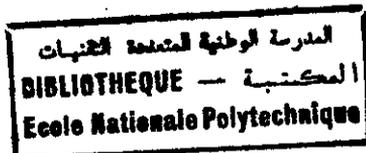


Département de Génie Civil



## Thèse

Présentée par

***BELKHEIR Kamel***

Ingénieur d'état en Génie Civil (ENP)

Juin 1994

Pour obtenir le titre de

**MAGISTER**

en Génie Civil

Intitulé du sujet

APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS  
STOCHASTIQUE AU TRAITEMENT DE PROBLEMES DE LA  
MECANIQUE DES STRUCTURES

Soutenue publiquement en Juin 1998 devant le jury composé de :

Président	: Mr. <b><i>B. TILIOUINE</i></b>	Professeur, E.N.P.
Rapporteur	: Mr. <b><i>M. K. BERRAH</i></b>	Maître de conférences, E.N.P.
Examineurs	: Mr. <b><i>S. BELKACEMI</i></b>	Maître de conférences, E.N.P.
	Mr. <b><i>M. HAMOUTENE</i></b>	Maître de conférences, E.N.P.
	Mr. <b><i>M. DEMIDEM</i></b>	Chargé de cours, E.N.P.

- 1998 -

## Remerciements



*Le présent travail n'aurait pu être mis au point sans l'aide et l'orientation prodiguées par mon directeur de thèse Mr. M. K. BERRAH, envers lequel j'adresse tous mes remerciements. A cet effet, je tiens à souligner ses précieux conseils et recommandations joignant harmonie et rigueur scientifiques.*

*Je remercie également les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce modeste travail en exprimant ma vive gratitude à Mr le professeur B. TILIOUINE pour en avoir accepté la présidence.*

*Que messieurs S. BELKACEMI maître de conférences (ENP), M. HAMOUTENE maître de conférences (ENP) et M. DEMIDEM chargé de cours (ENP) trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.*

*J'adresse également mes vifs remerciements envers mes camarades de promotion: Hassan, M'hamed, Karima, Souad et Hakim pour l'agréable ambiance de travail qu'ils créaient ainsi que pour leur aide et soutien.*

*Je ne saurais oublier de rendre hommage à la compréhension et la serviabilité de l'ensemble du personnel travaillant à la bibliothèque et au centre de calcul, en particulier, Salah, Krimo, et Hocine.*

*Enfin, dans le soucis de n'oublier personne, tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin que ce soit par leur amitié, leurs conseils ou leur soutien moral, trouvent dans ces quelques lignes l'expression de ma gratitude.*

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*" The only thing that is certain is that nothing is certain."*

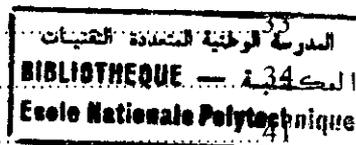
Pliny the Elder, *Historia Naturalis*.

## SOMMAIRE



<b>Chapitre 1: Introduction générale</b> .....	4
1.1 Problématique .....	4
1.2 Présentation des travaux antérieurs .....	6
1.3 Organisation du présent travail .....	7
 <b>Chapitre 2: Eléments de champs et processus aléatoires</b> .....	9
2.1 Introduction .....	9
2.2 Définition .....	9
2.3 Caractérisation d'un champ aléatoire .....	10
2.4 Description au second ordre d'un champ homogène .....	12
2.5 Analyse spectrale d'un champ homogène .....	13
2.6 Dérivées d'un champ aléatoire .....	15
2.7 Etude des moyennes locales de champs 1-D et 2-D .....	15
2.7.1 Cas d'un processus aléatoire 1-D .....	16
2.7.2 Cas d'un champ aléatoire 2-D .....	18
2.8 Distribution des extremums d'un processus aléatoire stationnaire .....	20
2.8.1 Moments spectraux .....	20
2.8.2 Passage de barrière .....	21
2.8.3 Analyse de la distribution d'un maximum absolu d'un processus stationnaire .....	22
2.9 Conclusion .....	24
 <b>Chapitre 3: Analyse des systèmes aléatoires soumis à des efforts statiques</b> .....	25
3.1 Introduction .....	25
3.2 Méthode des éléments finis déterministe .....	26
3.2.1 Historique .....	26
3.2.2 Formulation .....	28
3.3 Méthode des éléments finis stochastique basée sur les techniques de perturbation .....	33

3.3.1 Modélisation des caractéristiques matérielles par des champs aléatoires .....	
3.3.2 Méthode des perturbations .....	
3.3.3 Méthode des intégrales pondérées .....	
3.3.4 Bornes supérieures de la variabilité de la réponse .....	57
3.4 Méthode des éléments finis basée sur la simulation .....	60
3.4.1 Statistiques de la réponse .....	60
3.4.2 Simulation de champs aléatoires .....	61
3.4.3 Représentation spectrale d'un champ aléatoire .....	63
3.5 Conclusion .....	66
<b>Chapitre 4: Investigation paramétrique de la variabilité de la réponse</b>	
des systèmes aléatoires sous l'effet des efforts statiques .....	67
4.1 Introduction .....	67
4.2 Problèmes à champs unidimensionnels .....	68
4.2.1 Exemple 1 : Poutre isostatique .....	68
4.2.2 Exemple 2 : Structure poteaux-poutres .....	72
4.3 Problèmes à champs bidimensionnels .....	75
4.4 Conclusions .....	77
<b>Chapitre 5: Notions sur l'action sismique et les vibrations aléatoires</b> .....	94
5.1 Origine des séismes .....	94
5.2 Propagation des ondes sismiques .....	95
5.3 Evaluation des séismes .....	96
5.4 Représentation idéalisée des séismes .....	97
5.4.1 Notions de vibrations aléatoires .....	98
5.4.1.1 Analyse des systèmes vibratoires .....	99
5.4.1.2 Spectre de réponse probabiliste .....	101
5.5 Conclusion .....	102
<b>Chapitre 6: Analyse des systèmes aléatoires sous l'effet des excitations sismiques</b> .....	103
6.1 Introduction .....	103



6.2 Analyse des problèmes aux valeurs propres aléatoires .....	104
6.3 Etude de la réponse des systèmes aléatoires .....	108
6.4 Spectre de réponse probabiliste .....	110
6.5 Conclusion .....	115
	
<b>Chapitre 7: Investigation paramétrique de la réponse des structures</b>	
aléatoires vis à vis des excitations sismiques .....	117
7.1 Introduction .....	117
7.2 Statistiques des valeurs et vecteurs propres .....	117
7.3 Variabilité de la densité spectrale de la réponse .....	121
7.4 Statistiques de la réponse maximale et spectre de réponse .....	123
7.5 Conclusions .....	125
<b>Chapitre 8: Conclusions générales et recommandations .....</b>	<b>147</b>
Références bibliographiques .....	150
Annexe 1 .....	155
Annexe 2 .....	157
Annexe 3 .....	159

# CHAPITRE 1

## Introduction



### 1.1 Problématique :

L'aléa peut être défini comme étant le manque d'informations au sujet d'un phénomène de nature imprédictible [24]. Ceci est le cas de la majorité des événements physiques définis dans un contexte spatio-temporel.

Deux sources d'aléa sont généralement reconnues. La première est une irrégularité inhérente au phénomène observé et l'impossibilité d'une description déterministe exhaustive. Tel est le cas par exemple, du principe d'incertitude de la mécanique quantique et la théorie de la cinématique des gaz. L'autre source d'aléa peut être reliée à un manque généralisé d'informations concernant le phénomène en question. Le niveau d'incertitude associé à cette classe de problème peut souvent être réduit en collectant plus d'observations et en améliorant les dispositifs de mesure à travers lesquels le processus est observé. L'exemple typique de cette catégorie est celui des propriétés matérielles ou mécaniques d'un sol ou d'une structure en béton armé. Ces propriétés sont définies de manière unique en tout point du milieu considéré. Cependant, il est pratiquement impossible de les mesurer pour tous ces points, ou même pour un nombre de localisations relativement grand.

A partir d'un nombre fini d'observations, ces propriétés peuvent être modélisées par des variables aléatoires, ou à un niveau plus avancé par des champs stochastiques, les caractéristiques réelles du milieu étant considérées comme des réalisations particulières de ces champs.

L'étude des systèmes mécaniques consiste en l'analyse de leur réponse sous l'effet de différents types d'excitations. Cependant, dans une approche probabiliste cette réponse sera de nature aléatoire, en raison de l'aléa de l'excitation, ou celui des propriétés du système lui-même. Le cas d'une excitation stochastique et d'un système déterministe a été amplement étudié, et nombreux résultats ont été obtenus dans le domaine de la mécanique.

Le second cas de problème, celui d'un système à propriétés mécaniques non déterministes avec un input, soit de nature déterministe ou stochastique est beaucoup plus complexe et les théories mathématiques sur lesquelles il se base sont toujours au stade de développement. Le

degré de complexité dépend de la précision exigée du modèle. Le facteur prépondérant dans ce sens, est le fait de considérer une modélisation par variables aléatoires ou par processus aléatoires. Il est évident que la précision requise et donc le degré de représentativité du modèle dépend de l'importance du système étudié et des conséquences de son éventuelle rupture.

Avec le progrès technologique accompli lors de ces dernières décennies, le développement de modèles de plus en plus réalistes et précis de systèmes mécaniques est devenu possible. Le bon fonctionnement de plusieurs systèmes structuraux modernes dépend dans une large mesure de leur capacité à s'acquitter avec un grand niveau de fiabilité de la mission pour laquelle ils sont destinés sous des conditions non complètement contrôlées.

Parmi ces structures, nous pouvons citer entre autres, les plates-formes offshore, les centrales nucléaires, les bâtiments de très grande hauteur, les véhicules spatiaux...

L'aléa dans ces cas résulte de divers phénomènes, tels les vagues océaniques, la variabilité du sol, le mouvement sismique, les excitations d'origine thermique et acoustique ainsi que les effets de la fatigue. Ceux-ci sont des exemples de structures importantes et de systèmes stratégiques qui doivent être conçus avec une probabilité minimale de rupture. En plus d'être d'une importance capitale pour la conception de telles structures, l'approche probabiliste fournit les concepts de base pour l'élaboration des programmes de calcul pour des problèmes de la mécanique aléatoire en général.

Mis à part l'aspect aléatoire, les structures modernes sont relativement complexes à analyser. La complexité résulte de l'interaction entre les différentes parties de la structure ainsi que l'interaction avec le milieu environnant. Faire face à une telle complexité, exige le recours à des algorithmes numériques efficaces et précis. Cependant, il est clair que pour augmenter son efficacité une modélisation probabiliste d'un système physique doit être compatibles avec les schémas numériques disponibles.

On note par ailleurs que la méthode des éléments finis (M.E.F) s'est imposée pour la résolution d'un large éventail de problèmes mécaniques. En outre, ses algorithmes numériques et les bases théoriques sur lesquels elle s'appuie ont prouvé leur efficacité depuis fort longtemps et ont été testés sur une variété de problèmes. Il est par conséquent tout à fait naturel que l'approche probabiliste pour la résolution des problèmes de la mécanique adopte la M.E.F

comme point de départ pour le développement des outils mathématiques compatibles avec la considération de l'aspect aléatoire.

## 1.2 Présentation des travaux antérieurs :

Bien que les premières idées concernant la théorie des probabilités aient pris naissance au 17<sup>e</sup> siècle, aux tables de jeu, grâce à Pascal et Fermat [22], ce n'est que pendant le 20<sup>e</sup> siècle que la théorie des probabilités est devenue une discipline mathématique, grâce à la base de connaissances accumulée ainsi que les contributions de grands esprits scientifiques dont, Gauss, Laplace et Poincaré.

Mais cela était avec l'ouvrage de Kolmogorov (1933) intitulé " Foundation of the Theory of Probability " que la base axiomatique de la théorie des probabilités a été présentée et que cette dernière a gagné l'approbation universelle en tant que branche des mathématiques.

Cette théorie présente un moyen pour relier les collections d'observations de phénomènes naturels au raisonnement mathématique et par là-même apporter tout un nouvel ensemble de perspectives et d'outils pour le traitement des problèmes physiques. Sur cette lignée, plusieurs chercheurs tentèrent d'introduire cette nouvelle méthodologie dans l'analyse de la variabilité de la réponse des systèmes mécaniques dont la nature exhibe de manière naturelle, des difficultés dans la description déterministe de leurs propriétés matérielles. Mais ce n'est qu'à la fin des années 60 que les premiers travaux dans ce volet commencèrent effectivement à apparaître. On note l'article publié par Collins et Thomson en 1969, traitant le problème aux valeurs propres des systèmes aléatoires sur la base des résultats trouvés par Fox et Kapoor une année auparavant. Quelque temps plus tard Shinozuka et Astill traitèrent le même problème en utilisant la simulation [59]. Cependant, Hart et Collins introduisirent l'aspect aléatoire dans la méthode des éléments finis [48]. Sous l'impulsion des travaux de Shinozuka et son équipe une progression considérable des techniques de simulation a été réalisée. Ces derniers ont mis au point des méthodes pour générer des fonctions aléatoires. On a aussi analysé à l'aide de la simulation les modèles probabilistes pour la distribution spatiale des propriétés matérielles afin d'obtenir les statistiques de la réponse.

On note aussi le rapport de recherche établi par Shinozuka et al. [46] concernant l'utilisation des fonctions trigonométriques pour simuler des champs stochastiques de  $n$  dimensions. Pour

réduire l'effort que nécessite une investigation par simulation, Adomian et Malakian ont mis au point une base théorique pour l'utilisation du développement de Neumann [48]. S'appuyant sur ce travail, plusieurs recherches ont été développées [58, 47] tentant à chaque fois d'améliorer la représentation du champ stochastique. Sur la même lancée Der Kiureghian (1987) a développé un algorithme pour l'introduction des propriétés matérielles modélisées par des processus aléatoires discrétisés dans un code de calcul en éléments finis afin d'obtenir les indices de fiabilité des structures.

Pour sa part, l'introduction de la technique de perturbation dans une modélisation par éléments finis a été initiée par les travaux de Nakagiri et Hisada [25], ces derniers avaient conclu que la perturbation au second ordre nécessitait un effort numérique considérable.

Vanmarcke et Grigoriu [56] étudièrent le problème de flexion d'une poutre simple à propriétés aléatoires faisant usage de l'échelle de fluctuation ainsi que plusieurs résultats établis en référence [54].

Par la suite, plusieurs auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis stochastique pour la détermination des déplacements, des déformations, des forces internes... des structures, nous pouvons citer comme exemples, entre autres, [6, 33, 34, 36]. On note également les contributions de Liu et al. Pour l'analyse des systèmes non linéaires [33, 37].

G. Deodatis et M. Shinozuka [16] ont adopté une autre méthodologie pour l'étude de la variabilité de la réponse des poutres en flexion en utilisant les fonctions de variabilité qui leur ont permis de déterminer les bornes supérieures de variabilité. Par la suite cette approche a été intégrée à la modélisation par éléments finis [15, 17] de structures en treillis et en poteaux-poutres, en introduisant la notion d'intégrales pondérées. Cette notion a récemment été étendue au cas bidimensionnel [20].

### **1.3 Organisation du présent travail :**

De manière générale les édifices du génie civil font face pendant la durée de leur existence à deux types d'effort, les excitations de nature statique et celles de nature dynamique, en particulier provenant du mouvement sismique. Ainsi, dans le but d'analyser la variabilité de la réponse des structures dont les caractéristiques sont décrites de manière probabiliste à l'égard de ces deux types d'effort, nous avons adopté un plan de travail dont le cheminement s'articule comme indiqué ci-dessous.

Dans le chapitre 2 nous avons présenté un ensemble d'outils mathématiques constituant la base théorique pour le traitement des problèmes de milieux aléatoires. Dans le chapitre 3 nous avons présenté plusieurs manières de discrétiser des champs aléatoires afin de les incorporer dans la modélisation par éléments finis. Nous avons également exposé plusieurs approches pour la détermination des statistiques de la réponse. Cette diversité est argumentée par le fait que le traitement des problèmes de milieux aléatoires est toujours au stade de la recherche et aucune méthode n'a pu s'imposer en tant que technique de résolution de tels problèmes. Nous avons aussi exposé dans ce chapitre, une méthodologie pour la détermination des bornes supérieures de la variabilité de la réponse qui est indépendante de la structure de corrélation du champ stochastique définissant le système. Ces bornes sont d'une très grande utilité du moment que pour les problèmes physiques réels, seuls les premier et second moment statistique sont déterminés avec une précision relative. Une investigation numérique des méthodes exposées dans ce chapitre est présentée au chapitre 4.

Ensuite, au chapitre 5 nous avons introduit le second volet de ce travail par une analyse descriptive du mouvement sismique, son origine et sa propagation. A la fin de ce chapitre nous avons présenté des notions de la théorie de vibrations aléatoires, qui constitue en fait un moyen de modélisation de l'excitation sismique. Ceci est la base à partir de laquelle nous avons présenté au chapitre 6, une procédure pour l'étude de la réponse des structures aléatoires excitées par des efforts sismiques. Nous avons commencé tout d'abord par l'analyse des problèmes aux valeurs propres, puis nous sommes passés à la description statistique de la densité spectrale de la réponse, et enfin nous avons établi des spectres de réponse probabilistes pour des structures à caractéristiques stochastiques. Un traitement numérique des procédures exposées dans cette section a été effectué au chapitre suivant.

Enfin, l'essentiel des conclusions ainsi que des perspectives de recherche ont été présentées au chapitre 8.

## CHAPITRE 2

### Eléments de champs et processus aléatoires

#### 2.1 Introduction :

Il existe dans la nature plusieurs entités et phénomènes physiques, voire même économiques et sociaux, dont la description ne peut se faire au moyen d'approches déterministes. Nous pouvons citer comme exemples les constituants de l'environnement terrestre, tels l'air, l'eau et le sol, qui possèdent des propriétés physiques comme la densité, la conductivité, la capacité portante... sujettes à des changements imprévisibles dans l'espace et dans le temps à cause des conditions météorologiques variables.

En effet, il se peut que le taux de changement ou de perturbation imprévisible soit d'une importance telle qu'une description déterministe s'avère insuffisante. Il est alors plus indiqué de faire usage de la théorie des probabilités permettant de développer des modèles plus proches de la réalité. Ces modèles sont d'autant plus exploitables qu'il est possible de rassembler l'ensemble des caractéristiques du phénomène stochastique complexe en un minimum de paramètres physiques, expérimentalement accessibles.

Ce chapitre présente des notions essentielles sur les champs et processus aléatoires constituant le fondement mathématique nécessaire à la compréhension des méthodes d'analyse des réponses structurales décrites dans les chapitres suivants.

#### 2.2 Définition :

Si d'une façon générale, des observations associées à un phénomène physique dépendant d'un ou de plusieurs paramètres sont imprévisibles, alors la collection de toutes les observations constitue un champ aléatoire. En d'autres termes, un champ aléatoire peut être perçu comme une famille paramétrique de variables aléatoires  $X(\mathbf{t})$ , où  $\mathbf{t}=(t_1, t_2, \dots, t_n)$  est une localisation de coordonnées  $t_1, t_2, \dots, t_n$  dans l'espace des paramètres.

Il est à noter que le champ aléatoire peut être continu ou discret par rapport à chaque paramètre  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , et que d'autre part l'on parle d'état continu ou d'état discret d'un champ

stochastique selon que la variable aléatoire définie pour un ensemble fixé de paramètres soit continue ou pas.

Nous constatons à partir de ces définitions qu'un processus aléatoire dépendant d'un paramètre temporel unique, ne constitue en fait qu'un cas particulier du champ aléatoire.

### 2.3 Caractérisation d'un champ aléatoire :

Pour définir complètement un système fini de variables aléatoires  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  associées à des localisations  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de l'espace des paramètres, il faut se donner leur fonction de répartition conjointe  $F_X(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$ . Cette dernière est définie [3] comme étant la probabilité que:  $X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n$ .

On admet aisément qu'un tel mode de définition n'est plus pratique quand il s'agit de champs aléatoires, où il est question d'une infinité de variables aléatoires. C'est la raison pour laquelle en pratique nous avons recours à des définitions moins complètes.

Une manière de décrire un champ aléatoire est de donner l'ensemble de ses moments définis par :

$$\mathcal{E}\left[\prod_{i=1}^k X(t_i)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^k x_i f_X(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n) dx_1 \dots dx_k \quad (2.1)$$

Avec  $k=1,2,3,\dots$

$f_X(x_1, t_1, \dots, x_n, t_n)$  est la densité de probabilité conjointe de  $X(t_1), \dots, X(t_n)$

et  $\mathcal{E}$  est l'opérateur de l'espérance mathématique.

Le moment d'ordre 1 est appelé moyenne du champ aléatoire et il est noté :

$$m_x(t) = \mathcal{E}[X(t)] \quad (2.2)$$

Nous avons aussi le moment d'ordre 2 appelé fonction d'autocorrelation, notée:

$$R_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}[X(t_1)X(t_2)] \quad (2.3)$$

nous pouvons aussi représenter ce second moment par une autre fonction dite d'autocovariance donnée par la relation suivante :

$$\Gamma_X(t_1, t_2) = \mathcal{E}[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))] \quad (2.4)$$

Si  $t_1=t_2$  nous aurons la variance du champ  $X(t)$  :

$$\sigma_x^2(t) = \Gamma_X(t, t) \quad (2.5)$$

On définit un coefficient de corrélation par :

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{\Gamma_X(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)} \quad (2.6)$$

Il est à remarquer que les deux premiers moments suffisent pour décrire entièrement un champ aléatoire gaussien, d'où l'avantage de la modélisation par un tel champ. Toutefois celle-ci doit représenter convenablement le phénomène physique.

En pratique, l'analyse des champs aléatoires est confrontée au problème de la quantité limitée de données disponibles. Ce qui a conduit à l'adoption de propriétés hypothétiques permettant d'une part de contourner l'obstacle précité et d'autre part une étude plus poussée du processus stochastique.

Parmi ces propriétés :

\* L'homogénéité :

Un champ aléatoire est dit homogène si toutes les fonctions de distribution conjointes de probabilités restent inchangées lorsqu'on applique une translation à l'ensemble des paramètres  $t_1, \dots, t_n$ .

Ce qui impliquera que toutes les probabilités dépendront de la localisation relative dans l'espace des paramètres et non de la position absolue.

Le terme stationnarité est communément utilisé quand il s'agit d'un processus aléatoire dépendant d'un seul paramètre.

\* L'isotropie :

Un champ aléatoire est dit isotrope si toutes les distributions conjointes de probabilités ne dépendent que de la "distance" entre les points considérés.

Il est clair que l'isotropie d'un champ aléatoire implique son homogénéité.

\* L'ergodicité :

un champ aléatoire est dit ergodique si toutes les informations concernant les distributions conjointes de probabilités peuvent être obtenues à partir d'une seule réalisation du champ aléatoire.

Il est à noter que les définitions données ci-dessus sont au sens strict. Elle peuvent avoir un sens "faible" en limitant les conditions citées aux deux premiers ordres.

#### 2.4 Description au second ordre d'un champ homogène :

Soit  $X(\mathbf{t})$  un champ aléatoire homogène de dimension  $n$ , avec  $\mathbf{t}=(t_1, \dots, t_n)$ .

La moyenne de  $X(\mathbf{t})$  est constante à travers tout l'espace des paramètres et elle est donnée par l'expression :

$$m_x = \mathcal{E}[X(\mathbf{t})] = \bar{X} \quad (2.7)$$

Quant à la fonction d'autocorrelation, elle n'est fonction que du vecteur des coordonnées relatives :

$$R_X(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \mathcal{E}[X(\mathbf{t})X(\mathbf{t}')] = R_X(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.8)$$

$$\text{où : } \boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \mathbf{t}' = (\tau_1, \dots, \tau_n) \quad (2.9)$$

On note que  $R_X$  est symétrique par rapport à l'origine  $\boldsymbol{\tau} = 0$  où elle prend sa valeur maximale, i.e.:

$$R_X(\tau_1, \dots, \tau_n) = R_X(-\tau_1, \dots, -\tau_n) \quad (2.10)$$

et,

$$|R_X| \leq R_X(0) \quad (2.11)$$

On donne aussi l'expression de la fonction d'autocovariance :

$$\Gamma_X(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \mathcal{E}[(X(\mathbf{t}) - m_x)(X(\mathbf{t}') - m_x)] = \Gamma_X(\boldsymbol{\tau}) \quad (2.12)$$

On peut aisément montrer que pour un champ homogène on aura :

$$\Gamma_X(\boldsymbol{\tau}) = R_X(\boldsymbol{\tau}) - m_x^2 \quad (2.13)$$

On remarque aussi que la valeur maximale que peut prendre  $\Gamma_X(\boldsymbol{\tau})$  est  $\Gamma_X(0)$ , qui ne constitue en fait que la variance de  $X(\mathbf{t})$ , notée  $\sigma_x^2$ .

Le coefficient de corrélation est obtenu par la relation :

$$\rho_x = \frac{\Gamma_X(\tau)}{\sigma_x^2} \quad (2.14)$$

Si un champ stochastique homogène  $X(t)$  a une fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(\tau_1, \dots, \tau_n)$  qui est symétrique par rapport à toutes les composantes  $\tau_k$ , c'est à dire:

$$\Gamma_X(\tau_1, \dots, \tau_k, \dots, \tau_n) = \Gamma_X(\tau_1, \dots, -\tau_k, \dots, \tau_n) \quad \text{avec } k=1, \dots, n \quad (2.15)$$

alors ce champ est dit symétrique par rapport au quadrant. Ceci implique que la connaissance de la fonction de covariance pour un quadrant de l'espace de dimension  $n$ , par exemple pour  $\tau_k \geq 0$  avec  $k=1, \dots, n$ , permet la définition de celle-ci à travers tout cet espace.

Cette propriété est très pratique pour l'analyse spectrale d'un champ aléatoire du moment que la transformée de Fourier d'une fonction à plusieurs variables symétrique par rapport au quadrant est une fonction symétrique par rapport au quadrant.

Nous pouvons aussi définir une fonction d'intercovariance entre deux champs stochastiques homogènes  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  par :

$$\Gamma_{X_1 X_2}(t, t') = \mathcal{E}[(X_1(t) - m_{x_1})(X_2(t') - m_{x_2})] \quad (2.16)$$

Ces deux champs sont dits conjointement homogènes si leur fonction d'intercovariance peut s'écrire sous la forme :

$$\Gamma_{X_1 X_2}(t, t') = \Gamma_{X_1 X_2}(t' - t) = \Gamma_{X_1 X_2}(\tau) \quad (2.17)$$

L'homogénéité conjointe implique :

$$\Gamma_{X_1 X_2}(\tau) = \Gamma_{X_2 X_1}(-\tau) \quad (2.18)$$

Mais elle n'induit pas impérativement une symétrie de  $\Gamma_{X_1 X_2}$  par rapport à l'origine  $\tau=0$ .

## 2.5 Analyse spectrale d'un champ homogène :

Les relations permettant le passage du domaine des paramètres dans lequel le champ est défini, et qui est le plus souvent un domaine spatio-temporel, au domaine spectral: fréquence-

nombre d'onde, sont les relations de Wiener-Khinchine. Ces dernières relient la fonction de densité spectrale de puissance et la fonction d'autocovariance. Elles s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} S_X(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_X(\tau) e^{-i\tau \cdot \omega} d\tau \\ \Gamma_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\tau \cdot \omega} d\omega \end{cases} \quad (2.19)$$

où :

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_1, \dots, \tau_n) \\ d\tau &= d\tau_1 \dots d\tau_n \\ d\omega &= d\omega_1 \dots d\omega_n \\ \tau \cdot \omega &= \tau_1 \omega_1 + \dots + \tau_n \omega_n \end{aligned}$$

On note que la fonction de densité spectrale  $S_X(\omega)$  est une fonction réelle non négative.

Si la fonction d'autocovariance est symétrique par rapport au quadrant, alors la densité spectrale qui lui est associée l'est aussi. Ceci nous motive à définir une densité unilatérale définie uniquement sur les valeurs non négatives de  $\omega_1, \dots, \omega_n$  par :

$$G_X(\omega) = 2^n S_X(\omega) \quad (2.20)$$

Et les relations de Wiener-Khinchine deviendront :

$$\begin{cases} G_X(\omega) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \Gamma_X(\tau) e^{-i\tau \cdot \omega} d\tau \\ \Gamma_X(\tau) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} G_X(\omega) e^{i\tau \cdot \omega} d\omega \end{cases} \quad (2.21)$$

Nous pouvons aussi définir pour deux champs aléatoires conjointement homogènes,  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ , une fonction d'interdensité spectrale de puissance. Celle-ci sera reliée à la fonction intercovariance par des relations similaires aux équations (2.19).

$$\begin{cases} S_{X_1 X_2}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{X_1 X_2}(\tau) e^{-i\tau \cdot \omega} d\tau \\ \Gamma_{X_1 X_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_1 X_2}(\omega) e^{i\tau \cdot \omega} d\omega \end{cases} \quad (2.22)$$

## 2.6 Dérivées d'un champ aléatoire :

L'analyse des dérivées d'un champ aléatoire s'avère très importante lors de l'étude des fluctuations de celui-ci, ou quand il s'agit de déterminer la distribution de ses extremums (pics).

Si un champ homogène  $X(t_1, \dots, t_n)$  est défini au second ordre par sa densité spectrale de puissance  $S_X(\omega)$  ou bien par sa fonction d'autocovariance  $\Gamma_X(\tau)$ , alors le champ dérivé, noté :

$$\dot{X}_j(\mathbf{t}) = \frac{\partial X(\mathbf{t})}{\partial t_j} \quad (2.23)$$

est aussi défini au second ordre soit par :

- sa fonction d'autocovariance :

$$\Gamma_{\dot{X}_j}(\tau) = -\frac{\partial^2 \Gamma_X(\tau)}{\partial \tau_j^2} \quad (2.24)$$

- ou bien par sa fonction de densité spectrale:

$$S_{\dot{X}_j}(\omega) = \omega_j^2 S_X(\omega) \quad (2.25)$$

De la même manière, nous pouvons caractériser au second ordre la deuxième dérivée de  $X(\mathbf{t})$  comme suit :

$$S_{\ddot{X}_{ij}}(\omega) = \omega_i^2 \omega_j^2 S_X(\omega) \quad (2.26)$$

$$\Gamma_{\ddot{X}_{ij}}(\tau) = \frac{\partial^4 \Gamma_X(\tau)}{\partial \tau_i^2 \partial \tau_j^2} \quad (2.27)$$

## 2.7 Etude des moyennes locales de champs 1-D et 2-D :

Nous sommes amenés parfois à représenter un champ aléatoire par ses moyennes sur des régions de l'espace des paramètres, procédure souvent adoptée par la méthode des éléments finis aléatoire, ou il est question de représenter une ou plusieurs caractéristiques mécaniques aléatoires à travers chaque élément.

### 2.7.1 Cas d'un processus aléatoire 1-D :

A partir d'un processus stationnaire à paramètre continu  $X(t)$  ayant une moyenne  $m_x$  et une variance  $\sigma_x^2$ , nous pouvons générer un ensemble de processus  $X_T(t)$ , par moyennes mobiles de  $X(t)$  sur un intervalle de longueur  $T$  comme suit :

$$X_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} X(\xi) d\xi \quad (2.28)$$

On constate que  $X_T(t)$  dépend de  $T$  et aussi qu'une caractérisation au second ordre de  $X(t)$  suffit pour décrire au même ordre  $X_T(t)$ .

On note d'une part que  $X(t)$  et  $X_T(t)$  ont une même moyenne  $m_x$ . D'autre part la variance de  $X_T(t)$  est obtenue à partir de celle de  $X(t)$  par la relation suivante :

$$\sigma_{X_T}^2 = \gamma(T) \sigma_x^2 \quad (2.29)$$

où :

$$\gamma(T) = \frac{2}{T \sigma_x^2} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \Gamma_X(\tau) d\tau \quad (2.30)$$

$\gamma(T)$  est appelée fonction de variance, c'est une fonction paire, non négative qui vérifie:

$$\gamma(0) = 1 \quad (2.31)$$

Elle représente une mesure de la réduction de la variance de  $X(t)$  après que celui-ci n'ait subi la transformation par moyennes locales.

#### a- Echelle de fluctuation :

L'échelle de fluctuation  $\theta$  est définie par :

$$\theta = \lim_{T \rightarrow \infty} T \gamma(T) \quad (2.32)$$

Comme  $\theta$  doit avoir une valeur finie, cela suppose qu'au voisinage de l'infini  $\gamma(T)$  serait proportionnel à  $1/T$ .

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de  $\theta$  est que[55] :

$$\left. \frac{\partial S_X(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = 0 \quad (2.33)$$

Où,  $S_X(\omega)$  est la densité spectrale associée à  $\Gamma_X(\tau)$ .

Si  $\theta$  existe, il peut être déterminé à partir de sa définition (éq. 2.32), ou par l'une des relations suivantes [55]:

- Dans le domaine des paramètres :

$$\theta = \frac{2}{\sigma_x^2} \int_0^\infty \bar{\Gamma}_X(\tau) d\tau \tag{2.34}$$

-Ou bien dans le domaine fréquentiel :

$$\theta = \frac{2\pi}{\sigma_x^2} S_X(\omega) \quad \text{pour } \omega = 0 \tag{2.35}$$

**b- Covariances des moyennes locales :**

Pour établir la covariance entre deux moyennes locales déterminées sur un même processus stationnaire  $X(t)$  le long de deux intervalles  $T$  et  $T'$ , il est en premier lieu nécessaire de définir les localisations relatives de ces deux intervalles. Ceux-ci sont représentés sur les figures 2.1, 2.2 et 2.2 pour les différentes situations que pourrait avoir un intervalle par rapport à l'autre.

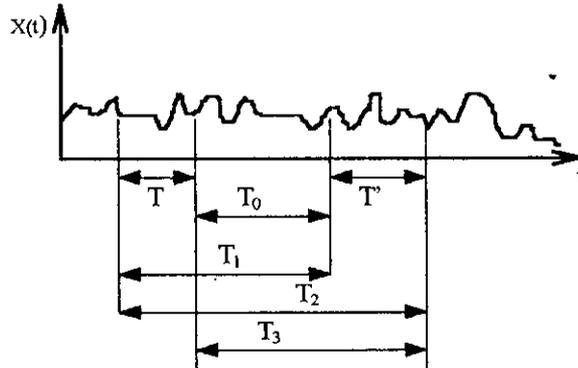


Fig. 2.1  $T$  et  $T'$  sont disjointes.

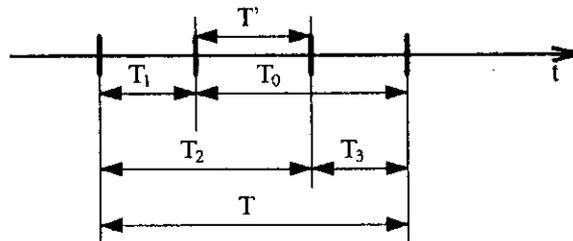


Fig. 2.2  $T'$  se situe à l'intérieur de  $T$ .

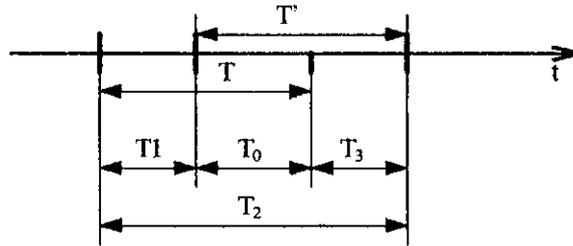


Fig. 2.3 chevauchement entre T et T'.

La covariance entre  $X_T$  et  $X_{T'}$  est donnée par la relation suivante :

$$Cov[X_T, X_{T'}] = \frac{\sigma_x^2}{2TT'} [\Delta(T_0) - \Delta(T_1) + \Delta(T_2) - \Delta(T_3)] \quad (2.36)$$

où  $\Delta(T)$  est une fonction obtenue à partir de  $\gamma(T)$  par :

$$\Delta(T) = T^2 \gamma(T) \quad (2.37)$$

La fonction d'autocovariance du processus résultant des moyennes locales  $X_T(t)$ , est déterminée comme étant un cas particulier de l'expression (2.36) pour lequel  $T=T'$

$$T_0=T-\tau, T_1=T_3 \text{ et } T_2=T+\tau.$$

Ce qui nous permet de trouver :

$$\Gamma_T(\tau) = \frac{\sigma_x^2}{2T^2} [\Delta(T+\tau) - 2\Delta(\tau) + \Delta(T-\tau)] \quad (2.38)$$

### 2.7.2 Cas d'un champ aléatoire 2-D :

Pour un champ aléatoire homogène bidimensionnel  $X(t_1, t_2)$ , nous pouvons définir une famille de champs homogènes  $X_A(t_1, t_2)$  résultant des moyennes locales de  $X(t_1, t_2)$  sur une région rectangulaire mobile de côtes  $T_1$  et  $T_2$ , et d'aire  $A=T_1 T_2$ .

$$X_A(t_1, t_2) = \frac{1}{A} \int_{t_1-T_1/2}^{t_1+T_1/2} \int_{t_2-T_2/2}^{t_2+T_2/2} X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (2.39)$$

Nous constatons que  $X(t_1, t_2)$  et  $X_A(t_1, t_2)$  ont la même moyenne  $m_x$ , cependant la variance de  $X_A(t_1, t_2)$  est obtenue en fonction de celle de  $X(t_1, t_2)$  comme suit :

$$\sigma_{X_A}^2(T_1, T_2) = \sigma_x^2 \gamma(T_1, T_2) \quad (2.40)$$

où la fonction de variance  $\gamma(T_1, T_2)$  est donnée par l'expression :

$$\gamma(T_1, T_2) = \frac{1}{\sigma_x^2 T_1 T_2} \int_{-T_1}^{T_1} \int_{-T_2}^{T_2} \left(1 - \frac{|\tau_1|}{T_1}\right) \left(1 - \frac{|\tau_2|}{T_2}\right) \Gamma_X(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.41)$$

### a- Surface caractéristique :

On définit une surface caractéristique  $\alpha$  analogue à l'échelle de fluctuation pour le cas 1-D :

$$\alpha = \lim_{\substack{T_1 \rightarrow \infty \\ T_2 \rightarrow \infty}} (A\gamma(T_1, T_2)) \quad (2.42)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que  $\alpha$  existe et soit fini, est que:

$$\left. \frac{\partial S_X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = 0} = 0 \quad (2.43)$$

et,

$$\left. \frac{\partial S_X(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_2} \right|_{\omega_1 = \omega_2 = 0} = 0 \quad (2.44)$$

Si  $\alpha$  existe, alors nous pouvons le déterminer soit à partir de sa définition (2.42), ou bien par l'une des deux relations suivantes [55] :

- Dans le domaine des paramètres :

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_X(\tau_1, \tau_2)}{\sigma_x^2} d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.45)$$

- Dans le domaine fréquentiel :

$$\alpha = \frac{4\pi^2}{\sigma_x^2} S_X(0,0) \quad (2.46)$$

### b- Covariances entre moyennes locales :

La connaissance de la fonction de covariance bidimensionnelle  $\gamma(T_1, T_2)$  suffit pour l'évaluation de la covariance entre moyennes locales d'un champ aléatoire  $X(t_1, t_2)$  sur deux surfaces rectangulaires A et A' dont les côtes sont parallèles aux axes de coordonnées  $t_1$  et  $t_2$ . Celle-ci est donnée par la relation suivante :

$$Cov[X_A, X_{A'}] = \frac{\sigma_x^2}{4AA'} \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 (-1)^k (-1)^l \Delta(T_{1k}, T_{2l}) \quad (2.47)$$

où :

$$\Delta(T_1, T_2) = \sigma_x^2 \gamma(T_1, T_2) \quad (2.48)$$

Les intervalles  $T_{lk}$  et  $T_{2l}$  avec  $k=1,\dots,3$  et  $l=1,\dots,3$  sont représentés sur la figure (2.4).

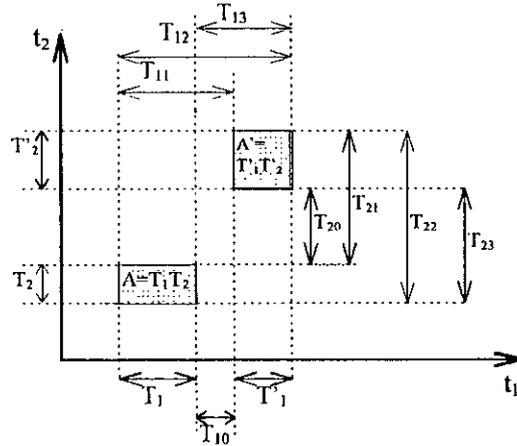


Fig. 2.4

En outre, l'équation (2.47) nous permet d'obtenir la fonction d'autocovariance du champ  $X_A(t_1, t_2)$  résultant des moyennes locales, qui s'exprime comme suit :

$$\Gamma_{X_A}(\tau_1, \tau_2) = \frac{\sigma_x^2}{4T_1^2 T_2^2} [\Delta(T_1 + \tau_1, T_2 + \tau_2) + \Delta(T_1 - \tau_1, T_2 + \tau_2) + \Delta(T_1 + \tau_1, T_2 - \tau_2) + \Delta(T_1 - \tau_1, T_2 - \tau_2) - 2\Delta(\tau_1, T_2 + \tau_2) - 2\Delta(\tau_1, T_2 - \tau_2) - 2\Delta(T_1 + \tau_1, \tau_2) - 2\Delta(T_1 - \tau_1, \tau_2) + 4\Delta(\tau_1, \tau_2)] \quad (2.49)$$

## 2.8 Distribution des extremumis d'un processus aléatoire stationnaire :

### 2.8.1 Moments spectraux :

Le moment spectral d'ordre  $k$  d'un processus stationnaire  $X(t)$  est défini par la relation:

$$\lambda_k = \int_0^\infty \omega^k G_X(\omega) d\omega \quad (2.50)$$

On définit aussi à partir des trois premiers moments un paramètre spectral adimensionnel  $\delta$  tel que :

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}} \quad (2.51)$$

$\delta$  est compris entre 0 et 1, il constitue une mesure de la dispersion de  $G_X(\omega)$  par rapport à son centroïde [54].

### 2.8.2 Passage de barrière :

La relation donnant le taux de passage d'un niveau "b" noté  $\nu_b$  par un processus stationnaire à bande étroite a été établie par Rice (1945) s'exprimant sous la forme suivante :

$$\nu_b = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| f_{x\dot{x}}(b, \dot{x}) d\dot{x} \quad (2.52)$$

Où,  $f_{x\dot{x}}$  est la densité de probabilité conjointe du processus  $X(t)$  et sa première dérivée  $\dot{X}(t)$ .

On détermine aussi le taux de passage ascendant  $\nu_b^+$  et descendant  $\nu_b^-$  pour un processus "narrow band" par la relation suivante :

$$\nu_b^+ = \nu_b^- = \frac{\nu_b}{2} \quad (2.53)$$

De plus, si le processus est gaussien alors on trouve :

$$\nu_b^+ = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} e^{\frac{-b^2}{2\sigma_x^2}} \quad (2.54)$$

en particulier le taux de passage par zéro est :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{1/2} \quad (2.55)$$

On déduit à partir du taux de passage descendant par zéro du processus dérivé  $\dot{X}(t)$ , la fréquence d'occurrence des maximums locaux, qui est exprimée par la relation suivante:

$$\nu_{\max} = \frac{\nu_0^+}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad (2.56)$$

Où :

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_0 \lambda_4}} \quad (2.57)$$

La densité de probabilité des maximums locaux pour un processus gaussien est donnée par l'expression suivante :

$$f_{\max}(b) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\frac{-b^2}{2\varepsilon^2\sigma_x^2}} + \frac{b\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sigma_x^2} e^{\frac{-b^2}{2\sigma_x^2}} F_u \left( \frac{b\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sigma_x \varepsilon} \right) \quad (2.58)$$

Où  $F_u$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Si nous sommes en présence d'un processus "narrow band",  $\varepsilon$  tendra vers zéro. Ce qui nous permet d'obtenir pour un tel processus à partir de l'éq. (2.58), la distribution des pics dite de Rayleigh :

$$f_{\max} = \frac{b}{\sigma_x^2} e^{\frac{-b^2}{2\sigma_x^2}} \quad b \geq 0 \quad (2.59)$$

### 2.8.3 Analyse de la distribution du maximum absolu d'un processus stationnaire :

La détermination de la distribution de probabilité de la valeur maximale  $S$  d'un processus stochastique stationnaire  $X(t)$  sur un intervalle  $[0, t_0]$ , revient en fait à la recherche de la probabilité  $L_S(t_0)$  pour que le temps nécessaire pour un premier passage du niveau  $S$  soit supérieur à  $t_0$ .

Si nous supposons que les dépassements ascendants d'une barrière relativement haute  $S$  ont lieu de façon indépendante et suivent une loi de Poisson avec un taux moyen  $\nu_s^+$ , nous trouvons :

$$L_S(t_0) = \exp(-\nu_s^+ t_0) = \exp\left(-\nu_0^+ t_0 \exp\left(\frac{-S^2}{2\sigma_x^2}\right)\right) \quad (2.60)$$

Cette distribution nous permet d'avoir les statistiques du premier et du second ordre de la valeur maximale sur l'intervalle  $[0, t]$ . [11]

$$\mathcal{E}[S] = \left( \sqrt{2 \ln(\nu_0^+ t_0)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(\nu_0^+ t_0)}} \right) \sigma_x \quad (2.61)$$

et,

$$\sigma_S = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2 \ln(\nu_0^+ t_0)}} \sigma_x \quad (2.62)$$

La simulation numérique a montré que la moyenne et l'écart type déterminés par les équations (2.61) et (2.62) étaient relativement éloignés de la réalité. Ceci est dû au contexte hypothétique, car l'indépendance des passages est injustifiée lorsqu'il s'agit d'une barrière relativement basse, en outre les laps de temps écoulés au-dessus et en-dessous de cette dernière ne sont pas pris en considération, ainsi que l'effet du groupement des passages (clumping) observé dans le cas de processus à bande étroite.

Vanmarcke (1975) proposa une autre fonction de répartition du maximum de  $X(t)$  sur un intervalle  $[0, t]$ . Celle-ci prend en compte les "durées" que passe le processus au-dessus de la barrière. Elle s'énonce sous la forme suivante :

$$L_S(t_0) = \left[ 1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \right] \exp\left[ -\nu t_0 \frac{1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}} q_e a\right)}{\exp\left(\frac{a^2}{2}\right) - 1} \right] \quad s \geq 0 \quad (2.63)$$

Où :

$$a = \frac{s}{\sqrt{\lambda_0}} \quad (\text{barrière normalisée}) \quad (2.64)$$

$$\nu = 2\nu_0^+ \quad (2.65)$$

$$q_e = \delta^{1.2} \quad (2.66)$$

Cette fonction de répartition a été prise comme base par Der Kiureghian [19], qui a mené des investigations numériques aboutissant à des formules pseudo-empiriques permettant la détermination de la moyenne et de l'écart type de la valeur maximale sur une durée  $t_0$ . Ces formules sont exposées ci-dessous :

- La moyenne :

$$\mathcal{E}[s] = \left( \sqrt{2 \ln(\nu_e t_0)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(\nu_e t_0)}} \right) \sigma_x \quad (2.67)$$

- Ecart type :

$$\sigma_s = \begin{cases} \left( \frac{1.2}{\sqrt{2 \ln(\nu_e t_0)}} - \frac{5.4}{13 + (2 \ln(\nu_e t_0))^{3.2}} \right) \sigma_x & \text{si } \nu_e t_0 \geq 2.1 \\ 0.65 \sigma_x & \text{si } \nu_e t_0 \leq 2.1 \end{cases} \quad (2.68)$$

Où  $\nu_e$  est donné par la relation suivante :

$$\nu_e = \begin{cases} (1.63 \delta^{0.45} - 0.38) \nu & \text{si } \delta < 0.69 \\ \nu & \text{si non} \end{cases} \quad (2.69)$$

**2.9 Conclusion :**

Des notions de base ont été présentées dans ce chapitre, traitant essentiellement les champs stochastiques homogènes sous leur aspect général. Néanmoins certaines sections ont été détaillées pour les cas unidimensionnel et bidimensionnel, en l'occurrence la partie concernant les moyennes locales de champs aléatoires ainsi que celle concernant l'analyse des extremums (pics) de ces derniers. En effet, ces deux notions constituent les bases sur lesquelles sont en partie fondés, la méthode des éléments finis aléatoire et le spectre de réponse probabiliste présentés au chapitres 3 et 6 respectivement.

Par ailleurs, on note également que les notions de vibrations aléatoires présentées au chapitre 5 sont en relation étroite avec les résultats de ce chapitre.

## CHAPITRE 3

### **Analyse des systèmes aléatoires soumis à des efforts statiques**

#### **3.1 Introduction :**

Les imperfections inhérentes aux travaux de réalisation d'une part, et les erreurs de mesure d'autre part, font en sorte que l'incertitude, aussi petite soit-elle, relative aux caractéristiques et au fonctionnement d'un système physique réel existe toujours. En outre, le développement technologique rapide que connaît le monde de nos jours dans tous les domaines, a permis la mise au point de systèmes exigeant une très grande précision et devant être caractérisés par une fiabilité maximum. S'il est question de réduire le poids et d'optimiser le rendement de chaque particule de masse pour les engins aéronautiques et spatiaux [4], il s'agit en ce qui concerne les édifices du génie civil d'assurer leur bon service le plus longtemps possible compte tenu du coût de leur réalisation, et surtout de la nécessité de préserver des vies humaines. En effet, nous pouvons aisément imaginer la gravité des dégâts sociaux et économiques que pourrait engendrer l'effondrement d'un ouvrage aussi important qu'un barrage ou un gratte-ciel. Les normes d'exigence sont parfois telles que même des déplacements minimes ne sont pas tolérés, comme pour le cas des centrales nucléaires

Toutefois, il est toujours possible d'améliorer le niveau de sécurité d'un ouvrage en le renforçant. Mais dans ce cas une contrainte économique s'impose, faisant que les ingénieurs chargés de la conception sont en permanence à la recherche d'un compromis entre le niveau de sécurité des ouvrages et leur coût. On note par ailleurs que la quasi-totalité des règlements en matière de normes de construction utilisés de par le monde adoptent des coefficients de sécurité arbitraires pour prendre en compte les divers écarts potentiels dus aux hypothèses de calcul dans le cadre d'une approche déterministe. Par conséquent, les ouvrages sont souvent surdimensionnés par les méthodes classiques déterministes ne prenant pas en considération de manière précise la dimension aléatoire du problème (caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure ou des efforts extérieurs). D'où la nécessité du développement de nouvelles méthodes qui tiendraient compte de l'aléa précité de façon plus réaliste permettant ainsi des conceptions optimales des structures .

Par ailleurs, l'apparition de la méthode des éléments finis (MEF) a révolutionné le domaine du calcul des structures. Elle a permis, non seulement le dimensionnement d'ouvrages très complexes, mais elle a aussi apporté une toute nouvelle vision éclairant les mécanismes régissant les relations excitation-réponse.

Cependant, quand il est question de systèmes constitués de matériaux aussi complexes que le béton ou le sol, la modélisation classique par éléments finis reste relativement limitée quant à l'obtention de résultats probants. Il a fallu donc trouver un autre moyen permettant une modélisation plus rigoureuse des systèmes faits de matériaux présentant une grande variabilité spatiale des propriétés mécaniques.

Des méthodes récentes sont apparues dans le but précis de remédier à ce problème. Elles sont basées sur des combinaisons entre la méthode des éléments finis et la théorie des probabilités, d'où le nom de méthode des éléments finis aléatoire. Ainsi, on ne serait plus contraint de connaître tous les paramètres en tout point du système de manière déterministe, mais de trouver une représentation idéale sous forme de distributions de probabilités qui puissent les modéliser. Cependant, pour des raisons pratiques on se contente souvent de représentations au second ordre au lieu de distributions complètes.

L'objectif de ce chapitre est l'analyse de structures constituées de matériaux dont les caractéristiques mécaniques sont décrites par des champs aléatoires. Ces structures sont supposées soumises à des efforts statiques. Pour ce faire, nous utiliserons plusieurs méthodes s'appuyant sur la méthode des éléments finis. Celles-ci se départagent en deux grandes catégories, chacune représentant une approche différente de l'autre en matière de résolution de problèmes impliquant des champs aléatoires.

La première catégorie est basée sur les techniques de perturbation et la seconde sur la simulation.

## **3.2 Méthode des éléments finis déterministe :**

### **3.2.1 Historique :**

L'actuel essor de la MEF n'a été possible que grâce aux développements théoriques du siècle dernier. Le début remonte à 1819, quand Navier établit une méthode d'étude des

systemes hyperstatiques basée sur l'application des conditions d'équilibre et de compatibilité. Par la suite, Maxwell en 1864 et Castigliano en 1878 mettaient au point de façon complète les théorèmes de l'énergie. Cependant l'application de cette formulation au calcul des structures complexes a été inexistante faute de moyens de calcul.

Il est à noter qu'en 1932, H. Cross a établi une méthode rendant possible l'analyse des systèmes de poutres, mais la résolution de problèmes de milieux continus est restée posée.

Par ailleurs, c'est au début du 20e siècle qu'ont été acquis les résultats fondamentaux dans le domaine des méthodes d'approximation sous l'impulsion de Ritz en 1908 et Galerkin en 1915. Par la suite, en 1943 Courant établit les bases de la MEF en montrant que la résolution de certains problèmes de milieux continus est possible en effectuant une discrétisation spatiale du domaine tout en utilisant les méthodes d'approximation variationnelle.

Après la seconde guerre mondiale, on assiste dans l'industrie aéronautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures complexes. Parmi les contributions les plus importantes nous pouvons citer celle de Levi (1947) et de Garvey (1951) pour la méthode des forces, et celle de Levi (1953) pour la méthode des déplacements.

En 1955, Argyris présente une approche unifiée des méthodes des déplacements et des forces, puis l'année suivante Turner et Clough publient une présentation systématique de la méthode des déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la MEF comme technique de calcul des structures complexes. En effet, ces publications grâce à l'introduction du concept d'élément fini, ont apporté une unification des méthodes matricielles employées jusqu'alors pour les structures discrètes, et les méthodes de résolution de problèmes de milieux continus. A partir de 1956, la MEF va connaître un développement intense sous l'impulsion de l'industrie aérospatiale et grâce à la disponibilité des premiers ordinateurs. Au départ, l'approche déplacement a été la plus utilisée par rapport à l'approche contraintes, mais de nos jours cette dernière a trouvé des domaines où elle s'est avérée plus efficace que celle des déplacements. De plus, on a assisté au développement de nouvelles approches basées sur les champs de déplacements, de contraintes, et de déformations combinés en champs mixtes.

### 3.2.2 Formulation :

La méthode des éléments finis classique permet de discrétiser un problème physique réel à aspect continu, par le biais d'une subdivision abstraite du système entier en sous-systèmes, et par là-même de passer du problème global à des problèmes locaux où il est plus commode d'appliquer des approximations.

Il est à noter qu'il existe plusieurs procédures pour formuler un problème en éléments finis. Dans ce qui suit nous allons présenter l'une d'entre elles basée sur une approche déplacement qui d'ailleurs est la plus fréquemment utilisée. En outre, celle-ci sera prise par la suite comme base pour l'établissement de la méthode des éléments finis stochastique.

On subdivise la structure ou le milieu continu à étudier en éléments finis de formes géométriques simples, de manière à approximer le mieux possible sa géométrie. (Fig. 3.1)

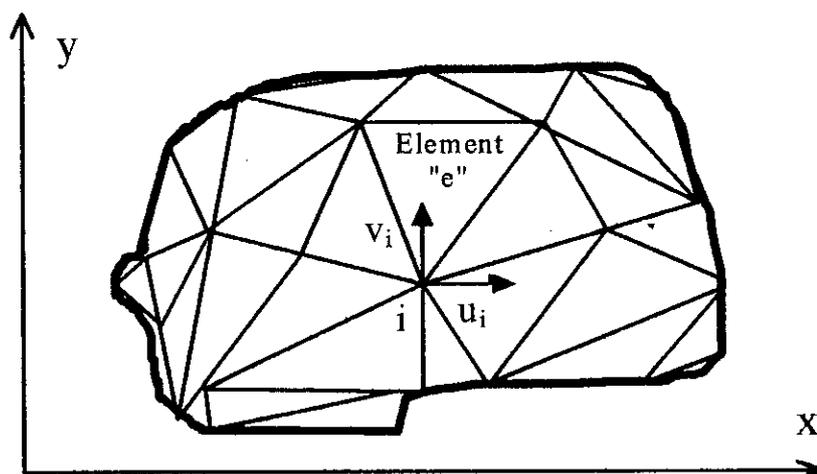


Fig. 3.1

Par ailleurs, il est nécessaire de se donner une approximation du champ des déplacements à l'intérieur de chaque élément "e", soit :

$$\{u^e\} = [N]\{a^e\} \quad (3.1)$$

où les composantes de  $[N]$  sont des fonctions sur lesquelles est basée l'approximation, elles sont appelées aussi fonctions de forme et  $\{a^e\}$  représente le vecteur des coordonnées généralisées.  $\{u^e\}$  est le champ de déplacement approximé au sein de l'élément "e".

La relation (3.1) définissant l'approximation élémentaire, telle qu'elle est ne peut pas être utilisée pour résoudre le système global. En effet, les coordonnées généralisées varient d'un élément à un autre et a priori on ne peut poser des conditions à leur égard. Il est donc nécessaire d'adopter de nouvelles variables physiques permettant d'assurer la compatibilité des déplacements entre éléments et d'exprimer les conditions d'équilibre aux noeuds. Pour cette raison nous allons utiliser un nouveau vecteur de variables noté  $\{U^e\}$  dont les composantes seront les déplacements nodaux. Par conséquent le champ de déplacement au sein de l'élément e est réexprimé de la façon suivante :

$$\{u^e\} = [A^e]\{U^e\} \quad (3.2)$$

Avec  $[A^e]$  est une matrice d'interpolation dont les éléments sont fonction des coordonnées de l'espace.

La relation (3.2) permet en fait de caractériser les déplacements en un point de l'élément en termes d'interpolation des déplacements aux noeuds.

Il est à remarquer aussi que le passage de  $[N]$  à  $[A^e]$  se fait par la relation suivante :

$$[A^e] = [N][\mathcal{N}^e]^{-1} \quad (3.3)$$

Où,  $[\mathcal{N}^e]$  est une matrice carrée contenant les composantes de  $[N]$  évaluées aux coordonnées nodales.

D'autre part, la relation entre les déformations et les déplacements dans un milieu continu s'exprime en général pour le cas des petites déformations par :

$$\{\varepsilon\} = [S]\{u\} \quad (3.4)$$

avec :  $\{\varepsilon\}$  vecteur contenant les composantes du tenseur de déformation et  $[S]$  est un opérateur différentiel.

Ce qui nous permet d'écrire qu'au sein de l'élément "e" nous aurons :

$$\{\varepsilon^e\} = [S]\{u^e\} = [S][N][\mathcal{N}^e]^{-1}\{U^e\} \quad (3.5)$$

posons :

$$[B^e] = [S][N][\mathcal{N}^e]^{-1} \quad (3.6)$$

Ce qui nous conduit à réécrire l'éq. (3.5) sous la forme :

$$\{\varepsilon^e\} = [B^e]\{U^e\} \quad (3.7)$$

En outre les relations qui lient les contraintes aux déformations sont données pour un milieu élastique linéaire par :

$$\{\sigma^e\} = [D^e]\{\varepsilon^e\} \quad (3.8)$$

$[D^e]$  est la matrice contenant les propriétés matérielles et géométriques de l'élément "e".

En substituant l'éq. (3.7) dans l'éq. (3.8) nous obtenons :

$$\{\sigma^e\} = [D^e][B^e]\{U^e\} \quad (3.9)$$

L'énergie potentielle totale  $\mathcal{V}^e$  est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{V}^e = \mathcal{U}^e - \mathcal{W}^e \quad (3.10)$$

Où :

$\mathcal{U}^e$  est l'énergie de déformation interne de l'élément e et,

$\mathcal{W}^e$  est le travail des forces extérieures s'exerçant sur l'élément e.

Sous forme discrétisée nous aurons :

$$\mathcal{V}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\varepsilon^e\}^T [D^e] \{\varepsilon^e\} dv - \int_{V^e} \{\varepsilon^e\}^T [D^e] \{\varepsilon_0^e\} dv + \int_{V^e} \{\varepsilon^e\}^T \{\sigma_0^e\} dv \quad (3.11)$$

avec :  $\{\varepsilon_0^e\}$  est un champ de déformations initiales et,

$\{\sigma_0^e\}$  un champ de contraintes initiales

Le travail des forces extérieures est donné à son tour sous forme discrétisée par :

$$\mathcal{W}^e = \{U^e\}^T \{f^e\} + \int_{S^e} \{u^e\}^T \{t^e\} ds + \int_{V^e} \{u^e\}^T \{b^e\} dv \quad (3.12)$$

Où :

$\{f^e\}$  vecteur des forces nodales concentrées au noeuds

$\{t^e\}$  vecteur de force de surface

$\{b^e\}$  vecteur de force volumique

En utilisant les relations (3.10), (3.11) et (3.12), l'énergie potentielle totale de l'élément e sera donnée sous forme matricielle par la relation :

$$\mathcal{V}^e = \frac{1}{2} \{U^e\}^T [K^e] \{U^e\} - \{U^e\}^T \{p^e\} \quad (3.13)$$

Avec  $[K^e]$  matrice de rigidité élémentaire donnée par la relation :

$$[K^e] = \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dv \quad (3.14)$$

Et  $\{p^e\}$  vecteur de forces nodales équivalentes pour l'élément e :

$$\begin{aligned} \{p^e\} = & \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] \{\varepsilon_0^e\} dv - \int_{V^e} [B^e]^T \{\sigma_0^e\} dv + \{U^e\}^T \{f^e\} + \\ & \int_{S^e} [A^e]^T \{t^e\} ds + \int_{V^e} [A^e]^T \{b^e\} dv \end{aligned} \quad (3.15)$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de toute la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaires, nous aurons en terme d'équation :

$$\mathcal{V} = \sum_{e=1}^{Ne} \mathcal{V}^e \quad (3.16)$$

Avec  $Ne$  nombre total des éléments de toute la structure.

Soit  $\{U\}$  le vecteur des déplacements nodaux de tout le système. En tenant compte des conditions de continuité des déplacements aux noeuds, nous pouvons assembler toutes les matrices élémentaires en matrices globales et nous aurons par conséquent l'expression de l'énergie potentielle totale de toute la structure :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \{U\}^T [K] \{U\} - \{U\}^T \{p\} \quad (3.17)$$

Avec  $[K]$  et  $\{p\}$  matrice de rigidité et vecteur force respectivement, obtenus après assemblage. En appliquant la condition de stationnarité à la fonctionnelle  $\mathcal{V}$  par rapport aux déplacements nodaux qui s'énonce comme suit :

$$\nabla_U(\mathcal{V}) = 0 \quad (3.18)$$

avec

$$\nabla_U = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial U_1} \\ \frac{\partial}{\partial U_2} \\ \dots \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

nous obtiendrons le système d'équations linéaires suivant :

$$[K]\{U\} - \{p\} = 0 \quad (3.20)$$

Ces conditions de stationnarité sont en fait une formulation des équations d'équilibre aux noeuds de la structure. Une dernière étape à effectuer avant de résoudre le système (3.20) est l'introduction des conditions aux limites, celles-ci sont obtenues à partir de la modélisation de la structure réelle. Le système résultant sera résolu par une des diverses techniques numériques de résolution de systèmes linéaires. Une fois les déplacements nodaux obtenus, les déformations et les contraintes peuvent être déterminées en tout point de la structure par les relations (3.7) et (3.9).

### **3.3 Méthode des éléments finis stochastique basée sur les techniques de perturbation :**

#### **3.3.1 Modélisation des caractéristiques matérielles par des champs aléatoires :**

L'analyse de la réponse d'un système déterministe classique consiste en l'étude de son comportement qui peut être discerné dans le cas de structure mécanique à travers le changement de sa configuration lorsqu'il est soumis à des forces d'excitation. Ce comportement est décrit de manière déterministe. Cependant, pour une structure à propriétés stochastiques il sera de nature aléatoire et nécessitera une description probabiliste. L'analyse de la variabilité de la réponse des systèmes aléatoires consiste en fait en l'évaluation des caractéristiques probabilistes de leurs réponses lorsqu'ils sont soumis à des excitations pouvant éventuellement être aléatoires. A noter qu'on entend par variabilité de la réponse, l'intensité de l'aléa qui pourrait être exprimée entre autres, en termes de variance, d'écart type, de coefficient de variation...

En général, l'étude d'un système physique comprend deux grandes étapes. La première consiste en la recherche d'un modèle adéquat permettant une représentation aussi proche que possible de la réalité. Cette étape aboutit généralement à l'établissement d'équations dont la résolution fera partie d'une deuxième étape qui comprendra une recherche parmi toute la panoplie de méthodes existantes le moyen optimal du point de vue coût et précision pour approcher le mieux possible la solution "exacte" du dit modèle.

Dans cette section, nous présenterons une des procédures les plus utilisées pour modéliser un système ayant des propriétés géométriques ou matérielles non déterministes. Cette procédure est adaptée systématiquement à la méthode des éléments finis. Nous décrirons par la suite, les

méthodes dont l'utilisation est la plus fréquente pour la formulation des équations régissant la variabilité de la réponse de tels systèmes.

Supposons qu'un système mécanique discrétisé par éléments finis renferme une propriété  $E(\mathbf{x})$  ne pouvant être décrite de façon déterministe. Cette dernière sera modélisée par un champ aléatoire qui sera défini sur chaque élément "e" par l'expression ci-dessous :

$$E^e(\mathbf{x}) = E_0^e(1 + a^e(\mathbf{x})) \quad (3.21)$$

Avec :

$E_0^e$  valeur moyenne de la propriété à travers l'élément e

$a^e(\mathbf{x})$  un champ aléatoire homogène de moyenne nulle défini au sein de l'élément e

$\mathbf{x}$  est le vecteur de coordonnées dans le repère local de l'élément e

Pour éviter la possibilité d'obtenir des valeurs non positives de la propriété mécanique  $E^e(\mathbf{x})$ , le champ stochastique  $a^e(\mathbf{x})$  est supposé borné comme suit :

$$-1 + \eta \leq a^e(\mathbf{x}) \leq 1 - \eta \quad (3.22)$$

Avec  $\eta > 0$

Généralement le champ  $a^e(\mathbf{x})$  est décrit au second ordre par sa fonction d'autocorrelation  $R_{aa}(\xi)$  ou sa densité spectrale de puissance  $S_{aa}(\mathbf{k})$ , où  $\xi$  est le vecteur de séparation des deux points considérés à la corrélation et  $\mathbf{k}$  est le vecteur des nombres d'onde.

### 3.3.2 Méthode des perturbations :

La description de la réponse d'un système stochastique pourrait dans le cas idéal être réalisée par la détermination de sa fonction de répartition, ou bien par la représentation de l'ensemble de ses moments statistiques. Toutefois, on se limite en pratique à une caractérisation de la réponse par ses moments de 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre (i.e. moyenne et variance). La méthode des perturbations constitue un moyen de quantifier ces deux grandeurs. Elle est associée à la méthode des éléments finis et les notions de champs aléatoires.

L'hypothèse de base de la méthode des perturbations consiste en fait, en la considération de petites fluctuations des propriétés du système susceptibles d'engendrer de petites variabilités de la réponse de celui-ci. Ceci, dans le but de pouvoir appliquer une approximation de forme polynomiale à cette réponse en fonction des variables aléatoires caractérisant le système. Ainsi, on pourra obtenir de manière approchée les statistiques (moyenne et écart type) de la réponse en fonction de celles des variables aléatoires associées au système.

On note que le champ aléatoire  $a^e(\bar{x})$  caractérise d'une façon continue la propriété aléatoire au sein de l'élément et par conséquent nécessite une procédure de discrétisation en un nombre fini de variables aléatoires pour pouvoir être intégré à une formulation par éléments finis. Parmi ces procédures les plus utilisées, nous pouvons citer :

#### a- Discrétisation par valeurs centrales :

On associe à chaque élément  $e$ , la valeur notée  $a_e$  du champ  $a^e(\bar{x})$  correspondant aux coordonnées du point situé au centre de cet élément et qui sera supposée constante à travers celui-ci. En d'autres termes, le champ  $a^e(\bar{x})$  qui en principe comprend une infinité de variables aléatoires ne sera représenté que par une seule. Ce qui nous contraint à réduire le plus possible la taille des éléments pour que les fluctuations du champ en leur sein soit négligeable.

#### b- Discrétisation par moyennes locales :

La transformation de l'aspect continu du champ aléatoire  $a^e(\bar{x})$  en un aspect discret est réalisée en déterminant la moyenne locale  $a_e$  sur chaque élément  $e$  et qui est donnée par la relation suivante (cf. chapitre 2) :

$$a_e = \frac{1}{V_e} \int_V a^e(\bar{x}) d\bar{x} \quad (3.23)$$

Où  $v_e$  dépend de la dimension du champ. Si celui-ci a une variation unidimensionnelle,  $v_e$  serait la longueur de l'élément  $e$ , et si par contre la variation était bidimensionnelle  $v_e$  serait l'aire de l'élément  $e$ .

Il est à noter que la structure de la corrélation entre les valeurs centrales s'obtient directement à partir de celle du champ stochastique lui-même. Par contre, en ce qui concerne les moyennes locales, elle s'obtiendra par le biais des relations (2.36 et 2.47) exposées au chapitre 2.

Les procédures de discrétisation exposées ci-dessus montrent que le nombre total de variables aléatoires caractérisant la structure dépend du nombre d'éléments de cette dernière, dans la mesure où chaque élément sera représenté par une variable aléatoire unique correspondant à la propriété considérée. Ceci nous conduit à l'utilisation d'un maillage relativement plus raffiné pour décrire une caractéristique du système exhibant une faible corrélation.

En vertu de l'équation (3.14), la matrice de rigidité globale  $[K]$  dépend des propriétés mécaniques des matériaux dont sont constitués les éléments de la structure, comme le module d'élasticité ou le coefficient de Poisson. Et d'autre part, elle dépend aussi de leurs caractéristiques géométriques comme l'inertie ou la section ...

Si une ou plusieurs des propriétés sont considérées comme aléatoires, elles seront modélisées par des champs stochastiques qui peuvent éventuellement être corrélés entre eux et qui seront ensuite discrétisés par l'une des formes exposées ci-dessus. On suppose en outre, que les variables aléatoires de moyenne nulle  $a_e$  obtenues après la discrétisation du champ ont des valeurs très petites, i.e. ( $a_e \ll 1$ ). Alors, la décomposition de  $[K]$  autour des valeurs moyennes des  $a_e$  nous donne :

$$[K] = [K^0] + \sum_{i=1}^N [K_i^I] a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [K_{ij}^{II}] a_i a_j + \dots \quad (3.24)$$

Où  $N$  représente le nombre total des variables aléatoires. Nous avons aussi :

$[K^0]$  fluctuation d'ordre zéro de la matrice de rigidité, qui est équivalente à la matrice  $[K]$  évaluée avec toutes les variables aléatoires  $a_e$  prises égales à leurs valeurs moyennes.

$[K_i^I]$  est la fluctuation au premier ordre de la matrice de rigidité et qui est définie par :

$$[K_i^I] = \left. \frac{\partial [K]}{\partial \alpha_i} \right|_{\{a\}=\{\bar{a}\}} \quad (3.25)$$

où :  $\{a\}$  est le vecteur contenant toutes les variables aléatoires  $a_e$  et  $\{\bar{a}\}$  le vecteur contenant leurs valeurs moyennes.

$[K_{ij}^{II}]$  est la fluctuation au second ordre définie par :

$$[K_{ij}^{II}] = \left. \frac{\partial^2 [K]}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\{a\}=\{\bar{a}\}} \quad (3.26)$$

Par ailleurs, le vecteur des forces nodales extérieures pourrait éventuellement lui aussi être dépendant de variables aléatoires qu'on rajoutera au vecteur  $\{a\}$ . Dans ce cas, ce vecteur force  $\{p\}$  sera décomposé à son tour de la même manière que la matrice de rigidité :

$$\{p\} = \{p^0\} + \sum_{i=1}^N \{p_i^I\} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{p_{ij}^{II}\} a_i a_j + \dots \quad (3.27)$$

En vertu de l'équation (3.20), il est clair que le vecteur des déplacements nodaux sera dépendant des variables aléatoires  $a_i$  où  $i=1, \dots, N$ . Considérons donc son développement en série de Taylor autour des valeurs moyennes  $\bar{a}_i$  :

$$\{U\} = \{U^0\} + \sum_{i=1}^N \{U_i^I\} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_{ij}^{II}\} a_i a_j + \dots \quad (3.28)$$

En remplaçant les expressions (3.24), (3.27) et (3.28) dans l'équation (3.20), nous aurons le système d'équations récursives suivant :

$$\{U^0\} = [K^0]^{-1} \{p^0\} \quad (3.29)$$

$$\{U_i^I\} = [K^0]^{-1} (\{p_i^I\} - [K_i^I] \{U^0\}) \quad (3.30)$$

$$\{U_{ij}^{II}\} = [K^0]^{-1} (\{p_{ij}^{II}\} - [K_i^I] \{U_j^I\} - [K_j^I] \{U_i^I\} - [K_{ij}^{II}] \{U^0\}) \quad (3.31)$$

Ces dernières équations nous permettent l'établissement des caractéristiques probabilistes de la réponse qui est dans ce cas les déplacements nodaux. En effet, en utilisant les expressions (3.29), (3.30) et (3.31) d'une part et d'autre part l'expression de  $\{U\}$  donnée par l'équation (3.28), l'espérance mathématique des déplacements nodaux est donnée par une approximation au premier ordre :

$$\mathcal{E}^I[\{U\}] = \{U^0\} \quad (3.32)$$

Si l'approximation est tronquée au second ordre nous aurons :

$$\mathcal{E}^{II}[\{U\}] = \{U^0\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_{ij}^{II}\} \mathcal{E}[a_i a_j] \quad (3.33)$$

Où l'espérance  $\mathcal{E}[a_i a_j]$  est obtenue à partir de la fonction d'autocorrelation du champ aléatoire  $a(x)$ .

En ce qui concerne la matrice de covariance du vecteur des déplacements nodaux défini par :

$$\text{cov}[\{U\}, \{U\}] = \mathcal{E} \left[ (\{U\} - \mathcal{E}[\{U\}])(\{U\} - \mathcal{E}[\{U\}])^T \right] \quad (3.34)$$

Nous aurons une approximation au premier ordre de la matrice de covariance des déplacements nodaux donnée par l'expression :

$$\text{cov}^I[\{U\}, \{U\}] = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_i^I\} \{U_j^I\}^T \mathcal{E}[a_i a_j] \quad (3.35)$$

Par contre si nous prenons en considération les termes jusqu'au second ordre, nous aurons :

$$\begin{aligned} \text{cov}^{II}[\{U\}, \{U\}] = & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{U_i^I\} \{U_j^I\}^T \mathcal{E}[a_i a_j] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \{U_{ij}^{II}\} \{U_{kl}^{II}\}^T \cdot \\ & (\mathcal{E}[a_i a_l] \mathcal{E}[a_j a_k] + \mathcal{E}[a_i a_k] \mathcal{E}[a_j a_l]) \end{aligned} \quad (3.36)$$

La matrice de covariance et les valeurs moyennes des déplacements, caractérisent ces derniers d'un point de vue probabiliste, au second ordre. Une fois cette caractérisation accomplie, on pourra prétendre à une seconde caractérisation du même ordre des forces internes.

Soit "e" un élément de la structure. Les forces internes  $\{s^e\}$  aux noeuds de celui-ci sont donnés par :

$$\{s^e\} = [\tilde{K}^e] \{\tilde{U}^e\} \quad (3.37)$$

Le tilde signifie que le vecteur ou la matrice est exprimé dans le repère local de l'élément e. Si  $[T^e]$  est la matrice de passage du repère local au repère global, alors l'équation précédente s'écrit sous la forme :

$$\{s^e\} = [\tilde{K}^e] [T^e] \{U^e\} \quad (3.38)$$

La décomposition de la matrice de rigidité élémentaire en série de Taylor autour des valeurs moyennes des  $a_i$ , nous donne au premier ordre :

$$[\tilde{K}^e] = [\tilde{K}_0^e] + \sum_{i=1}^m [\tilde{K}_i^{el}] a_i^e + \dots \quad (3.39)$$

Où m est le nombre de variables aléatoires que contient l'élément e.

Les matrices  $[\tilde{K}_0^e]$  et  $[\tilde{K}_i^{el}]$  sont respectivement les fluctuations d'ordre zéro et d'ordre un de la matrice de rigidité élémentaire.

D'autre part, le vecteur contenant les déplacements nodaux dans le repère global a été décomposé de la même façon dans l'équation (3.28), mais cette fois-ci on ne tiendra compte que des composantes appartenant à l'élément e, nous aurons donc :

$$\{U^e\} = \{U_0^e\} + \sum_{i=1}^N \{U_i^{el}\} a_i + \dots \quad (3.40)$$

$\{U^e\}$ ,  $\{U_0^e\}$  et  $\{U_i^{el}\}$  contiennent chacun un nombre de composantes égal au nombre de degrés de liberté par élément. Tout en sachant que  $N$  est le nombre total des variables aléatoires.

En substituant les équations (3.39) et (3.40) dans l'équation (3.38) on trouve :

$$\begin{aligned} \{s^e\} = & [\tilde{K}_0^e][T^e]\{U_0^e\} + \sum_{i=1}^N [\tilde{K}_0^e][T^e]\{U_i^{el}\}a_i + \sum_{i=1}^m [\tilde{K}_i^{el}][T^e]\{U_0^e\}a_i + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N [\tilde{K}_i^{el}][T^e]\{U_j^{el}\}a_i a_j \end{aligned} \quad (3.41)$$

Cette dernière équation nous permet d'établir une caractérisation au sens probabiliste de la réponse exprimée en termes de forces internes nodales. On peut aisément montrer qu'à partir de l'équation (3.41) nous obtenons l'espérance mathématique des forces internes  $\{s^e\}$  par l'expression suivante :

$$\mathcal{E}\{\{s^e\}\} = [\tilde{K}_0^e][T^e]\{U_0^e\} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N [\tilde{K}_i^{el}][T^e]\{U_j^{el}\}\mathcal{E}\{a_i a_j\} \quad (3.42)$$

A l'aide de cette dernière équation, ainsi que l'expression (3.41), nous pourrions établir la relation donnant la matrice de covariance des forces internes définie par :

$$\text{cov}\{\{s^e\}, \{s^e\}\} = \mathcal{E}\left[\left(\{s^e\} - \mathcal{E}\{\{s^e\}\}\right)\left(\{s^e\} - \mathcal{E}\{\{s^e\}\}\right)^T\right] \quad (3.43)$$

sachant qu'à partir de (3.41) et (3.42) nous aurons :

$$\begin{aligned} \{s^e\} - \mathcal{E}\{\{s^e\}\} = & \sum_{i=1}^N [\tilde{K}_0^e][T^e]\{U_i^{el}\}a_i + \sum_{i=1}^m [\tilde{K}_i^{el}][T^e]\{U_0^e\}a_i + \\ & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N [\tilde{K}_i^{el}][T^e]\{U_j^{el}\}a_i a_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N [\tilde{K}_i^{el}][T^e]\{U_j^{el}\}\mathcal{E}\{a_i a_j\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si nous négligeons tous les termes dont l'ordre est supérieur à deux, nous aurons comme expression de la matrice de covariance, la suivante :

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\{s^e\}, \{s^e\}] &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N [\tilde{K}_0^e \mathbb{I}^{T^e} \{U_i^{e'}\} (\tilde{K}_0^e \mathbb{I}^{T^e} \{U_j^{e'}\})^T \mathcal{E}[a_i a_j] + \\
&\quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m [\tilde{K}_0^e \mathbb{I}^{T^e} \{U_i^{e'}\} (\tilde{K}_j^{e'} \mathbb{I}^{T^e} \{U_0^e\})^T \mathcal{E}[a_i a_j] + \\
&\quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N [\tilde{K}_i^{e'} \mathbb{I}^{T^e} \{U_0^e\} (\tilde{K}_0^e \mathbb{I}^{T^e} \{U_j^{e'}\})^T \mathcal{E}[a_i a_j] + \\
&\quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [\tilde{K}_i^{e'} \mathbb{I}^{T^e} \{U_0^e\} (\tilde{K}_j^{e'} \mathbb{I}^{T^e} \{U_0^e\})^T \mathcal{E}[a_i a_j] - \\
&\quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^N [\tilde{K}_i^{e'} \mathbb{I}^{T^e} \{U_j^{e'}\} (\tilde{K}_k^{e'} \mathbb{I}^{T^e} \{U_l^{e'}\})^T \mathcal{E}[a_i a_j] \mathcal{E}[a_k a_l]
\end{aligned}
\tag{3.45}$$

### 3.3.3 Méthode des intégrales pondérées :

Il est important de préciser les mécanismes reliant la variabilité du champ aléatoire décrivant une caractéristique du système, à la variabilité de la réponse. Bien que la méthode des perturbations exposée précédemment nous permettait d'obtenir une caractérisation au second ordre de la réponse aux noeuds, elle n'exposait pas d'une façon claire et surtout directe les relations qui existent entre la variabilité de la réponse et celle qui en était la cause, soit la variabilité de la caractéristique du système.

Par ailleurs, relativement à l'analyse des systèmes à propriétés incertaines, la dynamique des structures a eu le mérite d'être la première à être étendue aux problèmes aléatoires, cette extension a permis l'établissement de toute une théorie appliquée à l'étude des vibrations aléatoires de systèmes déterministes. S'inspirant de cette théorie on aimerait établir des relations similaires à celles qui existent entre l'input et l'output d'un système vibratoire excité aléatoirement, et par là-même pouvoir définir un ensemble de fonctions vues comme des fonctions de transfert et qui caractériseraient un système aléatoire.

Une fois ces fonctions établies, nous serons en mesure de prédire qualitativement et quantitativement l'allure de la variabilité de la réponse et sa variation, en fonction de la variabilité de la caractéristique mécanique aléatoire du système.

Parmi les facteurs déterminants dans le calcul des ouvrages est l'estimation du module d'élasticité du matériau constituant la structure en question. Dans le but d'analyser l'influence de la variabilité d'un éventuel champ stochastique décrivant ce module d'élasticité sur la variabilité de la réponse, nous allons présenter une méthode dite des intégrales pondérées. Celle-ci peut également être mise en oeuvre pour analyser la variabilité d'autres caractéristiques mécaniques ou géométriques.

La principale différence entre la méthode des perturbations et celles des intégrales pondérées réside dans le fait que cette dernière s'appuie sur une approche spectrale (domaine des nombres d'ondes) pour la détermination des statistiques de la réponse qui permettra de caractériser le système par une fonction appelée fonction de variabilité de la réponse, et aboutir à une simple relation entre la variance de la réponse et la densité spectrale du champ définissant la propriété stochastique.

On note par ailleurs, que le passage d'un champ aléatoire à un nombre fini de variables aléatoires représentant le système est réalisé par un développement analytique élégant, sans avoir à imposer une quelconque procédure de discrétisation, comme celles effectuées pour la méthode des perturbations par les valeurs centrales ou les moyennes locales.

Considérons une structure discrétisée en éléments finis, et soit  $e$  un de ces éléments décrit par un champ de module d'élasticité aléatoire. Ce dernier sera modélisé de la même manière que dans (3.21).

Nous aurons d'autre part la matrice de rigidité élémentaire donnée par l'équation (3.14).

En substituant (3.21) dans (3.14) nous pourrions réexprimer celle-ci sous la forme suivante [13,15] :

$$[K^e] = [K_0^e] + \sum_{i=0}^n X_{ei} [\Delta K_i^e] \quad (3.46)$$

Où  $[K_0^e]$  est la matrice de rigidité élémentaire déterminée pour  $a^e(\bar{x}) = \bar{a}^e$ .

Les matrices  $[\Delta K_i^e]$  représentent la contribution de la composante aléatoire à la matrice de rigidité élémentaire.

Et  $X_{ei}$  sont des variables aléatoires, dont le nombre et l'expression dépendent du type d'élément fini utilisé, ainsi que du nombre de degrés de liberté que contient ce dernier. Ces variables s'obtiennent en fait par intégration à travers l'élément  $e$  de la structure du champ

$\alpha^e(\vec{x})$  pondéré par une fonction dépendant des coordonnées spatiales, d'où leur dénomination d'intégrales pondérées. De manière similaire à la méthode des perturbations exposée précédemment, la réponse est approximée par son développement de Taylor au voisinage de ces variables aléatoires, cette démarche nous permet d'établir les relations entre les statistiques de la réponse et celles des variables aléatoires représentant le système en l'occurrence les intégrales pondérées. Cependant, l'introduction de la représentation spectrale des caractéristiques du système nous permet de relier la variabilité de la réponse exprimée par sa variance à la densité spectrale du champ  $\alpha^e(\vec{x})$  par simple intégration du produit de cette dernière par ladite fonction de variabilité de la réponse. La simplicité de cette relation permet une visualisation meilleure de l'influence de la corrélation entre les propriétés du système sur la variabilité de la réponse.

Pour étudier plus en détail avec une meilleure illustration de la méthode des intégrales pondérées, nous allons dans ce qui suit faire la présentation de celle-ci pour les problèmes de flexion des poutres unidimensionnelles, et par la suite pour les problèmes de contraintes et déformations planes.

#### a- Problèmes de flexion des poutres 1-D :

Pour l'élément fini du type poutre (fig. 3.2), soumis aux efforts de flexion, cisaillement et compression.

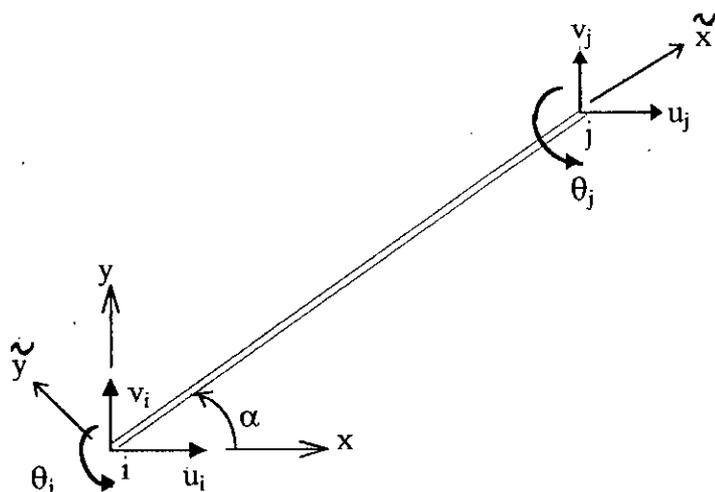


Fig. 3.2

Si le module d'élasticité est supposé avoir une distribution stochastique ayant été modélisée sous la forme (3.21), alors par substitution de celle-ci dans l'équation donnant la matrice de rigidité élémentaire (3.14) nous aurons :

$$[K^e] = [K_0^e] + X_{e0}[\Delta K_0^e] + X_{e1}[\Delta K_1^e] + X_{e2}[\Delta K_2^e] \quad (3.47)$$

Où les intégrales pondérées  $X_{e0}$ ,  $X_{e1}$  et  $X_{e2}$  s'expriment sous les formes suivantes :

$$X_{e0} = \int_0^{Le} a^e(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (3.48 \text{ a})$$

$$X_{e1} = \int_0^{Le} \tilde{x} a^e(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (3.48 \text{ b})$$

$$X_{e2} = \int_0^{Le} \tilde{x}^2 a^e(\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (3.48 \text{ c})$$

Quant aux matrices  $[\Delta K_e^0]$ ,  $[\Delta K_e^1]$  et  $[\Delta K_e^2]$ , elles sont données par :

$$[\Delta K_0^e] = [T^e]^T [\Delta \tilde{K}_0^e] [T^e] \quad (3.49 \text{ a})$$

$$[\Delta K_1^e] = [T^e]^T [\Delta \tilde{K}_1^e] [T^e] \quad (3.49 \text{ b})$$

$$[\Delta K_2^e] = [T^e]^T [\Delta \tilde{K}_2^e] [T^e] \quad (3.49 \text{ c})$$

Où  $[T^e]$  est la matrice de transformation du repère local au repère global. Les matrices  $[\tilde{K}_0^e]$ ,

$[\Delta \tilde{K}_0^e]$ ,  $[\Delta \tilde{K}_1^e]$  et  $[\Delta \tilde{K}_2^e]$  sont représentées en annexe 1.

Il est à noter que  $[K_0^e]$  a comme composantes les valeurs moyennes de  $[K^e]$ , du fait que les variables aléatoires  $X_{ei}$  ont toutes une moyenne nulle.

En suivant la procédure classique d'assemblage en éléments finis, nous assemblerons les parties déterministes et aléatoires de la matrice de rigidité pour obtenir une matrice globale  $[K]$  et aboutir enfin à un système similaire à (3.20). Mais cette matrice dépend des variables aléatoires  $X_{ei}$   $i=0,1,2$  et  $e=1,\dots,Ne$ .

Ne étant le nombre total des éléments.

Notons par  $[K_0]$  et  $\{U_0\}$  les valeurs de  $[K]$  et  $\{U\}$  obtenues pour

$X_{ei} = \bar{X}_{ei}$   $i = 0, \dots, 2$   $e = 1, \dots, Ne$ . Ils sont reliés par l'expression suivante :

$$\{U_0\} = [K_0]^{-1} \{P\} \quad (3.50)$$

Considérons maintenant, l'approximation au 1<sup>er</sup> ordre du développement de Taylor du vecteur  $\{U\}$  des moyennes des variables  $X_{ei}$ , nous aurons :

$$\{U\} \cong \{U_0\} + \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i=0}^2 (X_{ei} - \mathcal{E}[X_{ei}]) \left. \frac{\partial \{U\}}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} \quad (3.51)$$

On peut aisément montrer qu'à partir de l'équation (3.20) nous pouvons avoir la relation suivante :

$$\left. \frac{\partial \{U\}}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} = -[K_0]^{-1} \left. \frac{\partial [K]}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} \{U_0\} \quad (3.52)$$

Substituant l'équation (3.52) dans (3.51) on trouve :

$$\{U\} = \{U_0\} - \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i=0}^2 [K_0]^{-1} \left. \frac{\partial [K]}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} \{U_0\} X_{ei} \quad (3.53)$$

Cette dernière équation nous permet d'obtenir la moyenne et la matrice de covariance des déplacements qui s'expriment sous les formes suivantes :

$$\mathcal{E}\{U\} = \{U_0\} \quad (3.54)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{U, U\} &= \mathcal{E}\left[\left(\{U\} - \{U_0\}\right)\left(\{U\} - \{U_0\}\right)^T\right] = \\ &= \sum_{e_1=1}^{Ne} \sum_{e_2=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e_1 i_1}} \Big|_{\bar{X}_{e_1 i_1}} \{U_0\} \{U_0\}^T \frac{\partial [K]^T}{\partial X_{e_2 i_2}} \Big|_{\bar{X}_{e_2 i_2}} \left([K_0]^{-1}\right)^T \mathcal{E}[X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}] \end{aligned} \quad (3.55)$$

d'après les définitions de  $X_{e_i}$  (eqs. 3.48 a-c) nous aurons :

$$\mathcal{E}[X_{e_1 i_1} X_{e_2 i_2}] = \int_0^{Le_1} \int_0^{Le_2} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \mathcal{E}[a^{e_1}(\xi_1) a^{e_2}(\xi_2)] d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.56)$$

Arrivés à ce point, nous pouvons considerer deux cas de figure concernant le champ aléatoire définissant la propriété mécanique. Le premier, est celui où les éléments de la structure sont caractérisés localement par des champs indépendants les uns des autres. Le second cas concerne les structures dont les éléments sont décrits par un seul et même champ stochastique. En pratique nous pouvons utiliser l'une ou l'autre modélisation selon que les élément appartiennent à un ensemble monolithique ou non. Par exemple, nous pouvons modéliser par un seul champ une structure en béton coulé en une seule étape, comme nous pouvons modéliser par plusieurs champs indépendants, une structure en éléments préfabriqués provenant de différentes usines.

A noter que nous pouvons passer du cas de plusieurs champs indépendants vers un cas d'un seul champ décrivant la structure en reformulant tous les champs élémentaires dans un repère global. Ce qui nous conduit à écrire la relation suivante :

$$\mathcal{E}[a^{e_1}(\xi_1) a^{e_2}(\xi_2)] = \mathcal{E}[a(x_{e_1} + \xi_1) a(x_{e_2} + \xi_2)] \quad (3.57)$$

Où  $a^{e_1}(\xi_1)$ ,  $a^{e_2}(\xi_2)$  sont les champs stochastiques définis sur les éléments  $e_1$  et  $e_2$  respectivement,  $a(x)$  est le champ défini sur toute la structure.

$x_{e_1}$  et  $x_{e_2}$  sont les coordonnées des origines des éléments  $e_1$  et  $e_2$ .

Si  $a(x)$  est un champ homogène de fonction d'autocorrelation  $R_{aa}(\xi)$ , nous aurons :

$$\mathcal{E}[a^{e_1}(\xi_1)a^{e_2}(\xi_2)] = R_{aa}(\Delta_{e_1e_2} + \xi_2 - \xi_1) \quad (3.58)$$

Avec :

$$\Delta_{e_1e_2} = x_{e_2} - x_{e_1} \quad (3.59)$$

En utilisant les équations (3.58), (3.57) et (3.56) nous trouvons :

$$\mathcal{E}[X_{e_1i_1} X_{e_2i_2}] = \int_0^{Le_1} \int_0^{Le_2} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} R_{aa}(\Delta_{e_1e_2} + \xi_2 - \xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.60)$$

Par ailleurs la relation liant la fonction d'autocorrelation à la densité spectrale de puissance du champ  $a(x)$  s'écrit sous la forme :

$$R_{aa}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) e^{i\xi k} dk \quad (3.61)$$

Cette dernière équation ainsi que l'équation (3.60), nous permettent de réexprimer la matrice de covariance sous la forme :

$$\begin{aligned} Cov[\{U\}, \{U\}] &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \sum_{e_1=1}^{Ne} \sum_{e_2=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e_1i_1}} \Big|_{\bar{X}_{e_1i_1}} \{U_0\} \{U_0\}^T \frac{\partial [K]^T}{\partial X_{e_2i_2}} \Big|_{\bar{X}_{e_2i_2}} ([K_0]^{-1})^T \\ &\cdot \int_0^{Le_1} \xi_1^{i_1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \int_0^{Le_2} \xi_2^{i_2} e^{-ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{e_1e_2}} dk \end{aligned} \quad (3.62)$$

Si nous focalisons notre intérêt sur le vecteur contenant les variances des déplacements nodaux, nous aurons :

$$\begin{aligned}
 Var\{\{U\}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \sum_{e_1=1}^{Ne} \sum_{e_2=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag} \left( [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e_1 i_1}} \Big|_{\bar{X}_{e_1 i_1}} \{U_0\} \right) [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e_2 i_2}} \Big|_{\bar{X}_{e_2 i_2}} \{U_0\} \\
 &\cdot \int_0^{L_{e_1}} \xi_1^{i_1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \int_0^{L_{e_2}} \xi_2^{i_2} e^{-ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{e_1 e_2}} dk
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Où  $\text{diag}(\bullet)$  représente une matrice diagonale dont les éléments sont les éléments du vecteur entre parenthèses.

Sous forme plus compacte l'équation (3.63) peut se mettre comme suit :

$$Var\{\{U\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \{V(k)\} dk \tag{3.64}$$

$\{V(k)\}$  est interprétée comme étant l'approximation au premier ordre de la fonction de variabilité de la réponse. Son expression se reformule en utilisant (3.47) comme suit :

$$\begin{aligned}
 \{V(k)\} &= \sum_{e_1=1}^{Ne} \sum_{e_2=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag} \left( [K_0]^{-1} [\Delta K_{i_1}^{e_1}] \{U_0\} \right) [K_0]^{-1} [\Delta K_{i_2}^{e_2}] \{U_0\} \left[ \cos(k\Delta_{e_1 e_2}) \cdot \right. \\
 &\left. (Q_{e_1 i_1} Q_{e_2 i_2} + W_{e_1 i_1} W_{e_2 i_2}) + \sin(k\Delta_{e_1 e_2}) (W_{e_1 i_1} Q_{e_2 i_2} - Q_{e_1 i_1} W_{e_2 i_2}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

Avec :

$$Q_{e0} = \frac{1}{k} \sin kL_e \tag{3.66 a}$$

$$Q_{e1} = \frac{1}{k^2} (\cos kL_e + \sin kL_e - 1) \tag{3.66 b}$$

$$Q_{e2} = \frac{1}{k^3} \left( 2kL_e \cos kL_e + \left( (kL_e)^2 - 2 \right) \sin kL_e \right) \tag{3.66 c}$$

$$W_{e0} = \frac{1}{k} (1 - \cos kL_e) \tag{3.66 d}$$

$$W_{e1} = \frac{1}{k^2} (\sin kL_e - kL_e \cos kL_e) \tag{3.66 e}$$

$$W_{e2} = \frac{1}{k^3} \left( 2kL_e \sin kL_e + \left( 2 - (kL_e)^2 \right) \cos kL_e - 2 \right) \tag{3.66 f}$$

Il est à noter que le vecteur  $\{V(k)\}$  contient un nombre de composantes égal au nombre de degré de liberté, et que celles-ci sont toutes réelles et paires. Par ailleurs, dans le cas où les champs  $a^e(\tilde{x})$  définis de manière locale sur chaque élément sont non corrélés entre eux, i.e. :

$$\begin{cases} \mathcal{E}[a^{e_1}(\tilde{x}_1)a^{e_2}(\tilde{x}_2)] = 0 & \text{si } e_1 \neq e_2 \\ \mathcal{E}[a^{e_1}(\tilde{x}_1)a^{e_2}(\tilde{x}_2)] = R_{aa}(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) & \text{si non} \end{cases} \quad (3.67)$$

Alors le vecteur  $\{V(k)\}$  s'écrira sous la forme suivante :

$$\{V(k)\} = \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}([K_0]^{-1}[\Delta K_{i_1}^e]\{U_0\}) [K_0]^{-1}[\Delta K_{i_2}^e]\{U_0\} (Q_{ei_1}Q_{ei_2} + W_{ei_1}W_{ei_2}) \quad (3.68)$$

L'équation (3.64) nous permet de constater que la **variabilité de la réponse** représentée par le vecteur des variances  $\text{Var}[\{u\}]$  est obtenue par simple intégration du produit de la **densité spectrale du champ aléatoire** par la **fonction de variabilité de la réponse**  $\{V(k)\}$ . Ce qui nous conduit à dire que cette dernière joue en quelque sorte le même rôle que la bien connue fonction de transfert, dans une analyse de vibrations aléatoires.

Par ailleurs le déplacement des noeuds de la structure est accompagnée d'une création de force internes au sein des éléments. Soit "f" un élément de la structure. Le vecteur des forces nodales internes  $\{\tilde{s}^f\}$  est donné par :

$$\{\tilde{s}^f\} = [\tilde{K}^f][T^f]\{U^f\} \quad (3.69)$$

l'équation (3.69) montre que le vecteur des forces internes dépend des variables aléatoires  $X_{ei}$   $e=1, \dots, Ne$  et  $i=0, \dots, 2$ .

Considérons le développement de Taylor au premier ordre du vecteur  $\{\tilde{s}^f\}$  autour des valeurs moyennes des variables  $X_{ei}$  :

$$\{\tilde{s}^f\} \cong \{\tilde{s}_0^f\} + \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i=0}^2 (X_{ei} - \bar{X}_{ei}) \left. \frac{\partial \{\tilde{s}^f\}}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} \quad (3.70)$$

Où  $\{\tilde{s}_0^f\}$  contient les composantes de  $\{\tilde{s}^f\}$  évaluées pour  $X_{ei} = \bar{X}_{ei}$ .

La différentiation de l'équation (3.69) nous permet de réexprimer  $\{\tilde{s}^f\}$  sous la forme :

$$\{\tilde{s}^f\} = \{\tilde{s}_0^f\} + \sum_{i=0}^2 [\Delta \tilde{K}_i^f] [T^f] \{U_0^f\} X_{f_i} + \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i=0}^2 [\tilde{K}_0^f] [T^f] \left. \frac{\partial \{U^f\}}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} X_{ei} \quad (3.71)$$

A partir de cette dernière expression, il est aisé de voir que :

$$\mathcal{E}[\{\tilde{s}^f\}] = \{\tilde{s}_0^f\} \quad (3.72)$$

nous pouvons aussi montrer que la matrice de covariance est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\{\tilde{s}^f\}, \{\tilde{s}^f\}] &= \mathcal{E}[\left( \{\tilde{s}^f\} - \{\tilde{s}_0^f\} \right) \left( \{\tilde{s}^f\} - \{\tilde{s}_0^f\} \right)^T] \\ &= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 [\Delta \tilde{K}_{i_1}^f] [T^f] \{U_0^f\} \{U_0^f\}^T [T^f]^T [\Delta \tilde{K}_{i_2}^f]^T \\ &\quad \int_0^{L_f} \xi_1^{i_1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \int_0^{L_f} \xi_2^{i_2} e^{ik\xi_2} d\xi_2 dk \end{aligned} \quad (3.74 a)$$

$$\sum_2 = - \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 [\Delta \tilde{K}_{i_1}^f] [T^f] \{U_0^f\} \left\{ [K_0]^{-1} \left. \frac{\partial [K]}{\partial X_{ei_2}} \right|_{\bar{X}_{ei_2}} \{U_0\} \right\}_{(f)}^T [T^f]^T [\tilde{K}_0^f]^T$$

$$\int_0^{L_f} \xi_1^{i_1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \int_0^{L_f} \xi_2^{i_2} e^{ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{fe}} dk$$

$$(3.74 b)$$

$$\sum_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 [\tilde{K}_0^f \llbracket T^f \rrbracket \left\{ [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e i_1}} \Big|_{\bar{X}_{e i_1}} \{U_0\} \right\}_{(f)} \{U_0^f\}^T [T^f]^T [\Delta \tilde{K}_2^f]^T \int_0^{Le} \xi_1^{i_1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \int_0^{Lf} \xi_2^{i_2} e^{ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{ef}} dk \quad (3.74 c)$$

$$\sum_4 = -\int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \sum_{e_1=1}^{Ne} \sum_{e_2=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 [\tilde{K}_0^f \llbracket T^f \rrbracket \left\{ [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e_1 i_1}} \Big|_{\bar{X}_{e_1 i_1}} \{U_0\} \right\}_{(f)} \left\{ [K_0]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial X_{e_2 i_2}} \Big|_{\bar{X}_{e_2 i_2}} \{U_0\} \right\}_{(f)}^T [T^f]^T [\tilde{K}_0^f]^T \int_0^{Le_1} \xi_1^{i_1} e^{-ik\xi_1} d\xi_1 \int_0^{Le_2} \xi_2^{i_2} e^{ik\xi_2} d\xi_2 e^{ik\Delta_{e_1 e_2}} dk \quad (3.74 d)$$

Dans les équations (3.74 a-d), le symbole  $\{\bullet\}_{(f)}$  représente un vecteur contenant un nombre de composantes égal au nombre de degrés de liberté par élément, ces dernières sont les composantes du vecteur qui à l'intérieur des accolades correspondant à l'élément f.

Le vecteur des variances de  $\{\tilde{s}^f\}$  constitué des éléments diagonaux de  $Cov[\{\tilde{s}^f\}, \{\tilde{s}^f\}]$ , peut s'écrire de façon similaire aux variances des déplacements sous la forme suivante :

$$Var[\{\tilde{s}^f\}] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k) \{V_s^f(k)\} dk \quad (3.75)$$

En utilisant l'équation (3.47), la fonction de variabilité des forces internes s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\{V_s^f(k)\} &= \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\Delta\tilde{K}_{i_1}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\}\right) \left[\Delta\tilde{K}_{i_2}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\} \left(Q_{f_1} Q_{f_2} + W_{f_1} W_{f_2}\right) - \\
&\sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\Delta\tilde{K}_{i_1}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\}\right) \left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta\tilde{K}_{i_2}^e \right] \left\{U_0^f\right\}\right\}_{(f)} \left[\cos(k\Delta_{fe})\right. \\
&\left.(Q_{f_1} Q_{e_{i_2}} + W_{f_1} W_{e_{i_2}}) + \sin(k\Delta_{fe}) (Q_{e_{i_2}} W_{f_1} - Q_{f_1} W_{e_{i_2}})\right] - \\
&\sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta K_{i_1}^e \right] \left\{U_0\right\}\right\}_{(f)}\right) \left[\Delta\tilde{K}_{i_2}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\} \cdot \\
&\left[\cos(k\Delta_{ef}) (Q_{e_{i_1}} Q_{f_2} + W_{e_{i_1}} W_{f_2}) + \sin(k\Delta_{ef}) (Q_{f_2} W_{e_{i_1}} - Q_{e_{i_1}} W_{f_2})\right] + \\
&\sum_{e_1=1}^{Ne} \sum_{e_2=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta K_{i_1}^{e_1} \right] \left\{U_0\right\}\right\}_{(f)}\right) \\
&\left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta K_{i_2}^{e_2} \right] \left\{U_0\right\}\right\}_{(f)} \left[\cos(k\Delta_{e_1 e_2}) (Q_{e_{i_1}} Q_{e_{i_2}} + W_{e_{i_1}} W_{e_{i_2}}) + \sin(k\Delta_{e_1 e_2}) \cdot \right. \\
&\left. (Q_{e_{i_2}} W_{e_{i_1}} - Q_{e_{i_1}} W_{e_{i_2}})\right] \tag{3.76}
\end{aligned}$$

Où Q et W ont été définis par les équations (3.66 a... f).

A noter que toutes les composantes de  $\{V_s^f(k)\}$  sont réelles et symétriques par rapport à k.

Par ailleurs, pour le cas où l'indépendance entre les champs stochastiques élémentaires est supposée, on trouve une expression de  $\{V_s^f(k)\}$  légèrement différente de (3.76) et qui est donnée par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
\{V_s^f(k)\} &= \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\Delta\tilde{K}_{i_1}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\}\right) \left[\Delta\tilde{K}_{i_2}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\} \left(Q_{f_1} Q_{f_2} + W_{f_1} W_{f_2}\right) - \\
&\sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\Delta\tilde{K}_{i_1}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\}\right) \left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta\tilde{K}_{i_2}^f \right] \left\{U_0^f\right\}\right\}_{(f)} \left(Q_{f_1} Q_{f_2} + W_{f_1} W_{f_2}\right) - \\
&\sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta K_{i_1}^f \right] \left\{U_0\right\}\right\}_{(f)}\right) \left[\Delta\tilde{K}_{i_2}^f \right] T^f \left\{U_0^f\right\} \left(Q_{f_1} Q_{f_2} + W_{f_1} W_{f_2}\right) + \\
&\sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^2 \text{diag}\left(\left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta K_{i_1}^e \right] \left\{U_0\right\}\right\}_{(f)}\right) \left[\tilde{K}_0^f \right] T^f \left\{[K_0]^{-1} \left[\Delta K_{i_2}^e \right] \left\{U_0\right\}\right\}_{(f)} \cdot \\
&\left(Q_{e_{i_1}} Q_{e_{i_2}} + W_{e_{i_1}} W_{e_{i_2}}\right) \tag{3.77}
\end{aligned}$$

**b- Problèmes de contraintes/déformations planes :**

Pour analyser les problèmes de contraintes ou déformations planes, considérons l'élément rectangulaire, bilinéaire montré sur la figure (3.2), où règne un champ aléatoire  $E^e(\tilde{x}, \tilde{y})$  caractérisant le module d'élasticité de l'élément e. Ce dernier est modélisé de façon similaire à l'équation (3.21).

L'utilisation de l'équation (3.14), nous permet de décomposer la matrice de rigidité en ses parties déterministe et stochastique sous la forme suivante :

$$[K^e] = [K_0^e] + X_{e0}[\Delta K_0^e] + X_{e1}[\Delta K_1^e] + X_{e2}[\Delta K_2^e] + X_{e3}[\Delta K_3^e] + X_{e4}[\Delta K_4^e] + X_{e5}[\Delta K_5^e] \quad (3.78)$$

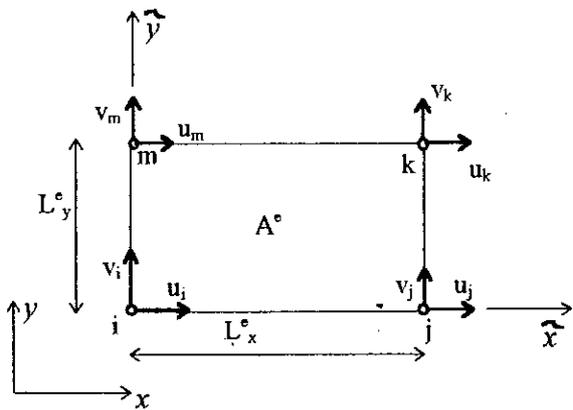


Fig. 3.2

Où les matrices  $[K_0^e]$  et  $[\Delta K_i^e]$   $i=0, \dots, 5$ , sont représentées dans l'annexe 2.

En outre, les six intégrales pondérées  $X_{ei}$   $i=0, \dots, 5$  sont données par les expressions suivantes :

$$X_{e0} = \int_{A^e} a^e(\tilde{x}, \tilde{y}) dA^e \quad (3.79 a)$$

$$X_{e1} = \int_{A^e} \tilde{x} a^e(\tilde{x}, \tilde{y}) dA^e \quad (3.79 b)$$

$$X_{e2} = \int_{A^e} \tilde{y} a^e(\tilde{x}, \tilde{y}) dA^e \quad (3.79 c)$$

$$X_{e3} = \int_{A^e} \tilde{x} \tilde{y} a^e(\tilde{x}, \tilde{y}) dA^e \quad (3.79 d)$$

$$X_{e4} = \int_{A^e} \tilde{x}^2 a^e(\tilde{x}, \tilde{y}) dA^e \quad (3.79 e)$$

$$X_{e5} = \int_{A^e} \tilde{y}^2 a^e(\tilde{x}, \tilde{y}) dA^e \quad (3.79 f)$$

On note que la matrice  $[K^e]$  de l'équation (3.78) est une fonction linéaire des intégrales pondérées  $X_{ei}$ , et en plus  $[K_0^e]$  représentera la matrice des valeurs moyennes de  $[K^e]$  du moment que les  $X_{ei}$  ont des moyennes nulles.

Après assemblage des matrices de rigidité élémentaires nous aurons une matrice globale dépendante d'un nombre d'intégrales pondérées égal à six fois le nombre total de degrés de liberté du système. A partir de l'équation d'équilibre (3.20) on constate que le vecteur global des déplacements nodaux  $\{U\}$  est aussi fonction des variables aléatoires  $X_{ei}$ .

Considérons l'approximation de  $\{U\}$  par le développement de Taylor au premier ordre autour des valeurs moyennes de  $X_{ei}$  :

$$\{U\} \cong \{U_0\} + \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i=0}^5 (X_{ei} - \bar{X}_{ei}) \left. \frac{\partial \{U\}}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} \quad (3.80)$$

En différentiant l'équation (3.20) nous aurons :

$$\{U\} = \{U_0\} - \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{i=0}^5 [K_0]^{-1} \left. \frac{\partial [K]}{\partial X_{ei}} \right|_{\bar{X}_{ei}} \{U_0\} X_{ei} \quad (3.81)$$

ce qui nous permet d'obtenir l'approximation au premier ordre de la moyenne des déplacements nodaux par :

$$\mathcal{E}\{\{U\}\} = \{U_0\} \quad (3.82)$$

On trouve aussi la matrice des covariances exprimée sous la forme suivante :

$$\text{Cov}\{\{U\}, \{U\}\} = \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{f=1}^{Ne} \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 [K_0]^{-1} [\Delta K_i^e] \{U_0\} \{U_0\}^T [\Delta K_j^f]^T ([K_0]^{-1})^T \mathcal{E}\{X_{ei} X_{fj}\} \quad (3.83)$$

Similairement aux problèmes 1-D présentés dans la section précédente, le vecteur  $\text{Var}[\{U\}]$  contenant les variances des déplacements est exprimé comme suit :

$$\text{Var}[\{U\}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{aa}(k_x, k_y) \{V(k_x, k_y)\} dk_x dk_y \quad (3.84)$$

Ceci, en supposant que tous les éléments sont décrits par un même champ stochastique  $a(\tilde{x}, \tilde{y})$  ayant une densité spectrale de puissance  $S_{aa}(k_x, k_y)$ .

En suivant une procédure similaire à celle exposée pour le cas des problèmes de champs unidimensionnels, on trouve :

$$\begin{aligned} \{V(k_x, k_y)\} &= \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{f=1}^{Ne} \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 \text{diag}([K_0]^{-1} [\Delta K_i^e] \{U_0\}) [K_0]^{-1} [\Delta K_j^f] \{U_0\} \cdot \\ & \left[ (Q_{ei} Q_{fj} + W_{ei} W_{fj}) \cos(\Delta x_{fe} k_x + \Delta y_{fe} k_y) - (Q_{fj} W_{ei} - Q_{ei} W_{fj}) \sin(\Delta x_{fe} k_x + \Delta y_{fe} k_y) \right] \end{aligned} \quad (3.85)$$

Où  $\Delta x_{fe}$  et  $\Delta y_{fe}$  sont les distances entre les positions relatives des éléments e et f dans les directions x et y. Elles sont définies par :

$$\Delta x_{fe} = x_0^f - x_0^e \quad (3.86 \text{ a})$$

$$\Delta y_{fe} = y_0^f - y_0^e \quad (3.86 \text{ b})$$

$x_0^e, y_0^e$  et  $x_0^f, y_0^f$  sont les coordonnées des origines des repères locaux des éléments e et f.

Egalement, les  $Q_{ei}$  et les  $W_{ei}$   $i=0, \dots, 5$ , sont donnés par les expressions suivantes :

$$Q_{e0} = \frac{1}{k_x k_y} \left[ -\cos(L_x k_x + L_y k_y) + \cos(L_x k_x) + \cos(L_y k_y) - 1 \right] \quad (3.87 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} Q_{e1} &= \frac{1}{k_x^2 k_y} \left[ \sin(L_x k_x + L_y k_y) - L_x k_x \cos(L_x k_x + L_y k_y) - \sin(L_x k_x) - \right. \\ & \left. \sin(L_y k_y) + L_x k_x \cos(L_x k_x) \right] \end{aligned} \quad (3.87 \text{ b})$$

$$Q_{e2} = \frac{1}{k_x k_y^2} \left[ \sin(L_x k_x + L_y k_y) - L_y k_y \sin(L_x k_x + L_y k_y) - \sin(L_x k_x) - \sin(L_y k_y) + L_y k_y \cos(L_y k_y) \right] \quad (3.87 \text{ c})$$

$$Q_{e3} = \frac{1}{k_x^2 k_y} \left[ 1 + (1 - L_x L_y k_x k_y) \cos(L_x k_x + L_y k_y) - \cos(L_x k_x) - \cos(L_y k_y) - L_y k_y \sin(L_y k_y) - L_x k_x \sin(L_x k_x) + (L_x k_x + L_y k_y) \sin(L_x k_x + L_y k_y) \right] \quad (3.87 \text{ d})$$

$$Q_{e4} = \frac{1}{k_x^3 k_y} \left[ 2L_x k_x \sin(L_x k_x + L_y k_y) - (L_x^2 k_x^2 - 2) \cos(L_x k_x + L_y k_y) - 2L_x k_x \sin(L_x k_x) - 2 \cos(L_y k_y) + (L_x^2 k_x^2 - 2) \cos(L_x k_x) + 2 \right] \quad (3.87 \text{ e})$$

$$Q_{e5} = \frac{1}{k_x k_y^3} \left[ 2L_y k_y \sin(L_x k_x + L_y k_y) - (L_y^2 k_y^2 - 2) \cos(L_x k_x + L_y k_y) - 2L_y k_y \sin(L_y k_y) - 2 \cos(L_x k_x) + (L_y^2 k_y^2 - 2) \cos(L_y k_y) + 2 \right] \quad (3.87 \text{ f})$$

$$W_{e0} = \frac{1}{k_x k_y} \left[ \sin(L_x k_x + L_y k_y) - \sin(L_x k_x) - \sin(L_y k_y) \right] \quad (3.88 \text{ a})$$

$$W_{e1} = \frac{1}{k_x^2 k_y} \left[ \cos(L_x k_x + L_y k_y) + L_x k_x \sin(L_x k_x + L_y k_y) - \cos(L_x k_x) - \cos(L_y k_y) - L_x k_x \sin(L_x k_x) + 1 \right] \quad (3.88 \text{ b})$$

$$W_{e2} = \frac{1}{k_x k_y^2} \left[ \cos(L_x k_x + L_y k_y) + L_y k_y \sin(L_x k_x + L_y k_y) - \cos(L_x k_x) - \cos(L_y k_y) - L_y k_y \sin(L_y k_y) + 1 \right] \quad (3.88 \text{ c})$$

$$\begin{aligned} W_{e3} = \frac{1}{k_x^2 k_y^2} & \left[ (L_x L_y k_x k_y - 1) \sin(L_x k_x + L_y k_y) + \sin(L_x k_x) + \sin(L_y k_y) - \right. \\ & \left. L_y k_y \cos(L_y k_y) - L_x k_x \cos(L_x k_x) + (L_x k_x + L_y k_y) \cos(L_x k_x + L_y k_y) \right] \end{aligned} \quad (3.88 d)$$

$$\begin{aligned} W_{e4} = \frac{1}{k_x^3 k_y} & \left[ 2L_x k_x \cos(L_x k_x + L_y k_y) - (L_x^2 k_x^2 - 2) \sin(L_x k_x + L_y k_y) - 2L_x k_x \cos(L_x k_x) + \right. \\ & \left. 2 \sin(L_y k_y) - (L_x^2 k_x^2 - 2) \sin(L_x k_x) \right] \end{aligned} \quad (3.88 e)$$

$$\begin{aligned} W_{e5} = \frac{1}{k_x k_y^3} & \left[ 2L_y k_y \cos(L_x k_x + L_y k_y) - (L_y^2 k_y^2 - 2) \sin(L_x k_x + L_y k_y) - 2L_y k_y \cos(L_y k_y) + \right. \\ & \left. 2 \sin(L_x k_x) - (L_y^2 k_y^2 - 2) \sin(L_y k_y) \right] \end{aligned} \quad (3.88 f)$$

A noter que dans le but de simplifier les formules (3.87 a-f) et (3.88 a-f), nous avons utilisé  $L_x$  et  $L_y$  pour représenter les dimensions de l'élément  $e$  dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

Les composantes du vecteur  $\{V(k_x, k_y)\}$  donné par l'expression (3.85) sont dites fonctions de variabilité de la réponse. Elles sont des fonctions non négatives de  $k_x$  et  $k_y$ . Elles possèdent en plus, la propriété de symétrie suivante:

$$\{V(k_x, k_y)\} = \{V(-k_x, -k_y)\} \quad (3.89)$$

### 3.3.4 Bornes supérieures de la variabilité de la réponse :

Tenant compte des équations (3.64), (3.75) et (3.84), les fonctions de variabilité de la réponse  $\{V\}$  ou  $\{Vs\}$  jouent un rôle similaire à celui de la fonction de transfert complexe dans une analyse de vibrations aléatoires, et par conséquent elles permettent la compréhension des mécanismes sous-jacents contrôlant la variabilité de la réponse d'un système aléatoire. Par exemple, nous pouvons analyser à l'aide de ces fonctions l'importance de la forme de la densité spectrale du champ stochastique  $a(\mathbf{x})$  décrivant la propriété mécanique, ou l'influence de la corrélation de ce dernier sur les variances des forces internes aussi bien que sur les déplacements nodaux.

L'utilité des fonctions de variabilité devient préminente dès lors qu'on sait qu'elle permettent la détermination des bornes supérieures de la variabilité de la réponse, qui seront indépendantes de la forme de la densité spectrale du champ  $a(\mathbf{x})$ , car il est à noter que pour la majorité des problèmes réels, seuls les moments du premier et second ordre peuvent être déterminés de façon relativement précise.

Le nombre de composantes de  $\{V(k)\}$  est égal au nombre de degrés de liberté de la structure, ce qui nous permet de le réécrire sous la forme développée suivante :

$$\{V(k)\}^T = \{V_1(k) \ V_2(k) \ \dots \ V_{Nd}(k)\} \quad (3.90)$$

$N_d$  est le nombre total de degrés de liberté de la structure.

D'autre part, du moment que toutes ces composantes sont paires par rapport à  $k$ , et que  $S_{aa}(k)$  est aussi une fonction paire, nous aurons :

$$Var\{U\} = 2 \int_0^{\infty} S_{aa}(k) \{V(k)\} dk \quad (3.91)$$

À partir de cette dernière équation, on voit clairement que la variance du  $i^{\text{ème}}$  déplacement nodal atteint sa valeur maximale pour une densité spectrale ayant la forme suivante :

$$S_{aa}(k) = \frac{1}{2} \sigma_a^2 \delta(k - k_i^*) \quad 0 \leq k < \infty \quad (3.92)$$

Avec,

$\sigma_a^2$  : variance du champ  $a(\mathbf{x})$

$k_i^*$  : est le nombre d'onde pour lequel  $V_i(k)$  atteint son maximum

$\delta$  : fonction delta de Dirac.

En utilisant les équations (3.92) et (3.91) ainsi que les propriétés de la fonction de Dirac, nous aboutissons à l'expression suivante correspondant au  $i^{\text{ème}}$  noeud :

$$\text{Var}[U_i] \leq \sigma_a^2 V_i(k_i^*) \quad (3.93)$$

Le terme de droite de l'inéquation ci-dessus constitue une borne supérieure de la variance du déplacement au noeud  $i$ .

Par ailleurs on définit un paramètre adimensionnel noté C.O.V[.] et dit coefficient de variation.

Il est donné pour le déplacement nodal par:

$$\text{C.O.V}[U_i] = \frac{\sigma_{U_i}}{|\mathcal{E}[U_i]|} \quad (3.94)$$

La borne supérieure du coefficient de variation est donnée par :

$$\text{Max}(\text{C.O.V}[U_i]) = \sigma_a \frac{\sqrt{V_i(k_i^*)}}{|\mathcal{E}[U_i]|} \quad \text{avec } 1 \leq i \leq Nd \quad (3.95)$$

Ceci pour  $\mathcal{E}[U_i] \neq 0$

A remarquer que les bornes supérieures données par (3.93) et (3.95) sont indépendantes de la densité spectrale du champ  $a(x)$  ou de sa fonction d'autocorrelation, elles dépendent seulement de sa variance  $\sigma_a^2$ .

On trouve de façon similaire que la variance de la  $i^{\text{ème}}$  force interne nodale de l'élément  $f$  est bornée comme suit :

$$\text{Var}[\tilde{s}_i^f] \leq \sigma_a^2 V_{si}^f(k_i^*) \quad (3.96)$$

Où,  $V_{si}^f$  est la fonction de variabilité de la  $i^{\text{ème}}$  force nodale de l'élément  $f$ .

Et,  $k_i^*$  est le nombre d'onde pour lequel  $V_{si}^f$  atteint son maximum absolu.

En ce qui concerne la borne supérieure du coefficient de variabilité de la  $i^{\text{ème}}$  force interne nodale de l'élément  $f$ , nous aurons :

$$\text{Max}(\text{C.O.V}[\tilde{s}_i^f]) = \sigma_a \frac{\sqrt{V_{si}^f(k_i^*)}}{|\mathcal{E}[\tilde{s}_i^f]|} \quad \text{avec } \mathcal{E}[\tilde{s}_i^f] \neq 0 \quad (3.97)$$

A ce stade, il est intéressant de noter que les fonctions de variabilité  $V(k)$  et  $V_s(k)$  tendent vers zéro quand le nombre d'onde  $k$  croît indéfiniment, et que leur maximum absolu a lieu généralement près de l'origine  $k=0$ . [13]

Nous pouvons suivre la même procédure pour le cas bidimensionnel. Le vecteur des fonctions de variabilité  $\{V(k_x, k_y)\}$  contient un nombre de composantes égal au nombre de degrés de liberté  $N_d$ , ce qui nous permet de le décomposer comme suit :

$$\{V(k_x, k_y)\} = \{V_1(k_x, k_y), V_2(k_x, k_y), \dots, V_{N_d}(k_x, k_y)\} \quad (3.98)$$

L'équation (3.84) nous permet de stipuler qu'une des densités spectrales pour lesquelles la variance du  $i^{\text{ème}}$  déplacement nodal atteint son maximum tout en sachant que le moment de second ordre  $\sigma_a^2$  du champ  $a(x)$  est fixe, s'écrit sous la forme :

$$S_{aa}(k_x, k_y) = \sigma_a^2 \delta(k_x - k_{xi}^*) \delta(k_y - k_{yi}^*) \quad \text{avec } -\infty < k_x < \infty \quad \text{et } -\infty < k_y < \infty \quad (3.99)$$

Et nous aurons comme borne supérieure de la variance du  $i^{\text{ème}}$  déplacement nodal :

$$\text{Var}[U_i] \leq \sigma_a^2 V_i(k_{xi}^*, k_{yi}^*) \quad (3.100)$$

Et le C.O.V de  $U_i$  sera borné de la manière suivante:

$$\text{COV}[U_i] \leq \sigma_a \frac{\sqrt{V_i(k_{xi}^*, k_{yi}^*)}}{|\mathcal{E}[U_i]|} \quad (3.101)$$

avec  $\mathcal{E}[U_i] \neq 0$

### 3.4 Méthodes des éléments finis stochastiques basées sur la simulation :

#### 3.4.1 Statistiques de la réponse :

L'analyse de la variabilité de la réponse par simulation se base essentiellement sur la méthode des éléments finis classique d'une part, et d'autre part sur la génération d'un ensemble d'échantillons pour représenter le champ aléatoire. En effet, l'utilisation des méthodes de simulation de champs aléatoires dont la représentation spectrale (éqs. 3.102 ou 3.113) permet

de générer des fonctions échantillons pour décrire la caractéristique aléatoire du système. Ainsi, nous sommes amenés à étudier les réponses d'un nombre de systèmes déterministes égal au nombre de fonctions générées. Ceci est accompli par le biais d'une application itérative de la MEF. La collection de réponse obtenue est soumise à un traitement statistique pour la détermination de sa moyenne et de sa variance.

On note cependant, que généralement une étude de stabilité des statistiques de la réponse est effectuée [14] pour déterminer le nombre optimal d'échantillons à générer.

### **3.4.2 Simulation de champs aléatoires :**

Les techniques de simulation sont d'une utilité considérable pour la résolution des problèmes relevant du domaine du génie civil, ou des autres domaines de l'engineering en général où il est question de modélisation probabiliste. Ceci est dû à l'universalité et la souplesse de ces techniques.

La simulation constitue en fait, la méthode la plus directe pour la détermination des statistiques de la réponse. Ce qui explique la tendance au recours à cette méthode pour la résolution des problèmes complexes qui ne peuvent être traités analytiquement par une quelconque méthode probabiliste à cause de l'inexistence de celle-ci ou de sa lourdeur [43, 61].

Cependant, le degré de précision des statistiques d'ensembles résultant de la simulation, telles que le vecteur des moyennes ou la matrice des covariances, n'est en général satisfaisant que quand la taille de l'échantillon est suffisamment grande. La fluctuation de ces statistiques par rapport à celles préalablement fixées est due à la génération d'un nombre fini de fonctions échantillons du champ aléatoire. Cette fluctuation influe de façon significative sur la stabilité des statistiques des réponses résultantes, surtout si celles-ci sont obtenues à l'aide d'une analyse par éléments finis.

En conséquence de cela, les techniques de simulation nécessitent un effort substantiel de calcul. Ce qui a conduit à développer de nouvelles techniques de simulation, tendant à chaque fois de minimiser la taille de l'échantillon tout en gardant le même degré de précision.

Il est à noter par ailleurs, que la simulation sert souvent à valider les méthodes basées sur les techniques de perturbation.

En général, la simulation par génération de fonctions échantillons d'un champ aléatoire peut être effectuée par l'un des trois moyens suivants :

- 1- Décomposition de la matrice de covariance [59, 47].
- 2- Modèles ARMA (auto-regressive moving-average) [39,43].
- 3- Représentation spectrale [46, 57].

Les méthodes basées sur la décomposition modale (spectrale) ou la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance permettent la génération de fonctions échantillons en des points discrets à partir d'une matrice de covariance prescrite. Du moment que cette dernière est connue, l'homogénéité du champ en question n'est pas une condition nécessaire. Mais en revanche, ces méthodes nécessitent une taille d'échantillons élevée pour la stabilisation des statistiques d'ensemble [59].

La représentation en modèle ARMA des champs aléatoires a attiré une attention considérable quant à son utilisation comme technique de simulation. L'avantage majeur de cette représentation réside dans le fait que l'espace mémoire ainsi que le temps CPU nécessaire pour générer les fonctions échantillons sont diminués substantiellement par rapport aux méthodes de décomposition de la matrice de covariance. Ceci est dû à la forme récursive des équations utilisées pour la représentation des champs et processus aléatoires. Toutefois, un nombre plus élevé d'échantillons est nécessaire pour un même degré de précision [59].

Les méthodes basées sur la représentation spectrale permettent de simuler des champs aléatoires à partir de leurs densités spectrales de puissance. Les fonctions échantillons générées par ces méthodes auront des statistiques relativement précises [59], à cause de la périodicité et l'orthogonalité des fonctions trigonométriques utilisées dans le développement. De plus, la simulation des champs multidimensionnels s'obtient par une extension directe de la méthode de simulation des processus unidimensionnels. Ceci nous a motivé à adopter la représentation spectrale pour générer des échantillons du champ stochastique décrivant le système. Elle sera présentée dans la section suivante.

On note aussi, que l'utilisation de la technique de la transformée de Fourier rapide (FFT) pour le calcul des différentes sommations que comprend cette approche, réduit considérablement le temps CPU nécessaire à la simulation, surtout lorsqu'il s'agit de champs vectoriels multidimensionnels [46].

### 3.4.3 Représentation spectrale d'un champ aléatoire :

#### a- Cas de processus unidimensionnels :

Soit  $a(x)$  un champ stochastique unidimensionnel homogène de moyenne nulle. Il est caractérisé au second ordre par sa densité spectrale  $S_{aa}(k)$ .

Shinozuka et al. [46] ont montré que le champ  $a(x)$  peut être simulé en générant des fonctions échantillons qui le représenteront à partir de l'expression suivante :

$$a^*(x) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \sqrt{2S_{aa}(k_i)\Delta k} \cos(k_i x + \phi_i) \quad (3.102)$$

$$\text{Où: } k_i = i \Delta k \quad (3.103)$$

et le pas  $\Delta k$  est donné par :

$$\Delta k = \frac{k_u}{M} \quad (3.104)$$

$M$  est le nombre d'intervalles à prendre en considération.

$k_u$  est la borne supérieure de troncature des nombres d'onde, au delà de laquelle la densité spectrale est suffisamment petite au sens physique pour être négligée.

$\phi_i$  est un angle de déphasage aléatoire, ayant comme distribution la loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

A noter que les  $\phi_i$  sont indépendants deux à deux.

A partir de (3.102) nous aurons l'espérance mathématique de  $a(x)$  par l'expression :

$$\mathcal{E}[a^*(x)] = \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \sqrt{2S_{aa}(k_i)\Delta k} \mathcal{E}[\cos(k_i x + \phi_i)] \quad (3.105)$$

Sachant que  $\phi_i$  a une distribution uniforme sur  $[0, 2\pi]$  nous aurons :

$$\mathcal{E}[\cos(k_i x + \phi_i)] = 0 \quad (3.106)$$

et par conséquent, nous aboutissons à :

$$\mathcal{E}[a^*(x)] = 0 \quad (3.107)$$

Donc les fonctions générées ont bien une moyenne nulle.

Nous avons d'autre part, la fonction d'autocorrélation du champ  $a(x)$  qui est définie par :

$$R_{a^*a^*}(\xi) = \mathcal{E}[a^*(x)a^*(x+\xi)] \quad (3.108)$$

En substituant l'équation (3.102) dans l'équation (3.108) nous obtenons :

$$R_{a^*a^*}(\xi) = 4 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta k \sqrt{S_{aa}(k_i)S_{aa}(k_j)} \mathcal{E}[\cos(k_i x + \phi_i) \cos(k_j x + k_j \xi + \phi_j)] \quad (3.109)$$

En utilisant les propriétés d'indépendance entre  $\phi_i$  et  $\phi_j$  quand  $i \neq j$ , on trouve :

$$R_{a^*a^*}(\xi) = 2 \sum_{i=1}^M S_{aa}(k_i) \cos(\xi k_i) \Delta k \quad (3.110)$$

A la limite quand  $k_0$  et  $M$  tendent vers l'infini, nous aurons :

$$R_{a^*a^*}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} S_{aa}(k) \cos(\xi k) dk \quad (3.111)$$

Soit  $S_{a^*a^*}(k)$  la densité spectrale de  $a^*(x)$ , qui n'est en fait que la transformée de Fourier de  $R_{a^*a^*}(\xi)$ .

En utilisant les propriétés de symétrie de  $R_{a^*a^*}(\xi)$  et de  $S_{a^*a^*}(k)$ , alors l'équation (3.111) nous permet d'écrire :

$$S_{a^*a^*}(k) = S_{aa}(k) \quad (3.112)$$

Nous constatons que les fonctions échantillons  $a^*(x)$  reproduisent à la limite quand  $M$  et  $k_u$  sont suffisamment grands, la densité spectrale du champ  $a(x)$ .

Nous concluons finalement que faire la collecte d'un grand nombre de fonctions obtenue par l'équation (3.102) nous permet d'avoir une représentation au second ordre du champ  $a(x)$ . Cette représentation serait idéale si les paramètres  $M$  et  $k_u$  ainsi que le nombre d'échantillons augmentaient indéfiniment.

### b- Cas de champs bidimensionnels :

De manière similaire nous pouvons montrer qu'un champ stochastique bidimensionnel de moyenne nulle  $a(x,y)$  peut être simulé au second ordre par la génération de fonctions échantillons  $a^*(x,y)$  de la forme [14, 46] :

$$a^*(x,y) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} \left[ 2Saa(kx_i, ky_j) \Delta k_x \Delta k_y \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \cos(kx_i x + ky_j y + \phi_{ij}^1) \cos(kx_i x - ky_j y + \phi_{ij}^2) \right] \quad (3.113)$$

Où:

$$k_{xi} = i \Delta k_x \quad (3.114 a)$$

$$k_{yj} = j \Delta k_y \quad (3.114 b)$$

Les pas  $\Delta k_x$  et  $\Delta k_y$  dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement sont donnés par :

$$\Delta k_x = \frac{k_{u_x}}{M_x} \quad (3.115 a)$$

$$\Delta k_y = \frac{k_{u_y}}{M_y} \quad (3.115 b)$$

Où  $k_{u_x}$  et  $k_{u_y}$  sont les bornes de troncature des nombres d'onde dans les deux dimensions.

$M_x$  et  $M_y$  sont les nombres d'intervalles de discrétisation dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

$\phi_{ij}^1$  et  $\phi_{ij}^2$  sont des variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément entre 0 et  $2\pi$ .

A noter que pour pouvoir utiliser la relation (3.103) pour simuler un champ 2-D, il faut que celui-ci soit symétrique par rapport au quadrant [46].

### 3.5 Conclusion :

Nous constatons en conclusion de ce chapitre que la résolution des problèmes de systèmes stochastiques en utilisant la méthode des éléments finis, peut être réalisée par différentes approches; chacune d'elles présente des avantages et des inconvénients dont l'illustration pourrait se faire grâce à une investigation paramétrique. (Cf. chapitre suivant)

La technique des perturbation au voisinage des valeurs moyennes des variables aléatoires a été utilisée dans deux procédures différentes de détermination de la variabilité de la réponse à savoir, la méthode des perturbations et la méthode des intégrales pondérées. Ces dernières ont permis la détermination des moyennes et des variances des forces internes et des déplacements nodaux. Nous avons également exposé une des différentes procédures de génération de fonctions échantillons d'un champ aléatoire à incorporer à la méthode des éléments finis afin d'étudier la variabilité de la réponse par simulation.

Nous avons par ailleurs, présenté en extension à la méthode des intégrales pondérées un moyen pour la détermination des bornes supérieures de la variabilité de la réponse. Ceci en raison de leur utilité pratique dans la mesure où elles ne dépendent pas du type (forme) de corrélation du champ stochastique.

## CHAPITRE 4

### **Investigation paramétrique de la variabilité de la réponse des systèmes aléatoires sous l'effet des efforts statiques**

#### **4.1 Introduction :**

Une analyse paramétrique nous permettra d'une part, l'illustration des méthodes exposées au chapitre précédent et d'autre part, l'étude de la variabilité de la réponse due à l'incertitude des caractéristiques du système, ainsi que l'effet de l'intercorrélation entre ces dernières sur les statistiques de la réponse.

Dans ce qui suivra, nous analyserons les problèmes de flexion des poutres, ainsi que les problèmes de contraintes et/ou déformations planes concernant des structures à propriétés mécaniques aléatoires.

Pour des raisons de simplicité, la seule propriété qui sera considérée comme aléatoire sera le module d'élasticité des éléments.

Nous procéderons tout d'abord à l'analyse de la flexion d'une poutre simple en porte à faux. Cette simplicité nous permettra une étude plus détaillée des différentes méthodes exposées. Nous passerons ensuite à l'étude des statistiques de la réponse d'une structure en poteaux-poutres. Cette fois-ci l'accent sera mis sur les résultats et non plus sur les méthodes.

On rappelle que les méthodes associées à la MEF qu'on utilisera seront :

- 1- La méthode des perturbations basée sur les valeurs centrales.
- 2- La méthode des perturbations basée sur les moyennes locales.
- 3- La méthode des intégrales pondérées.
- 4- la simulation.

Nous présenterons aussi les fonctions de variabilité des réponses des systèmes étudiés, pour les deux cas suivants :

- 1- Cas où les différents éléments sont caractérisés par un même champ aléatoire.
- 2- Cas où les éléments sont caractérisés par des champs indépendants.

Une fois obtenues, les fonctions de variabilité nous permettront d'analyser les bornes supérieures de la variabilité des réponses.

Enfin, pour le cas bidimensionnel, nous étudierons les statistiques du tassement d'un massif de sol sous l'effet d'un chargement statique, au sein duquel règne un champ aléatoire 2-D décrivant le module d'élasticité.

Nous analyserons aussi les bornes de la variabilité de la réponse, obtenues par le biais des fonctions de variabilité.

## 4.2 Problèmes à champs unidimensionnels :

### 4.2.1 Exemple 1 : Poutre isostatique

La poutre isostatique étudiée, est encastree à l'une de ses extrémités, tandis que l'autre est laissée libre (Fig. 4.1).

Les charges statiques sont données par :

$$P=1 \text{ N}$$

$$M=1 \text{ N/m}$$

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont :

La longueur :  $L=1 \text{ m}$

L'inertie :  $I=1 \text{ m}^4$

L'aire de la section transversale :  $A=1 \text{ m}^2$

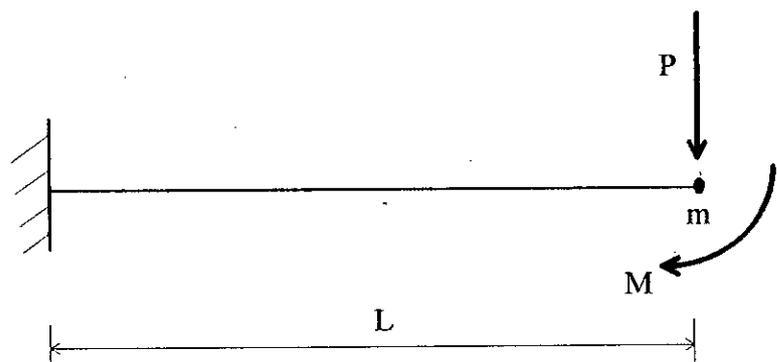


Fig. 4.1

Pour l'analyse de la réponse, nous nous intéresserons aux déplacement et rotation de l'extrémité libre m.

En ce qui concerne les caractéristiques matérielles, elles se résument pour ce type de problème dans le module d'élasticité  $E(x)$ . Celui-ci est défini à l'aide d'un champ aléatoire homogène de moyenne nulle  $a(x)$ , de la manière suivante :

$$E(x) = E_0(1 + a(x)) \quad (4.1)$$

Où  $E_0$  est la valeur moyenne du module d'élasticité, qui est donnée par :  $E_0 = 1 \text{ N/m}^2$

Le champ aléatoire  $a(x)$  est défini au second ordre par une fonction d'autocorrélation du type exponentiel, s'exprimant sous la forme :

$$R_{aa}(\xi) = \sigma_a^2 e^{-\left(\frac{\xi}{d}\right)^2} \quad (4.2)$$

Avec  $\sigma_a$  écart type du champ  $a(x)$ , et  $d$  est dite distance de corrélation. Cette dernière représente une indication sur l'intensité de la corrélation du champ  $a(x)$ .

D'autre part, la fonction de densité spectrale qui correspond à la fonction donnée en (4.2) est la suivante :

$$S_{aa}(k) = \frac{\sigma_a^2 d}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{kd}{2}\right)^2} \quad (4.3)$$

$k$  est le nombre d'onde.

En ce qui concerne la caractérisation des moyennes locales, la fonction de variance associée à la fonction d'autocorrélation donnée ci-dessus est exprimée sous la forme suivante :

$$\gamma(T) = \left(\frac{d}{T}\right)^2 \left[ \sqrt{\pi} \frac{T}{d} \phi\left(\frac{T}{d}\right) + e^{-\left(\frac{T}{d}\right)^2} - 1 \right] \quad (4.4)$$

Où  $\phi(\bullet)$  est la fonction Erreur qui est donnée en fonction de la distribution cumulative  $F_U$  de la loi Normale centrée réduite par l'expression :

$$\phi(u) = 2 \left( F_U(u) - \frac{1}{2} \right) \quad (4.5)$$

Pour une telle expression de la fonction de variance, l'échelle de corrélation définie au chapitre II aura comme valeur :

$$\theta = d\sqrt{\pi} \quad (4.6)$$

La figure (4.4) montre la convergence de l'écart type du déplacement et de la rotation de l'extrémité libre de la poutre. La distance de corrélation était prise égale à 0.2 m.

On note que la simulation donne des écarts types supérieurs à ceux obtenus par les méthodes de perturbation. On remarque aussi que la méthode des intégrales pondérées ainsi que la perturbation basée sur les moyennes locales convergent d'une manière plus rapide que la simulation et la perturbation basée sur les valeurs centrales.

Ce qui peut s'expliquer par le fait que les deux premières méthodes exhibent une meilleure représentation du champ stochastique, que les deux dernières. On constate par ailleurs une stabilisation de toutes les solutions à partir de 5 éléments, ce qui correspond à un rapport  $d/l=1$ , "l" étant la longueur des éléments.

En ce qui concerne les valeurs moyennes, elles sont très rapprochées pour toutes les méthodes, comme le montre la figure (4.5). Elles sont très voisines à la réponse du système quand le champ  $a(x)$  est pris égal à sa moyenne.

Nous avons aussi procédé à l'analyse de la stabilisation des statistiques de la réponse obtenues par simulation, en fonction du nombre d'itérations. Ceci, afin de pouvoir en déterminer un nombre optimal, assurant une précision satisfaisante.

La figure (4.6) montre qu'à partir de 100 itérations, il y a stabilisation sensible du coefficient de variation du déplacement et de la rotation.

On rappelle que le coefficient de variation noté COV est défini comme étant le rapport de écart type à la valeur moyenne.

Les figures (4.7) et (4.8) représentent la variation de l'allure de la fonction d'autocorrélation ainsi que celle de la fonction de densité spectrale, en fonction de la distance de corrélation  $d$ . On constate que quand  $d$  tend vers zéro, ces fonctions tendent vers celles d'un "bruit blanc", et inversement quand  $d$  augmente elles tendent vers celles d'un signal parfaitement corrélé.

La figure (4.9) montre des échantillons obtenus par simulation du champ décrivant le module d'élasticité, ceci pour différentes valeurs de la distance de corrélation. On voit clairement que quand  $d$  passe d'une très petite valeur à une valeur grande relativement à la taille des éléments, la fonction aléatoire caractérisant le module d'élasticité se transforme d'une allure très irrégulière vers une courbe lisse.

Pour la représentation de la variation du COV des déplacements en fonction de la distance de corrélation Fig.(4.10) et Fig.(4.11), Le maillage de la poutre de la figure (4.1) qui a été pris en considération était composé de 5 éléments. Ceci à cause du fait que ce nombre a assuré la convergence dans les figures (4.2) et (4.3) d'une part, et d'autre part c'est un maillage maniable avec aisance pour toutes les méthodes exposées.

Les figures (4.10) et (4.11) montrent que les différentes méthodes basées sur la perturbation sous-estiment le COV de la réponse par rapport à la simulation, cependant toutes les méthodes pressentent la même tendance à la croissance quand  $d$  augmente.

Les courbes tracées en (4.12) et (4.13) montrent qu'au delà d'un COV du module d'élasticité égal à 0.25, une nette différence est aperçue entre les méthodes qui s'appuient sur la perturbation et les résultats de la simulation.

Les fonctions de variabilité du déplacement et de la rotation de l'extrémité libre sont représentées en figures (4.14) et (4.15), sous la forme normalisée (adimensionnelle) suivante :

$$\frac{\sqrt{V_i(k)}}{\bar{u}_i} \sigma_a$$

Avec:

$V_i(k)$  : fonction de variabilité du  $i^{\text{ème}}$  degré de liberté

$\bar{u}_i$  : valeur moyenne du  $i^{\text{ème}}$  degré de liberté

$\sigma_a$  : écart type du champ  $a(x)$

Les fonctions de variabilité présentées en (4.14) et (4.15) sont tracées pour les deux cas de dépendance et d'indépendance des champs aléatoires caractérisant les éléments de la structure. Pour le cas de dépendance, un seul champ caractérise tous les éléments. En revanche, pour le cas d'indépendance les champs définis sur chacun des éléments sont indépendants les uns des autres.

On constate que les courbes concernant le cas de dépendance sont plus irrégulières que celles concernant le cas d'indépendance. On note aussi que les fonctions s'atténuent quand le nombre d'onde augmente indéfiniment.

Les bornes supérieures des COV extraites à partir des courbes (4.14) et (4.15) sont exposées dans le tableau suivant :

Tableau (4.1)

	Cas de dépendance	Cas d'indépendance
Borne supérieure du COV du déplacement	0.1	0.054
Borne supérieure du COV de la rotation	0.1	0.046

Ces bornes ont toutes lieu à l'origine i.e.  $k=0$ . Par ailleurs, on constate qu'effectivement les COV obtenus par les différentes méthodes d'approximation qu'elles soient basées sur la perturbation ou sur la simulation, ne dépassent pas les bornes prédites par les fonctions de variabilité obtenues pour le cas de dépendance des champs. On rappelle que pour toutes les méthodes précitées on avait considéré un seul champ décrivant tous les éléments.

#### 4.2.2 Exemple 2 : Structure Poteaux-Poutres

Le second exemple est celui d'une structure constituée d'un ensemble de poteaux et de poutres Fig.(4.2), ayant les caractéristiques géométriques suivantes :

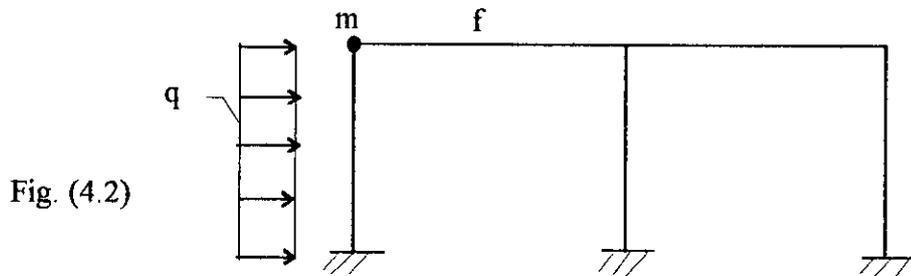
Longueur des éléments :  $l=3$  m

Aire de la section transversale des poteaux :  $A_1=0.09$  m<sup>2</sup>

Aire de la section transversale des poutres :  $A_2=0.15$  m<sup>2</sup>

Inertie des poteaux :  $I_1 = 6.75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

Inertie des poutres :  $I_2 = 3.13 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$



La structure est chargée statiquement avec une charge horizontale  $q$  uniformément distribuée, telle que :

$$q = 1 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

Le module d'élasticité du matériau constituant la structure est défini à l'aide d'un champ aléatoire  $a(\xi)$  caractérisant l'ensemble des éléments.

La fonction d'autocorrelation et la fonction de densité spectrale ont les même forme que celles définies en (4.2) et (4.3).

La valeur moyenne du module d'élasticité est prise égale à :

$$E_0 = 3.3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

L'étude de la variabilité des déplacements horizontal  $u$ , vertical  $v$  et la rotation  $\theta$ , ainsi que les forces internes  $N, T$  et  $M$  qui sont respectivement les efforts normal, tranchant et le moment fléchissant se fera au niveau du noeud  $m$  de l'élément  $f$  indiqués sur la figure (4.2).

L'analyse de l'effet de la variation de la distance de corrélation  $d$  sur les variabilité des déplacements, montre que l'augmentation de  $d$  induit une augmentation de la variabilité des déplacements, et une diminution de celle de la rotation (Fig. (4.16), (4.17) et (4.18)). En d'autres termes plus le champ stochastique décrivant le module d'élasticité est corrélé, plus la capacité de prédiction des déplacements est diminuée et celle de la rotation est augmentée.

D'autre part, on note aussi la sous-estimation du COV des déplacements et la surestimation de celui de la rotation par les méthodes de perturbation par rapport à la simulation.

Les figures (4.19), (4.20) et (4.21) représentent les fonctions de variabilité des déplacements au noeud  $m$  (Fig. 4.2), pour les deux cas de dépendance et d'indépendance des champs aléatoires caractérisant les éléments finis.

On constate que les courbes dans le cas de dépendance des champs, sont plus irrégulières que celles du cas d'indépendance. Les bornes des COV obtenues dans le premier cas sont plus grandes que celles obtenues dans le second.

Le tableau ci-dessous résume les divers bornes de variabilité extraites des courbes (4.19), (4.20) et (4.21).

Tableau (4.2)

	Cas d'indépendance	Cas de dépendance
Borne supérieure du COV du déplacement horizontal	0.076	0.1
Borne supérieure du COV du déplacement vertical	0.039	0.1
Borne supérieure du COV de la rotation	0.31	0.37

On note qu'effectivement les courbes des figures (4.16), (4.17) et (4.18) ne dépassent pas les bornes indiquées dans le tableau ci-dessus pour le cas de dépendance des champs.

On note que toutes les fonctions de variabilité normalisée des déplacements pour le cas de dépendance commencent à  $k=0$  par une valeur égale à 0.1. En outre, on remarque que le COV de la rotation (0.37) est bien plus grand que celui du module d'élasticité (0.1).

Les figures (4.22), (4.23) et (4.24) montrent que les méthodes basées sur la perturbation tendent à surestimer la variabilité des forces internes par rapport à la simulation.

On observe aussi que les variabilités de toutes les forces internes ont tendance à la décroissance quand la distance de corrélation augmente.

Les fonctions de variabilité des forces internes sont montrées sur les figures (4.25), (4.26) et (4.27), pour le cas de dépendance et d'indépendance des champs aléatoires décrivant la

propriété mécanique. Elles présentent toutes une atténuation quand le nombre d'onde augmente. On remarque aussi qu'elles commencent à partir de zéro pour le cas de dépendance et inversement pour le d'indépendance où elles commencent par leurs valeurs maximales.

Le tableau suivant donne les bornes supérieures des COV des forces internes :

Tableau (4.3)

	Cas d'indépendance	Cas de dépendance
Borne supérieure du COV de l'effort normal	0.027	0.049
Borne supérieure du COV de l'effort tranchant	0.094	0.165
Borne supérieure du COV du moment fléchissant	0.14	0.24

Le tableau ci-dessus montre qu'un COV égale à 0.1 pour le module d'élasticité pourrait induire des COV relativement beaucoup plus grand concernant les forces internes.

On remarques aussi que les courbes des figures (4.22),(4.23)et (4.24) ne dépassent pas les bornes des COV exposées au tableau (4.3), ceci pour le cas dépendance entre les champs définis sur les différents éléments.

#### 4.3 Problèmes à champs bidimensionnels :

Pour l'étude de la variabilité de la réponse induite par une variabilité structurelle décrite par un champ bidimensionnel, nous allons analyser le système de la figure (4.3).

Cette modélisation représente un massif de sol soumis à un chargement statique. Le module d'élasticité du sol est caractérisé par un champ aléatoire  $E(x,y)$ , qui est donné sous la forme suivante :

$$E(x,y) = E_0(1 + a(x,y)) \quad (4.7)$$

Où  $a(x,y)$  est un champ stochastique 2-D de moyenne nulle. Sa fonction d'autocorrelation est choisie de la forme exponentielle isotrope, donnée par l'expression suivante :

$$R_{aa}(\xi, \eta) = \sigma_a^2 e^{-\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{d^2}\right)} \quad (4.8)$$

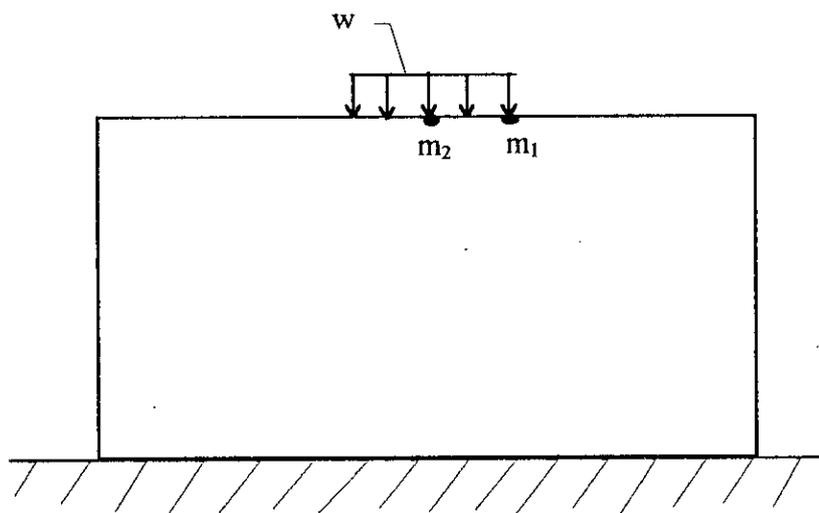


Fig. 4.3

La fonction de densité spectrale de puissance qui correspond à la fonction d'autocorrelation donnée ci-dessus est la suivante :

$$S_{aa}(k_x, k_y) = \sigma_a^2 \frac{d^2}{4\pi} e^{-\frac{d^2}{4}(k_x^2 + k_y^2)} \quad (4.9)$$

On note que les fonctions données en (4.8) et (4.9) sont symétriques par rapport au quadrant.

D'autre part, la fonction de variance  $\gamma_1(T_1, T_2)$  nécessaire pour la détermination des covariances entre les moyennes locales définies sur les différents éléments, est donnée dans notre cas par l'expression :

$$\gamma_1(T_1, T_2) = \gamma(T_1)\gamma(T_2) \quad (4.10)$$

Où  $\gamma(\bullet)$  est donnée par la relation (4.4).

Nous aurons pour cette fonction de variance, la surface caractéristique suivante :

$$\alpha = \pi d^2 \quad (4.11)$$

Le massif de sol est supposé chargé uniformément sur une longueur de 2m avec une charge linéaire  $w=10^4$  N/m

Le module d'élasticité moyen du sol est pris égal à  $10^8$  N/m<sup>2</sup>

La figure (4.28) représente des échantillons simulés de champs aléatoires 2-D, pour différentes valeurs de la distance de corrélation. L'augmentation de  $d$  mène à la transition de la fonction bidimensionnelle décrivant le champ  $a(x,y)$  d'un état fortement non corrélé vers un autre dont la corrélation est sensible.

Les figures (4.29) et (4.30) montrent la variation des COV des déplacements horizontal et vertical des points  $m_1$  et  $m_2$  respectivement (Fig. 4.3). On constate que l'augmentation de la corrélation du champ  $a(x)$  fait croître les COV des déplacements, ce qui signifie une diminution de la capacité de prédiction.

On remarque aussi avec l'augmentation de  $d$  l'éloignement des résultats obtenus par la simulation de ceux obtenus par les méthodes de perturbation. Cela est probablement dû en partie à la difficulté rencontrée dans l'intégration numérique de la densité spectrale qui en augmentant  $d$  se rapproche rapidement de la fonction singulière de Dirac bidimensionnelle.

Les figures (4.31) et (4.32) représentent les fonctions de variabilité normalisée. Celles-ci montrent une atténuation rapide avec l'augmentation du nombre d'onde. Elles exhibent clairement une symétrie par rapport à l'origine ( $k_x=0$  et  $k_y=0$ ).

On constate à partir de ces courbes que le COV du déplacement horizontal pourrait atteindre une valeur plus grande que celui du déplacement vertical. En effet la borne supérieure de variabilité du déplacement horizontal a été trouvée égale à 0.16, cependant celle du déplacement vertical était égale à 0.10.

#### 4.4 Conclusions :

L'étude paramétrique présentée dans ce chapitre avait pour but d'exposer un certain nombre de méthodes d'analyse des systèmes aléatoires. Cette diversité s'explique par le fait qu'à ce jour l'étude de tels systèmes n'est pas encore sortie du stade de la recherche, et qu'aucune des

méthodes n'a prouvé sa suprématie. Il existe toujours un compromis à faire entre l'effort numérique et la précision exigée.

La simulation, qui est théoriquement supposée le moyen le plus direct pour la détermination de la variabilité de la réponse, présente le plus souvent des difficultés d'ordre pratique, on peut citer entre autres, le temps nécessaire pour accomplir les calculs numériques qui est relativement long à cause du grand nombre d'itérations nécessaires pour la convergence. Nous avons aussi la taille de la mémoire qu'il faut garantir pour assurer une bonne représentation spectrale du champ. Ce dernier inconvénient s'accroît pour le cas bidimensionnel.

Par ailleurs la méthode des perturbations au premier ordre est plus pratique lors d'une investigation numérique, mais elle a montré que pour des systèmes présentant une grande variabilité ( $COV > 0.25$ ) elle n'est plus applicable. Dans ce cas il serait préférable de faire usage de la simulation.

En ce qui concerne la taille des éléments finis, il faut qu'elle soit au plus de l'ordre de la distance de corrélation. Afin qu'il y ait un nombre de points suffisant pour la représentation du champ aléatoire. Autrement, mieux vaudrait utiliser les moyennes locales, ou une perturbation à plusieurs points par élément.

A l'instar des méthodes de perturbations, la méthode des intégrales pondérées représente un moyen pour la détermination de la variabilité de la réponse induite par une variabilité du système excité. Elle s'appuie sur une représentation spectrale du champ et non sur une représentation dans le domaine des paramètres (espace physique), comme c'est le cas des perturbations basées sur les valeurs centrales ou les moyennes locales.

Quoique le code numérique correspondant à la méthode des intégrales pondérées présente une certaine lourdeur et exhibe aussi une lenteur importante par rapport à la méthode des perturbations, il n'est exécuté qu'une seule fois pour l'obtention de la fonction de variabilité. Une fois déterminée elle caractérisera le système une fois pour toutes, et il sera par la suite très aisé de déterminer les COV de la réponse pour n'importe quelle densité spectrale décrivant l'aléa du système. On peut même en extraire les bornes supérieures des COV de la réponse indépendamment de l'allure spectrale du champ. Ces bornes sont d'une très grande utilité du moment qu'en pratique, les seuls paramètres du champ stochastique pouvant être mesurés avec une précision acceptable, sont la moyenne et la variance.

En ce qui concerne les résultats, nous avons pu constater que l'augmentation de la corrélation du champ stochastique définissant le module d'élasticité induisait une croissance des COV des déplacements et diminution de ceux des forces internes. Nous avons aussi remarqué que les méthodes basées sur la perturbation avaient une tendance générale à sous-estimer la variabilité des déplacements, et à surestimer celles des forces internes relativement à la simulation. Ce qui nous permet de conclure que ces méthodes sont dans un sens sécuritaire pour les forces internes, contrairement aux déplacements où elles sont non sécuritaire.

Enfin, cette analyse nous a permis de constater que les COV de la réponse pourraient être beaucoup plus grands que le COV du module d'élasticité, et qu'ils peuvent être très différents d'un degré de liberté à un autre, pour une même structure.

**Légende unifiée:**

- 1- Méthode des perturbation basée sur les valeurs centrales
- 2- Méthode des perturbation basée sur les moyennes locales
- 3- Méthodes des intégrales pondérées
- 4- Simulation

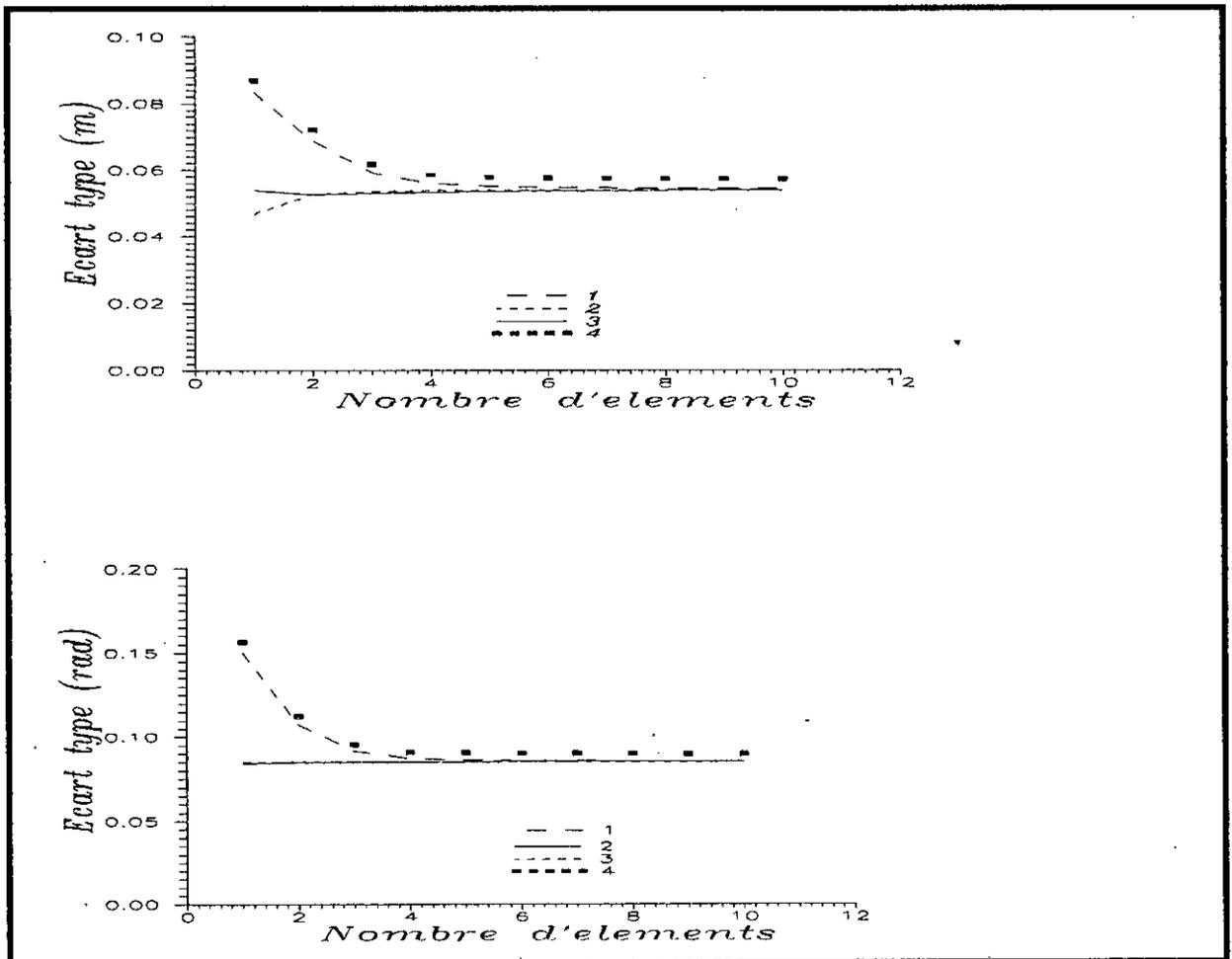


Fig. (4.4) Variation de l'écart type du déplacement et de la rotation en fonction du nombre d'éléments.

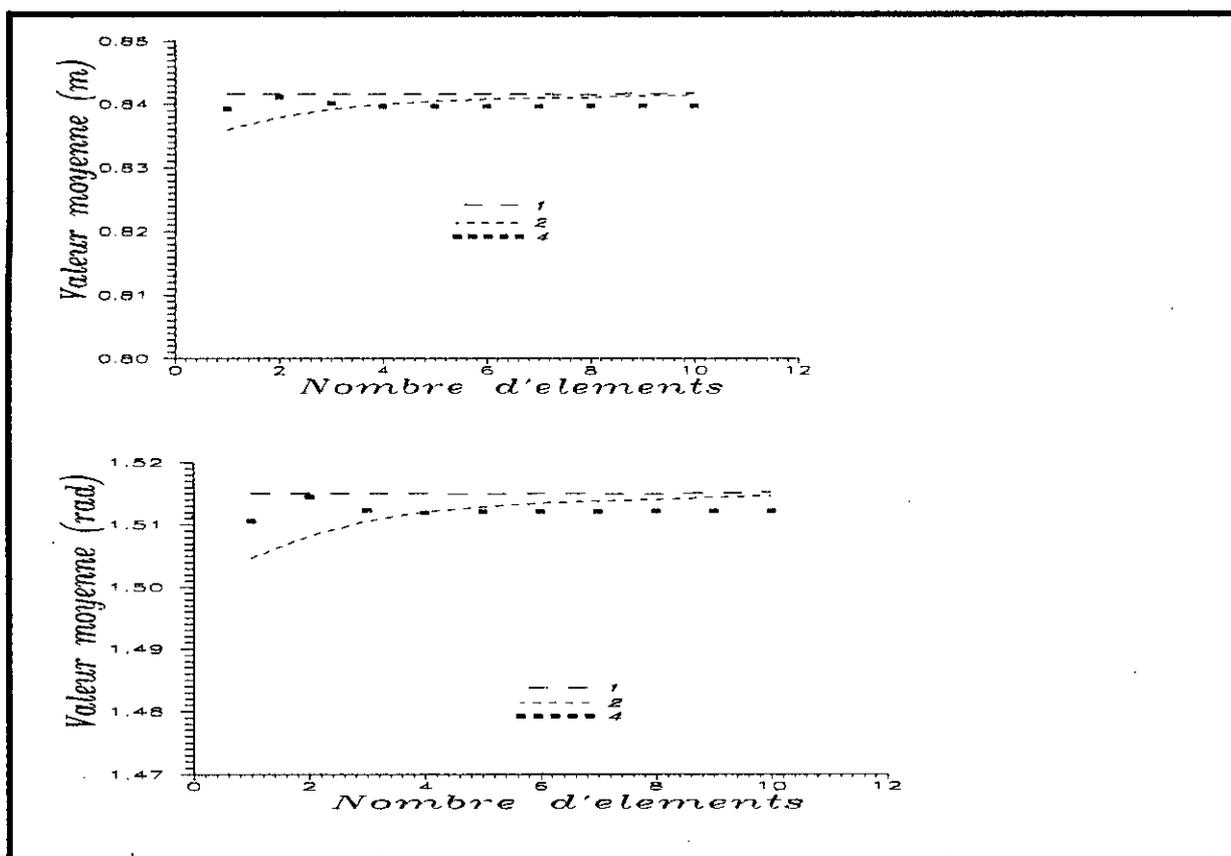


Fig. (4.5) Variation de la moyenne du déplacement et de la rotation en fonction du nombre d'éléments

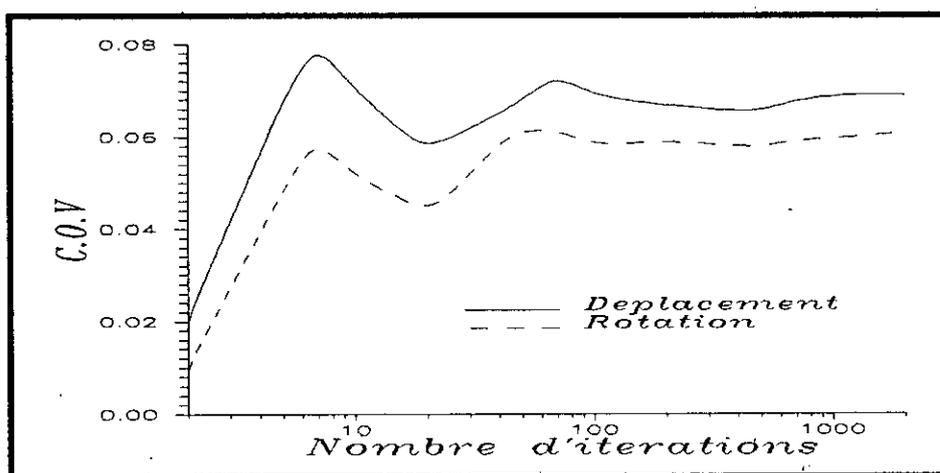


Fig. (4.6) stabilisation des statistiques obtenues par la simulation en fonction du nombre d'itérations

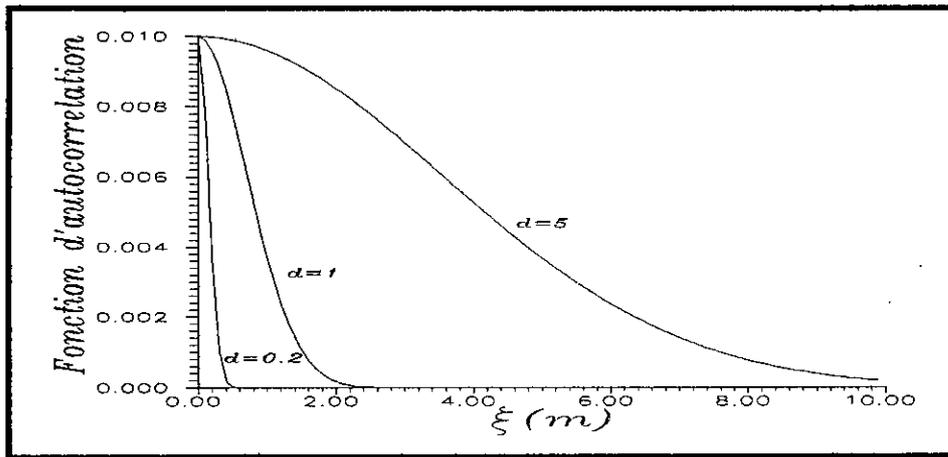


Fig (4.7) Fonctions d'autocorrelation pour différentes valeurs de la distance de corrélation.

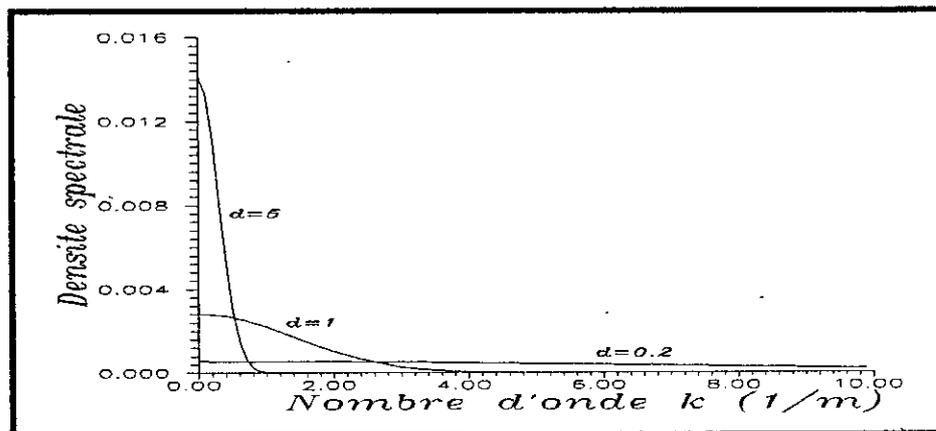
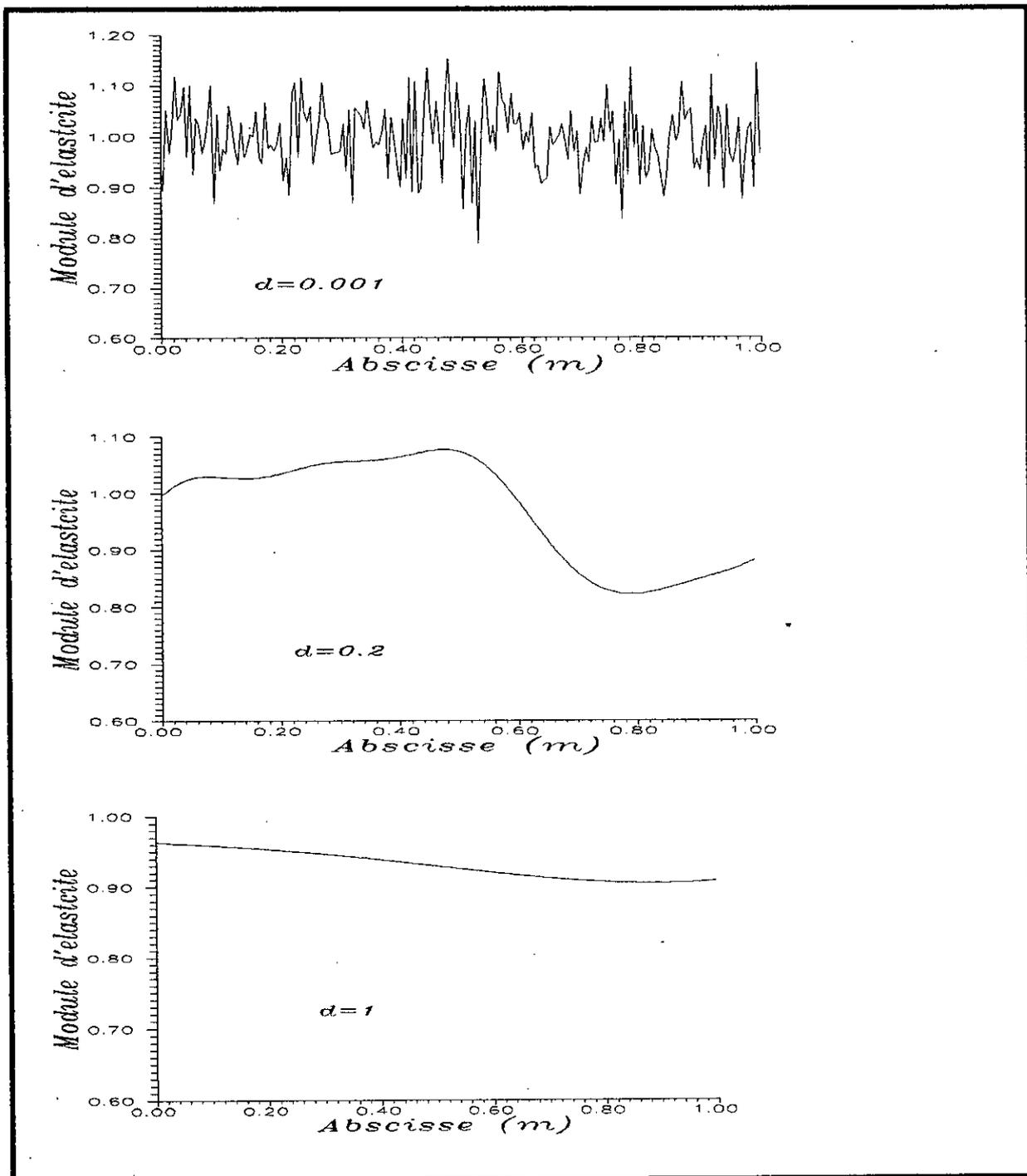


Fig (4.8) Fonctions de densités spectrales pour différentes valeurs de la distance de corrélation.

Fig (4.9) Echantillons simulés du champ aléatoire pour différentes valeurs de  $d$

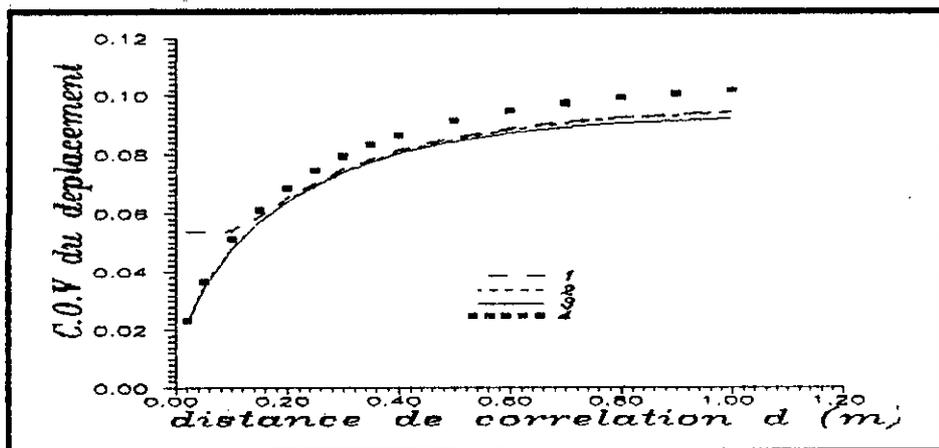


Fig. (4.10) COV du déplacement en fonction de  $d$

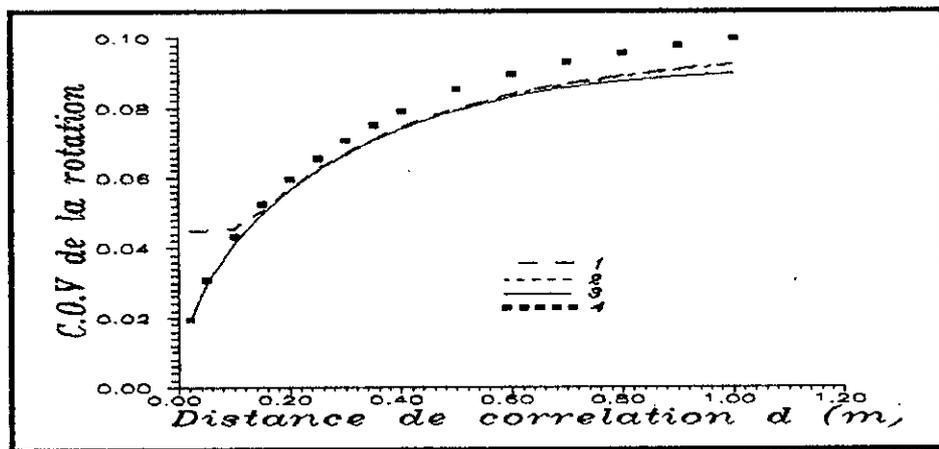


Fig.(4.11) COV de la rotation en fonction de  $d$

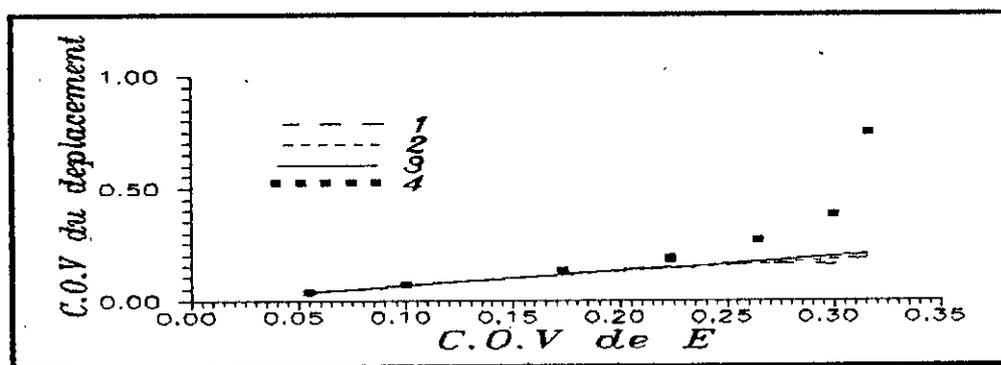


Fig.(4.12) COV du déplacement en fonction du COV du module d'élasticité.

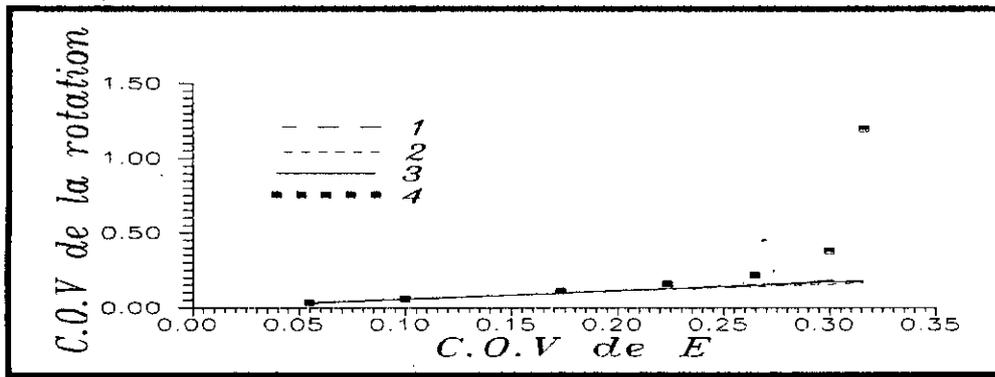


Fig.(4.13) COV de la rotation en fonction du COV du module d'élasticité.

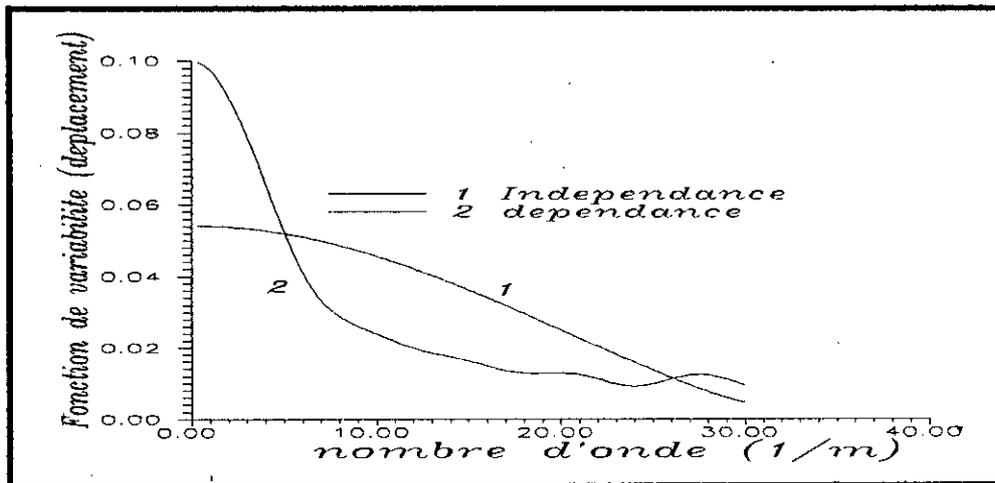


Fig.(4.14) Fonctions de variabilité normalisée du déplacement.

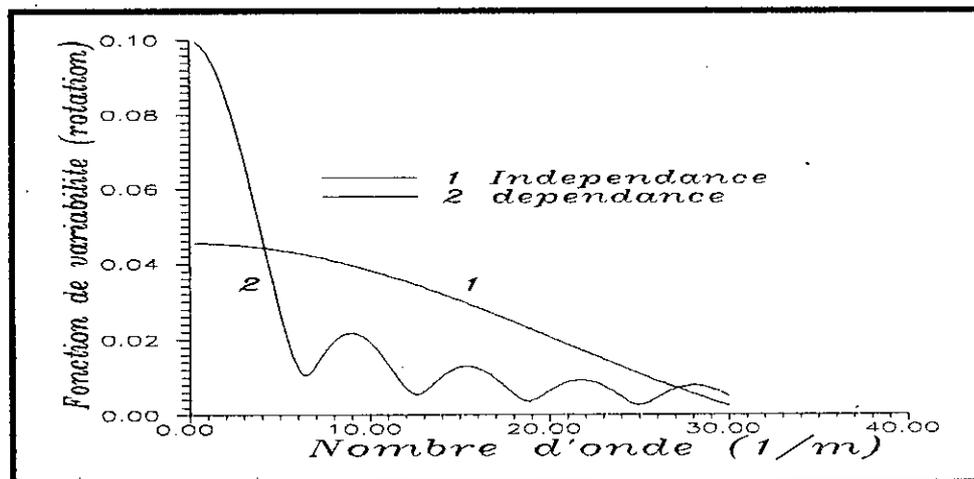


Fig.(4.15) Fonctions de variabilité normalisée de la rotation.

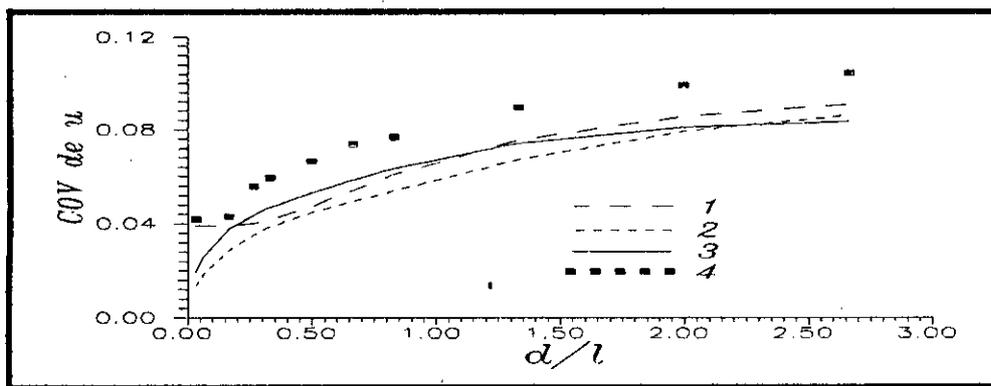


Fig.(4.16) COV du déplacement horizontal en fonction du rapport  $d/l$ .

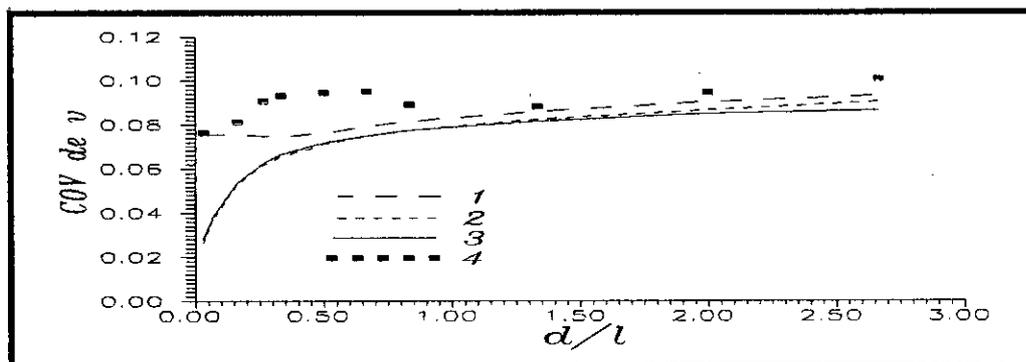


Fig.(4.17) COV du déplacement vertical en fonction du rapport  $d/l$ .

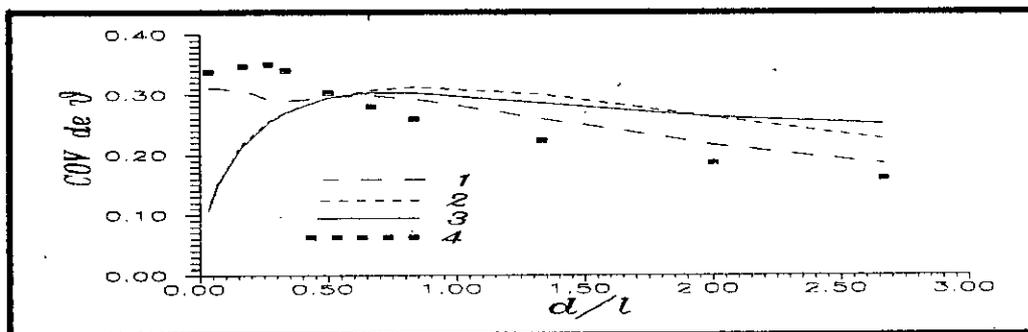


Fig.(4.18) COV de la rotation en fonction du rapport  $d/l$ .

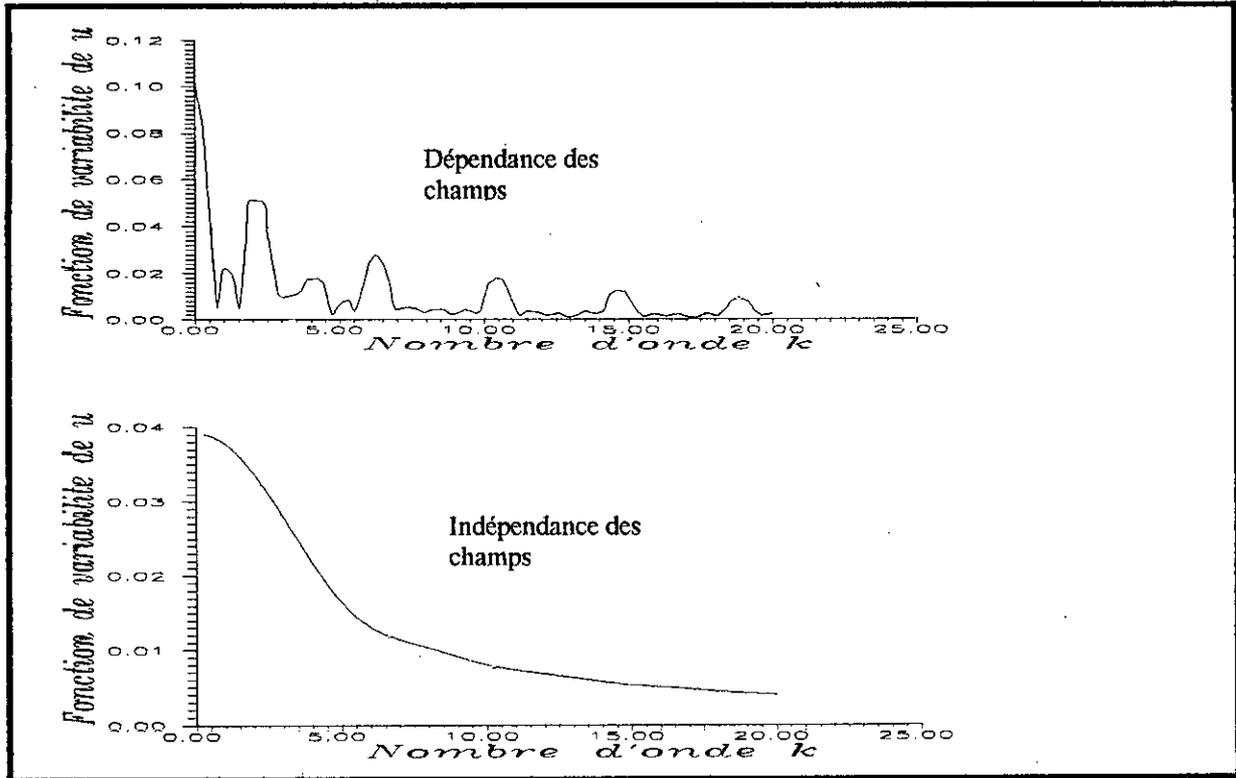


Fig. (4.19) Fonctions de variabilité normalisées du déplacement horizontal.

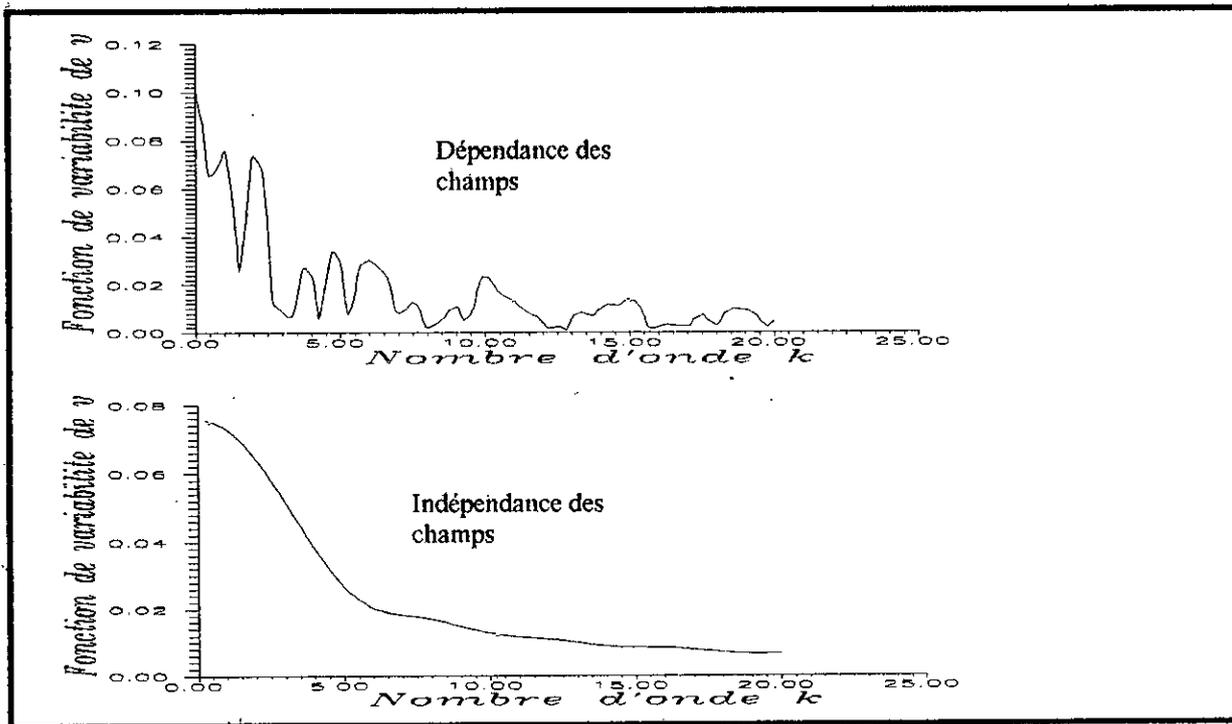


Fig. (4.20) Fonctions de variabilité normalisées du déplacement vertical.

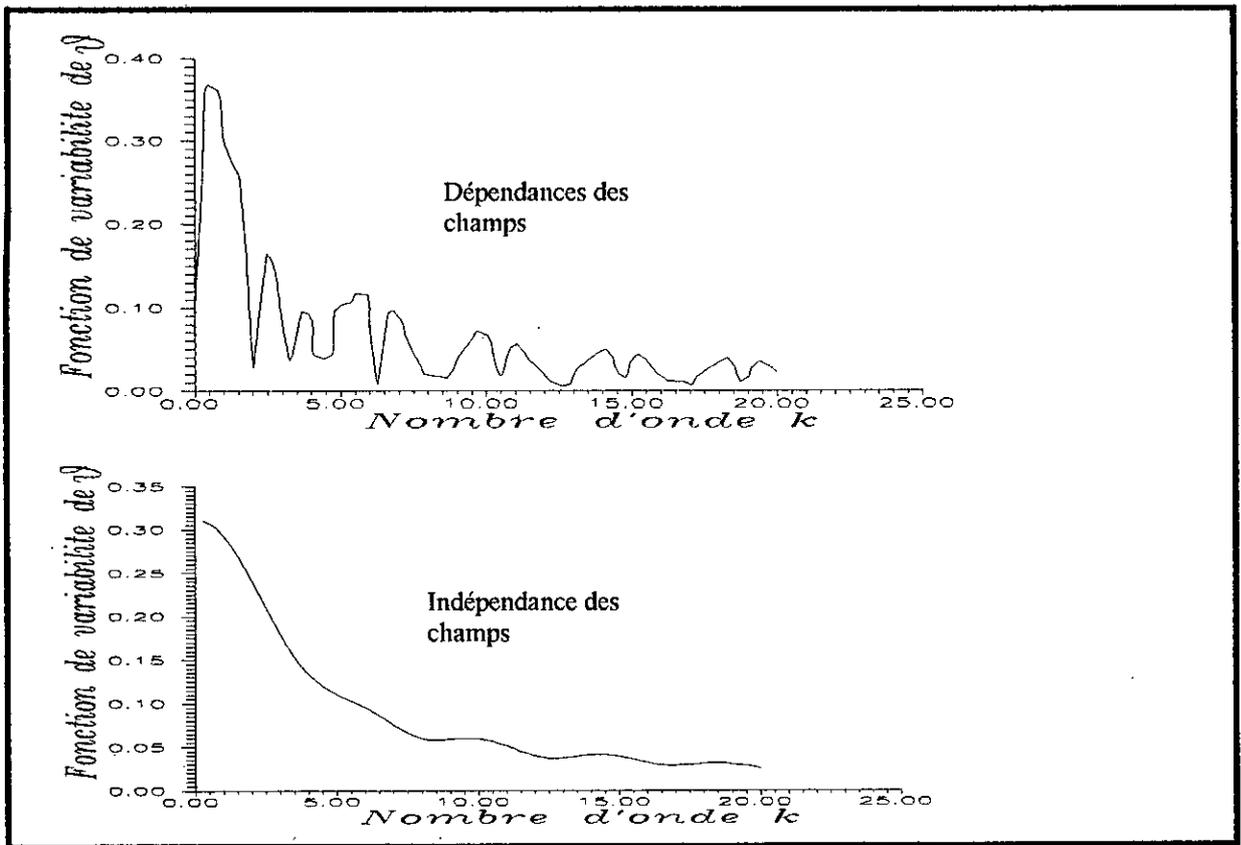


Fig.(4.21) Fonctions de variabilité normalisées de la rotation

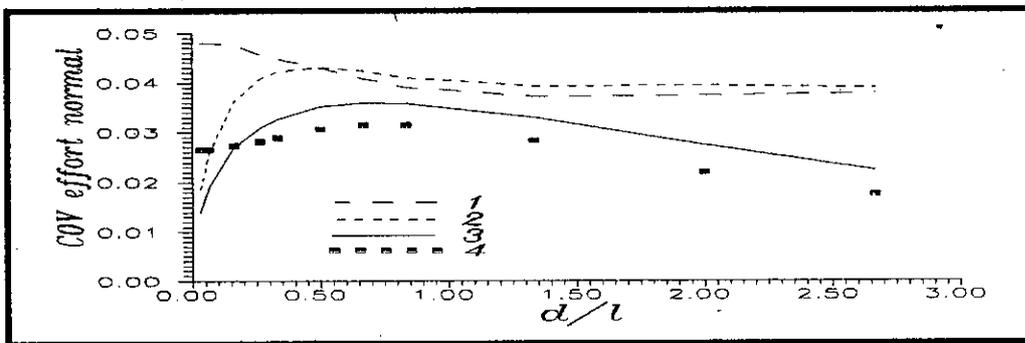


Fig (4.22) COV de l'effort normal en fonction du rapport d/l.

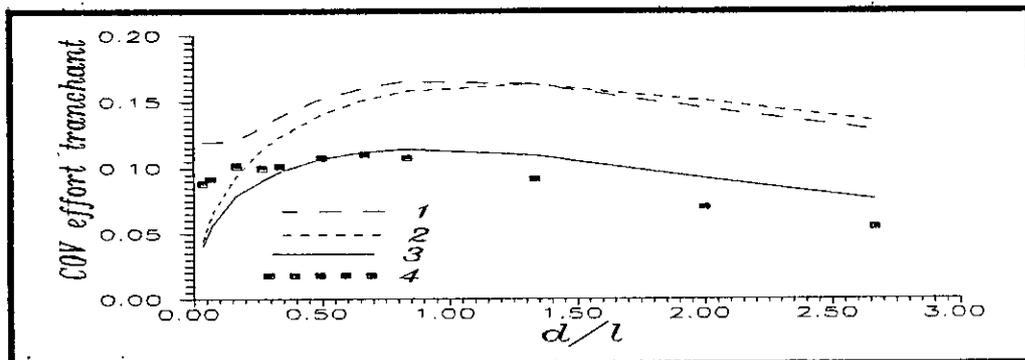


Fig.(4.23) COV de l'effort tranchant en fonction du rapport d/l.

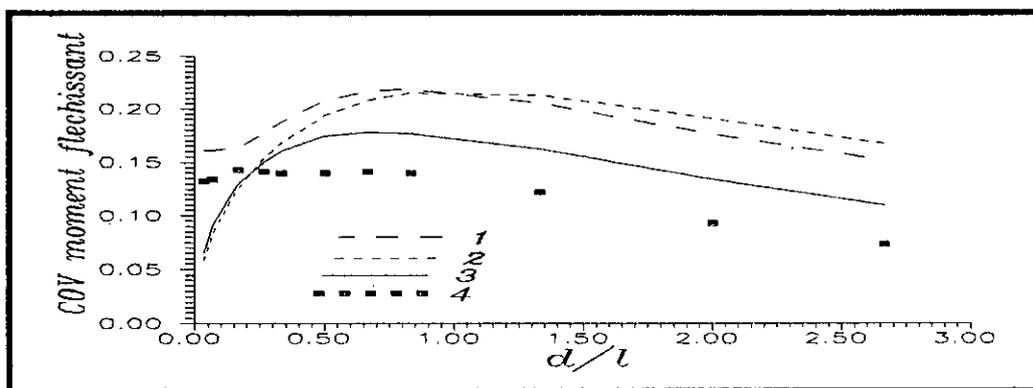


Fig.(4.24) COV du moment fléchissant en fonction du rapport  $d/l$ .

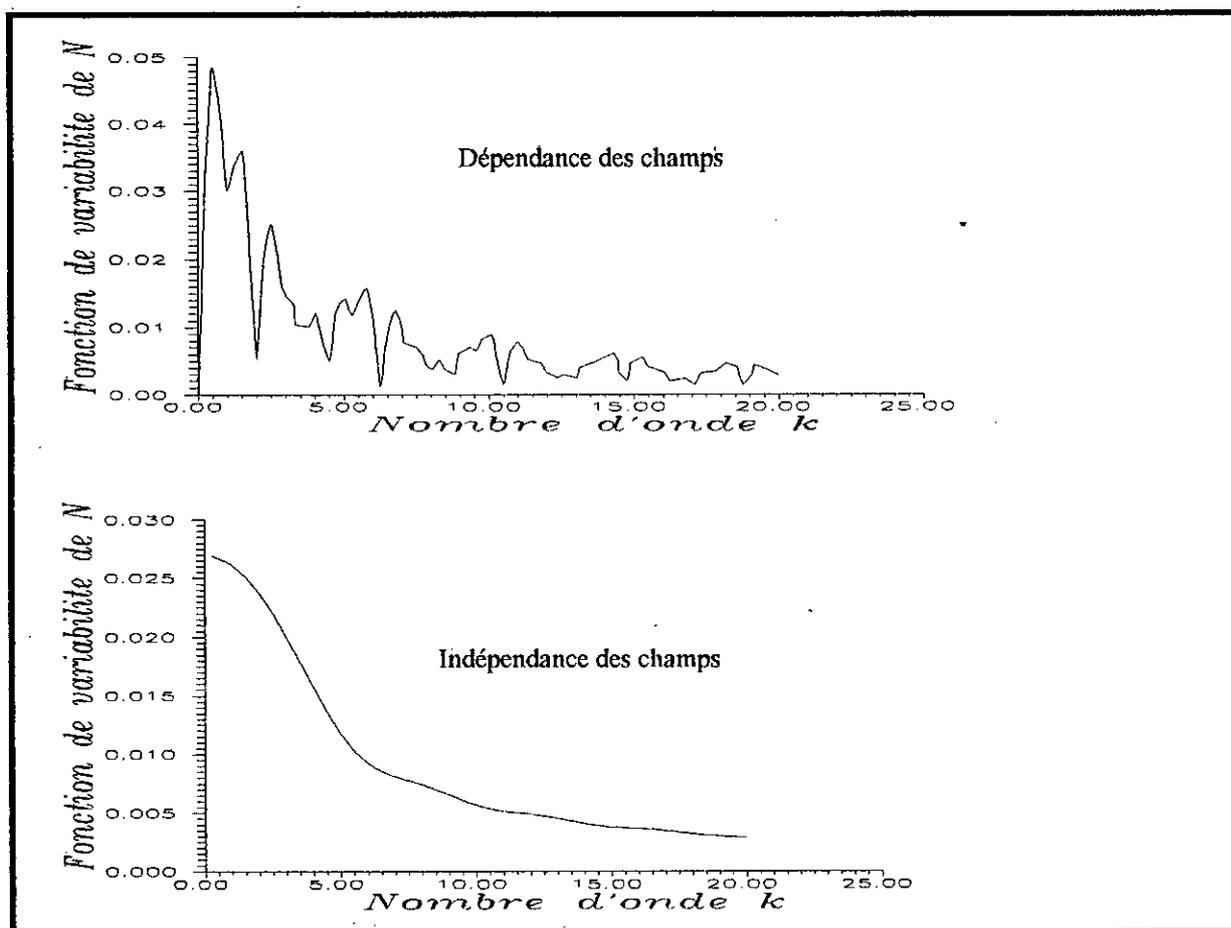


Fig.(4.25) Fonctions de variabilité normalisées de l'effort normal.

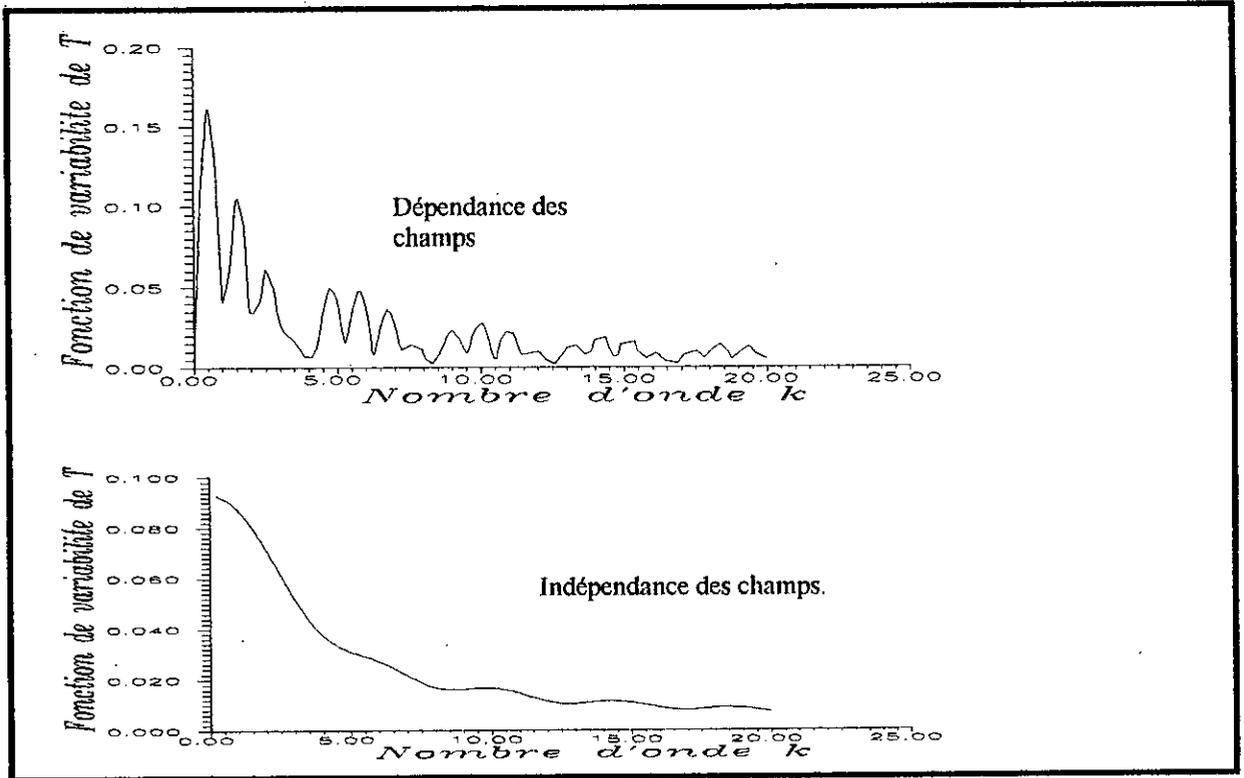


Fig.(4.26) Fonctions de variabilité normalisées de l'effort tranchant.

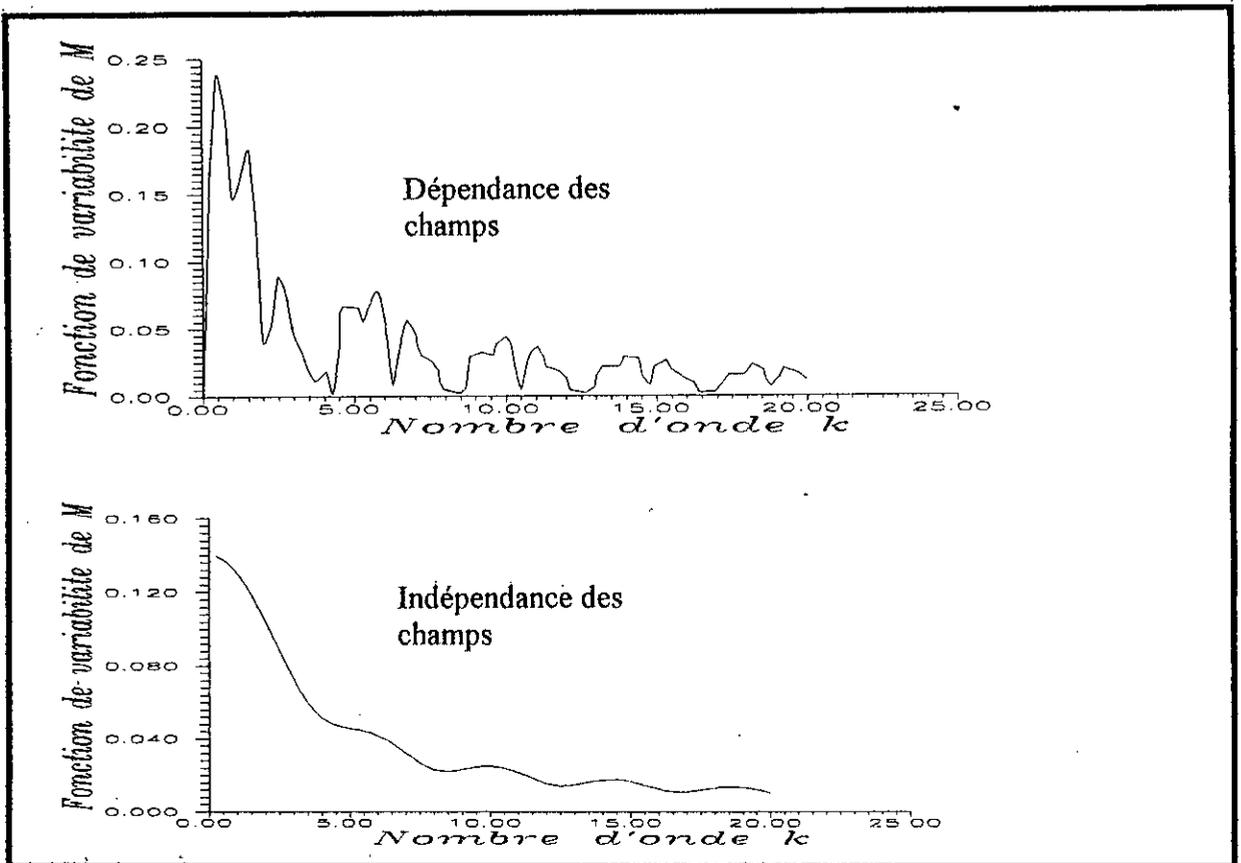


Fig.(4.27) Fonctions de variabilité normalisées du moment fléchissant.

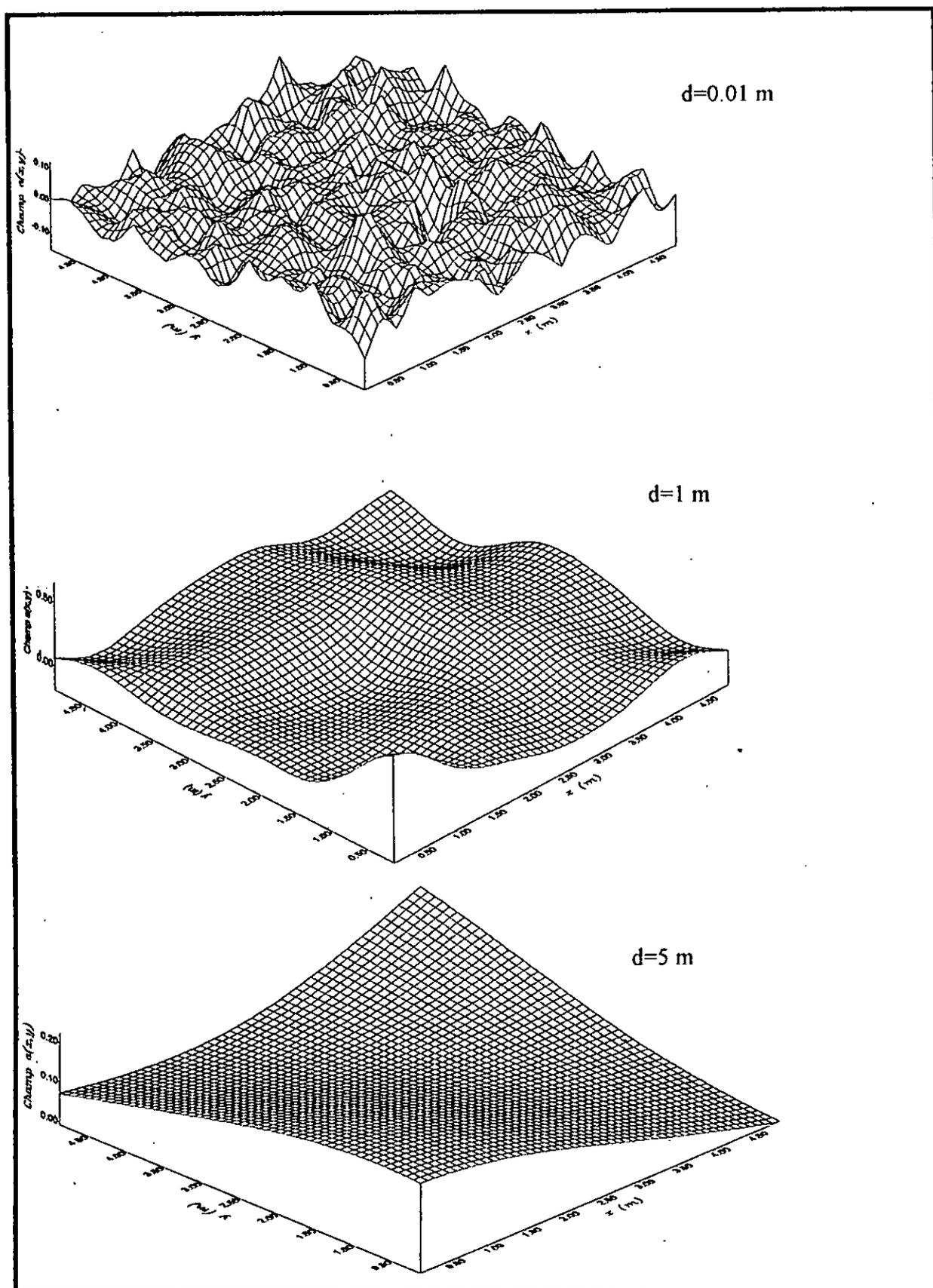


Fig. (4.28) Echantillons simulés du champ  $a(x,y)$  pour plusieurs valeurs de la distance de corrélation.

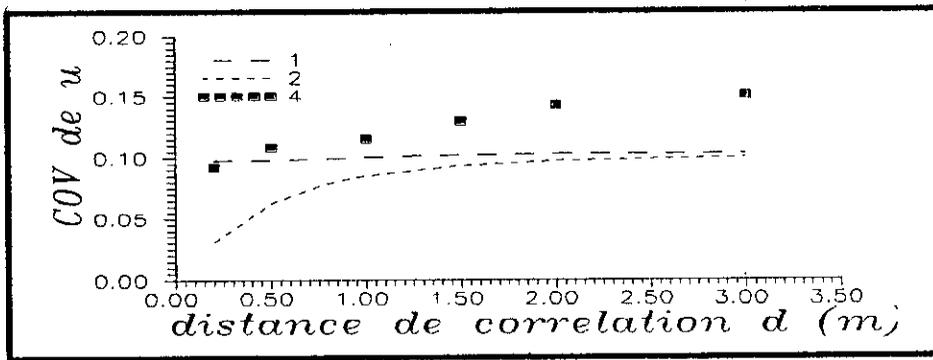


Fig.(4.29) COV du déplacement horizontal en fonction de  $d$ .

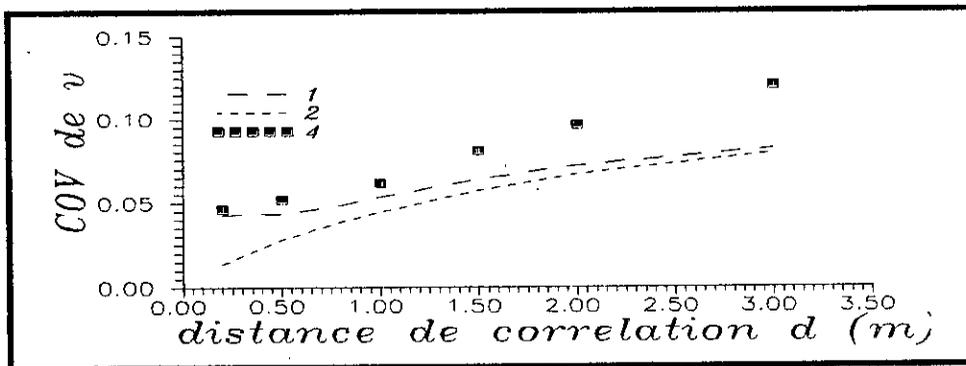


Fig.(4.30) COV du déplacement vertical en fonction de  $d$ .

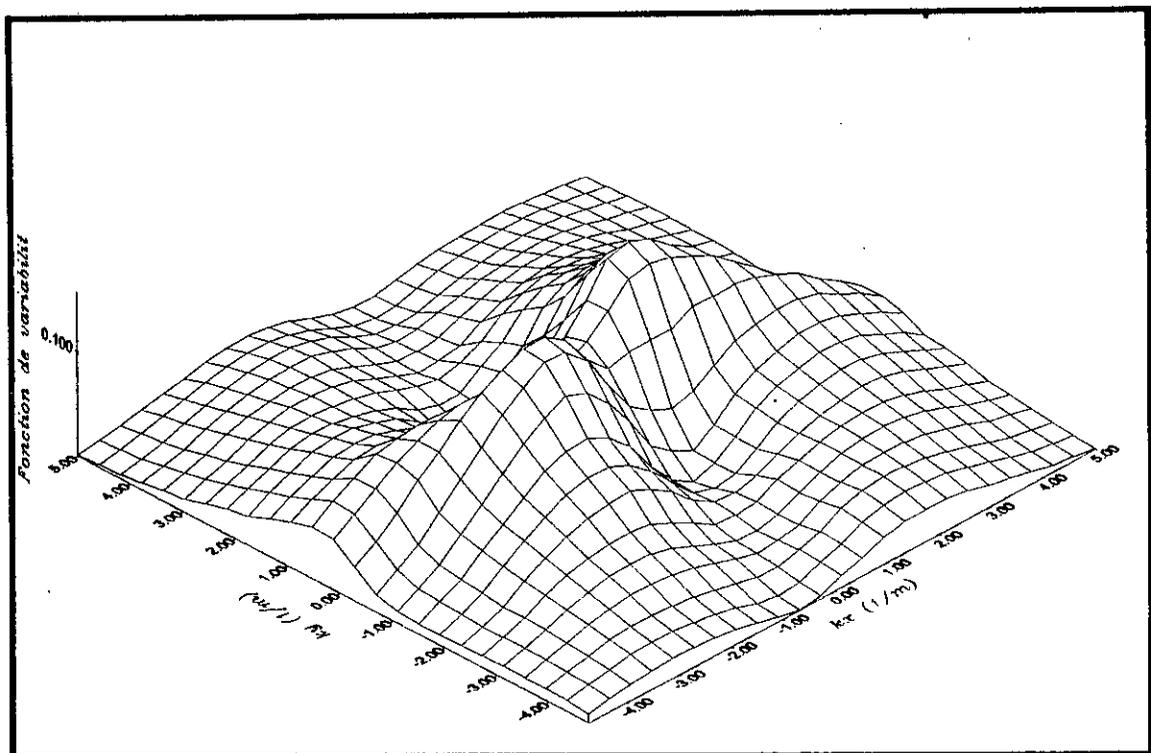


Fig.(4.31) Fonction de variabilité normalisée du déplacement horizontal.

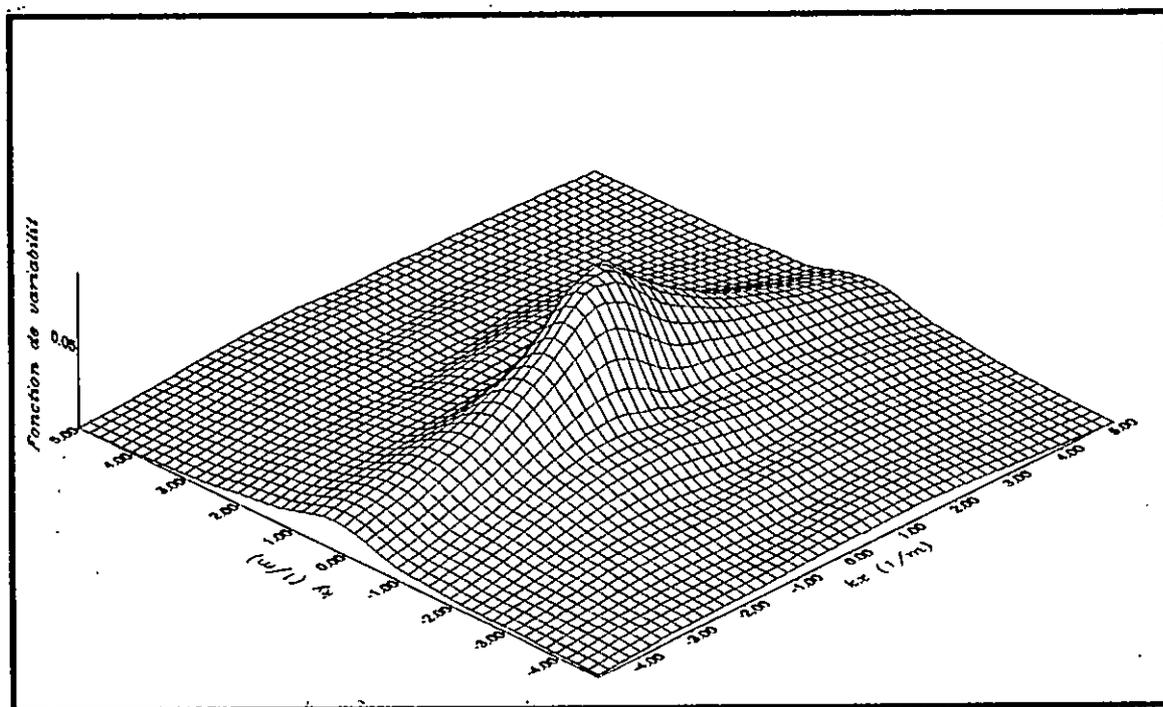


Fig.(4.32) Fonction de variabilité normalisée du déplacement vertical.

## CHAPITRE 5

### Notions sur l'action sismique et les vibrations aléatoires

Les séismes ont été depuis toujours la source de l'un des plus graves désastres frappant l'humanité. Leur apparition brutale et imprévue, la violence des forces mises en jeu, l'énormité des pertes humaines et matérielles ont marqué la mémoire des générations. Ce qui a poussé les gens à chercher les causes de ces séismes et la possibilité de prévoir le moment de leur occurrence ainsi que leur intensité.

En outre, l'immensité et la complexité des structures qui sont réalisées de nos jours, ne font qu'augmenter le besoin et l'intérêt de connaître les mécanismes déclenchant les tremblements de terre, afin de mieux garantir la sécurité de ces ouvrages. Car, l'effondrement de ces derniers pourrait engendrer des crises économiques et sociales très graves.

#### 5.1 Origine des séismes :

Le séisme peut être considéré comme étant un mouvement vibratoire du sol de forte amplitude et de caractère aléatoire, caractérisé par une propagation d'ondes ayant pris naissance à l'intérieur de l'écorce terrestre.

A l'origine, ce phénomène est provoqué par des processus de déformations et ruptures à l'intérieur de la croûte terrestre. Sous l'influence de la terre, la croûte est soumise à des mouvements lents et continus.

Les contraintes qui s'y développent, ainsi que la concentration d'énergie de déformation en des points particuliers conduisent à un niveau critique qui engendre une dislocation. Simultanément, l'énergie de déformation est libérée et les vibrations engendrées se propagent dans toutes les directions, provoquant à la surface un tremblement de terre. La zone de dislocation de la croûte est appelée foyer ou hypocentre.

Les tremblements de terre peuvent être d'origine tectonique, volcanique, ou dus aux effondrements à l'intérieur de la terre. En général, ce sont les séismes tectoniques qui causent le plus de dégâts en se répandant sur d'énormes surfaces, avec une énergie libérée pouvant atteindre  $10^{17}$  à  $10^{18}$  Joules.

Le mouvement tectonique a été pour la première fois cité par Francis Bacon au 17<sup>e</sup> siècle lorsqu'il a observé que les contours des continents pourraient être regroupés pour n'en former qu'un seul. On considère actuellement que la terre est formée de plusieurs couches superposées et qui sont:

- A- La croûte, de quelques km d'épaisseur, plus mince sous les océans qu'au droit des continents.
- B- La lithosphère ayant une épaisseur allant de 70 à 150 km.
- C- L'asthénosphère, de 100 à 350 km d'épaisseur.
- D- Le manteau enveloppant le noyau central.

En allant en profondeur à partir de la surface terrestre, la matière passe graduellement de l'état solide à l'état liquide, de telle sorte que l'asthénosphère, citée ci-dessus se trouve dans un état rhéologique visqueux. Par conséquent, les plaques des continents se meuvent sous l'effet de convection. Ces mouvements créent des zones de très grande concentration de contraintes, qui peuvent engendrer la rupture du massif de sol, si elle viennent à dépasser sa limite de résistance. Une telle rupture permet la dissipation de l'énergie de déformation accumulée. La faille qui en résultera, constituera une zone de faiblesse de la croûte terrestre.

Il existe plusieurs types de failles:

1- failles coulissantes:

Elle correspondent à des zones de cisaillement définies par le mouvement latérale des plaques. Exemple typique de cette faille, est la faille de San Andrea (Californie, USA)

2- failles normales:

Elle se caractérisent par des zones d'extension, causée par le mouvement divergent des plaques.

3- failles inverses:

Elles correspondent à des zones de compression engendrées par le mouvement de subduction des plaques.

## 5.2 Propagation des ondes sismiques:

Une importante partie de l'énergie libérée par la source sismique est dégagée sous forme de vibrations du sol, se propageant en ondes sismiques. Celles-ci arrivent en surface sous une forme ne pouvant être qualifiée que d'aléatoire à cause de l'hétérogénéité du milieu traversé, ainsi que des conditions de site rencontrées en surface.

Il existe deux types d'ondes. Le premier type est celui créé au foyer par le mouvement de la faille et se propage à l'intérieur du massif de sol. Il est dit onde de volume, et se décompose à son tour en:

A- Ondes P: dites aussi longitudinales caractérisées par un changement de volume sous l'effet de contraintes de compression-traction. Leur vitesse de propagation se situe entre 7 et 8 km/ s.

B- Ondes S: dites aussi transversales pouvant être décomposées en ondes verticales (SV) et ondes horizontales(SH). Elles se propagent à une vitesse allant de 4 à 5 km/s et s'accompagnent d'une distorsion sans changement de volume sous l'effet des contraintes de cisaillement.

Le second type d'ondes est dit de surface. Il se crée lors de l'arrivée des ondes de volume à la surface; et se propage superficiellement n'excitant qu'une couche de sol de faible profondeur.

Les ondes de surfaces se décomposent en ondes R de Rayleigh et Q de Love, selon le mode de vibration des particules de sol par rapport à la direction de propagation.

La vitesse de propagation varie en fonction de la rigidité du milieu parcouru. Elle se situe entre 1,5 et 5 km/s dans les terrains relativement compacte ou rocheux et de 0,5 à 1,5 km/s dans les terrains meuble.

Il est à noter, d'après les données précitées que les ondes de volume se propagent plus rapidement que les ondes de surface. Cette caractéristique représente un critère important lors de l'identification des différents types d'onde sur un accélérogramme.

### **5.3 Evaluation des séismes :**

La description quantitative des séismes a toujours constitué un point très délicat. Car, hormis la diversité des séismes qui puissent exister de par la multitude des mécanismes leur ayant donné naissance et les milieux traversés par les ondes sismiques, ils représentent en surface, lieu suscitant le plus d'intérêt pour les ingénieurs, un mouvement de nature et de contenu fréquentiel quasi-aléatoire, dont les critères significatifs varient d'un point de vue à un autre. Pour les sismologues, un renseignement fondamental est l'évaluation de la puissance engendrée par les phénomènes ayant lieu au foyer. Pour représenter cette grandeur on utilise surtout aujourd'hui d'échelle des magnitudes proposée par S. Richter. Néanmoins, la magnitude qui est en fait une mesure de l'intensité au foyer, ne permet pas d'apprécier

directement l'effet du tremblement de terre en surface, du moment que ce dernier dépend non seulement de la magnitude mais aussi de la profondeur du foyer, des conditions géologiques, ainsi que d'autres facteurs. Par ailleurs, pour les concepteurs d'ouvrages, la caractéristique essentielle est l'aptitude plus au moins grande du séisme à provoquer en un point donné de la surface des actions mécaniques susceptibles de provoquer des destructions de structures. Cette notion, que l'on désigne par intensité du séisme à la surface, fait l'objet de classifications sous formes d'échelles macrosismiques. De nos jours il en existe une panoplie, dont nous pouvons citer comme exemple: l'échelle de Mercalli Cancani-Sieberg (MCS), Mercalli modifiée, Mednev Sponhueur-Karnik (MSK)...

Des réseaux d'appareils de mesure du type sismographe ou accélérographe sont déployés de par le monde permettant d'enregistrer les secousses sismiques en termes de déplacement, de vitesse ou d'accélération. La collection des enregistrements permet l'établissement de cartes dites macrosismiques, où tout un territoire est partagé en zones de différentes sismicités.

#### **5.4. Représentation idéalisée des séismes:**

L'objectif d'un concepteur d'ouvrage est de quantifier au mieux la réponse sismique des structures. Il est par conséquent nécessaire d'établir une modélisation mathématique de l'action sismique qui se rapproche le plus possible de la réalité physique. Cela étant, il n'est pas possible de baser tout le calcul de conception d'ouvrage sur un accélérogramme correspondant à un séisme particulier ayant eu lieu à l'endroit considéré. De même qu'il est pratiquement impossible de faire le calcul pour toute la collection d'enregistrements sismiques. L'approche probabiliste se présente dans ce cas comme une alternative convenable pour la caractérisation de l'action sismique, d'autant que le but convoité est la conception rationnelle vis à vis d'éventuels séismes futurs...

Il ne sera plus question donc, de considérer un seul accélérogramme, ni même un nombre fini d'accélérogrammes. Mais plutôt, de voir le mouvement sismique comme un processus temporel aléatoire. Il sera caractérisé par une moyenne qui en général est considérée nulle à cause de la nature vibratoire du mouvement, et par une fonction de corrélation dans le domaine temporel ou par une densité spectrale de puissance dans le domaine fréquentiel (cf. chapitre 2) et éventuellement des moments statistiques d'ordre supérieur. Il est à noter toutefois, que généralement, les enregistrements existant concernant l'histoire des séismes ayant eu lieu au

site considéré, ne permettent pas une estimation relativement précise des moments statistiques au delà du second ordre (i.e. fonction de corrélation). Il est par conséquent intéressant d'établir une caractérisation probabiliste de la réponse des structures à l'égard d'un mouvement sismique décrit probabilistiquement seulement au second ordre. Une telle analyse peut être réalisée à l'aide de la théorie des vibrations aléatoires qui sera exposée dans la section suivante.

#### **5.4.1 Notions de vibrations aléatoires:**

Dans l'analyse dynamique des structures, la première étape est de caractériser les excitations dynamiques elles-mêmes. Ces dernières sont en général divisées en deux catégories, la première est dite transitoire ou bien explosive caractérisée par une brève durée. La seconde est dite charge en régime permanent de durée relativement longue [60].

La caractérisation de l'un de ces deux types de charge est complètement effectuée, si on peut déterminer une fonction temporelle définissant cette excitation. Dans ce cas, la réponse dynamique en termes de déplacement, d'accélération, de forces internes,...., de la structure peut être déterminée. Ces réponses dynamiques combinées avec les résultats de l'analyse à l'égard des efforts statiques, formeront la base d'une étude de conception complète. Cependant, la difficulté majeure dans l'analyse dynamique des structures comme décrite ci-dessus, réside dans le fait de notre incapacité à déterminer avec précision l'excitation dynamique surtout lorsqu'il s'agit des séismes. Ceux-ci étant le plus souvent décrits par des fonctions présentant une forte irrégularité. Par conséquent, les méthodes déterministes classiques de la dynamique des structures ne sont pas en mesure de nous permettre une analyse réaliste des réponses dues aux excitation sismiques, ce qui nous conduit à adopter de nouvelles méthodes. La théorie des vibrations aléatoires, basée d'une part sur la théorie des champs aléatoires exposée au chapitre 2, et d'autre part sur les méthodes classiques de la dynamique des structures permet d'introduire le concept probabiliste qui pourra modéliser d'une manière plus adéquate les excitations sismiques et les réponses des structures. Ces dernières seront traitées comme des fonctions temporelles aléatoires, communément connus sous le nom de processus aléatoires, qui en fait ne sont qu'un cas particulier unidimensionnel des champs aléatoires. Ainsi, toutes les propriétés de ces derniers, exposées au chapitre 2 restent toujours valables pour l'étude d'un processus aléatoire.

### 5.4.1.1 Analyse des systèmes vibratoires:

Le principal objectif de cette analyse est l'établissement des caractéristiques statistiques de la réponse d'un système vibratoire, en fonction de celles de l'excitation. Dans cette analyse les propriétés mécaniques du système sont supposées déterministes et connues. Par conséquent, celui-ci une fois discrétisé, sera représenté par une matrice de masse  $[M]$ , une matrice de rigidité  $[K]$  et une matrice d'amortissement  $[C]$  toutes du type déterministe. Ces matrices contribuent à l'établissement dans le domaine des fréquences d'une matrice complexe  $[H(\omega)]$  dite de transfert entre l'input et l'output.

$$\{Y(\omega)\} = [H(\omega)]\{X(\omega)\} \quad (5.1)$$

$\{Y(\omega)\}$  étant la réponse du système à l'excitation  $\{X(\omega)\}$ .

En revanche, dans le domaine temporel, on peut décrire le système par sa matrice de fonctions de réponses unitaires  $[h(t)]$  dont les composantes sont les transformées inverses de Fourier des composantes de  $[H(\omega)]$  [60]. Ce qui nous permet d'écrire donc :

$$\begin{cases} h_{jk}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{jk}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ H_{jk}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{jk}(t) e^{-i\omega t} dt \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $h_{jk}(t)$  et  $H_{jk}(\omega)$  sont des composantes de  $[h(t)]$  et  $[H(\omega)]$  respectivement.

Considérons maintenant un système MDOF dont le  $k^{\text{ème}}$  noeud est soumis à une vibration aléatoire  $X_k(t)$ . Nous allons nous intéresser à la réponse du  $j^{\text{ème}}$  noeud de ce système.

$X_k(t)$  est supposé être un processus aléatoire stationnaire de moyenne  $m_{Xk}$  et ayant une fonction d'autocorrelation  $R_{Xk}(\tau)$  et une fonction de densité spectrale  $S_{Xk}(\omega)$ .

Notre intérêt réside en fait dans la détermination de  $m_{Yj}$ ,  $R_{Yj}(\tau)$  et  $S_{Yj}(\omega)$  qui sont respectivement la moyenne, la fonction d'autocorrelation, et la densité spectrale de la réponse au noeud  $j$ .

Dans le domaine temporel nous aurons la moyenne de  $Y_j$  à partir de l'expression suivante:

$$m_{Yj} = m_{Xk} \int_{-\infty}^{\infty} h_{jk}(\theta) d\theta \quad (5.3)$$

En général on prend la moyenne de l'excitation sismique égale à zéro, et par conséquent la moyenne de la réponse sera nulle en vertu de l'équation (5.3).

En ce qui concerne la fonction d'autocorrelation de la réponse  $Y_j$  nous aurons:

$$\begin{aligned} R_{Y_j}(\tau) &= \mathcal{E} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} X_k(t - \theta_1) h_{jk}(\theta_1) d\theta_1 \int_{-\infty}^{\infty} X_k(t + \tau - \theta_2) h_{jk}(\theta_2) d\theta_2 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_k}(\tau - \theta_2 + \theta_1) h_{jk}(\theta_1) h_{jk}(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 \end{aligned} \quad (5.4)$$

De même dans le domaine fréquentiel on trouve la moyenne de  $Y_j$  à partir de la relation suivante :

$$m_{Y_j} = H_{jk}(0) m_{X_k} \quad (5.5)$$

Cependant la densité spectrale de la réponse est donnée par :

$$S_{Y_j}(\omega) = H_{jk}(\omega) H_{jk}(-\omega) S_{X_k}(\omega) \quad (5.6)$$

Cette dernière équation peut se mettre sous la forme :

$$S_{Y_j}(\omega) = Q(\omega) S_{X_k}(\omega) \quad (5.7)$$

Où  $Q(\omega)$  est le carré de la fonction de transfert (squared amplification of the frequency response function).

A noter, que les relations présentées en (5.3) à (5.7) sont restreintes au cas d'une seule excitation  $X_k(t)$  au  $k^{\text{ième}}$  noeud. Si plus d'une seule excitation sont considérées, ces équations deviennent plus complexes. Ceci revient en partie au fait que le principe de superposition des réponses obtenues séparément pour des excitations appliquées en des noeuds différents, n'est pas valable à cause de la contribution supplémentaire des fonctions d'intercorrélation entre les différents processus d'excitation. Néanmoins, les relations entrée-sortie pour un MDOF sous leur forme générale sont plus simple à exprimer dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. Elles sont donnée par les expressions suivantes [40] :

\* La moyenne de la réponse :

$$\mathcal{E}\{Y\} = [H(0)]\mathcal{E}\{X\} \quad (5.8)$$

Où  $[H(0)]$  est la matrice des fonctions de transfert évaluée à  $\omega = 0$

\* La matrice des densités spectrales :

$$[S_y(\omega)] = [H^*(\omega)][S_x(\omega)][H(\omega)]^T \quad (5.9)$$

Où  $[H^*(\omega)]$  est les matrice contenant les conjuguées des composantes de  $[H(\omega)]$ .

#### 5.4.1.2 Spectre de réponse probabiliste :

Le spectre de réponse en accélération, vitesse ou déplacement permet de faire intervenir la notion de contenu en fréquences du mouvement. Son but est de caractériser un séisme d'après la réponse d'une structure simple. Par définition, un spectre de réponse en accélération est la courbe donnant l'accélération maximale d'oscillateurs simples à un degré de liberté ayant des fréquences propres différentes [41].

Il est à remarquer qu'un spectre obtenu par application de cette définition, dépend de l'excitation à laquelle le système est soumis. Cependant, si l'excitation est décrite d'une manière probabiliste en utilisant la théorie des processus aléatoires, alors l'analyse stochastique nous permet d'établir un spectre de réponse stochastique. Ceci à l'aide les formules de Davenport exposées au chapitre 2, et qui donnent les statistiques du 1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre de la valeur maximale d'un processus stochastique donné sur une durée de temps fixée. Cette procédure nous conduit à une description du spectre de réponse sous forme probabiliste par sa moyenne et son écart type pour chaque fréquence propre du système. Un autre problème crucial, qui jusque là n'a été pris en compte qu'à travers des coefficients de majoration exagérés. Celui-ci concerne la variabilité que pourrait présenter le matériau constituant la structure et ses propriétés mécaniques. Car, du fait de la différence des modes de réalisation des élément structuraux qui d'une part, et d'autre part la constitution du matériau lui même qui peut exhiber une très grande hétérogénéité, on trouve des structures faites d'un même matériau mais qui présentent des réponses très différentes à une même excitation. Par ailleurs, l'établissement

d'un spectre de réponse probabiliste tenant compte de la variabilité matérielle et de l'aléa sismique en même temps, présente un intérêt proéminent dès lors que la plupart des règlements de construction utilisés de par le monde sont destinés à une large gamme de construction et sont basés sur la notion de spectre de réponse. Une procédure d'établissement de spectre de réponse stochastique prenant en considération la variabilité des caractéristiques mécaniques, ainsi que l'aléa sismique, sera présentée dans le chapitre suivant.

### **5.5 Conclusion :**

Nous avons présenté dans ce chapitre une analyse descriptive succincte sur les séismes, leur origine, leurs modes de propagation, ainsi que les différents types d'échelle servant à l'évaluation quantitative de leur ampleur.

Par ailleurs, des notions essentielles de la théorie des vibrations aléatoires ont été exposées. Cette théorie étant le plus souvent utilisée pour la modélisation de l'action sismique, elle servira dans notre cas de base pour la mise en oeuvre de la méthodologie permettant la détermination des statistiques de la densité spectrale de la réponse ainsi que celles des valeurs maximales que pourrait atteindre cette réponse. (Cf. Chapitre suivant)

## CHAPITRE 6

### Analyse des systèmes aléatoires sous l'effet de chargements sismiques

#### 6.1 Introduction :

Le chargement sismique est le résultat de circonstances uniques qui ne se répéteront pas à l'occasion d'autres occurrences de ce même phénomène, il est de ce fait un processus irréproductible. En outre, comme il a été déjà cité dans la partie des problèmes statiques, la structure elle-même renferme souvent des propriétés matérielles non déterministes. Toutefois au cours de ces dernières décennies, on a considéré que la variabilité des propriétés structurelles était négligeable devant l'aléa sismique. C'est sur cette base qu'a été développée la théorie des vibrations aléatoires des systèmes déterministes [40, 60]. Cependant, des études récentes [27, 32, 38] ont montré que l'incertitude des propriétés matérielles pouvait avoir une influence comparable à celle de l'excitation sismique sur les statistiques de la réponse. De ce fait, la considération de la variabilité matérielle dans une étude dynamique devient d'un intérêt établi.

Par ailleurs, les structures doivent pour des raisons économiques, être conçues pour garantir un bon service pendant leur durée de vie. Pour ce faire, la conception parasismique classique s'appuie souvent sur la notion de spectre de réponse. Ce dernier caractérise la réponse par la valeur maximale qu'elle peut atteindre, pour un chargement dynamique bien déterminé. Or, il serait plus intéressant de prendre en compte l'excitation effective, qui pour un séisme est généralement modélisée comme sus-cité, de manière probabiliste.

Si en outre, l'aléa inhérent au matériau est pris en considération, nous pouvons établir un spectre de réponse à caractère probabiliste, permettant ainsi, de quantifier l'éventuel risque à sa juste valeur.

Dans le présent chapitre, nous présentons en premier lieu, une méthodologie pour l'analyse des fréquences et modes propres pour des structures exhibant des propriétés matérielles ou mécaniques aléatoires, telle la masse ou la rigidité. Ensuite, une étude des statistiques de la densité spectrale de la réponse sera effectuée. Enfin en troisième partie, une analyse des fluctuations des moments spectraux nous permettra une étude de la distribution des maximums (pics) de la réponse. Ce qui par voie de conséquence nous mènera à établir un

spectre de réponse probabiliste, tenant compte de l'aléa sismique ainsi que de la variabilité des caractéristiques matérielles du système.

## 6.2 Analyse des problèmes aux valeurs propres aléatoires :

L'équation caractéristique d'un problème aux valeurs propres réelles, par l'approche éléments finis se résume sous la forme suivante :

$$([K] - \lambda_i [M])\{\phi_i\} = \{0\} \quad (6.1)$$

Où,  $\lambda_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre, et  $\phi_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre.

La condition d'orthonormalisation la plus souvent utilisée s'exprime comme suit :

$$\{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} = 1 \quad (6.2)$$

$[K]$  et  $[M]$  sont respectivement matrice rigidité et matrice de masse correspondant au système considéré. Celui-ci étant supposé avoir des propriétés mécaniques aléatoires, les matrices  $[K]$  et  $[M]$  refermeront ainsi, des composantes aléatoires. Ce qui induit en vertu de l'équation (6.1) une variabilité au niveau des valeurs et des vecteur propres.

Soit  $\{a\}$  le vecteur de toutes les variables aléatoires que contient la modélisation du système, obtenues soit par discrétisations de champs aléatoires ou bien, étant à l'origine définies comme telles. Décomposons  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\{\phi_i\}$  et  $\{\lambda_i\}$  au voisinage des valeurs moyennes de ces variables aléatoires. Ce qui donne au premier ordre :

$$[K] \approx [\bar{K}] + [\delta K] \quad (6.3)$$

$$[M] \approx [\bar{M}] + [\delta M] \quad (6.4)$$

$$\{\phi_i\} \approx \{\bar{\phi}_i\} + \{\delta\phi_i\} \quad (6.5)$$

$$\lambda_i \approx \bar{\lambda}_i + \delta\lambda_i \quad (6.6)$$

Où  $[\bar{K}]$ ,  $[\bar{M}]$ ,  $\{\bar{\phi}_i\}$  et  $\bar{\lambda}_i$  sont les valeurs moyennes des matrices de rigidité et de masse, ainsi que des vecteurs et valeurs propres respectivement. En ce qui concerne les fluctuations aléatoires de  $[K]$  et de  $[M]$ , elles sont données au premier ordre par :

$$[\delta K] = \sum_{i=1}^n [K_i^I] a_i \quad (6.7)$$

Où  $a_i$   $i=1, \dots, n$ , sont les variables aléatoire que renferme la modélisation du système.  $[K_i^I]$  a été définie dans la partie des problèmes statiques par l'équation (3.25).

De manière similaire, nous aurons pour la matrice masse :

$$[\delta M] = \sum_{i=1}^n [M_i^I] a_i \quad (6.8)$$

$[M_i^I]$  étant définie par :

$$[M_i^I] = \left. \frac{\partial [M]}{\partial a_i} \right|_{\{a\}=\{\bar{a}\}} \quad (6.9)$$

En substituant  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\{\phi_i\}$  et  $\lambda_i$  dans (6.1) et (6.2) par leurs expressions données en (6.3) à (6.5), et en négligeant les termes d'ordre supérieure ou égal à 2, nous obtenons les quatre équations suivantes :

$$([\bar{K}] - \bar{\lambda}_i [\bar{M}]) \{\bar{\phi}_i\} = \{0\} \quad (6.10)$$

$$\{\bar{\phi}_i\}^T [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\} = 1 \quad (6.11)$$

$$([\bar{K}] - \bar{\lambda}_i [\bar{M}]) \{\delta\phi_i\} = \{\delta f_i\} \quad (6.12)$$

$$\{\bar{\phi}_i\}^T [\bar{M}] \{\delta\phi_i\} = -\frac{1}{2} \{\bar{\phi}_i\}^T [\delta M] \{\bar{\phi}_i\} \quad (6.13)$$

$$\text{Avec : } \{\delta f_i\} = -[\delta K] \{\bar{\phi}_i\} + \bar{\lambda}_i [\delta M] \{\bar{\phi}_i\} + [\bar{M}] \delta\lambda_i \{\bar{\phi}_i\} \quad (6.14)$$

Les équations (6.10) et (6.11) nous permettent d'avoir les valeurs moyennes des valeurs propres  $\lambda_i$  et des vecteurs propres  $\{\phi_i\}$  en suivant la procédure déterministe standard.

Pour la détermination de leurs matrices de covariance, multiplions les termes de l'équation (6.12) par  $\{\phi_i\}^T$ , on trouve :

$$\delta\lambda_i = \{\bar{\phi}_i\}^T ([\delta K] - \bar{\lambda}_i [\delta M]) \{\bar{\phi}_i\} \quad (6.15)$$

Par ailleurs, prémultiplions les termes de l'équation (6.13) par le vecteur  $\mu_i [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\}$ . En les additionnant ensuite à ceux de l'équation (6.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \left( [\bar{K}] - \bar{\lambda}_i [\bar{M}] + \mu_i [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\} \{\bar{\phi}_i\}^T [\bar{M}] \right) \{\delta\phi_i\} = \{\delta f_i\} - \\ \frac{1}{2} \mu_i [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\} \{\bar{\phi}_i\}^T [\delta M] \{\bar{\phi}_i\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Où  $\mu_i$  est une constante qui a été prise égale à 2 par Fox et Kapoor et égal à  $\bar{\lambda}_i$  par Hu [62].

Cette dernière équation peut se réécrire sous la forme :

$$[D_i] \{\delta\phi_i\} = \{\delta f_i\} - \frac{1}{2} \mu_i [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\} \{\bar{\phi}_i\}^T [\delta M] \{\bar{\phi}_i\} \quad (6.17)$$

Avec :

$$[D_i] = [\bar{K}] - \bar{\lambda}_i [\bar{M}] + \mu_i [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\} \{\bar{\phi}_i\}^T [\bar{M}] \quad (6.18)$$

La substitution de (6.7) et (6.8) dans (6.15) nous donne :

$$\delta\lambda_i = \sum_{r=1}^n \alpha_i^r a_r \quad (6.19)$$

$\alpha_i^r$  étant donné par l'expression suivante :

$$\alpha_i^r = \{\bar{\phi}_i\}^T \left( [K_r^I] - \bar{\lambda}_i [M_r^I] \right) \{\bar{\phi}_i\} \quad (6.20)$$

De manière similaire pour la relation (6.14) donnant l'expression de  $\{\delta f_i\}$ , dans laquelle la substitution de (6.7), (6.8) et (6.19) nous conduit à la relation suivante :

$$\{\delta f_i\} = - \sum_{r=1}^n [K_r^I] \{\bar{\phi}_i\} a_r + \bar{\lambda}_i \sum_{r=1}^n [M_r^I] \{\bar{\phi}_i\} a_r + \sum_{r=1}^n [\bar{M}] \alpha_i^r \{\bar{\phi}_i\} a_r \quad (6.21)$$

Ce qui nous permet en utilisant l'équation (6.17) d'avoir :

$$[D_i] \{\delta\phi_i\} = \sum_{r=1}^n \beta_i^r a_r \quad (6.22)$$

Avec:

$$\beta_i^r = \left( -K_r^I + \bar{\lambda}_i [M] + [\bar{M}] \alpha_i^r - \frac{1}{2} \mu_i [\bar{M}] \{\bar{\phi}_i\} \{\bar{\phi}_i\}^T [M_r^I] \right) \{\bar{\phi}_i\} \quad (6.23)$$

Le but du développement mathématique effectué ci-dessus est d'exprimer les fluctuations stochastiques  $\delta\lambda_i$  et  $\{\delta\phi_i\}$  des valeurs et vecteurs propres sous forme linéaire des variables aléatoires  $a_r$ . Ces relations linéaires sont représentées par les équations (6.19) et (6.22).

A partir de l'équation (6.19) nous aurons les statistiques du second ordre des valeurs propres décrites par leurs covariances données ci-dessous :

$$\text{Cov}[\lambda_i, \lambda_j] = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \alpha_i^r \alpha_j^s \mathcal{E}[a_r a_s] \quad i = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad j = 1, \dots, N \quad (6.24)$$

Où, N est le nombre total de degrés de liberté.

Pour sa part, l'équation (6.22) nous permet d'avoir les matrices de covariance entre les vecteurs propres pris deux à deux par la relation suivante :

$$\text{Cov}[\{\phi_i\}, \{\phi_j\}] = [D_i]^{-1} \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n \beta_r^r \beta_s^s \mathcal{E}[a_r a_s] ([D_j]^{-1})^T \quad (6.25)$$

Avec,  $i = 1, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, N$

Le terme  $\mathcal{E}[a_r a_s]$  caractérisant la corrélation entre les différentes variables aléatoires qui décrivent la structure, est obtenu selon la modélisation effectuée sur les diverses caractéristiques mécaniques et matérielles du système.

### 6.3 Étude de la réponse des systèmes aléatoires :

Quand la densité spectrale  $S_E(\omega)$  de l'accélération sismique est donnée comme excitation à un système linéaire à plusieurs degrés de liberté, la densité spectrale  $S_F(\omega)$  de l'accélération absolue en un degré de liberté arbitraire F est donnée par l'équation suivante en utilisant le carré de la fonction de transfert  $Q_F(\omega)$ , (cf. eq. 5.7) :

$$S_F(\omega) = Q_F(\omega) S_E(\omega) \quad (6.26)$$

Par ailleurs, les propriétés matérielles de la structure telles le module d'élasticité, l'amortissement, la masse formeront une fois discrétisées un vecteur de variables aléatoires  $\{X\}$ . Celui-ci est exprimé sous la forme suivante pour la  $k^{\text{ième}}$  composante :

$$X_k = X_k^0 (1 + a_k) \quad k = 1, \dots, n \quad (6.27)$$

$n$  étant le nombre total des variables aléatoires.

$X_k^0$  est la moyenne de  $X_k$ , et  $a_k$  est une variable aléatoire de moyenne nulle et dont la variabilité est relativement petite.

Du moment que  $Q_F$  dépend des caractéristiques matérielles et mécaniques du système, elle sera donc fonction des variables aléatoires  $a_k$   $k=1, \dots, n$ . Par conséquent, elle s'exprimera par une perturbation au voisinage des moyennes des variables aléatoires  $a_k$   $k=1, \dots, n$  de la manière suivante :

$$Q_F(\omega) = Q_F^0(\omega) + \sum_{k=1}^n Q_{Fk}^I(\omega) a_k + \dots \quad (6.28)$$

$Q_F^0(\omega)$  correspond à la structure avec des propriétés déterministes, i.e.  $X_k = X_k^0$  avec  $k=1, \dots, n$ .

$Q_{Fk}^I(\omega)$  est le taux de fluctuation du premier ordre de  $Q_F(\omega)$  par rapport à  $a_k$ , défini par :

$$Q_{Fk}^I(\omega) = \left. \frac{\partial Q_F(\omega)}{\partial a_k} \right|_{\{a\}=\{\bar{a}\}} \quad (6.29)$$

En substituant l'équation (6.28) dans l'équation (6.26) nous obtenons l'expression suivante de  $S_F(\omega)$  :

$$S_F(\omega) = S_F^0(\omega) + \sum_{k=1}^n S_{Fk}^I(\omega) a_k \quad (6.30)$$

L'équation ci-dessus représente la forme linéaire que relie  $S_F(\omega)$  au variables aléatoires  $a_k$ .

$S_F^0(\omega)$  et  $S_{Fk}^I(\omega)$  sont donnés par :

$$S_F^0(\omega) = Q_F^0(\omega) S_E(\omega) \quad (6.31)$$

et,

$$S_{Fk}^I(\omega) = Q_{Fk}^I(\omega) S_E(\omega) \quad (6.32)$$

L'équation (6.30) nous permet d'établir les statistiques de  $S_F(\omega)$ .

Comme les valeurs moyennes des  $a_k$   $k=1, \dots, n$  sont toutes nulles, nous aurons l'espérance mathématique de  $S_F(\omega)$  par la relation suivante :

$$\mathcal{E}[S_F(\omega)] = S_F^0(\omega) \quad (6.33)$$

Cette dernière équation signifie que la densité spectrale moyenne de la réponse s'obtient en suivant la procédure déterministe classique en ayant remplacé les variables aléatoires décrivant le système par leurs espérances mathématiques.

D'autre part, en ce qui concerne la matrice de covariance entre les densités spectrales de réponse en deux noeuds F et G, nous aurons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[S_F(\omega), S_G(\omega)] &= \mathcal{E}[(S_F(\omega) - \mathcal{E}[S_F(\omega)])(S_G(\omega) - \mathcal{E}[S_G(\omega)])] = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n S_{Fk}^I(\omega) S_{Gl}^I(\omega) \mathcal{E}[a_k a_l] \end{aligned} \quad (6.34)$$

La covariance donnée ci-dessus, peut s'exprimer en fonction de la densité spectrale de l'excitation sismique  $S_E(\omega)$  par :

$$\text{Cov}[S_F(\omega), S_G(\omega)] = (S_E(\omega))^2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n Q_{Fk}^I(\omega) Q_{Gl}^I(\omega) \mathcal{E}[a_k a_l] \quad (6.35)$$

Le terme d'intercorrélation entre les différentes variables aléatoires  $a_k$ , qui apparaît dans l'équation ci-dessus est obtenu d'après la modélisation faite des caractéristiques mécaniques. Cette dernière peut être sous forme de champs aléatoires intercorrélés ou non. Ou plus simplement, des variables seront assignées directement aux caractéristiques du système.

#### 6.4 Spectre de réponse probabiliste :

L'établissement du spectre de réponse probabiliste est basé sur la théorie des processus aléatoires, plus précisément sur l'analyse statistique de la distribution des maximums (pics) de la réponse.

Si le système dont la réponse a été étudiée dans la section précédente, avait des caractéristiques déterministes (i.e.  $S_F(\omega) = S_F^0(\omega)$ ), alors l'espérance mathématique et l'écart type de l'accélération maximale absolue de la réponse sur une durée T notée  $\ddot{u}_T$ , sont données par les formules de Davenport (Cf. Chapitre 2) :

$$\mathcal{E}[\ddot{u}_T] = \left( \sqrt{2 \ln(\nu_0^+ T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(\nu_0^+ T)}} \right) \sigma_x \quad (6.36)$$

et,

$$\sigma_{\ddot{u}_T} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2 \ln(\nu_0^+ T)}} \sigma_x \quad (6.37)$$

Avec :

$\sigma_x = \sqrt{\lambda_0}$  est l'écart type de la réponse.

et le taux de passage par zéro est donné par :

$$\nu_0^+ = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{1/2} \quad (6.38)$$

$\lambda_i \ i=1,2,\dots$  sont les moments spectraux définis par :

$$\lambda_i = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^i S_F(\omega) d\omega \quad (6.39)$$

Les formules données en (6.36) et (6.37) expriment les relations entre les moments spectraux de la réponse et la valeur maximale que pourrait atteindre cette dernière sur un intervalle de temps  $[0, T]$ . Cependant, elles ont été obtenues à partir de l'hypothèse que l'occurrence d'un pic a lieu d'une manière indépendante en suivant un processus de Poisson. Toutefois, les processus "narrow band" qui caractérisent souvent les réponses des structures, exhibent une tendance plus grande à franchir une barrière si celle-ci est franchie une fois, ce qui crée des groupements de passage (clumping). Dans ce cas les formules de Davenport tendent à surestimer les statistiques du maximum de la réponse [38].

En revanche, la considération de l'effet de groupement de passages, nous mène vers l'utilisation des formules proposées par Der Kiureghian [18, 19] obtenues sur la base d'une investigation numérique effectuée sur la fonction de distribution de probabilités trouvées par Vanmarcke [54].

Cela étant, les relations donnant la moyenne et l'écart type du maximum du processus aléatoire de réponse trouvées par Der Kiureghian sont exprimées sous la forme suivante :

- La moyenne :

$$E[\ddot{u}_T] = \left( \sqrt{2 \ln(2\nu_e T)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2 \ln(2\nu_e T)}} \right) \sigma_x \quad (6.40)$$

- Ecart type :

$$\sigma_{\ddot{u}_T} = \begin{cases} \left( \frac{1.2}{\sqrt{2 \ln(2\nu_e T)}} - \frac{5.4}{13 + (2 \ln(2\nu_e T))^{3.2}} \right) \sigma_x & \text{si } 2\nu_e T > 2.1 \\ 0.65\sigma_x & \text{si } 2\nu_e T \leq 2.1 \end{cases} \quad (6.41)$$

Où  $\nu_e$  est donné par la relation suivante :

$$\nu_e = \begin{cases} (1.63 \delta^{0.45} - 0.38) \nu_0^* & \text{si } \delta < 0.69 \\ \nu_0^* & \text{si non} \end{cases} \quad (6.42)$$

et  $\delta$  est obtenu par :

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0 \lambda_2}} \quad (6.43)$$

Rappelons que les relations (6.40) et (6.41) ont été établies pour le cas de systèmes déterministes. Cependant, dans notre cas, l'hypothèse faite sur la variabilité des propriétés de la structure, induira en vertu de l'équation (6.30) la stochasticité de la densité spectrale de réponse. Par conséquent, les moments spectraux apparaissant dans les expressions données ci-dessus seront aléatoires. Pour tenir compte de cet aléa supplémentaire en sus de celui de l'excitation sismique, on a utilisé le théorème de la représentation totale [6, 7] qui stipule que :  
La moyenne totale est donnée par :

$$\mathcal{E}'[\ddot{u}_T] = \tilde{\mathcal{E}}[\mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\}]] \quad (6.44)$$

Tandis que la variance totale est exprimée sous la forme suivante :

$$\text{Var}'[\ddot{u}_T] = \tilde{\mathcal{E}}[\text{Var}[\ddot{u}_T / \{X\}] + \tilde{\text{Var}}[\mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\}]]] \quad (6.45)$$

Où,  $\mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\}]$  et  $\text{Var}[\ddot{u}_T / \{X\}]$  sont respectivement l'espérance mathématique et la variance conditionnelles obtenues en fixant le vecteur  $\{X\}$  contenant les caractéristiques du système. Elles peuvent donc, être déterminées par les relations donnant les statistiques de  $\ddot{u}_T$  pour une structure à propriétés déterministes. En revanche,  $\tilde{\mathcal{E}}[\bullet]$  et  $\tilde{\text{Var}}[\bullet]$  sont liées au

traitement statistique sur les paramètres probabilistes eux-même, en l'occurrence la moyenne  $\mathcal{E}[\bullet]$  et la variance  $Var[\bullet]$ .

Pour la détermination des statistiques totales, les expressions données en (6.44) et (6.45) doivent être approximées en raison de la difficulté de l'estimation des statistiques conditionnelles. Pour ce faire, une analyse en F.O.S.M (first order second moment analysis) a été utilisée [38] pour aboutir aux relations suivantes:

$$\tilde{\mathcal{E}}[\mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\}]] = \mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\} = \{\bar{X}\}] \quad (6.46)$$

$$\tilde{\mathcal{E}}[Var[\ddot{u}_T / \{X\}]] = Var[\ddot{u}_T / \{X\} = \{\bar{X}\}] \quad (6.47)$$

$$\tilde{Var}[\mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\}]] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathcal{E}[\ddot{u}_T]}{\partial X_k} \Big|_{\{X\}=\{\bar{X}\}} \frac{\partial \mathcal{E}[\ddot{u}_T]}{\partial X_l} \Big|_{\{X\}=\{\bar{X}\}} \mathcal{E}[X_k X_l] \quad (6.48)$$

Nous aurons donc, la moyenne et la variance du maximum de la réponse en tenant compte de la dimension aléatoire de l'input sismique ainsi que de la variabilité des caractéristiques du système par les expressions ci-dessous :

$$\mathcal{E}^I[\ddot{u}_T] = \mathcal{E}[\ddot{u}_T / \{X\} = \{\bar{X}\}] \quad (6.49)$$

$$Var^I[\ddot{u}_T] = Var[\ddot{u}_T / \{X\} = \{\bar{X}\}] + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial \mathcal{E}[\ddot{u}_T]}{\partial X_k} \Big|_{\{X\}=\{\bar{X}\}} \frac{\partial \mathcal{E}[\ddot{u}_T]}{\partial X_l} \Big|_{\{X\}=\{\bar{X}\}} \mathcal{E}[X_k X_l] \quad (6.50)$$

La moyenne du maximum de la réponse est obtenue à partir de l'équation (6.49) comme étant celle d'un système déterministe dont les propriétés sont les valeurs moyennes de celles de notre système. Quant à la variance, elle est composée d'une somme de deux parties, dont l'une représente aléa de l'excitation tandis que l'autre la variabilité des caractéristiques du système.

En utilisant les formules proposées par Der Kiureghian (éqs. 6.40 et 6.41) pour l'évaluation du terme de droite de l'équation (6.50), nous aboutirons aux expressions suivantes pour les statistiques de la valeur maximale :

Si  $\delta \geq 0.69$  alors :

$$Var^I[\ddot{u}_T] = (\sigma_{\ddot{u}_T})^2 + A_1^2 B_1 + A_2^2 B_3 + 2A_1 A_2 B_5 \quad (6.51)$$

Et si  $\delta < 0.69$  alors :

$$Var^I[\ddot{u}_T] = (\sigma_{\ddot{u}_T})^2 + C_1^2 B_1 + C_2^2 B_2 + C_3^2 B_3 + 2(C_1 C_2 B_4 + C_1 C_3 B_5 + C_2 C_3 B_6) \quad (6.52)$$

Les coefficients  $A_i$   $i=1, \dots, 2$  et  $C_k$   $k=1, \dots, 3$  sont exposés en annexe 3, tandis que les coefficients  $B_j$   $j=1, \dots, 6$  communs aux deux expressions (6.51 et 6.52) sont exposés ci-dessous :

$$B_1 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{0k}^I \lambda_{0l}^I \mathcal{E}[\dot{a}_k \dot{a}_l] \quad (6.53 \text{ a})$$

$$B_2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{1k}^I \lambda_{1l}^I \mathcal{E}[\dot{a}_k \ddot{a}_l] \quad (6.53 \text{ b})$$

$$B_3 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{2k}^I \lambda_{2l}^I \mathcal{E}[\ddot{a}_k \dot{a}_l] \quad (6.53 \text{ c})$$

$$B_4 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{0k}^I \lambda_{1l}^I \mathcal{E}[\dot{a}_k \ddot{a}_l] \quad (6.53 \text{ d})$$

$$B_5 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{0k}^I \lambda_{2l}^I \mathcal{E}[\dot{a}_k \ddot{a}_l] \quad (6.53 \text{ e})$$

$$B_6 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \lambda_{1k}^I \lambda_{2l}^I \mathcal{E}[\ddot{a}_k \ddot{a}_l] \quad (6.53 \text{ f})$$

Où, les  $\lambda_{ik}^I$  sont définis comme étant les taux de fluctuation du premier ordre du  $i^{\text{ème}}$  moment spectral par rapport à la  $k^{\text{ème}}$  variable aléatoire [38] et sont donnés par :

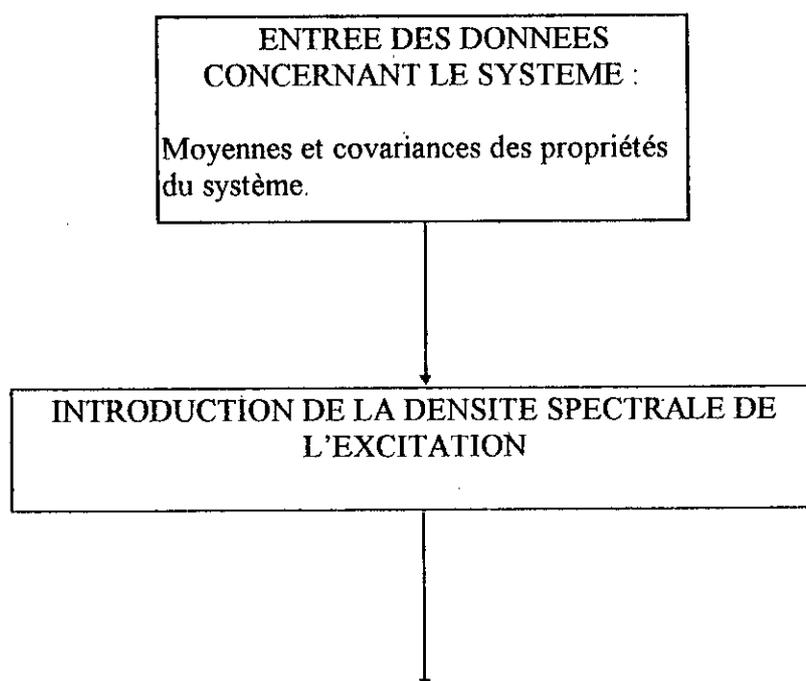
$$\lambda_{ik}^I = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^I S_{Fk}^I(\omega) d\omega$$

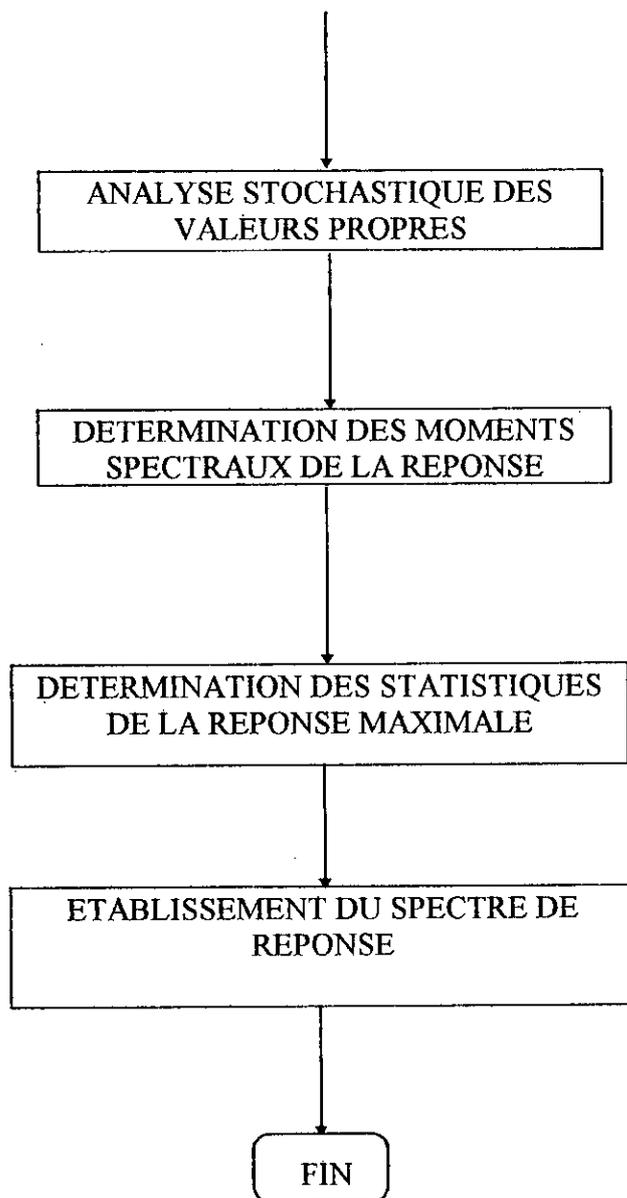
Les  $\lambda_{ik}^I$  peuvent être obtenus analytiquement si la structure ne possède qu'un ou deux degrés de liberté, mais cela est pratiquement impossible pour un système à plusieurs degrés de liberté en général. Dans ce cas, une procédure numérique est nécessaire.

### 6.5 Conclusion :

Une méthodologie a été exposée dans ce chapitre pour la détermination des statistiques des valeurs et vecteurs propres pour une structure à caractéristiques aléatoires. Nous avons également présenté une procédure qui introduit la considération de cet aléa dans l'analyse de la densité spectrale de la réponse des structures soumises aux efforts sismiques, ainsi que dans l'étude des statistiques de la valeur maximale de cette réponse.

Enfin, la combinaison de l'analyse de la variabilité du maximum de la réponse d'une structure aléatoire avec l'étude des statistiques des fréquences et modes propres de cette dernière nous permet l'établissement d'une manière complète de son spectre de réponse en un degré de liberté donné. L'organigramme synoptique ci-dessous résume les différentes étapes pour la détermination du spectre de réponse probabiliste.





## CHAPITRE 7

### Investigation paramétrique de la réponse des structures aléatoires vis à vis des excitations sismiques

#### 7.1 Introduction :

Dans cette partie nous procéderons à l'analyse numérique des statistiques de la réponse d'une structure aléatoire excitée par une force de nature sismique. Ceci nous permettra d'étudier l'influence de la variabilité de plusieurs caractéristiques dynamiques du système, tel la masse, la rigidité, l'amortissement... sur la réponse de celui-ci.

La présente analyse est composée de trois parties, la première est consacrée à l'étude des fréquences et modes propres stochastiques, tandis que dans la deuxième nous étudierons la variabilité de la densité spectrale de réponse. Enfin, en troisième partie nous établirons des spectres de réponse de système aléatoires.

#### 7.2 Statistiques des valeurs et vecteurs propres :

L'analyse aux valeurs et vecteurs propres est spécifique au système sans la considération du chargement dynamique. Elle est ainsi, exclusivement liée aux propriétés matérielles et mécanique de ce dernier.

La structure considérée pour la présente étude est représentée sur la figure 7.1 et est modélisée par un système à masses concentrées.

Les caractéristiques moyennes du système sont :

La rigidité moyenne :  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k}_3 = 12 \cdot 10^4 \text{ kN / m}$

Les masses moyennes :  $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m}_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ kN}$

Les rigidités réelles de la structures sont exprimées en fonction de leurs valeurs moyennes sous la forme suivante :

$$k_i = \bar{k}_i(1 + \alpha_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.1)$$

On note que dans ce cas n est égal à 3.

De même pour les masses nous aurons :

$$m_i = \bar{m}_i(1 + b_i) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.2)$$

$a_i$  et  $b_i$   $i=1, \dots, n$  sont des variables aléatoires de moyennes nulles.

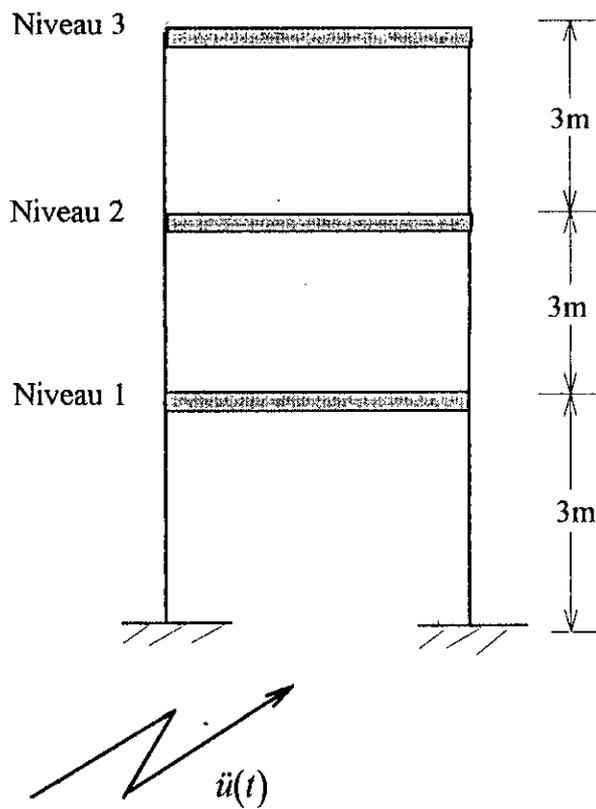


Fig. 7.1

L'autocorrélation entre les  $a_i$  est modélisée par la forme exponentielle suivante :

$$\mathcal{E}[a_i a_j] = \sigma_a e^{-\left(\frac{\xi_{ij}}{d_a}\right)^2} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \quad (7.3)$$

$\xi_{ij}$  étant la distance séparant le centre de l'élément  $i$  à celui de l'élément  $j$ .

$\sigma_a$  écart type des variables aléatoires  $a_i$ .

$d_a$  est la distance de corrélation concernant les  $a_i$ .

De manière similaire, la corrélation entre les  $b_i$  est considérée de la forme suivante:

$$\mathcal{E}[b_i b_j] = \sigma_b e^{-\left(\frac{\xi_{ij}}{d_b}\right)^2} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \quad (7.4)$$

Par ailleurs, les masses et les rigidités sont supposées non corrélées entre elles. Ce qui nous mène vers l'équation suivante :

$$\mathcal{E}[a_i b_j] = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \quad (7.5)$$

Les valeurs propres obtenues à partir des valeurs moyennes des caractéristiques du système (Fig. 7.1) sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

Tableau 7.1

	Mode 1	Mode 2	Mode 3
pulsation propre moyenne (rad/s)	10.90	30.54	44.14

Cependant, la quantification de la variabilité des valeurs propres par rapport à leurs valeurs moyennes est effectuée à l'aide de coefficients de variation (COV) définis comme étant le rapport de l'écart type à l'espérance mathématique.

La figure 7.2 représente l'influence de la variation du COV de la rigidité de la structure, celle-ci étant considérée le seul paramètre aléatoire, sur le COV des valeurs propres qui ne sont en fait que les carrés des pulsations propres.

De manière similaire, la figure 7.3 représente la variation du COV des valeurs propres en fonction de celui des masses, pour le cas où celles-ci sont seules à être supposées aléatoires.

Pour sa part, la figure 7.4 montre l'effet de la considération de masses et rigidité aléatoires.

On rappelle que pour ces trois cas les distances de corrélation prises en compte étaient égales à la hauteur d'étage.

Ces trois courbes montrent que les relations entre les COV des valeurs propres et ceux des paramètres du système sont linéaires. Cela s'explique par le fait de la linéarité des équations (6.19) reliant les valeurs propres aux variables aléatoires  $a_i$  et  $b_i$ .

Il y a lieu de noter également que pour les figures (7.2) et (7.3) les pentes de toutes les droites sont inférieures à l'unité, ce qui implique que la variabilité relative des valeurs propres est moins prononcée que celle des caractéristiques du système pour les deux premiers cas. Quant au troisième cas les pentes des droites avoisinent l'unité.

Les figures 7.5, 7.6 et 7.7 représentent la variation du COV des valeurs propres en fonction de la distance de corrélation.

Les deux premières figures sont respectivement pour le cas où la rigidité seulement est aléatoire, et pour le cas où les masses seulement sont aléatoires. Elles nous permettent de constater que l'augmentation de la corrélation entre les variables aléatoires induit une augmentation des COV de toutes les valeurs propres en tendant par des valeurs inférieures à une valeur égale au COV des propriétés du système (i.e. 0.1). On note également que le COV de la valeur propre fondamentale est supérieur à ceux des autres modes.

En ce qui concerne la figure 7.7, elle représente le cas où la rigidité et les masses sont considérées simultanément aléatoires avec la supposition que ces dernières ont la même distance de corrélation (i.e.  $d_a=d_b$ ). On a constaté que pour ce cas les courbes convergeaient par valeurs inférieures vers la racine carrée de la somme des carrés des COV de la masse et de la rigidité. Ceci est dû au fait de l'hypothèse d'indépendance entre les variabilités de ces dernières.

Les courbes des figures 7.8, 7.9 et 7.10 nous ont permis de constater pour le cas où la rigidité est aléatoire les COV des composantes des vecteurs propres s'atténuent avec l'augmentation de la distance de corrélation ce qui signifie un rapprochement du cas déterministe.

Par ailleurs pour le cas où les masses sont aléatoires, les COV des composantes des vecteurs aléatoires tendent vers une valeur non nulle. Ceci est dû à la condition de normalisation qui est appliquée aux vecteurs propres par rapport à la matrice des masses.

**7.3 Variabilité de la densité spectrale de la réponse :**

Pour analyser l'effet de l'incertitude des caractéristiques du système sur la densité spectrale de la réponse d'une structure en un degré de liberté donné, nous étudierons dans ce qui suivra la réponse du système représenté en figure 7.1 . Ce dernier est supposé être amorti de manière classique avec un pourcentage d'amortissement moyen ( déterminé à partir des caractéristiques moyennes de la structure) égal à 5% pour tous les modes.

L'accélération sismique est supposée naître à son foyer sous forme d'un bruit blanc de densité spectrale  $S_0$  . Cependant au cours de sa propagation vers la surface elle subit une altération dépendant du milieu traversé. Ce qui engendrera un filtrage du contenu fréquentiel du signal sismique initial avant d'atteindre la structure.

Pour la prise en compte de cet effet, nous avons considéré trois types de sol de rigidités différentes. Leurs caractéristiques dynamiques sont représentées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 7.2

Caractéristiques nature du sol	$\omega_0$ (rad/s)	$\zeta$
Sol 1 : mou	5	0.2
Sol 2 : rigidité moyenne	10	0.4
Sol 3 : rigide	15	0.6

On note, que ces valeurs sont les plus utilisées dans la littérature.

$\omega_0$  représente la pulsation propre du filtre (sol), tandis que  $\zeta$  est son coefficient d'amortissement. On remarque également que ce dernier caractérise aussi la largeur de bande du signal., plus  $\zeta$  est grand et plus la bande fréquentielle est large.

Le signal filtré qui excitera le système aura la densité spectrale de puissance suivante dite de Kanai-Tajimi :

$$S(\omega) = S_0 \frac{1 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \tag{7.6}$$

$S_0$  est la densité spectrale de l'accélération sismique au niveau du foyer. Elle est prise dans une représentation unilatérale égale à  $43.4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^3$  [38].

On rappelle que d'après l'équation (6.31) exposée au chapitre précédent, la densité spectrale moyenne de la réponse est influencée d'une part, par l'allure de la densité spectrale de l'excitation qui est l'accélération sismique à la base de la structure, et d'autre part par l'allure de la moyenne du carré de la fonction de transfert  $Q_F^0(\omega)$  reliant l'accélération de la base à l'accélération du degré de liberté considéré. La figure 7.11 décrit la variation de la densité spectrale unilatérale moyenne pour les trois niveaux de la structure de la fig. 7.1 et pour les trois types de sol. On constate que cette dernière se concentre avec des valeurs relativement grandes au niveau de la pulsation propre moyenné du mode fondamental. Cependant, on note une légère contribution du second mode pour la densité spectrale (d.s.p) de l'accélération du premier niveau. On remarque également que pour le sol mou la d.s.p présente un pic supplémentaire au droit de la pulsation propre de ce dernier. Par ailleurs on a constaté comme prévu que les niveaux hauts montrent des valeurs supérieures de la d.s.p moyenne que les niveaux bas.

Les courbes de la figure 7.12 représentent les écart types de la densité spectrale dans le cas où la rigidité de la structure est considérée aléatoire. Elles nous permettent de constater que pour ce cas, l'écart type diminue abruptement et tend à s'annuler au voisinage du premier mode. Tandis que pour les autres modes aucune variation n'est aperçue.

En outre, nous avons considéré deux situations, dans la première la corrélation entre les variables aléatoires caractérisant la rigidité des éléments était supposée parfaite, en revanche dans la seconde les variables aléatoires étaient supposées non corrélées. Ceci nous a permis de constater que la variation de la corrélation n'induit pas une variation de la forme de la courbe des écarts types. Toutefois, nous avons noté que la non corrélation engendrait des valeurs inférieures à celles obtenues sous l'hypothèse d'une corrélation parfaite. On remarque aussi que les plus grandes valeurs de l'écart type de la d.s.p correspondent au niveau le plus élevé.

Dans le cas où l'amortissement est supposé aléatoire, les courbes de la figure 7.13 montrent qu'au niveau de la fréquence du premier mode de vibration les écarts types atteignent leurs valeurs maximales. En outre la non corrélation engendre une plus grande variabilité (écart

type) que la corrélation parfaite. Toutefois, si nous venons à comparer la variabilité que produit la considération d'une rigidité aléatoire à celle produite par un amortissement stochastique, nous trouvons que la première est relativement plus grande que la seconde. De ce fait les courbes de la figure 7.14 où les deux propriétés mécaniques ont été considérées simultanément aléatoires tendent à plus s'approcher du cas où la rigidité seulement est aléatoire.

Les figures 7.15, 7.16 et 7.17 représentent la variation de l'écart type de la d.s.p en fonction de sols de différentes rigidités (cf. Tableau 7.2), et pour les trois caractéristiques, rigidité aléatoire, amortissement aléatoire et enfin rigidité et amortissement aléatoires simultanément. On remarque que le sol qualifié de rigidité moyenne présente les plus grandes valeurs de l'écart type de la d.s.p au voisinage du premier mode, tandis que le sol mou montre les plus petites valeurs. Cependant, pour le sol rigide nous constatons des valeurs non nulles de l'écart type autour de la fréquence du second mode, ceci pour le premier niveau de la structure.

#### **7.4 Statistiques de la réponse maximale et spectre de réponse :**

Pour analyser la variabilité de l'accélération absolue maximale comme réponse à l'accélération sismique en tenant compte de l'incertitude inhérente à l'évaluation de la rigidité et l'amortissement du système, nous avons considéré une structure de trois niveaux similaire à celle de la figure 7.1.

Nous avons tracé des spectres de réponse des différents niveaux, en fonction de la valeur moyenne de la fréquence propre fondamentale obtenue par l'analyse stochastique aux valeurs propres des structures. On note par ailleurs, que les COV des valeurs propres constituent une indication sur la plage de valeurs dans laquelle pourrait se situer la fréquence propre réelle du système.

Les figures 7.18, 7.19 ainsi que 7.20 représentent les spectres moyens de réponse des trois niveaux de notre structure pour les trois types de sol. On constate que toutes les courbes sont caractérisées par des valeurs extrêmes aux niveaux des fréquences propres des filtres (sols). Ainsi, plus le sol est mou plus cette valeur maximale s'approche de l'origine de l'axe des fréquences. On note également qu'au droit de la fréquence propre du sol, la différence entre les spectres des différents niveaux est la plus grande. Ceux des niveaux élevés présentent les plus

grandes valeurs. Cependant, pour les très basses et les très hautes fréquences les spectres des différents niveaux se confondent.

Pour un sol de rigidité moyenne, la figure 7.21 montre la comparaison de l'écart type du spectre de réponse entre le cas d'une corrélation parfaite des variables aléatoires et le cas où celles-ci ne sont pas corrélées. Ceci avec la considération d'une structure à rigidité stochastique. On remarque que c'est au premier niveau que la différence entre les deux cas apparaît clairement, les écarts type obtenus par l'hypothèse de non corrélation sont plus faibles que ceux obtenus en considérant une corrélation parfaite des variables aléatoires. L'écart maximal entre les deux cas étant constaté au niveau de la fréquence propre du sol. Cependant, pour les hautes fréquences les deux cas se confondent. On remarque en outre, qu'en passant du niveau bas au niveau haut, l'effet de la corrélation de la rigidité sur la variabilité du spectre s'atténue.

La figure 7.22 représente l'effet de la variabilité de l'amortissement de la structure sur l'écart type de l'accélération maximale de réponse. On note pour ce cas, contrairement au cas précédent, que la non corrélation des variables aléatoires donne des valeurs de l'écart type supérieures à celles obtenues en considérant une corrélation parfaite. L'écart entre les deux cas atteint son maximum au niveau de la fréquence propre du sol. Ainsi, les structures dont les fréquences propres fondamentales avoisinent celles du sol sur lequel elles sont fondées sont les plus affectées par la variabilité des caractéristiques de la structure relativement à celle de l'excitation sismique.

Nous avons pu voir en figures 7.18, 7.19 et 7.20 que pour les courbes représentant les spectres moyens de réponse, étaient ordonnées de sorte que celles qui correspondaient au niveau bas présentaient les plus faibles valeurs et en passant au niveaux supérieurs les valeurs moyennes des spectres augmentaient. Ceci n'est plus vérifié pour les courbes des écarts types. La figure 7.23 montre pour l'hypothèse de rigidité aléatoire que l'écart type de l'accélération maximale absolue du premier niveau peut dépasser celles des niveaux supérieurs. Ceci est plus visible pour un sol de faible rigidité. Cela est dû en fait, à la contribution de la variabilité de la structure dans la détermination de l'écart type du spectre de réponse, celle-ci étant relativement plus grande au droit du premier niveau qu'aux niveaux plus élevés. (Cf. fig. 7.26 et fig. 7.27).

La figure 7.24 représente les courbes des écarts types des spectres de réponse, la structure étant considérée avoir un amortissement aléatoire. Dans ce cas la contribution de la variabilité des caractéristiques du système n'est pas aussi visible qu'elle l'a été pour le cas d'une rigidité aléatoire. Cependant, pour le cas où les deux propriétés sont toutes les deux supposées aléatoires (Figure 7.25) cette contribution pour le premier niveau apparaît clairement pour les différents types de sol.

Par ailleurs, pour analyser la contribution de la variabilité de la structure relativement à celle de l'excitation sismique dans la détermination de la variance du spectre de réponse, nous reconsidérons les équations 6.51 et 6.52 à partir desquelles nous définissons le rapport  $\beta$  tel que :

$$\beta = \frac{A_1^2 B_1 + A_2^2 B_3 + 2 A_1 A_2 B_5}{(\sigma_{\ddot{u}_T})^2} \quad \text{pour } \delta \geq 0.69 \quad (7.7)$$

et

$$\beta = \frac{C_1^2 B_1 + C_2^2 B_2 + C_3^2 B_3 + 2(C_1 C_2 B_4 + C_1 C_3 B_5 + C_2 C_3 B_6)}{(\sigma_{\ddot{u}_T})^2} \quad \text{pour } \delta < 0.69 \quad (7.8)$$

Les figures 7.26 et 7.27 montrent la variation du rapport  $\beta$  pour le cas de rigidité aléatoire et pour le cas d'amortissement aléatoire respectivement. Elles nous ont permis de constater que la contribution de la variabilité matérielle du système relativement à l'aléa de l'excitation diminue en montant d'un niveau à un niveau plus élevé. On note également que le cas de rigidité stochastique présente une contribution plus grande que le cas d'amortissement aléatoire.

### 7.5 Conclusions:

La prise en compte des incertitudes relatives aux propriétés de la structure lors de la conception ou la vérification engendre un réaménagement important dans les procédures classiques de calcul. Ceci est dû en grande partie au fait de l'introduction de l'aspect

probabiliste pour la quantification de la variabilité de la réponse, d'autant plus que cette dernière doit être déterminée sous la double hypothèse, de système et excitation stochastiques. Ainsi, dans la perspective d'analyser l'impact de telles considérations sur différentes étapes du calcul dynamique des structures nous avons entrepris cette investigation paramétrique. Nous avons étudié le variabilité des fréquences et modes propres de vibration ainsi que celle de la densité spectrale des réponses et enfin celle des spectres de réponse. Ceci nous a permis de constater que l'augmentation de la corrélation entre les caractéristiques de la structure induisait une augmentation des COV des valeurs propres, mais toujours est-il que cette augmentation ne dépassait pas la valeur du COV de la propriété aléatoire elle-même. Si le système comprenait plusieurs caractéristiques stochastiques non corrélées, alors les COV des valeurs propres auront comme borne supérieure la racine carrée de la somme des carrés des COV des propriétés du système. Cependant, en ce qui concerne les COV des composantes des vecteurs propres, ils peuvent être très grands relativement à ceux des propriétés de la structure.

Par ailleurs, l'étude de la variabilité de la d.s.p de la réponse nous a permis de voir qu'à l'instar de la d.s.p moyenne, les courbes des écarts types de celle-ci présentaient leurs majeures variations au droit des fréquences propres, plus particulièrement celle du mode fondamental. Cependant, pour les deux propriétés considérées, à savoir la rigidité et l'amortissement, nous avons constaté que l'écart type de la d.s.p chutait et tendait à s'annuler aux niveaux des fréquences propres pour le cas de rigidité stochastique, tandis que pour celui d'amortissement aléatoire l'écart type présentait des pics en ces mêmes endroits.

L'analyse de l'effet de la corrélation des propriétés du systèmes a montré une nette différence entre le cas de rigidité aléatoire et celui d'amortissement stochastique, du fait que dans le premier cas l'augmentation de la corrélation induisait une augmentation de la variabilité de la d.s.p, en revanche, pour le second cas elle engendrait une diminution de cette dernière.

D'autre part, la comparaison entre la variabilité de la d.s.p induite par une rigidité aléatoire et celle induite par un amortissement aléatoire, nous a permis de constater une nette différence entre les deux cas. Le premier cas engendrait des écarts types de la d.s.p plus grands que le second. Ainsi, la variabilité de la d.s.p de réponse d'une structure où les deux propriétés considérées sont supposées stochastiques en même temps, est plus affectée par la variabilité de la rigidité que par celle de l'amortissement.

Quant à l'analyse comparative des écarts types des d.s.p obtenues pour les différents types de sol, elle nous a permis de constater que l'utilisation des paramètres du filtre (sol)  $\omega_0$  et  $\zeta$  qui

correspondaient au sol de rigidité moyenne aboutissait aux plus grandes valeurs de la variabilité de la d.s.p, tandis que ceux qui correspondaient au sol mou menaient aux plus petites valeurs. Cependant, on ne pourrait se prononcer quant à l'effet des caractéristiques du sol réel sur la variabilité de la réponse de la structure, du moment que pour une telle fin il faudrait introduire l'effet de l'interaction entre le sol et la structure.

Pour sa part, l'analyse de la variabilité des spectres de réponse a révélé que la contribution de l'aléa des caractéristiques mécaniques peut être comparable et même dépasser la contribution de l'aléa sismique, particulièrement pour les niveaux bas des structures dont la fréquence de vibration fondamentale est proche de celle du sol. Nous avons pu aussi constater que cette contribution est plus grande pour le cas de rigidité incertaine que pour celui d'amortissement stochastique.

Par ailleurs, l'augmentation de la corrélation des caractéristiques de la structure a pour effet d'introduire une augmentation de la variabilité du spectre de réponse pour le cas de rigidité aléatoire, et inversement elle engendre une diminution de celle-ci pour le cas d'amortissement stochastique. Cependant cette variation était proéminente au voisinage de la fréquence propre du sol. On a constaté également que l'effet de la corrélation diminuait en passant du niveau bas aux niveaux plus élevés, ce qui s'interprète par une influence moindre de la variabilité des caractéristiques matérielles relativement à celle de l'excitation sismique pour les niveaux élevés.

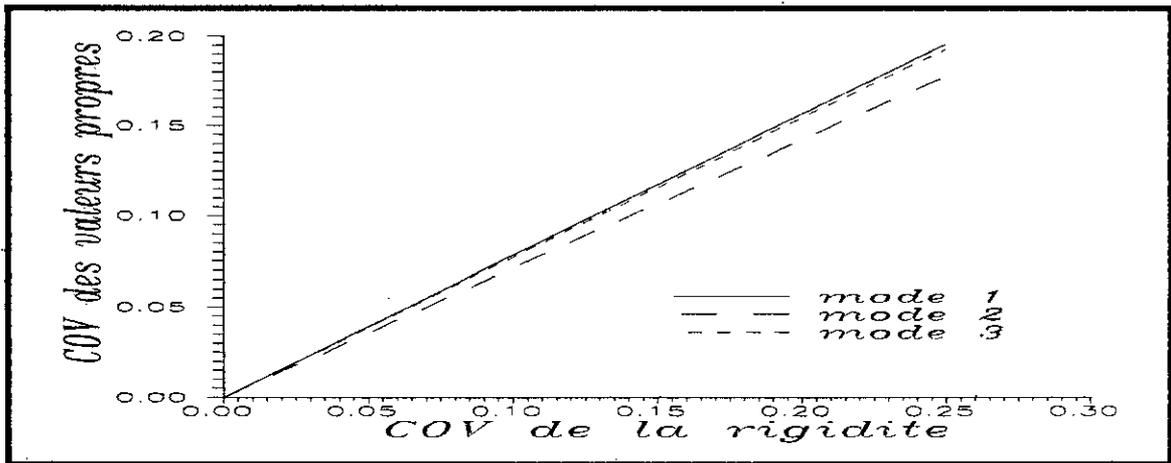


Fig. 7.2 Variation du COV des valeurs propres en fonction de celui de la rigidité.

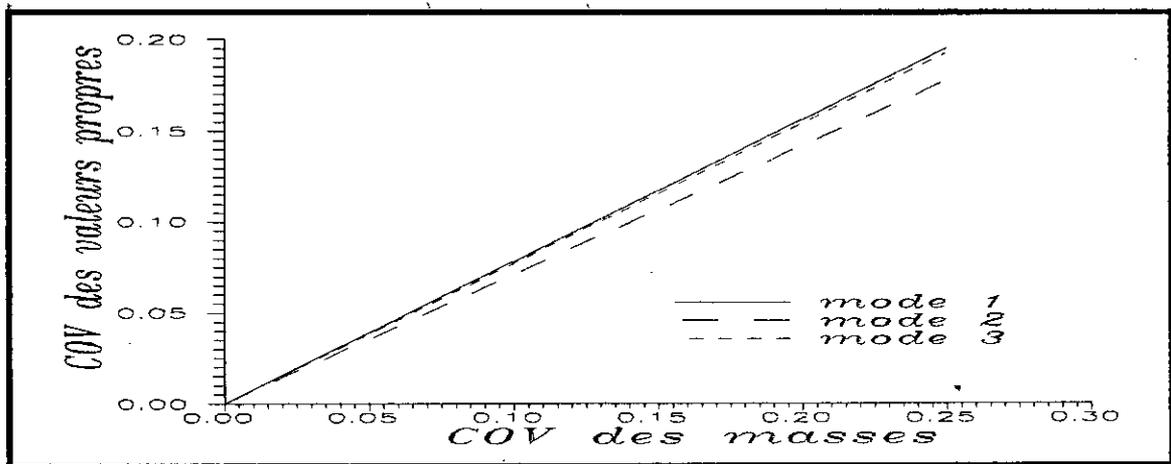


Fig. 7.3 Variation du COV des valeurs propres en fonction de celui des masses.

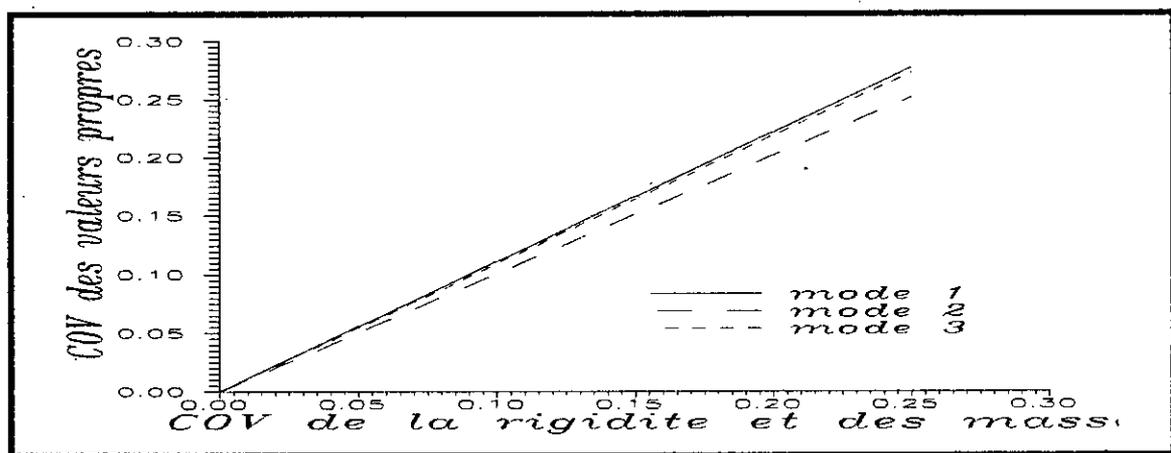


Fig. 7.4 Variation du COV des valeurs propres en fonction de ceux de la rigidité et des masses.

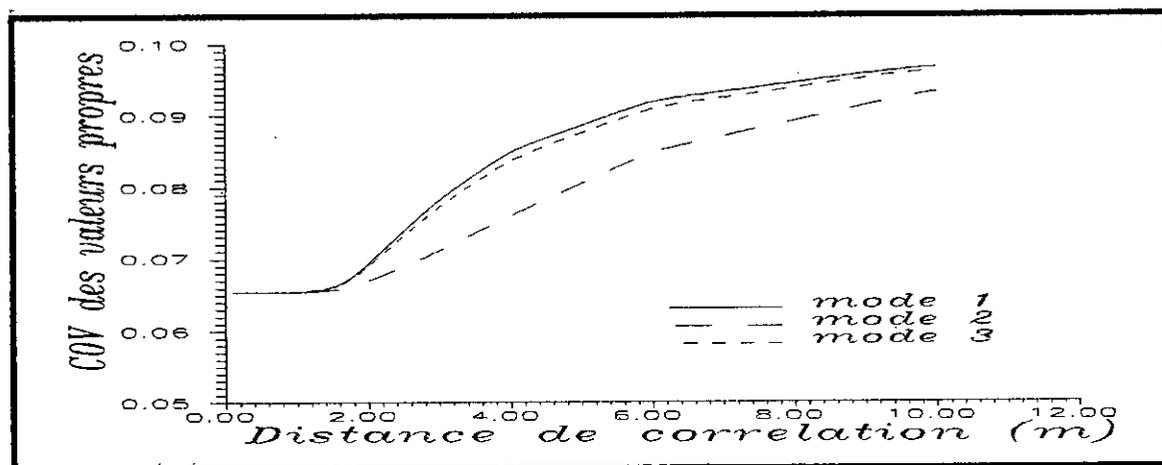


Fig. 7.5 Variation du COV des valeurs propres en fonction de la distance de corrélation de la rigidité.

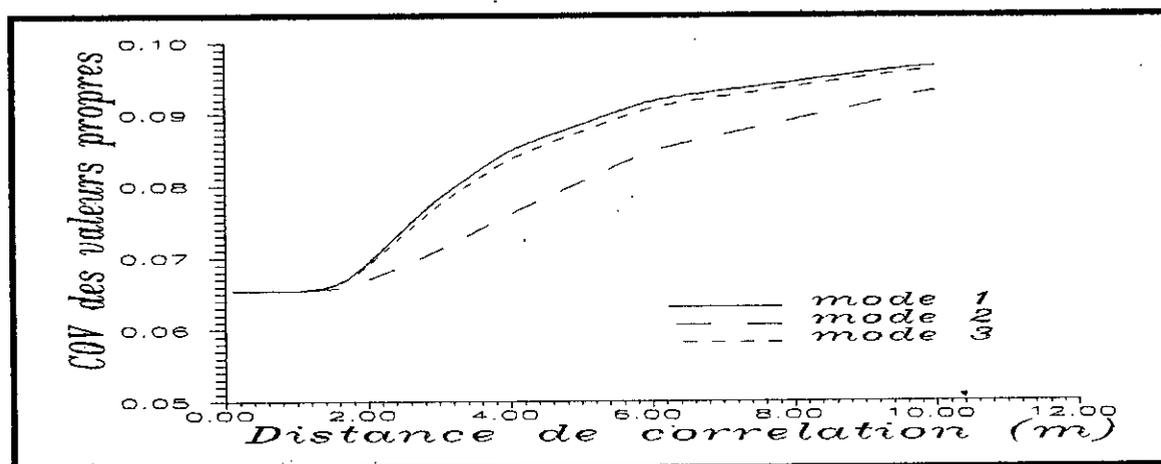


Fig. 7.6 Variation du COV des valeurs propres en fonction de la distance de corrélation des masses.

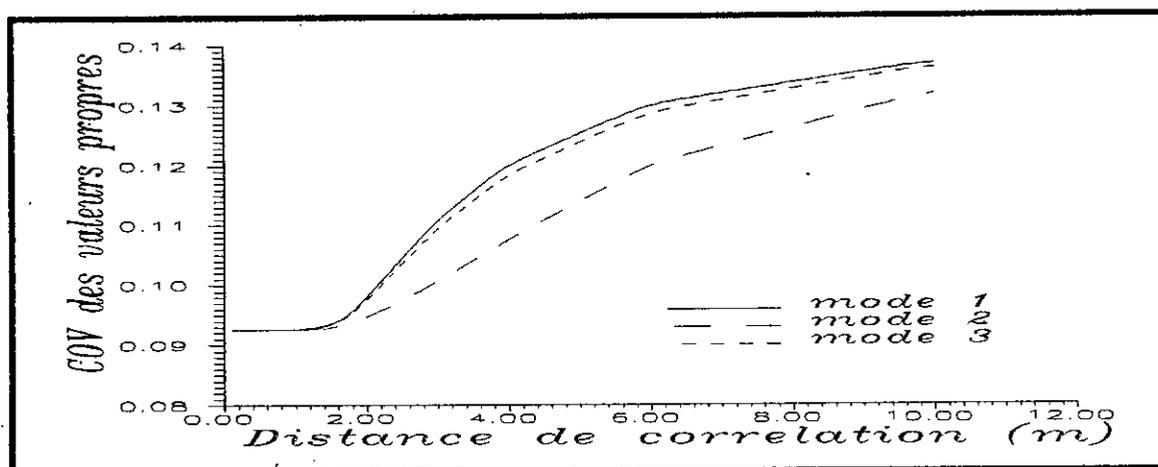


Fig. 7.7 Variation du COV des valeurs propres en fonction des distances de corrélation de la rigidité et des masses

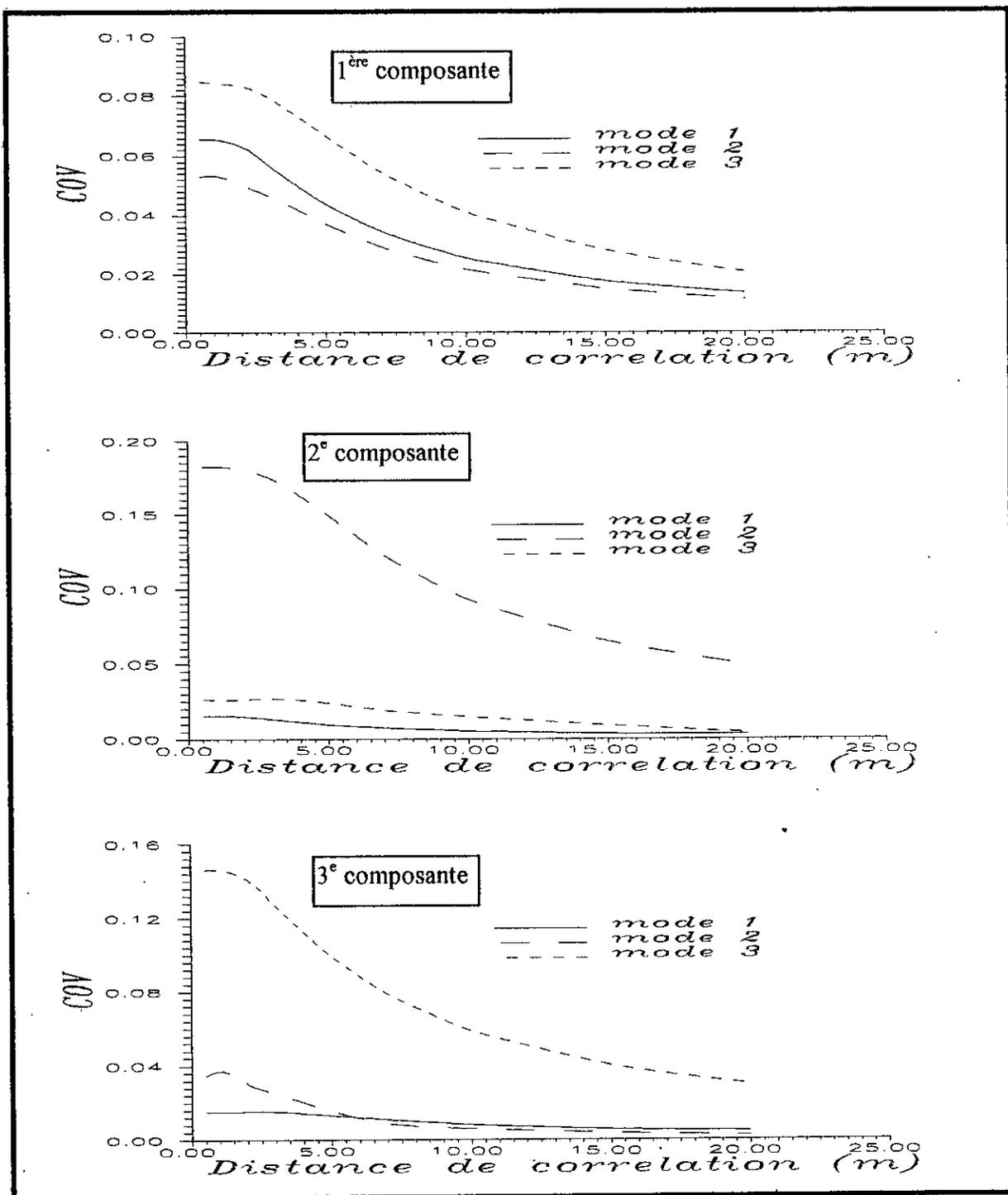


Fig. 7.8 Variation des COV des composantes des vecteurs propres en fonction de la distance de corrélation de la rigidité.

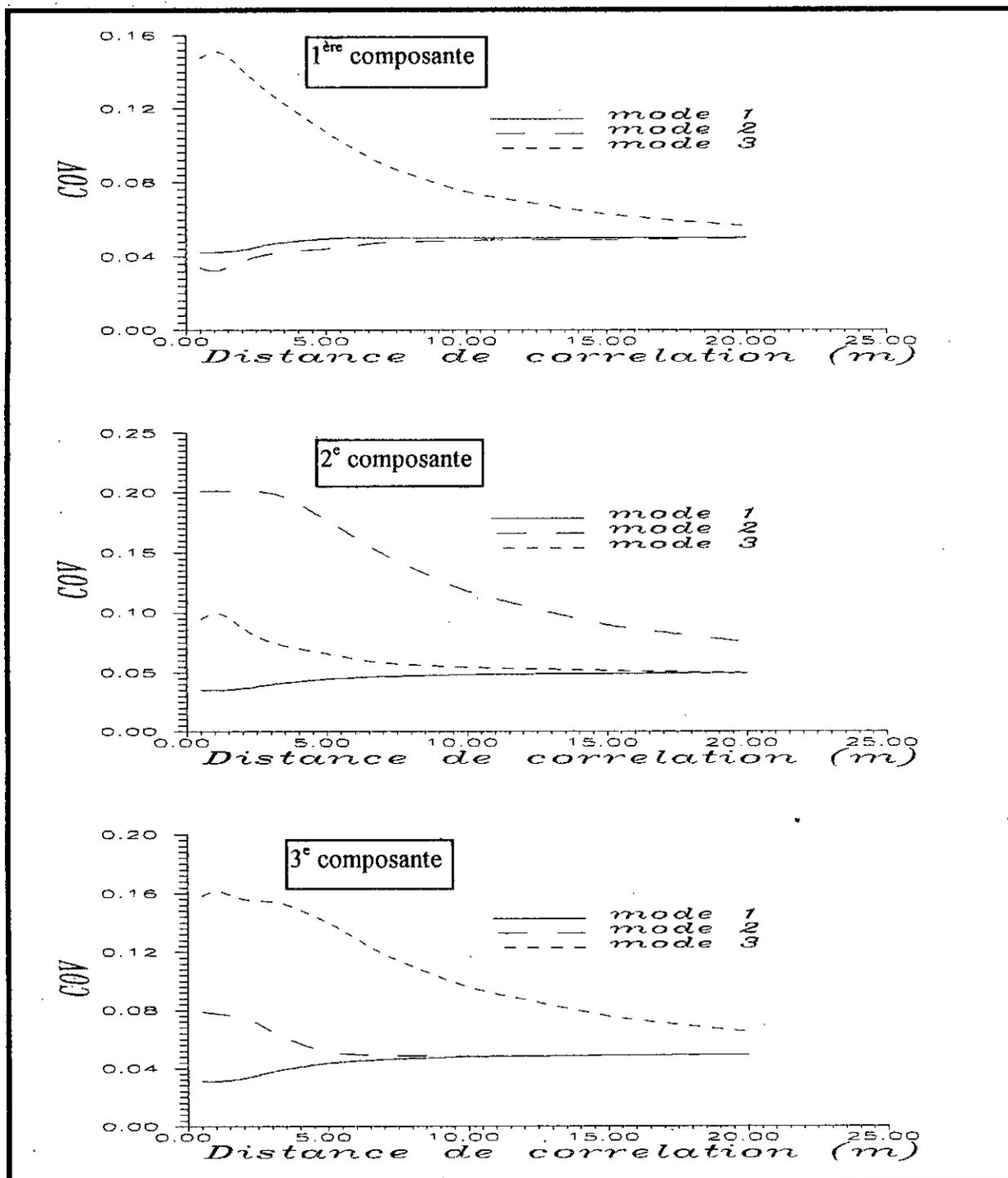


Fig. 7.9 Variation des COV des composantes des vecteurs propres en fonction de la distance de corrélation des masses.

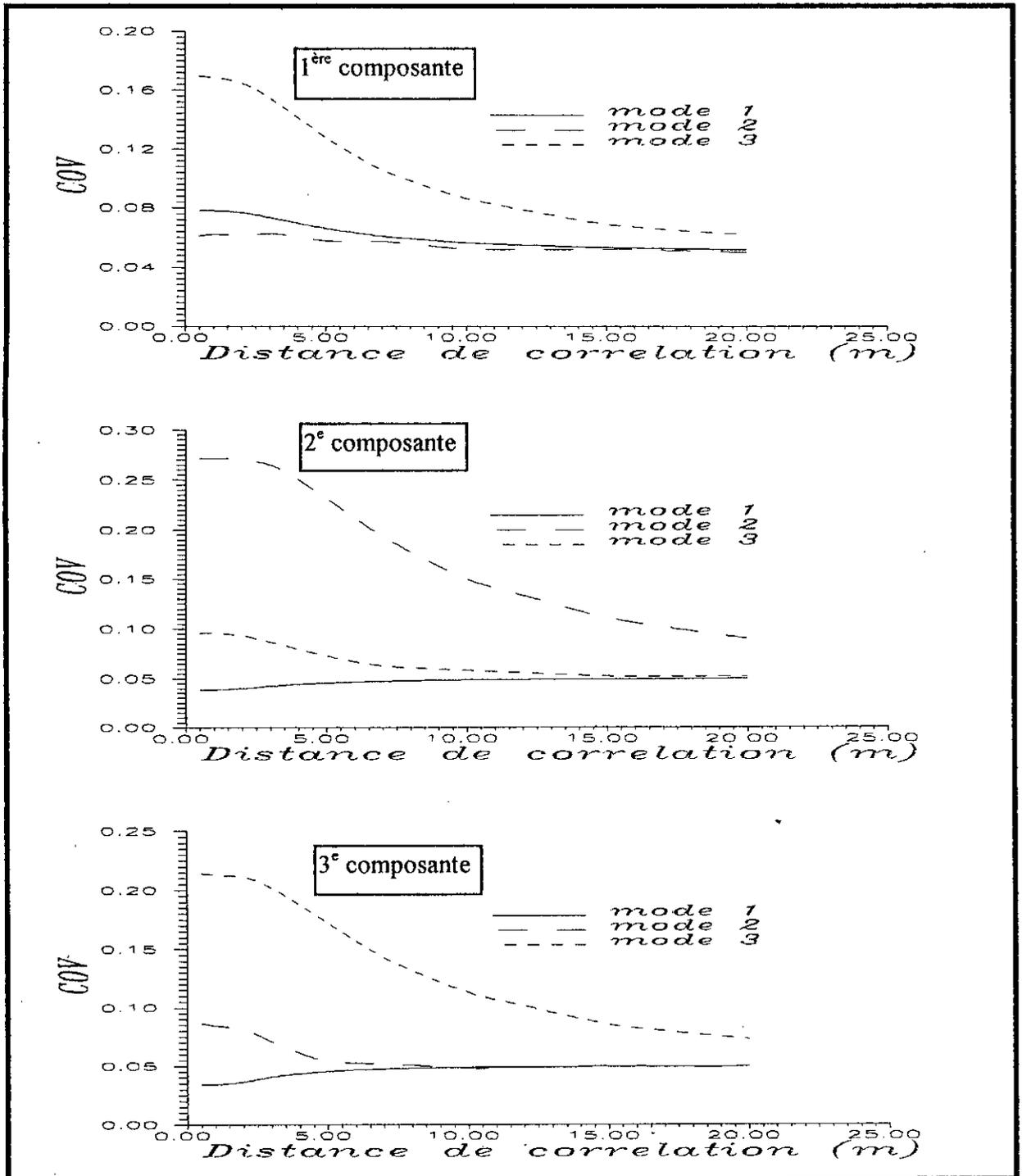


Fig. 7.10 Variation des COV des composantes des vecteurs propres en fonction des distances de corrélation de la rigidité et des masses.

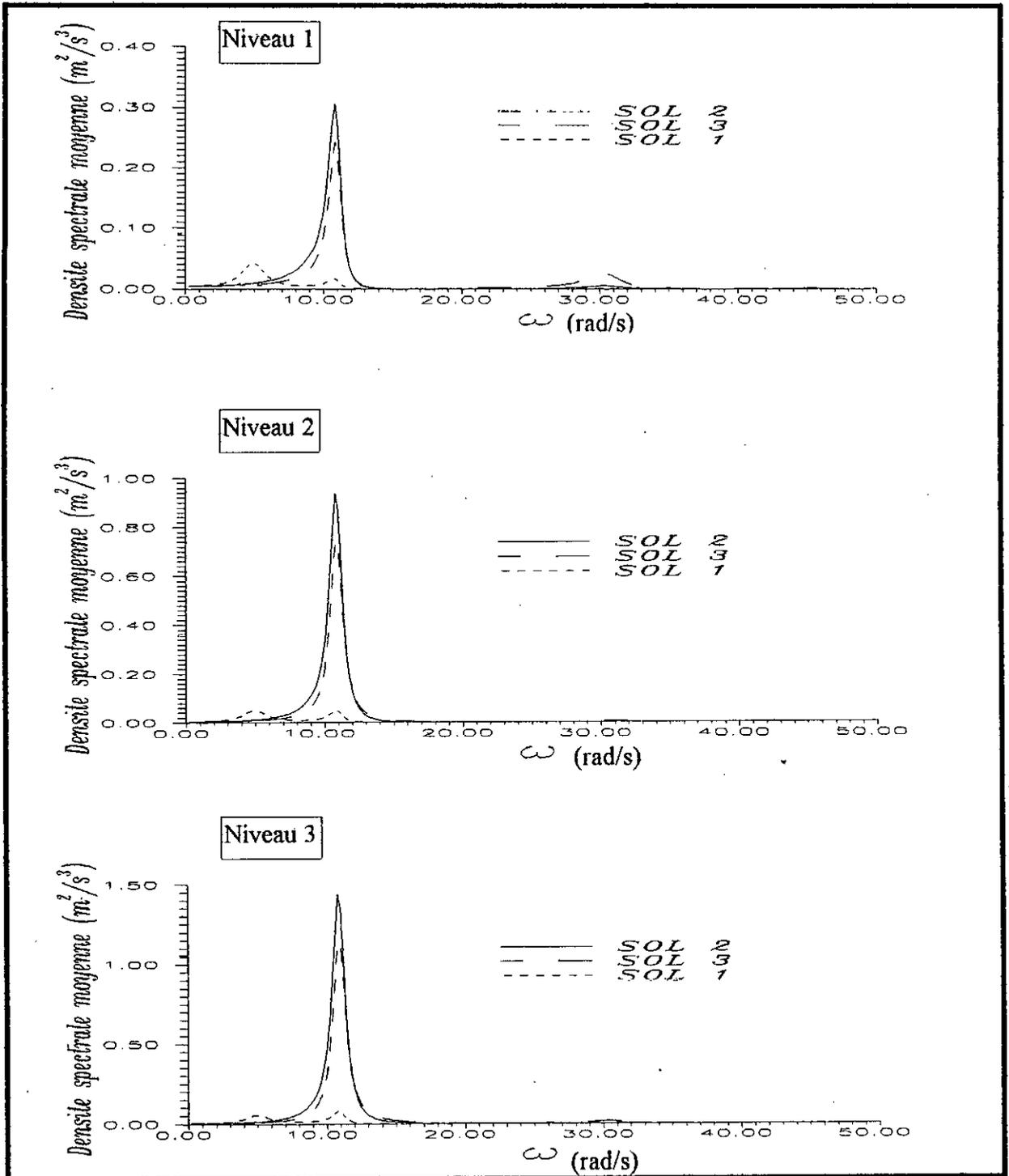


Fig. 7.11 Variation de la densité spectrale moyenne de réponse en fonction des différents types de sol et pour les trois niveaux.

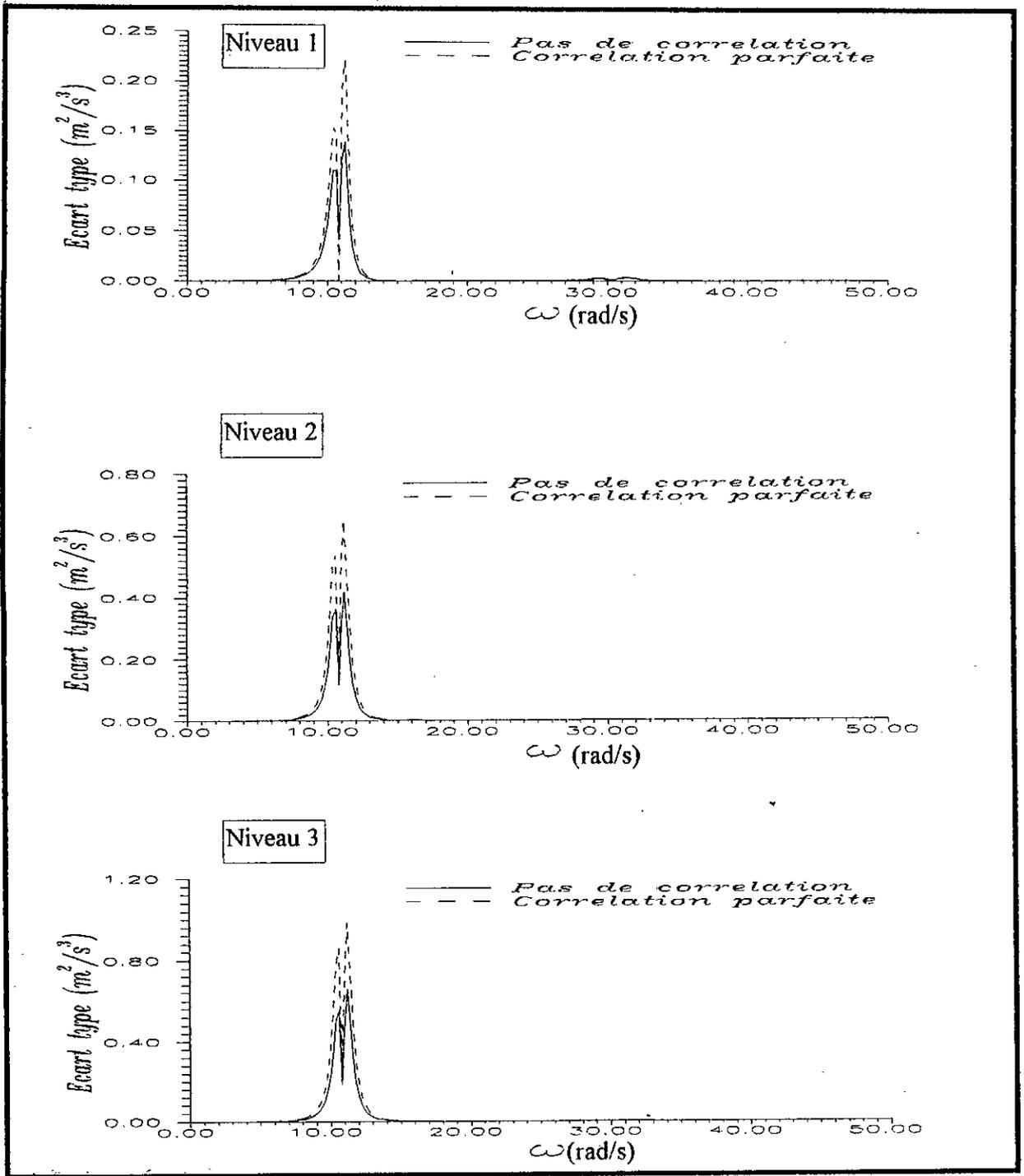


Fig. 7.12 Variation de l'écart type de la densité spectrale de réponse dans le cas où la rigidité seule est aléatoire.

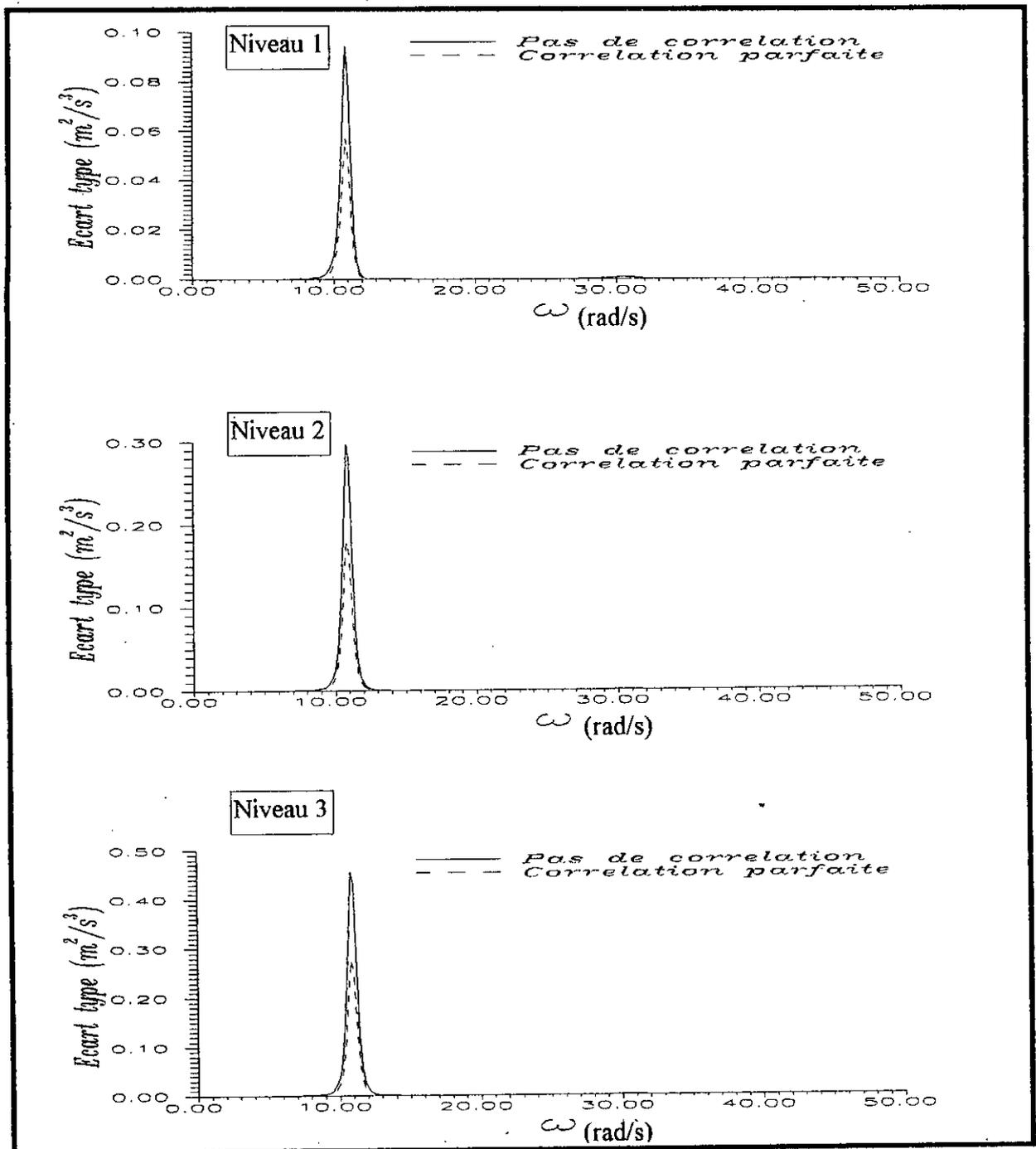


Fig. 7.13 Variation de l'écart type de la densité spectrale de réponse dans le cas où l'amortissement seul est aléatoire.

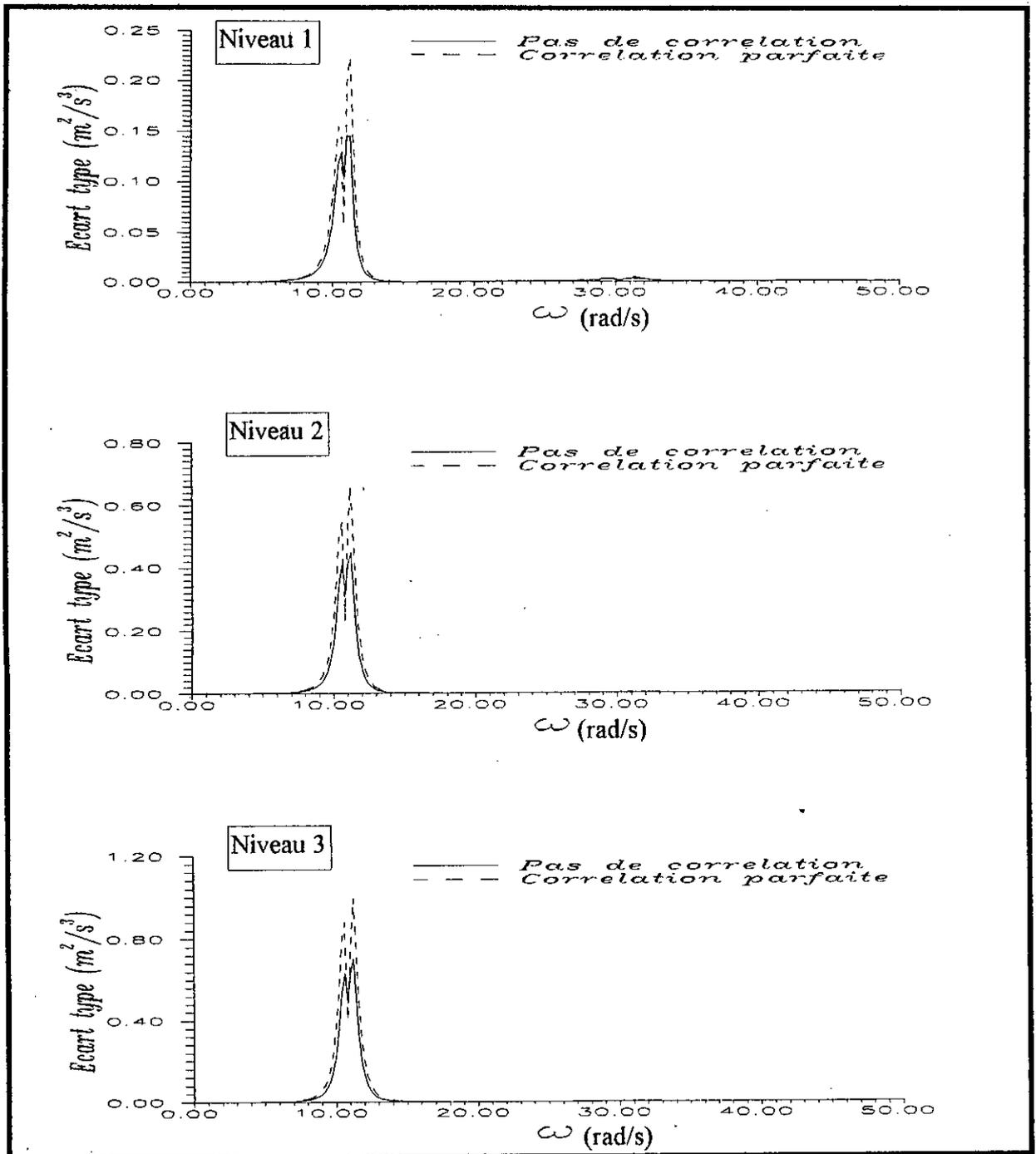


Fig. 7.14 Variation de l'écart type de la densité spectrale de réponse dans le cas où l'amortissement et la rigidité sont aléatoires.

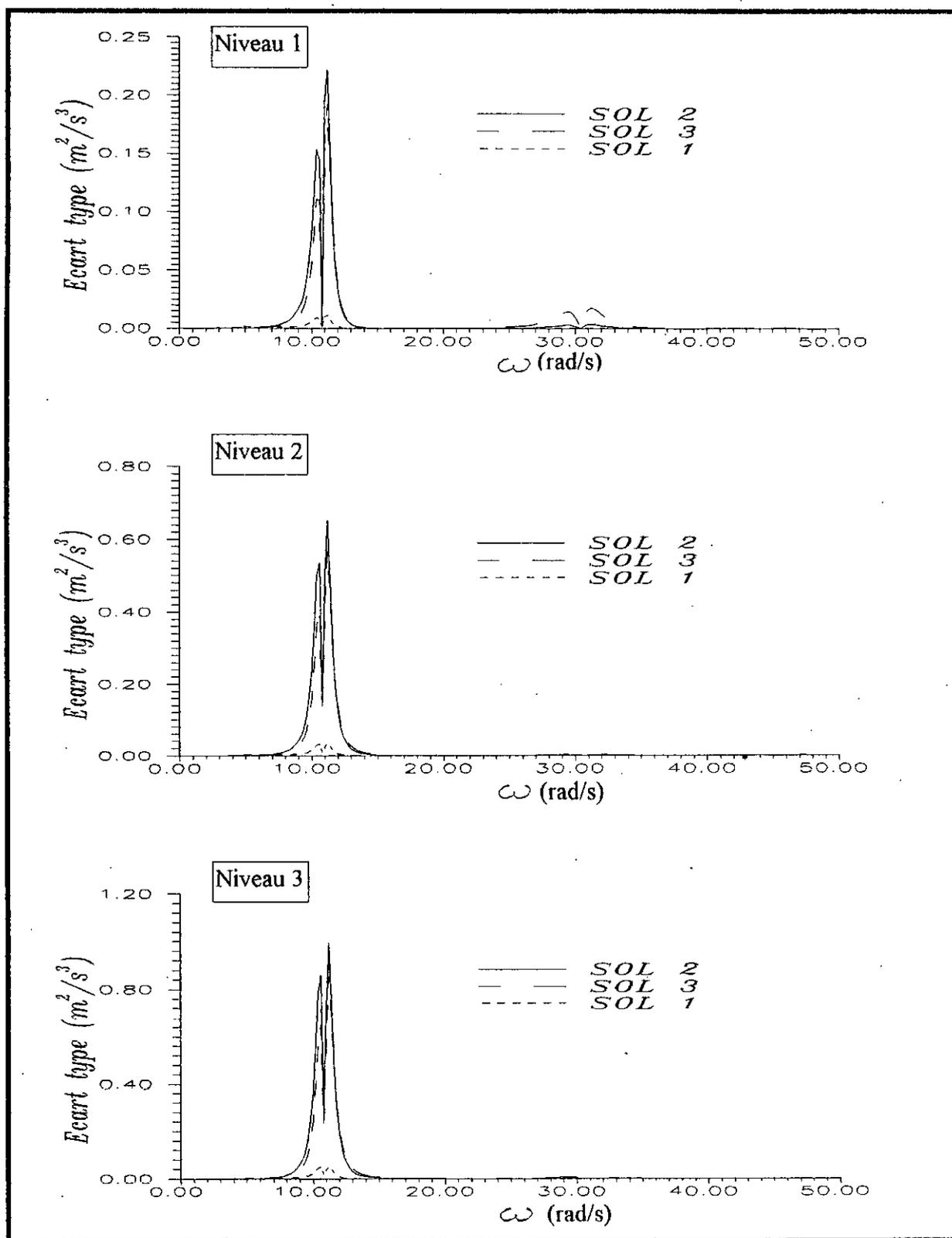


Fig. 7.15 Variation de l'écart type de la densité spectrale de réponse en fonction du type de sol. (Rigidité aléatoire seulement).

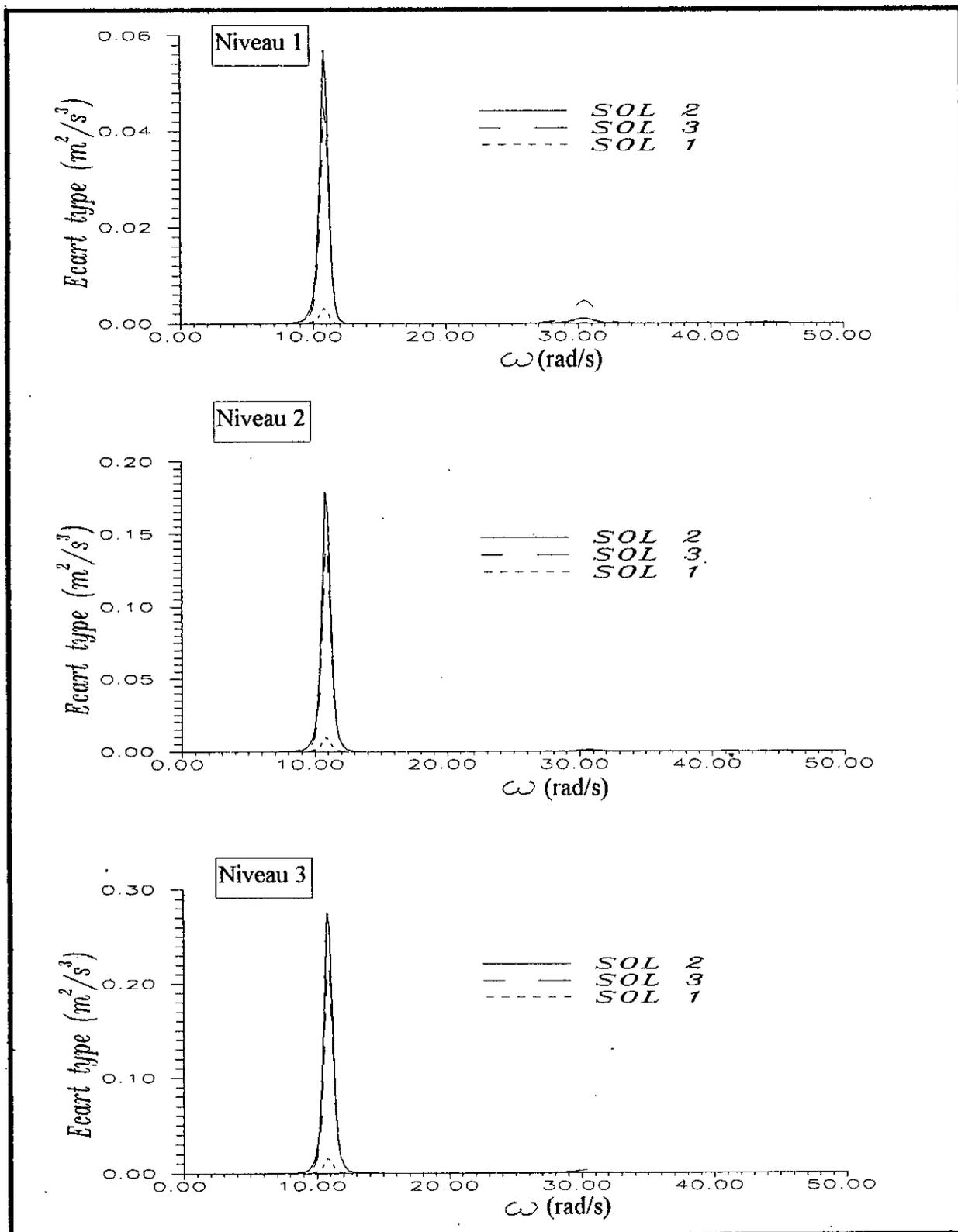


Fig. 7.16 Variation de l'écart type de la densité spectrale de réponse en fonction du type de sol. (Amortissement aléatoire seulement).

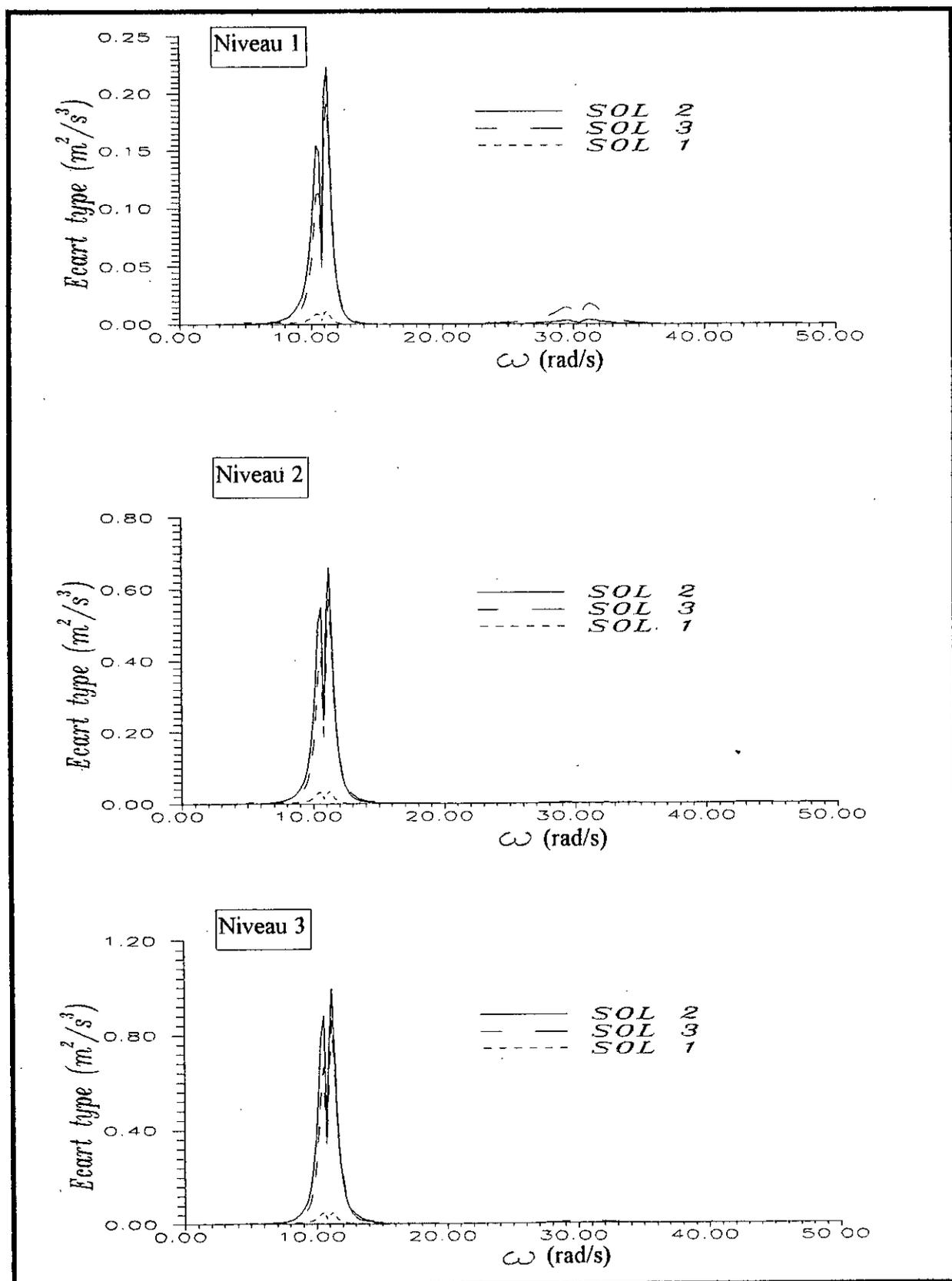


Fig. 7.17 Variation de l'écart type de la densité spectrale de réponse en fonction du type de sol. (Rigidité et amortissement aléatoires.)

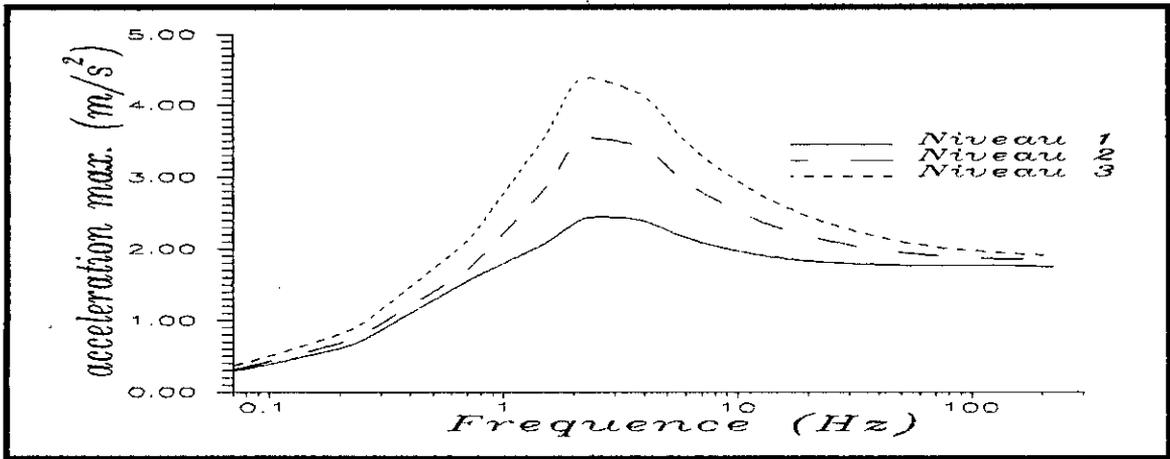


Fig. 7.18 Spectre moyen de réponse pour un sol rigide

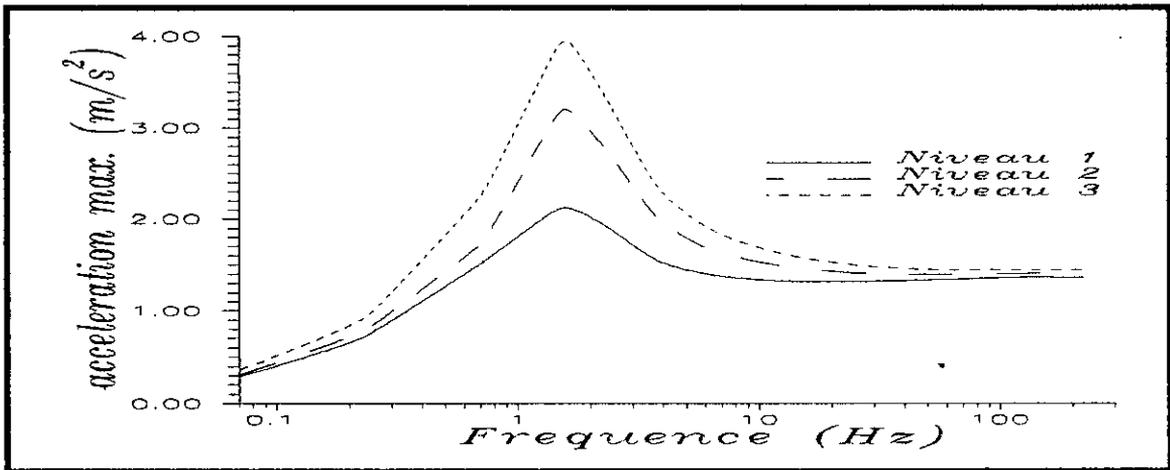


Fig. 7.19 Spectre moyen de réponse pour un sol de rigidité moyenne

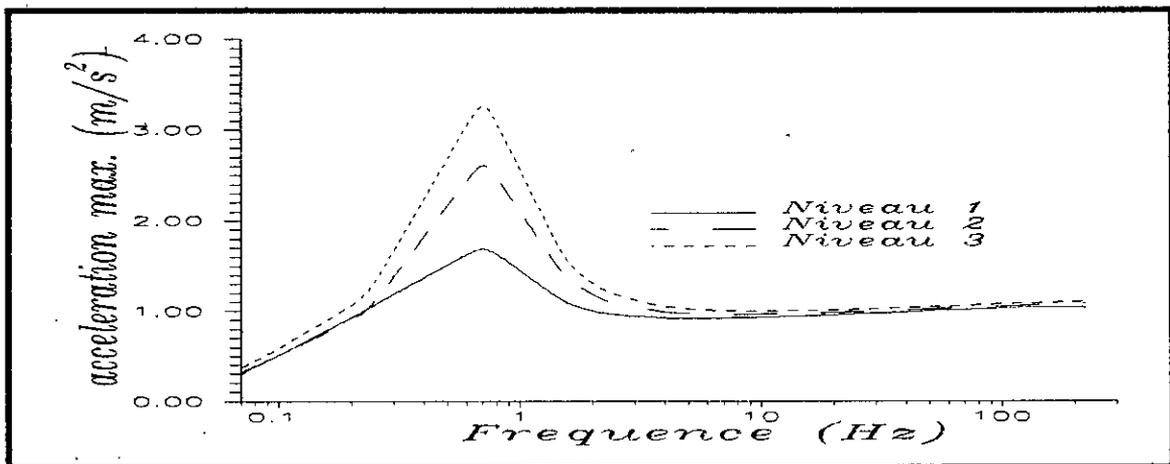


Fig. 7.20 Spectre moyen de réponse pour un sol mou

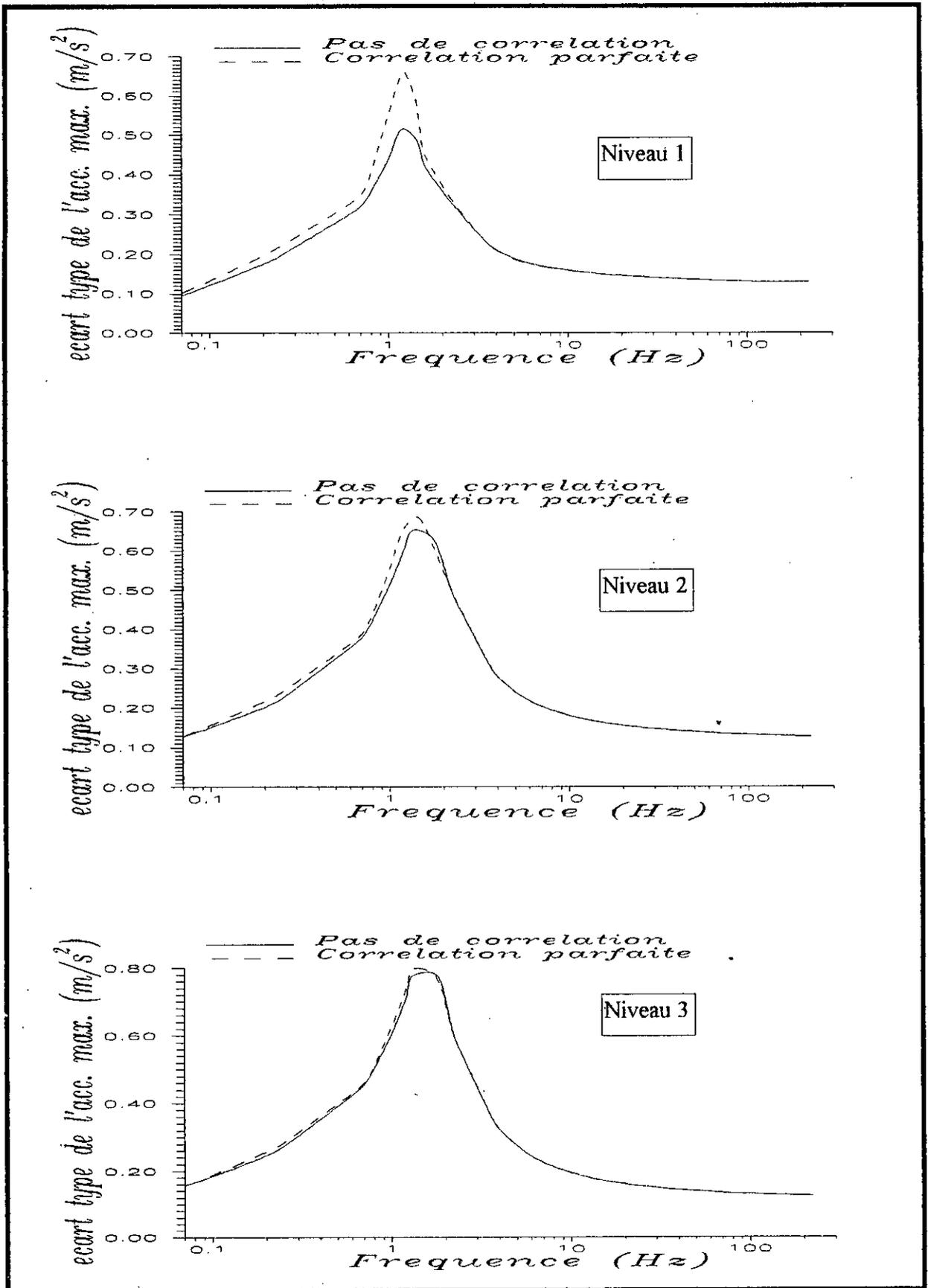


Fig. 7.21 Ecart type du spectre de réponse (rigidité aléatoire seulement).

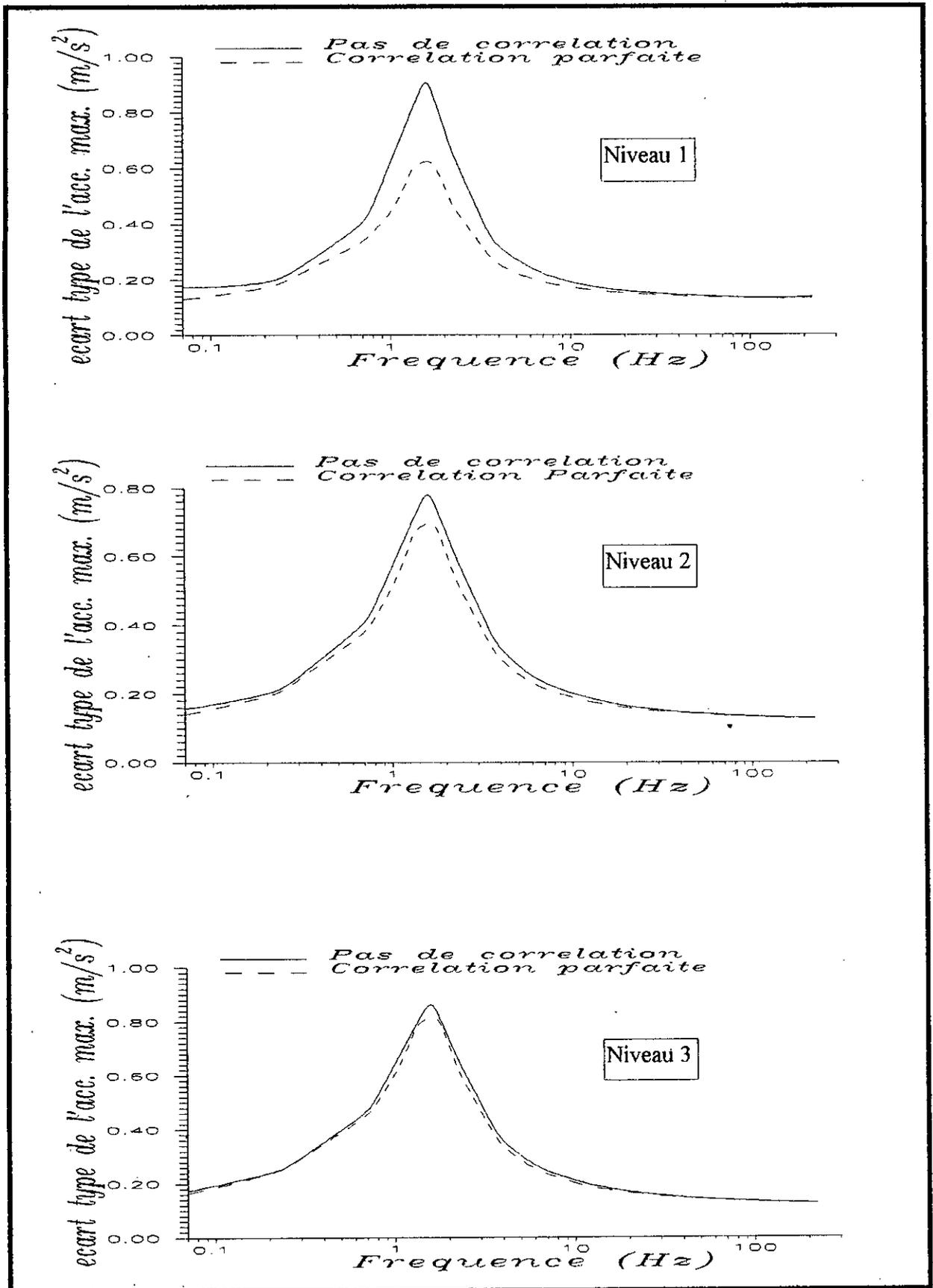


Fig. 7.22 Ecart type du spectre de réponse (amortissement aléatoire seulement).

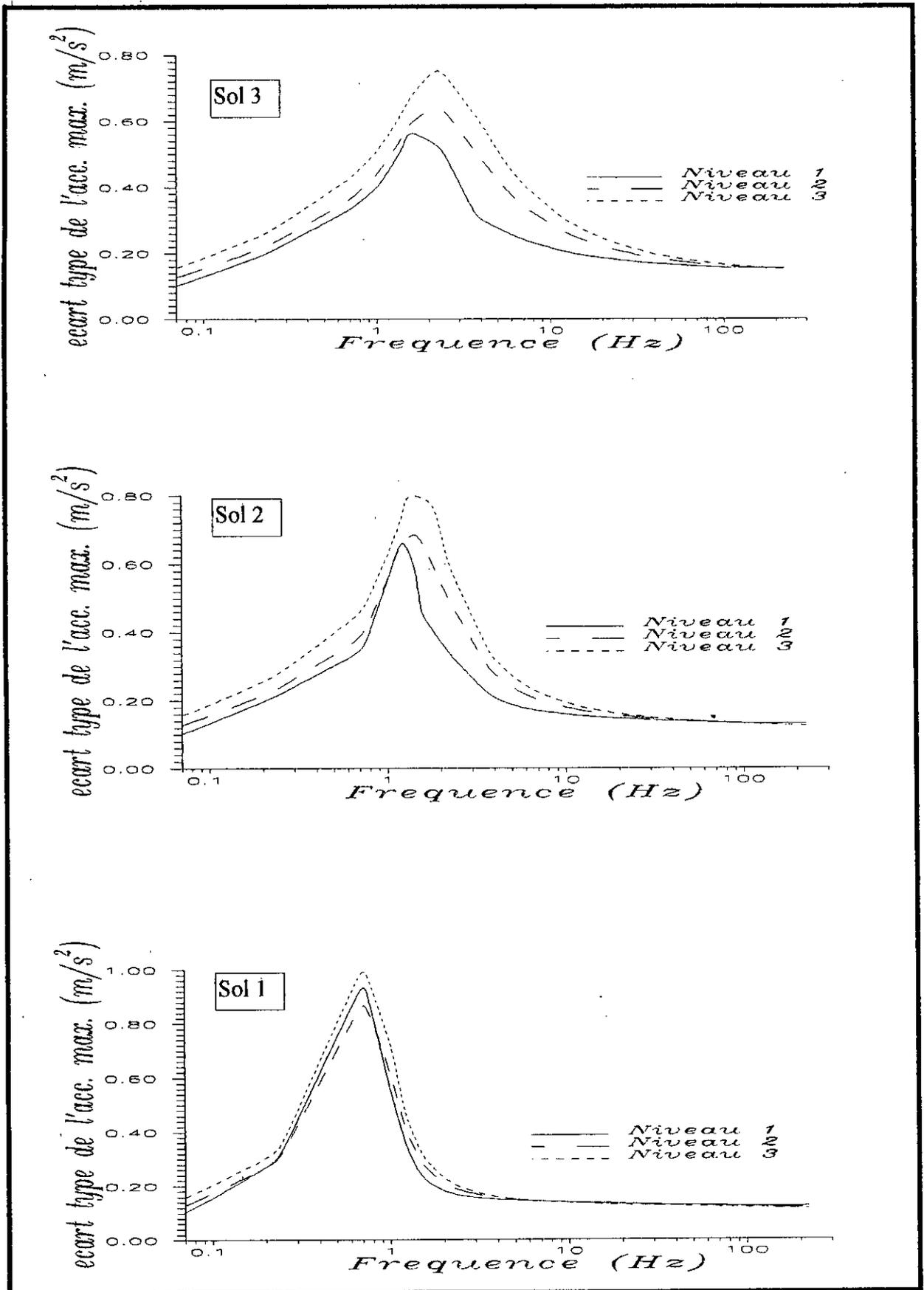


Fig. 7.23 Ecart type du spectre de réponse pour différents types de sol (rigidité aléatoire).

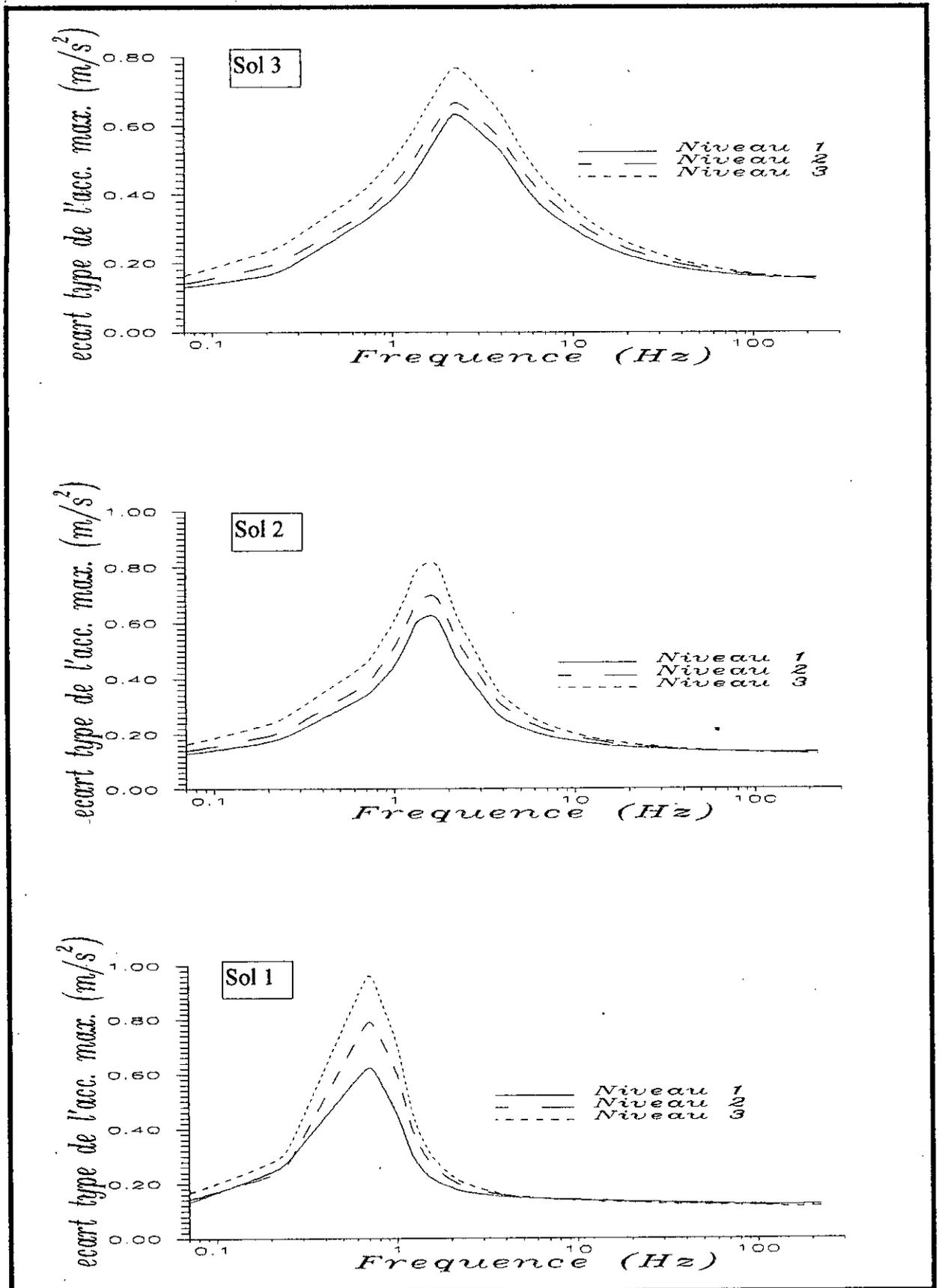


Fig. 7.24 Ecart type du spectre de réponse pour les différents types de sol (amortissement aléatoire).

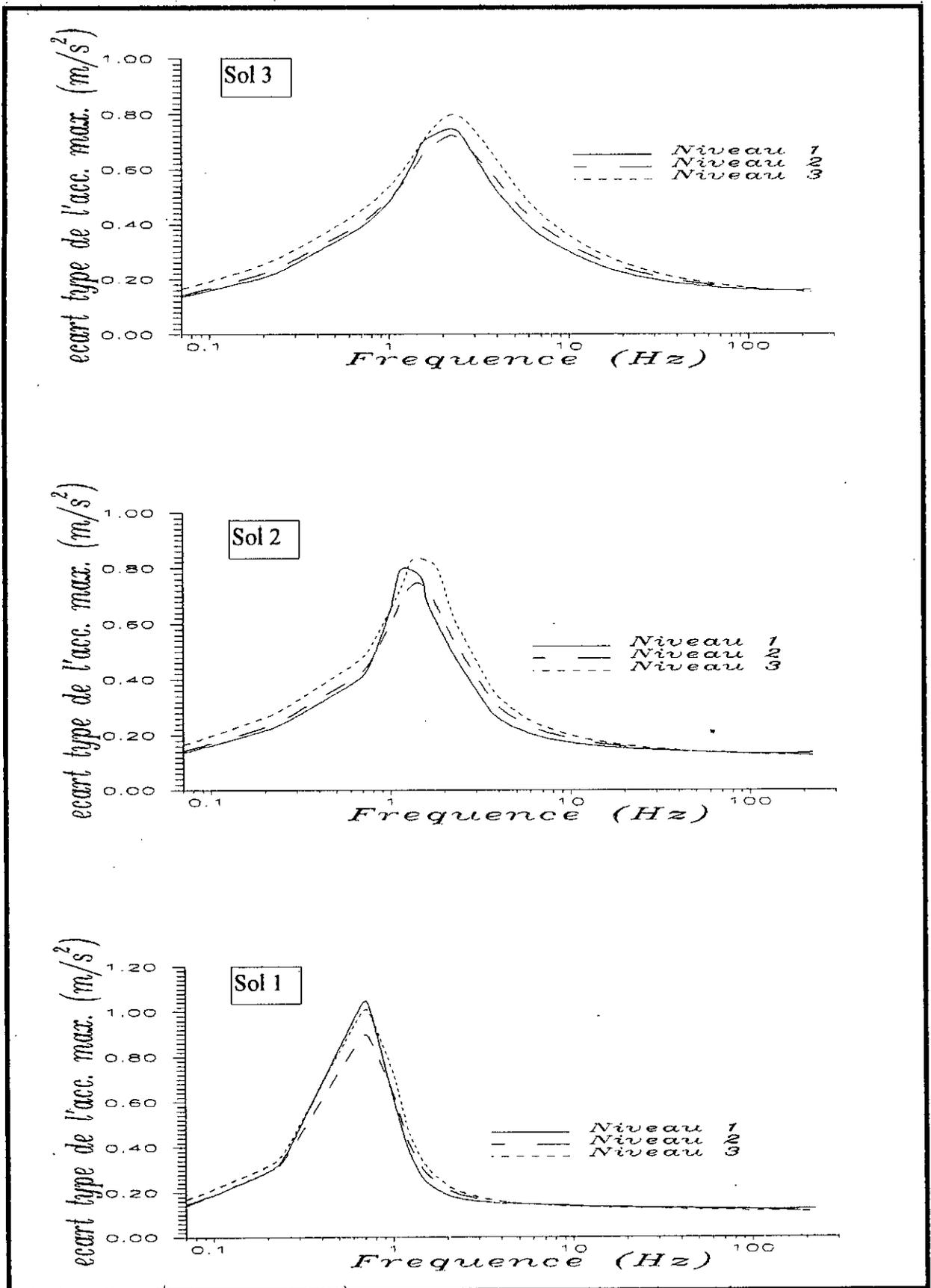


Fig. 7.25 Ecart type du spectre de réponse pour les différents types de sol (rigidité et amortissement aléatoires).

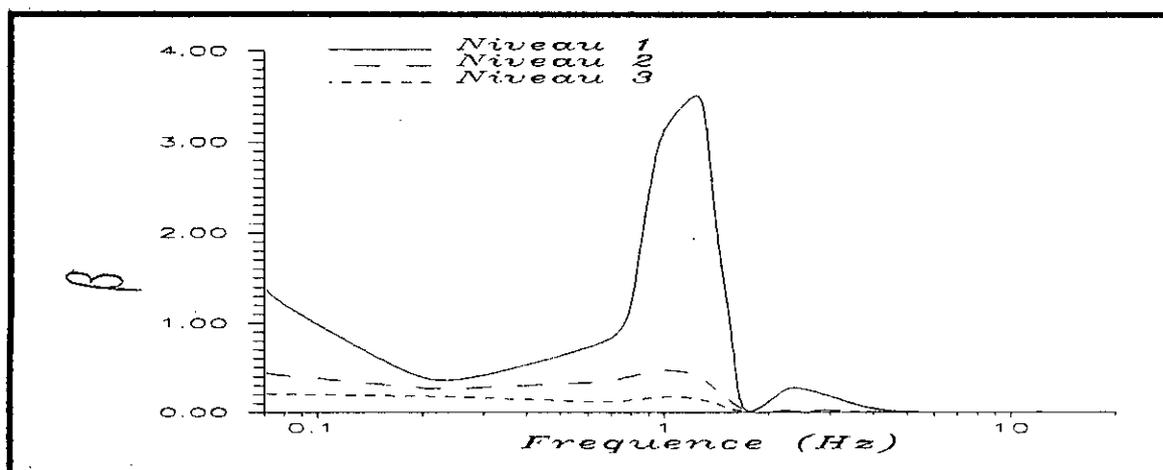


Fig. 7.26 Rapport de la variabilité de la réponse causée par une rigidité stochastique à celle causée par l'aléa sismique

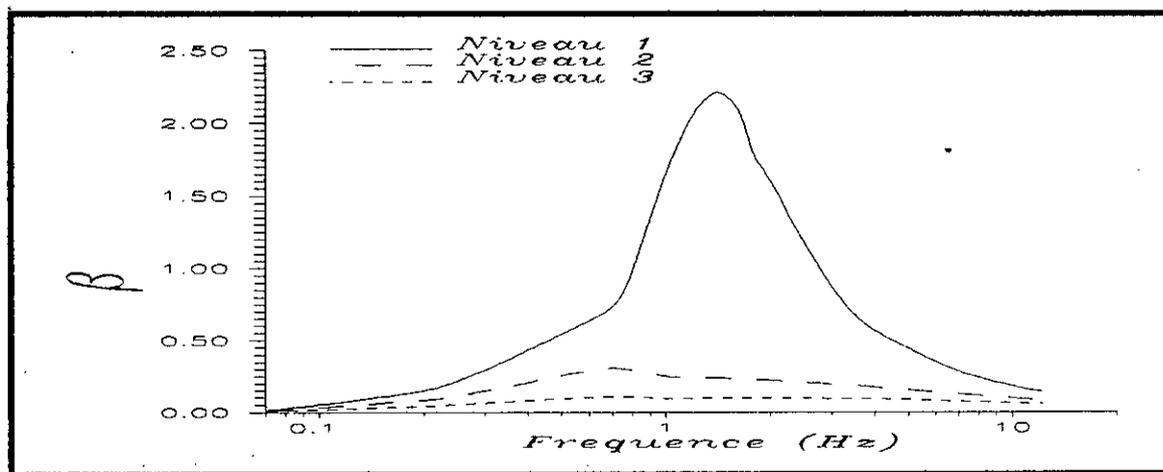


Fig. 2.27 Rapport de la variabilité de la réponse causée par un amortissement stochastique à celle causée par l'aléa sismique

## CHAPITRE 8

### Conclusions générales et recommandations

Les matériaux utilisés pour la fabrication ou la construction d'un système ou d'une structure, de par leurs constitutions naturelles ou leurs modes de préparation, renferment souvent des incertitudes plus ou moins importantes quant à leurs caractéristiques mécaniques ou géométriques.

Particulièrement en génie civil, des matériaux tel le béton ou le sol qui en fait représentent les éléments de base dans le système, sont loin d'avoir des propriétés physiques parfaitement contrôlées. Cela étant, les règlements de construction en vigueur adoptent en général une approche déterministe en préconisant des coefficients de sécurité lors du calcul des ouvrages pour contourner l'obstacle des incertitudes. Toutefois ceux-ci aboutissent souvent à des surdimensionnements exagérés.

Récemment, l'analyse basée sur des approches probabilistes a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs, en raison de sa représentation plus réaliste de l'aspect aléatoire. Ainsi est apparue la méthode des éléments finis stochastique pour l'étude de la réponse des structures dont les caractéristiques sont considérées imprévisibles à des excitations de nature déterministe ou même stochastique. Ceci a mené à une compréhension meilleure des mécanismes contrôlant l'impact de l'hypothèse de l'aléa du système sur la variabilité de la réponse.

Le présent travail a été subdivisé en deux parties, dans la première nous avons étudié la variabilité de la réponse des structures sous l'effet des excitations statiques. Pour ce faire nous avons exposé plusieurs méthodes couplant la MEF et la théorie des probabilités. Parallèlement, ceci nous a permis l'établissement d'une étude comparative entre ces dernières. Dans la seconde partie, nous avons analysé à l'aide de l'une des procédures présentées en première partie en l'occurrence la méthode des perturbations, les COV des fréquences et modes propres de vibration des structures stochastiques. Nous avons également étudié la variabilité de la densité spectrale des réponses sous l'effet d'une excitation sismique, ainsi que leurs spectres de réponse.

L'investigation paramétrique de la première partie nous a permis de définir un intervalle d'applicabilité des méthodes de perturbation, celles-ci ne donnent des résultats relativement précis que pour de petites variabilités des caractéristiques matérielles du système ( $COV < 0.25$ ). Cependant, il a été constaté que les techniques de simulation qui sont considérées comme le moyen le plus fiable pour l'étude des systèmes aléatoires, nécessitent un temps machine substantiel; et ceci s'accroît de façon très sensible pour les problèmes bidimensionnels. Incidemment, il y a lieu de noter l'apparition récente de nouvelles méthodes de simulation visant à diminuer l'effort numérique mis en jeu. Ceci par le biais de l'utilisation du développement de Neumann de l'inverse de la matrice de rigidité [47, 48, 58], ayant comme conséquence d'éviter le calcul de l'inverse d'une matrice dans une procédure itérative.

La représentation spectrale de la variabilité des propriétés mécaniques à l'aide des intégrales pondérées a permis de déterminer des bornes supérieures des COV de la réponse indépendamment de la nature de corrélation existante entre les différentes variables aléatoires; ce qui est d'une utilité appréciable du moment que pour la majorité des problèmes physiques, seuls les premier et second moments statistiques peuvent être obtenus avec une précision relative. Grâce à ces bornes nous avons pu constater que la variabilité de la réponse engendrée par un système aléatoire pourrait éventuellement être très grande comparée à celle qui en était la cause, i.e. la variabilité des propriétés du système.

Par ailleurs, l'analyse aux valeurs propres des structures stochastiques a révélé une influence comparable entre la variabilité de la rigidité et celle de la masse sur les COV des fréquences propres. Ceci, n'était pas le cas pour les vecteurs propres, particulièrement pour les fortes corrélations des caractéristiques structurales, où chaque cas avait sa propre tendance à cause de la condition de normalisation appliquée aux vecteurs propres par rapport à la matrice des masses.

La considération de la variabilité matérielle lors d'une conception parasismique représente l'avantage appréciable d'augmenter la fiabilité des ouvrages bâtis en zones sismiques; d'autant plus que la comparaison entre l'augmentation de la variabilité que produit l'hypothèse supplémentaire d'une structure aléatoire et la variabilité causée par l'aléa sismique seulement, a montré que celles-ci peuvent être comparables. Ainsi, l'effet de l'incertitude des caractéristiques du système ne peut être négligé devant le hasard sismique. Il y a lieu cependant, de noter que la variabilité de la rigidité produit des écarts types de la réponse plus grands que la considération d'une structure à amortissement stochastique.

Enfin, on rappelle que l'étude des systèmes aléatoires suscite toujours la curiosité de nombreux chercheurs. Le défi à relever étant de trouver un moyen qui se prête de manière plus souple que la simulation au calcul numérique, et permettant en outre l'analyse des structures présentant de grandes variabilités matérielles.

On note également que parmi les travaux dignes d'attention qui commencent à se développer, ceux concernant la propagation des ondes dans des milieux aléatoires [1, 26]. L'objectif serait de caractériser le mouvement sismique à la surface terrestre en tenant compte des incertitudes des caractéristiques du sol traversé par les ondes à partir de la source sismique.

Par ailleurs, la prise en compte de l'aléa des caractéristiques mécaniques des structures dans l'analyse de leur réponse présentée dans cette thèse, pourrait éventuellement être étendue à l'étude des statistiques de la réponse en considérant l'effet de l'interaction statique ou dynamique entre le sol et la structure, avec l'hypothèse que ces deux systèmes possèdent des propriétés matérielles stochastiques. Il est également d'un intérêt non moins appréciable de considérer le cas de structures aléatoires étendues, avec la prise en compte de l'aspect spatial de la variabilité de l'excitation sismique dans l'évaluation des statistiques de la réponse.

**Références bibliographiques**

- [1] Askar, A., Cakmak, A. S., "Seismic Waves in Random Media", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, No. 3, September, 1988.
- [2] Baecher, G. B., Igra, T. S., "Stochastic FEM in Settlement Predictions", Journal of the Geotechnical Engineering Division, Vol. 107, No. GT4, pp. 449-463, April, 1981.
- [3] Bass, J., "Elément de calcul des probabilités", Masson et Cie, Paris, 1967.
- [4] Bryant, P. R., "A Demonstration of the Method of Stochastic Finite Element Analysis", Master's Thesis AFIT/GA/AA/89M-01, Air Force Institute of Technology, Ohio, March, 1989.
- [5] Bucher, C. G., Shinozuka, M., "Structural Response Variability II", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 12, pp. 2035-2054, December, 1988.
- [6] Chakraborty, S., Dey, S. S., "Stochastic Finite Element Method for Spatial Distribution of Material Properties and External Loading", Computers and Structures, Vol. 55, No. 1, pp. 41-45, 1995.
- [7] Cherng, R. H., Wen, Y. K., "Reliability of Uncertain Nonlinear Trusses Under Random Excitation II", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120, No. 4, pp. 748-757, April, 1994.
- [8] Cherng, R. H., Wen, Y. K., "Reliability of Uncertain Nonlinear Trusses Under Random Excitation I", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120, No. 4, pp. 733-747, April, 1994.
- [9] Clough, R. W., Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw Hill, 1975.
- [10] Crandall, S. H., "First-Crossing Probabilities of the Linear Oscillator", Journal of Sound and Vibration, Vol. 12 (3), pp. 285-299, 1970.
- [11] Davenport, A. G., "Note on the Distribution of the Largest Value of a Random Function with Application to Gust Loading", Proceedings, Institution of Civil Engineers, Vol. 28, pp. 187-196, 1964.
- [12] Deodatis, G., "Bounds on Response Variability of Stochastic Finite Element Systems", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 116, No. 3, pp. 565-585, March, 1990.
- [13] Deodatis, G., "Bounds on Response Variability of Stochastic Finite Element Systems: Effect of Statistical Dependence", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 5, No. 2, pp. 88-98, 1990.

- [14] Deodatis, G., "Stochastic FEM Sensitivity Analysis of Nonlinear Dynamic Problems", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 4, No 3, pp. 135-141, 1989.
- [15] Deodatis, G., "Weighted Integral Method. I: Stochastic Stiffness Matrix", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 8, pp. 1851-1864, August, 1991.
- [16] Deodatis, G., Shinozuka, M., "Bounds on Response Variability of Stochastic Systems", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 11, pp. 2543-2563, November, 1989.
- [17] Deodatis, G., Shinozuka, M., "Weighted Integral Method. II: Response Variability and Reliability", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, No. 8, pp. 1865-1877, August, 1991.
- [18] Der Kiureghian, A., "A Response Spectrum Method for Random Vibration Analysis of MDF Systems", *Earthquake Engineering And Structural Dynamics*, Vol. 9, pp. 419-435, 1981.
- [19] Der Kiureghian, A., "Structural Response to Stationary Excitation", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 106, pp. 1195-1213, 1981.
- [20] Friedrich, J. W., Deodatis, G., "Variability Response Functions of Stochastic Plane Stress/Strain Problems", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 9, pp. 1963-1982, September, 1994.
- [21] Fu, G., Moses, F., "Multimodal Simulation Method for System Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 6, pp. 1173-1179, June, 1993.
- [22] Ghanem, R. G., Spanos, P. D., "A Spectral Formulation of Stochastic Finite Elements", *Proceedings of the 10th International Invitational Unification of Finite Elements Methods Symposium, MA, USA*, pp. 59-82, 1991.
- [23] Ghanem, R. G., Spanos, P. D., "Stochastic Finite Element Analysis With Curved Boundaries", *Proceedings of the 6th International Conference on Application of Statistics and Probability in Civil Engineering, Mexico*, pp. 158-165, 1991.
- [24] Ghanem, R. G., Spanos, P. D., "Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach", *Springer-Verlag, New York*, 1991.
- [25] Hisada, T., Nakagiri, S., "Role of the Stochastic Finite Element Method in Structural Safety and Reliability", *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference on Structural Safety and Reliability*, pp. 385-394, 1985.
- [26] Hryniewicz, Z., Hermans, A. J., "Free-Field Response from Inclined Body Waves in a Viscoelastic Random Medium", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 1025-1040, 1989.
- [27] Igusa, T., Der Kiureghian, A., "Response of Uncertain Systems to Stochastic Excitation", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 5, pp. 812-832, May, 1988

- [28] Jensen, H., Iwan, D., "Response of Systems with Uncertain Parameters To Stochastic Excitation", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 5, pp. 1012-1025, May, 1992.
- [29] Kameda, H., Morikawa, H., "Conditioned Stochastic Processes for Conditional Random Fields", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 120, No. 4, pp. 855-875, April, 1994.
- [30] Kardara, A., Bucher, C. G., Shinozuka, M., "Structural Response Variability III", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 8, pp. 1726-1747, August, 1989.
- [31] Kardara, A., Bucher, C., Shinozuka, M., "Response Analysis of Stochastic Structures", Technical Report NCEER-88-1988
- [32] Katafygiotis, L. S., Papadimitriou, C., "Dynamic Response Variability of Structures with Uncertain Properties", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, pp. 775-793, 1996.
- [33] Lee, X., Dasgupta, G., "Analysis of Structural Variability with Computer Algebra", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 1, pp. 161-171, January, 1988.
- [34] Liaw, D. G., Yang, H., T., Y., "Reliability of Randomly Imperfect Beam-Columns", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 10, pp. 2251-2270, October, 1989.
- [35] Liu, P. L., Liu, K. G., "Selection of Random Field Mesh in Finite Element Reliability Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 119, No. 4, pp. 667-679, April, 1993.
- [36] Liu, W. K., Belytschko, T., Mani, A., "Random Field Finite Elements", *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, Vol. 23, pp. 1831-1845, 1986.
- [37] Liu, W. K., Besterfield, G. H., Belytschko, T., "Variational Approach to Probabilistic Finite Elements", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 12, pp. 2115-2133, December, 1988.
- [38] Mochio, T., Kondo, M., Sekiya, H., Ibe, H., "Stochastic Seismic Response Analysis of Structures with Uncertain Properties", *Mitsubishi Technical Bulletin*, No. 198, pp. 1-6, 1992.
- [39] Naganuma, T., Deodatis, G., Shinozuka, M., "ARMA Model for Two-Dimensional Processes", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, No. 2, pp. 234-251, February, 1986.
- [40] Newland, D. E., "An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis", Second Edition, Longman Scientific and Technical, 1984.

- [41] Pecker, A., "Dynamique des Sols", Presses de l'ENPC, Paris, 1984.
- [42] Press, W. H., et al., "Numerical Recipes", Cambridge University Press, 1989.
- [43] Samaras, E., Shinozuka, M., Tsurui, A., "ARMA Representation of Random Processes", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 111, No. 3, pp. 449-461, March, 1983.
- [44] Shinozuka, M., "Structural Response Variability", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 113, No. 6, June, pp. 825-842, 1987.
- [45] Shinozuka, M., Deodatis, G., "Response Variability of Stochastic Finite Elements Systems", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 3, pp. 499-518, March, 1988.
- [46] Shinozuka, M., Deodatis, G., Harada, T., "Digital Simulation of Seismic Ground Motion", Technical Report NCEER-87-0017, August, 1987.
- [47] Spanos, P. D., Ghanem, R. G., "Stochastic Finite Element Expansion for Random Media", Technical Report NCEER-88-0005, March, 1988.
- [48] Spanos, P. D., Ghanem, R., "Stochastic Finite Element Expansion for Random Media", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 5, pp. 1035-1053, May, 1989.
- [49] Spanos, P. D., Zeldin, B. A., "Galerkin Sampling Method for Stochastic Mechanics Problems", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 120, No. 5, pp. 1091-1106, May, 1994.
- [50] Spanos, P. D., Zeldin, B. A., "Indirect Sampling Method for Stochastic Mechanics Problems", Proceedings of the 6th International Conference of Structural Safety and Reliability, Austria, pp. 8-13, 1993.
- [51] Spanos, P. D., Zeldin, B. A., "Stochastic Mixed Finite Difference Method", Proceedings of the 6th Probabilistic Mechanics Structural and Geotechnical Reliability Specialty Conference, ASCE, CO, USA, pp. 804-807, 1992.
- [52] Spencer, B. F., Elishakoff, I., "Reliability of Uncertain Linear and Nonlinear Systems", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 114, No. 1, pp. 135-148, January, 1988.
- [53] Ukon, H., et al., "Ground Motion Analysis Using Dynamic Stochastic Finite Element Method", Earthquake Engineering, 10<sup>th</sup> World Conference, pp. 873-878, Madrid, 1992.
- [54] Vanmarcke, E. H., "On the Distribution of the First-Passage Time for Normal Stationary Random Processes", Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, pp. 215-220, 1975.
- [55] Vanmarcke, E., "Random Fields: Analysis and Synthesis", MIT Press, 1983.
- [56] Vanmarcke, E., Grigoriu, M., "Stochastic Finite Element Analysis of Simple

- Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 109, No. 5, pp. 1203-1214, October, 1983.
- [57] Yamazaki, F., Shinozuka, M., "Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 7, pp. 1183-1197, July, 1988.
- [58] Yamazaki, F., Shinozuka, M., Dasgupta, G., "Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 114, No. 8, pp. 1335-1354, August, 1988.
- [59] Yamazaki, F., Shinozuka, M., "Simulation of Stochastic Fields by Statistical Preconditioning", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No. 2, pp. 268-287, February, 1990.
- [60] Yang, C. Y., "Random Vibration of Structures", John Wiley and Sons, New York, 1986.
- [61] Zeldin, B. A., Spanos, P. D., "Pseudo-Simulation Method for Stochastic Problems", *Proceedings of the 6th Probabilistic Mechanics Structural and Geotechnical Reliability Specialty Conference, ASCE, CO, USA*, pp. 37-40, 1992.
- [62] Zhu, Q. W., Ren, Y. J., Wu, W. Q., "Stochastic FEM Based on Local Averages of Random Vector Fields", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 118, No. 3, pp. 496-511, March, 1992.
- [63] Zibdeh, H. S., Nusier, S., "Transient Mean Square Response of Stochastic Systems", *Computers and Structures*, Vol. 58, No. 3, pp. 585-596, 1996.
- [64] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., "The Finite Element Method. Basic Formulation and Linear Problems", McGraw Hill, New York, 1989.



$$[\Delta \tilde{K}_2^e] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 144 \frac{E_0 I}{L^6} & & & & \\ 0 & 72 \frac{E_0 I}{L^5} & 36 \frac{E_0 I}{L^4} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -144 \frac{E_0 I}{L^6} & -72 \frac{E_0 I}{L^5} & 0 & 144 \frac{E_0 I}{L^6} & \\ 0 & 72 \frac{E_0 I}{L^5} & 36 \frac{E_0 I}{L^4} & 0 & -72 \frac{E_0 I}{L^5} & 36 \frac{E_0 I}{L^4} \end{bmatrix} \quad \text{Symétrique}$$

Où,  $E_0$  est la valeur moyenne du module d'élasticité de l'élément e.  
 L, A, I, sont respectivement la longueur, la section et le moment d'inertie de l'élément e.

On note que les matrices exposées ci-dessus sont toutes symétriques.



$$[\Delta K_5^e] = \frac{tE_0}{A^2 b} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ d & 0 & & & & & & \\ 0 & -d & 0 & & & & & \\ -d & 0 & d & 0 & & & & \\ 0 & d & 0 & -d & 0 & & & \\ d & 0 & -d & 0 & d & 0 & & \\ 0 & -d & 0 & d & 0 & -d & 0 & \\ -d & 0 & d & 0 & -d & 0 & d & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Symétrique}$$

$$[\Delta K_4^e] = \frac{tE_0}{A^2 b} \begin{bmatrix} c & & & & & & & \\ 0 & a & & & & & & \\ -c & 0 & c & & & & & \\ 0 & -a & 0 & a & & & & \\ c & 0 & -c & 0 & c & & & \\ 0 & a & 0 & -a & 0 & a & & \\ -c & 0 & c & 0 & -c & 0 & c & \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & -a & 0 & a \end{bmatrix} \quad \text{Symétrique}$$

$$[\Delta K_3^e] = \frac{tE_0}{A^2 b} \begin{bmatrix} a & & & & & & & \\ 0 & c & & & & & & \\ -a & 0 & a & & & & & \\ 0 & -c & 0 & c & & & & \\ a & 0 & -a & 0 & a & & & \\ 0 & c & 0 & -c & 0 & c & & \\ -a & 0 & a & 0 & -a & 0 & a & \\ 0 & -c & 0 & c & 0 & -c & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{Symétrique}$$

Où, pour le cas de contraintes planes nous avons :

$$a = 1, \quad b = 1 - \nu^2, \quad c = \frac{1 - \nu}{2}$$

et pour le cas de déformations planes :

$$a = 1 - \nu, \quad b = (1 + \nu)(1 - 2\nu), \quad c = \frac{1 - 2\nu}{2}$$

Avec par ailleurs,

$$d = \nu + c, \quad r = \frac{L_x}{L_y}, \quad s = \frac{L_y}{L_x} \quad \text{et} \quad A = L_x L_y$$

$E_0$  étant la valeur moyenne du module d'élasticité de l'élément e.

$\nu$  est le coefficient de Poisson de l'élément e.

$L_x$  est la longueur de l'élément e dans la direction x

$L_y$  est la longueur de l'élément e dans la direction y

t es l'épaisseur de l'élément e.

On note également que les matrices présentées ci-dessus sont toutes symétriques.

## Annexe 3

Les Coefficients  $A_i$   $i=1, \dots, 2$  sont donnés par :

$$A_1 = \frac{\varepsilon - \frac{1}{2}}{\sqrt{2\lambda_0\varepsilon}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{2\lambda_0\varepsilon}} + \frac{\gamma}{2\sqrt{\lambda_0}(2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A_2 = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{2\lambda_0\lambda_2^2\varepsilon}} - \frac{\gamma\sqrt{\lambda_0}}{2\lambda_2(2\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}$$

avec :  $\varepsilon = \ln \left( \frac{\Gamma(\frac{\lambda_2}{\lambda_0})^{\frac{1}{2}}}{\pi} \right)$

De leur côté les  $C_k$   $k=1, \dots, 3$  sont exprimés comme suit :

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \left( \sqrt{2\ln(2veT)} + \frac{\gamma}{\sqrt{2\ln(2veT)}} \right) - \frac{\sqrt{\lambda_2}}{4\pi} \left[ \frac{1}{ve\sqrt{2\ln(2veT)}} - \frac{\gamma}{ve(2\ln(2veT))^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\left[ \frac{1}{\lambda_0} \left( 1.63 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \right)^{\frac{9}{40}} - 0.38 \right) - 0.7335 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \left( 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \right)^{\frac{31}{40}} \right]$$

$$C_2 = -\frac{0.36675}{\pi} \frac{\lambda_1}{\lambda_0\sqrt{\lambda_2}} \left( 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \right)^{\frac{31}{40}} \left[ \frac{1}{ve\sqrt{2\ln(2veT)}} - \frac{\gamma}{ve(2\ln(2veT))^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{4\pi\sqrt{\lambda_2}} \left[ \frac{1}{ve\sqrt{2\ln(2veT)}} - \frac{\gamma}{ve(2\ln(2veT))^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \left[ 0.7335 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \left( 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \right)^{\frac{31}{40}} + \right. \\ \left. 1.63 \left( 1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_0\lambda_2} \right)^{\frac{9}{40}} - 0.38 \right]$$