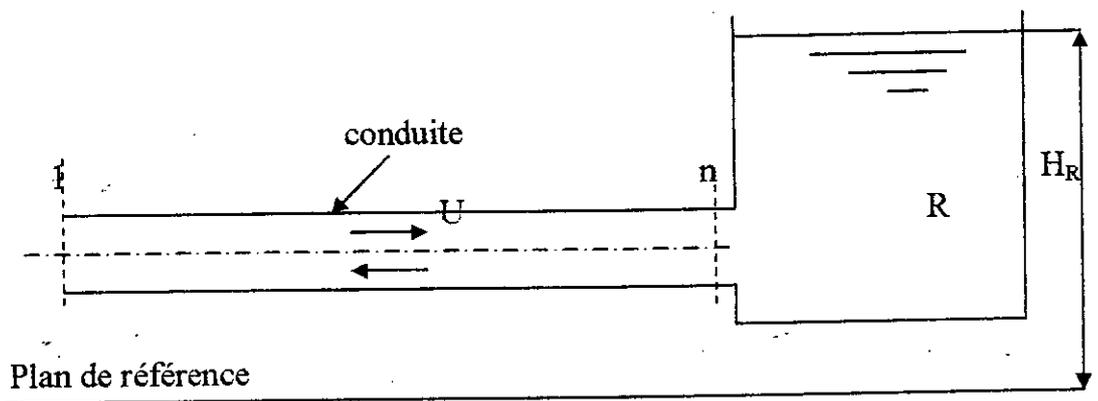


Figure. 3.6 Réservoir à niveau constant à l'aval

D'après l'équation (3.59) on peut écrire :

$$H_{(n)} + B \cdot Q_{(n)} = CP \quad (3.66)$$

D'où :

$$Q_{(n)} = \frac{CP - H_{(n)}}{B} \quad (3.67)$$

Comme :

$$H_{(n)} = H_R$$

On aura :

$$Q_{(n)} = \frac{CP - H_R}{B} \quad (3.68)$$

- **Cas d'une Conduite fermée à l'extrémité aval :**

Ce cas est fréquemment rencontré dans les réseaux ramifiés. Ces conduites appelées souvent annexes, sont caractérisées par des diamètres faibles. On les appelle également des bouts morts.

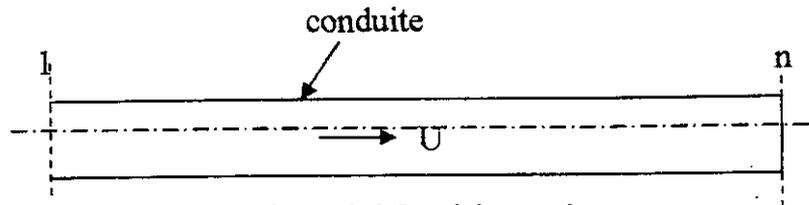


Figure 3.6 Conduites en impasse

L'information disponible au niveau de l'extrémité fermée est :

$$Q_{(n)} = 0$$

Dans ce cas, d'après l'équation (3.59) on a :

$$H_{(n)} + B \cdot Q_{(n)} = CP \quad (3.69)$$

$$\text{D'où ;} \quad H_{(n)} = CP \quad (3.70)$$

- **Cas d'une Vanne à l'extrémité aval :**

Soit une conduite fermée à son extrémité aval par une vanne Fig.3.7

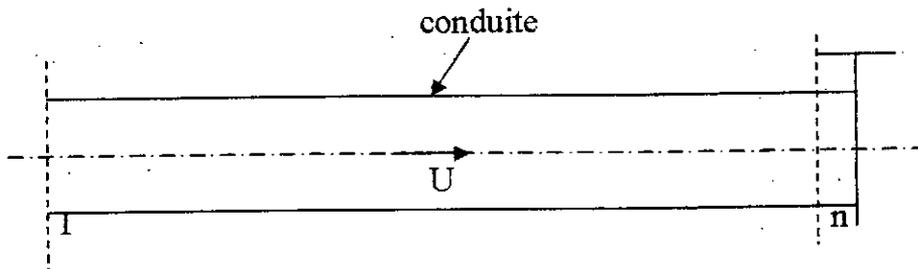


Figure 3.7: conduite munie d'une vanne

On rencontre deux cas :

*Cas où la fermeture est instantanée c'est à dire que le temps de fermeture est inférieur au temps d'aller et retour de l'onde $t < \frac{2.L}{a}$; on se retrouve alors dans le cas du paragraphe précédent

* Cas où la fermeture est lente c'est à dire $t > \frac{2.L}{a}$ c'est ce qu'on développe dans ce qui suit :

En régime permanent le débit qui passe à travers une vanne est donné par :

$$Q_{0(n)} = (C_d \cdot S_v)_0 \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} \quad (3.71)$$

Avec :

C_d : coefficient de débit

S_v : section de l'ouverture de la vanne

L'indice (0) indique les conditions de l'état permanent.

Si l'écoulement est à l'état transitoire, l'équation (3.71) s'écrit :

$$Q_{(n)} = (C_d \cdot S_v) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{(n)}} \quad (3.72)$$

En divisant les carrés des deux équations précédentes on obtient :

$$Q_{(n)}^2 = \frac{Q_{0(n)}^2 \cdot (C_d \cdot S_v)^2}{H_{0(n)} \cdot (C_d \cdot S_v)_0^2} H_{(n)} \quad (3.73)$$

On pose :
$$\mu = \frac{C_d \cdot S_v}{(C_d \cdot S_v)_0} \quad (3.74)$$

qui montre une ouverture partielle de la vanne

En remplaçant $H(n)$ par sa valeur tirée de l'équation (3.59) c'est à dire :

$$H_{(n)} + B \cdot Q_{(n)} = CP \quad (3.75)$$

On aura
$$Q_{(n)}^2 = \frac{Q_{0(n)}^2}{H_{0(n)}} \mu^2 [CP - B \cdot Q_{(n)}] \quad (3.76)$$

D'où :
$$Q_{(n)}^2 + \frac{Q_{0(n)}^2}{H_{0(n)}} \mu^2 B \cdot Q_{(n)} - \frac{Q_{0(n)}^2}{H_{0(n)}} \mu^2 CP = 0 \quad (3.77)$$

En posant
$$C_v = \frac{Q_{0(n)}^2}{H_{0(n)}} \mu^2 \quad \text{on aura :}$$

$$Q_{(n)}^2 + C_v \cdot Q_{(n)} - C_v \cdot CP = 0 \quad (3.78)$$

C'est une équation du deuxième degré, sa solution conduit à :

$$Q_{(n)} = 0,5 \left[-C_v + \sqrt{(B \cdot C_v)^2 + 4 \cdot CP \cdot C_v} \right] \quad (3.79)$$

La grandeur $H(n)$ peut être déterminé à l'aide de l'équation (3.57) c'est à dire :

$$H(n) = CP - B \cdot Q_{(n)} \quad (3.80)$$

Remarque :

Le raisonnement est ainsi développé en considérant un coefficient de débit C_d constant pendant la fermeture de la vanne.

-Cas d'un branchement en série :

Soient deux conduites 1 et 2 raccordées au point I et ayant pour caractéristiques respectivement (a_1, B_1, T_1) et (a_2, B_2, T_2) voir fig.3.8

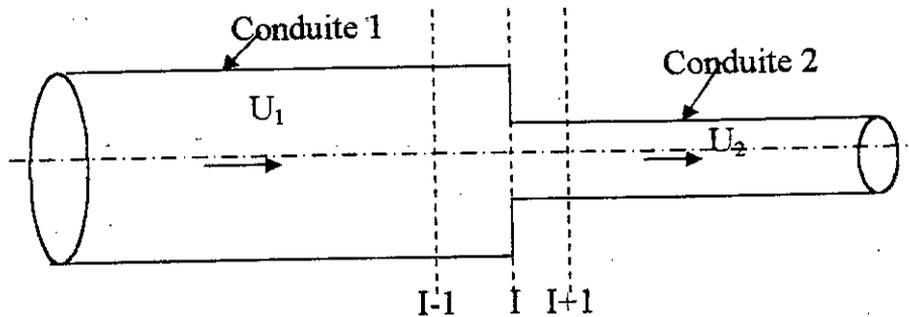


Figure. 3.8 : Branchement en série

Le calcul des grandeurs $U(I)$ et $Q(I)$ au niveau du point (I) se fait à l'aide des équations (3.59) et (3.60)

- 1^{er} tronçon : $H(I) + B_1 \cdot Q(I) = CP$
avec $CP = H_{(I-1)} + Q_{(I-1)} \cdot |Q_{(I-1)}| \cdot (B_1 - T_1)$
- 2^{ème} tronçon : $H(I) - B_2 \cdot Q(I) = CM$
avec $CM = H_{(I+1)} - Q_{(I+1)} \cdot |Q_{(I+1)}| \cdot (B_2 - T_2)$
à partir de ces quatre dernières équations on peut écrire :

$$Q(I) = \frac{CP - CM}{B_1 + B_2} \quad (3.81)$$

- Cas d'un branchement en ramification :

Etudions le cas d'une ramification en deux conduites (Fig. 3.9)
Au niveau du noeud P, on a une charge commune :

$$H(P) = H(P)_{1,n} = H(P)_{2,1} = H(P)_{3,1}$$

- Les équations caractéristiques des nœuds :
(1, n) ; (2,1) et (3,1) s'écrivent :

$$Q(P)_{1,n} = \frac{CP_1 - H(P)}{B_1} \quad (3.82)$$

$$Q(P)_{2,1} = \frac{H(P) - CM_2}{B_2} \quad (3.83)$$

$$Q(P)_{3,1} = \frac{H(P) - CM_3}{B_3} \quad (3.84)$$

- L'équation de continuité au branchement donne :

$$\sum Q(P) = 0 \quad (3.85)$$

d'où : $Q(P)_{1,n} - Q(P)_{2,1} - Q(P)_{3,1} = 0 \quad (3.86)$

$$-H(P) \cdot \left(-\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_3} \right) + \frac{CP_1}{B_1} + \frac{CM_2}{B_2} + \frac{CM_3}{B_3} = 0 \quad (3.87)$$

On aura donc :

$$H(P) = \frac{\frac{CP_1}{B_1} + \frac{CM_2}{B_2} + \frac{CM_3}{B_3}}{\sum \left(\frac{1}{B_i} \right)} \quad (3.88)$$

Les débits $Q(P)_{1,n}$; $Q(P)_{2,1}$; $Q(P)_{3,1}$ peuvent être déterminés par les équations (3.82), (3.83) et (3.84)

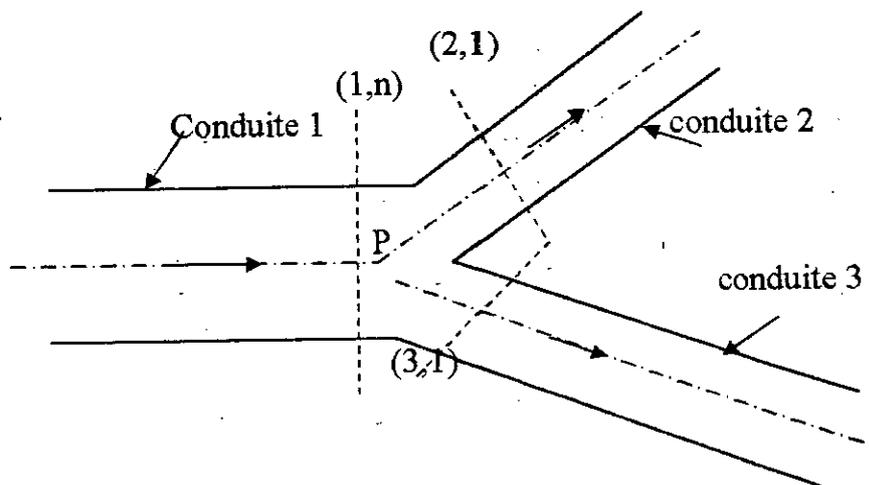


Figure.3.9 : Branchement en ramification

3.5 - Méthode d'interpolation de HARTREE :

La méthode des caractéristiques telle qu'elle a été présentée donne des résultats non satisfaisants pour les réseaux de conduites ayant des caractéristiques très différentes.

En effet, par exemple le fait que cette méthode impose de choisir des nœuds (points de discrétisation) aux divers jonctions, peut conduire à des pas de temps Δt extrêmement petits, d'où le temps d'exécution des calculs très grands. Pour résoudre ce problème, HARTREE propose une méthode d'interpolation.

Cette méthode consiste à :

- Discrétiser l'ensemble des tronçons du réseau avec maillage constant ($\Delta t = cte$, $\Delta x = cte$) Voir Fig. (3.9)
- Les inconnus Q et H au temps $t + \Delta t$ au point I seront calculées non pas à partir des points $(I-1)$ et $(I+1)$ au temps t , mais à partir des points M et N au temps t et où les caractéristiques C^+ et C^- passant par le point C au temps $t + \Delta t$ sont issues de ces points M et N .
- Une seule condition dite de COURANT doit être satisfaite.

$$\text{Si} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U \pm a|} \tag{3.89}$$

C'est à dire que M et N doivent être situés entre les points $(I-1)$ et $(I+1)$

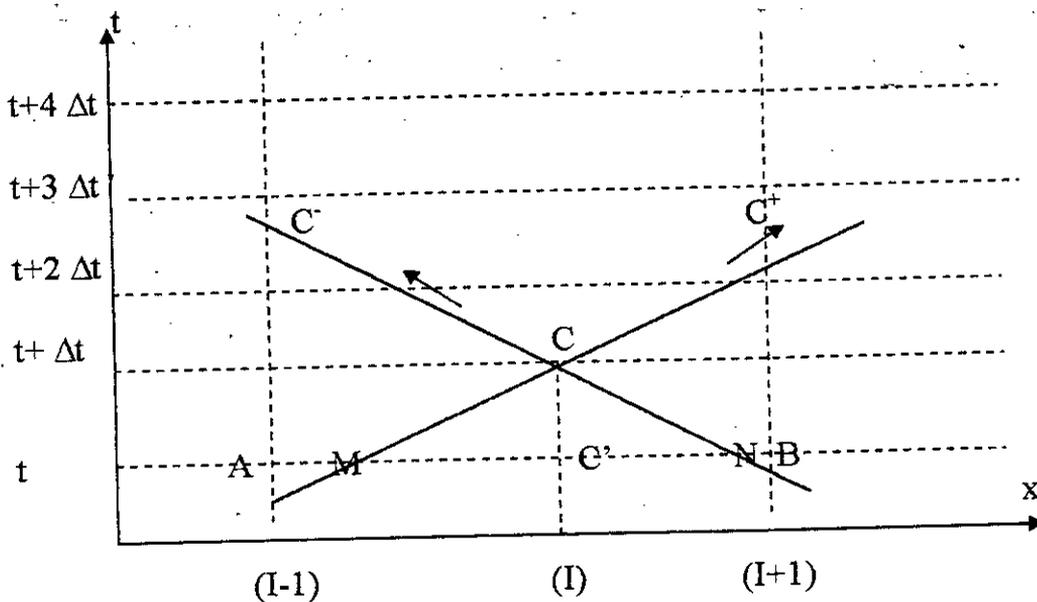


Figure.3.10 : Lignes caractéristiques

On peut démontrer facilement que :

- Sur C^+

$$H_C^{t+\Delta t} - H_M^t + \frac{a_M}{g \cdot S_M} (Q_C^{t+\Delta t} - Q_M^t) - \frac{a_M \cdot f_M}{2 \cdot g \cdot D_M \cdot S_M^2} \cdot Q_M^t |Q_M^t| (t_C - t_M) = 0 \tag{3.90}$$

$$\text{et } x_C - x_M = (U_M + a_M) (t_C - t_M)$$

- Sur C^- :

$$H_C^{t+\Delta t} - H_N^t - \frac{a_N}{g \cdot S_N} (Q_C^{t+\Delta t} - Q_N^t) - \frac{a_N \cdot f_N}{2 \cdot g \cdot D_N \cdot S_N^2} \cdot Q_N^t |Q_N^t| (t_C - t_M) = 0 \tag{3.91}$$

$$\text{et } x_C - x_N = (U_N + a_N)(t_c - t_N)$$

Puisque : $t_c - t_M = t_c - t_N$ on aura :

On aura :

$$\frac{x_c - x_N}{x_c - x_M} = \frac{U_N - a_M}{U_M + a_M} \quad (9.92)$$

Ainsi pour résoudre le système composé par les deux équations (3.90) et (3.91) avec leurs inconnues $(H_c ; Q_c)^{t + \Delta t}$, il faut calculer les couples de valeurs :

$$[Q_M ; H_M] ; [Q_N ; H_N]$$

à partir de celles déterminées au temps t aux points (I-1) et (I+1)

Pour cela, on suppose que les couples $(Q, H)^t$ pour les points compris entre (I-1) et I, notés A et C' sur la figure (3.8) suivent une loi linéaire de type

$$Q^t = \alpha_1 x + \beta_1$$

$$\text{et } H^t = \alpha_2 x + \beta_2$$

Avec α_1 et α_2 pris comme constantes entre les temps t et $t + \Delta t$.

Donc on peut écrire :

$$\begin{cases} Q_A = \alpha_1 x_A + \beta_1 \\ Q_c = \alpha_1 x_c + \beta_1 \\ Q_M = \alpha_1 x_M + \beta_1 \end{cases} \Rightarrow \Psi = \frac{Q_c - Q_M}{Q_c - Q_A} = \frac{x_c - x_M}{x_c - x_A} \quad (3.93)$$

$$\begin{cases} H_A = \alpha_2 x_A + \beta_2 \\ H_c = \alpha_2 x_c + \beta_2 \\ H_M = \alpha_2 x_M + \beta_2 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{H_c - H_M}{H_c - H_A} = \frac{x_c - x_M}{x_c - x_A} \quad (3.94)$$

On tire ainsi de l'expression de (3.95) :

$$Q_M = Q_c - \frac{x_c - x_M}{x_c - x_A} (Q_c - Q_A) = Q_c \frac{(U_M + a_M)(t_c - t_M)}{x_c - x_A} (Q_c - Q_A) \quad (3.95)$$

$$\text{Comme : } U_M = \frac{Q_M}{S_M} = \frac{x_c - x_M}{t_c - t_M} - a_M \quad (3.96)$$

$$\text{On pose : } Z = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

Il vient :

$$Q_M = \frac{Q_c - a_M \cdot Z(Q_c - Q_A)}{1 + Z(Q_c - Q_A)/S_M} \quad (3.97)$$

On peut démontrer de la même manière que :

$$Q_N = \frac{Q_c - a_N \cdot Z(Q_c - Q_B)}{1 - Z(Q_c - Q_B)/S_N} \quad (3.98)$$

Les charges aux points M et N sont :

$$H_M = H_c - \left(\frac{Q_M}{S_M} + a_M \right) Z \cdot (H_c - H_A) \quad (3.99)$$

$$H_N = H_c + \left(\frac{Q_M}{S_M} - a_M \right) Z \cdot (H_c - H_B) \quad (3.100)$$

En portant les valeurs de Q_M , Q_N , H_M et H_N (calculées d'après les équations (3.97), (3.100), (3.101), (3.102) dans les expressions (3.90) et (3.91), nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues.

Remarquons que si $U_M \ll a_M$ et $U_N \ll a_N$, On peut écrire :

$$Q_M = Q_c - a_M \cdot Z \cdot (Q_c - Q_A) \quad (3.101)$$

$$Q_N = Q_c - a_N \cdot Z \cdot (Q_c - Q_B) \quad (3.102)$$

$$H_M = H_c - a_M \cdot Z \cdot (H_c - Q_A) \quad (3.103)$$

$$H_N = H_c - a_N \cdot Z \cdot (H_c - H_B) \quad (3.104)$$

3.5- Convergence et stabilité des calculs par la méthode des caractéristiques :

Pour avoir une solution numérique précise des équations différentielles, les approximations des différences finies doivent satisfaire aux conditions de stabilité et de convergence.

Un schéma de différences finies est dit convergent s'il est cohérent avec l'équation différentielle et s'il est stable [9].

La stabilité est vérifiée par la condition de stabilité de COURANT - FRIEDRICH - LEWY [11]

$$\text{A savoir :} \quad \Delta x \geq \Delta t \quad (3.105)$$

$$\text{Ou alors :} \quad C_N = \frac{a}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} \leq 1$$

Où C_N : nombre de COURANT.

Cette condition de stabilité implique que les lignes caractéristiques passant par le point P (Fig. 3.11) doivent couper la ligne AB entre AC et CB.

On note que cette condition a été déduite en négligeant les pertes de charge par frottement dans la conduite, par conséquent, elle n'est valable que lorsque ces dernières sont faibles.

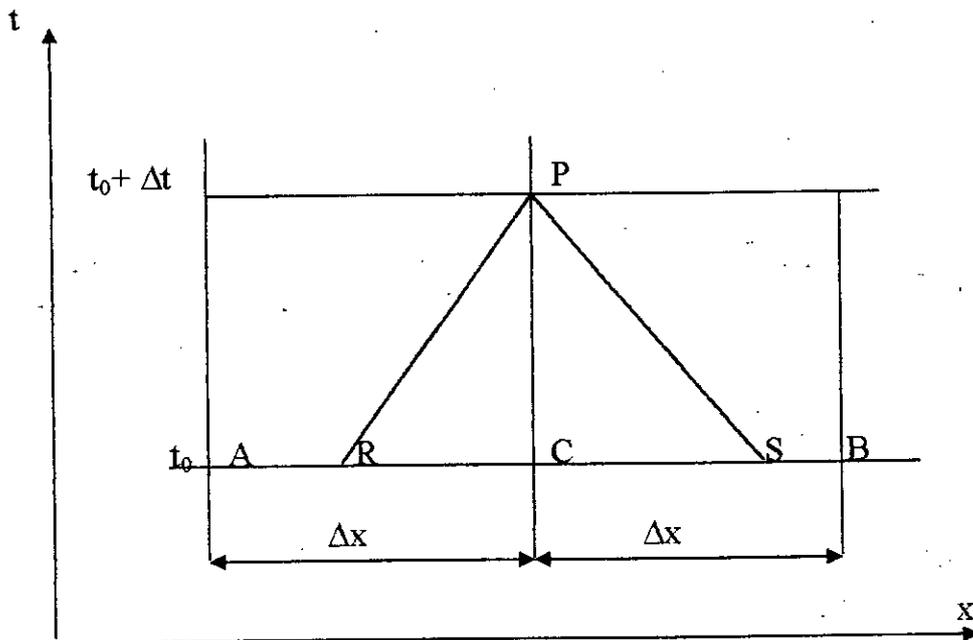


Fig. 3.11 : Lignes caractéristiques.

3-6 CONCLUSION :

A travers ce chapitre, il a été cité quelques méthodes graphiques, et analytiques de résolution des écoulements transitoires dans les conduites en charge. Certaines permettent la résolution du système d'équations aux dérivées partielles, qui décrit l'écoulement auquel on s'intéresse. Si on cherche à situer la méthode des caractéristiques par rapport à ces méthodes de résolution, on peut dire que cette méthode est beaucoup plus fiable efficacement vu ses avantages bien qu'elle a des faiblesses. Ces dernières se situent notamment lors de la discrétisation de la longueur d'une conduite en tronçons élémentaires égaux, d'où la méthode d'Hartrée. Physiquement la méthode de Bergeron paraît plus simple puisqu'elle permet de renseigner sur l'écoulement transitoire q'aux extrémités de la conduite en se basant sur l'idée de l'observateur ($a \neq 0$) et des diaphragmes fictifs des pertes de charges. Cependant ces informations recueillies aux extrémités servent de conditions aux limites à la méthode des caractéristiques. D'une façon plus succincte, on peut dire que la méthode des différences finies ont à priori une portée plus générale que la méthode des caractéristiques, notamment dans la gestion des géométries complexes. La méthode des éléments finis trouve son application beaucoup plus dans le domaine des solides. Cependant son utilisation pour les fluides reste informatiquement limitée. Dans la suite du présent travail, la méthode des caractéristiques sera amplement utilisée vue son efficacité.

CHAPITRE 4

CELERITE DE PROPAGATION DES ONDES DU COUP DE BELLIER

4.1 Introduction :

La fermeture brusque d'un robinet- vanne placé au niveau d'une conduite à écoulement en charge, est source d'un régime transitoire intense. Juste à l'amont de ce robinet-vanne, les tranches liquides, notamment les premières, se compriment l'une sur l'autre. Ce phénomène est d'autant plus accentué lorsque le robinet vanne est placé à une extrémité avale d'une conduite et où la hauteur géométrique est élevée. Ainsi, il en résulte un arrêt du mouvement des tranches en court par celle à l'avale déjà stoppées. Un observateur placé au niveau de cette conduite, constate un mouvement "accordéon" qui se produit, et se propage du robinet vanne vers l'amont avec une certaine célérité. Durant le stoppage, il en résulte une diminution du volume du fait de la compressibilité suivi d'une dilatation de la conduite, et par conséquent la surpression. L'observateur constate que ce phénomène se propage à la même célérité dans le cas d'une contraction de la conduite. Dans le domaine des transitoires, le but communément recherché est la détermination de la célérité d'onde et par conséquent le contrôle des pressions qui en résultent, en vue d'un dimensionnement d'une conduite. A travers ce chapitre, il sera présenté les différents travaux portant sur la célérité d'onde, et leurs comparaison en fonction des modes d'ancrages de la conduite, rencontrés en pratique.

4.2- Aperçu Bibliographique : [4] , [5] , [12] , [14]

Nombreux travaux ont été consacré à la détermination de la célérité d'onde soit dans les conduites minces, soit dans les conduites épaisses et dans les galeries rocheuses.

ALLIEVI a étudié la célérité de propagation dans le cas des conduites minces, en considérant que les déformations radiales. Son étude s'est limitée aux hypothèses suivantes :

- Répartition uniforme des contraintes sur toute l'épaisseur de la conduite, puisqu'elle est considérée comme mince.
- Parois élastiques obéissant à la loi de HOOKE.
- La conduite est considérée comme un ensemble d'anneaux juxtaposés les uns aux autres sans aucune influence.

Cela suppose que les efforts longitudinaux sont nuls. Ainsi ALLIEVI propose la relation suivante :

$$a = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

L'idée d'ALLIEVI ne reflète pas la réalité dans un sens plus large, puisque en pratique on affaire à des conduites ayant des parois plus ou moins épaisses et soumises à différents efforts. A la base de cela, plusieurs études se sont consacrées pour généraliser l'expression de la célérité d'onde.

JAEGER étudie le cas de la conduite épaisse dans les galeries creusées dans le rocher, ainsi que dans les galeries blindées, mais négligeant le module de POISSON de la conduite.

En reprenant les travaux d'ALLIEVI, PARMAKIAN étudie l'influence des efforts longitudinaux sur la célérité de propagation dans les conduites à parois minces uniquement. Mais contrairement à ALLIEVI et JAEGER, il a considéré l'influence des contraintes et déformation longitudinales de la conduite en introduisant un terme supplémentaire de la déformabilité longitudinale $\frac{dl}{ldP}$ dans l'expression de la célérité.

Ainsi PARMAKIAN propose:

$$a = \left[\rho \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{SdP} + \frac{dl}{ldP} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.2)$$

En définissant $\frac{dS}{SdP} + \frac{dl}{ldP} = k$, où k est exprimé en fonction du module de POISSON ν de la conduite comme suit :

Cas 1 : $k = 1 - \frac{\nu}{2}$ pour une conduite équipée de joints de dilatation.

Cas 2 : $k = 1 - \nu^2$ pour une conduite ancrée sur toute la longueur.

Cas 3 : $k = \frac{5}{4} - \nu$ pour une conduite ancrée à l'amont et libre sur toute sa longueur.

ALLIWEL a repris les travaux de PARMAKIAN pour inclure la conduite à parois épaisse tout en tenant compte des contraintes et déformations longitudinales de la conduite Il exprime la célérité de la même façon que PARMAKIAN, et propose:

$$a = \left[\left[\frac{\Delta\rho}{\rho\Delta P} + \frac{\Delta S}{S\Delta P} + \frac{\Delta l}{l\Delta P} \right] \right]^{-1/2} \quad (4.3)$$

avec :

$$\Psi = E \left[\left(\frac{dS}{SdP} + \frac{dl}{ldP} \right) \right] \quad (4.4)$$

Le paramètre Ψ dépend d'une part de la conduite étudiée et d'autre part des conditions d'ancrage de cette dernière. la relation entre PARMAKIAN et ALLIWEL réside dans le fait que le paramètre Ψ peut être relié avec la constante k de PARMAKIAN par la relation suivante :

$$\Psi = \frac{D}{e} k \quad (4.5)$$

Le calcul d'HALLIWELL donne les mêmes résultats que ceux obtenus par PARMAKIAN pour les cas d'ancrages " b" et "c" , mais dans le cas "a" le calcul

d'HALLIWELL aboutit à $\Psi = \frac{D}{e}$ donc $k = 1$, alors que celui de PARMAKIAN donne $k = 1 - \frac{v}{2}$. C'est là où réside la divergence entre ces deux auteurs.

Cette différence vient du fait que HALLIWELL considère que pour le cas "a" les joints absorbent et compensent les déformations longitudinales de la conduite. Ce qui maintient la longueur totale constante et permet de prendre comme nul le terme de la déformabilité longitudinale dans l'expression de la célérité contrairement à PARMAKIAN qui le considère comme différent de zéro.

STREETER et WILIE ont calculé la célérité de propagation dans les conduites cylindriques élastiques minces et épaisses. Ils ont adopté les résultats d'HALLIWELL et exprimaient la célérité de propagation de la même façon que PARMAKIAN tout en adoptant sa définition de la constante k .

F. MASSOUH traite les équations de continuité et dynamique par la méthode d'ALLIEVI ou par la méthode des caractéristiques. Il détermine une nouvelle expression de la célérité de propagation qui tient compte des efforts longitudinaux et radiaux dans les conduites à parois minces et épaisses. Il propose ainsi la relation suivante [12]:

$$a = \left[\left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.6)$$

En analysant tous ces travaux antérieurs, notamment ceux de HALLIWELL et JAEGER, B. SALAH (2001) [14] étudia la célérité d'onde dans les conduites à multi-parois sous pression, enterrées. Il considère le système conduite-sol linéairement élastique, des déformations longitudinales nulles, et publie une expression de la forme suivante:

$$C_1 = \left[\frac{\rho}{K_s} \left(1 + K_e \frac{2.a(1-v_m^2)G}{(1+v_m).a.E_c + E_m.e_m} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.7)$$

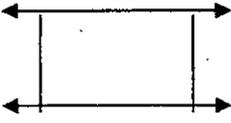
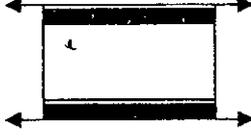
$$\text{avec: } G = \frac{E_c(1-v_s)(1-v_c)[b^2 + a^2(1-2v_c)] + E_s((1-v_c)^2(1-2v_c)(b^2 - a^2))}{E_c(b^2 - a^2)(1-v_m)(1-v_s) + E_s(1-v_c)(1-v_m)[a^2 + b^2(1-2v_s)]}$$

c'est une expression originale d'une validité générale qui s'applique pour les conduites minces et épaisses et ayant confirmé les constatations expérimentales de MEUNIER.

L'avantage de cette formule : c'est qu'elle tient compte des différents coefficients de Poisson (conduite, blindage, sol) et contrairement à celles de JAEGER et HALLIWELL.

L'expression (4.7) s'applique également pour les galeries rocheuses à condition de remplacer les propriétés du sol par celles du rocher.

Tableau 4.1 : Tableau récapitulatif des différentes formes de célérité :

Auteurs	Modèle étudié	Paroi	Prise en compte de l'encrage	Formule utilisée de la célérité
ALLIEVI		mince	NON	$a = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
JAEGER		Mince et épaisse	NON	
ARMAKIAN		mince	OUI	$a = \left[\rho \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} + \frac{dl}{l dP} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
HALLIWELL		mince et épaisse	OUI	$a = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} + \frac{\Delta l}{l \Delta P} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$
MASSOUH		mince et épaisse	OUI	$a = \left[\rho \left(\frac{\Delta \rho}{\rho \Delta P} + \frac{\Delta S}{S \Delta P} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$

4.3 - Propagation de l'onde dans une conduite : [6] , [12] , [15]

Pour étudier la propagation des ondes dans une conduite et par la suite établir l'expression de la célérité de l'onde, on suppose que les caractéristiques géométriques et mécaniques de la conduite restent constantes sur toute sa longueur et que le milieu de propagation (liquide - conduite) est parfait : c'est à dire que la propagation aura lieu sans amortissement et que la célérité est une constante de calcul .

On considère une conduite fig (4.1) dans laquelle le régime hydraulique est initialement permanent, et une variation de débit qui est accompagnée par les phénomènes suivants :

- Variation de pression ΔP
- Déformation de section ε_s
- Déformation de l'unité de longueur de la conduite ε

La déformation ε_v est déterminée par la variation de pression ΔP et la Compressibilité du liquide K.

Par contre les paramètres ε_s et ε_L se déterminent en tenant compte en plus des propriétés mécaniques de la conduite et la variation de pression ΔP , de l'état à l'extérieur et des conditions d'ancrage.

Après la changement de débit, il y a création d'une onde qui se propage afin de transmettre les variations produites en A au reste de la conduite. Pendant un temps dt l'onde aura parcouru une distance $dx = adt$.

Sur cette distance dx , on aura une répartition de tous les paramètres transportés par l'onde. On désigne par F' l'un des paramètres suivants : ρ , Q , U , P , ε_s et ε_L .

A un instant donné t , la particule liquide M située à l'abscisse x possède la quantité F' .

A l'instant $t + dt$ la quantité F' devient $F' + dF'$ dans la particule qui se déplace pendant le temps dt de $dx_M + Udt$ à la vitesse U .

On pourra écrire donc :

$$dF' = \frac{\partial F'}{\partial t} dt + U \frac{\partial F'}{\partial x} dx = 0 \quad (4.8)$$

Pendant le même temps dt , l'onde se déplace aussi mais d'une distance $dx_o = adt$.

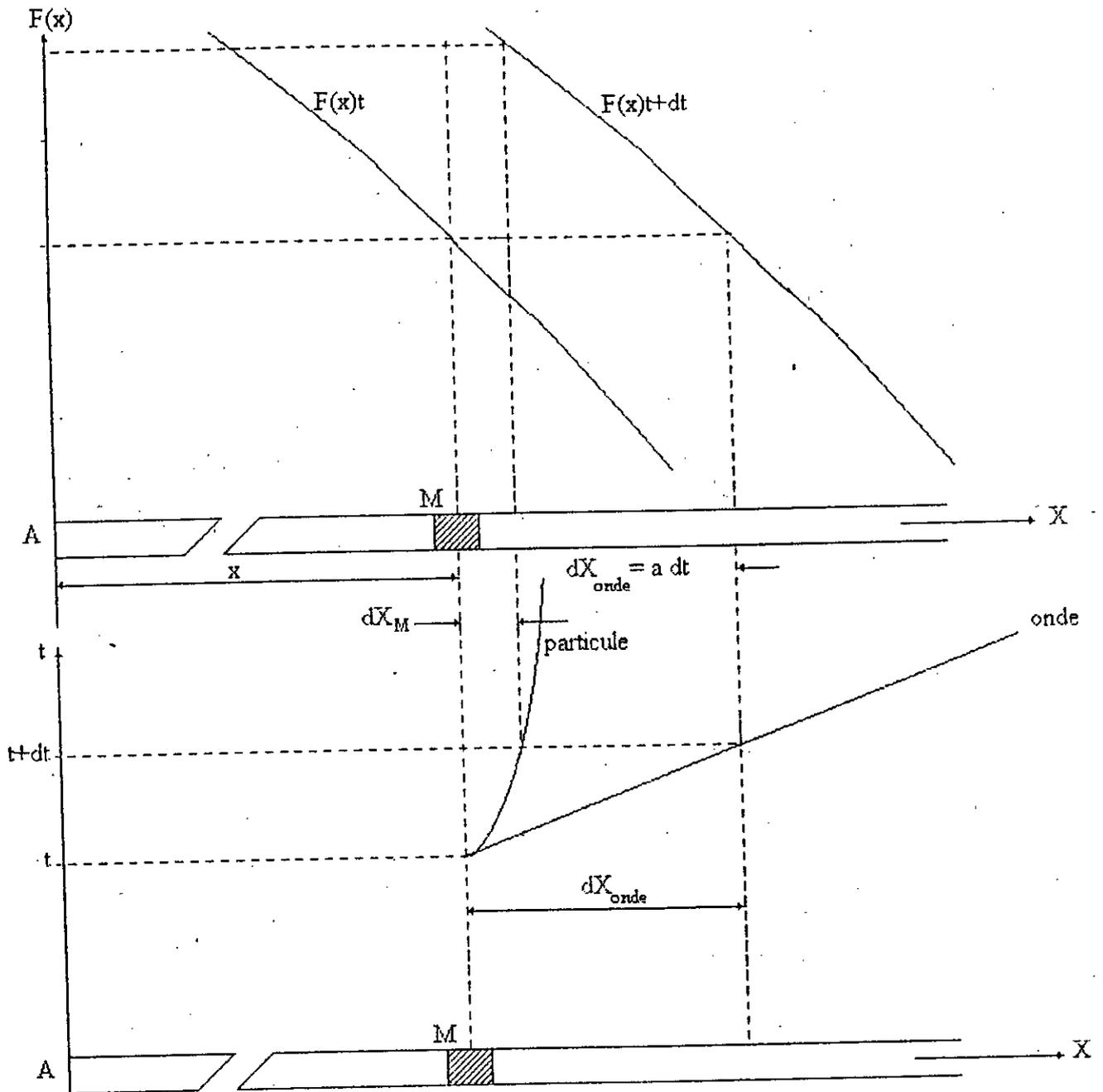
Comme l'amortissement est supposé nul, le paramètre F' sera donc conservé. Pour obtenir la répartition de F' le long de la conduite à l'instant $(t + dt)$, il suffit de translater la courbe $F'(x)_t$ parallèlement à l'axe de la conduite de la distance $dx_o = adt$.

Nous pouvons donc écrire :

$$dF'_o = \frac{\partial F'}{\partial t} dt + \frac{\partial F'}{\partial x} dx_o = 0 \quad (4.9)$$

avec $dx_o = (U + \varepsilon_a)dt$

Et en suivant la particule M



FIG(4-1) Déplacement d'une onde non amortie.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx \neq 0 \quad (4.10)$$

avec : $dx = Udt$

U : vitesse absolue de déplacement de la particule M

a : célérité relative de l'onde par rapport à M

$\varepsilon = +$ pour une onde se propageant dans le sens positif.

$\varepsilon = -$ pour une onde se propageant dans le sens négatif.

En portant les valeurs de dx et $d_o x$ dans les équations (4.8) et (4.9), on aura :

$$d_o F = \frac{\partial F}{\partial t} dt + (U + \varepsilon a) \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + U \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

De l'équation (4-12) on tire :

$$\frac{dF}{dt} = (U + \varepsilon a) \frac{\partial F}{\partial x}$$

où :

$$\frac{dF}{dt} = - \frac{1}{U + \varepsilon a} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.13)$$

En portant ces derniers résultats dans (4.12) on obtient :

$$\frac{dF}{dt} = -\varepsilon a \frac{\partial F}{\partial x} \quad (4.14)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\varepsilon a}{U + \varepsilon a} \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.15)$$

On a obtenu ainsi les expressions qui permettent de lier le taux de variation du paramètre F dans la particule M aux gradients locaux, spatial et temporel de F .

4.4 - Expression générale de la célérité de propagation : [6] , [12]

4.4.1 - Rappel des équations de base :

Avant de procéder au calcul de la célérité, on fait un bref rappel des deux équations fondamentales qui régissent l'étude de l'écoulement transitoire dans une conduite.

1) Equation de continuité :

Le principe de conservation de masse de la particule M permet d'écrire :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{d(\rho S)}{\rho S dt} \quad (4.16)$$

Où :

ρ : la masse volumique du liquide.

S : Section unitaire de la conduite

2) Equation dynamique :

La loi fondamentale de la dynamique appliquée au mouvement de la même particule tout en supposant que la conduite est horizontale et en négligeant les pertes de charge donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho \frac{dU}{dt} \quad (4.17)$$

Où :

P : est la pression interne dans la section considérée

Ces deux équations seront utilisées pour déterminer directement l'expression de la célérité de propagation.

En utilisant l'équation (4.13) et en remplaçant F successivement par la vitesse U et la pression P, on obtient les deux relations suivantes :

$$\frac{dU}{dt} = -\varepsilon a \frac{\partial U}{\partial x} \quad (4.18)$$

et

$$\frac{dP}{dt} = -\varepsilon a \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.19)$$

L'équation de conservation de la masse (4.15), et l'équation dynamique s'écrivent ainsi sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon a \frac{d(\rho S)}{\rho S dt} \quad (4.20)$$

$$\frac{dP}{dt} = \varepsilon a \rho \frac{dU}{dt} \quad (4.21)$$

En éliminant $\frac{dU}{dt}$ entre les deux dernières équations et sachant que $\varepsilon^2 = 1$ on obtient

$$a^2 = S \frac{dP}{d(\rho S)} \quad (4.22)$$

Ou bien

$$a = \left[\rho \left(\frac{d\rho}{\rho dP} + \frac{dS}{S dP} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.23)$$

La relation (4.22) donne l'expression générale de la célérité d'onde.

Interprétation de l'expression (4.23)

- Les différentielles totales $d\rho$, dS et dP traduisent l'évolution des paramètres correspondants en suivant la particule liquide.

- Le terme $\frac{d\rho}{\rho dP}$ représente la compressibilité volumique K de la particule.

Rappelons que :

$$\frac{d\rho}{\rho dP} = K = \frac{1}{\gamma}$$

- Le terme $\frac{dS}{S dP}$ peut aussi être exprimé d'après l'équation (4-14).

$$dS = \frac{\varepsilon a}{U + \varepsilon a} \cdot \frac{\partial S}{\partial t} dt = \frac{\varepsilon a}{U + \varepsilon a} \delta S \quad (4.24)$$

Et

$$dP = \frac{\varepsilon a}{U + \varepsilon a} \frac{\partial P}{\partial t} dt = \frac{\varepsilon a}{U + \varepsilon a} \delta P \quad (4.25)$$

$$\frac{dS}{S dP} = \frac{\delta S}{S \delta P} \quad (4.26)$$

Le terme $\frac{dS}{S dP}$ représente donc le rapport entre la variation locale relative de la section et la variation locale de la pression locale correspondante.

4.4.2 : Célérité dans les conduites élastiques : [12]

On peut maintenant utiliser l'expression (4.22) pour déterminer la célérité dans les différents cas qui se présentent en pratique. Ceci à condition de connaître la déformabilité de la section de la conduite.

Ainsi, en utilisant la théorie des cylindres épais, MASSOUH a pu démontrer que dans le cas où $\frac{P.D}{E.e} \ll 1$ (ce qui est pratiquement vérifié pour toutes les conduites

industrielles), il existe pratiquement une relation linéaire entre la déformation $\frac{\delta S}{S}$ de la section et la variation δP de la pression interne.

Cette relation est donnée par :

$$\frac{\delta S}{S \cdot \delta P} = \left[\left(1 - \nu \frac{\beta}{2} \right) \frac{D}{D + e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \right] \frac{D}{E \cdot e} \quad (4.27)$$

Avec :

β : coefficient qui prend en compte l'état de l'ancrage longitudinal de la conduite :

L'équation (4.27) s'écrit également :

$$\frac{\delta S}{S \cdot \delta P} = C \frac{D}{E \cdot e} \quad (4.28)$$

Avec :

$$C = \left[\left(1 - \nu \frac{\beta}{2} \right) \frac{D}{D + e} + 2(1 + \nu) \frac{e}{D} \right] \quad (4.29)$$

"C" peut être défini comme un coefficient de déformabilité qui varie d'un cas d'ancrage à un autre et selon le fait que la conduite soit mince ou épaisse.

Rappelons que :

$$\frac{dP}{\rho} = \frac{dP}{\varepsilon}$$

L'équation (4.23) s'écrit donc :

$$a = \left[\rho \left(\frac{1}{\gamma} + C \cdot \frac{D}{E \cdot e} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.30)$$

On a obtenu ainsi l'expression générale de la célérité semblable à celle d'ALLIEVI qui correspond à $C = 1$.

4.4.2.1: - Prise en compte des ancrages :

En général on distingue trois modes d'ancrages longitudinaux qui sont :

1) **Cas 1:** ($\beta = 1$) Fig. (4.1) conduite libre de se déplacer dans le sens longitudinal, fixé à l'extrémité opposée à celle où se produit l'onde.

2) **Cas 2** : ($\beta = 2$) Fig. (4.2), conduite ancrée sur toute sa longueur empêchant tout déplacement longitudinal.

3) **Cas 3**: ($\beta = 0$) Fig (4.3) conduite libre de se déplacer dans le sens longitudinal et équipée de joints de dilatation.

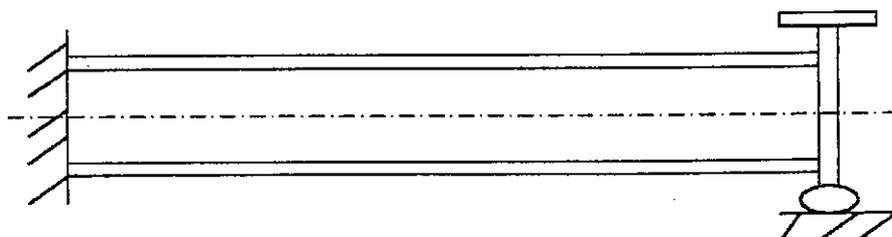


Figure 4.1 : conduite ancrée à une extrémité.

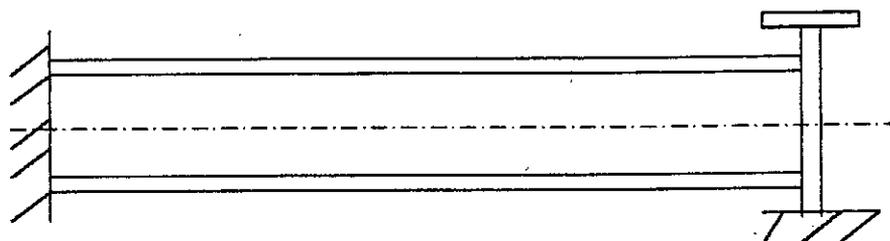


Figure 4.2 : conduite ancrée aux deux extrémités

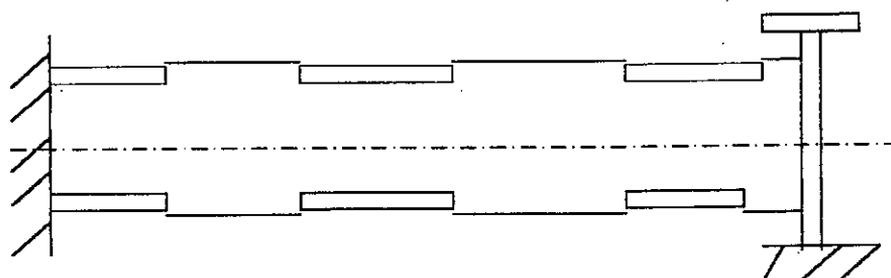


Figure 4.3 : conduite équipée de joints de dilatation

4.4.2.2 : - Expression du coefficient de déformabilité C :

En remplaçant la valeur de β correspondant à chacun des cas d'ancrage suscités dans l'équation (4.29), on trouve l'expression du coefficient C correspondant à chaque cas :

- Pour le cas d'ancrage 1 :

$$C = \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{D}{D+e} + 2(1+\nu) \frac{e}{D} \quad (4.31)$$

- Pour le cas d'ancrage 2 :

$$C = (1 - \nu^2) \frac{D}{D+e} + 2(1+\nu) \frac{e}{D} \quad (4.32)$$

- Pour le cas d'ancrage 3 :

$$C = \frac{D}{D+e} + 2(1+\nu) \frac{e}{D} \quad (4.33)$$

4.4.3 - Expression particulière de la célérité :

L'expression (4.16) de la déformabilité de la conduite prend deux formes particulières extrêmes :

- 1) Dans le cas d'une conduite à parois minces ($e \ll D$) c'est à dire le rapport e/D tend vers zéro et l'expression (4.26) devient :

$$\frac{\delta S}{S.SP} = \left(1 - \nu \frac{\beta}{2}\right) \frac{D}{D+e} \quad (4.34)$$

Le coefficient de déformabilité C de la conduite mince est alors :

- Pour le cas d'ancrage 1 :

$$C = 1 - \frac{\nu}{2}$$

- Pour le cas d'ancrage 2 :

$$C = 1 - \nu^2$$

- Pour le cas d'ancrage 3 :

$$C = 1$$

- 1) Dans le cas d'une conduite très épaisse ($e \gg D$) comme le cas d'une galerie rocheuse par exemple la quantité $\frac{D}{D+e}$ tend vers zéro et l'expression (4.26) devient :

$$\frac{\delta S}{S.SP} = 2 \frac{1+\nu}{E}$$

et l'expression (4.22) devient :

$$a = \left[\rho \left(\frac{1}{\gamma} + 2 \frac{1+\nu}{E} \right) \right]^{-1/2} \quad (4.35)$$

La célérité de propagation dans une conduite très épaisse, ne dépend donc pas de ses dimensions mais seulement des propriétés mécaniques de son matériau et de celles du fluide.

4.5 : CONCLUSION :

Le point commun de convergence des différents auteurs réside dans le fait que la célérité dépend de la compressibilité du liquide et la déformabilité de la paroi de la conduite. Cependant les avis de ces auteurs divergent dans la considération des modes d'ancrage notamment entre les conduites minces et épaisses. Dans tous les cas, la déformabilité de la paroi de la conduite a été librement considérée au passage du front d'onde bien que ce n'est pas le cas réel, puisque la pression externe de la conduite a été négligée. Néanmoins dans le cas de l'encrage « a » la célérité est plus élevée. En s'approchant de la réalité, il a été déterminé le cas de la célérité d'onde dans les conduites soumises à la poussée externe, couramment rencontré en pratique.

CHAPITRE 5

ETUDE DU REGIME TRANSITOIRE A COUP DE BELIER IMPOSE

5.1 – Généralités :

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes qui déterminent le coup de bélier engendré dans une conduite en charge []. La plupart de ces méthodes déterminent la charge due à la valeur majorante de ce phénomène juste à l'extrémité avale de la conduite et plus précisément à l'amont du robinet vanne, durant sa manœuvre de fermeture. Originellement, la méthode des caractéristiques étudie le coup de bélier dans le plan temps et longueur ($t ; x$), en discrétisant la conduite, et par considération des conditions aux limites connues. La charge due à la valeur majorante du coup de bélier est l'une des conditions aux limites qui est connue à l'extrémité avale. Cette valeur est prise par hypothèse nulle à l'extrémité amont (existence du réservoir). Le cas de la vitesse observe le phénomène inverse par rapport à la valeur majorante à ces deux extrémités. En conséquence, l'application de la méthode des caractéristiques recherche communément le couple charge-vitesse réparti dans le plan ($t ; x$) [6]. En pratique la conduite peut être sujette soit à un coup de bélier croissant soit à un coup de bélier décroissant. Ces deux formes ne sont pas bénéfiques à la bonne tenue mécanique, de la conduite. L'idée d'un coup de bélier imposé, contribue à l'obtention d'une pression totale y correspondant qui ne doit pas dépasser la pression de rupture de la canalisation [6].

Dans ce chapitre, en se basant sur le diagramme de mouvement des ondes de perturbation conçu par Bergeron, on contribue à la détermination de ce couple, en utilisant la méthode des caractéristiques. Par une hypothèse simplificatrice, on se limite à son application aux extrémités de la conduite.

La considération des pertes de charge réelles engendrées lors d'un régime transitoire rend, l'utilisation de cette méthode plus compliquée, vu les différentes formes de variation que peut prendre la vitesse suivant la longueur [14]. La variation parabolique de la vitesse semble la plus adéquate vu sa simplicité.

5.2 – Détermination du couple charge- vitesse sans prise en compte des pertes de charge :

Les systèmes d'équation déjà obtenus au chapitre III, vont servir de base pour la détermination du couple charge-vitesse. En se basant sur le diagramme des mouvements des ondes figure (5.2) cité dans la référence de Meunier [6] (1981), le raisonnement consiste à aboutir à un modèle mathématique permettant la détermination de la charge h_i et la vitesse U_i correspondante. Il sera ainsi considéré un modèle de base Figure (5.1) constitué d'un réservoir à plan d'eau constant alimentant une conduite horizontale de caractéristiques uniques avec joints de dilatation munie d'un robinet vanne de caractéristiques quelconques pour l'instant. Le principe du

raisonnement considère un pas de calcul $t = \frac{\theta}{2} = \frac{\ell}{a}$ coïncidant avec le pas de manœuvre

du robinet vanne, une célérité d'onde supposée constante sans déformation et une réflexion totale au niveau du réservoir (plan d'eau invariable, et coups de bélier nulle). L'hypothèse du choix de pas de calcul a été retenue par l'idée que dans le domaine pratique, le coup de bélier est en général important non seulement au premier pas de manœuvre mais également tout juste à l'amont du robinet vanne.

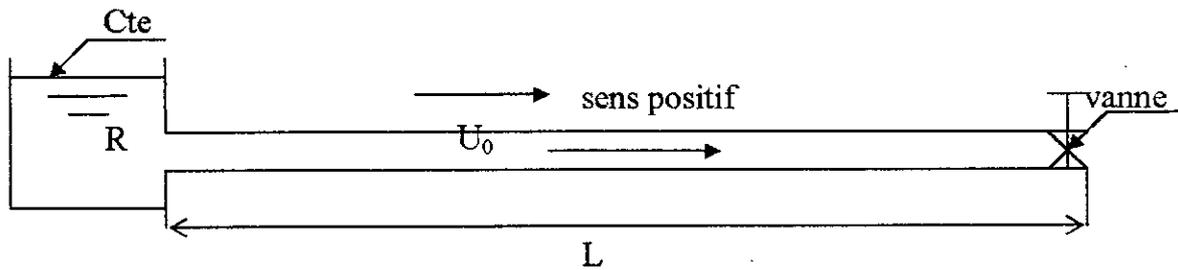


Figure 5.1 : Système réservoir - conduite gravitaire horizontale

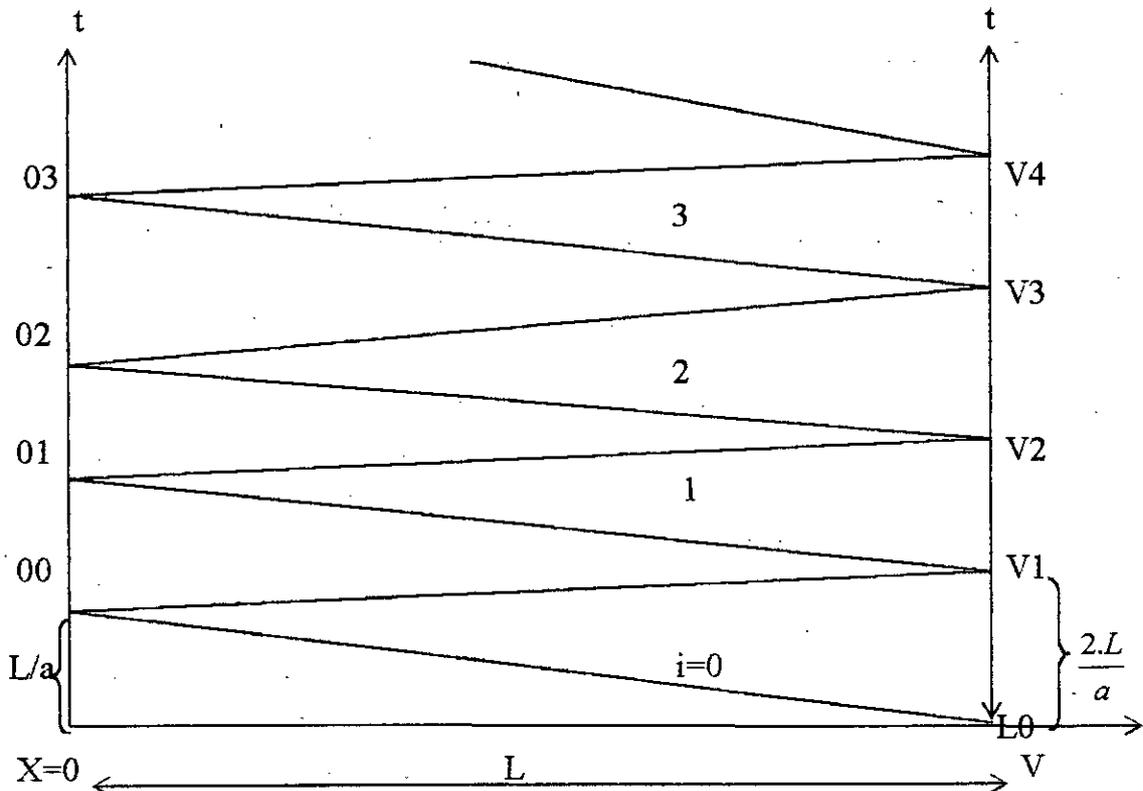


Figure 5.2 : Diagramme de BERGERON. Mouvement des ondes.

Interprétation du diagramme de Bergeron

L'application des équations aux caractéristiques se base sur les informations connues à l'une des extrémités de la conduite (Figure 5.1) dans la présente résolution. Ainsi les droites caractéristiques du diagramme représentent les chemins suivis par les ondes provoquées par le moindre mouvement de manœuvre du robinet-vanne. A titre d'exemple :

Au premier pas de fermeture, l'onde du coup de bélier créée par la fermeture de la vanne à l'instant « 0 », arrive au réservoir au bout d'un temps $t = \frac{L}{a}$. Cette onde se

propage dans la conduite avec une célérité « a ». Avant que l'onde ainsi créée n'arrive au réservoir, le régime n'est pas perturbé à l'amont et, demeure permanent tant qu'il n'est pas traversé par cette onde. Donc l'information connue sera recherchée au niveau

3. Chemin : 01-V2

C'est la droite caractéristique positive :

On peut écrire :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0 \Rightarrow dh = -\frac{a}{g} dU$$

$$h_{v2} - h_{01} = -\frac{a}{g} (U_{01} - U_{v2}).$$

$h_{01} = 0$ (au niveau du réservoir)

$$h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{01} - U_{v2})$$

En remplaçant U_{01} par sa valeur, on trouve :

$$h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{v1} - \frac{g}{a} h_{v1} - U_{v2})$$

Ou bien :

$$h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{v1} - U_{v2}) - h_{v1}$$

4) Chemin : V2 - 02 :

C'est la droite caractéristique négative :

$$dh - \frac{a}{g} dU = 0 \quad \text{ou bien} \quad dh = \frac{a}{g} dU$$

$$h_{02} - h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{02} - U_{v2})$$

C'est à dire :

$$U_{02} = U_{v2} + \frac{g}{a} h_{v2}$$

Avec $h_{02} = 0$ au niveau du réservoir

5) Chemin : 02-V3 :

C'est la droite caractéristique positive :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{v3} - h_{02} = -\frac{a}{g} (U_{v3} - U_{02})$$

Ou bien :

$$h_{v3} = \frac{a}{g} (U_{02} - U_{v3})$$

En remplaçant U_{02} par sa valeur, on trouve :

$$h_{v3} = \frac{a}{g}(U_{v2} - U_{v3}) - h_{v2}$$

6) Chemin : V3-03

C'est la droite caractéristique négative :

$$dh - \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{v3} - h_{03} = \frac{a}{g}(U_{v3} - U_{03})$$

De même : $h_{03} = 0$ et $h_{v3} = \frac{a}{g}(U_{v3} - U_{03})$

Ou bien : $U_{03} = U_{v3} - \frac{g}{a} h_{v3}$

7) Chemin 03-V4 :

C'est la droite caractéristique positive :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{v4} - h_{03} = -\frac{a}{g}(U_{v4} - U_{03})$$

Ou bien : $h_{v4} = \frac{a}{g}(U_{03} - U_{v4})$

En remplaçant U_{03} par sa valeur, on trouve :

$$h_{v4} = \frac{a}{g}(U_{v3} - U_{v4}) - h_{v3}$$

8) Chemin : V4 - 04 :

C'est la droite caractéristique négative :

$$dh - \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{04} - h_{v4} = \frac{a}{g}(U_{04} - U_{v4})$$

Ou bien : $h_{v4} = -\frac{a}{g}(U_{04} - U_{v4})$

D'où : $U_{04} = U_{v4} - \frac{g}{a} h_{v4}$

9) Chemin : 04 -V5 :

C'est la droite caractéristique positive :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{V5} - h_{04} = -\frac{a}{g} (U_{V5} - U_{04})$$

Ou bien :

$$h_{V5} = \frac{a}{g} (U_{04} - U_{V5})$$

Autrement :

$$h_{V5} = \frac{a}{g} (U_{V4} - U_{V5}) - h_{V4}$$

On remarque que d'une façon générale, on peut écrire :

$$h_{vi} = \frac{a}{g} (U_{v,i-1} - U_{v,i}) - h_{v,i-1} \tag{5.2}$$

Si l'on tient compte des cumuls membre à membre, on obtient ; puisque $U_{\infty} = U_0$

$$h_{vi} = \frac{a}{g} (U_0 - U_{vi}) - 2 \sum_{K=0}^{i-1} h_{vK} \tag{5.3}$$

5.2.2 – Détermination de la vitesse U_{vi} durant la phase de fermeture :

De même les figures (5.1) et (5.2), serviront de base pour la détermination du paramètre U_{vi} durant la phase de fermeture supposée lente.

Le principe est le même que pour le cas de la détermination du paramètre h_{vi} . L'application des équations aux caractéristiques sans pertes de charge, sera considéré suivant les chemins caractéristiques positifs et négatifs parcourus par les ondes selon le diagramme de Bergeron. Ainsi on peut écrire :

Le chemin caractéristique $i = 0$, caractérise le régime permanent dans ce présent raisonnement.

1. Chemin caractéristique : 00 → VI

- C'est la droite caractéristique C^+ :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{v1} - h_{00} = -\frac{a}{g} (U_{v1} - U_{00})$$

$$U_{v1} = U_0 - \frac{g}{a} h_{v1}$$

$U_0 = U_{00}, (i = 0)$; c'est le régime permanent :

2- Chemin caractéristique : V1 → 01

- C'est la droite caractéristique C⁻ :

$$dh - \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{01} - h_{v1} = \frac{a}{g} (U_{01} - U_{v1})$$

$$\text{C'est à dire : } U_{01} = U_{v1} - \frac{g}{a} h_{v1}$$

Ou bien par cumul, on obtient :

$$U_{01} = U_0 - 2 \frac{g}{a} h_{v1}$$

3 - Chemin caractéristique : 01 → V2

- C'est la droite caractéristique C⁺ :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0$$

$$H_{v2} - h_{01} = -\frac{a}{g} (U_{v2} - U_{01})$$

$$h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{01} - U_{v2})$$

Par remplacement, on obtient :

$$U_{v2} = U_0 - \frac{g}{a} h_{v2} - 2 \frac{g}{a} h_{v1}$$

4) Chemin caractéristique : V2 → 02

- C'est la droite caractéristique C⁻ :

$$dh - \frac{a}{g} dU = 0$$

$$h_{02} - h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{02} - U_{v2})$$

De même $h_{02} = 0$ (au niveau du réservoir)

$$\Rightarrow h_{v2} = -\frac{a}{g} (U_{02} - U_{v2})$$

$$\text{et } U_{02} = U_{v2} - \frac{g}{a} (h_{v2})$$

Par remplacement de U_{v2} , on obtient :

$$U_{02} = U_0 - \frac{2g}{a} (h_{v1} + h_{v2})$$

5) Chemin caractéristique : 02 → V3

- C'est la droite caractéristique C⁺ :

$$dh + \frac{a}{g} dU = 0 \rightarrow dh = -\frac{a}{g} dU$$

$$h_{v3} - h_{v2} = -\frac{a}{g}(U_{v3} - U_{v2})$$

Avec $h_{v2} = 0$ (au niveau du réservoir)

Et :
$$U_{v3} = U_{v2} - \frac{g}{a} h_{v3}$$

Par remplacement on obtient :

$$U_{v3} = U_0 - \frac{g}{a} h_{v3} - \frac{2g}{a}(h_{v1} + h_{v2})$$

D'une façon générale, on peut écrire que :

$$U_{v1} = U_0 - \frac{g}{a} h_{v1} - \frac{2g}{a} \sum_{K=0}^{i-1} h_{vK} \tag{5-4}$$

5.2.3 Cas d'un coup de bélier imposé au système considéré :

5.2.3.1 – Cas de la fermeture :

L'idée d'un coup de bélier imposé à un système hydraulique contribue à la bonne tenue mécanique des conduites qui le compose, puisqu'il ne dépasse jamais la valeur de rupture.

En partant de l'expression (5.3) on propose de déterminer la relation liant le coup de bélier imposé en valeur adimensionnelle et la caractéristique du système considéré. Cette relation s'avère très intéressante si elle est étudiée en fonction du temps de fermeture : problème que les gestionnaires cherchent à résoudre.

On rappelle l'expression (5.3) qui est :

$$h_{vi} = \frac{a}{g}(U_0 - U_{vi}) - 2 \sum_{K=0}^{i-1} h_{vK} \tag{5bis}$$

Si l'on considère que h_{vi} est constante à la $i^{\text{ème}}$ étape, on peut écrire :

$$h_{vi} = \frac{a}{g}(U_0 - U_{vi}) - 2(i-1)h_{vi} \tag{5.5}$$

$$h_{vi} + 2(i-1)h_{vi} = \frac{a}{g}(U_0 - U_{vi}) \tag{5.6}$$

Ou bien :
$$(2i-1)h_{vi} = \frac{a}{g}(U_0 - U_{vi}) \tag{5.7}$$

En dernière phase de fermeture complète, c'est à dire quand $i = n$, on peut écrire que la vitesse devient nulle :

$$U_{vn} = U_{vn} = 0 \tag{5.8}$$

n = nombre total de pas de fermeture

Et par conséquent :

$$h_{vi} = h_{vn} = \frac{aU_0}{g(2n-1)} \tag{5.9}$$

En divisant par la charge statique H_o au droit de la vanne, on obtient :

$$\frac{h_{vi}}{H_o} = \frac{aU_o}{gH_o(2n-1)} \tag{5.10}$$

L'expression (5.10) montre que le système considéré est caractérisé par les paramètres a, U_o, H_o essentiellement. On peut écrire :

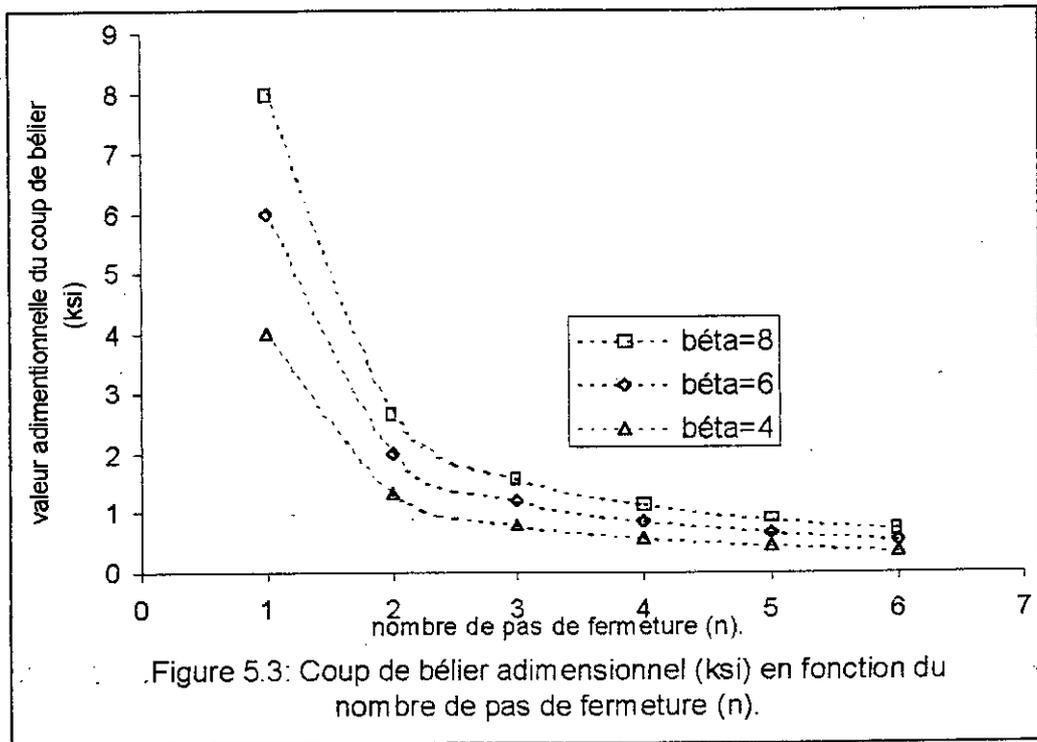
$$\xi = \frac{h_{vi}}{H_o} = \frac{\beta}{2n-1} \tag{5.11}$$

Avec :
$$\beta = \frac{aU_o}{gH_o}$$

ξ - paramètre adimensionnel du coup de bélier.

β - caractéristique du système hydraulique considéré (modèle de base).

Afin de connaître l'influence du nombre de pas de temps (x) de fermeture sur la valeur adimensionnelle du coup de bélier à différentes caractéristiques β , on représente graphiquement $\xi = f(n)$. fig (5.3)



L'allure des courbes montre que pour un même système hydraulique donné (caractéristiques connues), le coup de bélier diminue quand le nombre n total de pas de fermeture augmente. De même quand β augmente (généralement c'est la célérité a et la vitesse U_o qui augmentent), le coup de bélier ξ tend à augmenter. Afin de le faire diminuer, on augmente le nombre de pas n .

On constate également que lorsque n est très faible ($n = 1$), c'est le cas généralement des fermetures brusques, le coup de bélier est important.

Pour un coup de bélier imposé ξ , on étudie l'influence de la caractéristique du système hydraulique sur le temps T de fermeture du robinet vanne. C'est généralement, en pratique, la voie la plus adoptée par les gestionnaires.

En considérant l'expression (5.11), on peut écrire :

$$\xi = \frac{\beta}{2n-1} \tag{5.11bis}$$

Qui peut s'écrire :

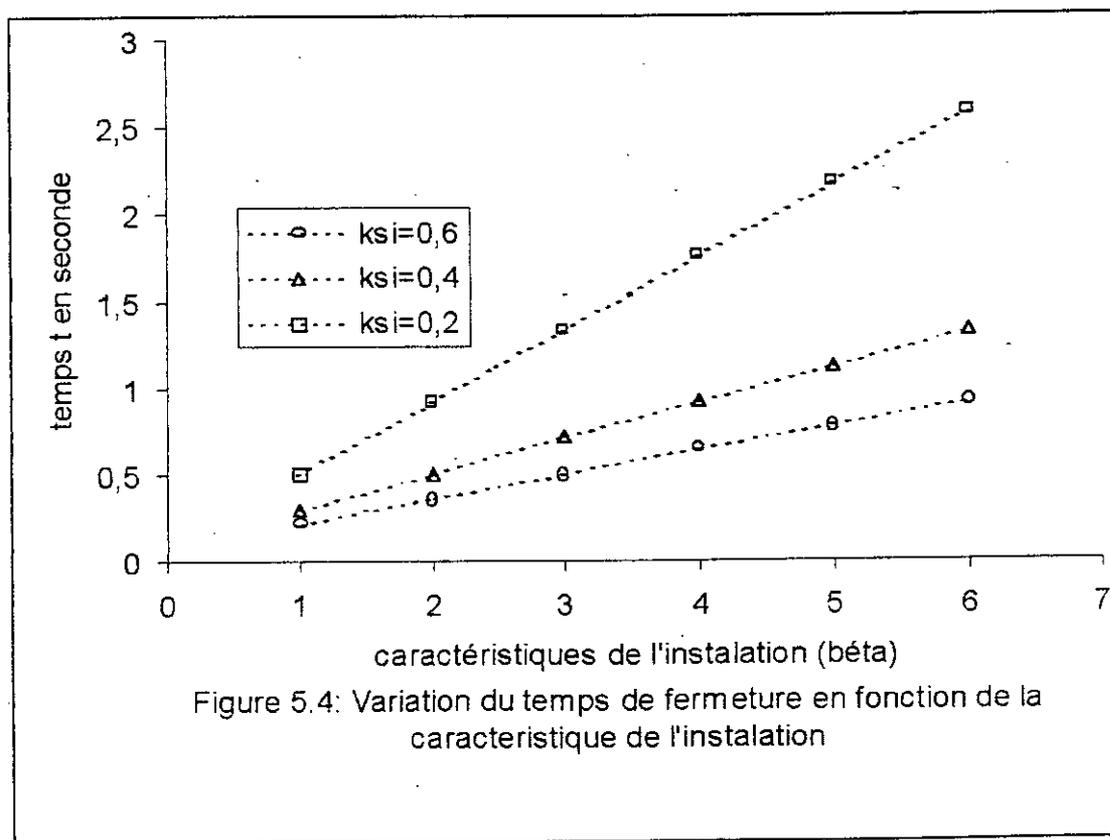
$$n = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\xi} + 1 \right) \tag{5.12}$$

Sachant que la durée totale de fermeture est $T = n \cdot \frac{2\ell}{a}$

On obtient :

$$T = \frac{\ell}{a} \left(\frac{\beta}{\xi} + 1 \right) \tag{5.13}$$

On constate bien que la durée de fermeture du robinet-vanne est tributaire des caractéristiques du système considéré, si l'on veut obtenir un coup de bélier constant. Cette influence s'observe aisément si l'on représente graphiquement l'expression (5.13). (Figure 5.4).



5.2.3.2 – Cas d'une ouverture :

De même, il est également intéressant de limiter le coup de bélier en cas d'une ouverture du robinet-vanne. Cette méthode a l'avantage d'éviter le phénomène de cavitation, en phase d'ouverture qui pourra être engendré par une forte dépression.

La vanne étant initialement fermée, à cette étape la vitesse en régime permanent s'annule par immobilité de l'écoulement. Au début de la phase d'ouverture, l'expression (5.3) donne :

$$h_{v_i} = -\frac{a}{g}U_{v_i} - 2\sum_{K=0}^{i-1}h_{v_K} \quad (5.14)$$

L'expression (5.14) montre bien qu'il s'agit d'une dépression engendrée durant le $i^{\text{ème}}$ pas d'ouverture. On admet que lorsque $i = n$ caractérisant l'ouverture complète, le coup de bélier négatif, est imposé. On peut donc écrire :

$$h_{v_n} = -\frac{a}{g}U_{v_n} - 2(n-1)h_{v_n} \quad (5.15)$$

En conséquence, pour une ouverture complète, on aura une vitesse :

$$U_{v_n} = -\frac{g}{a}[h_{v_n} + 2(n-1)h_{v_n}] \quad (5.16)$$

Ou bien :

$$U_{v_n} = -\frac{g}{a}[2n-1]h_{v_n} \quad (5.17)$$

A travers l'ouverture complète du robinet-vanne, la vitesse peut être également donnée par l'expression (5.18)

$$U_{v_n} = \mu_0 \sqrt{2g(h_0 + h_{v_n})} \quad (5.18)$$

En principe le coefficient de vitesse est variable en fonction du temps de manœuvre. Dans ce cas, il est supposé constant.

Le terme $h_0 + h_{v_n}$ représente la charge totale au droit de la vanne durant le régime transitoire.

Juste après l'ouverture, quand le régime permanent s'établit, l'expression (5.18) aboutit à :

$$U_{v_n}^0 = \mu_0 \sqrt{2gh_0} \quad (5.19)$$

En supposant que le coefficient μ reste constant ($\mu = \mu_0$), le rapport des expressions (5.18) et (5.19) donne :

$$\frac{U_{v_n}}{U_{v_n}^0} = \sqrt{1 + \frac{h_{v_n}}{h_0}} \quad (5.20)$$

C'est à dire :

$$U_{vn} = U_{vn}^o \sqrt{1 + \frac{h_{vn}}{h_o}} \quad (5.21)$$

Tenant compte de l'expression (5.17), on peut écrire :

$$U_{vn}^o \sqrt{1 + \frac{h_{vn}}{h_o}} = -\frac{g}{a} (2n-1) h_{vn} \quad (5.22)$$

En divisant par la charge statique H_o , on aboutit à :

$$\frac{aU_{vn}^o}{gho} \sqrt{1 + \frac{h_{vn}}{h_o}} = -(2n-1) \frac{h_{vn}}{H_o} \quad (5.23)$$

En introduisant l'idée de la caractéristique β du système hydraulique considéré et d'un coup de bélier adimensionnel, ξ on peut écrire :

$$\beta \sqrt{1 + \xi} = -\xi(2n-1) \quad (5.24)$$

Avec :

$$\beta = \frac{aU_{vn}^o}{gH_o} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{h_{vn}}{H_o}$$

Ou bien :

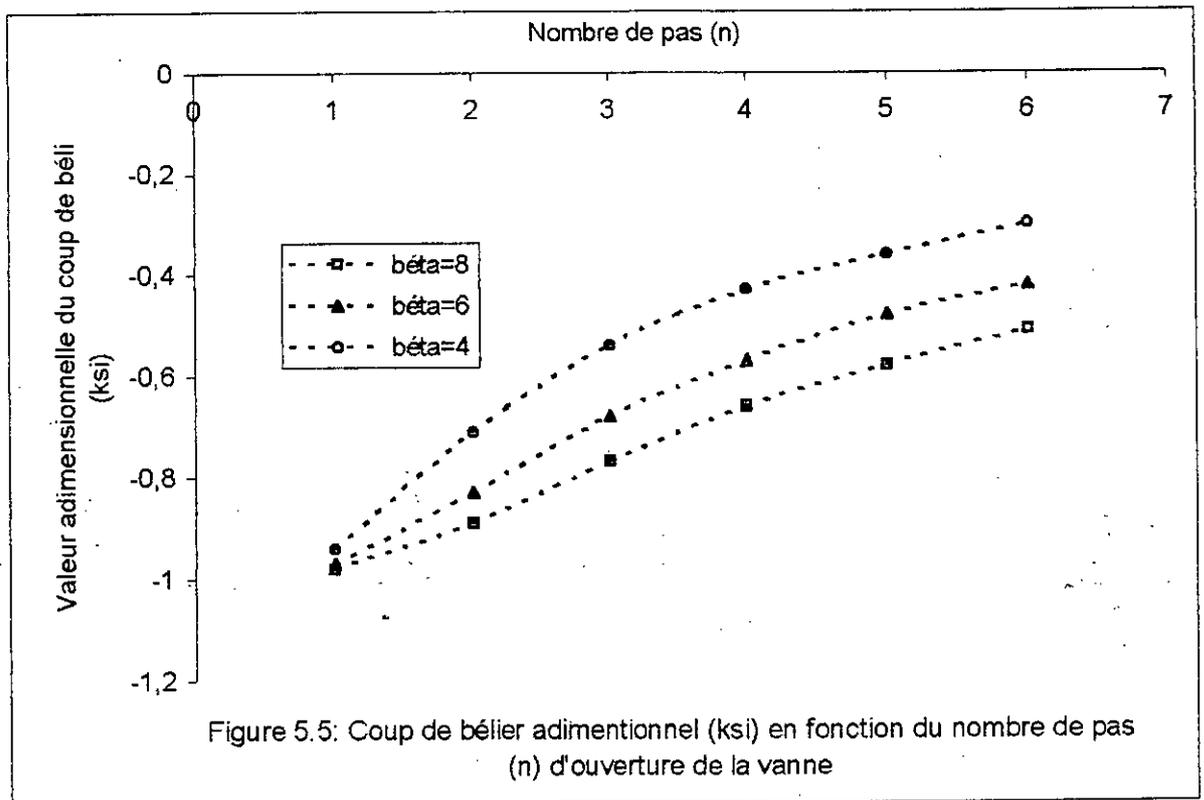
$$\beta^2 (1 + \xi) = \xi^2 (2n-1)^2 \quad (5.25)$$

C'est une équation du 2^{ème} degré en ξ , facilement résoluble. Sa résolution permet de donner deux racines, distinctes où l'on s'intéresse à celle qui est négative car il s'agit d'une dépression ; d'où :

$$\xi = \frac{+\beta^2 - \sqrt{\beta^4 + 4\beta^2(1-2n)^2}}{2(1-2n)^2} \quad (5.26)$$

L'expression (5.26) n'est valable que pour $n > \frac{1}{2}$.

D'une façon analogue que pour le cas de la fermeture, on procède à une représentation graphique du paramètre ξ en fonction, du nombre (n) de pas d'ouverture pour différentes caractéristiques β du système hydraulique considéré. Figure 5.5



On constate qu'en phase d'ouverture, la dépression est plus accentuée, lorsque le nombre n de pas d'ouverture est faible, c'est ce qui peut refléter le cas d'une ouverture brusque. Cependant lorsque ce nombre n augmente, la dépression diminue et tend vers zéro.

5.3 – Détermination du couple charge vitesse tenant compte des pertes de charge :

La manipulation de la méthode des caractéristiques est plus aisée quand on néglige les pertes de charge. Dans ce cas il n'y a pas d'amortissement du phénomène transitoire, le fluide est considéré parfait. Cette hypothèse trouve son utilité, d'ailleurs justifiée, lorsqu'on veut dimensionner une conduite du point de vue résistance mécanique, c'est la méthode de la valeur majorante. En réalité, il s'agit toujours d'un écoulement réel où l'atténuation du phénomène dû au régime transitoire se fera notamment par les pertes de charge. L'étude bibliographique montre couramment que ces pertes de charge sont données par la relation universelle de Darcy.W. qui est applicable normalement en régime permanent. Donc la vitesse d'écoulement est supposée constante, c'est ce qui ne reflète pas la réalité.

Néanmoins la variation de la vitesse, durant n'importe quelle phase de manœuvre est mal connue. Afin de s'approcher de la réalité, et sans faire une grande erreur, on peut considérer par hypothèse une variation parabolique de la vitesse, suivant la longueur et trouver une forme donnant la perte de charge.

5.3.1 – Analyse de la perte de charge par variation parabolique de la vitesse.

La variation parabolique de la vitesse obéit à l'équation suivante :

$$x = \alpha \cdot U_x^2 \quad (5.27)$$

α : Une constante

U_x : Vitesse à l'abscisse x

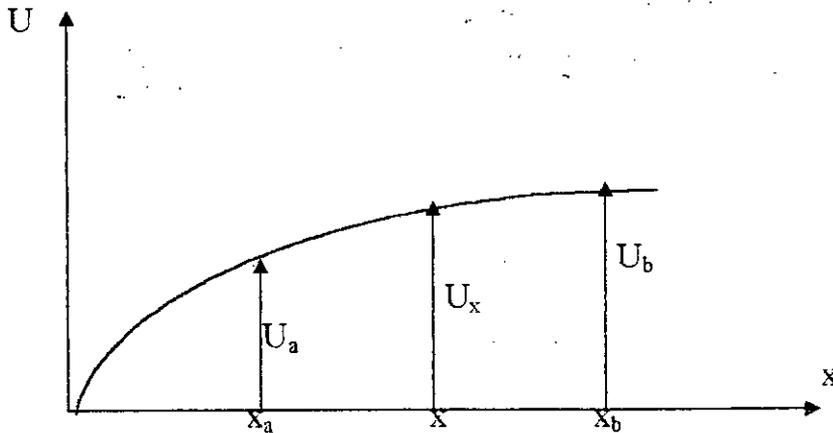


figure 5.6 : variation parabolique de la vitesse

La perte de charge sur un tronçon dx est donnée par la relation suivante :

$$\Delta H = J \cdot dx \quad (5.28)$$

J : Perte de charge unitaire

La perte de charge sur toute la longueur de la conduite sera obtenue en intégrant entre x_a et x_b sachant que $x_b - x_a = L$. On obtient :

$$\Delta H = \int_{x_a}^{x_b} J \cdot dx = A \int_{x_a}^{x_b} U_x^2 dx \quad (5.29)$$

$$A = \frac{\lambda}{2g \cdot D} = \text{constante}$$

De l'équation (5.27) on tire :

$$U_x^2 = \frac{x}{\alpha} \quad (5.30)$$

Remplaçons (5.30) dans l'équation de DARCY WAISBACH, on aura :

$$\Delta H = A \int_{x_a}^{x_b} \frac{x}{\alpha} dx \quad (5.31)$$

En intégrant (5.31) entre $x_a = \alpha U_a^2$ et $x_b = \alpha U_b^2$

On obtient après simplification l'équation suivante :

$$\Delta H = \frac{\lambda L}{2gD} \left[\frac{U_b^2}{2} + \frac{U_a^2}{2} \right] \quad (5.32)$$

La relation (5.32) est l'équation de la perte de charge pour une variation supposée parabolique de la vitesse on remarque que si (5.33) : $U_a = U_b = U_o$, on retrouve l'équation de DARCY- WEISBACH pour un écoulement permanent :

$$\Delta H = \frac{\lambda L U_o^2}{D 2g} \quad (5.33)$$

5.3.2 : Détermination de la charge h_{LI} en phase de fermeture :

on procède de la même manière que pour le paragraphe 5.2.1 mais tenant compte des pertes de charge suivant les caractéristiques positives et négatives :

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (5.34)$$

$$dh \pm \frac{a}{g} dU = -\Delta H$$

00 - V1 :

$$h_{v1} = \frac{a}{g} (U_{00} - U_{v1}) - \Delta H(00 - V1)$$

V1 - 01 :

$$h_{v1} = \frac{a}{g} (U_{v1} - U_{01}) - \Delta H(V1 - 01)$$

01 - V2 :

$$h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{01} - U_{v2}) - \Delta H(01 - V2)$$

V2 - 02 :

$$h_{v2} = \frac{a}{g} (U_{v2} - U_{02}) - \Delta H(V2 - 02)$$

02 - V3 :

$$h_{v3} = \frac{a}{g} (U_{02} - U_{v3}) - \Delta H(02 - V3)$$

V3-03 :

$$h_{v3} = \frac{a}{g} (U_{v3} - U_{03}) - \Delta H(V3 - 03)$$

03-V4 :

$$h_{v4} = \frac{a}{g}(U_{03} - U_{v4}) - \Delta H(03 - V4)$$

V4-04 :

$$h_{v4} = \frac{a}{g}(U_{v4} - U_{04}) - \Delta H(V4 - 04)$$

04-V5 :

$$h_{v5} = \frac{a}{g}(U_{04} - U_{v5}) - \Delta H(04 - V5)$$

$$\Delta H = \frac{\lambda L}{2gD} \left(\frac{U_a^2}{2} + \frac{V_b^2}{2} \right) = K \left(\frac{U_a^2}{2} + \frac{U_b^2}{2} \right) \quad \text{avec} \quad K = \frac{\lambda L}{2gD}$$

$$\begin{aligned} \sum \Delta H &= K \left[\frac{U_{00}^2}{2} + \frac{U_{03}^2}{2} + \frac{U_{04}^2}{2} + \frac{U_{04}^2}{2} + \frac{U_{v5}^2}{2} \right] \\ &= K \left[\frac{U_o^2}{2} + U_{v1}^2 + U_{01}^2 + U_{v2}^2 + U_{02}^2 + U_{v3}^2 + U_{03}^2 + U_{v4}^2 + U_{04}^2 + \frac{U_{v5}^2}{2} \right] \\ &= K \left[\frac{U_o^2}{2} + \sum U_{vi}^2 + \sum U_{oi}^2 + \frac{U_{v1}^2}{2} \right] \end{aligned}$$

avec $K' = \frac{K'}{2g}$

pour le cumul des pertes de charge, on obtient :

$$\sum \Delta H = \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{i=1} U_{vi}^2 + \frac{U_{v1}^2}{2} \right] + \frac{K'}{2g} \left[\sum U_{oi}^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.35)$$

et par cumul des autres termes, on obtient :

$$h_{vi} = \frac{a}{g}(U_o - U_{vi}) - 2 \sum_{k=0}^{i=1} h_{vk} - \sum \Delta H \quad (5.36)$$

et par conséquent :

$$h_{vi} = \frac{a}{g}(U_o - U_{vi}) - 2 \sum_{k=0}^{i=1} h_{vk} - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{i=1} U_{vi}^2 + \frac{U_{v1}^2}{2} \right] - \frac{K'}{2g} \left[\sum U_{oi}^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.37)$$

5.3.3 – Détermination de la vitesse U_n en phase de fermeture :

on procède de la même manière que pour le cas de la charge ; mais cette fois ci en déterminant le paramètre vitesse à chaque phase de fermeture.

00 → V1 :

$$U_{v1} = U_o - \frac{g}{a} h_{v1} - \frac{g}{a} \Delta H(00 - V1)$$

V1 → 01 :

$$h_{01} - h_{v1} = \frac{a}{g} (U_{01} - U_{v1}) - \Delta H(V1 - 01)$$

$$h_{01} = 0 \Rightarrow h_{v1} = \frac{a}{g} U_{01} - \frac{a}{g} U_{v1} - \Delta H(V1 - 01)$$

$$\frac{a}{g} U_{01} = \frac{a}{g} U_{v1} + \Delta H(V1 - 01) - h_{v1}$$

$$U_{01} = U_{v1} + \frac{g}{a} \Delta H(V1 - 01) - \frac{g}{a} h_{v1}$$

Par remplacement on obtient :

$$U_{01} = U_o - \frac{g}{a} h_{v1} - \frac{g}{a} \Delta H(00 - V1) - \frac{g}{a} \Delta H(V1 - 01) - \frac{g}{a} h_{v1}$$

$$U_{01} = U_o - \frac{2g}{a} h_{v1} - \frac{g}{a} (\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01))$$

01 → V2 :

$$h_{v2} - h_{01} = -\frac{a}{g} (U_{v2} - U_{01}) - \Delta H(V2 - 01)$$

$$h_{01} = 0 \rightarrow h_{v2} = -\frac{a}{g} (U_{v2} - U_{01}) - \Delta H(V2 - 01)$$

$$h_{v2} + \Delta H(V2 - 01) = -\frac{a}{g} (U_{v2} - U_{01})$$

$$-\frac{g}{a} h_{v2} - \frac{g}{a} \Delta H(V2 - 01) = U_{v2} - U_{01}$$

$$U_{v2} = U_{01} - \frac{g}{a} h_{v2} - \frac{g}{a} \Delta H(V2 - 01)$$

En remplaçant U_{01} , on trouve :

$$U_{v2} = U_o - \frac{2g}{a} h_{v1} - \frac{2g}{a} h_{v2} - \frac{g}{a} (\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01)) - \frac{g}{a} h_{v2} - \frac{g}{a} \Delta H(V2 - 01)$$

$$U_{v2} = U_o - \frac{2g}{a} h_{v1} - \frac{2g}{a} h_{v2} - \frac{g}{a} [\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 01)]$$

V2 → 02 :

$$h_{02} - h_{v2} = \frac{a}{g}(U_{02} - U_{v2}) - \Delta H(02 - V2)$$

$$h_{02} = 0 \rightarrow h_{v2} = -\frac{a}{g}(U_{02} - U_{v2}) - \Delta H(02 - V2)$$

$$h_{v2} + \Delta H(02 - V2) = -\frac{a}{g}(U_{02} - U_{v2})$$

$$U_{02} = U_{v2} - \frac{g}{a}h_{v2} - \frac{g}{a}\Delta H(02 - V2)$$

En remplaçant U_{v2} par sa valeur :

$$U_{02} = U_0 - \frac{2g}{a}h_{v1} - \frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03)] - \frac{g}{a}h_{v2} - \frac{g}{a}\Delta H(02 - V2)$$

$$U_{02} = U_0 - \frac{2g}{a}h_{v1} - \frac{2g}{a}h_{v2} - \frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03) + \Delta H(02 - V2)]$$

02-V3 :

$$h_{v3} - h_{02} = -\frac{a}{g}(U_{v3} - U_{02}) - \Delta H(V3 - 02)$$

$$h_{02} = 0$$

$$h_{v3} = -\frac{a}{g}(U_{v3} - U_{02}) - \Delta H(V3 - 02)$$

$$h_{v3} + \Delta H(V3 - 02) = -\frac{a}{g}(U_{v3} - U_{02})$$

$$-\frac{g}{a}h_{v3} - \frac{g}{a}\Delta H(V3 - 02) = U_{v3} - U_{02}$$

$$U_{v3} = U_{02} - \frac{g}{a}h_{v3} - \frac{g}{a}\Delta H(V3 - 02)$$

Par remplacement de U_{02} , on trouve :

$$U_{v3} = U_0 - \frac{2g}{a}h_{v1} - \frac{2g}{a}h_{v2} - \frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03) + \Delta H(02 - V2)] -$$

$$\frac{g}{a}h_{v3} - \frac{g}{a}\Delta H(V3 - 02)$$

$$U_{v3} = U_0 - \frac{2g}{a}(h_{v1} + h_{v2}) - \frac{g}{a}h_{v3} -$$

$$\frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03) + \Delta H(02 - V2) + \Delta H(V3 - 02)]$$

V3 → 03 :

$$h_{03} - h_{V3} = \frac{a}{g}(U_{03} - U_{V3}) - \Delta H(03 - V3)$$

$$h_{V3} = -\frac{a}{g}(U_{03} - U_{V3}) + \Delta H(03 - V3)$$

$$h_{V3} - \Delta H(03 - V3) = -\frac{a}{g}(U_{03} - U_{V3})$$

$$-\frac{g}{a}h_{V3} + \frac{g}{a}\Delta H(03 - V3) = U_{03} - U_{V3}$$

$$U_{03} = U_{V3} - \frac{g}{a}h_{V3} - \frac{g}{a}\Delta H(03 - V3)$$

En remplaçant U_{V3} par sa valeur :

$$U_{03} = U_0 - \frac{2g}{a}(h_{V1} + h_{V2}) - \frac{g}{a}h_{V3} -$$

$$\frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03) + \Delta H(02 - V2) + \Delta H(V3 - 02)] - \frac{g}{a}h_{V3} - \frac{g}{a}\Delta H(03 - V3)$$

$$U_{03} = U_0 - \frac{2g}{a}(h_{V1} + h_{V2} + h_{V3}) -$$

$$\frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03) + \Delta H(02 - V2) + \Delta H(V3 - 02) + \Delta H(03 - V3)]$$

03 → V4 :

$$h_{V4} - h_{03} = -\frac{a}{g}(U_{V4} - U_{03}) - \Delta H(V4 - 03)$$

$$h_{03} = 0 \Rightarrow$$

$$U_{V4} = U_{03} - \frac{g}{a}h_{V4} - \frac{g}{a}\Delta H(V4 - 03)$$

$$U_{V4} = U_0 - \frac{2g}{a}(h_{V1} + h_{V2} + h_{V3}) -$$

$$\frac{g}{a}[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 03) + \Delta H(02 - V2) + \Delta H(V3 - 02) + \Delta H(03 - V3)] -$$

$$\frac{g}{a}h_{V4} - \frac{g}{a}\Delta H(V4 - 03)$$

ou bien :

$$U_{V4} = U_0 - \frac{2g}{a}(h_{V1} + h_{V2} + h_{V3}) - \frac{g}{a}h_{V4} - \frac{g}{a}$$

$$[\Delta H(00 - V1) + \Delta H(V1 - 01) + \Delta H(V2 - 01) + \Delta H(02 - V2) + \Delta H(V3 - 02) + \Delta H(03 - V3) + \Delta H(V4 -$$

En appliquant le cas de la variation parabolique de la vitesse donnée par l'expression (5.32) :

$$\Delta H = \frac{\lambda l}{2gD} [U_a^2 + U_b^2] = \frac{K'}{2g} (U_a^2 + U_b^2)$$

$$\sum \Delta H = \frac{K'}{2g} [U_{\infty}^2 + U_{v1}^2 + U_{v1}^2 + U_{o1}^2 + U_{v2}^2 + U_{o1}^2 + U_{o2}^2 + U_{v2}^2 + U_{v3}^2 + U_{o2}^2 + U_{o3}^2 + U_{v3}^2 + U_{v4}^2 + U_{o3}^2]$$

$$\sum \Delta H = \frac{K'}{2g} [U_{\infty}^2 + 2U_{v1}^2 + 2U_{o1}^2 + 2U_{v2}^2 + 2U_{v3}^2 + 2U_{o2}^2 + 2U_{o3}^2 + U_{v4}^2]$$

$$\sum \Delta H = \frac{K'}{2g} [U_{\infty}^2 + 2(U_{o1}^2 + U_{o2}^2 + U_{o3}^2) + 2(U_{v1}^2 + U_{v2}^2 + U_{v3}^2) + U_{v4}^2]$$

$$\sum \Delta H = \frac{K'}{2g} \left[U_{\infty}^2 + 2 \sum_{K=1}^{i=1} U_{oK}^2 + 2 \sum_{K=1}^{i=1} U_{vK}^2 + U_{v_i}^2 \right] \quad (5.38)$$

D'une façon générale on peut écrire :

$$U_{v_i} = U_o - \frac{2g}{a} \sum_{i=1}^{i=1} h_{vK} - \frac{g}{a} h_{v_i} - \frac{gK'}{a2g} \left[U_{\infty}^2 + 2 \sum_{K=1}^{i=1} U_{oK}^2 + 2 \sum_{K=1}^{i=1} U_{vK}^2 + U_{v_i}^2 \right] \quad (5.39)$$

5.3.4 – Cas d'un coup de bélier imposé au système considéré :

D'une manière analogue que pour le paragraphe 5.2.3, on détermine le paramètre adimensionnelle du coup de bélier imposé en tenant compte des pertes de charge à partir de l'expression (5.37).

$$h_{v_i} = \frac{a}{g} (U_o - U_{v_i}) - 2 \sum_{K=0}^{i=1} h_{vK} - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{i=1} U_{v_i}^2 + \frac{U_{v_i}^2}{2} \right] - \frac{K'}{2g} \left[\sum U_{o1}^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.37 \text{ bis})$$

Avec $k' = \frac{\lambda l}{D}$, désigne le coefficient de perte de charge. Lorsque $i = n$, la fermeture est totale, puisque (n) représente le nombre total de pas de fermeture. Dans ce cas, la vitesse s'annule, et on peut écrire :

$$U_{v_i} = U_{v_n} = 0 \quad (5.40)$$

On obtient donc :

$$h_{v_n} = \frac{a}{g} U_o - 2 \sum_{i=0}^{n-1} h_{v_i} - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{n-1} U_{v_i}^2 + 0 \right] - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{n-1} U_{o_i}^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.41)$$

Si durant la phase de fermeture, on impose un coup de bélier, on peut écrire :

$$h_{v_n} + 2(n-1)h_{v_n} = \frac{a}{g} U_o - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{n-1} U_{v_i}^2 \right] - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{n-1} U_{o_i}^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.42)$$

$$(2n-1)h_{v_n} = \frac{a}{g} U_o - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^{n-1} U_{v_i}^2 + \sum_{i=0}^{n-1} U_{o_i}^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.43)$$

Durant la phase de fermeture, on peut considérer par hypothèse une variation linéaire de la vitesse au droit du robinet-vanne. Ainsi cette vitesse va varier de U_o pour $i = 0$ à $U_{vn} = 0$ pour $i = n$

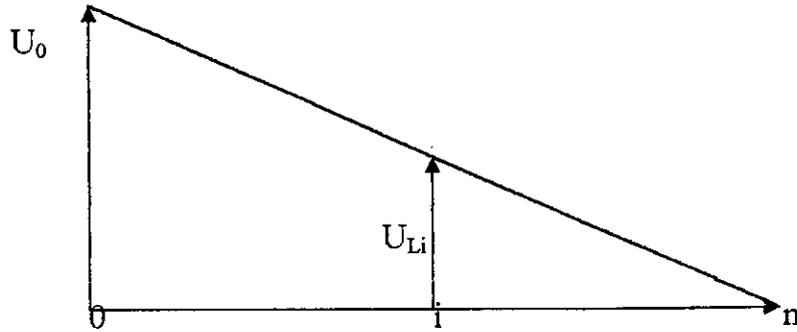


Figure 5.7 : Variation linéaire de la vitesse

Selon le concept des triangles semblables, on peut écrire :

$$\frac{U_i}{n-i} = \frac{U_o}{n} \Rightarrow U_i = \frac{U_o}{n}(n-i) \quad (5.44)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} U_i^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{U_o^2}{n^2} (n-i)^2 = \frac{U_o^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 \quad (5.45)$$

En portant (5.45) dans l'expression (5.43) on trouve :

$$(2n-1)h_{vn} = \frac{a}{g}U_o - \frac{K'}{2g} \left[\frac{U_o^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{U_o^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{U_o^2}{2} \right] \quad (5.46)$$

ou bien :

$$(2n-1)h_{vn} = \frac{a}{g}U_o - \frac{K'}{2g}U_o^2 \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.47)$$

Autrement dit :

$$h_{vn} = \frac{aU_o}{g(2n-1)} - \frac{K'U_o^2}{(2n-1)2g} \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.48)$$

En divisant par la charge statique H_o on obtient :

$$\xi = \frac{h_{vn}}{H_o} = \frac{aU_o}{g(2n-1)H_o} - \frac{K'U_o^2}{(2n-1)2gH_o} \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.49)$$

A travers l'expression (5.49), on constate l'apparition d'un coefficient de vitesse μ sous le robinet-vanne pour la charge statique H_o qui est donné par :

$$\mu = \frac{U_o}{\sqrt{2gH_o}} \quad (5.50)$$

Ou bien :

$$\frac{U_o^2}{2gH_o} = \mu^2 \quad (5.51)$$

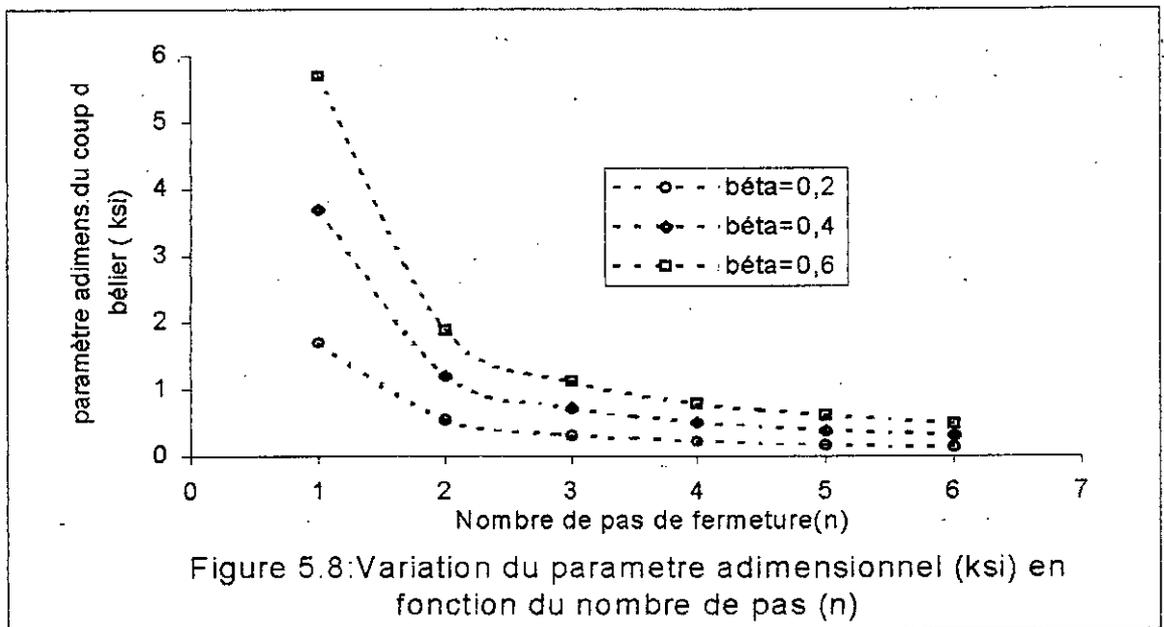
Et finalement on obtient :

$$\xi = \frac{aU_o}{g(2n-1)H_o} - \frac{K'}{2n-1} \cdot \mu^2 \cdot \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.52)$$

Avec :
$$\beta = \frac{aU_o}{gH_o}$$

D'où :
$$\xi = \frac{\beta}{2n-1} - \frac{K'}{2n-1} \mu^2 \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.53)$$

Afin de connaître l'influence du nombre de pas de fermeture (n) sur le paramètre ξ du coup de bélier, on représente graphiquement la fonction $\xi = f(n)$ pour différentes valeurs de β . Cette représentation graphique permet également de connaître l'influence des pertes de charge à variation supposée parabolique de la vitesse sur le paramètre (ξ), pour un coefficient de vitesse μ supposé constant. Figure (5.8)



5.3.5 - Influence de la perte de charge sur le temps de fermeture à coup de bélier imposé.

On examine cette fois-ci la durée de fermeture en maintenant un coup de bélier imposé au système sous l'effet des pertes de charge avec l'hypothèse supposée sur la variation de la vitesse. De ce fait on considère l'expression (5.53) déjà établi au paragraphe précédent.

$$\xi = \frac{\beta}{2n-1} - \frac{K'}{2n-1} \mu^2 \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.54)$$

$$2n-1 = \frac{\beta}{\xi} - \frac{K'}{\xi} \mu^2 \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.55)$$

$$n = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta}{\xi} - \frac{K'}{\xi} \mu^2 \cdot \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right] \right] \quad (5.56)$$

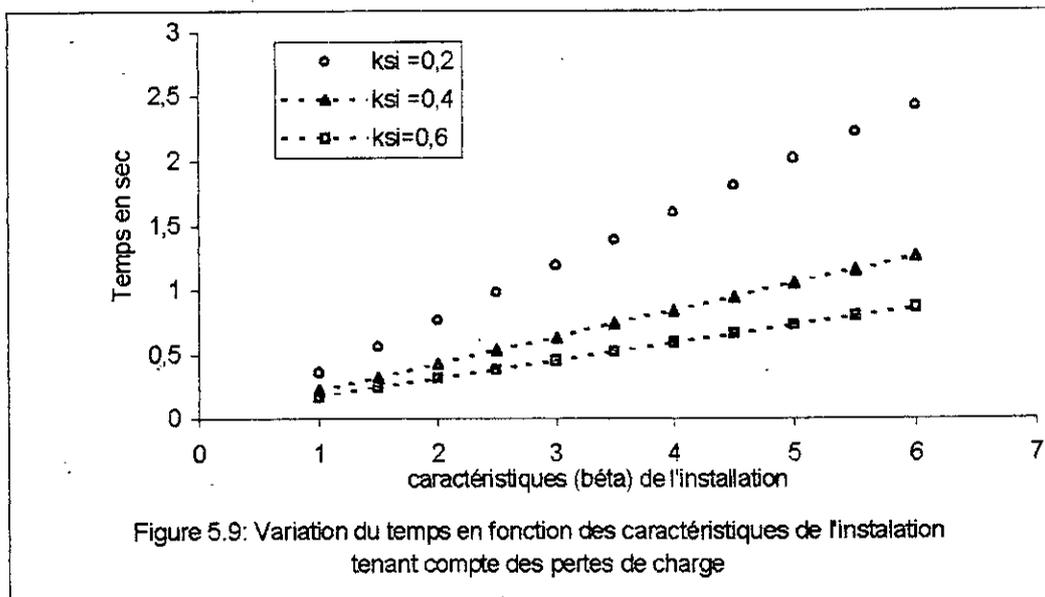
Tenant compte que $T = n \cdot \frac{2L}{a}$; le temps de fermeture total, on aura :

$$\frac{T.a}{2L} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\beta}{\xi} - \frac{K'}{\xi} \cdot \mu^2 \cdot \left(\frac{2}{n^2} \sum (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.57)$$

$$T = \frac{L}{a} \left[1 + \frac{\beta}{\xi} - \frac{K'}{\xi} \cdot \mu^2 \cdot \left(\frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.58)$$

L - longueur de la conduite
 a - célérité d'onde de propagation

On représente graphiquement la fonction $T = f(\beta)$, pour différentes valeurs de ξ et n comme constantes figure(5.9)



5.3.6 -- Influence de la perte de charge sur le temps d'ouverture à coup de béliet imposé.

tenant compte des pertes de charge le raisonnement pour le cas d'ouverture se fait en considérant l'expression (5.37) en partant d'une vitesse U_0 nulle, on peut donc écrire que :

$$h_{vi} = -\frac{a}{g} U_{vi} - 2 \sum_{k=0}^{i-1} h_{vk} - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0} U_{vi}^2 + \frac{U_{vi}^2}{2} + \sum_{i=0} U_{oi}^2 \right] \quad (5.59)$$

On considère une ouverture totale donc $i = n$, tout en maintenant un coup de béliet imposé constant : on aboutit donc à :

$$\frac{a}{g} U_{vn} = -h_{vn} - 2(n-1)h_{vn} - \frac{K'}{2g} \left[\sum_{i=0}^n U_{vi}^2 + \frac{U_{vn}^2}{2} + \sum_{i=0}^n U_{oi}^2 \right] \quad (5.60)$$

$$U_{vn} = -\frac{g}{a}(2n-1)h_{vn} - \frac{gK'}{2ga} \left[\sum_{i=0}^n U_{vi}^2 + \frac{U_{vn}^2}{2} + \sum_{i=0}^N U_{oi}^2 \right] \quad (5.61)$$

De la même manière, tenant compte de l'expression (5.21), on pose

$$U_{vn} = U_{vn}^0 \sqrt{1 + \frac{h_{vn}}{H_o}} \quad (5.62)$$

On obtient donc :

$$U_{vn}^0 \sqrt{1 + \frac{h_{vn}}{H_o}} = -\frac{g}{a}(2n-1)h_{vn} - \frac{K'}{2a} \left[\sum_{i=0}^n U_{vi}^2 + \frac{U_{vn}^2}{2} + \sum_{i=0}^N U_{oi}^2 \right] \quad (5.63)$$

En multipliant par le terme $\frac{a}{gH_o}$ on trouve :

$$\frac{U_{vn}^0 a}{gH_o} \sqrt{1 + \frac{h_{vn}}{H_o}} = -(2n-1) \frac{h_{vn}}{H_o} - \frac{K'}{2a} \frac{a}{gH_o} \left[\sum_{i=0}^n U_{vi}^2 + \frac{U_{vn}^2}{2} + \sum_{i=0}^N U_{oi}^2 \right] \quad (5.64)$$

$$\beta \sqrt{1 + \xi} = -(2n-1) \xi - \frac{K'}{2gH_o} \left[\sum_{i=0}^n U_{vi}^2 + \frac{U_{vn}^2}{2} + \sum_{i=0}^N U_{oi}^2 \right] \quad (5.65)$$

$U_{vi} = U_{vn} = U^0$ à ouverture complète et régime établi.

Par considération d'une variation linéaire de la vitesse en phase d'ouverture, il vient

$$\frac{U_i}{i} = \frac{U^0}{n} \text{ et } U_i = \frac{U^0}{n} i \quad (5.66)$$

$$\text{Ou bien : } \sum U_i^2 = \sum \frac{U^2}{n^2} i^2 = \frac{U_0^2}{n^2} \sum i^2 \quad (5.67)$$

En remplaçant dans l'expression (5.65), on trouve :

$$\beta \sqrt{1 + \xi} = -(2n-1)\xi - \frac{K'}{2gh_o} \left[\frac{U^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} U_0^2 + \frac{U_0^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \right] \quad (5.68)$$

Ou bien :

$$\beta \sqrt{1 + \xi} = -(2n-1)\xi - \frac{K' U_0^2}{n^2 2gh_o} \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.69)$$

$$\beta \sqrt{1 + \xi} = -(2n-1)\xi - \frac{K'}{n^2} \phi \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.70)$$

$$\text{On pose : } W = \frac{K'}{n^2} \phi^2 \left[2 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{2} \right] \quad (5.71)$$

On obtient donc :

$$\beta\sqrt{1+\xi} = -(2n-1)\xi - W \tag{5.72}$$

En élevant au carré :

$$\beta^2(1+\xi) = [-(2n-1)\xi - W]^2 \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned} \beta^2(1+\xi) &= (2n-1)^2\xi^2 + W^2 + 2(2n-1)\xi W \\ (2n-1)^2\xi^2 + 2(2n-1)\xi W - \beta^2 - \beta^2\xi + W^2 &= 0 \\ (2n-1)^2\xi^2 + [2(2n-1)W - \beta^2]\xi - (\beta^2 - W^2) &= 0 \end{aligned} \tag{5.74}$$

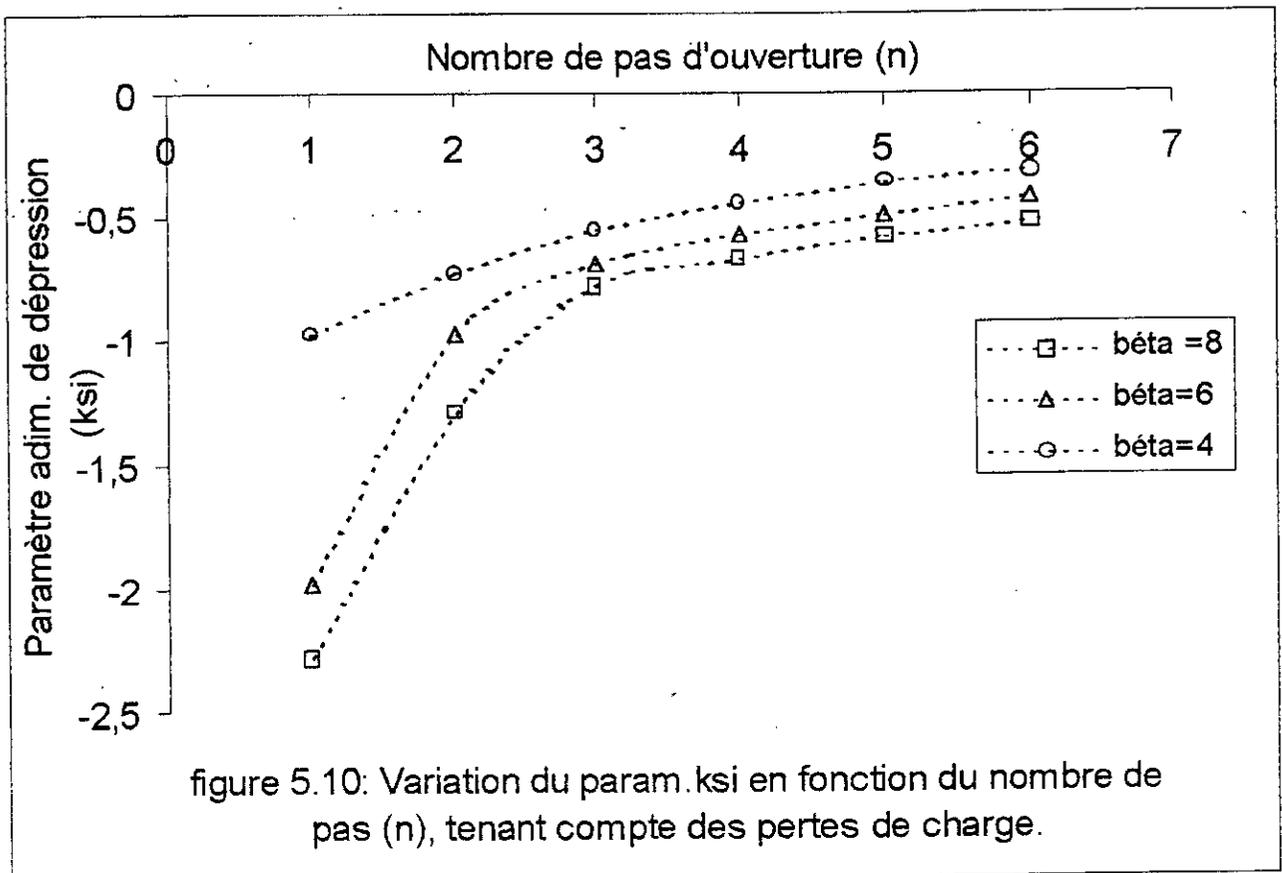
C'est une équation du 2^{ème} degré en ξ

$$\Delta = [2(2n-1)W - \beta^2]^2 + 4(2n-1)^2(\beta^2 - W^2)$$

Dont la racine sera :

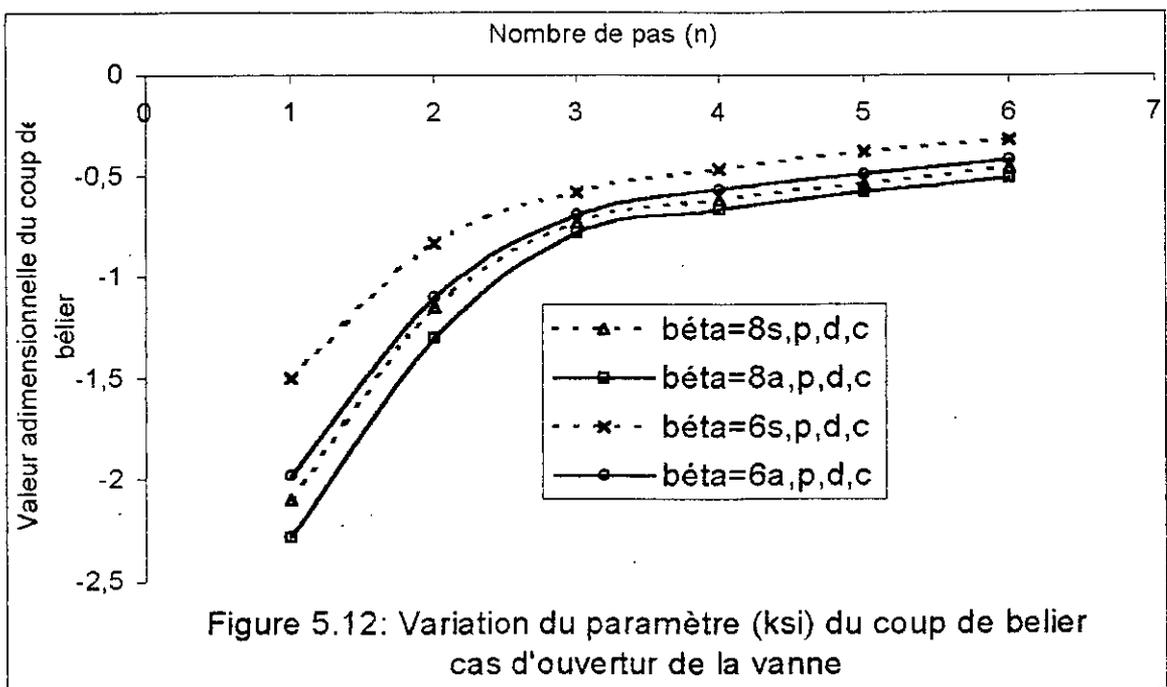
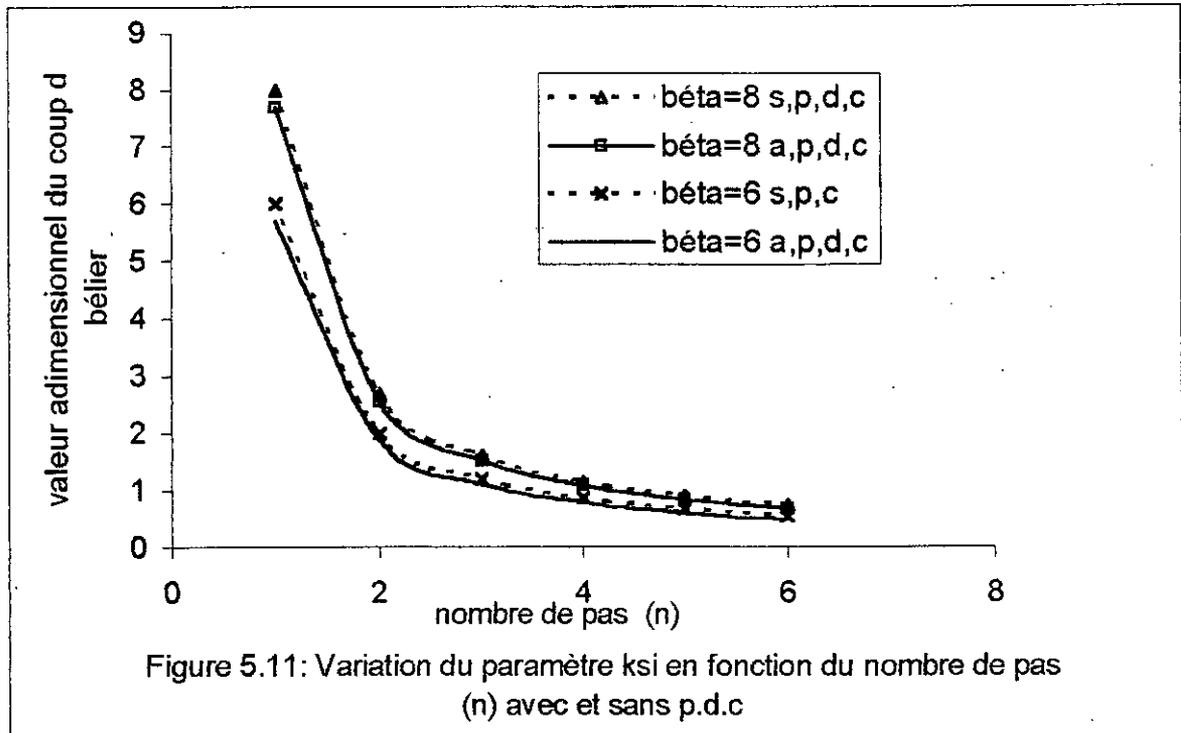
$$\xi_1 = \frac{-[2(2n-1)W - \beta^2] - \sqrt{[2(2n-1)W - \beta^2]^2 + 4(2n-1)^2(\beta^2 - W^2)}}{2(2n-1)^2} \tag{5.75}$$

L'expression de ξ_1 donne la dépression en tenant compte des pertes de charge. On représente graphiquement l'expression $\xi_1 = f(n)$ avec les paramètres β et W constants. Figure (5.6).



5.4. Etude comparative :

L'étude comparative concerne l'influence de la perte de charge, à variation parabolique de la vitesse suivant la longueur de la conduite, sur les paramètres adimensionnels du coup de bélier. Néanmoins cette influence n'est pas due essentiellement aux pertes de charge mais également à l'effet du coefficient de vitesse à travers le robinet vanne. Dans tous les cas, la perte de charge tend à atténuer le coup de bélier quelque soit la variation de la vitesse suivant la longueur de la conduite. C'est ce que montre la représentation graphique (Figure 5.7) des expressions (5.53) et (5.75) donnant le paramètre adimensionnel du coup de bélier avec et sans pertes de charge.



5.5. – Conclusion :

A travers ce chapitre, il a été étudié le régime transitoire à coup de bélier imposé par la méthode des caractéristiques. Cette dernière a été appliquée aux extrémités de la conduite par simplification. Il a été développé un raisonnement donnant deux modèles mathématiques avec et sans pertes de charge à variation supposé parabolique de la vitesse. Ces modèles mathématiques ont permis de connaître l'influence des caractéristiques du dispositif étudié sur les paramètres transitoires à savoir le paramètre adimensionnel du coup de bélier et le temps de manœuvre. Ces deux derniers ne sont pas bien maîtrisés en pratique.

L'idée du coup de bélier imposé au système hydraulique en fonction de ses caractéristiques, contribue bon comportement mécanique de la conduite. L'étude a montré que bien qu'imposé, le paramètre adimensionnel caractérisant le coup de bélier, diminue en fonction du nombre de pas (n) quand il augmente et qui est imposé au dispositif hydraulique étudié. Ce qui est important dans ce raisonnement c'est la considération de l'influence de la perte de charge à variation parabolique de la vitesse sur les différents paramètres transitoires étudiés dans ce chapitre. Ce cas a été étudié uniquement par considération de la perte de charge en régime permanent, ce qui semble contradictoire.

CHAPITRE 6

DETERMINATION DE LA LOI DE MANŒUVRE OPTIMALE

6.1 – Introduction :

A travers la bibliographie, le principe de détermination de la loi de manœuvre, loin d'être optimale, n'est pas explicité bien que le coup de bélier est tributaire de cette dernière [1].

Ces lois de manœuvre sont déterminées dans l'hypothèse d'une variation linéaire de la vitesse d'écoulement.

Dans le domaine pratique,, les lois de manœuvre caractérisées par des courbes caractéristiques des robinets vannes, fournies par les constructeurs, n'aboutissent pas toujours à une forme de coup de bélier aisément supporté par la conduite.

En conséquence, lorsque la fermeture est rapide au début et lente par la suite ; il en résulte un coup de bélier décroissant. Par contre, lorsque cette fermeture est lente au début et rapide vers la fin du temps de fermeture : il en résulte un coup de bélier croissant. Ces deux formes de coups de bélier, résultant généralement d'une manœuvre non contrôlée, ne sont pas bénéfiques à la bonne tenue mécanique de la conduite et par conséquent favorisent le vieillissement même précoce de la canalisation. Ce problème est souvent rencontré lorsque la charge statique est élevée et que la conduite est soumise à de fréquentes manœuvres (cas des adductions gravitaires en charge alimentant les réservoirs responsables d'Alimentation en Eau Potable d'une ville). Pour y remédier à ce problème, et, à partir du modèle mathématique déterminé dans le chapitre V, on propose un principe de détermination d'une loi de manœuvre qui permet de maintenir un coup de bélier imposé au système hydraulique considéré. Ce coup de bélier sera proposé de telle façon que la pression interne totale ainsi engendrée doit être bien inférieure à la pression de rupture de la conduite. Le raisonnement se base sur un exemple de deux robinets vannes de caractéristiques mécaniques données afin de pouvoir faire une comparaison en vue d'une optimisation. Ces robinets vannes sont supposés raccordés à l'extrémité aval d'une conduite, de caractéristiques uniques données, issue d'un réservoir à niveau considéré comme constant.[1] , [6]

6.2 – Présentation des types de robinets vannes choisis :

6.2.1 – Généralités sur les robinets vannes :

Les robinets vannes sont des appareils qui permettent de régulariser le débit qui transité dans une canalisation. Ils permettent également d'isoler un tronçon de conduite en cas d'entretien ou de réparation d'une avarie.

On distingue deux types de robinets :

- Les robinets dits « quart de tour » pour les faibles diamètres qui sont utilisés comme robinets de prise ou d'arrêt dans les branchements d'immeubles ou pour la commande des appareils sous chaussées.
- Les robinets vannes pour les moyens et gros diamètres.

Dans ce dernier, la forme de l'obturateur diffère d'un robinet à un autre ; on distingue des robinets vannes à opercule, à papillon, à boisseau à disque, à soupape...

Ces robinets vannes présentent l'avantage d'une ouverture et d'une fermeture lente de sorte que leur manœuvre n'apporte généralement pas de perturbation sensible dans le réseau.

Les robinets sont des pièces à brides. Ils doivent toujours être posés en des endroits accessibles, en principe des chambres en maçonnerie où la manœuvre s'effectue à l'aide d'un volant placé sur la tête du robinet. Cette manœuvre peut s'effectuer également de la surface du sol en introduisant la tige de manœuvre à l'intérieur d'une bouche spéciale en fonte dite « bouche à clé ». Ces appareils se prêtent également à une manœuvre motorisée grâce à un moteur électrique qui peut être commandé à distance. [16],[17]

6.2.2 – Robinet vanne à opercule :

Les robinets vannes à opercule sont très utilisées dans les systèmes d'alimentation en eau potable. Leur dispositif de fermeture est constitué d'un opercule logé dans un calotte hémisphérique (fig. 6.3) Ils possèdent l'avantage d'une fermeture (ou ouverture) lente et se prête bien à la motorisation dans le but d'une commande à distance.

6.2.3 – Robinet vanne à boisseau :

Ce type de robinet vanne est moins utilisé que le précédent. On le rencontre surtout dans les réseaux de distribution de moyenne importance ; dans certains cas comme diffuseur des turbines. Son dispositif de fermeture est constitué par un boisseau qui pivote autour d'un axe vertical (Fig. 6.9). La manœuvre de fermeture est plus rapide que le robinet vanne à opercule d'où les risques de coup de bélier élevés. Les pertes de charges singulières engendrées par le degré de fermeture du boisseau sont plus grandes que celles engendrées par le robinet vanne à opercule, elles contribuent efficacement à l'atténuation du coup de bélier [18].

Comme le précédent, le robinet vanne à boisseau s'accommode bien à la motorisation.

6.3 – Détermination de la loi de manœuvre à coup de bélier imposé : cas du robinet vanne à opercule.

Généralement une manœuvre de fermeture brusque non contrôlée engendre des surpressions qui peuvent être dangereuses à la conduite. Les dépressions qui y font suite peuvent l'être également.

L'idée d'imposer un coup de bélier h_{vn} à la conduite en fonction de ses caractéristiques (U_0 , a , H_0 , ...) et un temps de fermeture donné, peut y remédier à ces

problèmes. Le comportement mécanique de la conduite ne subira pas en principe des déplacements radicaux (déformations) importants.

A cet effet et pour conserver cet avantage à la conduite, la détermination de la loi de fermeture s'avère donc un moyen de remède.

Dans cette partie, on propose un principe grapho-analytique permettant la détermination de cette loi avec et sans pertes de charge.

6.3.1 – Cas sans pertes de charge :

6.3.1.1 – Détermination de la loi de variation du débit Q_{vi}

A travers un exemple on présente un procédé qui consiste d'abord à déterminer la valeur du coup de bélier imposé (expression 5.11), par la suite, la variation de la vitesse U_{v2} donnée par l'expression (5-7) en fonction du temps de fermeture donné.

On considère un système hydraulique ayant les caractéristiques suivantes (figure 5.1)

- Vitesse d'écoulement en régime permanent $U_0 = 2 \text{ m/s}$
- Charge statique au droit de la vanne : $H_0 = 50 \text{ m}$
- Célérité de propagation d'onde : $a = 1200 \text{ m/s}$
- Le diamètre interne de la conduite : $D = 100 \text{ mm}$
- La conduite du système supposée horizontale, est munie à son extrémité avale d'un robinet vanne caractérisée par un temps de fermeture totale de $t = n$.

$$\theta = n \cdot \frac{2L}{a}$$

Où : n : désigne le nombre de pas de fermeture pris égal à « 6 ».

L'expression (5.11) donne la valeur adimensionnelle du coup de bélier ξ

$$\xi = \frac{\beta}{2n-1} = \frac{aU_0}{g.H_0(2n-1)} = 0,445$$

On déduit le coup de bélier imposé à la conduite à partir de l'expression (5.11) d'où :

$$H_{vn} = \xi \cdot H_0 = 22,263 \text{ m}$$

A partir de l'expression (5.4), les paramètres β , a , h_{vn} , U_0 , permettent de déterminer la variation de la vitesse d'écoulement $U_{vi} = f(i)$ en phase de fermeture et par conséquent le débit Q_{vi} en fonction du nombre de pas de fermeture $0 \leq i < n = 6$;

(Tableau N° 6.1). Ainsi, les valeurs obtenues permettent de déduire la loi de variation du débit Q_{vi} durant cette phase de fermeture (Fig. 6.2)

Tableau 6.1 : Variation de la vitesse U_{vi} en phase de fermeture :

i	0	1	2	3	4	5	6
U_{vi} (m/s)	2	1,818	1,455	1,091	0,727	0,364	0,0002
Q_{vi} (l/s)	15,7	14,27	11,42	8,56	5,71	2,86	0

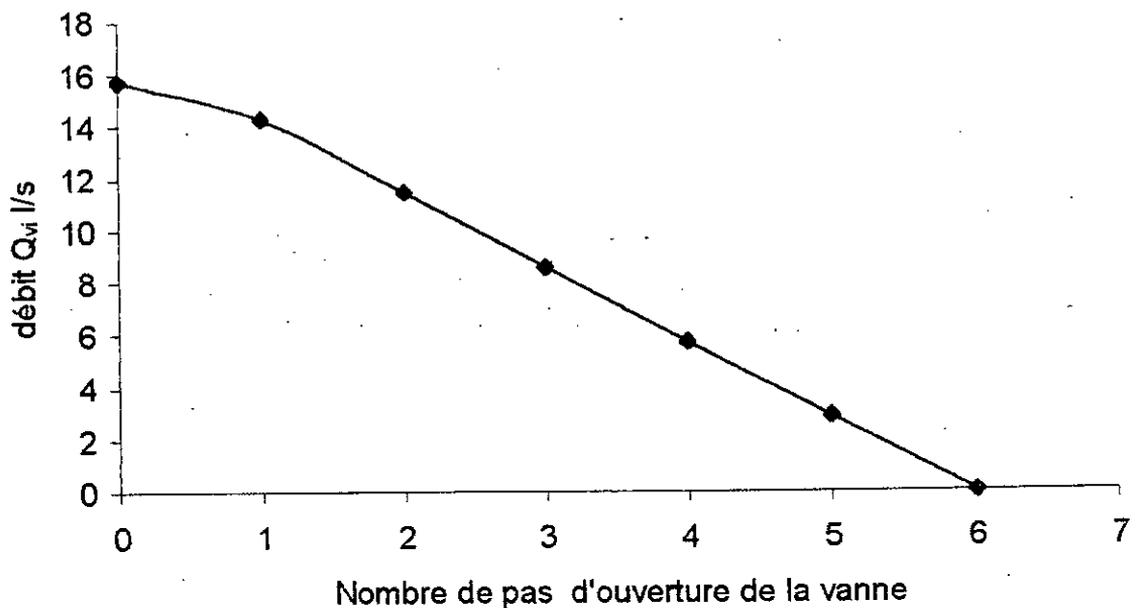


Figure 6.2 : variation du débit en fonction des pas de fermeture de la vanne

6.3.1.2 – Détermination du débit Q_k en fonction des caractéristiques du robinet-vanne

Pour déterminer le débit Q_k au droit de la vanne en fonction du temps. On supposera la vanne comme un orifice caractérisé par un coefficient de débit C_k constant et une section S_k variable.

Ainsi on a :

$$Q_k = C_k \cdot S_k \cdot \sqrt{2g(H_o + h_{vm})} \quad (6.1)$$

On désigne par :

$$C_k = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_k}} = \varphi_k \cdot \varepsilon \quad (6.2)$$

Avec :

$$\varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_k}} \quad (6.3)$$

- C_k : coefficient de débit pour une ouverture donnée
- S_k : section d'une ouverture donnée
- φ_k : Coefficient de vitesse
- ε : Coefficient de contraction supposé constant et pris égal à 0,6
- ξ_k : Coefficient de pertes de charge singulières qui est fonction du pas de fermeture du robinet vanne.

Tableau 6.2 : Caractéristiques du dispositif :

$\frac{a_k}{a_o}$	1	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8	0
$\frac{S_k}{S_o}$	1,00	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159	0
ξ_k	0,00	0,07	0,260	0,810	2,06	5,52	17,0	97,8	0
φ_k	1,00	0,966	0,891	0,743	0,572	0,392	0,235	0,101	0
C_k	1,00	0,58	0,53	0,45	0,34	0,23	0,14	0,06	0

La résolution de l'équation (6.1) donne les valeurs de Q_k pour chaque pas de fermeture.

Tableau 6.3 : Variations du débit en fonction des caractéristiques du robinet vanne :

$\frac{a_k}{a_o}$	8/8	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8	0
Q_{KV} (l/s)	177,35	168	152	131	108	83	56	28	0

a_o : ouverture totale du robinet vanne, égale au diamètre de la Conduite

a_k : Ouverture donnée

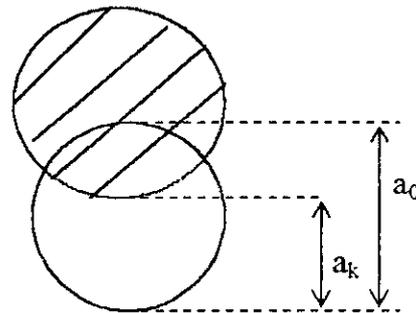


Figure 6.3 : Robinet vanne à opercule

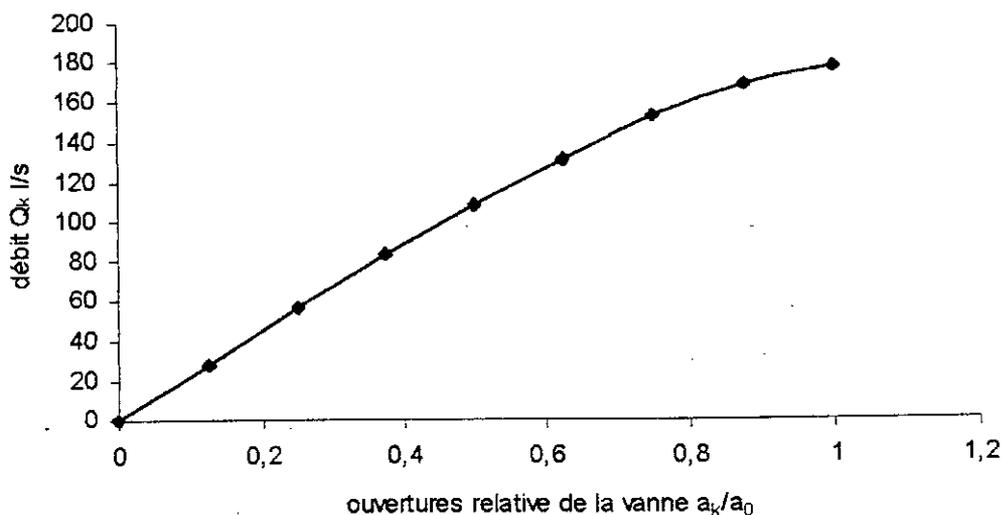


Figure 6.4: Variation du débit Q_k en fonction de la position de l'opercule de la vanne

Le tableau (6.3) montre la variation du débit Q_k à travers le robinet vanne en fonction du positionnement $\frac{a_k}{a_0}$ de l'opercule du robinet vanne choisi comme exemple ; autrement dit la loi de variation du débit Q_k (Figure 6.4).

La combinaison des courbes données par les figures (6.2) et (6.4) permet de déduire graphiquement une troisième courbe montrant la variation de la position $\frac{a_k}{a_0}$ de l'opercule du robinet vanne en fonction du temps de fermeture du robinet. Cette courbe qui n'est autre que la courbe caractéristique du robinet-vanne permet d'assurer le coup de bélier imposé durant le temps de fermeture préconisé (Figure 6.5).

6.3.2 – Cas avec pertes de charge

6.3.2.1 – Détermination de la vitesse U_{vi} et du débit Q_{vi} :

L'hypothèse de linéarité faite au paragraphe précédent permet d'écrire :

$$U_i = \frac{U_0}{n}(n-i) \quad (6.4)$$

En élevant au carré, on aura :

$$U_i^2 = \frac{U_0^2}{n^2}(n-i)^2 \quad (6.5)$$

En faisant intervenir le signe somme, on peut écrire :

$$2 \sum_{K=1}^{i-1} U_i^2 = 2 \sum_{K=1}^{i-1} U_{OK}^2 = 2 \sum_{K=1}^{i-1} \frac{U_0^2}{n^2} (n-i)^2 \quad (6.6)$$

Ce qui donne :

$$\sum_{K=1}^{i-1} U_{OK}^2 = 2 \cdot \frac{U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 \quad (6.7)$$

En suivant le même raisonnement, le terme $2 \sum_{k=1}^{i-1} U_{VK}^2$ de l'équation (5.39) peut s'écrire :

$$\sum_{K=1}^{i-1} U_{VK}^2 = 2 \cdot \frac{U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 \quad (6.8)$$

En portant (6.3) et (6.4) dans l'équation (5.39) on, obtient :

$$U_{vi} = U_0 - \frac{2g}{a} (i-1) h_n - \frac{g}{a} h_{vi} - \frac{K'}{2a} \left[U_{00}^2 + \frac{2U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 + \frac{2U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 + U_{vi}^2 \right] \quad (6.9)$$

Ou bien :

$$U_{vi} = U_0 - \frac{g}{a} h_{vi} (2i-1) - \frac{K'}{2a} U_{vi}^2 - \frac{K'}{2a} \left[U_{00}^2 + 4 \frac{U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 \right] \quad (6.10)$$

$$\text{avec : } K' = \frac{\lambda L}{D}$$

Cette dernière expression peut se mettre également sous la forme suivante :

$$\frac{K'}{2a} U_{vi}^2 + U_{vi} - U_0 + \frac{g}{a} h_{vi} (2i-1) + \frac{K'}{2a} \left[U_{00}^2 + 4 \frac{U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 \right] = 0 \quad (6.11)$$

Ou autrement écrite :

$$AU_{vi}^2 + BU_{vi} + C = 0 \quad (6.7 \text{ bis})$$

$$\text{avec : } A = \frac{K'}{2a} \quad \text{et} \quad B = 1,$$

$$\text{et : } C = \frac{g}{a} h_{vi} (2i-1) - U_0 + \frac{K'}{2a} \left[U_{00}^2 + 4 \frac{U_0^2}{n^2} \sum_{K=1}^{i-1} (n-i)^2 \right]$$

En gardant les mêmes données que pour le cas sans pertes de charge, l'expression (5.11) donne :

$$\xi = \frac{h_m}{H_0} = \frac{aU_0}{g.H_0(2n-1)} - \frac{K'.U_0^2}{2g.H_0(2n-1)} \left[\frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 + \frac{1}{2} \right]$$

$\xi = 0,40$ avec $K' = 30$

$$\xi = \frac{h_m}{H_0} = 0,40 \Rightarrow h_m n = \xi.H_0 = 0,40.50$$

ce qui donne : $h_m n = 20m$

La résolution de l'équation (5.39) nous donne les valeurs de U_{vi} pour i variant de 0 à 6

Tableau 6.4 : Valeurs de U_{vi} et Q_{vi} pour le cas avec pertes de charge

I	0	1	2	3	4	5	6
U_{vi}	2	1,61	1,21	0,85	0,50	0,17	0,00
Q_{vi} (l/s)	15,70	12,64	9,50	6,67	3,93	1,33	0,00

Les valeurs de Q_{vi} sont déterminées par l'expression suivante :

$$Q_{vi} = U_{vi} \cdot S$$

S : section de la conduite supposée dans ce cas constante.

La représentation graphique de la fonction $Q_{vi} = f(i)$ donne :

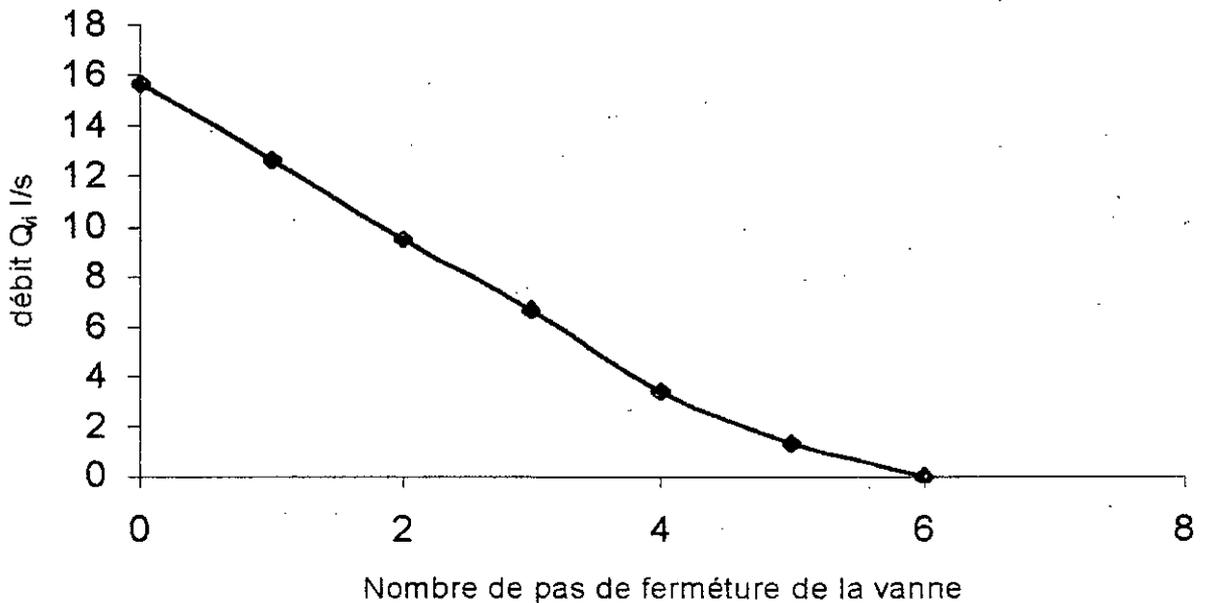


Figure 6.5 : variation du débit en fonction du pas de fermeture de la vanne

6.3.2.2 – Détermination des valeurs du débit Q_{KV}

Pour déterminer le débit Q_{KV} au droit de la vanne, on appliquera la même hypothèse que celle faite précédemment (variation linéaire de la vitesse).

Le débit Q_{KV} est donné par l'expression suivante :

$$Q_{KV} = C_i \cdot S_i \sqrt{2g(H_o + h_{vn})} \tag{6.12}$$

S_i : Section de l'ouverture à la $i^{\text{ième}}$ étape tirée du tableau 6.2

La résolution de l'équation (6.8) donne les différentes valeurs de Q_{KV} pour chaque pas de fermeture du robinet vanne.

Tableau 6.5 : Valeurs de Q_{KV} en fonction de $\frac{a_k}{a_o}$

$\frac{a_k}{a_o}$	1	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8	0
Q_{KV} (l/s)	174,5	160	132	97	60	31	13	2,8	0

La représentation graphique de la fonction $Q_K = f(a_k/a_o)$ donne :

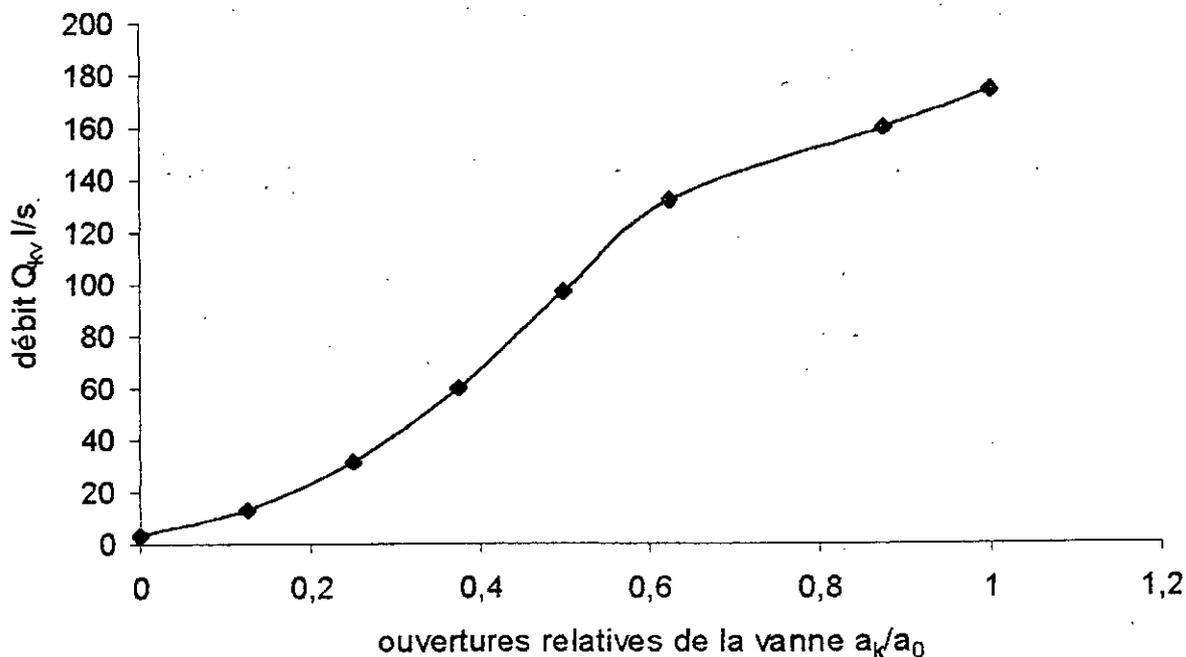


Figure 6.6 variation du débit Q_K en fonction de la position de l'opercule (cas avec pertes de charge).

6.3.2.3 – Dédution graphique de la loi de manœuvre :

la combinaison graphique des figures (6.6) et (6.5), aboutissent à des valeurs qui sont déduites afin de tirer la fonction $f(t) = \frac{a}{a_0}$. Cette fonction caractérise le positionnement de l'opercule dans le temps (tableau 6.6) et (6.7).

Tableau 6.6 : Loi de manœuvre en négligeant les pertes de charge

I	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{a_K}{a_0}$	1	0,880	0,690	0,490	0,320	0,075	0,000

Tableau 6.7 : Loi de manœuvre en tenant compte des pertes de charge :

i	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{a_K}{a_0}$	1	0,890	0,700	0,572	0,455	0,270	0,000

La représentation graphique de ces deux lois sur un même graphe donne :

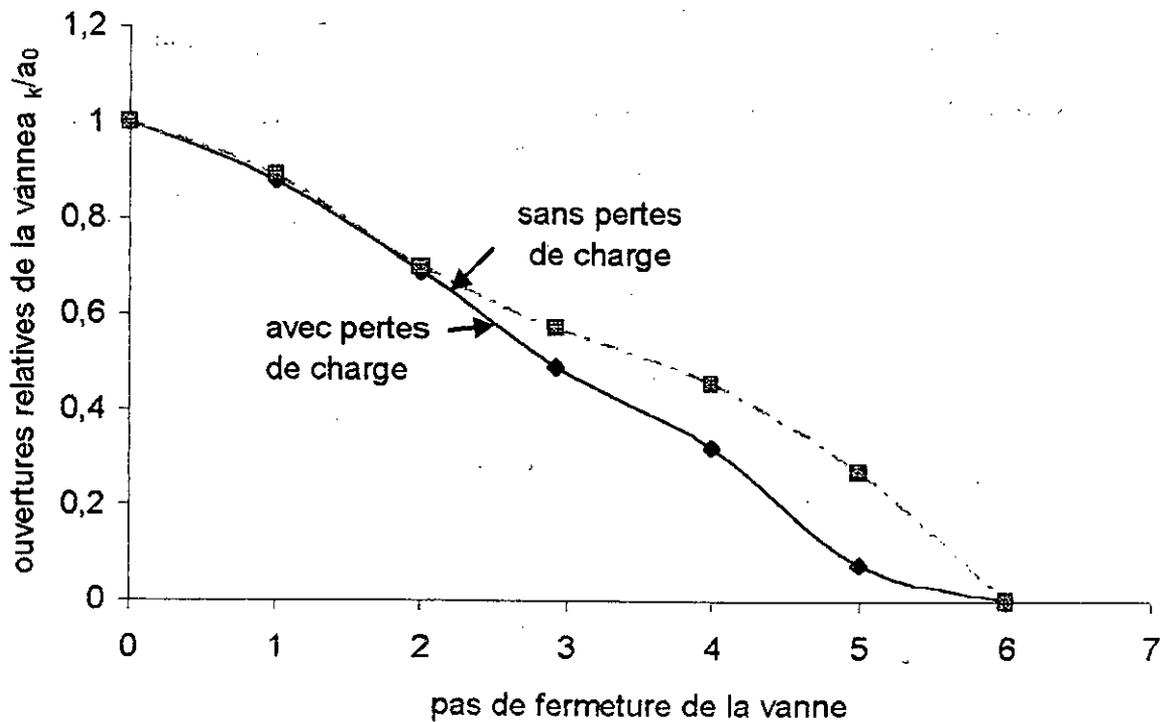


Figure 6.7 : Loi de manœuvre du robinet vanne à opercule (avec et sans pertes de charge).

6.3.2.4 – Interprétation :

On constate que pour un même pas de temps de fermeture de la vanne le rapport $\frac{a_K}{a_0}$ pour le cas sans pertes de charge est inférieur à celui pour le cas avec pertes de charge ; ce qui veut dire que si on tient compte des pertes de charge Le pas de fermeture du robinet vanne peut être augmenté sans risque de dépasser la valeur du coup de bélier imposée, car une partie de ce dernier est atténué par les frottements du liquide contre la paroi de la conduite.

6.4 – Détermination de la loi de manœuvre à coup de bélier imposé : Cas du robinet vanne à boisseau

Mécaniquement le robinet vanne à boisseau diffère de celui à opercule étudié précédemment.

D'après ses caractéristiques géométriques, le robinet vanne à boisseau engendre une perte de charge singulière beaucoup plus élevée que celle du robinet vanne à opercule [20].

Afin de mener une étude comparative bien notable sur la loi de manœuvre avec le premier cas, on considère le même système hydraulique et avec les mêmes données.

6.4.1 – Détermination des débits Q_{vi}

Etant donné que les pertes de charge contribuent à l'atténuation du coup de bélier, on propose de déterminer les débits dans les deux cas (avec et sans pertes de charge), pour un nombre réduit n de pas de fermeture égal à 6. Pour donner un sens à ce raisonnement, on suppose négligeable la fuite d'onde à travers le boisseau.

6.4.1.1 – Cas sans pertes de charge :

Dans l'hypothèse d'un coup de bélier imposé (h_n), d'une section de la conduite constante, et d'une célérité invariable, l'expression (5.7) permet de déterminer d'abord la vitesse U_{vi} et déduire par la suite le débit Q_{vi} , qui est représenté graphiquement en fonction du pas « i » (Fig.6.8).

$$U_{vi} = U_0 - \frac{g}{a} - (2i - 1) \cdot h_{vn} \quad (6.13)$$

$$Q_{vi} = U_{vi} \cdot S_0 \quad (6.14)$$

Tableau 6.8 : Variation de la vitesse U_{vi} en phase de fermeture

i	0	1	2	3	4	5	6
U_{vi} (m/s)	2	1,818	1,455	1,091	0,727	0,364	0,0002
Q_{vi} (l/s)	15,7	14,27	11,42	8,56	5,71	2,86	0

La représentation graphique de la fonction $Q_{vi} = f(i)$ donne :

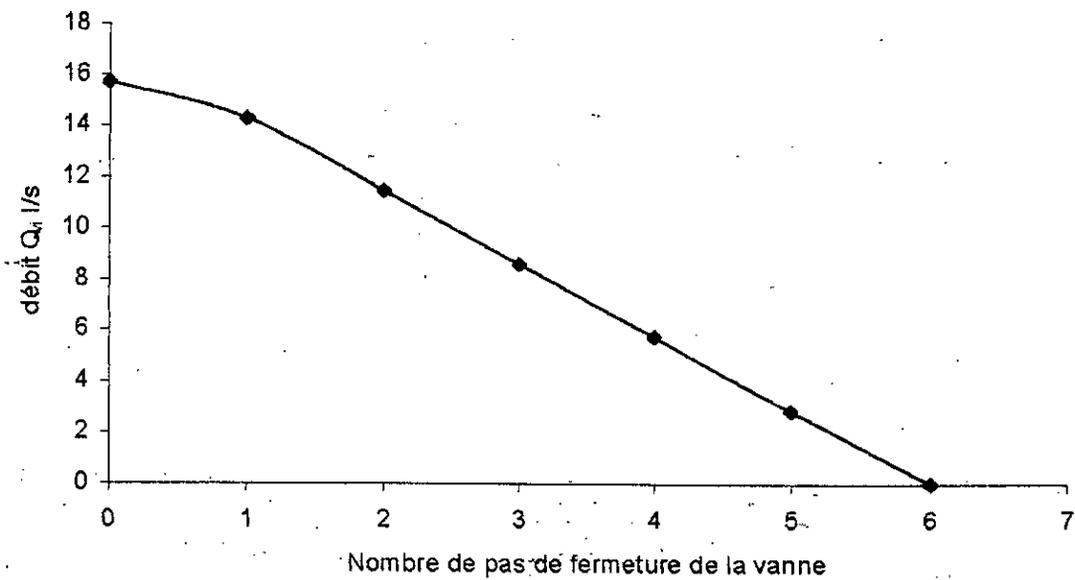


Figure 6.8 : variation du débit en fonction du pas de fermeture de la vanne (sans pertes de charge)

6.4.1.2 – Cas avec pertes de charge :

La conduite est supposée hydrauliquement longue. On considère la perte de charge par variation linéaire de la vitesse donnée par l'expression (). En phase de fermeture, la vitesse et par conséquent le débit seront calculés dans cette hypothèse par l'expression (6.7) à travers le tableau 6.9, et représentés graphiquement en fonction du pas « i » (Fig. 6.9).

Tableau 6.9 : Valeurs de U_{vi} et Q_{vi} pour le cas avec pertes de charges

i	0	1	2	3	4	5	6
U_{vi} (m/s)	2	1,61	1,21	0,85	0,50	0,17	0,00
Q_{vi} (l/s)	15,70	12,64	9,50	6,67	3,93	1,33	0,00

La représentation graphique de la fonction $Q_{vi} = f(i)$ donne :

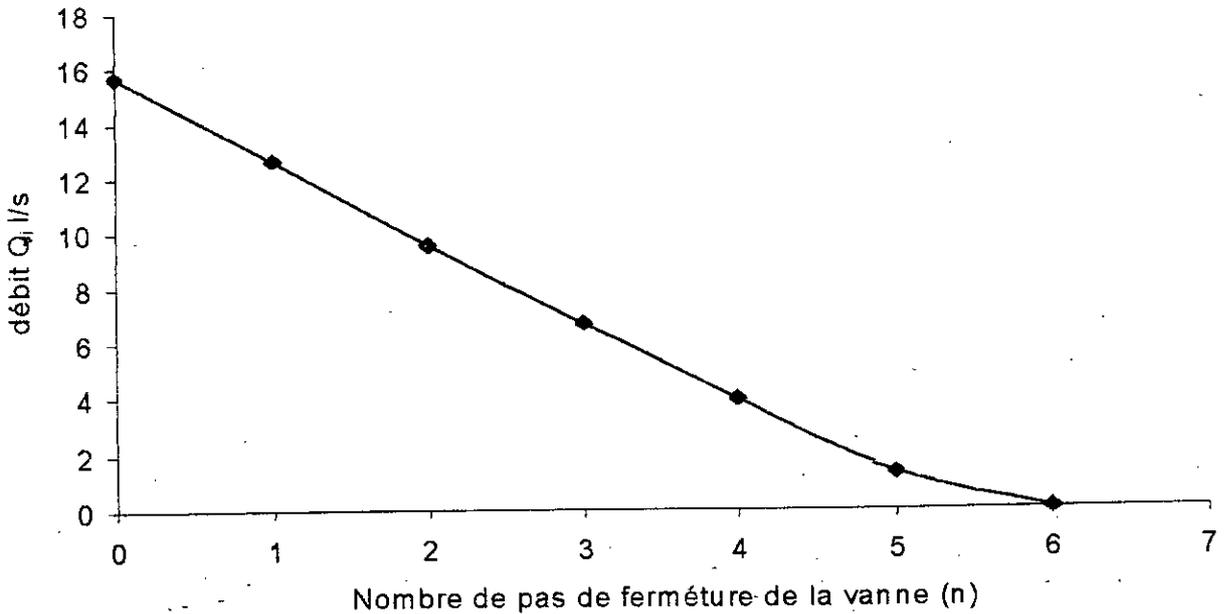


Figure 6.9 : variation du débit en fonction du pas de fermeture de la vanne (tenant compte des pertes de charge)

6.4.2 – Détermination des débit Q_{KV} à travers le robinet vanne à boisseau :

Les caractéristiques du robinet vanne considéré et données par le tableau N° 6.10 montrent que la fermeture (ouverture) s'exprime par des pas représentés avec des écarts angulaires (Fig. 6.9). Ces caractéristiques données par le constructeur, permettent de déterminer le débit Q_{KV} passant à travers le boisseau pour un coup de bélier imposée sous une charge statique constante.

Afin de concrétiser le raisonnement, on examine le cas sans et avec pertes de charge par considération de la même loi de variation linéaire de la vitesse que pour le premier type de robinet vanne choisi. Ce raisonnement facilite la comparaison pour un éventuel choix de la loi de manœuvre. [19]

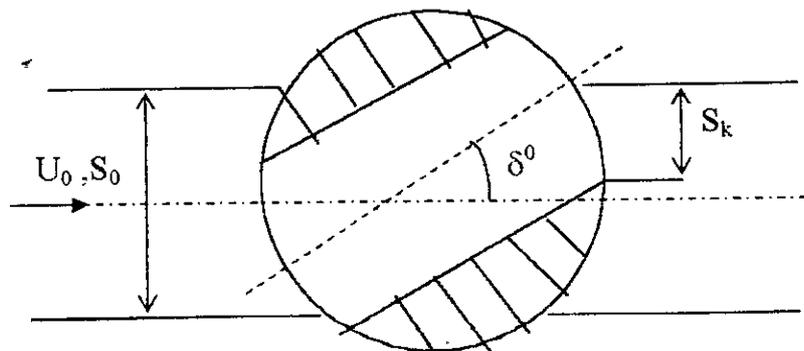


Figure 6.10 : Caractéristique du robinet vanne à boisseau

Tableau 6.10 : Caractéristiques du robinet à boisseau

δ°	0	10	20	30	40	50	60
$\frac{S_k}{S_o}$	1	0,85	0,69	0,52	0,35	0,19	0
ξ_k	0	0,31	1,84	6,15	20,7	95,3	0
φ_k	1	0,87	0,59	0,37	0,21	0,10	0
C_k	1	0,52	0,36	0,22	0,13	0,06	0

6.4.2.1 – Cas sans perte de charge :

Le cas sans pertes de charge permet de considérer la valeur majorante du coup de bélier et de déduire ainsi les valeurs de Q_K

$$Q_K = C_K \cdot S_K \cdot \sqrt{2g(H_o + h_m)}$$

avec :

$$C_K = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \xi_k}}$$

Tableau 6.11 : Variations du débit Q_{KV} sans tenir compte des pertes de charge

δ°	0	10	20	30	40	50	60
Q_{KV} (l/s)	177,35	150,75	122,37	92,22	62,07	33,70	0

La représentation graphique de la fonction $Q_{KV} = f(\delta^\circ)$ donne :

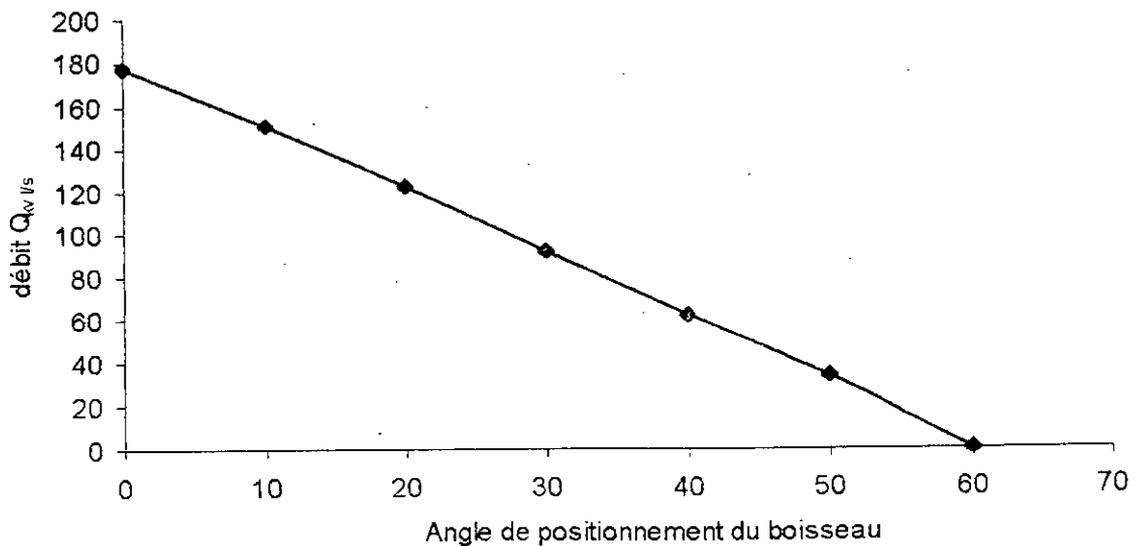


Figure 6.10 : variation du débit Q_K en fonction de la position du boisseau.

6.4.2.2 – Cas avec pertes de charge :

La combinaison des éléments du tableau des caractéristiques du robinet vanne, les expressions () et (6.8) donnant respectivement les valeurs du coup de bélier imposé et du débit Q_{KV} , permettent de dresser le tableau N°12 ci-dessous :

Tableau 12 : Variation du débit Q_{KV} avec pertes de charges.

δ°	0	10	20	30	40	50	60
Q_{KV} (l/s)	175,55	128,60	72,26	33,28	13,24	3,32	0

La représentation graphique de la fonction $Q_{KV} = f(\delta^\circ)$ donne :

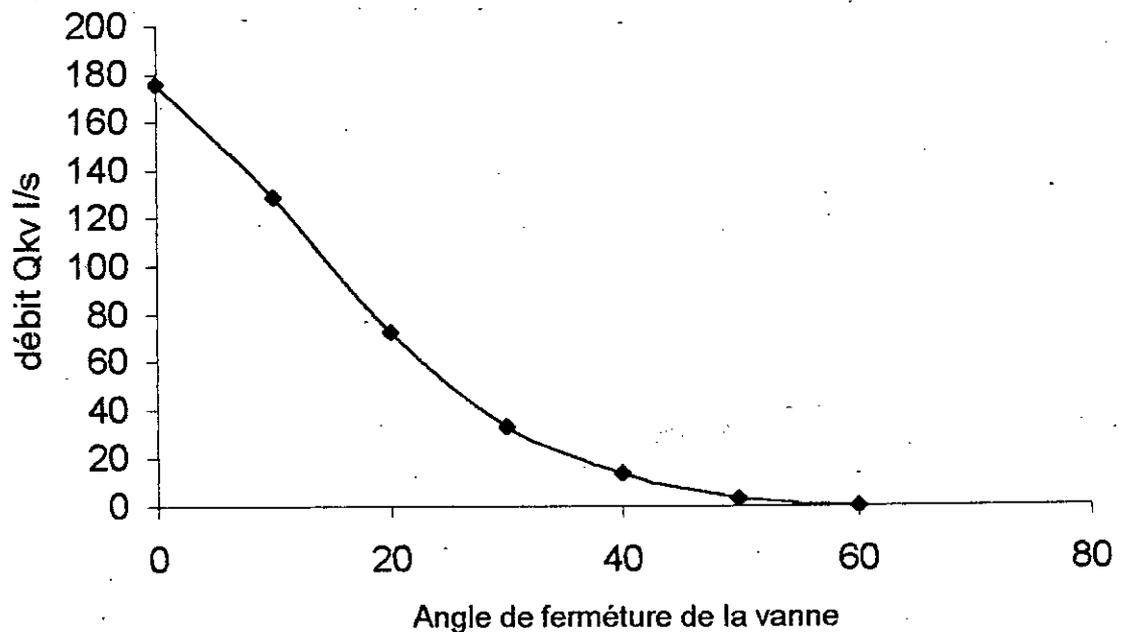


Figure 6.11 : variation du débit Q_{KV} en fonction de la position du boisseau

6.4.3 – Déduction de la loi de manœuvre du robinet vanne à boisseau :

La loi de manœuvre du robinet vanne ainsi considéré n'est autre qu'une caractéristique mécanique représentée par une courbe. Celle-ci est similaire à une caractéristique d'une pompe, puisque le robinet vanne en question sera commandé par un moteur.

La méthode utilisée est grapho-analytique : Ainsi la combinaison des courbes

(Fig. 6.8) et (Fig. 6.10) donnant respectivement les débits Q_{vi} et Q_{kv} permettent de déduire une troisième courbe de l'ordre de $\frac{S_k}{S_o}$ fonction du temps de fermeture. Le raisonnement est mené avec et sans pertes de charge.

Tableau 6.13 : Loi de manœuvre en négligeant les pertes de charge

i	0	1	2	3	4	5	6
δ°	0	6,5	13	25	37	49	60

Tableau 6.14 : Loi de manœuvre tenant compte des pertes de charge

I	0	1	2	3	4	5	6
δ°	0	8	11,5	17,5	25,5	36,8	60

La représentation de ces deux lois sur un même graphe donne :

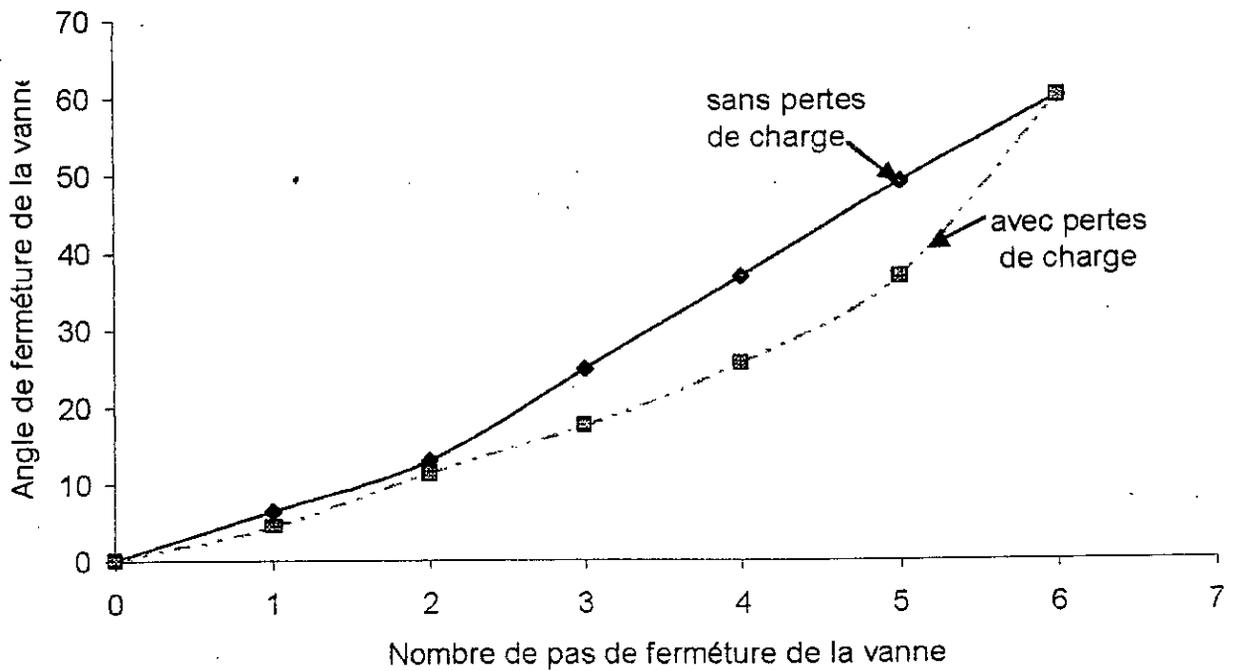


Figure 6.12 : Loi de manœuvre du robinet (avec et sans pertes de charge)

6.4.4 – Interprétation des résultats et comparaison entre les deux lois de manœuvre ; avec et sans pertes de charge:

La constatation faite à l'interprétation de la première application est toujours valable, c'est à dire celle relative à la possibilité d'augmenter le pas de fermeture sans risque de dépasser la valeur du coup de bélier imposé car une partie de ce dernier est dissipé par frottement.

Mais toutefois, la comparaison des deux lois de fermeture montre que pour respecter la valeur du coup de bélier imposé, les pas de fermeture de la deuxième application doivent être plus petits par rapport à ceux de la première car la diminution des débits au droit de la vanne est plus importante surtout aux derniers pas de fermeture comme le montre le tableau (6.11) et ce malgré l'importance des pertes de charge singulière engendrées par la fermeture.

Finalement, nous pouvons conclure qu'à chaque type de robinet vanne sa propre loi de fermeture.

6.5 – Conclusion :

A travers ce chapitre, il a été proposé une méthodologie de détermination graphique d'une loi de manœuvre durant la fermeture d'un robinet vanne de caractéristiques mécaniques connues. Le principe du raisonnement a pour objectif de déduire une allure de fermeture (positionnement de l'opercule du robinet vanne) de telle manière à ce que les coups de bélier provoqués par les pas de fermeture ne dépasseront jamais le coup de bélier imposé où à la limite lui sont égaux. Cette méthode graphique utilisée montre qu'il existe une dépendance entre le modèle mathématique élaboré, le débit en transitoire dans la conduite, le débit engendré en fonction des caractéristiques du robinet vanne, et l'idée du coup de bélier imposé. Cette initiative ne se rencontre pas au niveau des robinets vannes ordinairement rencontrés en pratique, qui sont appelées à assurer une fermeture lente. Bien que cette dernière assure l'atténuation du coup de bélier mais ne prévoit pas ses formes précédemment citées qui peuvent être dangereuses à la conduite (manœuvres non contrôlées pour le cas des conduites enterrées dans des sols de nature différentes). Plusieurs types de robinets vannes, mécaniquement différents, existent en pratique. De ce fait, notre exemple s'est porté sur deux types dans un cadre comparatif. La loi de manœuvre ainsi déduite représentée par une courbe caractéristique en fonction du temps, similaire à celle d'une pompe, sera proposé au constructeur en vue de la conception du robinet vanne répondant à cette loi. L'étude est d'un intérêt pratique important, car elle contribue à la bonne gestion des réseaux d'Alimentation en Eau potable soumis à un régime transitoire intense, notamment en diminuant leur vieillissement.

CONCLUSION GENERALE

Dans ces travaux de recherche, le régime transitoire a été examiné à travers différents chapitres relatifs à ce domaine. L'aperçu bibliographique montre qu'il existe différentes méthodes d'analyse liées aux phénomènes transitoires que ce soit en charge ou en écoulement à surface libre. Le cas transitoire en charge et à surface libre dans une même conduite n'est pas abordé dans ces travaux. Il fera l'usage d'une autre étude en perspective. Ces différentes méthodes ont été présentées à titre descriptif ; et le présent travail a été orienté vers la méthode des caractéristiques. Cette dernière, plus fiable, analytiquement pour l'analyse du régime transitoire, semble être la plus utilisée malgré qu'on lui reconnaisse, des faiblesses. La célérité de propagation de l'onde a été examinée d'une façon succincte sous l'aspect d'influence par les différents modes d'ancrage de la conduite, qui est le cas fréquemment rencontré en pratique.

Dans cette partie, à travers la bibliographie, il a été montré le cas de la célérité de propagation d'onde dans une conduite enterrée, qui augmente sous l'effet du sol. A la base de l'utilisation de la méthode des caractéristiques, il a été développé deux modules mathématiques, tenant compte ou non des pertes de charge, qui permettent de mettre en évidence l'effet des caractéristiques d'une installation hydraulique sur le coup de bélier imposé à cette installation (en valeur adimensionnelle). Il a été montré également que dans le cas d'un coup de bélier imposé, ces caractéristiques influent sur le temps de manœuvre qui tend à diminuer une fois les pertes de charge sont considérées. Ce raisonnement a été mené dans l'hypothèse des pertes de charge à variation parabolique de la vitesse dans l'espace qui semble être logique et plus adéquate, une fois le régime transitoire est engendré, quelque soit sa forme, un coup de bélier est tributaire de la loi de manœuvre d'un robinet vanne.

A la base de l'analyse de ces modèles développés et à partir d'un exemple, il a été présenté une méthodologie de détermination d'une loi de manœuvre d'un robinet-vanne de caractéristiques choisis afin d'assurer ce coup de bélier imposé. L'exemple s'est porté sur un cas comparatif de deux robinets-vannes différents. L'idée de coup de bélier imposé permet de minimiser les effets nocifs d'une canalisation, puisqu'il est nettement inférieur à la valeur limitée de rupture, par le biais de la loi de manœuvre proposée. C'est un moyen adéquat et bénéfique pour la gestion des réseaux soumis à un régime transitoire intense.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- CARLIER . M - « Hydraulique générale et appliquée » Eyrolles. Paris 1986.
- [2]- BEAUCHMIN. P - « Calcul des coups de bélier : méthodes modernes et approximations rapides à partir d'hypothèses physiquement réalistes ». Sciences et techniques de l'eau. 1986
- [3]- BERGERON . L - « Du coup de bélier en hydraulique au coup de fondre en électricité à Paris 1950.
- [4]- PERMAKIAN . J - « Water hammer analysis. Dover publication, I.N.C, New York 1963.
- [5]- STREETER . V - « Fluide transients » ANN Arbor, édition corrigée, Michigan
et WYLIE. B 48106 U.S.A – 1983.
- [6]- MEUNIER . M - « coup de bélier dans les réseaux sous-pressure » ENGREF Paris1980
- [7]- BAHRAR . B, E. RIEUTORD - « Influence de la viscoélasticité de la paroi sur les
et MOREL . R phénomènes classiques de coup de bélier. La houille
blanche N°1 – 1998 France.
- [8]- KREMENSKI . N - « Hydraulique générale » édition Mir Moscou 1984.
- [9]- OURAGH Youcef - « Ecoulements forcés en hydraulique » Tome II O.P.U Alger 1990.
- [10]- VARLET . H - « Usine de dérivation » Tome II Eyrolles. Paris.....
- [11]- MEDJBER . B - « Analyse d'un écoulement transitoire dans une conduite gravitaire
en charge – coup de bélier- Thèse d'ingénieur E.N.S.H
Juin 1993.
- [12]- MASSOUH . F - « Célérité des ondes de coup de bélier dans les conduites visco-
élastiques, thèse de Doctorat d'état, université de Paris VI 1984.
- [13]- MASSOUH . F - « Célérité des ondes et coup de bélier dans les conduites élastiques et
visco-élastiques ». Thèse de docteur ingénieur, université de Paris
VI . 1979.
- [14]- SALAH. B, KETTAB. A
et DERNOUNI. F - « Procédé général de détermination d'une loi de manœuvre
parfaite ». Communication au colloque méditerranéen
sur l'hydraulique E.N.S.H 1997.
- [15]- RIBEREAU C - « Ecoulement et propagation des ondes dans les conduites
collabables. Thèse de 3^{ème} cycle, université de Paris VI 1978.
- [16]- ANDRE DUPONT - « Hydraulique urbaine » tome II EYROLLES. Paris1974.
- [17]- BAYARD France - « Catalogues des vannes et autres accessoires, année 2000 ».

- [18]- CALENDREY J.F et AL - « Calcul des transitoires dans les installations hydrauliques de production d'énergie ». La houille blanche N°1/2- 1986.
- [19]- I.E.IDEL'CiK, Memento des pertes de charge, édition Eyrolles. Paris 1999 p.p(336- 341).
- [20]- LENCASTRE. A - « Manuel d'hydraulique générale ». Eyrolles. Paris 1982.
- [21]- COMOLET Raymon - « Mécanique expérimentale des fluides » tome II 5^{ème} édition, Masson et Cie. Paris Mars 1997.
- [22]- ESCANDE . M - « Hydraulique générale tome II, édition Paris 1971.
- [23]- ROCHE . E - « Principe généraux de calcul du coup de bélier et protection anti-bélier » I-C-CREF. Paris 1986.
- [24]- Collection I.P.E - « Les stations de pompages d'eaux » 2^{ème} édition, Technique et documentation, 1982.
- [25]- SEDILLE . M - « Turbo machines hydrauliques et thermiques ». Tome II Masson et Cie . Paris 1967.
- [26]- HADJ-TAYEB . E - « Elaboration d'algorithme de calcul des écoulements transitoires en conduites, dans les mélanges de liquide et de gaz ».Thèse de Doctorat, institut national polytechnique de Toulous 1977.
- [27]- KHAMLICH . A - « Ondes élasto-plastiques de coup de bélier dans les tuyauteries ». Thèse de Doctorat à l'Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [28]- DERNOUNI. F - « Contribution à l'étude de coup de bélier dans un réseau faiblement ramifié en refoulement ». Thèse de Magister E.N.P. Alger 1997.
- [29]- TOUMI. A - « Contribution à l'étude du régime transitoire dans une conduite en charge ». Thèse d'Ingénieur E.N.S.H Juin 1999.
- [30]- CARDON. A - « Un diagnostic de coup de bélier établit par modèle numérique ». Société du canal de province. Houille blanche, n°1/2 p.p (119-135)
- [31]- COMBEE. G et ZAOUI. J - « Analyse des erreurs introduites par l'utilisation pratique de la méthode des caractéristiques dans le calcul des coups de bélier ». Houille blanche n°2 , 1967.
- [32]- SALAH. B et KETTAB. A - « Pertes de charges en coup de bélier dans un réseau ramifié ». Revue technique de l'Ecole Nationale des Travaux Publics. N°12, Janvier 1994. p.p (23 - 26).
- [33]- BAHRAR . B , RIEUTORD . E
MOREL . R et ZEGGWAGH . G - « Modélisation du phénomène de coup de bélier avec prise en compte du comportement réel de la conduite ». La houille blanche N°1-1998 France.

- [34]- ROCHE . E - « Principes généraux de calcul du coup de bélier et de la protection anti-bélier » I.C.GREF Décembre 1986 – France.
- [35]- SALAH . B KETTAB . A ,
et MASSOUH . F - « Propagation of water hammer wave in buried pipes with a single or multi layers wall ». 4th Euromech, Solid Mechanics Conferences, Metz (France) June 26-30, 2000.
- [36]- SALAH . B , KETTAB . A , MASSOUH . F
et MBANGANGOYE . B - « Célérité de l'onde de coup de bélier dans les réseaux enterrés ». Revue international la Houille Blanche, N°3/4 , 2001 France.