

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

**MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR &
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE



Département d'Électronique

PROJET DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du Diplôme d'Ingénieur d'Etat en Electronique

Thème :

**ETUDE & COMPARAISON DES
TECHNIQUES D'ESTIMATION DE LA
FREQUENCE INSTANTANEE**

Proposé et Dirigé par M.M

Le Professeur A.BELOUHRANI

Le Professeur S.BOURENNANE

Réalisé par :

Mohammed Nabil EL KORSO

Promotion :

Septembre 2007

ملخص

إن الإشارات غير المستقرة ، غير قابلة التحلل في وحدة توليد منحنيات جيبيية. عند وجود مثل هذه الإشارات، نحتاج إلى دالة تأخذ بعين الاعتبار التغير الزمني في الحقل الطيفي وهذا هو مفهوم التردد اللحظي. يكتسي التردد اللحظي، أهمية قصوى في مجالات تطبيقية دقيقة كالرادار والسونار والاتصال والتشخيص الطبي ... ؛ هذا من جهة. ومن جهة أخرى، تبحث هذه المذكرة، تقدير التواتر اللحظي في حال وجود موجات قصير عمرها ضجيج قوسان. إن التطبيقات المتحصل عليها، تمكننا من اختيار تقنية التقدير الأكثر نجاعة شريطة معرفة إشارة معينة ونسبتها مع الضجيج.

الكلمات المفتاحية: التردد اللحظي، تمثيل وقت-التردد، التغير الزمني، الإشارات غير الثابتة.

Abstract

Nonstationary signals do not let themselves well to decomposition into sinusoidal components. For such signals we need to use a parameter which takes in to account for the time-varying nature of the process and this need has given rise to the idea of the instantaneous frequency (IF). The IF is a parameter which is often of significant practical importance. In many situations such as radar, sonar, seismic, communications, and biomedical applications. This thesis examines the problem of instantaneous frequency estimation for Frequency Modulated (FM) signals imbedded in white Gaussian noise. Guidelines are given as to which estimation method should be used for a given signal class and Signal to Noise Ratio (SNR) level.

Key words : *Instantaneous frequency, time-frequency representation, time-varying, nonstationary signals.*

Résumé

Les signaux non-stationnaires ne se laissent pas décomposer au sein d'une famille génératrice de sinusoides. Pour de tels signaux on a besoin d'un paramètre qui prend en compte la variation temporelle du domaine spectral, d'où le concept de la fréquence instantanée (IF). Cette IF, revêt beaucoup d'importance dans les applications pratiques (radar, sonar, sismique, communication et le diagnostic médical). Ce mémoire examine le problème d'estimation de la fréquence instantanée pour des signaux FM noyés dans un bruit Gaussien. Les résultats obtenus nous permettrons de choisir la technique d'estimation adéquate pour un signal connaissant son SNR et sa classe.

Mots clefs : *Fréquence instantanée, représentation temps-fréquence, variation temporelle, signaux non-stationnaires.*

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

- à mes très chers parents qui se sont toujours sacrifiés pour moi. Que Dieu les Garde et me donne la force de les servir ;
- à *Khadoudja* , *Djamel Eddine* et *Abdel Hamid* ; ma sœur et mes frères qui ont toujours cru en moi ;
- à la mémoire de mes grands parents paternels ;
- à mes grand parents maternels que dieu leur prête vie ;

Remerciements

- Je remercie DIEU qui m’a rempli de foi et de force pour mener à bien ce projet ;
- mes parents qui ont été pour moi d’un appui sans faille.
- Je tiens à remercier mes promoteurs Messieurs les professeurs A.Belouchrani et S.Bourennane pour leurs précieux conseils, leur aide inestimable et la confiance qu’ils m’ont accordée.
- Je remercie les membres du jury qui m’ont fait l’honneur d’examiner mon travail.
- Je remercie aussi Mlle Moussaoui, Mme M.Rossetto et tous les membres de l’équipe GSM de l’institut FRESNEL, pour leur aide et pour l’accueil.
- Ma profonde reconnaissance va à tous les enseignants qui ont contribué à ma formation du primaire au supérieur.

Table des matières

Liste des figures	vii
Glossaire	ix
Introduction	1
1 Concepts de bases des distributions temps fréquence	3
1.1 Les besoins de la TFD	3
1.1.1 Représentation temporelle	4
1.1.2 Représentation fréquentielle	7
1.1.3 Notion de stationnarité	9
1.1.4 Représentation conjointe en temps-fréquence	10
1.1.5 Les caractéristiques souhaitables de la TFD	11
1.2 Les caractéristiques du signal dans le plan temps-fréquence	12
1.2.1 Signal analytique et la transformée de Hilbert	13
1.2.2 Durée et largeur de bande d'un signal	14
1.2.3 Signal Asymptotique	17
1.2.4 Signal mono-composante et multi-composantes	17
1.3 La fréquence instantanée et son dual le retard temporel	17
1.3.1 Fréquence instantanée	17
1.3.2 Le temps de retard	19
1.3.3 Retard de groupe et retard de phase	19
1.3.4 Temps de relaxation	20
1.4 Conclusion	21
2 Représentations Temps-Fréquence	22
2.1 Définition de la représentation temps-fréquence	22
2.2 Types de représentation temps - fréquence	22
2.2.1 Les représentations temps - fréquence linéaires	22
2.2.2 Représentations temps - fréquence quadratiques	23

2.2.3	Classe de Cohen	26
2.3	Etude comparative	32
2.4	Conclusion	34
3	Estimation et interprétation de la fréquence instantanée	35
3.1	Introduction	35
3.2	Fréquence instantanée d'un signal	36
3.2.1	Approche intuitive	36
3.2.2	Approche mathématique	36
3.2.3	Comparaison entre les différentes définitions	39
3.2.4	Définition adoptée	39
3.3	Techniques d'estimation de la fréquence instantanée	40
3.3.1	Différence de phase	40
3.3.2	Différence de phase lissée	41
3.3.3	Passage par zéro	43
3.3.4	Passage par zéro fenêtré	43
3.3.5	Prédiction Linéaire	44
3.3.6	L'estimation de l'IF basée sur le moment d'ordre 1 des TFDs	45
3.3.7	L'estimation de l'IF basée sur les pics des TFDs	46
3.3.8	Estimation de la IF des signaux multi-composantes	49
3.4	Comparaison	51
3.5	Conclusion	52
4	Présentation de la plate-forme	54
4.1	Barre des tâches	55
4.1.1	Choix du signal	55
4.1.2	Choix du bruit et le niveau SNR correspondant	56
4.1.3	Représentation temps-fréquence	57
4.1.4	Les techniques d'estimation de la fréquence instantanée	57
4.2	Visualisation Graphique	58
4.2.1	Disposition des graphes	58
4.2.2	Les options	59
4.3	Conclusion	63
5	Applications de la fréquence instantanée à la localisation acoustique d'avion	64
5.1	Introduction	64
5.2	Modèle et estimation	65

5.3 Bilan	70
5.4 Conclusion	70
Conclusion générale et perspectives	73
Bibliographie	74

Table des figures

1.1	Signal Chirp.	5
1.2	Signal FM sinusoïdal.	6
1.3	Signal sonore.	6
1.4	Signal chirp.	8
1.5	Signal FM sinusoïdal.	8
1.6	Représentation fréquentielle d'un signal sonore.	9
1.7	Représentation temps-fréquentielle en 3D	10
1.8	Représentation temps-fréquence d'un signal Chirp.	11
1.9	Représentation temps-fréquence d'un signal multi-composantes.	11
2.1	Spectrogramme d'un signal Parabolique	24
2.2	Spectrogramme avec (a $\Delta = 45$, (b $\Delta = 8$, (c $\Delta = 1$	25
2.3	Distribution de Margenau-Hill	27
2.4	Distribution de Page	27
2.5	Représentation d'un signal Chirp à l'aide d'une WVD.	29
2.6	WVD d'un signal multi-composantes	30
2.7	WVD d'un signal multi-composantes (sous $SNR = -5dB$)	30
2.8	Distribution de Choi-Williams pour un signale multi-composantes	31
2.9	Distribution de Butterworth pour un signale multi-composantes	32
2.10	Distribution de Born-Jordan pour un signale multi-composantes	33
2.11	Représentation de Zhao-Atlas-Marks pour un signale multi-composantes	33
3.1	Estimation de la IF à l'aide de la technique de différence de phase	41
3.2	Estimation de la IF à l'aide de la technique de différence de phase lissée	42
3.3	Différence de phase lissée pour un signal fortement non-stationnaire	42
3.4	Estimation de la IF à l'aide de la technique Z-R	43
3.5	Estimation de la IF à l'aide de la technique A-R2	45
3.6	WVD lissée d'un signal multicomposantes avec un $SNR=0dB$	45
3.7	L'estimation de l'IF basée sur le moment d'ordre 1 de la WVD	46
3.8	L'estimation de l'IF basée sur le moment d'ordre 1 lissé de la WVD	47

3.9	Estimation de l'IF basée sur les pics de la WVD	47
3.10	Estimation de l'IF basée sur les pics de la XWVD	48
3.11	Estimation de l'IF basée sur les pics de la Z-A-M	50
3.12	WVD d'un signal multi-composantes	50
3.13	Estimation de la IF pour les signaux multi-composantes	50
3.14	Comparaison des différentes techniques d'estimation de la IF (Cas d'un signal chirp avec N=64)	52
4.1	Plate-forme	54
4.2	Barre des tâches	55
4.3	Choix du signal	56
4.4	Choix du bruit et le niveau SNR correspondant	56
4.5	Représentation temps-fréquence	57
4.6	Les techniques d'estimation de la fréquence instantanée	58
4.7	Disposition des graphes	59
4.8	Plot Type de la représentation temps-fréquentielle	60
4.9	Représentation temps-fréquentielle en 3D	60
4.10	Représentation temps-fréquentielle en 2D - fonction ImageSC	61
4.11	Représentation temps-fréquentielle en 2D - fonction Contour	61
4.12	Options - Représentation temps-fréquentielle	61
4.13	Représentation temps-fréquentielle - fonction juxtaposition	62
4.14	Options graphiques pour l'estimation de la fréquence instantanée	62
5.1	Schéma utilisé pour la localisation acoustique d'avion	65
5.2	Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode P-D	67
5.3	Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode ZR	67
5.4	Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode STFT	68
5.5	Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode WVD	68
5.6	Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode du premier moment	69
5.7	Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode XWVD	69
5.8	Estimation de la fréquence f_0	70
5.9	Estimation de la vitesse	71
5.10	Estimation de la hauteur	71

Glossaire

AR	Auto Regressive (auto-regressive)
AS	Analytic Signal (signal analytique)
B	Bandwidth (largeur de bande d'un signal)
BFD	Backward Finite Differences (différence arrière finie)
CED	Complex Energy Density (densité d'énergie complexe)
CFD	Central Finite Differences (différence centrale finie)
DPWVL	Pseudo Wigner-Ville Distribution (distribution pseudo Wigner-Ville)
FFD	The Forward Differences (post différence finie)
FM	Frequency Modulation (modulation de fréquence)
FT	Fourier Transform (transformée de Fourier)
GD	Group delay (retard de group)
IF	Instantaneous Frequency (fréquence instantanée)
MSE	Mean Square Error (erreur de différence moyenne)
PD	Phase Delay (retard de phase)
RID	Reduced-Interference Distribution (distribution à interférence réduite)
Sgn	Signe function (fonction signe)
SNR	Signal Noise Ration (rapport signal sur bruit)
STFT	Short-Time Fourier Transform (transformée de Fourier à court terme)
T	Duration (durée d'un signal)
TD	Time Delay (retard temporel)
TFD	Time-Frequency Distribution (distribution temps-fréquence)
TFR	Time-Frequency Representation (représentation temps-fréquence)
TFSA	Time-Frequency Signal Analysis (analyse des signaux temps-fréquence)
TH	Hilbert Transform (transformée de Hilbert)
TM	Time marginal (marginale du temps)
WVD	Wigner-Ville Distribution (distribution Wigner-Ville)
XWVD	Cross Wigner-Ville distribution (distribution Wigner-Ville croisée)
ZAM-D	Zhao-Atlas-Marques Distribution (distribution de Zhao-Atlas-Marques)
ZR	Zero-Crossings (passage par zéro)

Introduction

Il existe de nombreuses situations physiques où l'information portée par le signal réside dans l'évolution au cours du temps de son contenu fréquentiel. C'est le cas par exemple des signaux de parole et de certains phénomènes naturels comme la transition du jaune au rouge de la lumière lors d'un coucher de soleil. Parmi les phénomènes artificiels, on trouve également les signaux reçus par les systèmes radar ou sonar, les signaux de transmission de données par modulation et tous les phénomènes transitoires des systèmes oscillants.

Dans de telles situations, il ne semble pas raisonnable de considérer que les signaux observés, portent la même information pendant toute la durée de leur observation et donc de les décomposer sur un ensemble de signaux sinusoïdaux. Elles incitent plutôt à chercher des méthodes d'analyse qui laissent coexister conjointement le temps et la fréquence à l'image d'une partition musicale décrivant une succession de notes ou d'accords au cours du temps.

A cet effet l'analyse temps-fréquence a vu le jour. Diverses distributions temps-fréquence ont été proposées durant ces 15 dernières années. Leur utilisation dépend des applications visées, des avantages et des inconvénients de chacune d'elles. Elles ont permis en outre, d'apporter des réponses à différentes classes de problèmes du traitement du signal ; notamment dans la classification et l'estimation de la fréquence instantanée.

Notre projet a pour but d'implémenter et de comparer les différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée.

Ainsi, nous présenterons au premier chapitre, les concepts de base nécessaires à la bonne compréhension de l'analyse temps-fréquence.

Au second chapitre, nous énumérerons les différentes représentations temps-fréquence. Après avoir présenté le fondement théorique et pratique de chacune d'elles, une étude comparative conclura ce chapitre.

Le troisième chapitre, exposera les différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée, en évaluant leur performance en présence d'un bruit additif gaussien.

Le quatrième chapitre est consacré à la présentation de notre plate-forme, développée sous l'environnement Matlab, qui comporte en outre une douzaine de représentations temps-fréquence et une douzaine de techniques d'estimation de la fréquence instantanée avec des outils de comparaison.

Et enfin, nous allons montrer au chapitre cinq, l'importance des techniques d'estimation de la fréquence instantanée en les appliquant la localisation acoustique d'avion.

Pour la réalisation de ce projet, nous avons utilisé la documentation disponible à la bibliothèque de l'Institut Fresnel de l'École centrale de Marseille où s'est déroulé notre stage de Projet de Fin d'Études. Cette documentation se répartit comme suit : un ensemble d'articles IEEE, articles Direct Science, tutorial CNRS, articles EURASIP. Malgré la mise à notre disposition de toutes les conditions de travail par mes promoteurs, nous n'avons pas pu mettre en œuvre les techniques d'estimation de la fréquence instantanée dans une application réelle. Le temps nous a fait défaut. Nous espérons pouvoir y remédier dans des travaux ultérieures.

Chapitre 1

Concepts de bases des distributions temps fréquence

La TFSAP (Time-Frequency signal analysis and processing) est la discipline qui se rattache à l'analyse des signaux non-stationnaires ayant des variations dans le domaine temporel et fréquentiel à la fois. La représentation la plus adéquate pour ce type de signal est la TFD (Time-Frequency Distribution) distribution temps-fréquence. Cette représentation contrairement aux représentations classiques (temporelle et fréquentielle) permet la mise en œuvre d'outils spécifiques permettant de décrire une évolution temporelle dans le domaine fréquentiel, et réciproquement, la description de l'évolution fréquentiel dans le domaine temporel.

Pour ce faire, un rappel sur les concepts de la fréquence instantanée et de son dual le temps de retard, est nécessaire pour l'interprétation des TFDs. Afin d'obtenir une fréquence instantanée non ambiguë, on introduira aussi la transformée d'Hilbert car l'utilisation du signal analytique associé au signal observé, plutôt que le signal lui-même, est utile pour réduire les interférences entre la partie positive et négative du spectre. Toutes ces notions, ainsi que celles définissant le produit BT et les signaux mono-composantes et multi-composantes seront présentées dans le présent chapitre.

1.1 Les besoins de la TFD

Bien souvent la finalité d'une acquisition ou d'une représentation d'un signal, consiste à rendre la grandeur physique observable. Les informations ainsi obtenues pourront alors être exploitables. Mais au fur et à mesure que s'accroît la complexité d'extraire ces informations, il devient impératif de choisir un espace de représentation adéquat. Ce choix est déterminant pour le reste des opérations. Cela étant fait, il ne reste plus que la mise en œuvre de certaines actions appropriées afin de déduire notre grandeur.

Les deux représentations classiques ; qui sont la représentation temporelle $s(t)$ et fréquentielle $S(f)$; traitent de façon distincte les variables temps t et fréquence f . Dans chaque représentation la variable est moyennée par rapport à l'autre (la représentation fréquentielle $S(f)$ nous procure la fréquence moyenne sur un ensemble temporel et de même pour la représentation temporelle $s(t)$, contrairement à la TFD qui permet d'avoir une représentation localisée en temps et en fréquence simultanément.

ment.

Afin d'argumenter cela, on va prendre trois signaux, qui sont des signaux non-stationnaires, d'un usage assez courant :

– *Signal Chirp* :

Une des caractéristiques principales d'une porteuse sinusoïdale est sa fréquence f . Un premier procédé de modulation, qui apparaît donc, c'est la modulation FM linéaire. Elle fait correspondre à la fonction instantanée de la fréquence, une fonction linéaire avec le temps, comme le montre l'équation suivante :

$$f_i(t) = f_0 + \alpha \cdot t; 0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Le signal pourra donc être ainsi exprimé :

$$s(t) = A \cos(2\pi f_i(t) + \psi) \quad (1.2)$$

Ce dernier est appelé signal Chirp.

– *Signal FM sinusoïdal* :

Plusieurs autres modulations peuvent être construites, parmi les plus répandues on trouve la modulation FM sinusoïdale. Enormément utilisée dans le domaine de la transmission de signaux, notamment radio et TV, sa fréquence est modulée sous une forme sinusoïdale :

$$f_i(t) = f_c + f_d \cos[2\pi f_m t + \phi] \quad (1.3)$$

Le signal modulé sera donc ainsi exprimé :

$$s(t) = A \cos\left(2\pi f_c t + \frac{f_d}{f_m} \sin[2\pi f_m t + \phi] + \psi\right) \quad (1.4)$$

chaque symbole est donc défini comme suit :

A : l'amplitude.

ψ : la phase d'offset.

f_d/f_m : Index de Modulation.

Chaque signal cité ci-dessus a une fréquence qui varie en fonction du temps. Ces derniers sont appelés des signaux non-stationnaires. Nous allons montrer, dans ce qui suit, les limites des représentations classiques pour l'interprétation de tels signaux.

1.1.1 Représentation temporelle

La représentation temporelle, est de toute évidence le mode d'observation le plus simple et le plus naturel des signaux. Elle permet, en outre, de fournir une indication précise de l'ordre et des écartements relatifs entre les différents événements perceptibles au sein d'un signal.

Cette représentation nous conduit directement à la puissance instantanée de la grandeur observée, sous la forme

$$|s(t)|^2.$$

Et à l'énergie totale, sous la forme :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt.$$

Les limites de cette représentation sont étudiées pour chacun des signaux cités au paragraphe précédent :

- *Signal Chirp* : L'équation du signal considéré peut être écrite sous la forme suivante :

$$s(t) = A \cdot \text{rect}\left[\frac{t - T/2}{T}\right] \cos\left(2\pi\left[f_0 t + \frac{\alpha}{2} t^2\right] + \psi\right) \quad (1.5)$$

On note " rect " une fonction rectangulaire d'amplitude 1 centrée en $T/2$, de longueur T , et égal à zéros en dehors de cette intervalle. Le graphe 1.1, représentant cette fonction, donne l'impression d'avoir une fréquence qui augmente avec le temps, cependant aucune indication de cette augmentation ne peut être déduite directement de ce graphe temporel.

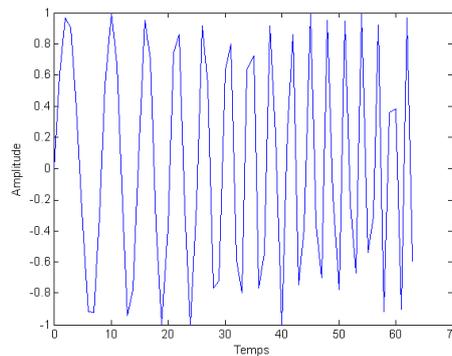


FIG. 1.1 – Signal Chirp.

- *Signal FM sinusoïdal* : L'équation du signal considéré peut être écrite aussi sous la forme suivante :

$$s(t) = A \cos\left(2\pi f_c t + \frac{f_d}{f_m} \sin[2\pi f_m t + \phi] + \psi\right) \quad (1.6)$$

La représentation de cette fonction dans le domaine temporel, ne nous donne aucune indication sur la variation de la fréquence du signal considéré en fonction du temps. Certes le graphe ci-dessous, nous donne l'impression d'une fréquence oscillatoire mais sans aucune précision.

- *Signal sonore* : Une parole, ou une partition musicale par exemple, peuvent être représentées par la pression de l'air dans un point bien particulier dans l'espace. Une telle courbe est une pression à temps variable, et peut être convertie par un microphone ou un amplificateur en un signal électrique de la forme $s_{parole}(t)$ tel montré à la figure la figure 1.3. En effet, la musique est habituellement enregistrée et émise de cette façon. Cependant, la fonction $s_{parole}(t)$ n'a aucune ressemblance avec la forme dans laquelle un compositeur écrira sa musique, ou la forme dans laquelle la plupart des musiciens préféreraient

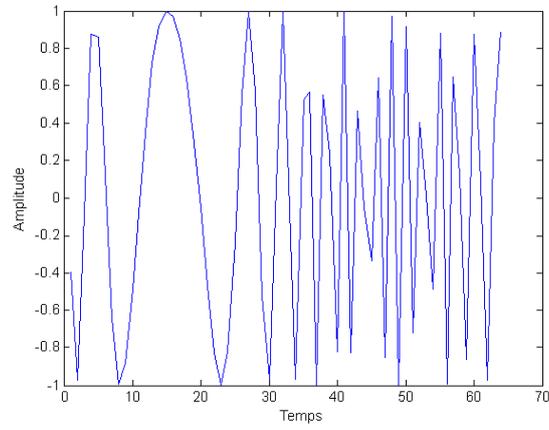


FIG. 1.2 – Signal FM sinusoidal.

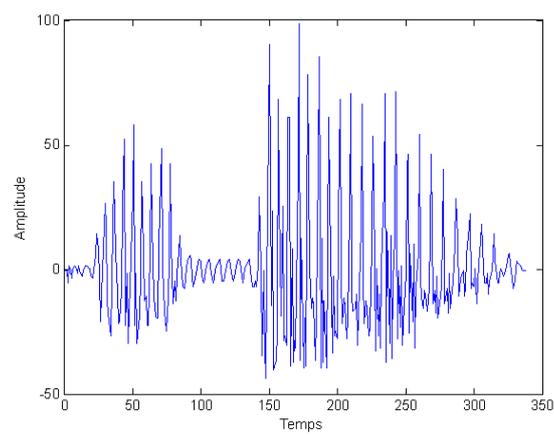


FIG. 1.3 – Signal sonore.

lire leur musique afin de la reproduire. Les formes d'ondes musicales sont si complexes que le graphe de $s_{parole}(t)$ serait presque inutile aux musiciens et aux ingénieurs du son.

De ces exemples, on peut déduire que la représentation temporelle ne nous fournit, dans le cas des signaux non-stationnaires, aucune information exploitable par l'ingénieur vis à vis de la fréquence instantanée. Cela est dû au fait que cette représentation a pour point de départ l'indépendance des deux variables, temporelle et fréquentielle.

1.1.2 Représentation fréquentielle

Dans de très nombreux cas, les représentations temporelles ne permettent pas une bonne perception de l'information contenue dans un signal, notamment lorsque cette information décrit une répétition régulière d'événements. Les représentations fréquentielles représentent donc une alternative à ce cas de figure. Ces représentations sont basées sur la notion de fréquence, elle-même basée sur le fait que les sinusoides sont des fonctions propres à des systèmes linéaires stationnaires. A partir de cette caractéristique, des outils d'analyse mathématique ont été créés, notamment la transformée de Fourier.

Tout signal $s(t)$ peut être représenté dans le domaine fréquentiel par sa transformée de Fourier $S(f)$, de la façon suivante :

$$S(f) = F_{t \rightarrow f} s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt. \quad (1.7)$$

La transformée de Fourier (the Fourier Transform) (FT) est en général complexe (dans le cas où le signal $s(t)$ est réel), le carré de son amplitude est appelé l'énergie spectrale (energy spectrum) et s'exprime comme suit :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) S^*(f) df \quad (1.8)$$

avec (*) représente le conjugué. On définit le signal $s(t)$ comme l'inverse de la transformée de Fourier par :

$$s(t) = F_{t \rightarrow f}^{-1} S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (1.9)$$

Via les trois exemples, on va montrer que la transformée de Fourier n'est pas commode pour certains cas notamment pour les signaux non-stationnaires :

Signal chirp : Sa densité spectrale est représentée ci-dessous. On constate que l'énergie du signal est confinée dans la bande $[0, 2-0,4]$ hz. Mis à part cette information, on ne peut pas déduire la croissance de sa fréquence instantanée en fonction du temps, d'où l'impossibilité d'extraire la loi de variation de la fréquence du signal considéré.

Signal FM sinusoidal :

Pour une phase initiale nulle, l'équation 1.6 peut s'écrire sous la forme suivante :

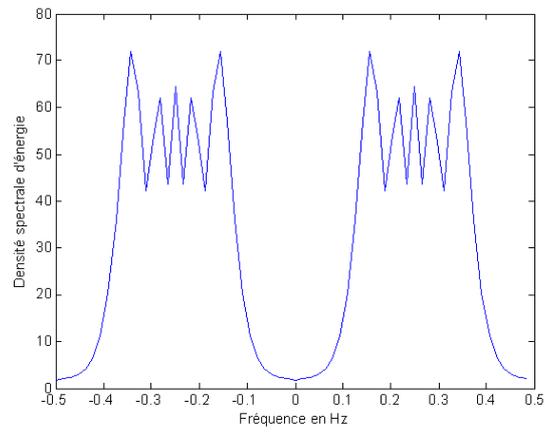


FIG. 1.4 – Signal chirp.

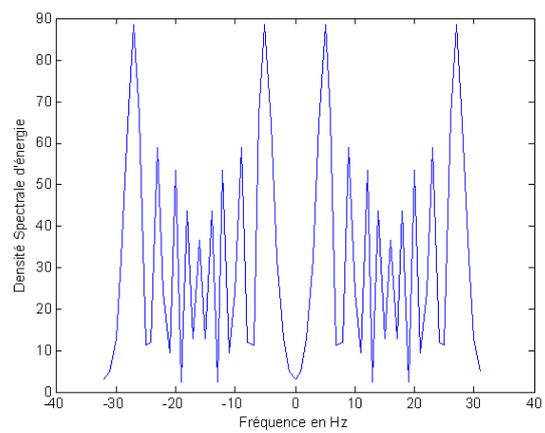


FIG. 1.5 – Signal FM sinusoidal.

$$s(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos 2\pi(f_c + n f_m)t \quad (1.10)$$

avec $J_n(\beta) = (\beta/2)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-\beta^2/4)^k / k! \Gamma(n+k+1)$ avec $\Gamma(z) = \int_{+\infty}^0 t^{z-1} e^{-t} dt$ où β représente l'index de la modulation et J_n la fonction de Bessel du premier type et d'ordre n . On constate que dans le domaine fréquentiel, le signal est constitué d'une infinité de fréquences, cependant les fréquences significatives sont comprises entre $f_c \pm (f_d + 2f_m)$ où f_c étant la porteuse. Cette information est utile dans le cas d'un filtrage ou d'une séparation du signal pour un récepteur Audio ou TV. Cependant, on ne peut déduire aucune information concernant la loi de variation de sa fréquence instantanée.

Signal sonore : On déduit de sa représentation fréquentielle, la présence de fréquences correspondant au signal musical, mais pas le moment où elles apparaissent. Or un musicien ou un ingénieur de son, a besoin de cette importante information, à savoir l'enchaînement des notes dans l'espace temporel.

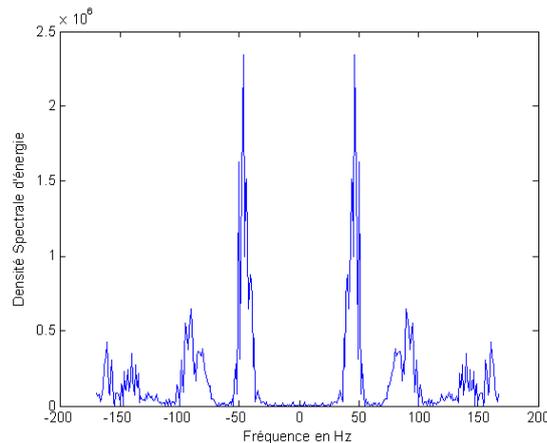


FIG. 1.6 – Représentation fréquentielle d'un signal sonore.

A travers ces trois exemples, on conclut que la représentation fréquentielle ne nous permet pas d'avoir une information sur le comportement temporel de la fréquence d'un signal. Ce qui nous amène à définir la notion de stationnarité.

1.1.3 Notion de stationnarité

L'hypothèse de la stationnarité permet de considérer que le signal véhicule toujours la même information durant toute la durée d'observation. Celle-ci est rendue nécessaire par la définition de la FT, ce qui correspond dans le cas déterministe à un signal égal à une somme discrète de sinusoides.

$$s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) \quad (1.11)$$

Dans le cadre aléatoire, l'hypothèse de stationnarité correspond à une invariance par translation temporelle de tous les moments statistiques du signal. Mais cette hypothèse stricte de stationnarité des signaux aléatoires est bien souvent élargie à une hypothèse (plus simple à vérifier) d'invariance par translation temporelle des deux premiers moments statistiques. C'est-à-dire, une valeur moyenne indépendante du temps et une fonction d'auto-corrélation qui ne dépend que de la différence des moments où le signal a été appliqué :

$$\forall t, T \quad E[s(t)] = E[s(t + T)] = m_s = \text{Constante.}$$

$$\forall t_1, t_2, T \quad E[s_c(t_1)s_c^*(t_2)] = E[s_c(t_1 + T)s_c^*(t_2 + T)] = \gamma_s(t_1 - t_2)$$

$$\text{avec } s_c(t) = s(t) - m_s.$$

1.1.4 Représentation conjointe en temps-fréquence

L'insuffisance des représentations classiques citées auparavant, nous amène à chercher une représentation conjointe. Celle-ci se présente sous la forme d'une représentation du signal dans un domaine bidimensionnel qui est l'espace temps-fréquence. Cette représentation doit nous permettre ; à temps constant ; de pouvoir extraire toutes les fréquences présentes à cet instant, et à fréquence constante ; tout les moments où cette dernière apparaît. Une telle représentation est appelée représentation temps-fréquence (time-frequency representation (TFR)) ou distribution temps-fréquence (time-frequency distribution (TFD)).

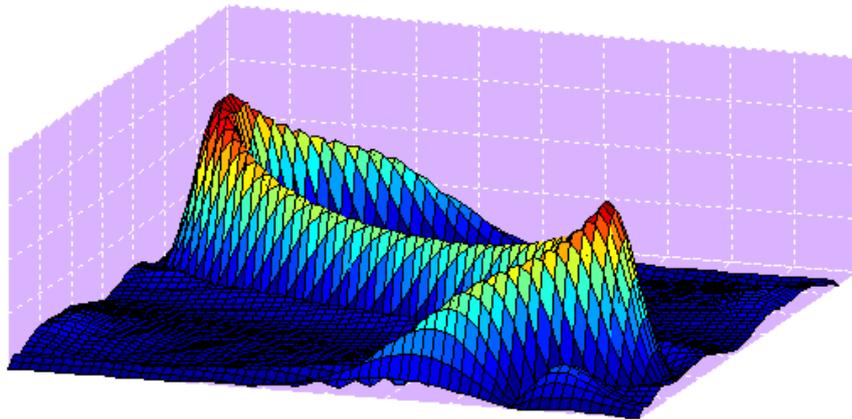


FIG. 1.7 – Représentation temps-fréquentielle en 3D

Afin d'illustrer ce qui a été dit, on a pris comme exemple, un signal chirp, avec $\psi=0$, $T=64s$, $f_0=0.1$ et $a=(3/640)$ hertz. La TFD montre non seulement ; les temps de début et d'arrêt et la gamme de fréquences, mais également ; la variation de la fréquence en fonction du temps.

Cette variation peut être décrite par une fonction $f_i(t)$, appelée la fréquence instantanée (IF : instantaneous frequency). Un signal peut avoir plus d'une IF. La

figure 1.9 représente la TFD d'une somme de deux signaux FM linéaires qui sont indétectables grâce aux dispositifs basés sur les représentations classiques. A noter que l'utilité de la représentation TFD ne se limite pas qu'aux signaux cités auparavant, mais à tous les signaux non-stationnaires ayant des applications diverses comme les télécommunications, le radar, le sonar, le sismique, l'analyse de vibrations, le traitement de la parole et le diagnostic médical.

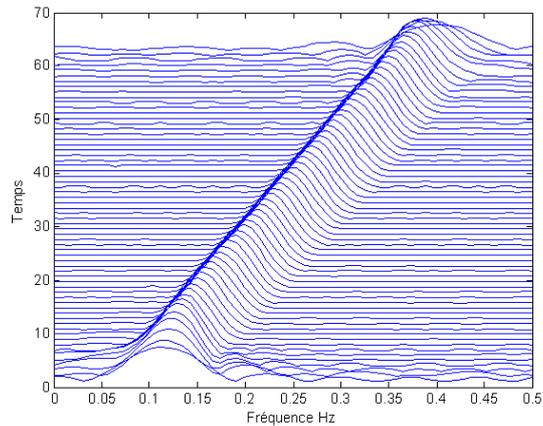


FIG. 1.8 – Représentation temps-fréquence d'un signal Chirp.

1.1.5 Les caractéristiques souhaitables de la TFD

Afin d'obtenir la représentation TFD voulue, il faut identifier certaines caractéristiques et hypothèses particulières sur lesquelles doit se baser sa construction. Pour s'assurer du bon choix ; après identification ; ses caractéristiques doivent être vérifiées. Les applications suivantes illustrent quelques utilisations probables de TFDs :

- L'analyse du signal dans le domaine temps-fréquence doit nous permettre d'identifier des caractéristiques telles que la variation du temps, la variation de la fréquence, le nombre de composants, etc.
- La séparation des composants entre elles, notamment pour les signaux multi-composantes, et du bruit de fond par le filtrage dans le domaine temps-fréquence.

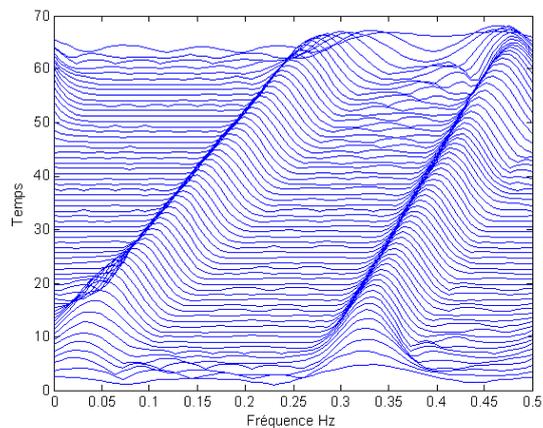


FIG. 1.9 – Représentation temps-fréquence d'un signal multi-composantes.

- L'analyse séparée de certains éléments spécifiques :
- Dépistage de l'amplitude instantanée ;
- Dépistage de la fréquence instantanée ;
- Dépistage de la largeur de bande instantanée (diffusion d'énergie).

Ces applications peuvent être effectuées en utilisant une TFD avec les propriétés suivantes :

- la TFD est à valeur réelle (parce que l'énergie est réelle).
- l'intégrale de la TFD dans tout le domaine temps-fréquentiel représente l'énergie totale du signal (la conservation de l'énergie)
- l'intégrale d'une partie rectangulaire du domaine temps-fréquentiel, correspondant à une largeur de bande finie et à un intervalle de temps fini, est approximativement l'énergie du signal dans cet excédent de largeur de bande, à condition que la largeur de bande et l'intervalle soient suffisamment grands.
- pour un signal FM à une seule composante, les crêtes des sections transversales à temps constant de la TFD devraient donner la loi de l'IF.

1.2 Les caractéristiques du signal dans le plan temps-fréquence

Pour représenter des signaux tels que la FM linéaire, plusieurs modèles sont possibles. Le choix du modèle dépend du nombre et de la nature des paramètres à extraire du signal. Par exemple, dans le cas d'une simple sinusoïde avec une fréquence et une amplitude constantes, qui est décrite par l'équation suivante :

$$s_1(t) = \cos(2\pi f_c t). \quad (1.12)$$

où le seul paramètre est la fréquence f_c . Si l'amplitude et la phase sont significatives dans l'application, deux paramètres supplémentaires sont nécessaires. Une combinaison linéaire de tels signaux peut être écrite sous la forme suivante :

$$s_2(t) = \sum_{k=1}^M a_k \cos(2\pi f_k t + \psi_k). \quad (1.13)$$

qui contient 3M paramètres. Contrairement à un signal sinusoïdal FM ou un signal chirp qui eux, exigent une TFD, les signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ contiennent des composantes avec une amplitude, une fréquence et une phase constantes. Ils sont clairement décrit par la transformée de Fourier. Aucune dépendance de temps n'est exigée. Un signal audio musical exige également une forme de TFD comme suggéré par la notation dans laquelle la musique est écrite. La TFD devrait clairement résoudre le problème des composantes multiples.

D'autres difficultés apparaissent pour des signaux plus complexes comme celui représenté par l'équation 1.14 :

$$s_2(t) = \left(\sum_{k=1}^M a_k(t) e^{j2\pi \int_t^0 f_k(\tau) d\tau} \right) + w(t). \quad (1.14)$$

où $a_k(t)$ représente l'amplitude (variable en temps) du k ème composant, $f_k(t)$ sa fréquence qui est elle aussi variable en fonction du temps, et $w(t)$ un bruit additif. L'analyse d'un tel signal exige la capacité de distinguer non seulement les composants variables en temps entre elles, mais aussi de les séparer du bruit. De tels commentaires s'appliquent toujours même dans le cas où le bruit sera multiplicatif (eq 1.15). Cependant il sera nécessaire, d'appliquer d'autres techniques de la TFSA basées sur la TFD :

$$s_{multi}(t) = \left(\sum_M^{k=1} m_k(t) e^{j2\pi \int_t^0 f_k(\tau) d\tau} \right) + w(t). \quad (1.15)$$

1.2.1 Signal analytique et la transformée de Hilbert

En mathématiques et en théorie du signal, la transformée de Hilbert¹ ; ici notée H ; d'une fonction à variable réelle, $s(t)$, est obtenue par convolution du signal $s(t)$ avec la fonction $\frac{1}{\pi t}$. La résultante $\hat{s}(t)$ peut être interprétée comme la sortie d'un système linéaire invariant avec comme entrée $s(t)$ par un système de réponses impulsionnelles $\frac{1}{\pi t}$. C'est un outil mathématique très utilisé en théorie du signal pour décrire l'enveloppe complexe d'une grandeur réelle modulée par un signal. La définition mathématique de la transformée de Hilbert s'exprime comme suit :

$$\hat{s}(t) = Hs = (h * s)(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (1.16)$$

où $h(t) = \frac{1}{\pi t}$ en considérant l'intégrale comme une intégrale de Cauchy (ce qui revient à enlever les points de singularité à $\tau = t$ et $\tau = \pm\infty$). On peut montrer que si $s \in L^p(R)$, alors $H(s)$ est bien définie dans $L^p(R)$ pour $1 < p < \infty$.

– *Réponse fréquentielle* Il s'ensuit que la transformation de Hilbert d'un signal fréquentiel donné par la transformée de Fourier :

$$H(w) = Fh(w) = -i.sgn(w) \quad (1.17)$$

où Fh désigne la transformée de Fourier de h , i (parfois noté j) le nombre imaginaire, w est la fréquence angulaire, et sgn la fonction "signe". Ainsi :

$$F\hat{s}(w) = H(w).Fs(w) \quad (1.18)$$

La transformée de Hilbert a pour effet de tourner de $+90^\circ$ la composante de fréquence négative de $s(t)$ et de -90° la composante de fréquence positive.

– *Transformée de Hilbert inverse* : On peut remarquer que $H^2(w) = -1$. Donc si on multiplie l'équation précédente par $-H(w)$ on obtient $Fs(w) = -H(w).F\hat{s}(w)$ où la transformée de Hilbert inverse apparaît clairement :

$$s(t) = -(h * \hat{s})(t) = -H(w)\hat{s}(t). \quad (1.19)$$

¹La transformée de Hilbert tient son nom du mathématicien David Hilbert (mathématicien allemand né le 23 janvier 1862 à Königsberg en Prusse orientale et mort le 14 février 1943 à Göttingen en Allemagne)

– *Modèle à bande étroite* : De nombreux signaux peuvent être modélisés par le produit d'un signal harmonique à support borné, $s_m(t)$, et d'une "porteuse" sinusoïdale : $s(t) = s_m(t).cos(wt + \varphi)$ Lorsque $s_m(t)$, n'a pas de composantes fréquentielles au delà de la fréquence de la porteuse, $w/2\pi$, alors : $\hat{s}(t) = s_m(t).sin(wt + \varphi)$ De ce fait, la transformée de Hilbert peut être simplement vue comme un circuit qui produit un déphasage de 90° de la fréquence de la porteuse :

$$(wt + \varphi)_{mod2\pi} = arctg(\hat{s}(t)/s(t)). \quad (1.20)$$

– *Représentation analytique* : Une représentation analytique d'un signal est définie à l'aide de la transformée de Hilbert :

$$s_a(t) = s(t) + i.\hat{s}(t). \quad (1.21)$$

Par exemple pour le modèle à bande étroite et par la formule d'Euler², la représentation analytique est : $s_a(t) = s_m(t)cos(wt + \varphi) + i.s_m(t)sin(wt + \varphi)$.

$$s_a(t) = s_m(t).e^{i(wt+\varphi)} \quad (1.22)$$

Cette opération complexe hétérodyne, enlève les composantes de fréquences négatives de $s_m(t)$, Dans ce cas, la partie imaginaire du résultat est la transformée de Hilbert de la partie réelle. C'est donc une manière indirecte de former une transformée de Hilbert. Le plus important à noter, c'est que l'emploi de cette projection linéaire, pour un signal $s(t)$ à valeurs réelles, permet de supprimer la redondance entre fréquences positives et négatives au sein de sa transformée de Fourier en ne conservant pas les fréquences négatives, et surtout en associant à tout signal réel $s(t)$ un signal complexe $\hat{s}(t)$ de même énergie.

1.2.2 Durée et largeur de bande d'un signal

Durée et largeur de bande finie :

Dans la pratique, les signaux sont observés sur des périodes finies et traités par des dispositifs avec des largeurs de bande finies. Si un signal $s(t)$ a comme transformée de Fourier $S(f)$, la durée du signal est la plus petite gamme à partir de laquelle $s(t) = 0$, alors que la largeur de bande du signal est la plus petite gamme à partir de la quelle $S(f) = 0$. Ces définitions, mènent à la conclusion qu'une durée finie implique une largeur de bande infinie et vice-versa. Cependant, dans la pratique, un signal doit avoir un commencement et une fin (durée finie) et sa FT doit être comprise dans une gamme de fréquence bien déterminée en adéquation avec l'équipement de mesure ou de traitement (largeur de bande finie). Ce qui impose que les définitions strictes doivent être allégées. Un signal à temps limité, de durée T centré au temps $t = 0$, peut être exprimée comme suit :

$$s_T(t) = s(t)rect[t/T]. \quad (1.23)$$

²Leonhard Euler (15 avril 1707 - 18 septembre 1783) mathématicien et physicien suisse, est considéré comme le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Il domine les mathématiques du XVIIIe siècle et développe très largement ce qui s'appelle alors la nouvelle analyse. Complètement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moitié de la totalité de son travail durant cette période.

La FT de $s_T(t)$ est alors exprimé comme suit :

$$S_T(f) = S(f) *_f T \text{sinc} fT, \quad (1.24)$$

où le $*_f$ dénote la convolution fréquentielle. Ainsi la largeur de bande de la $S_T(f)$ est infinie. Afin d'éviter les effets de discontinuités, on peut remplacer le $\text{rect}[t/T]$ avec une fenêtre plus lisse $W(t)$ de même durée T. Nous pouvons donc écrire :

$$s_T(t) = s(t) \text{rect}[t/T] w(t). \quad (1.25)$$

En analogie avec le cas d'un signal à temps limité, un signal à bande limité, de largeur de bande B centré à l'origine, peut être exprimé dans le domaine fréquentiel comme suit :

$$S_B(f) = s(f) \text{rect}[f/B], \quad (1.26)$$

dans le domaine temporel le signal est donné par :

$s_B(t) = s(t) *_t B \text{sinc} Bt$, ce qui induit une durée infinie. Ainsi, sous les définitions " habituelles " de la durée et de la largeur de bande, une largeur de bande finie implique, une durée infinie, et vice-versa.

Durée et largeur de bande efficace :

L'énergie d'un signal est contenue dans une largeur de bande infinie. Il va falloir donc trouver une largeur de bande finie contenant la majeure partie de cette énergie. Par exemple, une largeur de bande contenant 99% de l'énergie du signal, pourrait être acceptée comme mesure utile de la largeur de bande du signal. Si la fraction nommée de l'énergie du signal était confinée entre une fréquence minimale f_{min} et une fréquence maximale f_{max} , la largeur de bande serait représentée par la formule suivante :

$B = f_{min} - f_{max}$ De là découle une nouvelle notion, appelée largeur de bande efficace, définie par la formule suivante :

$$B_2^e = \frac{1}{E_s} \int_{+\infty}^{-\infty} f^2 |S(f)|^2 df \quad (1.27)$$

$S(f)$ étant la FT du signal $s(t)$ et E_s l'énergie totale définie par :

$$E_s = \int_{+\infty}^{-\infty} |S(f)|^2 df$$

B_2^e est le moment d'ordre 2 de la densité spectrale $S(f)$. A supposer que f soit une variable aléatoire et $|S(f)|^2$ sa fonction de densité de probabilité (p.d.f.). On aura alors $E_s = 1$ de sorte que B_2^e exprime le désaccord de f si la moyenne de f était zéro. Ainsi la largeur de la bande efficace est analogue à la déviation standard de f . A noter que la largeur de bande efficace est seulement une construction mathématique et ne devrait pas être employée dans le cas d'une évaluation trop précise.

La définition de la durée, comme celle de la largeur de bande peut être moins stricte, afin d'obtenir une largeur de bande finie et une durée finie. De la même manière, on pourrait définir la durée T où une fraction de l'énergie du signal serait confinée. La durée efficace T_e , est définie comme suit :

$$T_2^e = \frac{1}{E_s} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |s(t)|^2 df \quad (1.28)$$

De même T_e , représente le moment d'ordre 2 du signal $s(t)$. Gabor³ a proposé , en 1946 ces définitions. Slepian a proposé pour sa part, des définitions de la durée et de la largeur de bande basées sur l'exactitude du dispositif de mesure détectant. La troncature du signal $s(t)$, se présente comme suit :

$$\hat{s}(t) = s(t) \text{ si et seulement si } , t_1 < t < t_2 \text{ et nulle ailleurs}$$

avec $t_2 > t_1$, de sorte que la durée de $\hat{s}(t)$ soit $t_2 - t_1$, cette durée est appelée " la durée de Slepian du signal $s(t)$ ". On peut, par ailleurs définir une " troncation de fréquence " dans le domaine de fréquence appelée " la largeur de bande de Slepian " du signal $s(t)$ Ref [6]. Le produit de BT a également une signification pratique : le nombre de degrés de liberté dans un signal est égal à BT . En d'autres termes, BT est une mesure de la richesse de l'information du signal.

Relation entre B et T :

Considérons un signal $s(t)$ de durée T au sens strict; sa dilatation ou sa compression (selon la valeur de k), le long de l'axe de temps, se fera sans changement d'amplitude. Elle se traduit par la formule suivante :

$$s_k(t) = s(kt)$$

Ce signal a pour spectre :

$$S_k(f) = \frac{1}{k} S(f/k)$$

Si l'échelle du temps est multipliée par k ; l'échelle de la fréquence est divisée par k , c'est à dire, une dilatation temporelle du signal entraîne une compression fréquentielle. Ceci suggère la possibilité d'un rapport du type $BT = \text{constante}$ (la constante dépend du signal). Avec les définitions de la largeur de bande équivalente (eq 1.27) et de la durée équivalente (eq 1.28), on sait que ce produit est une constante, et que la valeur minimum est obtenue pour un signal gaussien et vaut $1/4\pi$. Pour des produits $BT > 5$, Landau et Pollack ont démontré que 99% de l'énergie est préservée dans la limite de la bande B et de la période T , d'où une meilleur représentation en temps - fréquence de l'énergie du signal et donc de sa fréquence instantanée. Ainsi, les signaux asymptotiques, qui sont des signaux à bande et période finies et dont le produit BT est assez large, ont une meilleure représentation en temps-fréquence du signal et donc de la fréquence instantanée.

³Dennis Gabor, né le 5 juin 1900 à Budapest en Hongrie - décédé le 9 février 1979 à Londres, était un physicien rendu célèbre par l'invention de l'holographie, et ayant obtenu le prix Nobel de Physique en 1971.

1.2.3 Signal Asymptotique

Pour tout signal, on désire savoir non seulement la largeur de bande B , mais également la distribution de l'énergie à travers celle-ci tel que la présence des fréquences, leurs amplitudes relatives et les temps pendant lesquelles elles se produisent. De même nous pouvons connaître non seulement la durée globale T , mais également la distribution de l'énergie durant toute cette durée ; par exemple les instants pendant lesquelles le signal est présent, les amplitudes relatives à ces instants et les fréquences significatives pendant ces périodes. De tels signaux peuvent être modélés par la classe des signaux asymptotiques.

Définition : On appelle un signal $s(t)$ asymptotique, si et seulement si, il a les propriétés suivantes :

1. la durée T , comme définie par Gabor, est finie ;
2. la largeur de bande B , comme définie par Gabor, est finie ;
3. le produit BT est grand (au moins 10 pour certains cas) ;
4. l'amplitude bornée de telle sorte que $\int_{+\infty}^{-\infty} |s(t)|^2 dt$ soit finie.

Comme nous allons le voir, les signaux asymptotiques permettent des approximations utiles pour dériver sur des modèles simples (surtout pour exprimer les signaux analytiques).

1.2.4 Signal mono-composante et multi-composantes

Un signal mono-composante est décrit dans le domaine temps-fréquentiel par une " arête " simple correspondant à une région de concentration d'énergie. En outre, on peut interpréter la crête de l'" arête " comme étant la IF en fonction du temps. Dans le cas d'un signal mono-composante, la IF est une fonction simple à évaluer dans temps(fig 1.8). Un tel signal a une forme analytique de la forme :

$$z(t) = a(t)e^{j\phi(t)}.$$

où la $\phi(t)$ est différentiable (phase instantanée) et $a(t)$ est un réel positif (amplitude instantanée). Si le signal $s(t)$ est lui-même asymptotique, il peut être exprimé de la façon suivante :

$$s(t) = a(t)\cos\phi(t).$$

Un signal multi-composantes, à plusieurs composantes, peut être décrit comme somme de deux signaux mono-composantes ou plus ; comme illustrer à la figure 3.6.

1.3 La fréquence instantanée et son dual le retard temporel

1.3.1 Fréquence instantanée

Afin d'introduire quelques notions nécessaires à la compréhension du chapitre qui va suivre, nous allons aborder brièvement la notion de fréquence instantanée avant

de l'expliciter ultérieurement (Chapitre 3). *Définition* : La fréquence instantanée d'un signal mono-composante est définie comme suit :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \phi'(t). \quad (1.29)$$

où $\phi(t)$ représente la phase instantanée du signal. On peut justifier cette définition, tout d'abord, en considérant un signal à fréquence constante puis un signal à fréquence variable en fonction du temps.

Pour un signal $x(t)$ représenté par :

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_c t + \psi)$$

telles que f_c et ψ sont constantes. On constate qu'à mesure que t augmente par l'incrément $1/f_c$, l'argument de la fonction de cosinus augmente par 2π et le signal traverse un cycle. Ainsi la période du signal est $1/f_c$ et la fréquence; étant la réciproque de la période; est dans ce cas f_c . Le même signal peut être écrit comme suit : $s(t) = a(t) \cos\phi(t)$ où $\phi = 2\pi f_c t + \psi$ on obtient alors $f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \phi'(t)$ Bien que le côté gauche de cette équation (la fréquence) est considéré constant, le côté droit peut être variable si $\phi(t)$ a une loi non linéaire. Vérifions maintenant, si ce résultat peut être prolongé à une fréquence variable. Considérons un signal dont la forme analytique est ainsi représentée :

$$z(t) = a(t).e^{j\phi(t)}$$

où $a(t)$ et $f(t)$ sont réels et $a(t)$ est positif. $a(t)$ est appelé, l'amplitude instantanée et $f(t)$ s'appelle la phase instantanée. Soit $f(t)$ évaluée à $t = t_1$ et $t = t_2$, où $t_2 > t_1$. Par le théorème de la valeur moyenne, si $f(t)$ est différentiable, il existe un moment t compris entre t_1 et t_2 tels que :

$$\phi(t_2) - \phi(t_1) = (t_2 - t_1) \phi'(t) \quad (1.30)$$

Notons π la période de notre signal $z(t)$ à un temps bien déterminé, et f_i sa fréquence correspondante à ce moment ($f_i = 1/p_i$). Si $t_2 = t_1 + p_i$, alors :

$$\phi(t_2) = \phi(t_1) + 2\pi$$

et donc l'équation 1.30 devient : $2\pi = p_i \phi'(t)$, ce qui donne :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \phi'(t).$$

En se reportant à la définition de la fréquence instantanée, on constate que la fréquence ainsi définie est la fréquence instantanée du signal. La fréquence instantanée de la somme de deux signaux ou plus, n'est pas la somme de leurs fréquences instantanées. De ce fait la définition de la IF n'est significative que pour un signal mono-composante. Elle perd son sens pour un signal à plusieurs composantes, mais il est possible de l'appliquer si on fait, au préalable, une séparation des fréquences instantanées pour chaque composante.

1.3.2 Le temps de retard

La fréquence instantanée d'un signal indique la fréquence dominante du signal à un moment donné. Son dual, le temps de retard (TD : Time Delay) indique le moment dominant où une fréquence indiquée se produit.

Notons $Z(f)$ la Transformée de Fourier du signal analytique $z(t)$ associé au signal réel $s(t)$: Pour une fréquence dominante f_i , $Z(f)$ peut s'écrire sous la forme : $Z(f) = A\delta(f - f_i)$, où A est un nombre complexe.

L'inverse de la FT nous donne : $z(t) = Ae^{j2\pi f_i t}$ Et donc la phase instantanée sera donné par :

$$\phi(t) = \arg z(t) = j2\pi f_i t + \arg A \text{ avec } f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \phi'(t)$$

Reprenant notre raisonnement en inter-changeant le temps et la fréquence. En écrivant le signal analytique sous forme d'une succession d'impulsion, on aura :

$$z(t) = a\delta(t - \tau_d)$$

avec a un nombre complexe. τ_d peut être compris intuitivement comme étant le retard du signal. Sa FT est alors :

$$Z(f) = a.e^{-j2\pi f \tau_d}$$

avec $\phi(f) = \arg Z(f) = -2\pi f \tau_d + \arg a$ et $\tau_d = -\frac{1}{2\pi} \phi'(f)$. Encore une fois, ces résultats, obtenus avec un τ_d constant peuvent être appliquer avec un τ_d variable. D'où la définition suivante :

Définition :

Si $z(t)$ est un signal analytique ayant comme Transformée de Fourier $Z(f)$, alors le temps de retard (TD) de $z(t)$, noté par le $\tau_d(f)$, est :

$$\tau_d(f) = -\frac{1}{2\pi} \phi'(f). \quad (1.31)$$

avec $\phi(f) = \arg Z(f)$

1.3.3 Retard de groupe et retard de phase

Notons $z(t)$, un signal analytique passe bande avec une fréquence centrale f_c , et sa transformée de Fourier $Z(f)$ tel que :

$$Z(f) = M(f - f_c)e^{j\phi(f)}$$

Et pour une phase linéaire on aura :

$$\phi(f) = -2\pi\tau_p f_c - 2\pi\tau_g |f - f_c|$$

D'où :

$$Z(f) = M(f - f_c)e^{j(-2\pi\tau_p f_c - 2\pi\tau_g |f - f_c|)}$$

L'inverse de la FT donne :

$$z(t) = m(t - \tau_g) e^{j2\pi f c [t - \tau_p]} \quad (1.32)$$

m est l'inverse de la Transformée de Fourier de $M(f)$, τ_g représente le retard de groupe, et τ_p représente le retard de phase, d'où la définition suivante :

Définition : On définit, pour tout signal analytique $z(t)$ ayant comme Transformée de Fourier $Z(f)$: son retard de groupe (GD : Group delay) par :

$$\tau_g(f) = -\frac{1}{2\pi} \phi'(f). \quad (1.33)$$

et son retard de phase (PD : phase Delay) par :

$$\tau_p(f) = -\frac{1}{2\pi f} \phi(f). \quad (1.34)$$

Même si les équations 1.33 et 1.31 ont la même forme, leur interprétation physique diffère. Le Time Delay s'applique à une impulsion, tandis que le Group Delay s'applique à l'enveloppe d'un signal à bande étroite.

1.3.4 Temps de relaxation

La phase étant quadratique pour un signal chirp, on peut faire un développement limité au voisinage de t_o :

$$\phi(t) = \phi(t_o) + 2\pi f_i(t_o)[t - t_o] + \frac{1}{2} 2\pi f_i'(t_o)[t - t_o]^2$$

Le temps T_r de relaxation, comme il a été défini par Rihaczek, est la durée pour la quelle la phase instantanée dévie de $\pi/4$.

$$\left| \frac{1}{2} 2\pi f_i'(t_o) T_r^2 / 4 \right| = \pi/4$$

la résolution de cette équation nous amènent à la définition suivante :

Définition

Le temps de relaxation est défini par

$$T_r(t) = |df_i(t)/dt|^{-1/2} \quad (1.35)$$

où $f_i(t)$ représente la fréquence instantanée.

La dualité entre la fréquence instantanée et le temps de retard (Time Delay) implique une dualité entre le temps de relaxation et la bande dynamique.

Définition

Pour un signal ayant un temps de retard τ_d , sa bande dynamique est définie comme suit :

$$B_d(f) = |d_d(f)/df|^{-1/2} \quad (1.36)$$

Le temps de relaxation, est une mesure du temps nécessaire pour une observation significative des variations de la IF. De même la largeur de bande dynamique est une mesure de la largeur de bande requise pour une observation significative des variations du temps de retard.

1.4 Conclusion

L'analyse spectrale, basée sur la Transformée de Fourier et sur le filtrage numérique, fournit une bonne description des signaux stationnaires et pseudo-stationnaires. Malheureusement, comme cité auparavant, ces techniques ont de nombreuses limitations pour des signaux non-stationnaires. Les outils pour atteindre ce but sont appelés les techniques d'analyse temps-fréquence. Plusieurs méthodes existent et aucune ne prédomine sur l'autre. Leur utilisation va dépendre de l'application visée et des avantages et des inconvénients de chacune pour faire apparaître les informations recherchées. Douze méthodes seront détaillées au chapitre suivant.

Chapitre 2

Représentations Temps-Fréquence

Après ce rappel portant sur les principaux concepts de base de la TFSAP (Time-Frequency signal analysis and processing), nous allons étudier les représentations temps-fréquence, notamment ceux d'ordre 2 appelées représentations temps-fréquence quadratiques ou bilinéaire. Les différents défauts résultant des représentations classiques, vont nous permettre de mieux justifier la présentation et la construction des outils complexes qui vont suivre. Par ailleurs nous montrerons les avantages et les limitations de chacune d'elles et nous conclurons par une étude comparative entre les distributions les plus connues.

2.1 Définition de la représentation temps-fréquence

Les représentations temps-fréquence ont été introduites comme un moyen de représenter un signal pour lequel la fréquence instantanée varie avec le temps. Grâce à la redistribution de l'information (énergie) contenue dans le signal analysé, elles nous permettent de faciliter l'interprétation mettant en évidence des comportements locaux non-stationnaires.

2.2 Types de représentation temps - fréquence

2.2.1 Les représentations temps - fréquence linéaires

Elles associent à chaque signal $s(t)$ la transformée donnée par :

$$\rho(t, f, K) = \int_{+\infty}^{-\infty} K(\theta; t, f) s(\theta) d\theta. \quad (2.1)$$

avec K : noyau de la transformation.

La propriété de linéarité pour des signaux satisfaisant le principe de superposition, entraîne la linéarité des TFRs (Time Frequency Representation).

La TFR linéaire la plus connue, est sans doute la Transformée de Fourier à court terme. Cette dernière réalise une analyse harmonique locale du signal à traiter. C'est

une représentation fréquentielle du signal, qui s'effectue grâce à une fenêtre d'analyse temporelle à court terme $h(t)$. Elle s'exprime par la formule :

$$TFCT_s^h(t, f) = \int_{+\infty}^{-\infty} s(\tau)h^*(t - \tau)e^{-j2\pi f t} d\tau$$

Sa forme duale fréquentielle est donnée par :

$$F_S^H(t, f) = e^{-j2\pi f t} \int_{+\infty}^{-\infty} S(\xi)H^*(\xi - f)e^{+j2\pi \xi t} d\xi$$

Le principal avantage de la TFCT est qu'en dépit de sa facilité d'implémentation, elle préserve les translations temporelles ainsi que les translations fréquentielles.

L'inconvénient majeur de la TFCT ; mis à part sa sensibilité au bruit ; réside dans l'hypothèse de stationnarité locale sous-jacente et au compromis implicite dans le choix de la fenêtre d'analyse. C'est pour cette raison que les TFRs bilinéaires sont préférables aux TFRs linéaires pour l'extraction de la fréquence instantanée.

2.2.2 Représentations temps - fréquence quadratiques

Appelées aussi représentations temps - fréquence bilinéaires, elles consistent à appliquer sur le couple (s_i, s_j) la transformation donnée par :

$$\rho(t, f, K) = \int \int s_i(\phi)s_j^*(\phi)K(\phi, \phi'; t, f)d\phi d\phi' \quad (2.2)$$

Le noyau R permet de vérifier les propriétés jugées nécessaires et d'obtenir diverses classes de représentations temps - fréquence à savoir la classe de Cohen où l'on distingue la représentation de Wigner, mais aussi la classe affine ou celle par corrélation . Une représentation temps-fréquence quadratique est dite énergétique, si elle peut être considérée comme une distribution d'énergie. Son intégration dans le plan temps - fréquence, donne l'énergie du signal :

$$\int \int \rho(t, f)dt df = E_s = \int |s(t)|^2 dt = \int |S(f)|^2 df$$

Son noyau K satisfait alors la condition d'énergicité qui se traduit par les propriétés suivantes :

$$K \int (\theta, \theta'; t, f)dt df = \delta(\theta - \theta')$$

Le spectrogramme et son duale sonogramme

Une des démarches, plutôt naturelle, pour construire une représentation temps-fréquence, consiste à adjoindre à la représentation fréquentielle une dépendance temporelle. Cela peut être obtenu en appliquant la Transformée de Fourier sur un segment temporel centré en t . Ce qui se traduit par une fenêtre temporelle comme le montre l'équation suivante :

$$s_w(t, \tau) = s(\tau)w(\tau - t)$$

Et sa FT :

$$F_s^w(t, f) = F_{\tau \rightarrow f} s(\tau) w(\tau - t) \quad (2.3)$$

où $F_s^w(t, f)$ représente la STFT (short-time Fourier transform), d'un signal $s(t)$ (l'indice le plus bas), pour une fenêtre $w(t_o - t)$ (l'indice le plus haut) centrée en t_o .

Cette démarche sous entend que le voisinage délimité par la fenêtre $w(t)$ correspond à un intervalle de temps, au sein du quel, le signal a été considéré comme stationnaire ou semi-stationnaire.

Le spectrogramme est le carré du module de la représentation de Fourier à court terme, tel que représenté par l'équation suivante :

$$S_s^w(t, f) = \left| \int s(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right|^2 \quad (2.4)$$

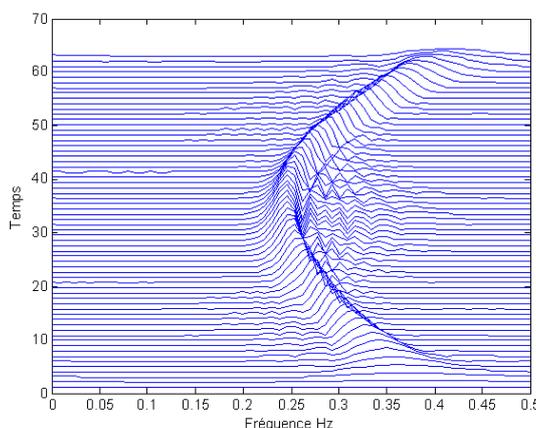


FIG. 2.1 – Spectrogramme d'un signal Parabolique

Le spectrogramme constitue une distribution de l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence à condition que la fenêtre d'analyse, soit correctement normalisée (énergie unitaire). Utilisé dans certains domaines d'applications ; comme l'analyse de la parole ; la facilité d'implémentation et d'interprétation du spectrogramme en font une des méthodes les plus employées pour l'analyse des signaux non-stationnaires. Cependant, il est inadapté dans le cas des signaux fortement non-stationnaires à cause de l'antagonisme de ses résolutions temporelles et fréquentielles, qu'on peut mettre en évidence à travers les deux équations suivantes :

$$TFCT_s^h(t, f) = \int_{+\infty}^{-\infty} s(\tau) h^*(t - \tau) e^{-j2\pi f t} d\tau \quad (2.5)$$

$$TFCT_s^h(t, f) = e^{-j2\pi f t} \int_{+\infty}^{-\infty} S(\xi) H^*(\xi - f) e^{+j2\pi(\xi - f)t} d\xi \quad (2.6)$$

Ces deux dernières équations montrent que la Transformée de Fourier à court terme, peut s'écrire sous la forme d'une sortie d'un filtre passe-bande. Par conséquent, sa résolution temporelle ; c'est-à-dire sa capacité à distinguer deux événements

successifs ; est liée à la largeur de la fenêtre $w(t)$. De même, sa résolution fréquentielle ; c'est-à-dire sa capacité à distinguer deux sinusoides de fréquences proches ; est liée à son tour par la largeur du filtre $h(v)$. Cependant l'inégalité de Heisenber-Gabor, montre que leur produit doit être borné inférieurement par la relation suivante :

$$\Delta f \Delta t \geq 1/\pi \quad (2.7)$$

Il n'est donc pas possible d'obtenir à la fois une très bonne résolution temporelle et une très bonne résolution fréquentielle. Par conséquent, comme le montre la figure suivante, un compromis doit être fait selon la structure du signal. Une fenêtre moins large rend la résolution fréquentielle plus grande et sa résolution temporelle moins importante. On peut montrer que :

$$\Delta = \sqrt{2} \left| \frac{df_i(t)}{dt} \right|^{-1/2}$$

et pour un signal FM, on peut simplifier la relation précédente par $\Delta = \sqrt{2T/B}$

Ce qui impose une largeur petite pour un changement fréquentielle rapide. De là le principale défaut du spectrogramme qui exige la connaissance de la fréquence instantanée pour un choix optimal de la largeur de la fenêtre.

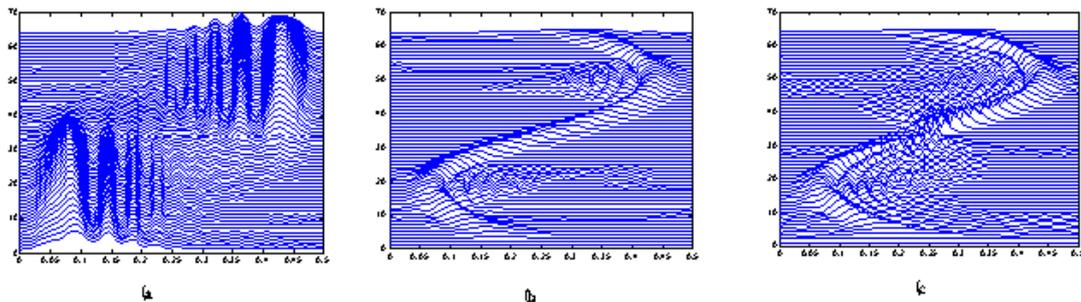


FIG. 2.2 – Spectrogramme avec (a) $\Delta = 45$, (b) $\Delta = 8$, (c) $\Delta = 1$

On vient de voir que les méthodes du type spectrogramme (ou sonogramme dans leur équivalent fréquentiel), sont fondamentalement limitées par la nécessité d'un compromis entre les résolutions temporelles et fréquentielles : améliorer la résolution fréquentielle ne peut se faire qu'au prix d'un élargissement de la durée d'observation i.e. d'une diminution de la résolution temporelle dans une situation non stationnaire. Ceci provient directement du fait que la fonction de lissage associée, possède des épanouissements temporels et fréquentiels ne pouvant être contrôlés séparément.

Distribution de Rihaczek et ses versions lissées

Distribution de Rihaczek Une autre façon de construire une représentation temps-fréquence consiste à faire simplement le produit des représentations temporelles et fréquentielles du signal, avec une exponentielle complexe de produit ft . Le résultat obtenu est appelé la distribution de Rihacszek :

$$R_z(t, f) = z(t)Z^*(f)e^{-j2\pi ft} \quad (2.8)$$

Etant donné que :

$$E = \int |z(t)|^2 dt = \int z^*(t)z(t) dt = \int Z^*(f)e^{-j2\pi ft} df dt$$

alors ;

$$E = \int \int R_z(t, f) dt df$$

Par construction, cette représentation possède bien les marginales désirées :

$$\int R_z(t, f) df = |z(t)|^2 dt$$

$$\int R_z(t, f) dt = |Z(f)|^2 dt$$

En intégrant les deux équations qui précèdent, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int R_z(t, f) df = \int_{t_1}^{t_2} |z(t)|^2 dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int R_z(t, f) dt = \int_{t_1}^{t_2} |Z(f)|^2 dt$$

où la première équation représente l'énergie comprise entre les deux moments t_1 et t_2 , et où la seconde équation représente l'énergie comprise entre la bande délimitée par f_1 et f_2 . De ce fait, elle représente une distribution de densité d'énergie (complex energy density). Cependant, elle souffre d'un inconvénient majeur :

– Ses valeurs ne sont pas toujours des nombres réels positifs, ce qui empêche d'interpréter $R_z(t, f)$ comme une mesure de l'énergie du signal contenue dans un rectangle infinitésimal ($\delta t, \delta f$) centré sur le point de coordonnées (t, f) . Et le plus souvent ses valeurs sont des nombres complexes. La représentation graphique de cette distribution, n'est donc pas possible telle quelle. D'où l'existence de deux autres distributions déduites de la distribution de Rihaczek,

Distribution de Margenau-Hill

Qui représente la partie réelle de la distribution de Rihaczek, elle est plus facile à représenter graphiquement et peut également être interprétée comme étant la partie active (au sens de l'électricité) de l'énergie au point (t, f) .

Distribution de Page

Cette dernière peut être vue comme partie causale de la distribution de Margenau-Hill. Elle vérifie simultanément les propriétés de causalité et de conservation du spectre

2.2.3 Classe de Cohen

Elle rassemble les représentations temps-fréquence quadratiques énergétiques, invariantes par translation temporelle et fréquentielle. Elle est aussi le résultat d'un filtrage temps - fréquence de la distribution de Wigner. Cette dernière est donnée par la forme générale suivante :

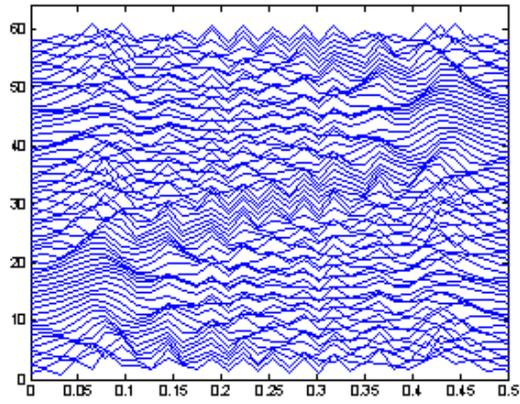


FIG. 2.3 – Distribution de Margenau-Hill

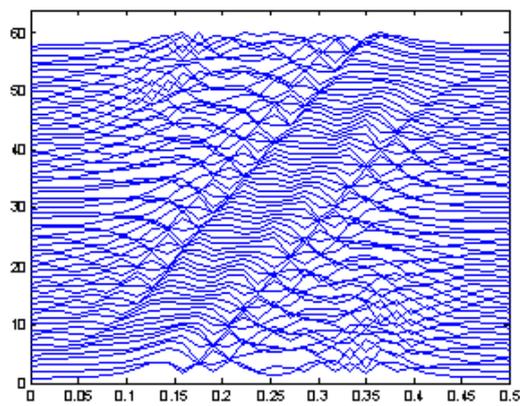


FIG. 2.4 – Distribution de Page

$$C_s(t, f) = \int \int W(t - u, \tau) s(u + \tau/2) s^*(u - \tau/2) e^{-j2\pi ft} du d\tau \quad (2.9)$$

avec $K(t, \tau) = F_{v \rightarrow t}^{-1} w(v, \tau)$ et $k(t, \tau) = G(v) h(\tau)$: filtre temps-fréquence à noyau séparable

Distribution de Wigner-Ville et ses versions lissées

L'élément le plus étudié de la classe de Cohen est certainement la distribution de Wigner-Ville et de ses versions lissées. Elle peut être vue comme l'unique distribution à valeurs réelles qui vérifie les propriétés nécessaires pour les applications classiques de traitement du signal. C'est aussi la seule distribution qui fournit une localisation parfaite des signaux impulsionnels et des signaux modulés linéairement en fréquence.

Distribution de Wigner-Ville Par définition, la transformation de Wigner-Ville WVD (Wigner-Ville Distribution) associée à un signal temporel $s(t)$, d'énergie finie, la fonction $W_z(t, f)$, de deux variables temps t et fréquence f :

$$W_z(t, f) = F_{\tau \rightarrow f} z(t + \tau/2) z^*(t - \tau/2) \quad (2.10)$$

où $z(t)$ est le signal analytique associé à $s(t)$

Cette fonction, possède un grand nombre de propriétés souhaitables pour une représentation temps-fréquence. On obtient en particulier :

- L'invariance en temps : Pour un signal z_r définie comme suit : $z_r(t) = z(t - t_0)$, on aura : $W_{z_r}(t, f) = W_z(t - t_0, f)$
- L'invariance en fréquence : Pour un signal z_r définie comme suit : $z_r(t) = z(t) e^{j2\pi f_0 t}$, on aura : $W_{z_r}(t, f) = W_z(t, f - f_0)$
- La WVD est une fonction réelle répartissant l'énergie du signal dans le plan temps-fréquence : $\int \int W_z(t, f) dt df = E_z$
- Les distributions marginales s'identifient à la puissance instantanée et à la densité spectrale du signal : $\int W_z(t, f) df = |z(t)|^2$, distribution marginale en temps (TM : Time marginal) $\int W_z(t, f) dt = |Z(f)|^2$, distribution marginale en fréquence (FM : Frequency marginal)
- Les caractéristiques de modulation d'un signal réel (enveloppe, fréquence instantanée et retard de groupe) sont définies de manière unique par l'intermédiaire du signal analytique associé. Par définition, l'enveloppe $a_s(t)$, la fréquence instantanée $f_i(t)$ et le retard de groupe $\tau_g(v)$ s'obtiennent par les relations Ref [6] :

$$\frac{\int f W_z(t, f) df}{\int W_z(t, f) df} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)]$$

$$\frac{\int t W_z(t, f) dt}{\int W_z(t, f) dt} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} [\arg Z(f)]$$

Limitations de la WVD Comme toute distribution, la distribution de Wigner-Ville possède des propriétés qui rendent son interprétation délicate :

- elle peut prendre des valeurs négatives, d'où l'impossibilité de l'interpréter comme étant localement une densité d'énergie ;

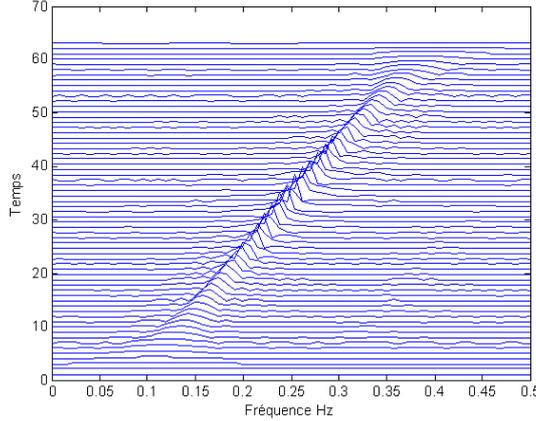


FIG. 2.5 – Représentation d'un signal Chirp à l'aide d'une WVD.

– Comme cela a été déjà dit, la structure bilinéaire de la WVD crée dans le plan temps-fréquence des termes d'interaction et d'interférence sans signification physique immédiate : Pour cela, considérant un signal multi-composante $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, où $z_1(t)$ et $z_2(t)$ sont des signaux analytiques associées aux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de type FM linéaire, la fonction noyau nous permet d'écrire :

$$K_z(t, \tau) = K_{z_1}(t, \tau) + K_{z_2}(t, \tau) + K_{z_1 z_2}(t, \tau) + K_{z_2 z_1}(t, \tau)$$

où $K_{z_1 z_2}(t, \tau)$ et $K_{z_2 z_1}(t, \tau)$ représentent les interférences entre les deux signaux $z_1(t)$ et $z_2(t)$ (tel que : $K_{z_1 z_2}(t, \tau) = z_1(t + \tau/2)z_2^*(t - \tau/2)$ et idem pour $K_{z_2 z_1}(t, \tau)$, la Transformée de Fourier de la fonction noyau globale nous donne :

$$W_z(t, f) = W_{z_1}(t, f) + W_{z_2}(t, f) + 2REW_{z_1 z_2}(t, f)$$

avec $W_{z_1 z_2}(t, f)$ représente l'inter-distribution de Wigner-Ville, appelée the cross-Wigner-Ville distribution (XWVD) :

$$W_{z_1 z_2}(t, f) = F_{\tau \rightarrow f}(z_1(t + \tau/2)(z_2^*(t - \tau/2))) \quad (2.11)$$

Ce qui nous amènent à dire que, la WVD d'une somme de deux signaux n'est pas égale seulement à la somme des WVDs, des signaux séparés, mais également au terme d'interférence XWVD, comme le montre la figure 3.12, qui représente à l'origine la somme de deux signaux chirp.

Ces interférences rendent la représentation difficilement interprétable, notamment en présence du bruit figure (2.7), car les interférences amplifient les effets du bruit sur la représentation des signaux.

Une étude attentive de ces limitations indique les modifications à apporter à la WVD pour rendre son utilisation plus souple et ses résultats plus facilement interprétables. Afin d'atteindre ce but, des versions lissées ont été créées, les principales sont : la Pseudo Wigner-Ville et la Pseudo Wigner-Ville lissée. Afin d'éliminer les interférences entre les composantes spectrales positives et négatives, la WVD a été déduite de la distribution de Wigner qui utilise le signal réel $s(t)$ au lieu de son signal analytique associé $z(t)$.

La distribution Pseudo Wigner-Ville lissée La distribution Pseudo Wigner-Ville lissée, a pour but de réduire l'influence des termes parasites d'interaction par une

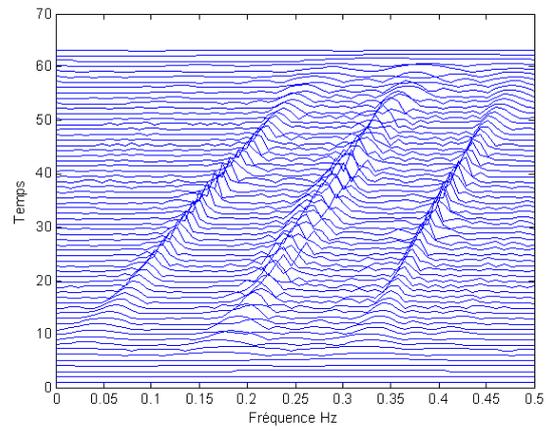


FIG. 2.6 – WVD d'un signal multi-composantes

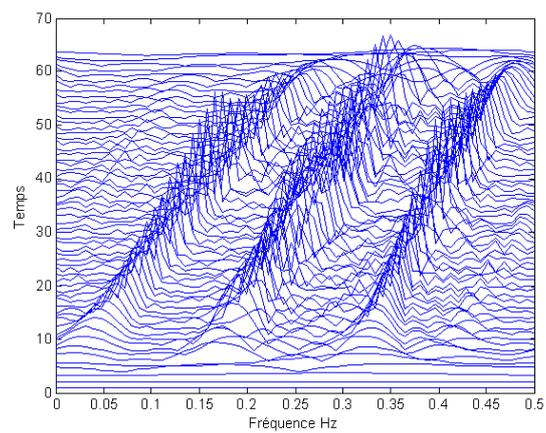


FIG. 2.7 – WVD d'un signal multi-composantes (sous $SNR = -5dB$)

procédure appropriée de lissage :

$$C_s(t, f, F) = \int \int W_s(t', f') F(t - t', f - f') dt' df' \quad (2.12)$$

où F est une fonction de lissage normalisée ie :

$$\int \int F(t, f) dt df = 1$$

On peut montrer que la représentation ainsi formée, définit la classe la plus générale des représentations énergétiques bilinéaires admissibles. Ceci permet de retrouver la plupart des représentations proposées antérieurement comme cas particuliers de l'équation 2.12. Les résolutions temporelles et fréquentielles étant ainsi liées, une autre solution peut être appliquée pour améliorer cette situation. En choisissant, une fonction séparable en deux variables ,cette solution permet une analyse " à deux degrés de liberté " :

$$F_p(t, f) = g(t)Q(f) \quad (2.13)$$

Dans le cas de la WVD, la possibilité ainsi offerte d'élargissement de la durée d'analyse permet d'atteindre une meilleure résolution fréquentielle. De plus et toujours sous cette approximation, le choix d'une fenêtre ayant la forme d'une fonction d'auto-corrélation (ex. : une fenêtre triangulaire) suffira à assurer la positivité de la représentation associée si le signal considéré est mono-composante . Cette " stationnarisation " locale se fait cependant au prix d'un traitement non linéaire dont l'effet secondaire est de créer des termes d'interférences entre composantes du plan temps-fréquence . Si l'on revient alors à la forme générale 2.13, la pondération g introduit un nouveau lissage suivant l'axe des temps . Dans l'analyse des signaux, le rôle essentiel de ce lissage secondaire est précisément de réduire l'influence des termes d'interaction entre composantes situées autour de fréquences différentes(fig. 3.6)

Choi-Williams et les distributions à interférences réduites

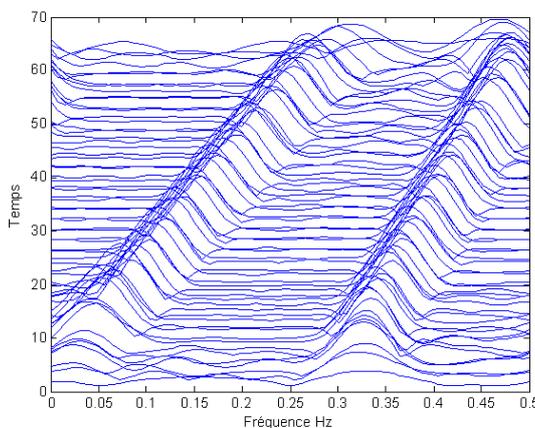


FIG. 2.8 – Distribution de Choi-Williams pour un signal multi-composantes

Comme énoncé auparavant, il est possible de construire des distributions intéressantes, non seulement au point de vue théorique mais aussi pratique ayant pour

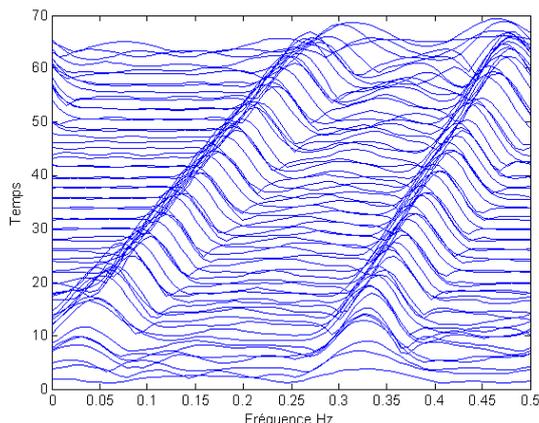


FIG. 2.9 – Distribution de Butterworth pour un signale multi-composantes

but la réduction d'interférence. Cela est fait en utilisant des noyaux de type produit de la forme :

$$F(t, f) = P(tf) \quad (2.14)$$

où, généralement, la fonction P correspond à la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas, dont la réponse impulsionnelle peut être finie ou infinie.

La distribution de Choi-Williams est historiquement la plus ancienne représentation de type produit utilisant un filtre à réponse impulsionnelle infinie, suivie par la distribution dite de Butterworth. Plusieurs extensions de ces deux distributions sont apparues ensuite, dont le noyau n'est plus de type produit. La plus ancienne représentation de type produit utilisant un filtre à réponse impulsionnelle finie est probablement la représentation de Born-Jordan, représentée par l'équation suivante :

$$BJ(t, f) = \int \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau/2}^{t+\tau/2} s(u + \tau/2)x^*(u - \tau/2)du.e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

La représentation de Zhao-Atlas-Marks, dont la définition est très voisine de la précédente, n'est pas de type produit et fournit des représentations d'une lisibilité très claire (comme le montre la figure ci-dessous). D'autres représentations ont ensuite été définies et regroupées sous le terme de distributions à interférences réduites.

2.3 Etude comparative

Le choix d'une pondération détermine fondamentalement la méthode d'analyse retenue comme approximation de la DWV généralisée. De plus, les propriétés de la représentation résultante sont en un sens résumées dans la pondération choisie. Ce qui, en retour, nous guide pour le choix de la distribution adéquate.

Du fait de sa simplicité de construction et d'interprétation, le spectrogramme et son équivalent fréquentiel le sonogramme, sont très utilisés aujourd'hui, notamment pour analyser les signaux lentement non-stationnaires ou comportant un grand

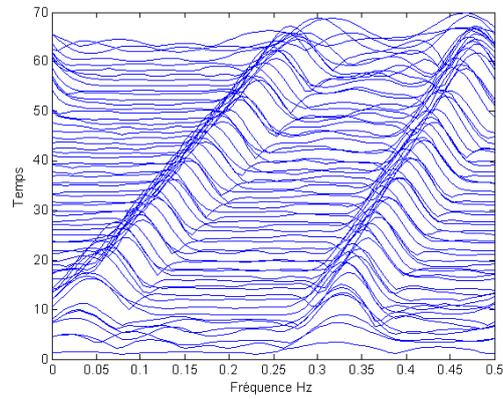


FIG. 2.10 – Distribution de Born-Jordan pour un signal multi-composantes

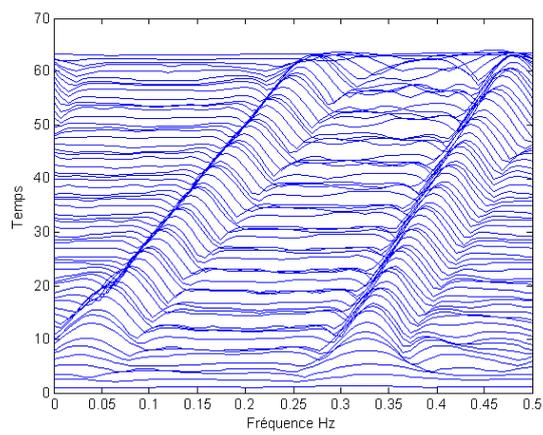


FIG. 2.11 – Représentation de Zhao-Atlas-Marks pour un signal multi-composantes

nombre de composantes. Cependant pour des signaux courts et fortement non-stationnaires, sa positivité n'est pas toujours une nécessité contrairement à la bonne localisation de ses termes.

Pour un signal linéaire FM mono-composante, la distribution de WVD est optimale pour la concentration d'énergie et aussi pour l'évaluation de la fréquence instantanée. Pour un signal FM non-linéaire, la distribution de WVD souffre des interférences internes (inner-artifacts) et externes (dans le cas de superpositions de deux ou plusieurs signaux, ces interférences sont appelées outer artifacts ou cross-terms). Dans ce cas de figure les distributions WVD lissées, comme la XWVD, sont préférables et plus efficaces.

La conception des RIDs (Reduced-Interference Distribution : distribution à interférences réduites), se fait généralement, en conservant le filtre souhaité dans le domaine d'ambiguïté. Pour être un outil utile pour des applications pratiques, il faut que les TFDs soient à valeurs réelles, satisfaisant des besoins en énergie (globaux et locaux) tout en reflétant par des crêtes la loi de variation de la fréquence instantanée.

2.4 Conclusion

Nous avons essayé d'introduire la problématique de la représentation conjointe en temps et en fréquence des signaux non-stationnaires et de présenter les outils qui répondent à cette problématique au sein de la classe de Cohen. Comme nous avons pu le voir, le double objectif que cherchent à atteindre les éléments de cette classe (de bonnes propriétés sur le plan théorique et des interférences réduites sur le plan pratique) ne conduit pas à une solution unique. Cette multiplicité de solutions ne doit pas être vue négativement. Bien au contraire, la classe de Cohen présente une solution ordonnée en réponse à un contexte difficile, celui de la non-stationnarité. La diversité des représentations utilisables permet lorsqu'elles sont utilisées conjointement, de distinguer la structure du signal analysé et donc une meilleure analyse. C'est pour cette raison qu'il est utile de disposer de plusieurs représentations différentes d'un même signal, comme le permet la boîte à outils temps-fréquence que nous avons développé (Chapitre 3).

Cette classe a également permis d'apporter des réponses à différentes classes de problèmes de traitement du signal, notamment dans le domaine de la classification et de l'estimation. Parmi ces différents problèmes, on va citer l'estimation de la fréquence instantanée, qui va être traité dans le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Estimation et interprétation de la fréquence instantanée

Ce chapitre se subdivise en deux sections. La première traitera des notions relatives à la définition de la fréquence instantanée ; car malgré que ce concept semble précis notamment pour ceux qui utilisent les modulations d'amplitude et de fréquence, sa définition pose quelques problèmes. On montrera les contradictions présentes dans la plupart des définitions et on présentera, selon notre application, celle qui utilise le signal analytique à même d'éviter le maximum de contradictions.

La deuxième partie de ce chapitre traitera les différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée. On présentera les différents estimateurs en soulignant les avantages et les limitations de chacun d'eux, leur domaine d'application et leur performance en présence du bruit. On terminera cette section par une étude comparative.

3.1 Introduction

Les notions de la fréquence instantanée et de l'amplitude instantanée d'un signal, relèvent du bon sens et de l'expérience. Prenons, par exemple une partition musicale. Les notes qui se succèdent font penser à des fréquences qui varient avec le temps. L'intensité sonore qui varie avec le temps, fait penser à l'amplitude instantanée du signal. L'importante signification de la fréquence instantanée et ses diverses applications, rendent ses notions ; qui semblent être tout à fait banales ; difficiles à définir d'une manière rigoureuse et indiscutable. C'est pourquoi de nouvelles définitions sont introduites régulièrement . La dualité présente entre le temps et la fréquence instantanée ; manifestée par des relations d'incertitudes ; fait que les idées de localisation en temps et en fréquence sont contradictoires. Plus un signal est localisé en temps, moins il l'est en fréquence et réciproquement.

3.2 Fréquence instantanée d'un signal

3.2.1 Approche intuitive

Partons d'un signal strictement sinusoïdal (ou monochromatique) décrit par l'équation $s(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$. Ce signal est défini par trois paramètres : l'amplitude a , la pulsation ω (la fréquence f se déduit par $\omega = 2\pi f$) et la phase d'origine φ . Ce signal peut être réalisé avec un pendule simple. Cependant, dans le cas où on fait varier lentement sa longueur, on aura l'équation suivante, qui introduit la fréquence instantanée :

$$s(t) = a(t) \cos(\omega(t)t + \varphi)$$

où la IF peut être considérée comme la dérivée de $\phi(t)$. En conséquence on dit assez souvent que la IF d'un signal mis sous forme $\cos(\phi(t))$ est tout simplement, à un multiple près, la dérivée de sa phase instantanée (IP : Instantaneous Phase). On verra plus loin toutes les contradictions d'une telle définition.

3.2.2 Approche mathématique

Le fait que la fréquence, définit habituellement le nombre de cycles ou vibrations subies pendant une unité de temps par un corps en mouvement périodique, est en soi un paradoxe résultant de l'association des mots instantanée et fréquence. Pour cette raison la définition de la IF est controversée. On va énumérer les différents concepts de la fréquence instantanée et leur approche mathématique associée :

Concept de Carson et Fry

Carson et Fry étaient les premiers à considérer une fréquence variable dans un contexte électrique de théorie de circuit. C'est alors que le concept de signaux (FM) à fréquence modulée est apparu. Carson et Fry l'ont exprimé comme suit :

$$w(t) = \exp(j(\omega_0 t + \lambda \int_0^t m(t) dt)) \quad (3.1)$$

où f_0 représente la fréquence porteuse ($f_0 = 2\pi\omega_0$), λ l'index de modulation et $m(t)$ le signal message à bande étroite à envoyer. Delà, ils ont défini la IF, comme étant une généralisation de la définition de la fréquence constante (ie : le taux de changement d'angle de phase au temps T), qui a pour expression :

$$fi(t) = f_0 + \lambda m(t)/2\pi \quad (3.2)$$

Concept de Van der Pol

Analysant une expression pour un mouvement harmonique simple Van der Pol, a suggéré en 1946, une nouvelle approche pour la formulation de la fréquence instantanée :

$$s(t) = a \cos(2\pi f t + \phi) \quad (3.3)$$

Il a alors défini la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence, comme suit :

$$a(t) = a_0[1 + \mu g(t)] \quad (3.4)$$

$$\phi(t) = \phi_0[1 + \mu g(t)] \quad (3.5)$$

alors $\theta(t) = 2\pi ft + \phi(t)$ pour un signal FM. Avec $g(t)$ le signal à transmettre et $a(t)$ et $\phi(t)$, respectivement, l'amplitude et la phase instantanée. Cependant il nota que remplacer f dans l'équation 3.3 serait incorrect et donc l'équation 3.6 donnerait des résultats erronés.

$$f_i(t) = f_0[1 + \mu g(t)] \quad (3.6)$$

Ce qui l'a conduit à écrire l'équation 2.13 sous la forme :

$$s(t) = a \cdot \cos\left[\int_0^t 2\pi f_i(t) dt + \phi\right] \quad (3.7)$$

où l'argument entier de la fonction de cosinus est la phase $\phi(t)$. Son raisonnement l'a amené à la définition suivante :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (3.8)$$

De ce fait en utilisant une représentation à partir d'un signal réel, Van der Pol est arrivé à une définition semblable à celle de Carson et Fry qui ont employé un signal complexe.

Concept de Gabor

La prochaine étape importante Ref [5], dans l'étude de l'IF, a été élaborée par Gabor qui a proposé une méthode pour produire un signal complexe unique à partir d'un signal réel. Il y'a plusieurs manières d'associer à un signal réel $s(t)$ un signal complexe $z(t)$; opération que l'on peut écrire sous forme $z(t) = AS[s(t)]$. La construction du signal analytique part des remarques suivantes : Si on choisit d'associer à un signal réel un signal complexe; il faut que ce soit une extension au cas d'une sinusoïde. De là on impose la première condition :

$$AS[\cos(wt)] = \exp(jwt) \quad (3.9)$$

Par ailleurs l'opération qu'on recherche, doit être homogène car si l'amplitude instantanée de $s(t)$ est $a(t)$ celle de $\lambda s(t)$ sera $\lambda a(t)$. Par une extension naturelle de cette propriété il suffit d'imposer que $AS[\cdot]$ soit un filtrage linéaire, ce qui est la seconde condition. Dans ce cas, puisque $w > 0$, sa réponse fréquentielle se déduit de l'équation 3.9 et vaut $2U(f)$ où $U(\cdot)$ est la fonction échelon unité.

Ainsi le signal analytique (AS : Analytic Signal) $s_a(t)$ associé à un signal $s(t)$ de Transformée de Fourier $S(f)$, possède une FT valant : $S(f) = 2U(f)S(f)$.

Une autre raison pour la quelle, cette transformée a été introduite, c'est qu'en raison de la symétrie hermitienne, tout signal réel sans signal analytique associé a

toujours son moment d'ordre impaire nulle (eq. 3.10) et cela même s'il est à bande étroite autour d'une fréquence porteuse f_0 .

$$\langle f^n \rangle = \frac{\int f^n |Z(f)|^2 df}{\int |Z(f)|^2 df} \quad (3.10)$$

Ce signal complexe associé au signal réel est produit par la transformée de Hilbert. Tout ces critères on amené Gabor à choisir cette transformation.

Concept de Ville

Ville a unifié les travaux effectués par Carson, Fry et Gabor et a défini la IF d'un signal exprimé par $s(t) = a(t)\cos\phi(t)$ comme suit :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\arg z(t)] \quad (3.11)$$

où $z(t)$ est le signal analytique.

Ville a noté que comme la IF est à variation temporelle, il devrait intuitivement y avoir un certain spectre instantané lié à la valeur moyenne des fréquences de ce spectre. En utilisant les mesures moyennes de Gabor, il a prouvé que la fréquence moyenne dans le spectre d'un signal était égale à la moyenne dans son domaine temporel. Ce qui s'exprime par les relations suivantes :

$$\langle f \rangle = \langle f_i \rangle$$

avec

$$\langle f \rangle = \frac{\int f |Z(f)|^2 df}{\int |Z(f)|^2 df}$$

et

$$\langle f_i \rangle = \frac{\int f_i(t) |Z(f)|^2 dt}{\int |Z(f)|^2 dt}$$

Utilisant ces résultats, Ville a formulé une distribution en temps-fréquence, appelée la distribution de Wigner-Ville, à travers laquelle il a montré que le premier moment fréquentiel de cette distribution est égal à la fréquence instantanée :

$$f_i(t) = \frac{\int f W(t, f) df}{\int W(t, f) df} \quad (3.12)$$

Concept de Priestley

Selon la définition conventionnelle, le terme " fréquence ", est associé spécifiquement au sinus et au cosinus d'une fonction. Afin d'appliquer la notion de la fréquence dans l'analyse des signaux non-stationnaires, il est nécessaire de présenter une nouvelle famille de base des fonctions qui doivent être non-stationnaires et avoir toujours une forme oscillante de sorte à rendre applicable la notion de "fréquence".

Ainsi Priestley a suggéré qu'un signal $s(t)$ non-stationnaire peut être représenté par :

$$s(t) = \int \gamma_t(f)S(f)df \quad (3.13)$$

avec

$$\gamma_t(f) = A_t(f).e^{j2\pi ft} \quad (3.14)$$

L'approche de Priestley mène à un modèle où les signaux sont localement représentés par une fréquence et une diffusion aux environs de cette fréquence. Dans l'approche de Ville, la fréquence est toujours définie comme dérivée de la phase, indépendamment de la stationnarité du signal. En résumé, l'approche de Priestley est aisément applicable aux signaux à plusieurs composantes, alors que Ville est valide seulement pour les signaux mono-composante.

3.2.3 Comparaison entre les différentes définitions

Après avoir présenter diverses définitions et concepts de la fréquence instantanée, il convient de noter qu'aucune des définitions actuellement connues, ne peut s'imposer d'une façon absolue. Chaque définition à ses propres arguments qui ne sont utiles que pour des applications bien déterminées.

Notons, aussi, que divers critiques ont été émises contre toute définition fondée sur l'usage du AS. L'une des critiques fondamentales est que le AS ne peut introduire une méthode "instantanée". C'est la conséquence directe de l'équation définissant la HT, qui exprime la nécessité d'une intégration sur toute la durée du signal, avec un poids égal pour le passé et le futur. On est donc conduit à définir des quantités instantanées faisant appel aux différentes valeurs du signal tout au long de son existence. Par contre les méthodes dites "instantanées" ne devraient utiliser les valeurs du signal et de ses dérivés qu'au moment où l'on veut définir la IF.

3.2.4 Définition adoptée

On peut maintenant définir sans ambiguïté les concepts de phase et de fréquence instantanées d'un signal réel $s(t)$. Pour cela, on lui associe son AS $s_a(t)$ dont la partie réelle est égale à $x(t)$ et sa partie imaginaire est égale à $y(t)$. On définit alors sa phase instantanée par l'équation 3.11. Bien entendu cette équation ne définit qu'un angle entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, la phase réelle étant entre $-\pi$ et $+\pi$. On peut la déduire grâce au signe de $s(t)$. La fréquence instantanée s'obtient alors par la dérivation de sa phase instantanée, ce qui nous donne :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \quad (3.15)$$

Malgré que cette méthode s'applique à tout signal réel, elle n'a de sens physique que dans le cas des signaux à bande étroite, ou quasi-monochromatique . Ce qui la rend inadaptée pour des signaux non-stationnaires. C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous allons présenter les différentes techniques de l'estimation de la fréquence instantanée, en soulignant les avantages et les inconvénients de chaque méthode.

3.3 Techniques d'estimation de la fréquence instantanée

3.3.1 Différence de phase

En utilisant la définition de la fréquence instantanée proposée par Ville (eq. 3.11), on peut alors proposer un estimateur basé sur la différenciation de phase. Le FFD et le BDF (the forward and backward finite differences) sont des différenciateurs de phase utilisant l'instant futur ou passé de la phase instantanée, tel que montrer par les équations suivantes :

$$f_f(n) = \frac{1}{2\pi}(\phi(n+1) - \phi(n))$$

$$f_b(n) = \frac{1}{2\pi}(\phi(n) - \phi(n-1))$$

On peut également estimer la fréquence instantanée en utilisant une autre opération de différenciation de phase, désignée sous le nom CFD (Central finite differences) la différence finie centrale.

$$f_c(n) = \frac{1}{4\pi}(\phi(n+1) - \phi(n-1))$$

Ces estimateurs sont facilement implémentables, cependant ils présentent une sensibilité assez forte sous l'effet du bruit. De bonnes approximations peuvent être obtenues en employant des estimateurs appelés : estimateurs généraux de différence de phase sous forme polynomiale. Cette approche est efficace et rapporte en général de meilleurs résultats en présence de bruit pour des signaux lentement non-stationnaires et à bande étroite.

Pour une phase instantanée polynomiale :

$$\phi(n) = \sum_{i=0}^p a_i n^i$$

Sa fréquence instantanée correspond à :

$$f_i(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^p i a_i n^{i-1}$$

Et la formulation de cet estimateur pour un ordre q est :

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-q/2}^{q/2} b_k \phi(n+k)$$

avec q nombre naturel pair. Les coefficients b_k sont définis de telle sorte que les deux équations, citées auparavant, sont égales entre elles. Par exemple pour l'ordre 2, l'estimateur coïncide avec le CFD. Une table des coefficients pour les premiers ordres a été dressée par Ref [3] :

Remarque : Cette dernière technique est équivalente à celle employée par les discriminateurs FM, utilisés pour les signaux lentement non-stationnaires et à bande étroite (ref[6]). La dérivée de la phase instantanée peut être écrite sous la forme :

$$\phi'(t) = \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \quad (3.16)$$

d'où on obtient la fréquence instantanée :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{x(t)y'(t) - x'(t)y(t)}{x^2(t) + y^2(t)} \quad (3.17)$$

avec $x(t)$ et $y(t)$ respectivement la valeur réelle et imaginaire du signal analytique associé au signal réel.

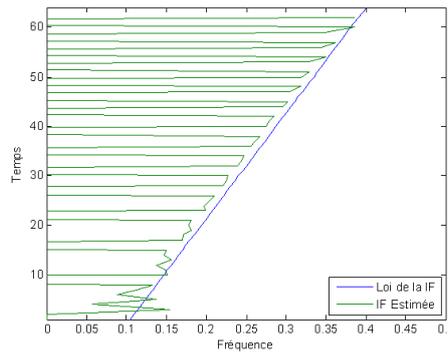


FIG. 3.1 – Estimation de la IF à l'aide de la technique de différence de phase

3.3.2 Différence de phase lissée

L'estimateur cité auparavant est inadéquat pour des signaux noyés dans le bruit. Un certain nombre d'approches peuvent être employées pour réduire l'influence du bruit. Premièrement, si la fréquence du signal est connue pour être contenue dans une largeur de bande B , alors le signal sera filtré en dehors de cette largeur de bande. Deuxièmement lisser le signal pour diminuer sa variance. Kay a proposé un estimateur basé sur ces deux étapes. Il a défini l'estimateur WPD (weighted phase difference) dit de "Différence de Phase Pesée" :

$$f(n) = \frac{1}{2\pi} h_n \sum_{n=0}^{N-2} [\phi(n+1) - \phi(n)] \quad (3.18)$$

où h_n représente la fenêtre de lissage (ref[6]) :

$$h_n = \frac{1.5N}{N^2 - 1} \left(1 - \left[\frac{n - ((N/2) - 1)}{N/2}\right]^2\right) \quad (3.19)$$

On peut montrer que la réduction de la variance Ref [21], par rapport à la technique de différence de phase, vaut : $N/6$ où N est le nombre d'échantillons contenus dans le signal discrétisé.

Cependant cette approche ; comme le montre la figure 3.3 ; présente des imperfections s'il y a des variations significatives de fréquence (en particulier pour les signaux fortement non-linéaires). Pour surmonter cette limitation, on peut reconsidérer le problème entier en utilisant l'auto-régression linéaire de Tretter

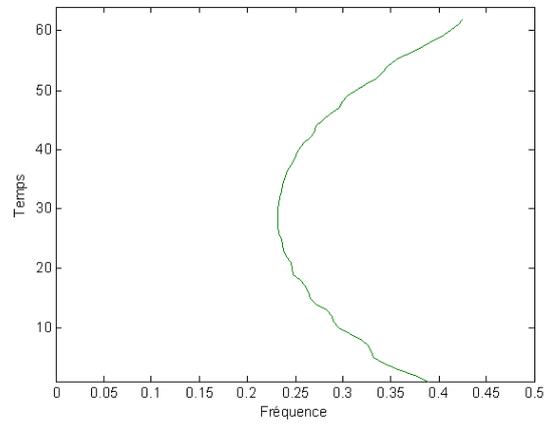


FIG. 3.2 – Estimation de la IF à l'aide de la technique de différence de phase lissée

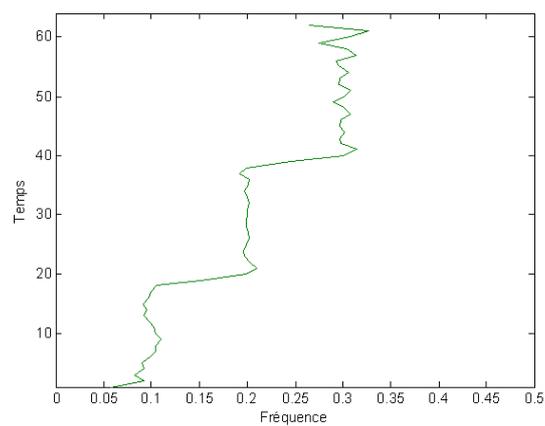


FIG. 3.3 – Différence de phase lissée pour un signal fortement non-stationnaire

3.3.3 Passage par zéro

Une des façons pour l'estimation local de la fréquence d'un signal à bande étroite qui est très utilisée dans le traitement sismique, est de mesurer le nombre d'échantillons entre deux passages successifs par la valeur zéro. Pour un signal sinusoïdal ou un signal qui peut être considéré comme localement stationnaire, la fréquence peut être calculée par l'inverse de la période, ce qui se traduit par la relation suivante :

$$f = 1/2T_z \quad (3.20)$$

ou par :

$$f = Z/2 \quad (3.21)$$

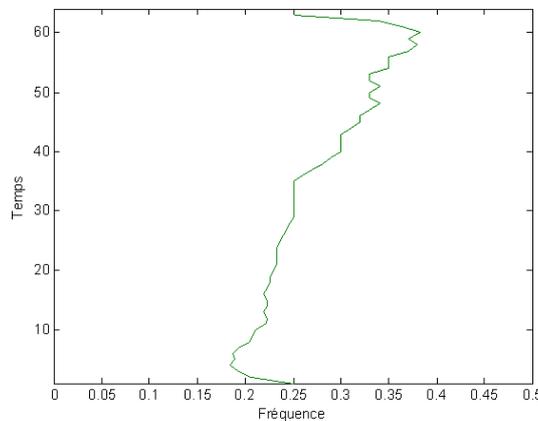


FIG. 3.4 – Estimation de la IF à l'aide de la technique Z-R

où T_z , est l'intervalle de temps entre deux passages successifs par la valeur zéro. $2T_z$ représente donc la période, f la fréquence et Z le taux de passage par zéro (ref[30]). Dans notre cas, on a considéré un signal discret avec une fréquence d'échantillonnage égale à 1Hz (fig 3.4). Dans ce cas la valeur de T_z est donnée par k , qui représente le nombre de passage par la valeur zéro. On a supposé aussi que les échantillons passent exactement par zéro. On obtiendra alors $k + 1$ échantillons pour k passages par zéro.

3.3.4 Passage par zéro fenêtré

Une variante de la méthode du zeros-crossing, qui est aussi facilement implémentable et ne nécessitant pas un temps de calcul élevé, est le zeros-crossing windowed qui permet d'atténuer l'effet du bruit par rapport à la précédente. Pour ce faire, Rabiner et Schafer ont proposé de prendre le nombre moyen de passages par la valeur zéro dans une fenêtre de longueur M . Cette technique d'estimation est définie par :

$$Z(n) = \sum_{m=-M}^M |sgn[s(m)] - sgn[s(m-1)]| h(n-m) \quad (3.22)$$

avec sgn la fonction signe, et $h(n) = 1/2M$ si et seulement si $0 \leq n \leq M - 1$ et nulle ailleurs.

Cette méthode s'applique aux processus localement stationnaires. Elle peut être appliquée pour les signaux FM non-stationnaires en introduisant une dépendance temporelle :

$$f_i(n) = Z(n)/2 \quad (3.23)$$

En glissant la fenêtre $h(n)$, selon n , nous obtenons une estimation de la fréquence instantanée en fonction de la variable temporelle n . La largeur de la fenêtre M est choisie selon le rythme de variation de la fréquence instantanée (ref[6]).

3.3.5 Prédiction Linéaire

L'estimation de la fréquence instantanée basée sur le calcul des coefficients de prédiction linéaire, a été traité en détail par L. J. Griffiths dans l'article "Rapid measurement of digital instantaneous frequency" Ref [13].

Il existe plusieurs estimateurs de prédiction linéaire basés sur le spectre auto-régressif. L'utilisation de l'auto-corrélation et de la covariance, réduisent l'erreur de la valeur prédite par l'estimateur. Le principe de cette dernière repose tout d'abord sur la résolution du système matriciel modifié de Yule-Walker ($A \times B = -C$) :

A étant

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{pmatrix}$$

B étant

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

C étant

$$\begin{pmatrix} c_{1,0} \\ c_{2,0} \end{pmatrix}$$

et avec les $c_{j,k}$ des coefficients définis comme suit :

$$c_{i,k} = \frac{1}{2(N-2)} \left(\sum_{n=2}^{N-1} x_{n-j} x_{n-k} + \sum_{n=0}^{N-3} x_{n+j} x_{n+k} \right) \quad (3.24)$$

avec N le nombre d'échantillons. La résolution de cette équation matricielle nous permet d'obtenir les a_i (les coefficients de prédiction linéaire) et donc la résolution du polynôme de prédiction linéaire définie par : $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$. Cette équation nous permet à son tour, après approximation d'obtenir la fréquence Ref [3] :

$$\Omega_{LP} \approx \arccos\left(\frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)$$

Cette procédure, nous permet d'avoir une bonne estimation de la fréquence. Elle peut être appliquée au cas de signaux non-stationnaires. Prony, a proposé une extension de cette méthode basée sur quatre points pour l'estimation de la fréquence instantanée. Cette méthode s'exprime par la relation suivante :

$$\Omega_{LP4} \approx \arccos\left(\frac{x_{n-2}x_{n-1} + 2x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1}}{2(x_{n-1}^2 + x_n^2)}\right) \quad (3.25)$$

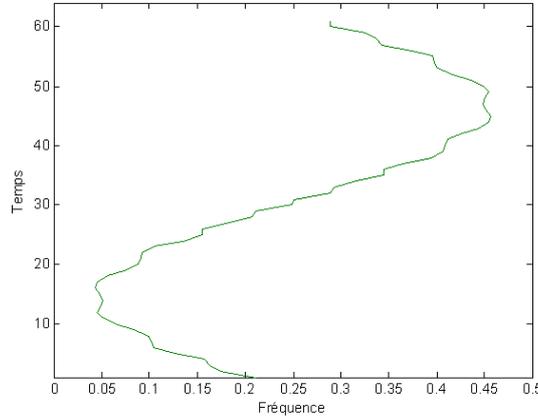


FIG. 3.5 – Estimation de la IF à l'aide de la technique A-R2

3.3.6 L'estimation de l'IF basée sur le moment d'ordre 1 des TFDs

Cohen, a formulé une classe des fonctions bidimensionnelles (TFD) [Chapitre 2] qui peuvent être employées pour représenter la distribution de l'énergie de signal en temps et en fréquence. L'expression discrétisée de cette dernière est donnée par l'équation 3.29 :

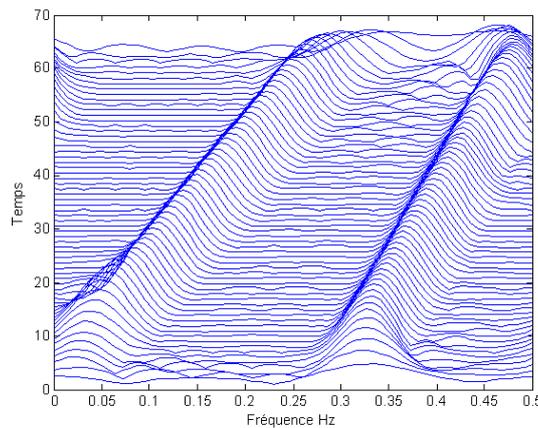


FIG. 3.6 – WVD lissée d'un signal multicomposantes avec un SNR=0dB

Malgré la complexité du calcul, cette technique trouve un avantage dans la réduction du bruit et la possibilité de séparer les différentes fréquences instantanées

contenues dans un même signal. La figure 3.6, illustrent l'effet de réduction de bruit lors de l'utilisation de cette technique et de sa version lissée.

Si on prend par exemple, le moment d'ordre 1 pour une WVD donnée par l'équation 3.12, Son équivalent discrétisé correspond à (ref[6]) :

$$f_c(n) = \frac{M}{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi k/M} W^g(n, k) \right) \text{mod} 2\pi \quad (3.27)$$

où $W^g(n, k)$ est la distribution de Winger-Ville discrétisée qui s'exprime tout simplement comme suit :

$$W^g(n, k) = \sum_{m=-M}^M z(n + m/2) z^*(n - m/2) e^{-j2\pi mk/M} \quad (3.28)$$

De la même façon, on peut obtenir d'autres estimations de la fréquence instantanée selon le type de la TFD employée. De ce fait, il y a autant de techniques basées sur le calcul du premier ordre de la TFD que de TFD. Le temps de calcul et l'efficacité de cette méthode dépendent alors de la TFD utilisée et de ces caractéristiques¹.

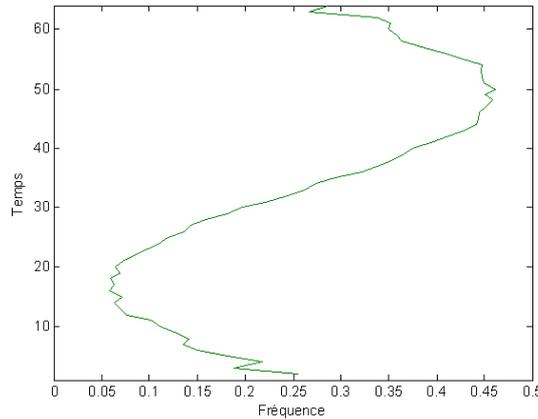


FIG. 3.7 – L'estimation de l'IF basée sur le moment d'ordre 1 de la WVD

Une version lissée de cette dernière a été proposée dans [3]. Elle se traduit par la relation suivante :

$$m_\rho^1(n) \approx [f_c(n) * G(n, 1)] \text{mod} f_s/2 \quad (3.29)$$

où $f_c(n)$ et $G(n, 1)$ sont respectivement donnés par eq. 2.13 et eq. 3.29

La figure 3.8 montre l'amélioration apportée par cette dernière. Malgré la lourdeur des calculs, cette technique est indispensable pour accéder à une plus grande précision (Traitement des signaux Radar et Sonar).

3.3.7 L'estimation de l'IF basée sur les pics des TFDs

L'estimation de l'IF basée sur les pics de la WVD

L'utilité de la représentation WVD, résulte dans sa capacité à localiser l'énergie contenue dans un signal non-stationnaire. Si ce dernier a une fréquence instantanée

¹Pour plus de détail une description et une comparaison ont été faites au Chapitre 2

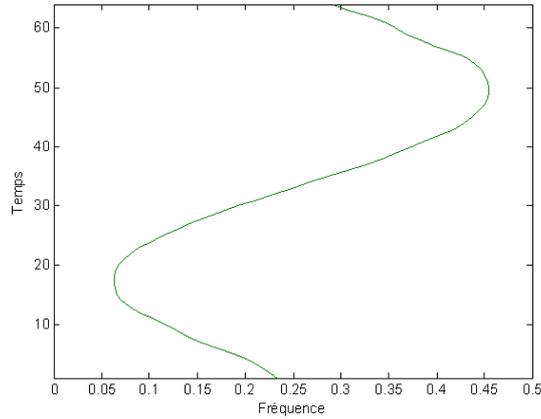


FIG. 3.8 – L'estimation de l'IF basée sur le moment d'ordre 1 lissé de la WVD

de loi linéaire et une amplitude constante, la distribution temps-fréquence va le traduire par une succession de fonctions deltas localisées sur la loi de la fréquence instantanée, représentée ici par la concentration d'énergie (ref[8]).

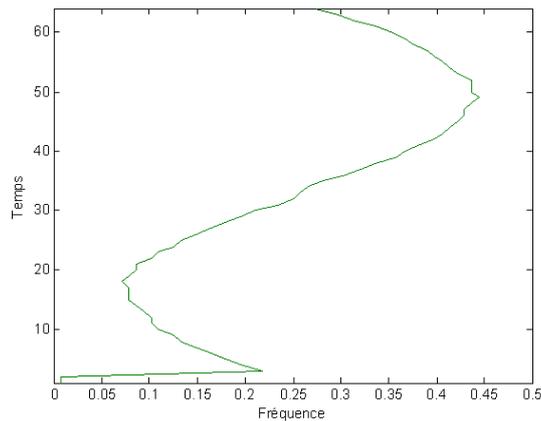


FIG. 3.9 – Estimation de l'IF basée sur les pics de la WVD

L'étude et la simulation de cette technique en présence du bruit (fig 3.9), montre qu'elle est efficace pour un SNR élevé et reste appréciable pour un SNR moyen. Cependant elle fait apparaître une dégradation assez importante dans le cas où le signal non-stationnaire serait noyé dans un bruit avec un SNR faible. C'est pour cette raison que, au détriment d'un temps de calcul plus grand, on utilise la localisation des pics par la XWVD (cross Wigner-Ville Distribution) pour un faible niveau de SNR.

L'estimation de l'IF basée sur les pics de la XWVD

Considérant un signal analytique $z_r(t)$, associé au signal d'observation $s_r(t)$, ayant une amplitude constante égale à l'unité et modulé en phase. L'algorithme d'implémentation de la XWVD est le suivant (ref[9]) :

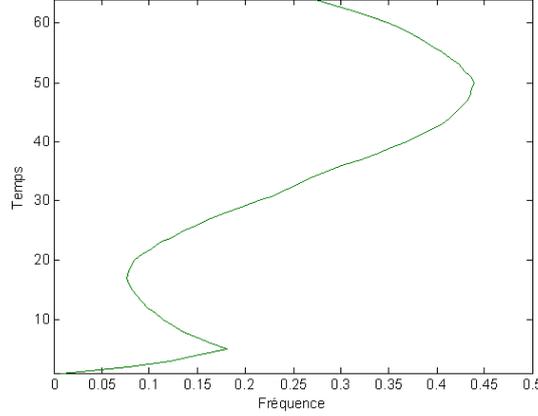


FIG. 3.10 – Estimation de l'IF basée sur les pics de la XWVD

$$W_{z_r z_s}(t, f) = \int z_r(t + r) z_s^*(t - \tau) e^{-j4\pi f \tau} d\tau \quad (3.30)$$

Ca représente la Transformée de Fourier sur la variable τ avec une échelle de fréquence égale à un-demi.

$$\hat{z}_s(t) = \exp[j2\pi \int f_i(t) dt + \hat{\phi}_s] \quad (3.31)$$

tel que $\hat{\phi}_s$ représente la constante de phase et $f_i(t)$ la fréquence instantanée estimée.

La fréquence instantanée estimée diffère, par un terme d'erreur $f_e(t)$, de la loi de la fréquence instantanée. D'où on peut écrire le terme d'erreur sous la forme suivante :

$$f_i(t) = f_i(t) + f_e(t). \quad (3.32)$$

l'équivalent de l'équation 3.32 dans le domaine temporel est l'équation 3.33

$$\hat{z}_s(t) = z_s(t) + z_e(t) \quad (3.33)$$

où $z_e(t)$ s'écrit sous la forme :

$$z_e(t) = |z_s(t)| \exp[j2\pi \int_{-\infty}^t f_e(t) dt + \phi_e(t)]$$

avec $|z_s(t)|$ et ϕ_e qui représentent, respectivement, l'amplitude et la constante de phase du signal erreur. L'équation 3.30 peut s'écrire sous une nouvelle forme :

$$W_{z_r z_s}(t, f) = F_{\tau \rightarrow 2f}(z_r(t + \tau) z_s^*(t - \tau) z_e^*(t - \tau)) \quad (3.34)$$

Et donc

$$W_{z_r z_s}(t, f) = W_{z_r z_s}(t, f) *_f F_{\tau \rightarrow 2f}(z_e^*(t - \tau)) \quad (3.35)$$

où $*_f$ représente la convolution dans le domaine fréquentiel avec la variable f .

L'équation 3.35 montre que l'estimation de la XWVD, est formée à l'aide d'une distribution du signal réel entaché par une convolution d'une Transformée de Fourier du terme d'erreur issue de l'estimation de la fréquence instantanée.

En pratique, le signal de référence n'est pas connu ; mais il peut être estimé à partir du signal observé. Ce qui implique que l'estimation de la référence nécessite une évaluation de la fréquence instantanée, $f_i(n)$, et la construction du signal avec une amplitude unitaire (eq 3.36) :

$$\hat{z}_s = \exp(j2\pi \sum_{k=0}^n f_i(k)) \quad (3.36)$$

n allant de 0 à $N - 1$.

La procédure pour la détermination de la fréquence instantanée à l'aide de la XWVD, est la suivante :

1. Initialisation : à partir du signal observé, estimer la fréquence instantanée ;
2. Estimation : On estime la fréquence instantanée à l'aide de la distribution XWVD calculée à partir du signal référence et du signal observé ;
3. Itération : On répète l'étape 1 jusqu'à obtenir une différence entre deux estimations de fréquence instantanée inférieure à un seuil fixé selon le besoin d'exactitude.

Le point de départ pour l'estimation initiale de la fréquence instantanée, peut être obtenu via n'importe quel estimateur. Notons, comme le montre la figure 3.10 l'efficacité de cette dernière technique vis-à-vis de celle utilisant les pics de la distribution WVD.

L'estimation de l'IF basée sur les pics d'autres TFDs

La représentation temps-fréquence ou les distributions temps-fréquence, sont des outils bien adaptés pour l'analyse des signaux non-stationnaires du type FM. Comme cela a été cité précédemment, la localisation des pics fournit une bonne estimation de la fréquence instantanée. La diversité des distributions temps-fréquence, implique une multitude de techniques d'estimations basées sur ce même principe qui est la détection de pics. Parmi, toutes les distributions qui existent, la simulation (fig 3.11) montre que la récente distribution de Zhao-Atlas-Marques (ZAM-D), semble avoir, non seulement, une bonne résolution temps-fréquence et une bonne robustesse aux bruits ; mais aussi et surtout l'inexistence des interférences qui la rend bien adapté à l'estimation de la fréquence instantanée pour les signaux non-stationnaires multi-composantes (ref[6]).

3.3.8 Estimation de la IF des signaux multi-composantes

Plusieurs applications pratiques exigent que les fréquences instantanées d'un signal multi-composantes soient dissociées et estimées. Parmi les méthodes citées auparavant certaines peuvent être appliquées au cas des signaux non-stationnaires multi-composantes (ref[16]).

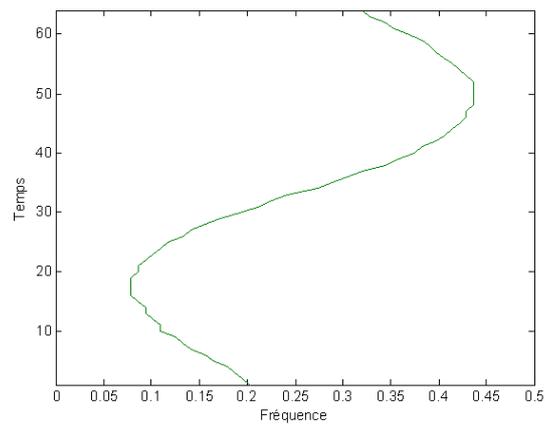


FIG. 3.11 – Estimation de l'IF basée sur les pics de la Z-A-M

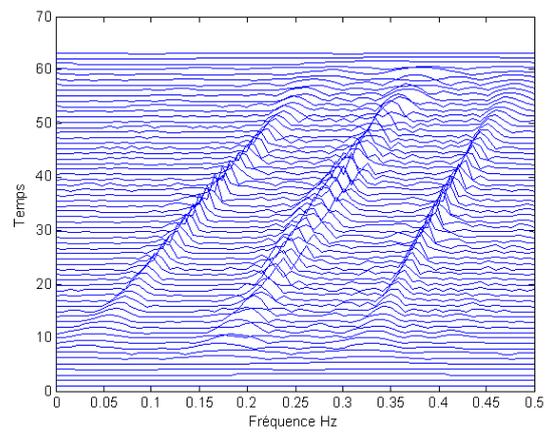


FIG. 3.12 – WVD d'un signal multi-composantes

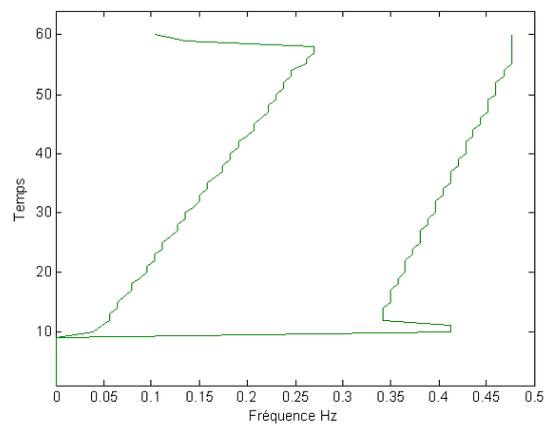


FIG. 3.13 – Estimation de la IF pour les signaux multi-composantes

Les techniques basées sur le principe de localisation des pics, peuvent être facilement exploitables pour le cas des signaux multiples. La figure 3.13, représente la somme de deux signaux chirp ainsi que l'estimation des deux lois des fréquences instantanées. Après détection du signal, on précède à la localisation de tous les pics locaux à l'aide d'une des distributions temps-fréquence. Dans le cas où le nombre de composantes n'est pas connu, on peut le déduire en se fixant une limitation du taux de variation de la fréquence instantanée. Dans le cas contraire, c'est à dire si le nombre de composantes est connu, on peut filtrer les pics locaux pour obtenir seulement deux points pour chaque moment. La succession des deux points séparément, nous donne les deux lois de chaque fréquence instantanée.

A noter que cette technique apporte des résultats appréciables, dans le cas où les différentes lois des fréquences instantanées présentent dans le même signal, ne se confondent pas dans les distributions temps-fréquence. Mais, si la distance euclidienne dans le domaine fréquentiel et assez faible, cela peut engendrer quelques fausses estimations de la fréquence instantanée. Pour y remédier on peut utiliser des algorithmes correcteurs (RLS, MLS).

3.4 Comparaison

La comparaison des différentes techniques citées auparavant, a été faite pour un signal chirp, de fréquence minimale 0.1 Hz et de fréquence maximale 0.4 Hz ayant 64 points avec une fréquence d'échantillonnage égale à 1 Hz. Le signal était noyé dans un bruit additif gaussien de SNR allant de $-30dB$ à $+30dB$. A l'aide de 100 réalisations on obtient, la figure 3.14, représente la performance de chacun des estimateurs suivant :

1. The phase differencing (Différence de phase),
2. The zero-crossings (Passage par zéro),
3. The Auto regressive (Auto-regressive),
4. The spectrogram peak (Estimation de l'IF basée sur les pics du spectrogramme),
5. The WVD peak (Estimation de l'IF basée sur les pics de la WVD),
6. The XWVD peak (Estimation de l'IF basée sur les pics de la XWVD),
7. The first moment WVD (Estimation de l'IF basée sur le calcul du 1er moment de la WVD).

La connaissance de la robustesse d'une technique vis-à-vis du bruit et la complexité du calcul, sont les deux critères essentielles pour choisir un estimateur parmi tant d'autres. La comparaison a été faite sur ces deux critères.

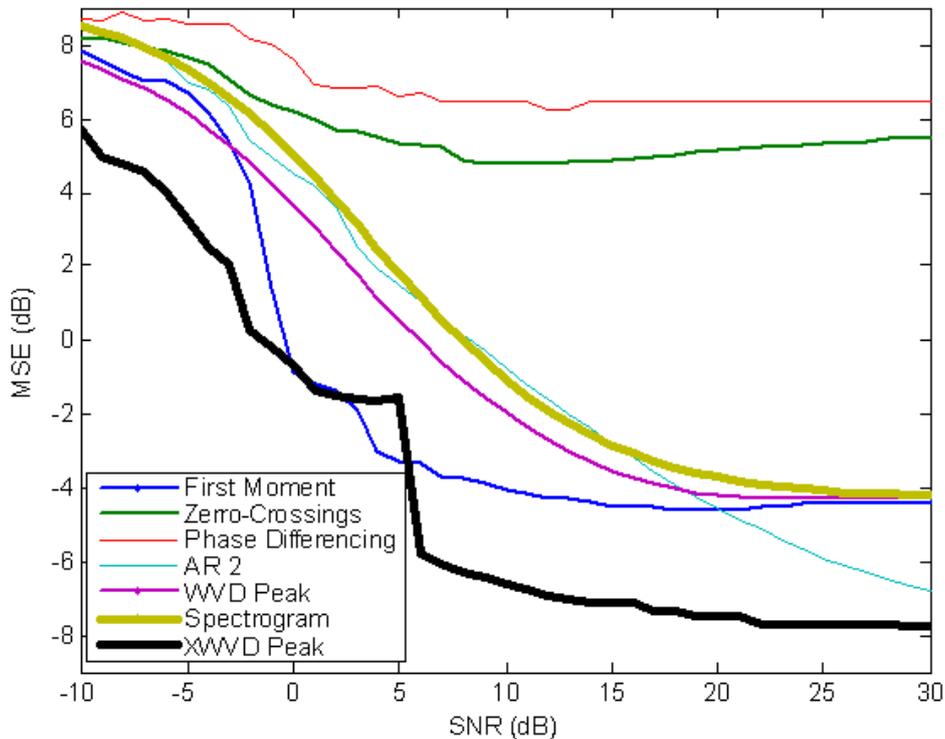
La figure 3.14 montre que la méthode basée sur la XWVD nous procure la meilleure performance en présence du bruit mais cela en contre partie d'un temps de calcul beaucoup plus grand. Cependant en présence d'un bruit assez faible, la méthode basée sur le calcul du premier moment ou de la WVD sont préférables vue leur simplicité de calcul. Les techniques auto-régressives et du spectrogramme nous procurent de très bons résultats pour un niveau de SNR assez élevé avec un minimum de calcul. La méthode du Zero-Crossings est de performance moyenne. Elle peut être améliorée par extrapolation pour obtenir de meilleurs résultats mais

Estimateur	Seuil SNR	Complexité de Calcul
Phase Difference Estimator	Très Haut	Faible
Zero-Crossing	Très Haut	Très faible
Linear Predictive	Moyen	Moyenne
STFT's peak	Moyen	Forte
WVD's peak	Faible	Forte
TFD's Moments	Faible	Très Forte
XWVD's peak	Très Faible	Très Forte

TAB. 3.1 – Comparaison des techniques d'Estimation de la fréquence instantanée

au détriment d'un temps de calcul un peu plus grand. Enfin la méthode de différence de phase, reste la plus médiocre et son utilisation est limitée seulement à des estimations approximatives.

Ces résultats sont résumés dans le tableau 3.1 :


 FIG. 3.14 – Comparaison des différentes techniques d'estimation de la IF (Cas d'un signal chirp avec $N=64$)

3.5 Conclusion

Dans ce présent chapitre des techniques d'estimation de la fréquence instantanée ont été présentées et comparées entre elles. Cette comparaison, faite à l'aide d'un signal chirp, peut nous donner un aperçu sur le comportement de ces méthodes pour n'importe quel autre signal. La technique basée sur la XWVD, se révèle comme l'une

des techniques les plus efficaces en présence d'un SNR assez faible. La Zero-Crossings semble être la plus appropriée pour un temps de calcul assez faible en présence d'un SNR assez élevé. Cependant aucune méthode ne prédomine sur l'autre, pour chaque application un compromis est à faire entre l'exactitude et la complexité du calcul.

De nos jours beaucoup d'applications utilisent l'estimation spectrale. Les méthodes présentées ici, prouvent l'efficacité de ces techniques pour l'estimation de la fréquence instantanée. Afin de rendre ces techniques opérationnelles, nous les avons implémentées sous une plat-forme qui va être présentée au chapitre suivant.

Chapitre 4

Présentation de la plate-forme

La plate-forme qu'on va présenter, a été programmée à l'aide du logiciel Matlab 7.0.1. Tous les résultats et les simulations cités tout au long de ce rapport ont été faits via cette plate-forme. Le code source comporte plus de 4500 lignes, d'où l'impossibilité de citer tous les algorithmes utilisés. Certaines équations et algorithmes ont été cités aux chapitres [2] et [3], pour les autres et pour plus de détails voir l'open source PFE.m.

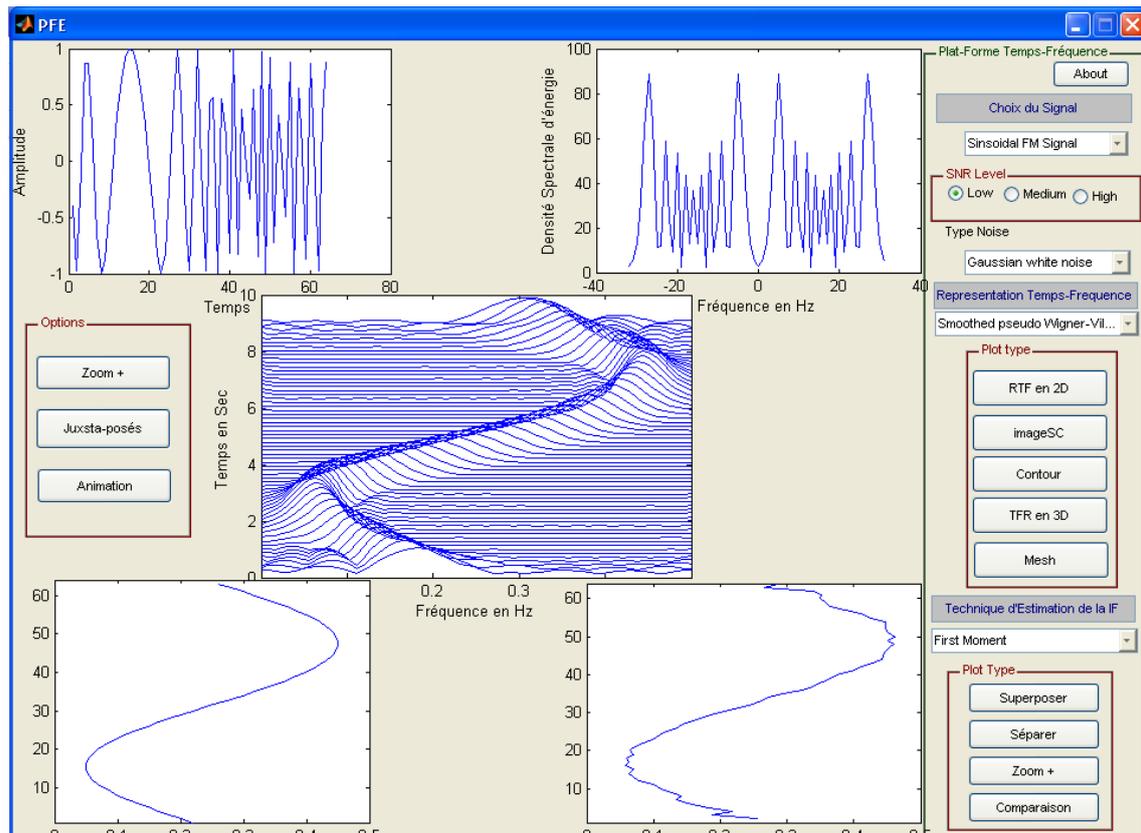


FIG. 4.1 – Plate-forme

La plat-forme est une interface se décomposant en deux principaux blocs. Le premier constitue la barre des tâches et le second la visualisation graphique.

4.1 Barre des tâches

La barre des tâches nous permet de choisir le signal , le bruit, le niveau SNR, le choix de la représentation temps-fréquence et aussi la technique de l'estimation de la fréquence instantanée.

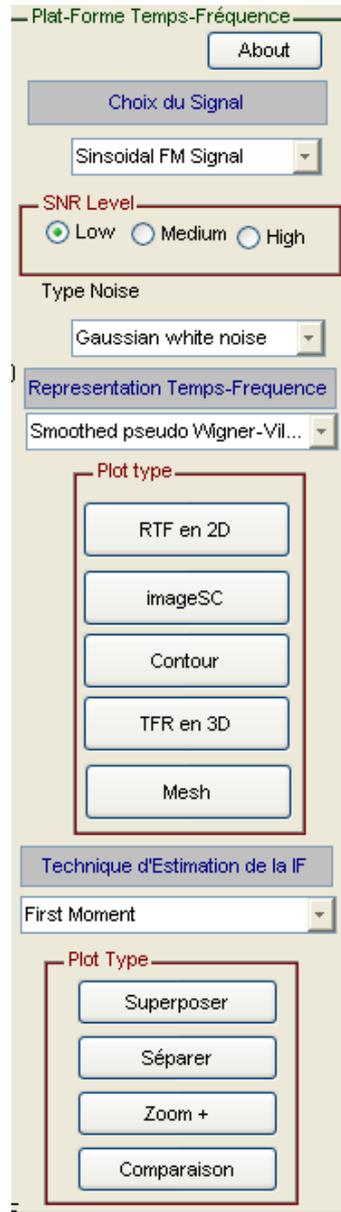


FIG. 4.2 – Barre des tâches

4.1.1 Choix du signal

Le choix des signaux prédéfinis, a été fait selon la loi de la fréquence instantanée de chacun d'entre eux. Une fréquence instantanée constante , correspond à un signal sinusoïdal simple : " Sin Signal ". Une loi linéaire correspond au signal chirp " Linear FM Signal ". Une loi parabolique correspond au signal " Parabolic FM Signal ". Une loi sinusoïdale correspond au signal " Sinusoidal FM Signal ". On a opté pour ce choix afin de couvrir l'ordre 1, 2 et 3 de la phase instantanée auquel on ajouté un

ordre polynomial infini qui correspond à une loi sinusoïdale. A ce menu on a ajouté des signaux non-stationnaires multi-composantes :

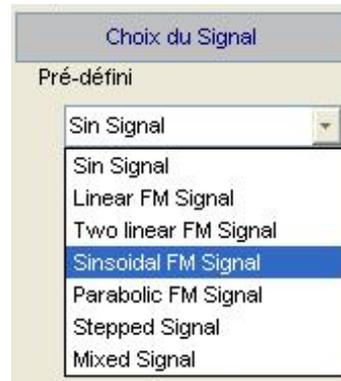


FIG. 4.3 – Choix du signal

- " Two linear FM Signal "
- deux signaux dont leur fréquence instantanée est un mélange de deux signaux chirp et d'un signal sinusoïdal qui correspond au signal " Mixed Signal ",
- et enfin le dernier signal dont la fréquence instantanée est sous forme d'escalier " Stepped Signal ".

Remarque : Une fonction " Load " a été introduite afin de traiter des signaux présents dans d'autres bases de donnée.

4.1.2 Choix du bruit et le niveau SNR correspondant

La présence du bruit étant indispensable pour comparer les performances des différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée. Pour cela on a donc introduit quatre type de bruit :

- un bruit additif Gaussian blanc "Gaussian white noise" de variance 0.1 et de moyenne nulle ;
- un bruit additif Gaussian blanc de moyenne nulle et de variance localement variable "Zero-mean Gaussian" ;
- un bruit additive de poisson "Poisson noise" et enfin,
- un bruit multiplicatif Gaussian blanc de moyenne nulle et de variance 0,1 "Multiplicative noise".

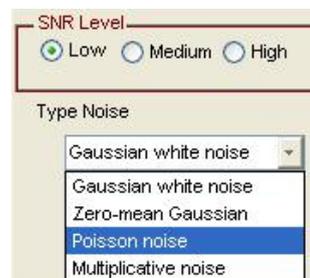


FIG. 4.4 – Choix du bruit et le niveau SNR correspondant

Autre caractéristique importante. Le rapport signal sur bruit en dB " SNR Level " (SNR : Signal Noise Ration) où le niveau bas "Low" correspond à $+10dB$, le niveau

moyen "Medium" a $0dB$ et le niveau haut "high" à $-10dB$. Ces valeurs peuvent être sensiblement différentes selon le signal choisi.

4.1.3 Représentation temps-fréquence



FIG. 4.5 – Représentation temps-fréquence

Les principales représentations temps-fréquence sont présentes dans cette plateforme. Les différents algorithmes générant ces 12 représentations sont cités au chapitre [2].

Les représentations temps-fréquence sont :

- La Wigner-Ville
- La pseudo Wigner-Ville lissée (Smoothed pseudo Wigner-Ville distribution)
- Spectrogramme
- Scalogramme
- Rihaczek
- Born-Jordan
- Zao-Atlas-Marks
- Bert
- Choi-Williams
- Choi-Williams
- Page
- UnterTFR

4.1.4 Les techniques d'estimation de la fréquence instantanée

Les différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée qui ont été présentées au chapitre [3] sont implémentées dans le pup-op menu "Technique d'Estimation de la IF" :

- IFe for multicomponent
- Phase Differencing : où l'estimation est basée sur le calcul différentiel de la phase instantanée,
- IF Using Trapezoidal Intergration : c'est une version corrigée de la Phase Differencing,

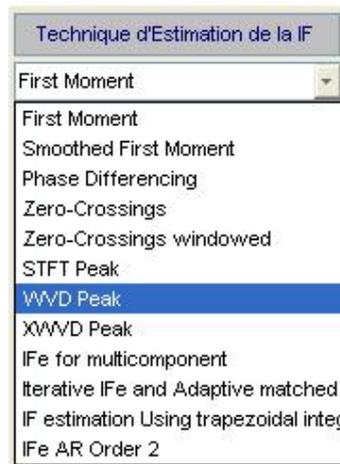


FIG. 4.6 – Les techniques d’estimation de la fréquence instantanée

- Zerro-Crossings : très utilisé dans le traitement sismique. Elle se base sur la fréquence de passage par zéro.
- Zerro-Crossings windowed : une variante de la précédente. Elle se base sur le calcul du nombre de passage par zéro dans une longueur temporelle définie par un fenêtrage.
- First Moment : où l’estimation est basée sur le calcul du premier moment de la distribution de Wigner-Ville.
- Smootehd First Moment : où l’estimation est basée sur le calcul du premier moment de la pseudo distribution de Wigner-Ville avec un lissage.
- STFT Peak : où l’estimation de l’IF est basée sur le calcul des pics de la distribution du spectrogramme .
- WVD Peak : où l’estimation de l’IF est basée sur le calcul des pics de la représentation de Wigner-Ville.
- XWVD Peak : où l’estimation de l’IF est basée sur le calcul de la représentation Cross Wigner Ville.
- IFe for multicomponent
- Iterative IF and adaptative : où l’estimation est basée sur des itérations adaptatives.
- IF AR order 2 : où l’estimation est basée sur les prédictions linéaires.

4.2 Visualisation Graphique

Pour permettre à la plate-forme d’être un outil pédagogique et afin de monter l’intérêt de la distribution quadratique dans l’estimation de la fréquence instantanée, on a présenté toutes les représentations (temporelle, fréquentielle et temps-fréquence) dans une même interface, en prenant soin de la clarté et de la simplicité d’utilisation. Pour cela, différentes options on étés introduites.

4.2.1 Disposition des graphes

Comme le montre la figure réffig :dipographe, les représentations classiques temporelle et fréquentielle, sont disposées en haut. Vient ensuite, la représentation

temps-fréquence au milieu de l'interface . En bas et à droite de la plate-forme, l'estimation de la fréquence instantanée et à gauche, la loi de la fréquence instantanée.

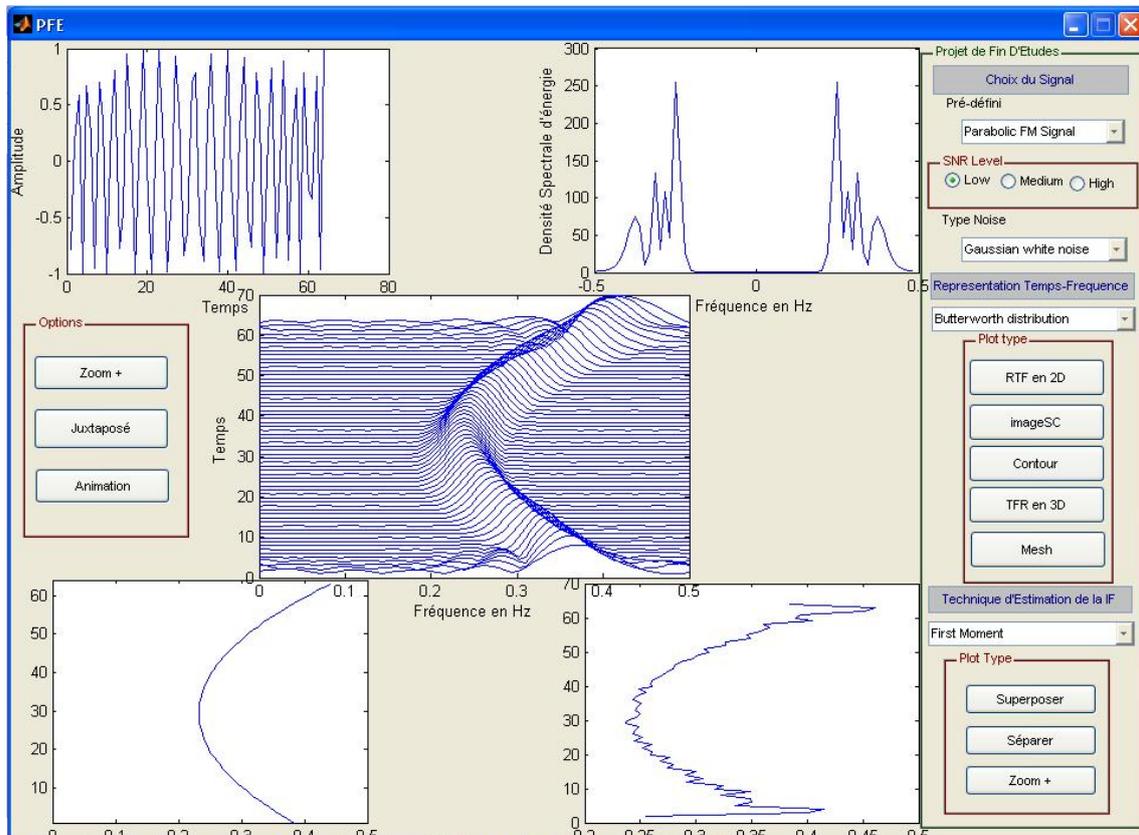


FIG. 4.7 – Disposition des graphes

Le choix de la représentation temps-fréquence et de la technique d'estimation de la fréquence instantanée, se font grâce aux deux pop-up menu présents dans la partie droite de l'interface.

4.2.2 Les options

Afin de rendre cet outil efficace, agréable et facile à utiliser, on a introduit plusieurs options ;

Plot Type de la représentation temps-fréquentielle

Pour une seule distribution temps-fréquence, on dispose de 3 types de visualisation graphique.

- La visualisation TFR 2D (Représentation en Temps-Fréquence 2D)(fig 2.4), nous permet de mieux visualiser et d'analyser le signal non-stationnaire. Le principe de cette dernière réside dans le fait qu'on a disposé la distribution sous forme de matrice dans laquelle les colonnes représentent le temps, les lignes représentent les fréquences et les éléments représentent la valeur de la TFD pour un moment et une fréquence bien donnés. Ensuite, on a procédé à des coupes transversales

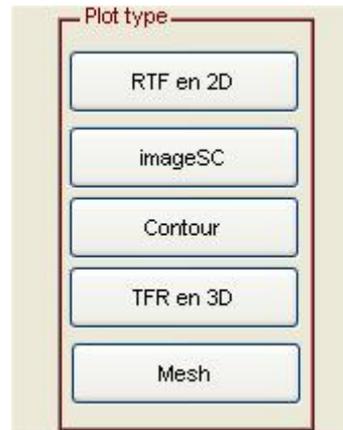


FIG. 4.8 – Plot Type de la représentation temps-fréquentielle

en fixant le temps puis on a disposé toutes ces coupes dans un même graphe en prenant soin de les décaler d'une valeur déterminée et constante.

– La visualisation en 3D (fig 4.9), à l'aide de fonctions pré-définies par Matlab, "TFR en 3D" et "Mesh".

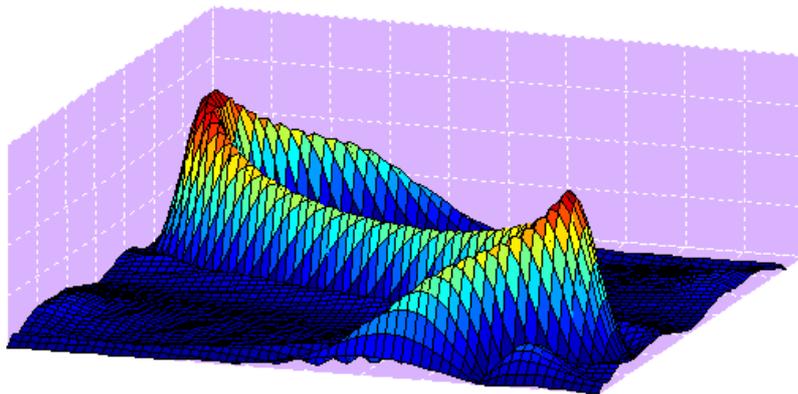


FIG. 4.9 – Représentation temps-fréquentielle en 3D

– La projection en 2D à l'aide de la fonction "Contour" et "ImageSC". Le principe est de mettre la distribution temps-fréquence sous forme matricielle en fonction du temps et de la fréquence et de les disposer dans un graphe avec des couleurs qui correspondent à l'amplitude de cette distribution.

Ajouter à cela, on a inséré d'autres options comme le Zoom, la juxtaposition des différents Type Plot et même une animation automatique en 3D pour une visualisation plus approfondie.

Options graphiques pour l'estimation de la fréquence instantanée

La partie inférieure de la plate-forme comporte deux graphes. Celui de l'estimation de la fréquence instantanée à droite et celui de la loi de la fréquence instantanée à gauche. De plus on a inséré quelques options,

– la superposition des deux graphes pour une meilleure comparaison,

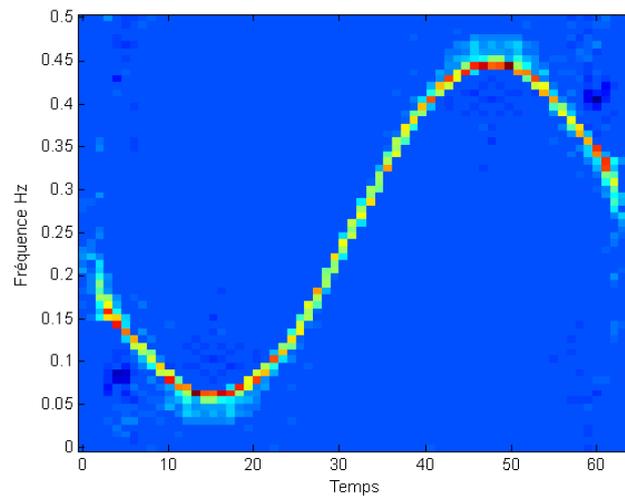


FIG. 4.10 – Représentation temps-fréquentielle en 2D - fonction ImageSC

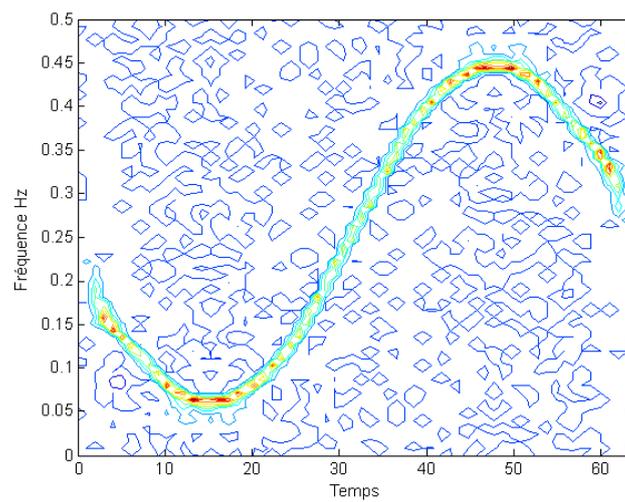


FIG. 4.11 – Représentation temps-fréquentielle en 2D - fonction Contour

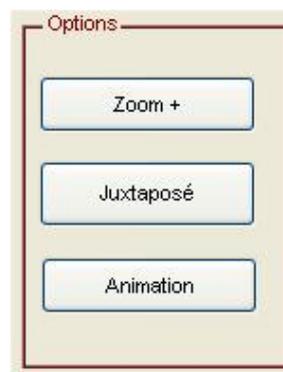


FIG. 4.12 – Opions - Représentation temps-fréquentielle

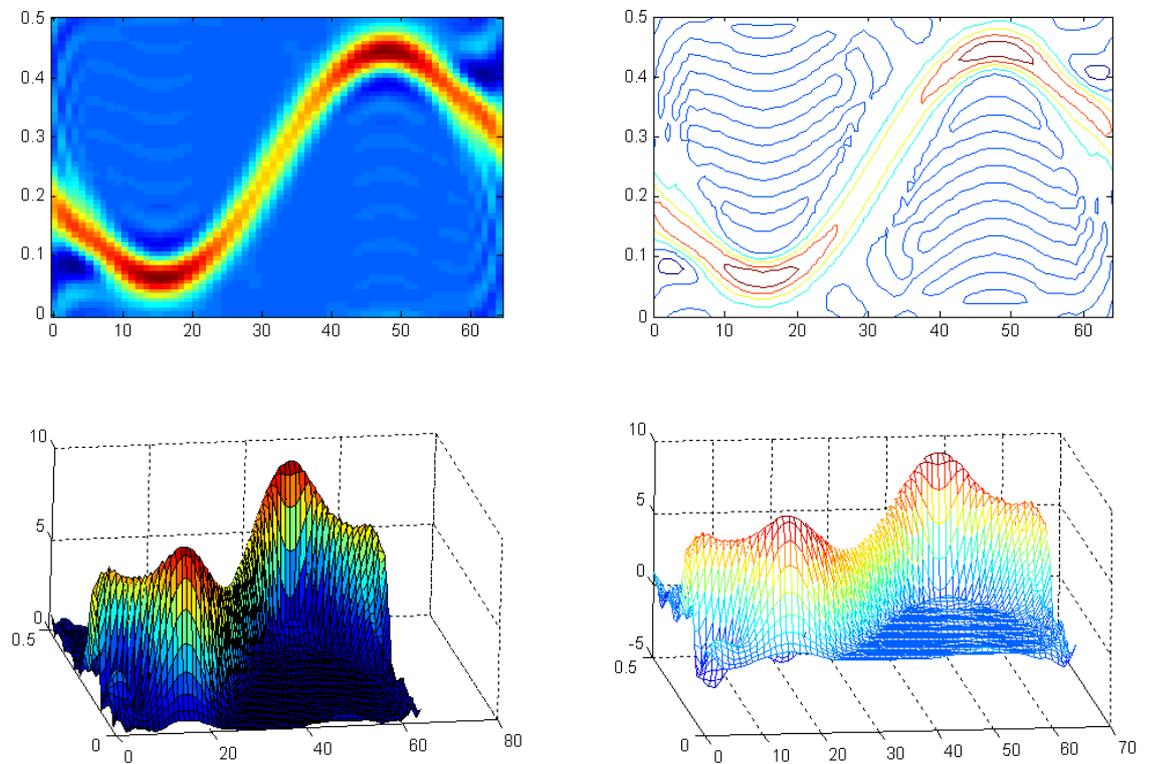


FIG. 4.13 – Représentation temps-fréquentielle - fonction juxtaposition

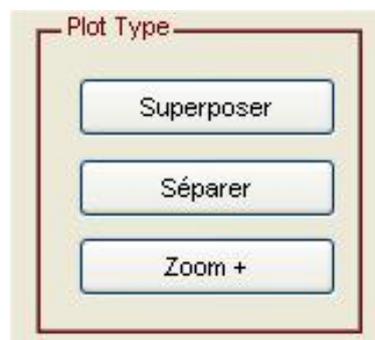


FIG. 4.14 – Options graphiques pour l'estimation de la fréquence instantanée

- le zoom, mais aussi
- leurs performances en présence du bruit

4.3 Conclusion

Cette plate-forme, se veut plus un outil pédagogique qu'expérimental. Les différentes options et les différents emplacements des graphes ont pour but une meilleure compréhension de l'importance des distributions temps-fréquence pour l'estimation de la fréquence instantanée. Cependant les fonctions utilisées pour cette plate-forme peuvent être utilisées à des fins d'expérimentations. Pour ce faire, on a adjoint à cette interface, un tool-box où toutes les techniques d'estimation de la fréquence instantanée sont présentes et où le changement du nombre d'échantillonnage et du signal peuvent être facilement modifiés. Grâce à cette tool-box, on peut traiter et analyser des données expérimentales, comme le montre l'application étudiée au chapitre suivant.

Chapitre 5

Applications de la fréquence instantanée à la localisation acoustique d'avion

Chaque application propre aux techniques d'estimation de la fréquence instantanée, nécessite un travail approfondi. Ne pouvant aborder tous les domaines où la fréquence instantanée s'est révélée d'une importance cruciale (traitement sismique, mécanique vibratoire, signaux sonores, diagnostic médicale). Ce chapitre présente un exemple d'importance, à savoir un exemple sur la localisation acoustique d'avion.

5.1 Introduction

A la différence de la mesure spectrale de la fréquence Doppler, l'approche qu'on va présenter considère la variation avec le temps de la fréquence Doppler associée à une certaine raie spectrale¹ qui présente une variabilité au cours du temps.

On considère la vitesse et l'altitude de l'avion constantes pour un court intervalle de temps durant son passage au dessus d'un capteur acoustique placé au sol. Le principe de cette dernière consiste à mesurer la variation de la fréquence instantanée du signal sonore reçu par un capteur fixe et de minimiser la somme de la différence de variation de la IF estimée de sa valeur prédite sur un intervalle de temps donné. La technique permet l'estimation de la vitesse, de la fréquence ainsi que la hauteur de l'avion décrivant cette trajectoire Ref [20].

Cette application a été choisie parmi tant d'autres car l'efficacité de la méthode utilisée repose sur la bonne estimation de la fréquence instantanée qui est le point de départ de toutes les opérations permettant la déduction des différents paramètres voulus.

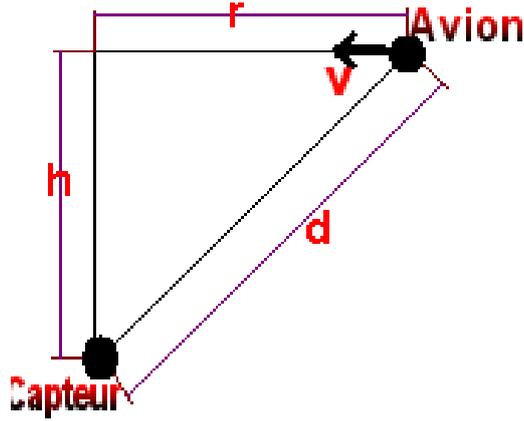


FIG. 5.1 – Schéma utilisé pour la localisation acoustique d'avion

5.2 Modèle et estimation

Supposons un signal acoustique de fréquence f_0 , émis à l'instant τ ; il sera alors reçu par le capteur à un instant :

$$t = \tau + R/c \quad (5.1)$$

où c vitesse de propagation de l'onde dans l'air ($340m/s$), et R la distance entre le capteur et l'avion. Notons h la distance orthogonale entre l'avion et le capteur, alors :

$$R = [h^2 + (\tau - t_c)^2 v^2]^{1/2} \quad (5.2)$$

où t_c est l'instant où l'avion passe au dessus du point le plus proche du capteur tel que $R(t_c) = h$ avec ($r = 0$).

En remplaçant 5.1 dans 5.2, on aura :

$$c(t - \tau) = R = [h^2 + (\tau - t_c)^2 v^2]^{1/2} \quad (5.3)$$

En élevant au carré chaque coté de l'équation et en l'arrangeant on aboutit à l'équation de second degré suivante :

$$(c^2 - v^2)\tau^2 + 2(v^2 t_c - c^2 t)\tau + c^2 t^2 - v^2 t_c^2 - h^2 = 0 \quad (5.4)$$

La résolution de cette dernière donne, en tenant compte de certaines considérations physiques Ref [19] :

$$\tau = \frac{c^2 t - v^2 t_c - [c^2 v^2 (t - t_c)^2 + h^2 (c^2 - v^2)]^{1/2}}{(c^2 - v^2)} \quad (5.5)$$

La phase du signal reçue à l'instant t , est telle que :

$$\theta(t) = \theta(\tau) + \theta_0 \quad (5.6)$$

¹La raie spectrale correspondant au son émis par la rotation des ailettes du propulseur, étant la caractéristique la plus dominante du spectre [24], est sélectionnée pour l'analyse.

avec : $\theta(\tau)$ la phase du signal à l'instant τ , et θ_0 la phase initiale.

En supposons que le signal est une sinusoïde on peut écrire alors :

$$\theta(t) = 2\pi f_0 \tau + \theta_0 \quad (5.7)$$

Selon la définition de Ville (eq. 3.11) et après simplification on aura :

$$f_i(t) = f_0 \frac{d}{dt} \frac{c^2 t - v^2 t_c - [c^2 v^2 (t - t_c)^2 + h^2 (c^2 - v^2)]^{1/2}}{c^2 - v^2} \quad (5.8)$$

en posant :

$$\alpha = f_0 \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad (5.9)$$

$$\beta = -f_0 \frac{cv}{c^2 - v^2} \quad (5.10)$$

$$s = \frac{h(c^2 - v^2)^{1/2}}{cv} \quad (5.11)$$

et

$$p(t, t_c, s) = \frac{t - t_c}{s^2 + (t - t_c)^2]^{1/2}} \quad (5.12)$$

Et finalement on aura :

$$f_i(t) = \alpha + \beta p(t, t_c, s) \quad (5.13)$$

Ces dernières équations montrent que l'estimation des paramètres f_0, v, h, t_c est équivalente à l'estimation des paramètres α, s, t_c . Cependant, grâce à sa forme mathématique simplifiée, le deuxième groupe de paramètre va être utilisé et le premier va donc être déduit.

La technique adoptée pour cette démarche, est l'approche des moindres carrés non linéaires, et cela en minimisant la somme carrée des différences entre les valeurs observées $f_i(t)$ et celles prédites par le modèle :

$$\sum_{i=1}^N (f(t_i) - \hat{f}(t_i))^2 = \sum_{i=1}^N (f(t_i) - \alpha + \beta p(t, t_c, s))^2 \quad (5.14)$$

où $\hat{f}(t_i)$ sont les valeurs prédites.

La résolution de cette équation a été donnée par Ref [11], on obtient alors les valeurs de prédictions : $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{t}_c$ et \hat{s} . De là on déduit :

$$\hat{v} = -(\hat{\beta}/\hat{\alpha})c. \quad (5.15)$$

$$\hat{h} = \hat{s}\hat{v}c/(c^2 - \hat{v}^2)^{1/2} \quad (5.16)$$

et

$$\hat{f}_0 = \hat{\alpha}(1 - \hat{v}^2/c^2). \quad (5.17)$$

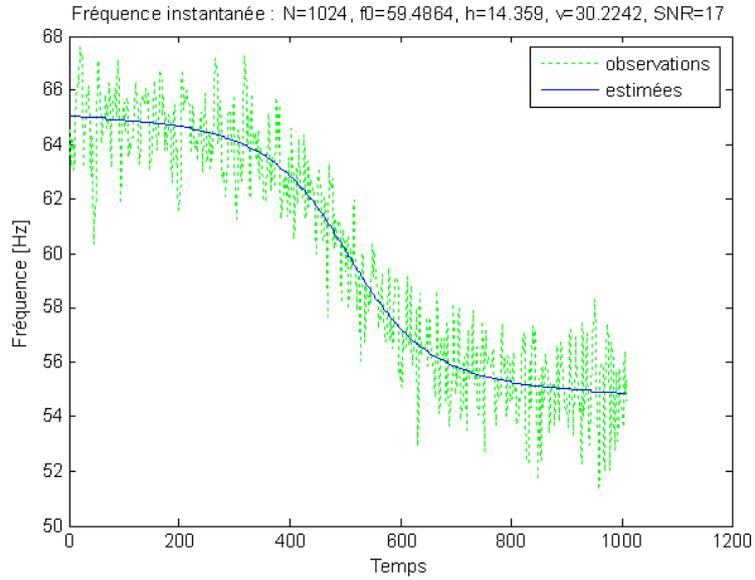


FIG. 5.2 – Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode P-D

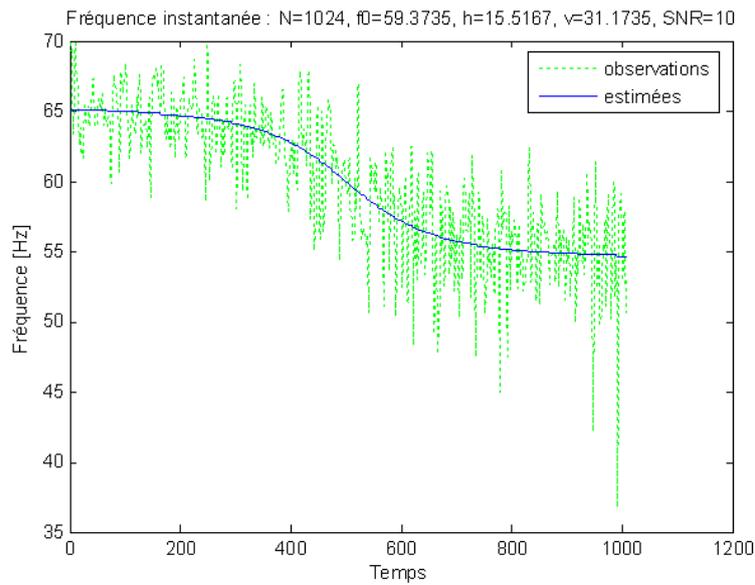


FIG. 5.3 – Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode ZR

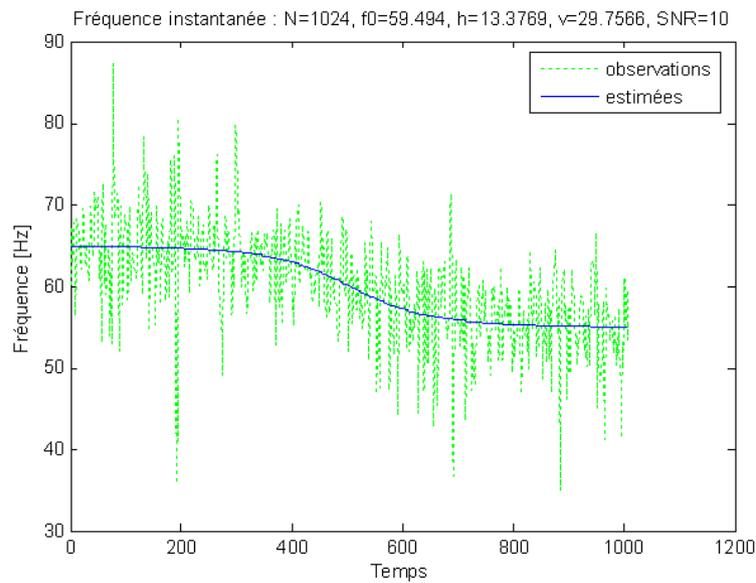


FIG. 5.4 – Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode STFT

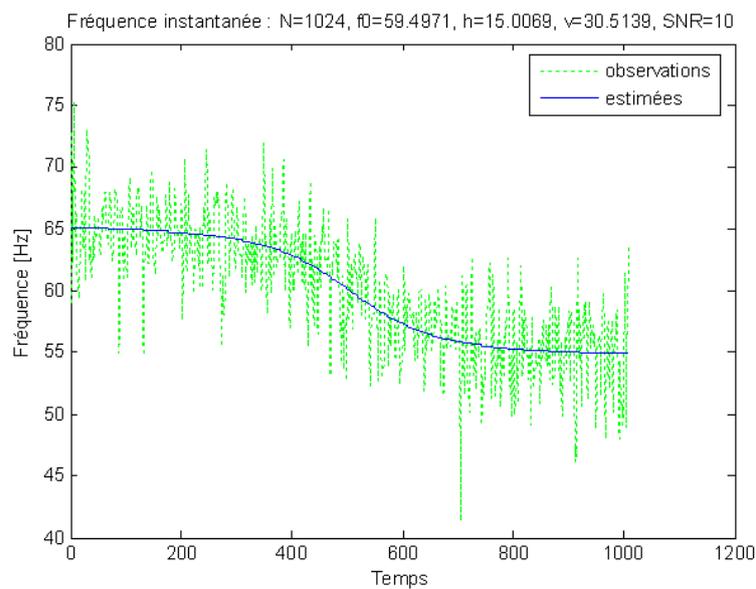


FIG. 5.5 – Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode WVD

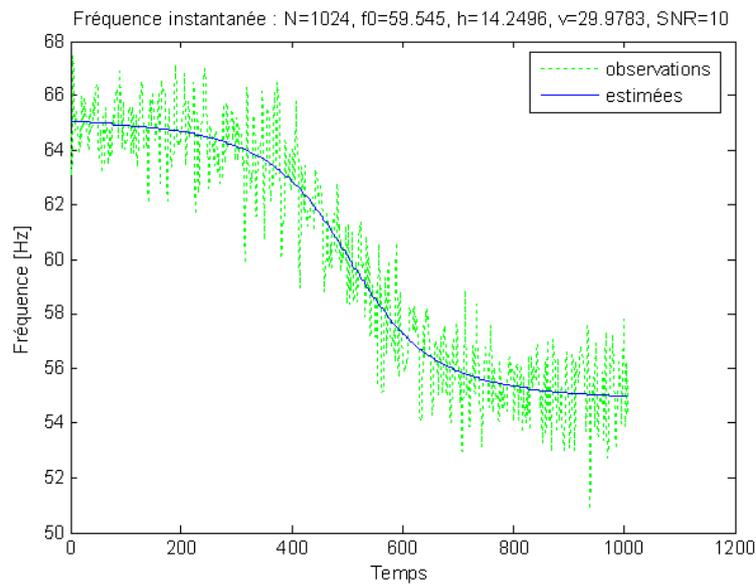


FIG. 5.6 – Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode du premier moment

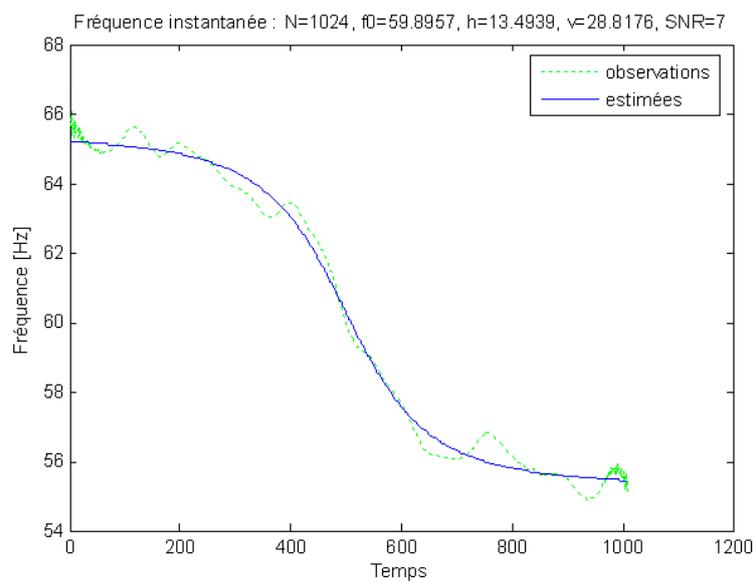


FIG. 5.7 – Estimation des paramètres de localisation d'avion grâce à la méthode XWVD

5.3 Bilan

Les figures(5.8, 5.9, 5.10) représentent, respectivement l'estimation de la fréquence f_0 , de la vitesse v et de la hauteur h via à l'aide des différentes techniques d'estimation de la IF. Ces sont estimations obtenues avec 150 réalisations d'un signal de référence noyé dans un bruit additif gaussien. Le signal de référence a pour paramètres :

- f_0 : 60 Hz
- v : 30 km/h
- h : 15m

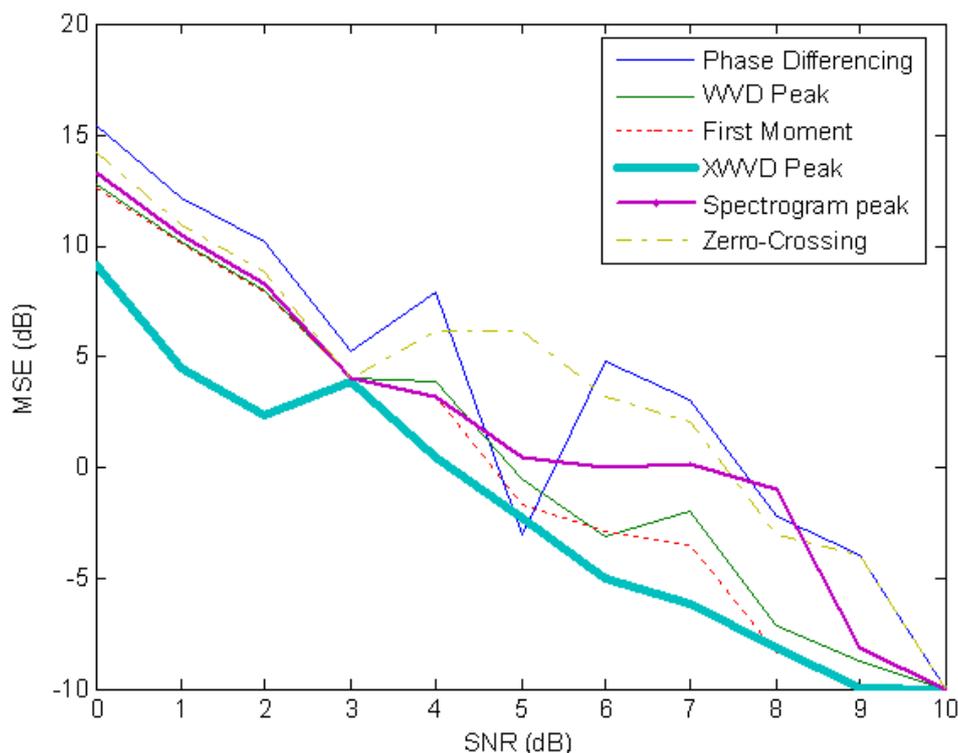


FIG. 5.8 – Estimation de la fréquence f_0

Les simulations ont montré que les techniques basées sur les pics de la WVD et sur le calcul du moment d'ordre 1 de la STFT présentent une bonne précision sous un SNR de 7dB.

Avec une erreur relative égale à 2%, 0,16% et 12% respectivement pour l'estimation de la vitesse, la fréquence f_0 et la hauteur, les méthodes basées sur la XWVD se révèlent les plus performant sous un SNR égale à 5dB.

5.4 Conclusion

Les différentes techniques d'estimation de la fréquence instantanée, notamment celles basées sur les distributions temps-fréquence sont de nos jours, l'outil de décision privilégié de nombreuses applications. En mécanique vibratoire (industrie automobiles, satellites), pour des applications sonores (diagnostic d'appareils audio,

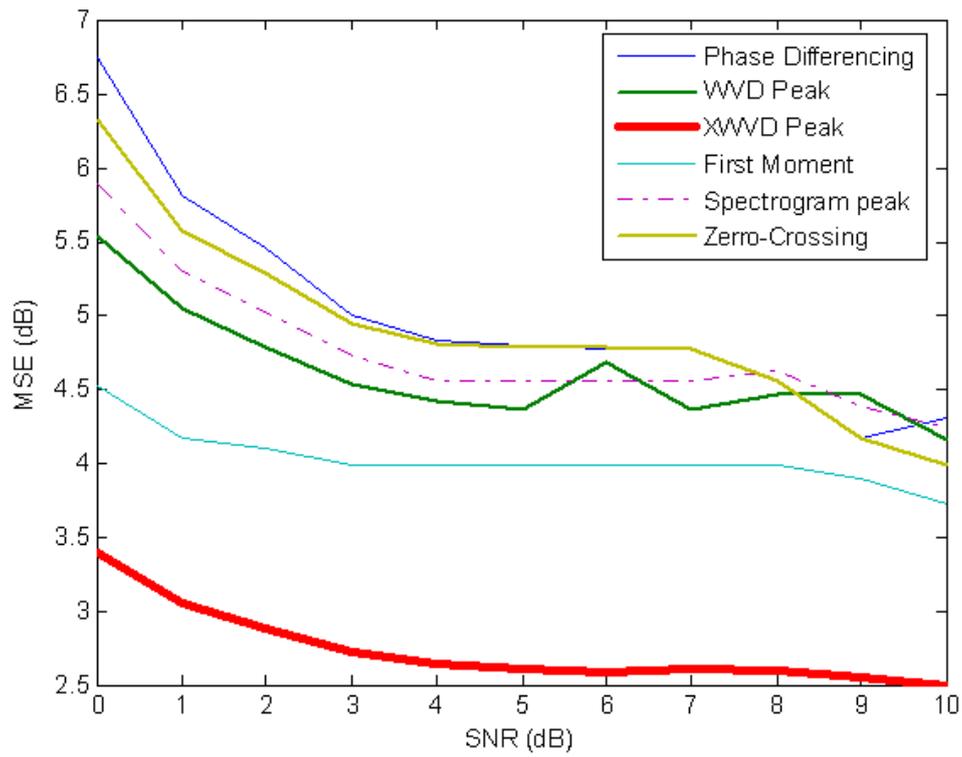


FIG. 5.9 – Estimation de la vitesse

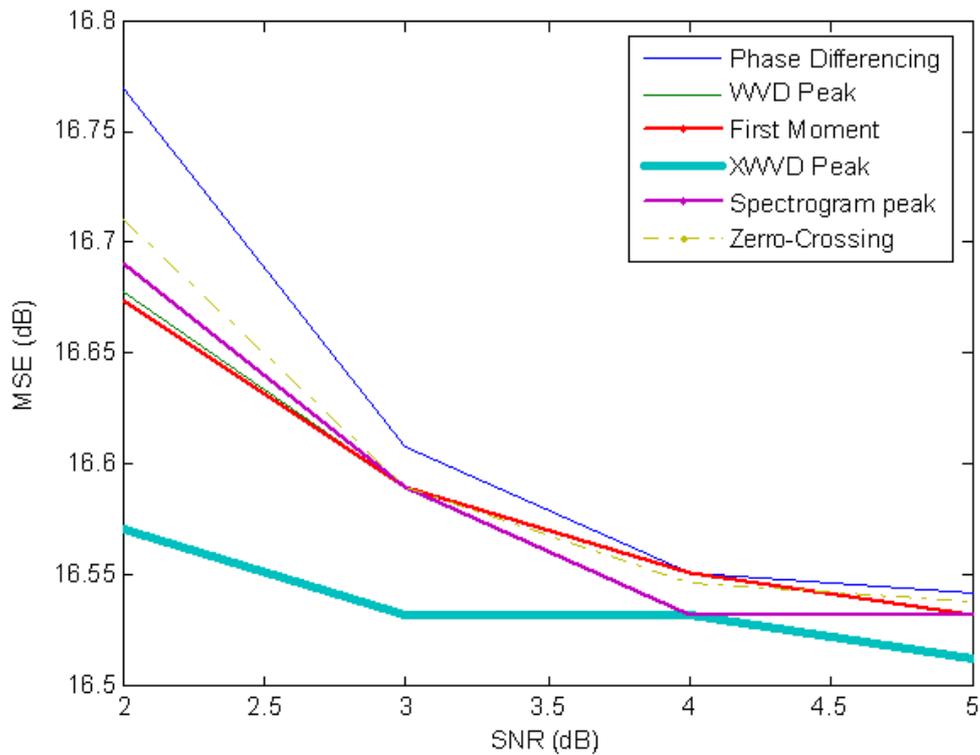


FIG. 5.10 – Estimation de la hauteur

identification de la voix, analyse de nuisances sonores), pour l'aide au diagnostic médicale (Electrocardiogramme), pour le traitement sismique, pour des applications sonar et radar. La simplicité de leur utilisation et la facilité de mise en œuvre, permettent dès aujourd'hui leur utilisation à grande échelle dans des processus automatiques de décision.

Conclusion générale et perspectives

Nous avons essayé dans le présent mémoire de montrer l'importance de la fréquence instantanée d'un signal. Cette dernière est l'une des caractéristiques les plus importantes dans un signal. De nos jours beaucoup d'applications utilisent l'information contenue dans l'estimation spectrale. C'est pour cette raison que diverses techniques d'estimation de la fréquence instantanée ont été énumérées, implémentées, simulées et testées en présence d'un bruit additif gaussien.

Au terme d'une comparaison entre les différentes méthodes, on a constaté que la technique basée sur la détection des pics avec itérations de la Cross Wigner Ville, s'est révélée d'une robustesse appréciable même en présence d'un rapport SNR assez bas. Toutefois, cette performance nécessite un investissement en temps d'exécution étant donné la complexité du calcul. Pour cette raison, un compromis doit être fait entre l'exactitude de l'estimation et la complexité du calcul. Les applications les plus récentes touchent des domaines aussi sensibles que le domaine militaire. La localisation acoustique d'avion parmi tant d'autres applications, ont enregistré des progrès très importants. Il reste que de nombreuses perspectives de recherche demandent à être exploitées.

Bibliographie

- [1] *Graphics and GUIs with Matlab*. MathWorks.
- [2] B. Barkat and B. Boashash, "A high-resolution quadratic timefrequency distribution for multicomponent signals analysis," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 49, no. 10, Oct 2001.
- [3] A. Bhattacharyya, "Instantaneous frequency estimation using linear prediction with comparisons to the desas," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 3, no. 2, March 1996.
- [4] J. Blaska and M. Sedlacek, "Use of the integral transforms for estimation of instantaneous frequency," *Measurement Science Review*, vol. 1, Nov 2001.
- [5] B. Boashash, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-part 1 : Fundamentals," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 80, no. 4, apr 1992.
- [6] —, "Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal-part 2 : Algorithms and applications," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 80, no. 4, apr 1992.
- [7] —, *Time Frequency Analysis and Processing*. ELSEVIER, 2003.
- [8] B. Boashash, P. O'She, and M. J. Arnold, "Algorithms for istantaneous frequency estimation : A comparative study," *SPIE Advanced Signal-Processing Algorithms, Architectures, and Implementations*, vol. 1348, March 1990.
- [9] B. Boashash and P. OShea, "Use of the cross wigner-ville distribution for estimation of instantaneous frequency," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*
- [10] C. Chen and H. Ling, *Time-Frequency Transforms for Radar Imaging and Signal Analysis*. Artech House, 2002.
- [11] B. G. Ferguson and B. G. Quinn, "Application of the short-time fourier transform and the wigner-ville distribution to the acoustic localization of aircraft," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, Jan 1994.
- [12] P. F. François Auger, Paulo Gonçalves and O. Lemoine, *Time-Frequency Toolbox*. John Wiley Son, 1998.
- [13] J. Griffiths, "Rapid measurement of digital instantaneous frequency," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, July 1975.
- [14] M. H. Hayes, *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley Son, 1998.
- [15] F. Hlawatsch and F. Auger, *Temps-Fréquence*. Lavoisier, 2005.
- [16] G. Jones and B. Boashash, "Instantaneous frequency and the analysis for multicomponent signals," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, 1990.

- [17] H. K. K. . D. L. Jones, "Instantaneous frequency estimation using an adaptive short-time fourier transform," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, 1996.
- [18] K. Kwok and D. L. Jones, "Improved instantaneous frequency estimation using an adaptive short-time fourier transform," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 44, no. 10, Oct 2000.
- [19] K. W. Lo and B. G. Ferguson, "Broadband passive acoustic technique for target motion parameter estimation," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 36, no. 1, jan 2000.
- [20] —, "Flight path estimation using frequency measurements from a wide aperture acoustic array," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 37, no. 2, Sept 2001.
- [21] C. Lovell, C. Williamson, and B. Boashash, "The relationship between instantaneous frequency and time-frequency representations," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 41, no. 3, March 1993.
- [22] MathWorks, site Matlab. [Online]. Available : www.MathWorks.com
- [23] O. Mettouchi, *Application d'outils d'analyse temps-fréquence à la detection acoustique d'avion*. ENP, 2006.
- [24] G. Proakis and M. Salehi, *Contemporary Communication Systems Using Matlab*. PWS, 2000.
- [25] C. Richard, "Timefrequency based detection using discrete-time discrete-frequency wigner distributions," *IEEE Trans. Ant. Prop*, vol. 50, no. 9, Sept 2002.
- [26] J. Richmond, "Iterative instantaneous frequency estimation and adaptive matched spectrogram," *Elsevier Signal Processing*, vol. 64, no. 12, Dec 1998.
- [27] B. Ristic and B. Boashash, "Instantaneous frequency estimation of quadratic and cubic fm signals using the cross polynomial wigner-ville distribution," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 44, no. 6, June 1996.
- [28] C. Rowell and R. Murch, "Edtimation of instantaneous frequency using the discrete wd," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 26, no. 4, February 1990.
- [29] P. Sapiano and J. Martin, "Statistical performance of the first order phase difference digital instantaneous frequency estimator," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 32, no. 18, August 1996.
- [30] S. C. Sekhar and T. V. Sreenivas, "Adaptivewindow zero-crossing-based instantaneous frequency estimation," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, March 2004.
- [31] K. M. WONG and A. JIN, "Estimation of the time-varying frequency of a signal : The cramer-rao bound and the application of wigner distribution," *IEEE Trans. on Acout. Speech and Signal Proc.*, vol. 38, no. , March 1997.