



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
Ecole Nationale Polytechnique

Ecole Nationale Polytechnique

Département Génie Civil

Projet

Pour l'obtention du diplôme de Master en Génie Civil

Thème

*Analyse linéaire et non linéaire de la capacité
portante d'une fondation sur un sol multi-couches
par la MEF et le couplage MEF-MEI*

Présenter par :

MERZOUG Boumediene

Devant le jury suivant :

Président	: Mr B.TILIOUINE	Professeur	E.N.P
Directeur de thèse	: Mr M. DEMIDEM	M. A	E.N.P
Examineurs	: Mr M. HAMMOUTENE	Professeur	E.N.P
	Mr R. BOUTEMEUR	M. A	E.N.P

Promotion 2014

ENP : 10, avenue Hacène Badi, El Harrache, Alger

Résumé:

Dans ce travail nous avons essayé d'analyser la capacité portante d'une fondation en termes de tassement sur un sol multi-couches qui tenu compte du comportement linéaire et non-linéaire du sol. Pour cela, nous avons faire un travail d'homogénéisation pour homogénéisé le sol de façon optimale

Nous avons utilisé la méthode des éléments finis (MEF) pour l'analyse linéaire et non linéaire, et la technique de couplage éléments finis et infinis pour le but de comparaison avec la MEF dans le cas linéaire .

Mots clé : Tassements - Comportement linéaire et non linéaire – Eléments finis – Eléments infinis.

Abstract:

In this work we have tried to analyze the bearing of a foundation in terms of settling on a multi-layer that reflects the linear and nonlinear behavior of the ground floor capacity. To do this, we do work for homogenization homogenized soil optimally.

We used the finite element method (FEM) for linear and non-linear analysis, and the technique of coupling finite and infinite elements for the purpose of comparison with the MEF in the linear case.

Keywords: Settlements - linear and non-linear behavior - finite elements – Elements.

ملخص :

لقد حاولنا من خلالي عملنا هذا، تحليل قدرة حاملة الأساس بصيغة الهبوط مستقرة على أرض متعددة الطبقات مع الأخذ بعين الاعتبار خاصية السلوك الخطي و السلوك غير الخطي . من أجل ذلك قمنا بالعمل على تجنيس التربة بالطريقة الأمثل.

استخدمنا طريقة العناصر المنتهية للتحليل الخطي و غير الخطي ، و من ثمة تقنية المزاوجة بين طريقتي العناصر المنتهية و العناصر غير المنتهية ومقارنة النتائج بالطريقة العناصر المنتهية في حالة السلوك الخطي .

الكلمات المفتاحية : هبوط . الخطي و غير الخطي ، العناصر المنتهية و العناصر غير المنتهية .

Remerciements

*Nous remercions tout d'abord **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la force et le courage de surmonter les moments les plus difficiles dans notre vie et nous avoir prodigué la volonté de mener à bon terme le travail qui nous a été défini.*

Et " quiconque ne remercie pas les gens, ne remercie pas ALLAH""

*Nous tiens à exprimer nos vifs remerciements, à **Mr M.DEMIDEM** pour son suivi, ses précieux conseils et orientations ainsi que pour sa grande disponibilité, qui nous a été d'une grande utilité tout au long de ce travail.*

Nous remercions également les membres de jury qui ont accepté d'examiner ce modeste travail.

Nos remerciements vont également à tous les enseignants de l'ENP, particulièrement les enseignants du département de Génie civil.

Nos remerciements vont également à tous ceux et celles qui de près ou de loin nous ont apporté aide et encouragement. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Dédicace

*Je dédie ce travail à mes chers parents
Que ALLAH leurs préserve long vie et bonne santé*

*A mon promoteur et mon deuxième papa
M. Mostapha DEMIDEM*

A mes frères

A mes sœurs et leurs maris

A toutes ma famille

A tous mes amis (ies)

A MELGANI Fares, BOUMALEK Walid et

Chahro Moster

A tous mes enseignants durant mon étude

Boumediene MERZOUQ

Table des matières

TABLE DES MATIERE

Chapitre I : INTRODUCTION GENERALE

II-1). Introduction générale :	1
--------------------------------------	---

Chapitre II: RAPPEL SUR LA THEORIE D'ELASTICITE LINEAIRE

II-1). Introduction :	3
II-2). Les équations d'élasticité :	3
II-2-1) Notions de base :	3
II-2-2) Contraintes principales et direction principales des contraintes :	4
II.2.3) Les équations d'équilibre:	6
II.2.4) Relation entre déformations et déplacements :	12
II.2.5) Relation entre contraintes et déformations (loi de comportement):	13
II.3) Déformations planes:	16
II.4) Contraintes planes :	17

Chapitre III: PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

III-1) GENERALITES :	
III-1-1) Introduction:	20
III-1-2) Bref historique de la MEF :	21
III-1-3) Principe de la MEF	22
III-1-3-1) Description et interprétation physique :	22
III-1-3-2) Attributs d'un élément:	24
III-1-3-3) Notion d'élément de référence:	25
III-1-3-4) Principe du travail virtuel:	26
III-2) Etapes caractéristiques d'étude des structures par la M.E.F :	27
III-2-1) Définition de la géométrie des éléments:	27
III-2-2) Représentation de la géométrie de chaque élément "V ^e " :	27
III-2-3) Approximation sur l'élément de référence :	28
III-2-4) Construction de la fonction N(ξ) et N(ξ) :	28
III-2-4-1) méthode générale de construction:	29
III-2-5) Calcul des matrices de rigidité de chaque élément [k ^e] :	30

Table des matières

III-2-6) Calcul des vecteurs de sollicitation de chaque élément $\{f^e\}$:.....	31
III-2-7) Assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires :.....	31
III-2-8) Résolution du système d'équation globale :.....	32
III-3) ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME :.....	32
III-4) CONVERGENCE DE LA METHODE VERS LA SOLUTION :.....	34
III-4-1) Types de convergence :.....	34
III-4-2) Critères de convergence:.....	35

Chapitre IV : PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS

IV-1) Introduction :.....	36
IV-2) Formulation des éléments infinis :.....	37
IV-2-1) Approche directe :.....	37
IV-2-2) Approche inverse :.....	38
IV-3) Critères de convergence des éléments infinis :.....	39
IV-4) Construction de la fonction de transformation :.....	39
IV-4-1) Cas unidimensionnel :.....	39
IV-4-2) Cas bidimensionnel :.....	40
IV-4-3) Eléments infinis dans le cas étudié (voir la Figure IV.2) :.....	41
IV-5) Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini :.....	41
IV-6) Formulation théorique de la technique de couplage MEF-MEI :.....	42

Chapitre V : ANALYSE NON LINEAIRE

V.1) Introduction :.....	44
V.2) Comportement élastique.....	44
V.2.1) Généralités :.....	44
V.2.2) Critères de plasticité :.....	46
V.2.2.1) Critère de Tresca:.....	47
V.2.2.2) Critère de Mohr-Coulomb:.....	47
V.2.2.3) Critère de Von Mises:.....	48
V.2.2.4) Critère de Drucker-Prager :.....	49
V.2.2.5) Critère parabolique :.....	50
V.3) Méthode de résolution des problèmes non-linéaire :.....	50
V.4) Conclusion :.....	54

Table des matières

Chapitre V : APPLICATION

V.1) Etude de convergence :.....	55
VI.1.1) Etude de convergence par M.E.F :.....	55
VI.1.2) Etude de convergence par couplage M.E.F-M.E.I :.....	57
VI.1.3) Travail d'homogénéisation :.....	60
VI.2) Etude comparative de modèle avant calcul linéaire et non linéaire :.....	62
VI.3) calcul linéaire et non linéaire par la M.E.F:.....	63
VI.3.1) Calcul linéaire :.....	64
VI.3.2) Calcul non linéaire :.....	65

Chapitre V : CONCLUSION GENERALE

Conclusion :.....	67
-------------------	----

Bibliographie

Liste des figures :

Chapitre II

Figure II.1 Composantes du tenseur des contraintes.....3

Figure II.2 Variation de contrainte entre deux pointes6

Figure II.3 Variation de la contrainte sur une facette.....7

Figure II.4 Surfaces latérales de gauche d'un point matériel8

Figure II.5 Etat de contrainte plane.....9

Figure II.6 Equilibre des forces dans la direction x 10

Figure II.7 Courbe de comportement des matériaux13

Figure II.8 Etat de traction pure14

Figure II.9 Relation entre déplacement, contrainte et déformation15

Figure II.10 Problème de déformation plane16

Figure II.11 Problème de contrainte plane.....18

Chapitre III

Figure III.1 Division d'un domaine en éléments finis.....22

Figure III.2 Élément (Q4).....22

Figure III.3 Quelque type d'éléments.....24

Figure III.4 Élément de référence à 2D quadratique à quatre nœuds.....25

Figure III.5 Triangle de pascal29

Figure III.6 : Organigramme d'Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis ...33

Figure III.7 : Courbe de convergence.....34

Chapitre IV

Figure IV.1 : Géométrie de l'élément infini37

Figure IV.2 Élément infini unidimensionnel.....39

Chapitre V

Figure 5.1 : Essai de compression simple du sol..... 45

Figure 5.2: Courbe contrainte-déformation avec écrouissage négatif.....46

Figure 5.3: Matériau parfaitement plastique.....46

Figure 5.4.b: Section du prisme par le plan.....47

Figure 5.4.a:Représentation du critère de Tresca dans l'espace47

Figure 5.5.a : Section de la pyramide par plan w48

Figure 5.5.b: Critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes.....48

Figure 5.6: Représentation du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes.....48

Figure 5.7: Critère de Drucker-Prager dans espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$49

Figure 5.8.a : Critère parabolique dans l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$50

Figure 5.8.b : Critère parabolique dans le plan (τ, σ) lorsque $(\sigma_2 = \sigma_3)$50

Figure 5.9 : Méthode incrémentale.....51

Figure 5.10.a : Procédure de rigidité constante.....52

Figure 5.11 : Méthode mixte.....53

Chapitre VI

Figure VI. 1: Fondation sur un sol tri-couches55

Figure VI.2 : convergence des déplacements en fonction de nombre d'élément.56

Figure VI.3 : convergence des contraintes en fonction de nombre d'élément.57

Figure VI.4 : convergence des déplacements en fonction de nombre d'élément.59

Figure VI.5 : convergence des contraintes en fonction de nombre d'élément.59

Figure VI. 6: Fondation sur un sol monocouches63

Liste des tableaux :

Chapitre VII

Tableau VI.1 : déplacement et contrainte maximal en fonction du modèle éléments finis...56

Tableau VI.2 : déplacement et contrainte maximal en fonction du modèle couplage MEF-MEI.....58

Tableau VI.3 : tassement en surface pour différents modèle.....61

Tableau VI.4 : tassement en surface pour les différents modèles.....62

Tableau VI.5 : déplacement max de la fondation dans le cas linéaire.....64

Tableau VI.6 : déplacement max de la fondation dans le cas non linéaire65

CHAPITRE I

Introduction générale

Chapitre I

INTRODUCTION GENERALE**1.1) Introduction générale :**

Les problèmes d'analyse non linéaire est difficile à résoudre par les méthodes classiques, il faut faire appel aux méthodes d'analyse modernes. Parmi les méthodes de prise en compte de l'interaction sol- structure, on peut distinguer les méthodes globales.

Les méthodes globales sont celles conduisant à une détermination simultanée du mouvement dans le sol et dans la structure. Elles sont susceptibles d'appréhender les comportements non-linéaires dûs à la loi de comportement d'un des matériaux (le sol le plus souvent) ou aux interfaces sol-structure (décollement ou glissement d'ouvrages sur leurs fondations).

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes globales la plus utilisée. Un des avantages principaux de cette méthode est sa capacité de prendre en compte les hétérogénéités résultant soit de la variation des caractéristiques du sol, soit d'un non linéarité plus prononcée pour certaines zones (angles des fondations). Elle s'applique parfaitement aux milieux hétérogènes. C'est le cas d'ailleurs pour les systèmes sol-structure. Toutefois, quelques problèmes se posent lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse de l'interaction sol-structure, tels que ceux relatifs aux conditions aux limites qui sont généralement imposées sur une frontière arbitraire. Ainsi que, les dimensions géométriques du problème qui sont importantes, ce qui nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis pour modéliser le système.

Pour surmonter ces difficultés, liées à l'utilisation de la méthode des éléments finis pour les domaines non-bornés, de nombreuses méthodes ont été proposées. Dans certains cas, une condition aux limites exacte est introduite et couplée au domaine de calcul par éléments finis. Une autre méthode plus efficace consiste à utiliser le concept des éléments infinis, qui a été introduite initialement par Bettés.

L'objet de ce travail est de détermine la capacité portante d'une fondation sur un sol multicouche qui tient compte en même temps du comportement linéaire et non-linéaire du sol.

Pour faire ce travail on a organisée en huit chapitres comme suit :

- Le premier chapitre présente une introduction générale.
- Le deuxième chapitre présente une brève introduction sur la théorie d'élasticité linéaire.
- Le troisième chapitre et le quatrième nous avons présente les deux méthodes des éléments finis et infinis.
- La parte de l'application d'analyse linéaire et non linéaire sont détaillées au cinquième chapitre.
- Au sixième chapitre, est présentée la conclusion générale.

CHAPITRE II

Rappel sur la théorie d'élasticité linéaire

Chapitre II : [7] [9]

RAPPEL SUR LA THEORIE D'ELASTICITE LINEAIRE

II-1). Introduction :

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour l'analyse des problèmes statique et dynamique nécessite la connaissance des équations de base de la théorie de l'élasticité linéaire. Dans ce chapitre, on présente les relations entre les contraintes et les déformations dans le cas tridimensionnel. De ce cas général, dérive le cas particulier de l'élasticité plane (état plan de contrainte et état plan de déformation).

II-2). LES EQUATION D'ELASTICITE :

II-2-1) Notions de base :

a) Forces extérieures : les forces extérieures auxquelles peut être soumis un corps peuvent être classées en deux catégories:

Forces volumiques: ceux sont des forces à distance associées à la masse du corps et réparties sur tout le volume.

Forces surfaciques: ceux sont des forces de contact réparties sur toute la surface de contact.

b) Contraintes : un système de forces extérieures appliqué à un corps engendre un système de charges intérieures résultant d'interaction des particules élémentaires. A chaque force élémentaire correspond une contrainte

c) Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes, noté, est une matrice 3x3 symétrique. C'est une approximation assez grossière de ce qui se passe en chaque point du matériau.

Dans le cas général chaque point matériel est soumis à neuf composantes de contrainte comme l'indique la **figure II.1**

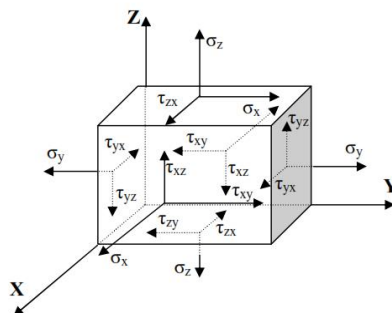


Figure II.1 Composantes du tenseur des contraintes

Trois composantes de contraintes normales σ_x , σ_y et σ_z et six composantes de contraintes tangentielles τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} et τ_{zy} .

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Pour satisfaire l'équilibre de l'élément on doit avoir:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \text{et} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \text{et} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Ainsi il en résulte six composantes indépendantes de contraintes en un point.

II-2-2) Contraintes principales et direction principales des contraintes :

Soit σ_{ij} tenseur contraintes en un point, il permet de déterminer les vecteur de contraintes pour toutes les facettes, de normale unitaire extérieure \vec{n} , passant par ce point, par la relation.

$$T_{ij} = \sigma_{ij} \cdot X_{ij} \quad (2.2)$$

On obtient également les contraintes normales pour toutes les facettes :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} = T_i X_i = \sigma_{ij} X_j X_j \quad (2.3)$$

Avec : $X_j X_j = \text{cosinus directeurs}$

S'il existe des vecteurs \vec{n} , tels que leur produit par un tenseur $[\sigma]$ leur soient colinéaires c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$\sigma_{ij} X_j = \lambda X_i \quad \text{et} \quad \lambda: \text{valeur scalaire} \quad (2.4)$$

On peut donc rechercher s'il existe des facettes soumises à des contraintes purement normales, c'est-à-dire telle que :

$$T_i = \sigma_{ij} X_j = \lambda X_i \quad (2.5)$$

A l'aide de la règle de substitution d'un indice attaché au symbole de Kronecker, on peut mettre les inconnues X_i en évidence ; on a d'abord.

$$\sigma_{ij}x_i - \lambda\delta_{ij}x_i = 0 \tag{2.6}$$

$$(\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}) x_i = 0 \tag{2.7}$$

Ces conditions sont trois équations linéaires et homogènes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{xx}-\lambda)x_1 + (\tau_{xy}-\lambda) x_2 + (\tau_{xz}-\lambda) x_3=0 \\ (\tau_{yx}-\lambda) x_1+ (\sigma_{yy}-\lambda) x_2 + (\tau_{yz}-\lambda) x_3=0 \\ (\tau_{zx}-\lambda) x_1+ (\tau_{zy}-\lambda) x_2 + (\sigma_{zz}-\lambda) x_3=0 \end{array} \right. \tag{2.8}$$

La solution est obtenue en résolvant l'équation caractéristique du degré 3 $\det |\sigma-\lambda I|$

L'équation caractéristique d'un tenseur d'ordre 2 est une équation cubique, qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0 \tag{2.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \text{tr} (\sigma) \\ I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \tau_{13} \\ \tau_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{13} \\ \tau_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii} \cdot \sigma_{jj} - \tau_{ij} \tau_{ji}) \\ I_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr}\sigma)^2 - \text{tr}(\tau)^2] \\ I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \det [\sigma] \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Les solutions de l'équation (2.9) sont les trois contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et les coefficients I_1, I_2, I_3 les invariants élémentaires du tenseur σ . Où (σ_{ij}) représente les composantes du tenseur dans une base R orthonormé mais non nécessairement principale, le symbole σ désigne le tenseur du second ordre. [15]

En remplaçant λ par σ_1 dans (2.8), on obtient un système homogène permettant de trouver les trois composantes x_{1i} de la première direction principale à un facteur près. Ce facteur se détermine ensuite par la condition suivante :

$$x_{1j} \cdot x_{1i} = x_{11}^2 + x_{12}^2 + x_{13}^2 \tag{2.11}$$

On procède de même avec σ_2 et σ_3 .

II.2.3) Les équations d'équilibre:

En générale, dans un corps les contraintes varient d'un point à un autre.

Soit σ_x la composante de la contrainte totale. Considérons la variation de cette composante (Figure II.2)

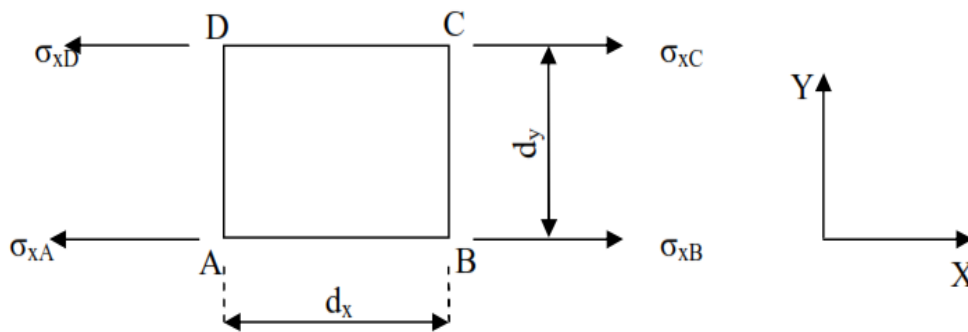


Figure II.2 Variation de contrainte entre deux points

Si la contrainte au point A est σ_x , en B la contrainte varie de $\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d_x\right)$ ou $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ est le taux de variation de σ_x .

σ_x étant fonction de x et y dans le cas bidimensionnel (et de z dans le cas tridimensionnel), la dérivation partielle est nécessaire.

La contrainte au point B est donnée par :

$$\sigma_{xB} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx \tag{2.12}$$

Egalement les contraintes en C et D sont :

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xB} + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy \quad (2.13)$$

$$\sigma_{xD} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial y} dy \quad (2.14)$$

x : étant constant de B à C, en remplaçant σ_{xB} par sa valeur dans l'équation (2.13) on obtiendra :

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx \right) dy \quad (2.15)$$

D'où

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xA} + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xA}}{\partial y} dy \quad (2.16)$$

(Où le terme du second ordre est négligé)

En négligeant les petites quantités du second ordre, les taux de variation sont constants, ainsi les contraintes sur la surface d'un élément infinitésimal varient linéairement.

D'où on aura :

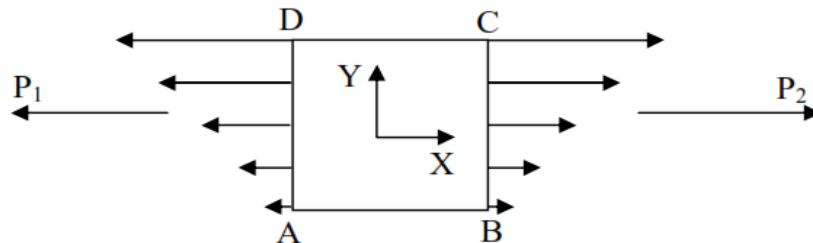


Figure II.3 Variation de la contrainte sur une facette.

Avec P_1 P_2 , les forces extérieures respectivement sur les surfaces latérales de gauche et de droite.

En considérant la surface latérale de gauche (**figure II.4**)

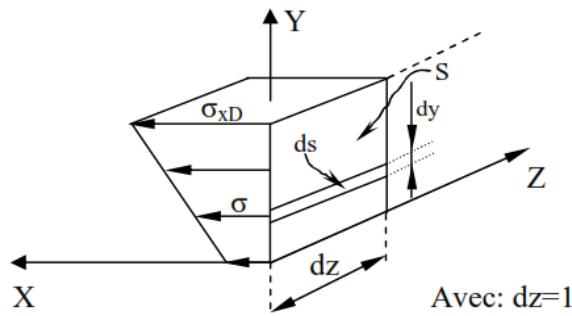


Figure II.4 Surfaces latérales de gauche d'un point matériel

La force extérieure sur cette surface est :

$$P_1 = \int_S \sigma \cdot ds \tag{2.17}$$

S : étant égale à (l.dy)

$$\Rightarrow P_1 = \int_S \sigma \cdot l dy = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_{xD}) dy = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy) dy$$

D'où :

$$P_1 = \sigma_x \cdot dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2 \tag{2.18}$$

De même, la force sur la facette droite est :

$$P_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{xB} + \sigma_{xC}) dy = \frac{1}{2}(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy) dy \tag{2.19}$$

D'où:

$$P_2 = \sigma_x \cdot dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \cdot yx + \frac{1}{2} (\sigma_{xB} + \sigma_{xC}) dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2$$

La force résultante sur le corps dans la direction x sera :

$$P_1 - P_2 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy dx$$

Si on considère que la répartition des contraintes sur les facettes considérées est constante, alors les contraintes appliquées aux centres de gravité des facettes seront:

$$\sigma_x \quad \text{et} \quad \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

Ainsi la résultante des forces sera la même. D'où on aura:

$$P_1 - P_2 = (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) l \cdot dy - \sigma_x l \cdot dy$$

Donc:

$$P_1 - P_2 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \cdot dy \tag{2.20}$$

Cette représentation simplifiée de l'état de contrainte, peut être utilisée pour l'établissement des équations d'équilibre.

Si on suppose que:

$$\sigma_x = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} - \tau_{zx} = 0 \quad \text{et} \quad z = 0$$

Avec : $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ et τ_{yx} étant supposées indépendantes de z , le modèle d'équilibre de l'élément sera (**figure II.5**).

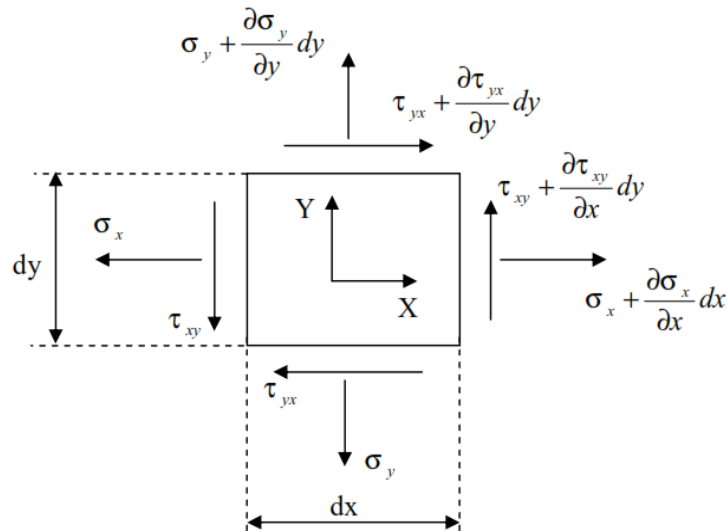


Figure II.5 Etat de contrainte plane

Avec: X, Y et Z les composantes de la force volumique suivant les directions x, y et z respectivement.

Vu que l'élément est en équilibre, la somme des forces projetées sur l'axe x est nulle.

D'où :

$$\sum F_x = 0 \tag{2.21}$$

$$\Rightarrow X \cdot dx \cdot dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\right) dy - \sigma_x \cdot dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right) dx - \tau_{yx} dx = 0$$

(L'épaisseur de l'élément suivant la direction z étant égale à l'unité).

Après simplification en obtiendra :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X\right) dx \cdot dy = 0$$

(dx.dy) est différent de zéro ainsi en aura:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0$$

De même l'équilibre des forces dans la direction y donne :

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

Pour le cas général tridimensionnel, nous considérons l'équilibre des forces qui agissent sur un élément infinitésimal dans la direction x seulement. Les autres directions y et z peuvent être traitées de la même façon (**figure II.6**).

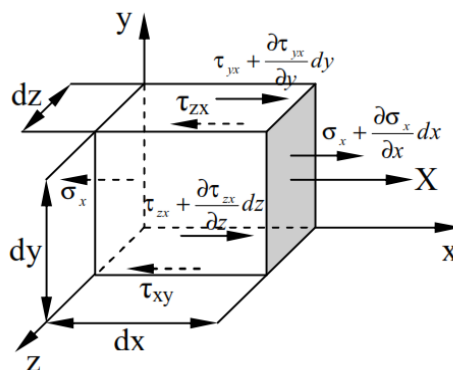


Figure II.6 Equilibre des forces dans la direction x

L'équilibre des forces dans la direction x donne:

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx \right) dy \cdot dz - \sigma_x \cdot dz \cdot dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \cdot dz \cdot dx - \tau_{xy} \cdot dz \cdot dx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) \cdot dx \cdot dy - \tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + X \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Après simplification on obtiendra :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \cdot dx dy dz = 0$$

(dx, dy, dz) étant différents de zéro, l'équation précédente se simplifie à :

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) = 0$$

De même on obtiendra pour les directions y et z :

$$\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z \right) = 0$$

Etant donné que: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$

Les équations d'équilibre pour le cas général tridimensionnel peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

II.2.4) Relation entre déformations et déplacements :

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces, en général tous les points appartenant au corps changent de position. Le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale de sa position finale. Les composantes de ce déplacement sont U, V et W elles sont en générales en fonction de x, y et z. Ainsi un point situé initialement en (x, y, z) sera déplacé en (x + u, y + v, z + w).

On dit qu'un corps est déformé, quand, les positions relatives entre les points appartenant à ce corps changent en fonction du système de forces appliquées. Dans le cas général deux types de déformations se produit, les longueurs parallèles aux directions x, y et z varient ainsi que les angles formée par ces longueurs.

a) déformations directes:

La déformation directe dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par longueur, d'une fibre originalement orientée dans cette direction. Trois composantes indépendantes de déformation directe (normale) ε_x , ε_y et ε_z .

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.23)$$

b) déformation de cisaillement:

La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformation de cisaillement γ_{xy} , γ_{xz} et γ_{yz} sont définies en chaque point.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Il est à noter que :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad , \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad , \quad \gamma_{zy} = \gamma_{yz}$$

II.2.5) Relation entre contraintes et déformations (loi de comportement):

Sous l'action d'une contrainte normale uni-axiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.25)$$

Cette relation est connue sous le nom de "la loi de Hooke". La constante E est appelée module d'élasticité ou module de Young. Il est à noter que cette relation n'est valable que dans le domaine élastique (**figure II.7**).

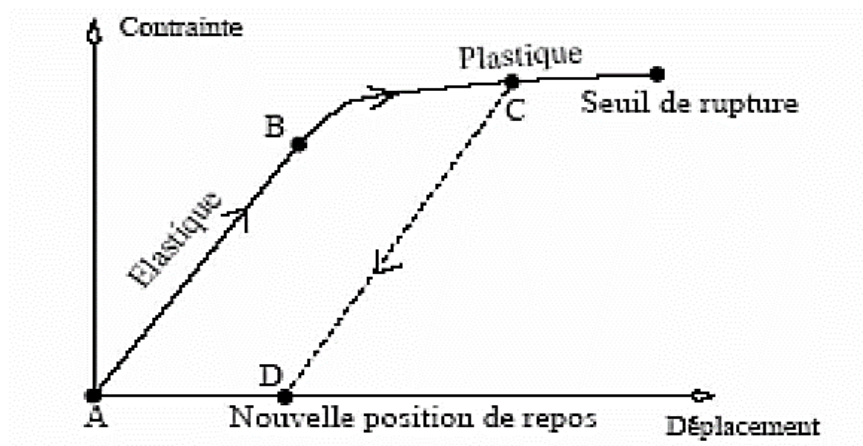


Figure II.7 Courbe de comportement des matériaux

Soit un élément tridimensionnel soumis à une contrainte uni-axiale (**figure II.8**)

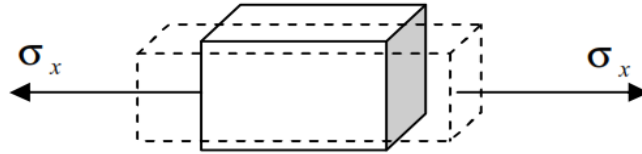


Figure II.8 Etat de traction pure

La composante de déformation ε_x est donnée par:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

En plus de cette déformation, l'élément aura des contraintes suivant les directions y et z.

De ces contraintes il résulte des déformations ε_y et ε_z qui sont :

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

Où ν est appelé coefficient de Poisson; il est constant pour la plupart des matériaux.

Considérons maintenant un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel, la déformation totale dans les directions x, y et z est alors donnée par:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad (2.26)$$

La relation dans le domaine élastique entre les contraintes et les déplacements, pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pur tridimensionnel, à été trouvée expérimentalement et elle a la forme suivante:

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \end{cases} \quad (2.27)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.28}$$

Où: la constante G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de rigidité.

Les équations (2.26), (2.27) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \tag{2.29}$$

La résolution du système d'équations (2.29) nous donnera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

(2.30)

Les différentes relations entre ces quantités peuvent être schématisées par la figure suivante:

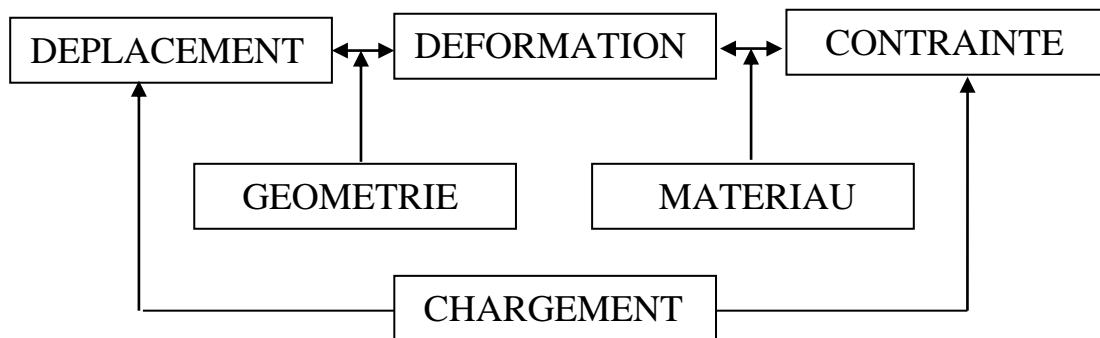


Figure II.9 Relation entre déplacement, contrainte et déformation

II.3) DEFORMATIONS PLANES:

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres (**figure II.10**)

Un tel problème est définie par:

$$\begin{cases} U = U(x,y) \\ V = V(x,y) \\ W = 0 \end{cases}$$

Donc la matrice de déformation et la matrice de contrainte s'écrite comme suite:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

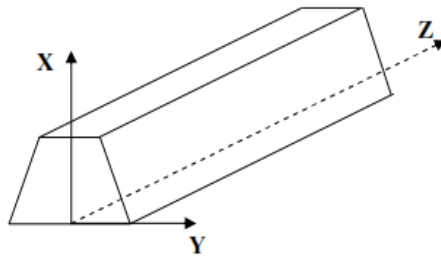


Figure II.10 Problème de déformation plane

Les relations entre les déformations et les déplacements sont:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes seront:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Les équations d'équilibre seront :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right. \quad (2.36)$$

II.4) CONTRAINTES PLANES :

Contrairement à la condition de déformations planes, qui dit que: la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimension suivant x et y; la condition de contraintes planes est caractérisé par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapports aux deux autres (**figure II.11**).

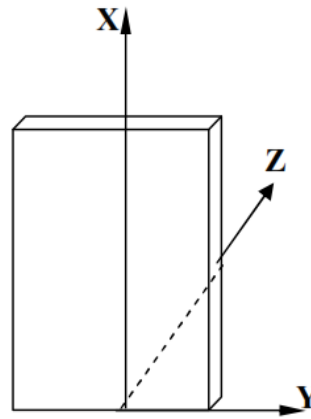


Figure II.11 Problème de contrainte plane

Dans ce cas les contraintes sont de la forme suivante:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x(x,y) \\ \sigma_y = \sigma_y(x,y) \\ \tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y) \\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Les déformations sont de la forme suivante:

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Les relations entre les déformations et les contraintes seront:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{cases} \quad (2.40)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations sont :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Les équations d'équilibre seront:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

CHAPITRE III

Présentation de méthode des éléments finis

Chapitre III [2][3][5][6][10]**PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS****III-1) GENERALITES :****III-1-1) Introduction:**

En rendant la complexité des calculs une chose du passé, l'avènement de l'ordinateur a révolutionné les sciences de l'ingénieur, des problèmes, autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques. Une de ces méthodes est la méthode des éléments finis. De ce point de vue elle constitue un outil formidable à la disposition de l'ingénieur.

Pour des raisons historiques, puisqu'elle a été développée par des ingénieurs en structures, son premier domaine d'application fut la mécanique des solides,

Tellement des progrès ont été accomplis dans ce domaine qu'il est rare de nos jours de trouver un bureau d'étude n'ayant pas un logiciel d'éléments finis.

Certains de ces logiciels permettent, en plus de l'analyse linéaire, de faire l'analyse dynamique, et même dans certains cas non-linéaire de tous les types de structures rencontrés dans le génie civil avec une aisance et une rapidité remarquables quel que soit le matériau utilisé.

De nos jours, l'emploi de la méthode s'est généralisé à d'autres domaines en particulier la mécanique des fluides.

Elle permet de résoudre tout problème défini par des équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites

III-1-2) Bref historique de la MEF :

La MEF (méthode des éléments finis) est mise au point en 1953 chez BOEING (Seattle,USA, calcul des structures d'aile d'avion); on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956 seulement).

Quant aux bases théoriques générales, mariant l'analyse des structures en barres et poutres avec celle des solides, elles sont données de 1954 à 1960 (Argyris, Kelsey). Certaines idées apparurent auparavant en particulier chez les mathématiciens pour résoudre divers problèmes aux limites, par exemple celui de la torsion de Saint-Venant en divisant la section en triangle (Courant, 1943) ; Mais elles resteront sans suite.

L'expression *élément fini* date de 1960 (Clough). Les années 60 ont vu la MEF s'attaquer tous les domaines du calcul des solides et structures, avant de débordé dans d'autres domaines : écoulements sous terrains, transfère de chaleur, fluide, ...etc. (Zienkiewicz,Cheung, 1965) en fait, les ingénieurs (aéronautique, génie civil et mécanique) développent la MEF pour l'appliqué à leur problème pratique, avant que les bases théorique ne soient bien établies...

Dès 1970, la méthode envahit tous les créneaux de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Il faut ajouter que son essor et, dès le début et aujourd'hui encore, indissociable de celui des ordinateur.

III-1-3) Principe de la MEF :**III-1-3-1) Description et interprétation physique:**

L'analyse des contraintes et des déplacements est l'un des plus importants domaines d'application de la MEF.

Pour déterminer des contraintes ou des déplacements dus à un système de charges connus dans une structure, celle-ci sera divisée en un nombre d'éléments finis comme le montre (la **Figure III.1**)

L'interprétation physique de la MEF consiste à considérer le modèle mathématique comme formé d'un ensemble de composants individuels, les éléments finis. On opère le découpage –artificiel- du modèle en certain nombre d'éléments finis de forme simple; cette opération géométrique produit le maillage. Chaque élément possède des points privilégiés, les nœuds.

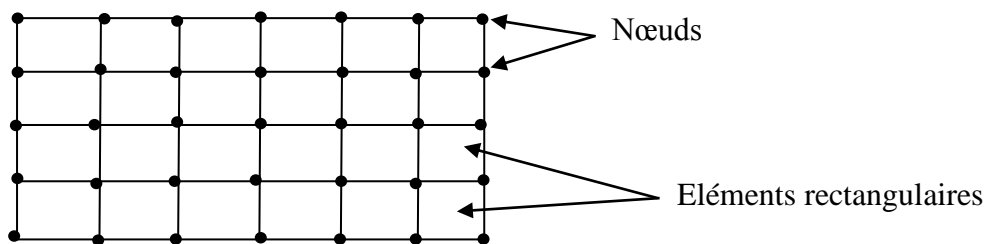


Figure III.1 Division d'un domaine en éléments finis

La structure à étudier est remplacée par un ensemble d'éléments supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés "points nodaux". Ces nœuds se trouvent aux coins des éléments ou tout le long de leur frontière; comme le montre (la **figure III.2**)

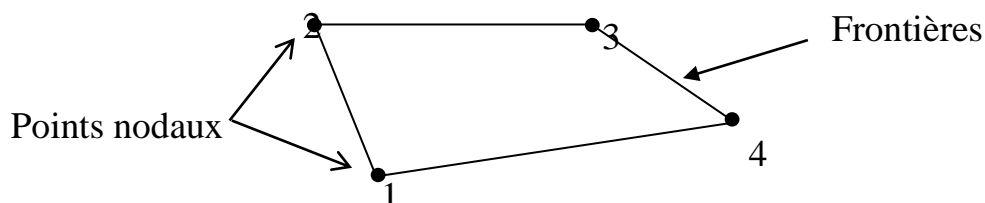
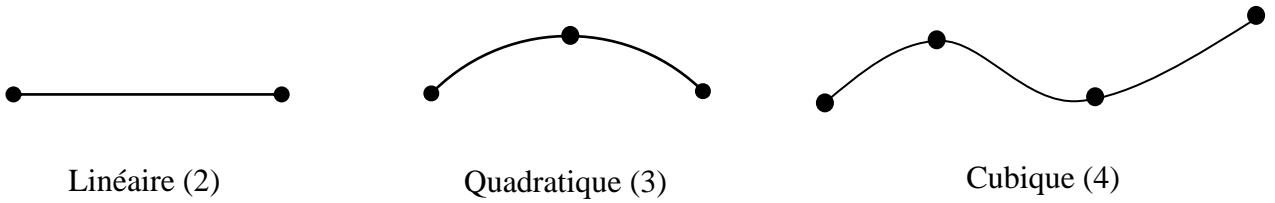


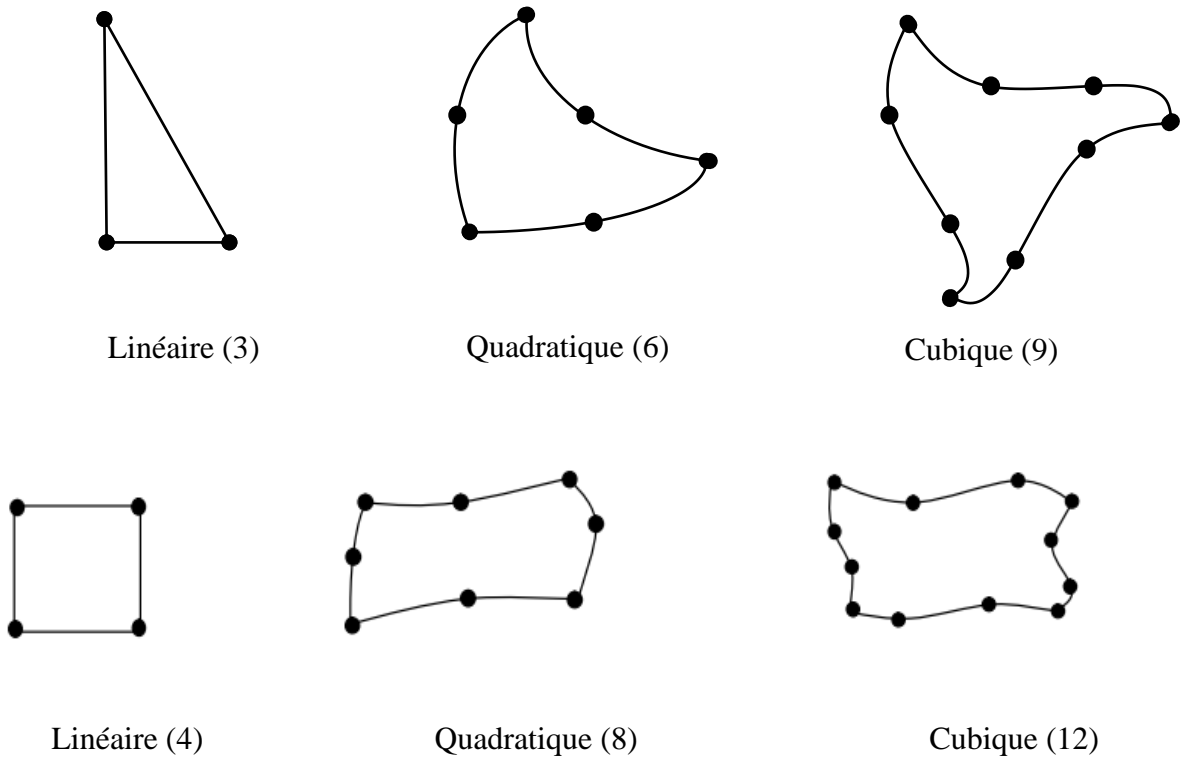
Figure III.2 Élément (Q4)

Les types d'éléments utilisés pour la division de la structure dépendent de la géométrie de ces derniers. Ils peuvent être, unidimensionnels, bidimensionnels ou tridimensionnels (la figure III.3) montrent quelque types d'éléments.

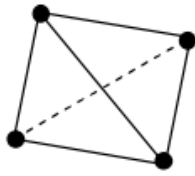
éléments unidimensionnels



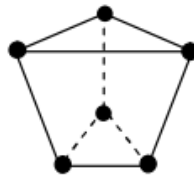
éléments bidimensionnels



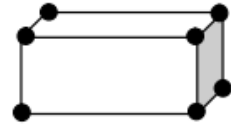
éléments tridimensionnels



Linéaire (4)



Linéaire (6)



Linéaire (8)

Figure III.3 Quelque type d'éléments

III-1-3-2) Attributs d'un élément:

La description d'un élément fini comprend les caractéristiques suivantes:

➤ **Géométrie:**

Un élément fini peut être 1D, 2D ou 3D sa forme est simple (fig.3.3)

➤ **Matériau:**

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope et ses propriétés physiques E et...etc.).

➤ **Nœuds:**

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments l'un aux autres. Ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces, etc. (fig. 3.2)

➤ **Degrés de libertés:**

Pour tout élément fini. On doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en générale le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de libertés nodales communes, de deux éléments adjacents, puis d'un troisième, et ainsi de suite, permet de reconstituer, pièce par pièce, la solution (assemblage). Pour aboutir à un

résultat valable, ces opérations nécessitent le respect de certaines règles, dites critères de convergence.

➤ **Forces nodales:**

A travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Les unes sont les réactions internes \mathbf{r} , les autres les forces \mathbf{f} dues aux charges appliquées à l'élément (poids propres, température, charge uniforme, ...etc.)

La description précédente permet de construire les deux caractéristiques clés d'un élément qui sont:

a) Sa matrice de rigidité \mathbf{k}^e .

b) Son vecteur force \mathbf{f}^e .

III-1-3-3) Notion d'élément de référence:

De manière à simplifier la définition analytique des éléments de forme complexe, introduisons la notion **d'élément de référence** un élément de référence \mathbf{V}^r est un élément de forme très simple, repéré dans un **espace de référence**, qui peut être transformé en chaque élément réel \mathbf{V}^e par une transformation géométrique $\boldsymbol{\tau}^e$.

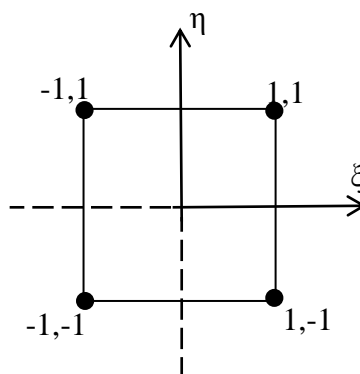


Figure III.4 Élément de référence à 2D quadratique à quatre nœuds

Les fonctions d'interpolation d'un élément Q4 :

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

III-1-3-4) Principe du travail virtuel:

Pour déterminer les propriétés de rigidité de divers éléments en utilise le principe des travaux virtuels. Ce principe exprime les relations existantes entre l'ensemble des charges extérieures et les forces intérieures correspondantes satisfaisant ensemble à la condition d'équilibre, et l'ensemble des déplacements des nœuds et déformations correspondant des différentes parties satisfaisant à la condition de compatibilité. Ce principe peut être posé en termes généraux de la façon suivante: le travail virtuel des charges extérieures égale au travail virtuel des forces intérieures absorbé par la structure. Il est à noter que chacun des deux systèmes (forces et déplacements) peut être réel ou virtuel la seule limitation étant imposée par les conditions d'équilibre et de compatibilité qui doivent être satisfaites. Ce principe peut être exprimé en termes mathématiques par la relation suivante:

$$\sum_e F\delta = \int^v \sigma \cdot \varepsilon \cdot d(vol) \quad (3.1)$$

F: les charges extérieures.

δ : le déplacement de ces charges.

ε : les déformations intérieures.

σ : les forces intérieures.

III-2) ETAPES CARACTERISTIQUES D'ETUDE DES STRUCTURES PAR LA MEF:

III-2-1) Définition de la géométrie des éléments:

Nous choisissons un ensemble de n nœuds, sur le domaine "V" qui servira à définir la géométrie des éléments. Ces points peuvent éventuellement coïncider avec les nœuds d'interpolation. Puis nous remplaçons le domaine "V" par un ensemble d'éléments "V^e" de formes relativement simples. Chaque élément "V^e" doit être défini analytiquement de manière unique en fonction des coordonnées des nœuds géométriques qui appartiennent à cet élément.

La partition du domaine "V" en élément "V^e" doit respecter les deux règles suivantes:

- a) deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leur frontière commune, si elle existe. Cette condition exclut le recouvrement de deux éléments. Les frontières entre éléments peuvent être des points, des courbes ou des surfaces.
- b) l'ensemble de tous les éléments "V^e" doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné "V". Nous excluons en particulier les vides entre éléments.

$$V = \sum_e V^e \quad (3.2)$$

III-2-2) Représentation de la géométrie de chaque élément "V^e" :

Nous utiliserons une transformation linéaire par rapport aux coordonnées $\{X_n\}$ des nœuds géométriques de l'élément réel "V^e"

$$\tau : \xi \rightarrow x(\xi) = [\bar{N}(\xi)] \{\bar{X}_n\} \quad (3.3)$$

$$X(\xi, \eta) = \bar{N}_1(\xi, \eta) X_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) X_2 + \dots + \bar{N}_n(\xi, \eta) X_n = \langle \bar{N} \rangle \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

\bar{N} : Fonctions de transformation géométrique

$\{X_n\}$: Coordonnées des nœuds géométriques de l'élément réel "V^e"

$X(\xi)$: Coordonnées des nœuds géométriques de l'élément de référence "V^r"

III-2-3) Approximation sur l'élément de référence :

Nous choisissons sur le domaine "V" un ensemble de **n** nœuds d'interpolation de coordonnées **x_i**, confondus ou non avec les nœuds géométriques. Sur chaque élément "V^e" nous utilisons une approximation nodale de la fonction exacte **U_{ex} (x)**.

$$U_{ex}(x) \approx U(x) = \langle N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

N_i : Fonctions d'interpolation sur l'élément réel.

{ U_n } : Variables nodales de l'élément (déplacement nodaux).

Les fonctions d'interpolation doivent vérifier les deux propriétés suivantes:

$$a-) N_j(\xi_i) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

$$b-) \sum_{i=1}^{n_d} N_i(\xi) P(\xi_i) = P(\xi)$$

III-2-4) Construction de la fonction N(ξ) et N̄(ξ) :

Les fonctions de transformation géométrique **N̄(ξ)** et les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence **N(ξ)** ont les mêmes propriétés elles peuvent parfois être construites directement à partir des polynômes classiques de type Lagrange ou Hermite.

Les polynômes de l'interpolation de Lagrange, dont l'expression générale est :

$$N_i^n(x) = \prod_{j=1}^{n+1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (3.6)$$

Le polynôme d'interpolation s'écrit (composant U par exemple)

$$U(x,y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + \dots + b_{(n+1)(n+2)/2}y^n = P(x,y) \text{ u}$$

Et ses termes apparaissent naturellement grâce au triangle de pascal (fig.3.5).

Triangle	Degré	n	Nombre de termes
1	constant	0	1
x y	linéaire	1	3
x ² xy y ²	quadratique	2	6
x ³ x ² y xy ² y ³	cubique	3	10
x ⁴ x ³ y x ² y ² xy ³ y ⁴	quartique	4	15
x ⁵ x ⁴ y x ³ y ² x ² y ³ xy ⁴ y ⁵	quintique	5	21

Fig. 3.5 Triangle de pascal

$N_i^n(x)$: est un polynôme de degré n, qui passe par n points $x_j(j \neq i)$ et vaut 1 au point restant x_i .

III-2-4-1) méthode générale de construction:

III-2-4-1-1) choix de la base polynomiale:

Exprimons $U(x)$ sur l'élément de référence sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions connues indépendantes $P_1(\xi), P_2(\xi), \dots$ qui sont le plus souvent des monômes indépendantes $P_i(\xi)$ est l'une des opérations de base de la MEF

$$U(\xi) = \langle P_1(\xi) P_2(\xi) \dots \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \langle P_1(\xi) \rangle \{U_n\} \tag{3.7}$$

L'ensemble des fonctions $P(\xi)$ constitue la base polynomiale de l'approximation. Son nombre de termes doit être égal au nombre de degré de liberté n_d de l'élément.

III-2-4-1-2) Expression de $N(\xi)$:

Exprimons qu'en chaque nœud d'interpolation de coordonnées ξ , la fonction $U(\xi)$ prend la valeur nodale $U_i = U_{ex}(\xi)$:

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \{U_n\} = \begin{bmatrix} P_1(\xi_1) & P_2(\xi_1) & \dots & P_{n^d}(\xi_1) \\ P_1(\xi_2) & P_2(\xi_2) & \dots & P_{n^d}(\xi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(\xi_{n^d}) & P_2(\xi_{n^d}) & \dots & P_{n^d}(\xi_{n^d}) \end{bmatrix} \{u\} \quad (3.8)$$

$$\{U_n\} = [P_n] \{u\} \quad (3.9)$$

Soit la matrice nodale $[P_n]$ d'ordre n_d :

$$\{u\} = [P_n]^{-1} \{U_n\} \quad (3.10)$$

Reportons la relation (6.b) dans (6.a)

$$U(\xi) = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1} \{U_n\}$$

Soit $U(\xi) = \langle N(\xi) \rangle \{U_n\}$ (3.11)

D'où $\langle N(\xi) \rangle = \langle P(\xi) \rangle [P_n]^{-1}$

III-2-5) Calcul des matrices de rigidité de chaque élément $[k^e]$:

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [D][B] dx dy \quad (3.12)$$

Par transformation d'intégrale on peut passer de l'intégration de la formule (6.7) juste en dessus sur l'élément réel "V^e" à une intégration plus simple sur l'élément de référence "V" on obtient la formule suivante:

$$[k^e] = t \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B]^T [D][B] det[J] d\xi d\eta \quad (3.13)$$

$$det[J] = \begin{bmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial Y / \partial \xi \\ \partial X / \partial \eta & \partial Y / \partial \eta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

[B] : matrice relie les gradients (déformations) en x au variable nodale (déplacements).

[D] : matrice des propriétés physiques d'élément (E, ν , α ,...).

det [J] : matrice jacobienne et son déterminant.

III-2-6) Calcul des vecteurs de sollicitation de chaque élément {f^e}:

$$\{f^e\} = \int_{V^e} [N] f_V dV + \int_{S^e} [N] f_S dS$$

$$\{f^e\} = \int_{V^r} \{N(\xi)\} f_V \det(J(\xi)) dV^r + \int_{S^e} \{N(\xi_s)\} f_S dS \quad (3.15)$$

f_V : Force de volume.

f_S : Force de surface.

Le vecteur {F} s'écrit en négligeant l'intégral de surface:

$$\{f^e\} = \int_{V^r} \{N(\xi)\} f_V \det(J) dV^r = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{N(\xi)\} f_V \det(J) d\xi d\eta \quad (3.16)$$

III-2-7) Assemblage des matrices et des vecteurs élémentaires:

L'assemblage est l'opération qui consiste à construire la matrice globale [K] et le vecteur global des sollicitations {F} à partir des matrices élémentaires [k^e] et des vecteurs élémentaires de sollicitations {f^e}.

Chaque forme intégrale élémentaire W^e s'écrit sous la forme discrétisée :

$$W^e = \langle \delta u_n \rangle ([K^e] \{u_n\} - \{f^e\})$$

$$w = \sum_e w_e = \sum_e \langle \delta u_n \rangle ([K^e] \{u_n\} - \{f^e\})$$

$$w = \langle \delta U_n \rangle ([K^e] \{U_n\} - \{f^e\})$$

En effet de :

- La continuité des déplacements aux nœuds
- L'équilibre des forces à chaque nœud

On obtient :

$$\sum_e [K^e] \{U_n\} - \sum_e \{U_n\} \{f^e\} = \sum_e P_i^e$$

Donc :

$$[K] \{U_n\} - \{F_n\} = 0 \quad \Rightarrow \quad [K] \{U_n\} = \{F_n\}$$

Où :

$\{u_n\}$: Variables (déplacements) nodales d'un élément.

$\{U_n\}$: Ensemble de toutes les variables (déplacements) nodales

W : Forme intégrale globale (travail virtuel totale).

W^e : Forme intégrale élémentaire (travail virtuel élémentaire).

$\{\delta u_n\}$: Variation des variables nodales d'un élément.

$\{\delta U_n\}$: Variation de l'ensemble des variables nodales.

III-2-8) Résolution du système d'équation globale:

Après l'assemblage, la forme intégrale globale s'écrit:

$$[K]\{U_n\} = \{F_n\}$$

- Modification de $[k]$ et $\{F\}$ pour prendre en compte les conditions aux limites.
- Triangularisation de $[k]$.
- Calculer de la solution U .

III-3) ETAPES CARACTERISTIQUES D'UN PROGRAMME D'ELEMENTS FINIS :

Tout programme basé sur la MEF inclut quelques blocs fonctionnels caractéristiques:

- a) Lecture, vérification, organisation des données en décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (E, ν, \dots etc.) les sollicitations et les conditions aux limites;
- b) Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage des ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations;
- c) Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites;
- d) Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (gradients, contraintes, réactions, ... etc.). La figure 3.6 montre l'enchaînement de ces différents blocs.

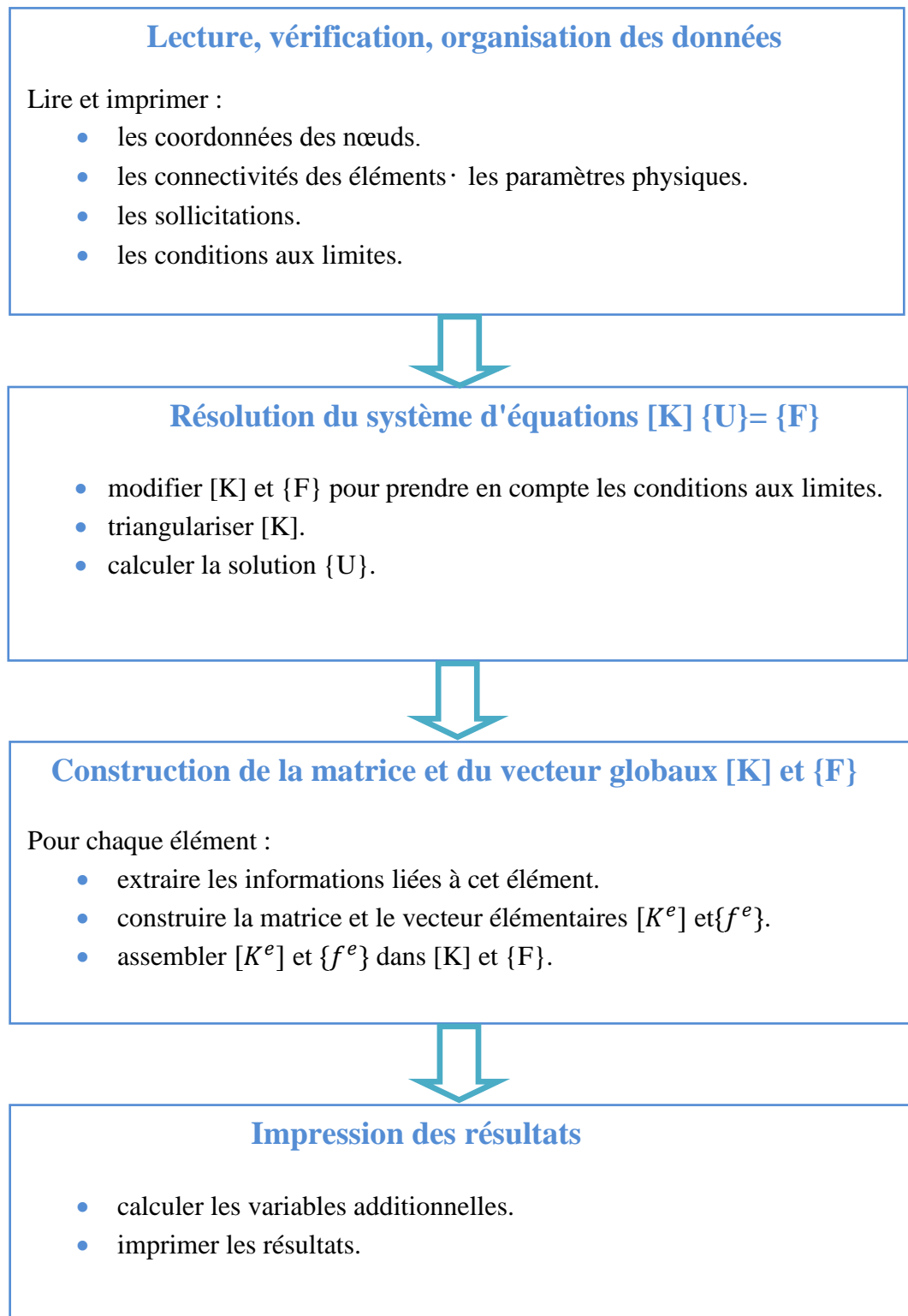


Figure III.6 : Organigramme d'Etapes caractéristiques d'un programme d'éléments finis

III-4) CONVERGENCE DE LA METHODE VERS LA SOLUTION EXACTE:

III-4-1) Types de convergence :

Il existe deux types de convergence :

- **La convergence h** , par raffinement du maillage sans modification de l'interpolation

Considérons un maillage d'élément fini on appelle h la dimension caractéristique d'un élément (longueur plus grande côté diamètre du cercle circonscrite). On subdivise toujours davantage le domaine en éléments toujours plus petits chaque nouvelle division contient la précédente et on conserve pour les éléments de même type constamment la même approximation du champ.

Alors si les critères de convergence sont remplis la solution approchée tend vers la solution exacte quand la taille des éléments tend vers zéro $\langle h \rightarrow 0 \rangle$ c'est le principe de la convergence h .

- **La convergence p** , par enrichissement de l'interpolation sans changement de maillage

Partons d'un maillage donné d'élément fini et appelle p le degré des polynômes utilisés pour l'interpolation on conserve le maillage choisi et on enrichit le champ approché des éléments en augmentant le degré p .

Alors si les critères de convergence sont satisfaits la solution approchée tend vers la solution exacte lorsque le degré de l'interpolation tend vers l'infini $\langle p \rightarrow \infty \rangle$. C'est la technique de la convergence p .

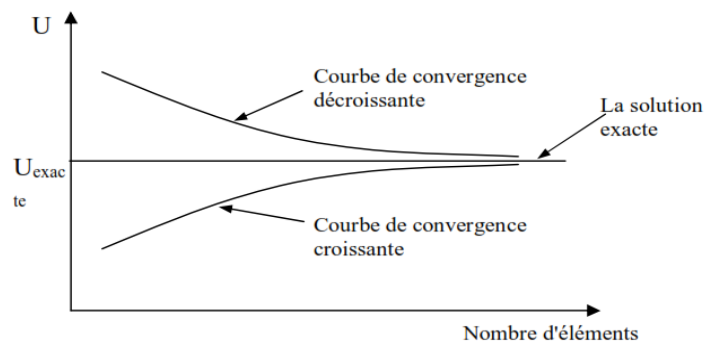


Figure III.7 Courbe de convergence

III-4-2) Critères de convergence:

Pour que la solution approchée tende vers la solution exacte, l'interpolation choisie doit satisfaire à certaines conditions, appelées critères de convergence, ces critères garantissent une convergence monotone de la solution numérique vers la solution exacte:

a) critère 1:

Le premier critère de convergence est le critère de continuité, conformité ou compatibilité cinématique, l'interpolation doit être telle que le champ des déplacements soit:

- Continue et dérivable dans l'élément.
- Continue à travers les frontières.

La première condition prévient l'emploi des fonctions présentant des discontinuité (arrêtes, sauts,...).

Par la seconde condition, les déplacements doivent être continus en tout point des frontières séparant les éléments. Or, à la frontière de deux éléments adjacents, les déplacements ne sont a priori égaux qu'aux seuls nœuds communs.

b) critère 2:

Le second critère de convergence est le critère des déformations constantes ou de complétude, l'interpolation doit permettre de représenter:

- Les états de déplacement constant ou modes rigides.
- Les états de déformation constante.

Ce critère semble physiquement évident : l'élément fini doit pouvoir se déplacer en bloc, comme un corps rigide, sans qu'aucune contrainte (ou déformation) n'y naisse, et il doit être capable de représenter des états de déformations les plus simple, c'est-à-dire constante.

En réalité ce critère doit être compris de manière plus aiguë et se justifie à la limite : Quand un élément fini devient de plus en plus petit ($h \rightarrow 0$), ses déplacements et déformations tendent vers des valeurs constantes; pour assurer la convergence, il est donc indispensable que l'interpolation puisse les représenter.

CHAPITRE IV

Présentation de la méthode des éléments infinis

Chapitre IV [1][3][4]

PRESENTATION DE LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS**IV-1) Introduction :**

L'infini est différent d'un nombre normal parce que, par définition, il n'est pas fini. En divisant l'infini par n'importe quel nombre positif (excepté l'infini), nous obtiendrons l'infini. Vous pouvez aussi le multiplier par n'importe quoi excepté zéro (ou l'infini) et il ne sera pas plus grand. Donc, regardons de plus près les différentes sortes d'infinis.

Dans la modélisation de n'importe quel problème d'interaction sol-structure, le milieu est représenté comme une région soit infinie ou semi-infinie. L'utilisation de la MEF pour ce type de problème consiste à faire un maillage qui nécessite l'utilisation d'un grand nombre d'éléments finis.

Et à cause des problèmes trouvés dans la modélisation des domaines infinis par la MEF, plusieurs recherches ont été faites pour résoudre ces problèmes ;

UNGLESS et ANDERSON ont construit le premier élément infini, en se basant sur l'utilisation d'une fonction de décroissance dans la direction radiale sous la forme de $(\frac{1}{1+r})$.

Le premier travail publié sur ce type d'éléments était celui de ZIENKIEWICZ et BETTESS en 1975. Dans cette formulation, le domaine de l'élément est étendu jusqu'à l'infini. Les fonctions de forme sont multipliées par des fonctions décroissantes et qui sont choisies suivant le type de problème étudié.

En 1981, BEER et MEEK ont utilisé une transformation incluant un terme de la forme $(\frac{1}{1+\xi})$. et qui transforme le domaine ξ en un domaine x infini.

En 1983, BANDO a utilisé une nouvelle formulation des éléments infinis pour des excavations. Cette formulation est basée sur la transformation à un domaine fini. Jusqu'à nos jours les recherches et les publications se poursuivent afin de trouver des formulations qui solutionnent le mieux possible un tel problème.

IV-2) Formulation des éléments infinis :

Dans la formulation des éléments infinis, deux types de transformations sont encore utilisés :

- Interpolation de la géométrie (des coordonnées) ;
- Interpolation des déplacements.

Ces deux transformations sont utilisées pour la formulation des éléments infinis, il existe deux approches pour la formulation des éléments infinis :

- Approche directe,
- Approche inverse.

IV-2-1) Approche directe :

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est étendu à l'infini dans la direction considérée.

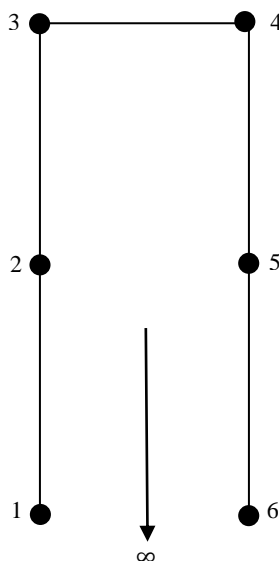


Figure IV.1 : Géométrie de l'élément infini

Les variables inconnues sont exprimées en termes de fonction de formes descendantes et qui tendent vers 0 à l'infini. Les fonctions de forme de l'élément infini sont données par l'expression:

$$M_i(\xi, \eta) = F_i(\xi, \eta) N_i(\xi, \eta) \quad (4.1)$$

Avec :

$N_i(\xi, \eta)$: sont les fonctions de forme standard.

$F_i(\xi, \eta)$: sont les fonctions décroissantes.

$M_i(\xi, \eta)$: sont les fonctions de l'élément infini.

Le rôle de la fonction décroissante $F_i(\xi, \eta)$ est d'assurer que le comportement de l'élément soit une bonne réflexion du sens physique du problème.

Les fonctions décroissantes $F_i(\xi, \eta)$ doit être égale à l'unité en chaque nœud.

$$F_i(\xi, \eta) = 1$$

Les dérivées des fonctions de forme de l'élément infini peuvent être facilement obtenues en utilisant la règle de dérivation en chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} F_i + \frac{\partial F_i}{\partial \xi} N_i \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \eta} F_i \end{cases} \quad (4.2)$$

Généralement deux types de fonctions décroissantes $F_i(\xi_i, \eta_i)$ sont utilisés :

- Fonctions exponentielles décroissantes ($\exp(-x)$) : Elle a l'avantage de tendre vers zéro à l'infini plus rapidement qu'un autre polynôme.
- Fractions rationnelles décroissantes.

Remarque :

L'inconvénient principal de l'approche directe est qu'elle nécessite l'utilisation d'une intégration numérique sur un domaine semi-infini.

IV-2-2) Approche inverse :

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est maintenu.

Des fonctions de forme ascendantes sont utilisées pour la transformation géométrique et qui sont singulièrement à l'extrémité du plan $\xi = 1$.

Les valeurs des coordonnées physiques tendent vers l'infini à l'extrémité du plan naturel.

Ainsi les éléments infinis représentent un milieu infini.

L'avantage principal de cette approche est qu'elle garde les points d'intégration originaux de GAUSS-LEGENDRE.

IV-3) Critères de convergence des éléments infinis :

- Les fonctions qui représentent le champ de déplacement et les fonctions qui représentent la transformation géométrique de l'élément doivent avoir la forme de la solution à obtenir.
- Les quantités intégrables doivent donner lieu à des valeurs bornées.
- Les deux nœuds intermédiaires des côtés de l'élément infini doivent être l'un en face de l'autre autant que possible.

IV-4) Construction de la fonction de transformation :

IV-4-1) Cas unidimensionnel :

Considérons la transformation unidimensionnelle, dans laquelle le point x_1 est étendu à x_3 (x tend vers ∞) à travers un point x_2 .

Considérons la formule suivante :

$$X = X_1 N_1 + X_2 N_2 = \frac{-2\xi}{1-\xi} X_1 + \frac{1+\xi}{1-\xi} X_2 \quad (4.3)$$

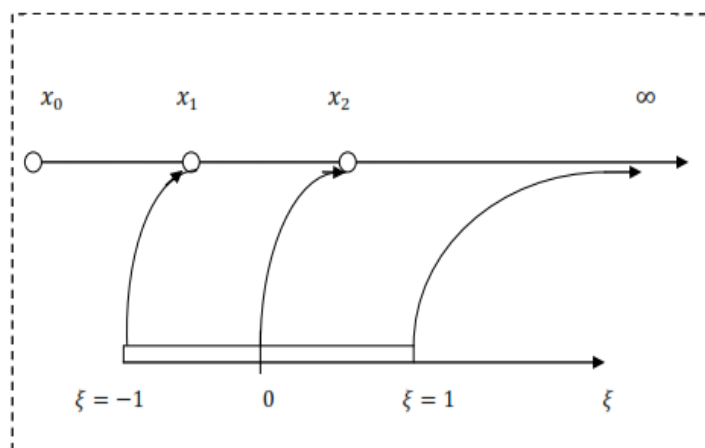


Figure IV.2 Élément infini unidimensionnel

Dans cette formulation, on peut remarquer :

$$\xi = 0 \implies X = X_2$$

$$\xi = -1 \implies X = X_1$$

$$\xi = 1 \implies X = \infty$$

De plus on a :

$$N_1 + N_2 = \sum_{i=1}^2 N_i = 1 \tag{4.4}$$

Et :

$$\sum M_i = 1$$

En résolvant l'équation (4.4) en ξ , on trouve :

$$\xi = \frac{X - X_2}{X - 2X_1 + X_2} = 1 - \frac{2(X_2 - X_1)}{X - 2X_1 + X_2} \tag{4.5}$$

Avec : $X_2 = 2X_1$, l'équation (4.5) devient :

$$\xi = 1 - \frac{2X_1}{X} \tag{4.6}$$

On a obtenu une transformation entre un domaine infini X et un domaine fini ξ .

La généralisation de cette interpolation pour n'importe quelle ligne dans l'espace (X, Y, Z) nous donne :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 N_i X_i \\ Y = \sum_{i=1}^2 N_i Y_i \\ Z = \sum_{i=1}^2 N_i Z_i \end{cases} \tag{4.7}$$

N_i : Sont les transformations infinies à une dimension.

IV-4-2) Cas bidimensionnel :

La généralisation de cette formulation pour le cas 2D se fait par le produit des transformations infinies à une dimension avec des fonctions de forme standard en η (direction finie).

Par conséquent les fonctions de forme sont données par :

$$M_i(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_i(\eta) \tag{4.8}$$

$N_i(\eta)$: Fonction de forme standard en η .

$N_i(\xi)$: Transformation infinie à une dimension.

$M_i(\xi, \eta)$: Fonction de forme de l'élément fini.

IV-4-3) Éléments infinis dans le cas étudié (voir la Figure IV.2) :

Dans ce cas les fonctions de forme de l'élément infini peuvent être données par :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^6 M_i X_i \\ Y = \sum_{i=1}^6 M_i Y_i \end{cases} \quad (4.9)$$

Avec : $\sum_{i=1}^6 M_i(\xi, \eta) = 1$

$$\begin{cases} M_2 = \frac{(1-\eta)(1-\xi)}{2(1+\eta)} \\ M_3 = \frac{\eta(1-\xi)}{(1+\eta)} \\ M_4 = \frac{\eta(1+\xi)}{(1+\eta)} \\ M_5 = \frac{(1-\eta)(1+\xi)}{2(1+\eta)} \end{cases} \quad (4.10)$$

IV-5) Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini :

La transformation géométrique qui permet le passage des coordonnées locales aux coordonnées globales. Si s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^6 M_i(\xi, \eta) X_i \\ Y = \sum_{i=1}^6 M_i(\xi, \eta) Y_i \end{cases} \quad (4.11)$$

Avec :

$M_i(\xi, \eta)$: Les fonctions de transformation de l'élément infini, sont citées précédemment.

L'interpolation du champ de déplacement des éléments infinis est donnée en termes des déplacements nodaux des nœuds situés à une distance finie.

En supposant que les déplacements tendent vers zéro à l'infini, l'élément infini peut être considéré comme un élément quadrilatère à 6 nœuds dont le champ de déplacement, sur la surface ($\xi=+1$) est nul.

Donc, les fonctions d'interpolation de l'élément infini sont obtenues directement à partir des celles correspondantes aux mêmes nœuds de l'élément fini.

Le champ de déplacement en tout point de l'élément est donné par :

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^2 N(\xi, \eta)_i U_i \\ V &= \sum_{i=1}^2 N(\xi, \eta)_i V_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

La matrice de rigidité de l'élément infini est donnée par :

$$[K^e] = \int [B]^T [D] [B] dV \quad (4.13)$$

Ou bien par :

$$[K^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] |J| d\xi d\eta \quad (4.14)$$

Pour un élément infini, les fonctions de transformations $M_i(\xi, \eta)$ sont différentes des fonctions d'interpolation $N_i(\xi, \eta)$.

D'où la matrice Jacobienne pour un élément infini est donnée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i X_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i Y_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i X_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^6 \frac{\partial M_i Y_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

IV-6) Formulation théorique de la technique de couplage MEF-MEI :

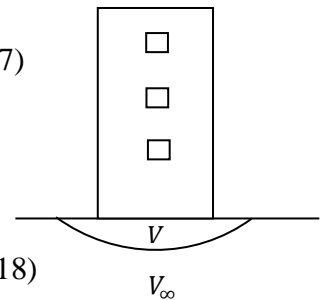
Le P.T.V stipule l'égalité de l'énergie de déformation et le travail des forces externes, ce dernier s'écrit sous forme incrémentale comme suite :

- Champ proche (V) :

$$\iiint_V \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iint_S F_i^{t+\Delta t} \delta U_i ds + \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv \quad (4.17)$$

- Champ lointain (V_∞) :

$$\iiint_{V_\infty} \sigma_{ij}^{t+dt} \delta \varepsilon_{ij} dv = -\iint_S F_i^{t+dt} \delta U_i ds + 0 \quad (4.18)$$



D'après les deux équations (a) et (b), on a :

$$\Rightarrow \iiint_V \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv = -\iiint_{V_\infty} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv + \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv$$

$$\Rightarrow \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv$$

$$\Rightarrow \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t \delta \varepsilon_{ij} dv + \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} dv = \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv$$

$$\Rightarrow \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} dv = \iiint_V B_i^{t+\Delta t} \delta U_i dv - \iiint_{V+V_\infty} \sigma_{ij}^t \delta \varepsilon_{ij} dv \quad (4.20)$$

L'optimisation de cette dernière équation, on a :

$$[K]\{U\} = \{F\}^{t+\Delta t} - \{F\}^t \quad (4.21)$$

$\{F\}^{t+\Delta t}$: Vecteur forces nodales.

$\{F\}^t$: Vecteur force équivalentes.

Au final, l'équilibre global s'écrit comme suit :

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (4.22)$$

CHAPITRE V

Analyse non linéaire

Chapitre V [8]**ANALYSE NON LINEAIRE****V.1) Introduction :**

La mécanique des sols repose bien souvent sur des approximations en ce qui concerne le comportement du matériau et ceci pour les deux aspects qu'elle examine, à savoir, schématiquement la capacité portante et le tassement. Ainsi, fait-on l'hypothèse d'un comportement rigide plastique pour le premier et souvent l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire pour le second.

Cette manière unique de voir est de plus en plus remise en question pour plusieurs raisons:

- Les sols ont un comportement plus complexe, qu'il apparait nécessaire, de plus de suivre tout le long de la déformation.

Ainsi, fait-on appel de plus en plus à des modèles élasto-plastiques plus ou moins élaborés. Ou à des modèles visco-élastiques. Voire visco-élastoplastiques.

- L'apparition et le développement de méthodes numériques puissantes, telle que la méthode des éléments finis, qui permettent de modéliser tout le milieu.

- L'augmentation formidable des moyens de calcul, avec la naissance et le développement continu des ordinateurs modernes, sans laquelle les modèles de comportement complexe des sols et la MEF n'auraient pas pu voir le jour.

L'utilisation de la MEF en MDS est cependant particulièrement compliquée. D'une part, il est nécessaire parfois de prendre en compte des comportements du massif du sol très élaborés, avec éventuellement de grandes déformations. D'autre part, ayant la plus part du temps affaire à des problèmes d'interaction sol-structure ou sol-sol, on doit modéliser correctement les surfaces de contact.

Dans ce chapitre, nous allons faire le point des connaissances actuelles sur le comportement élasto-plastique, puis on va présenter les différentes méthodes de résolution des problèmes non linéaires.

V.2) Comportement élastique :**V.2.1) Généralités :**

Un corps est dit avoir un comportement élastoplastique quand au-delà d'un certain niveau de chargement il présente des déformations réversibles (élastiques) mais aussi des déformations irréversibles (plastiques), et que ces déformations et les contraintes obéissent à des lois bien précises. Notons que la considération d'un corps élastoplastique se fait en excluant l'influence du paramètre temps.

Pour un comportement élastoplastique, on écrit:

$$d_e = d_e^e + d_e^p \quad (5.1)$$

Avec:

d_e : les déformations totales;

d_e^e : les déformations élastiques;

d_e^p : les déformations plastiques.

Considérons maintenant la courbe de la figure 5.1 qui représente les résultats d'un essai de compression uni axial:

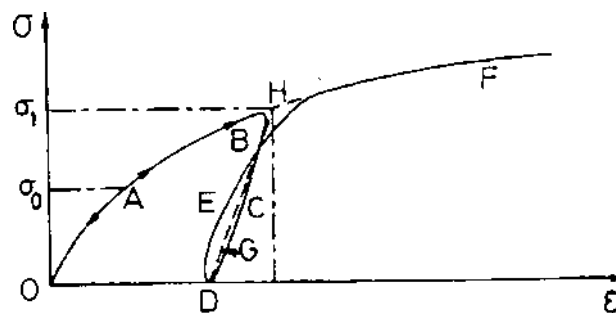


Figure 5.1 : Essai de compression simple du sol.

Le long du chemin OA. Le comportement est élastique, c'est à dire quand on décharge on revient en 0. Le point A, point limite au-delà duquel on a plus le comportement élastique correspond à une contrainte caractéristique dite seuil de plasticité initiale ou limite élastique. Après l'avoir franchi et si étant au point B, par exemple on décharge, la courbe ne sera pas BAO mais BCD. La déformation qui reste OD est une déformation irréversible dite plastique. On est donc entré dans le domaine plastique. Si on recharge, le chemin sera DEF, F étant le prolongement du chemin OAB. Il rejoint alors la courbe du premier chargement.

On peut assimiler en général la courbe BCDEF à la droite DGH et admettre que les déformations sont réversibles le long de cette ligne. Le nouveau seuil de plasticité est alors le point H qui est plus élevé que le précédent. Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle écrouissage.

D'une façon plus générale et pour les cas 3D le seuil de plasticité est remplacé par une fonction F dite "fonction de charge" ou critère de plasticité telle que:

Si $F < 0$ on est dans le domaine élastique.

Si $F = 0$ on est dans le domaine plastique.

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes-déformations une surface dite communément en mécanique des sols "surface d'état limite" dont la projection dans le plan des contraintes est une courbe dite "courbe d'état limite".

L'allure de la courbe (σ, ϵ) donnée dans la figure 5.1 est valable pour un écoulement positif.

Il y a des matériaux qui sous un certain chemin de charge et au-delà d'un certain pic présente un ramollissement, ou écoulement négatif (Figure 5.2).

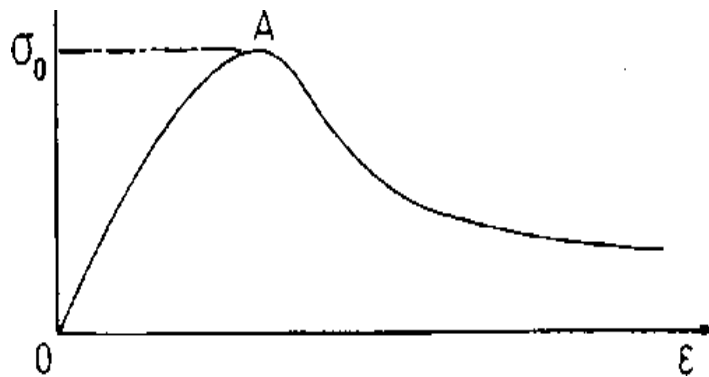


Figure 5.2: Courbe contrainte-déformation avec écoulement négatif.

Le matériau pour lequel on ne peut jamais dépasser le premier seuil de plasticité (pas d'écoulement), donc pour lequel avec une contrainte.

On peut avoir un allongement illimité, est dit parfaitement plastique (Figure 5.3).

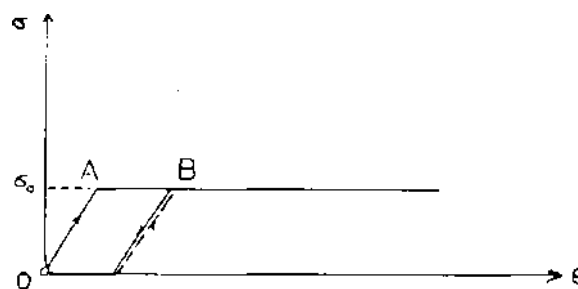


Figure 5.3: Matériau parfaitement plastique

V.2.2) Critères de plasticité :

Un critère de plasticité est une fonction des contraintes, éventuellement écrouissage avec les déformations. Ce critère ne peut être dépassé en aucun point. Lorsqu'il est atteint, débutent les déformations irréversibles ou plastiques. Les déformations sont, elles, régies par une loi dite loi d'écoulement.

Plusieurs critères de plasticité parfaite ont été initialement développés pour les métaux et ensuite étaient utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

V.2.2.1) Critère de Tresca:

Tresca (1864), après des essais sur du plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite. On peut donc écrire:

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K \quad (5.2)$$

Où: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ et K une constante (cohésion dans le cas d'un sol)

Remarquons que la contrainte principale intermédiaire ne joue aucun rôle.

Dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la surface définie par la fonction de charge est un prisme d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ à base Hexagonale régulière (Figures 5.4.a et 5.4.b).

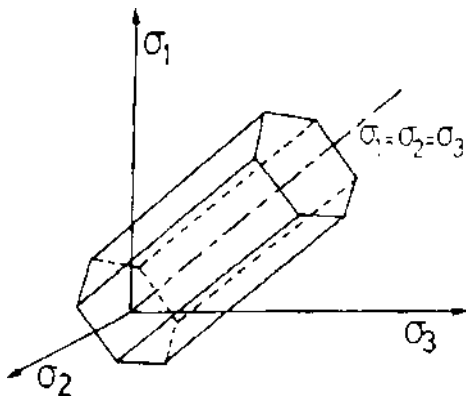


Figure 5.4.b: Section du prisme par le plan

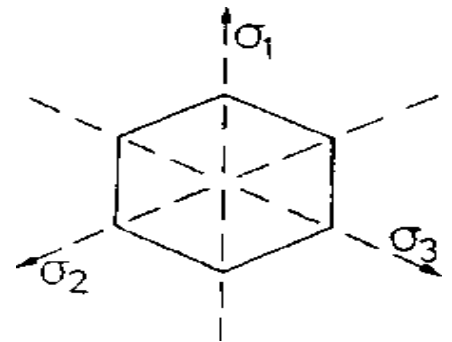


Figure 5.4.a: Représentation du critère de Tresca dans l'espace

V.2.2.2) Critère de Mohr-Coulomb:

Le critère de Mohr-Coulomb est couramment utilisé, surtout pour les sols possédant les deux composantes de la résistance de cisaillement.

En termes de contraintes principales, ce critère s'écrit:

$$F = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (5.3)$$

Dans l'espace des contraintes, la surface définie par la fonction de charge est une pyramide de base hexagonale et d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Figure 5.5.a et 5.5.b).

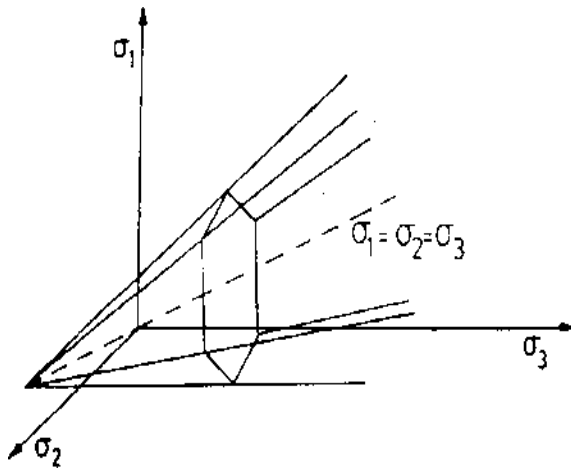


Figure 5.5.a : Section de la pyramide par plan w .

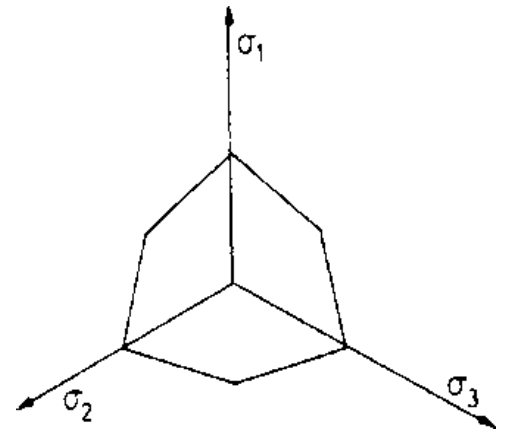


Figure 5.5.b: Critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes.

V.2.2.3) Critère de Von Mises:

Pour tenir compte de la contrainte principale intermédiaire, Von Mises(1913) proposa l'idée suivante: la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur déviatorique atteint une valeur limite, c'est à dire:

$$F = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - K^2 \quad (5.5)$$

Où K est une constante.

On peut remarquer que dans le cas du cisaillement simple plan ($\sigma_1 = -\sigma_2$, $\sigma_3 = 0$).

Donc la constante K représente la contrainte maximale admissible au cisaillement simple.

Dans l'espace, la surface définie par la fonction de charge est un cylindre de révolution d'axe S sa section par le plan Tz est un cercle dont le rayon est $K\sqrt{2}$ (Figures 4.6.a et 4.6.b).

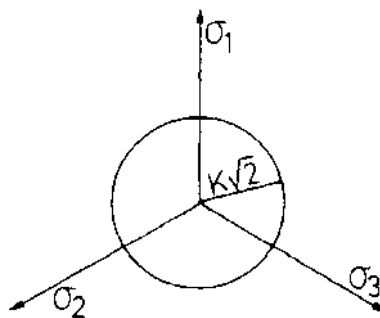


Figure 5.6.a: Représentation du critère de Von Mises dans l'espace des contraintes.

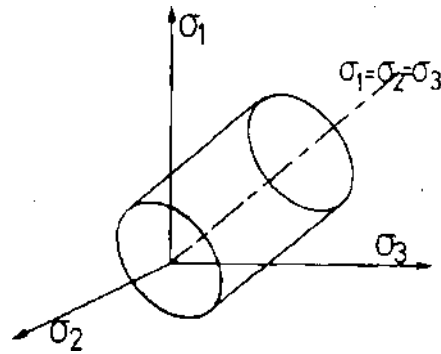


Figure 5.6.b: Section du cylindre par le

V.2.2.5) Critère de Drucker-Prager :

Drucker et Prager(1952) ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes.

Sa fonction de charge est donnée par l'expression:

$$F = -\bar{\sigma} - \alpha J_1 = 0 \quad (5.7)$$

Avec:

α, K sont des constantes.

La surface représentative du critère dans l'espace des contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Figure 5.7).

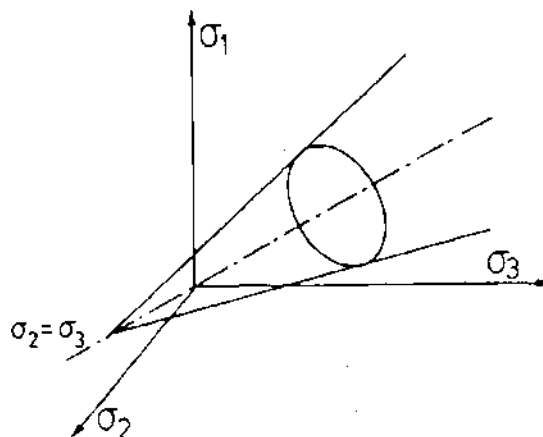


Figure 5.7: Critère de Drucker-Prager dans espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

Si: $\alpha = 0$, le critère de Drucker-Prager est le critère de Von Mises et le cône devient un cylindre.

V.2.2.5) Critère parabolique :

Il est exprimé par l'équation :

$$F = J_2' - \frac{R_C - R_T}{3} J_1 - \frac{R_C R_T}{3} = 0$$

Avec : $R_C = R_T$ sont les résistance en compression simple et traction simple.

On vérifie que si : $R_C = R_T$ on trouve le critère de Von Mises.

Dans l'espace des contraintes principales, la surface limite est un parabolôïde d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (Figure 5.8.a). La courbe intrinsèque (tangente aux cercles de Mohr, obtenue en faisant $(\sigma_2 = \sigma_3)$) est une parabole dans le plan (τ, σ) (Figure 5.8.b).

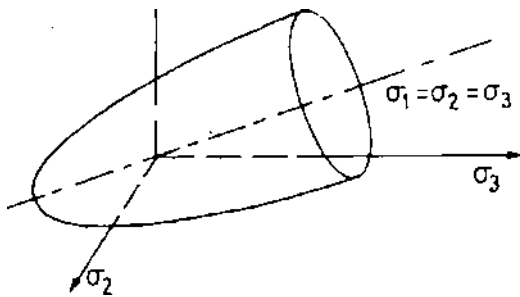


Figure 5.8.a : Critère parabolique dans l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

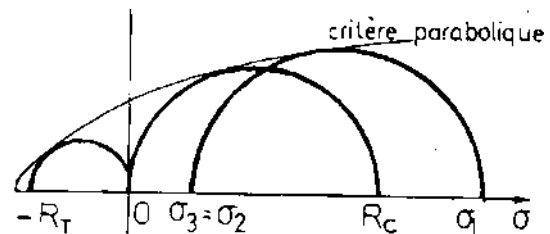


Figure 5.8.b : Critère parabolique dans le plan (τ, σ) lorsque $(\sigma_2 = \sigma_3)$.

V.3) Méthode de résolution des problèmes non-linéaire :

V.3.1 Introduction:

Il n'existe pas de méthodes générales directes de résolution des systèmes non linéaires. Les problèmes non linéaires sont toujours solutionnés par la résolution de plusieurs problèmes linéaires successifs où les conditions non linéaires sont respectées pour certaines tolérances.

Pour les problèmes de non linéarité matérielle uniquement, la relation entre contrainte et déformation est supposée être de la forme:

$$F(\sigma, e) = 0 \quad (5.9)$$

La matrice de rigidité élémentaire est fonction des propriétés matérielles et peut être écrite comme suit:

$$[K] = K(\sigma, e) \quad (5.10)$$

Les forces nodales externes $\{p\}$ peuvent être exprimées par:

$$\{P\} = \{K\}[U] \quad (5.11)$$

Il existe trois méthodes de résolution du système (5.11) (système non linéaire), à savoir :

- a) la méthode incrémentale
- b) la méthode itérative
- c) la méthode mixte

V.3.2) Méthode incrémentale:

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision des vecteurs chargements en plusieurs incréments. Durant chaque incrément de charge, l'équation

$$\{P\} = \{K\}[U] \quad (5.12)$$

est supposée être linéaire avec une valeur constante de $[K]$ déduite des résultats de l'incrément précédent. Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment.

Le processus est répété jusqu'au chargement final. Il n'y a pas d'itérations dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément.

L'analyse des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement.

L'inconvénient majeur est la difficulté de la prédétermination des incréments nécessaires pour assurer une bonne précision (Figure 5.9).

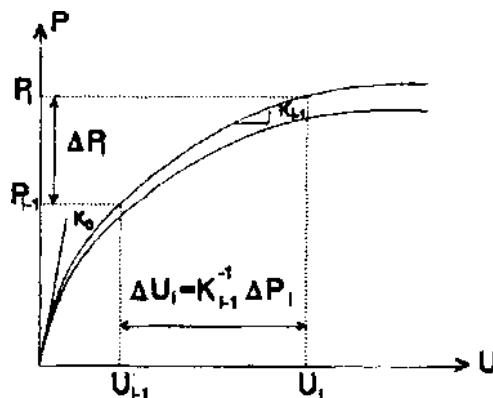


Figure 5.9 : Méthode incrémentale.

V.3.3) Méthode itérative:

Dans la méthode itérative, le chargement est appliqué en un seul incrément avec une certaine matrice de rigidité initiale, et on calcule les déplacements. Les contraintes sont déduites selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales internes équivalentes qui n'équilibrent pas forcément les forces externes. Les forces résiduelles sont appliquées à leur tour et on déduit de nouveaux déplacements qu'on doit ajouter aux précédents. Ces déplacements cumulés donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Ce processus est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance.

Généralement, la matrice de rigidité peut rester constante ou bien varier durant le processus itératif. On distingue donc deux méthodes pour le processus itératif, à savoir:

a) Méthode de rigidité constante: Dans cette méthode la rigidité initiale linéaire est utilisée pour chaque étape dans l'analyse. Cette méthode possède des avantages économiques parce que la matrice de rigidité est calculée uniquement une seule fois (Figure 5.10.a).

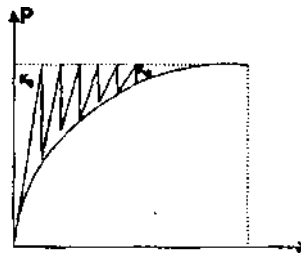


Figure 5.10.a : Procédure de rigidité constante.

b) Méthode de rigidité variable: Dans cette méthode, la méthode de Newton-Raphson ou sa version modifiée est utilisée. Dans la méthode de Newton-Raphson complète, la matrice de rigidité tangente est actualisée et un système complètement nouveau d'équations est résolu à chaque itération. Ce processus peut être particulièrement très lent si les incréments de charge relativement petits sont utilisés.

V.3.4) Méthode mixte:

Les méthodes mixtes sont une combinaison des deux méthodes citées précédemment. Le chargement est appliqué par incrément et la solution dans chaque étape de chargement est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée. La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative et elle est la plus utilisée. La figure 5.11 montre les différentes approches de la procédure mixte.

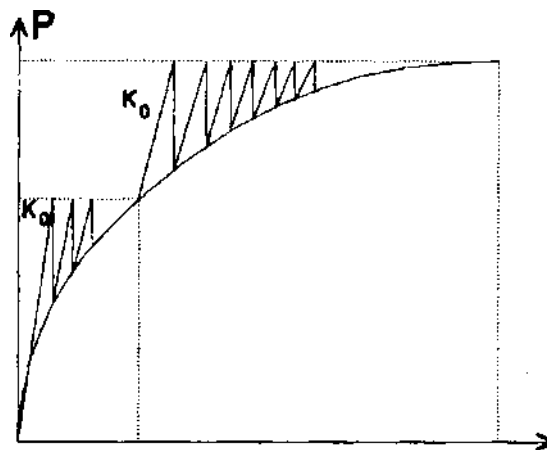


Figure 5.11.a : Procédure de rigidité constante.

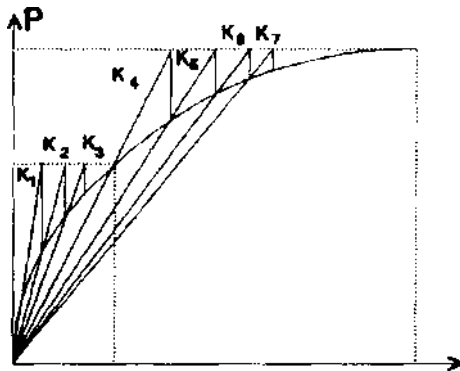


Figure 5.11.b : Procédure de rigidité variable-Approche du module sécant

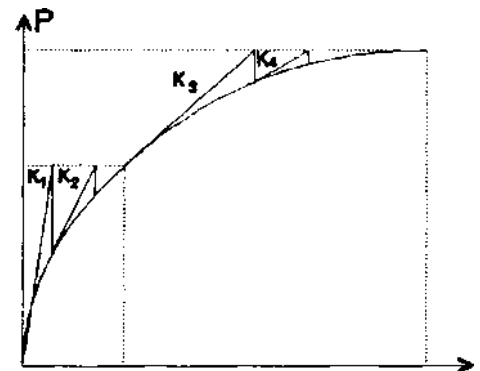


Figure 5.11.c : Procédure de rigidité variable-Approche du module tangent

Figure 5.11 : Méthode mixte

Dans la présente étude, on a utilisé la méthode mixte (procédure de rigidité constante).

Les étapes de base de cette méthode sont:

- 1) Appliquer un incrément de charge ΔP_1 pour un contrôle du chargement ou un incrément de déplacement ΔU_1 pour un contrôle de déplacements, et calculer la première valeur du déplacement incrémental.
- 2) Calculer les incréments de déformations Δe_1 et de contraintes $\Delta \sigma_1$

3) Calculer les contraintes totales par addition des valeurs incrémentales aux valeurs précédentes:

$$\sigma_i = \sigma_{i-1} + \Delta\sigma$$

4) Contrôler l'état de contraintes contre le critère de rupture de Mohr- Coulomb. Si le critère est violé, les contraintes sont conduites à la surface de charge.

5) Trouver les forces nodales équivalentes dues à σ_i . Calculer la force non équilibrée. Cette étape est l'étape d'élimination des forces résiduelles.

6) Contrôler le critère de convergence. Si le critère de convergence est satisfait, donc appliquer un nouvel incrément de charge ou de déplacement et répéter toutes les étapes précédentes. Sinon, passer à l'itération suivante, et répéter le processus (à partir de la deuxième étape) jusqu'à ce que les conditions de convergence soient satisfaites.

La méthode mixte est la mieux adoptée pour la résolution des problèmes non linéaires parce qu'elle combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative.

Dans la présente étude, la méthode mixte (procédure de rigidité constante) est utilisée et le critère de rupture choisi pour le sol est celui de Mohr-Coulomb. Ce choix du critère de rupture est justifié par les résultats expérimentaux obtenus par Wu et al, Kirpatrick sur le sol, qui indiquent que le critère de Mohr-Coulomb donne pour le sol une meilleure représentation que les autres critères.

V.4) Conclusion :

La méthode mixte est la mieux adoptée pour la résolution des problèmes non linéaires parce qu'elle combine les avantages des deux méthodes incrémentale et itérative.

Dans la présente étude, la méthode mixte est utilisée et le critère choisi est celui de Van-Mises. Ce choix du critère donne pour le sol une meilleure représentation que les autres critères.

CHAPITRE VI

Application

Chapitre VI APPLICATIONS

V.1) Etude de convergence :

Pour cette analyse, on considère une fondation de poids q et de largeur égale à 2 m repose sur tri-couche de sol (Figure V.1).

$$q = 0.15 \text{ MPa}$$

$$E_1 = 20 \text{ MPa}$$

$$h_1 = 4 \text{ m}$$

$$E_2 = 45 \text{ MPa}$$

$$h_2 = 4 \text{ m}$$

$$E_3 = 55 \text{ MPa}$$

$$h_3 = 8 \text{ m}$$

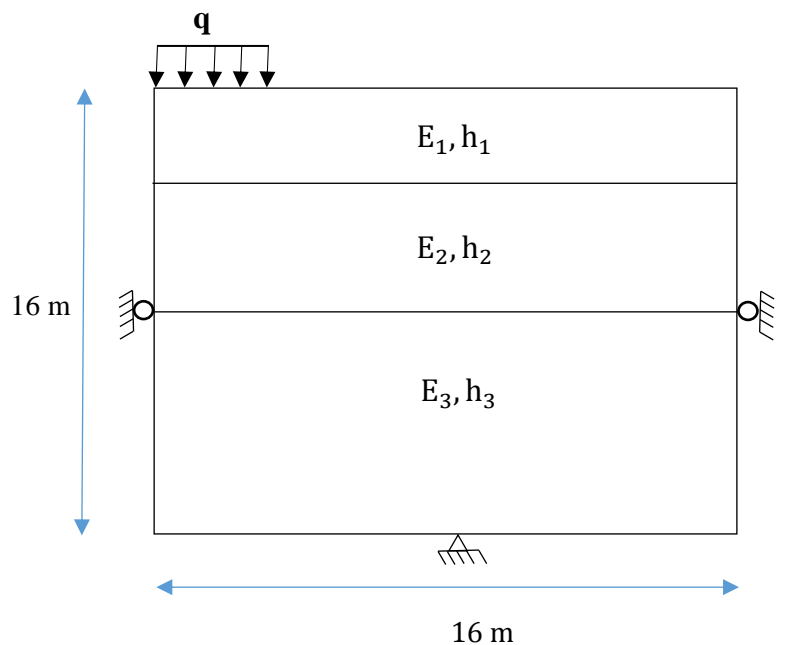


Figure VI. 1: Fondation sur un sol tri-couches

VI.1.1) Etude de convergence par M.E.F :

Pour cette étude on a pris comme maillage les modèles suivants

➤ Modèle 4x4 :

Quatre éléments : 4 éléments de 4 m

Le nombre de nœuds est de 25

➤ Modèle 8x8 :

Huit éléments : 8 éléments de 2 m

Le nombre de nœuds est de 81

➤ Modèle 16x16 :

Seize éléments : 16 éléments de 1 m.

Le nombre de nœuds est de 289.

Le tableau suivant montre les résultats de déplacement vertical maximal et de contrainte obtenus pour les différents modèles :

Tableau VI.1 : déplacement et contrainte maximal en fonction du modèle éléments finis.

	Δ_{max}^v (mm)	σ_{max} (MPa)
Modèle 4x4	28.5	0.067
Modèle 8x8	30.58	0.113
Modèle 16x16	30.6	0.148

Les courbes suivantes expriment les résultats mentionnés dans le tableau ci-dessus :

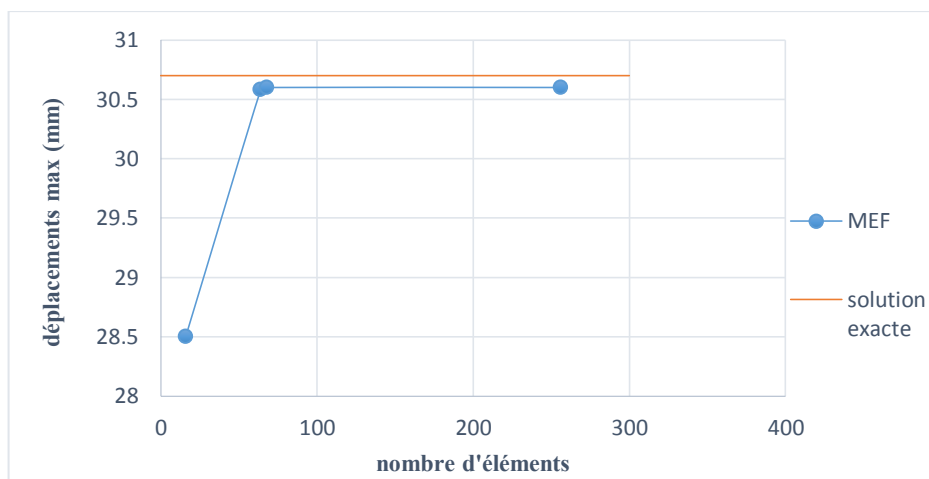


Figure VI.2 : convergence des déplacements en fonction de nombre d'élément.

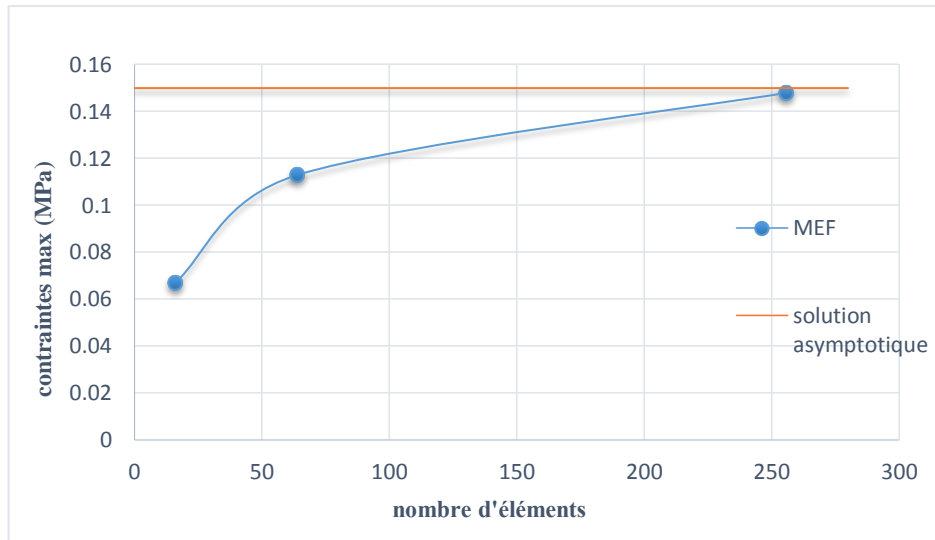


Figure VI.3 : convergence des contraintes en fonction de nombre d'élément.

VI.1.2) Etude de convergence par couplage M.E.F-M.E.I :

Les modèles de couplage utilisés sont :

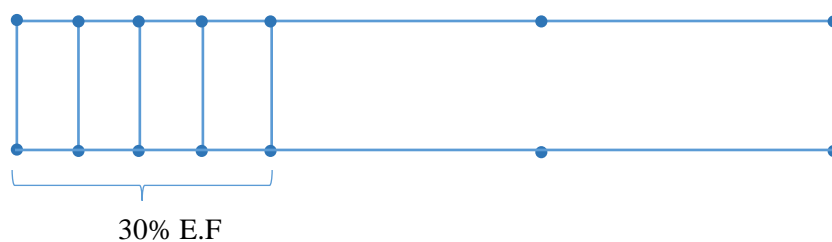
- 1^{ère} Modèle :

On prend 20% pour élément finis et 80% élément infinis.



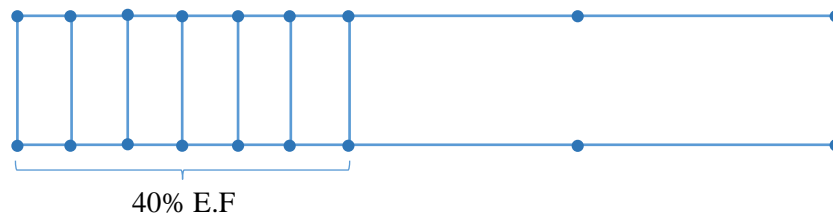
- 2^{ème} Modèle :

On prend 30% pour élément finis et 70% élément infinis.



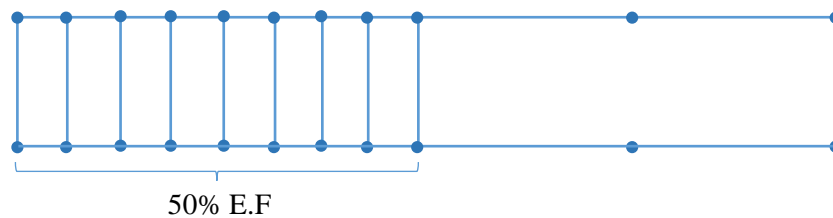
➤ 3^{ème} Modèle :

On prend 40% pour élément finis et 60% élément infinis.



➤ 4^{ème} Modèle :

On prend 50% pour élément finis et 50% élément infinis.



Le tableau et les graphes ci-dessous montrent la façon de convergence les déplacements verticaux maximaux et des contraintes verticales maximales.

Tableau VI.2 : déplacement et contrainte maximal en fonction du modèle couplage MEF-MEI

Modèles \ Dpl et cont	Δ_{max} (mm)	$\sigma_{y(max)}$ (MPa)
1 ^{ère} modèle	22.23	0.1415
2 ^{ème} modèle	25.39	0.1463
3 ^{ème} modèle	27.23	0.1487
4 ^{ème} modèle	28.32	0.1487

On trace les courbes du déplacement Δ_{max} (déplacement max) et de la contrainte $\sigma_{y(max)}$ (contrainte max) en fonction de pourcentage des éléments finis de chaque maillage et on obtient les courbes suivantes :

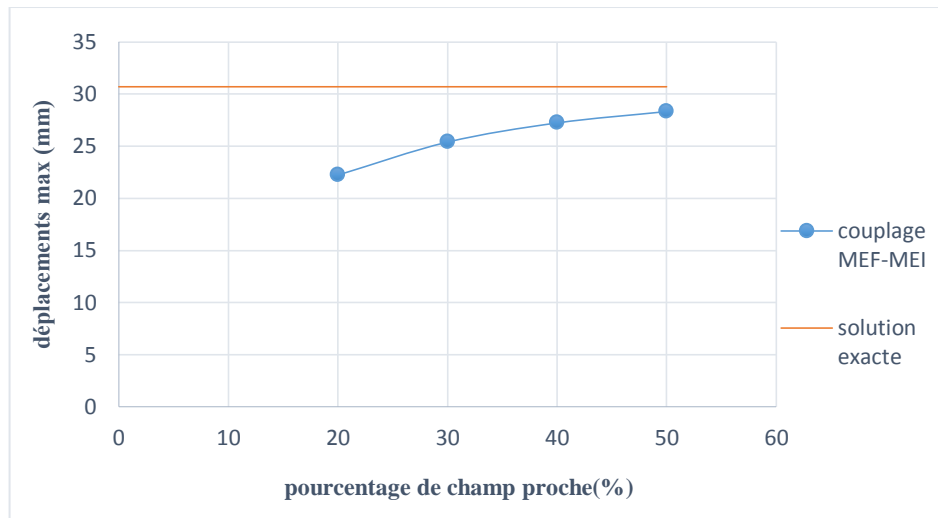


Figure VI.4 : convergence des déplacements en fonction de nombre d'élément.

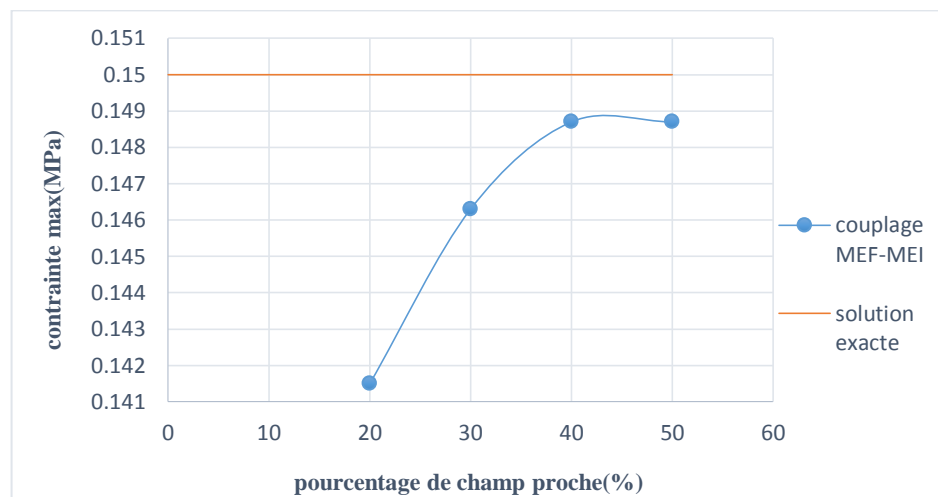


Figure VI.5 : convergence des contraintes en fonction de nombre d'élément.

VI.1.3) Travail d'homogénéisation :

L'objet de ce travail est d'homogénéiser le sol de façon optimale, et pour cela on fait l'étude de tassement en surface par la M.E.F pour deux modèles d'homogénéisations et on compare celle avec les valeurs de tassement en surface pour le sol à tri-couche.

Le modèle éléments finis est de (16x16) : 16 éléments de 1 m.

1- Les modèles d'homogénéisations :**1.1) Modèle proportionnel :**

$$E_{moy} = \frac{E_1 h_1 + E_2 h_2 + E_3 h_3}{\sum h_i} = \frac{(20 \cdot 4) + (45 \cdot 4) + (55 \cdot 8)}{16}$$

$$E_{moy} = 44 \text{ MPa}$$

1.2) Modèle en série :

$$E_{eq} = \frac{E_1 E_2 E_3 \sum h_i}{E_1 E_2 h_3 + E_1 E_3 h_2 + E_2 E_3 h_1} = \frac{20 \cdot 45 \cdot 55 \cdot 16}{(20 \cdot 45 \cdot 8) + (20 \cdot 55 \cdot 4) + (45 \cdot 55 \cdot 4)}$$

$$E_{eq} = 37 \text{ MPa}$$

2. Tri-couche :

$$E_1 = 20 \text{ MPa}$$

$$h_1 = 4 \text{ m}$$

$$E_2 = 45 \text{ MPa}$$

$$h_2 = 4 \text{ m}$$

$$E_3 = 55 \text{ MPa}$$

$$h_3 = 8 \text{ m}$$

On résume les résultats de tassement en surface dans le tableau suivant :

Tableau VI.3 : tassement en surface pour différents modèle.

Y (m)	Tri-couches (mm)	Modèle proportionnel(mm)	Modèle en série (mm)
	M.E.F	E_{moy}	E_{eq}
0	30.6	19.8	23.54
1	28.8	18.83	22.4
2	20.1	14.52	17.26
3	11	9.74	11.6
4	7	7.3	8.7
5	4.67	5.55	6.6
6	3.25	4.25	5
7	2.31	3.24	3.86
8	1.65	2.44	2.9
9	1.16	1.8	2.14
10	0.79	1.3	1.53
11	0.5	0.9	1.06
12	0.28	0.58	0.69

Conclusion : le modèle en série est le plus proche de résultats exact.

VI.2) Etude comparative de modèle avant calcul linéaire et non linéaire :

Pour cette étude comparative, on compare les résultats de tassement en surface de deux modèles par rapport les résultats exact obtenues par M.E.F pour choisir E moyenne optimale pour homogénéisé le sol de façon optimal :

- Etude de tassement en surface par la M.E.F :

Le modèle choisir pour cette étude est le modèle (10x16) : 10 éléments de 1 m, 160 éléments.

Le nombre de nœuds est de 187.

- a) bicouches :

$q = 0.15 \text{ MPa}$

$E_1 = 80 \text{ MPa}$

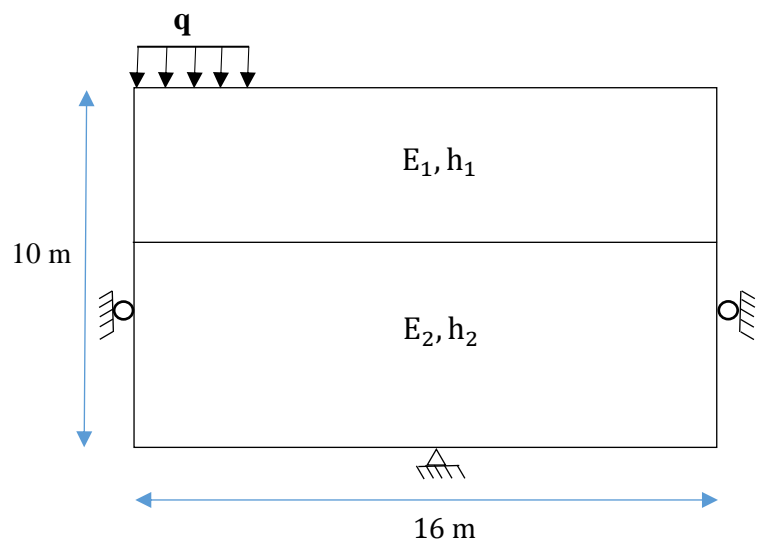
$h_1 = 4 \text{ m}$

$E_2 = 100 \text{ MPa}$

$h_2 = 6 \text{ m}$

b) $E_{eq} = 90.9 \text{ MPa}$

c) $E_{moy} = 92 \text{ MPa}$



On résume les résultats de tassement en surface dans le tableau suivant :

Tableau VI.4 : tassement en surface pour les différents modèles

Y (m)	Bicouches (mm)	Modèle proportionnel(mm)	Modèle en série (mm)
	M.E.F	E_{moy}	E_{eq}
0	6.65	6.24	6.32
1	5.29	5	5.11
2	4.39	4.22	4.28
3	2.35	2.39	2.42
4	1.5	1.58	1.6
5	0.94	1	1.05
6	0.58	0.66	0.67
7	0.34	0.4	0.57
8	0.18	0.22	0.22
9	0.07	0.09	0.1

Le modèle en série (E_{eq}) est le plus proche de résultats exact.

VI.3) calcul linéaire et non linéaire par la M.E.F:

On a choisi : $E = E_{eq}$

Car ce modèle donne des résultats plus proches de la solution exacte.

Données du problème :

$q = 420 \text{ KN/m}^2$

$(q / C_u = 4.666)$

$E \approx 90 \text{ MPa}$

$C_u = 90 \text{ KN/m}^2$

$\nu = 0.3$

$\bar{\sigma}_y = \sqrt{3} \cdot C_u \approx 156 \text{ KN/m}^2$

$q_u = (2+\pi) \cdot C_u = 463 \text{ KN/m}^2$

$\frac{q_u}{C_u} = 5.144$

Soit : INCS = 10 $\Rightarrow 10 \times p = 400$

$\Rightarrow p = 40 \text{ KN/m}^2$

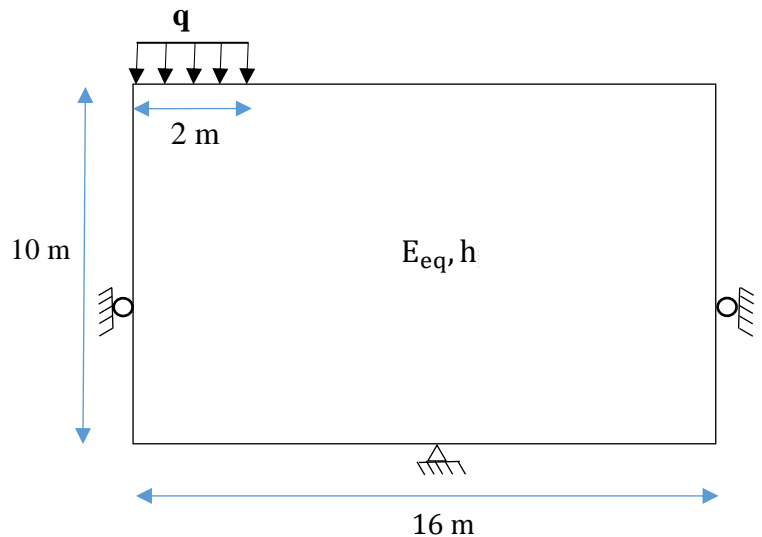
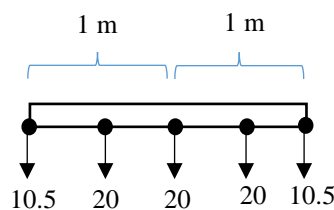


Figure VI. 6: Fondation sur un sol monocouches

La charge totale sur la fondation (2 m) = 84 KN/ml

La déformation est plane



Le modèle éléments finis utilisé est :

- modèle (16x24) :

Le nombre d'éléments est de 384.

12 éléments de (0.5x0.5 m) et 4 éléments de (0.5x1 m) (16 éléments, 10 m).

16 éléments de (0.5x0.5 m) et 8 éléments de (1x0.5 m) (24 éléments, 16 m).

VI.3.1) Calcul linéaire :

On présente les résultats obtenus par le calcul linéaire dans le tableau suivant et leur graphe:

Tableau VI.5 : déplacement max de la fondation dans le cas linéaire

$\frac{q_u}{C_u}$	Δ (max) (mm)
0.933	4.5
1.866	9
2.800	13.51
3.330	18
4.666	22.52

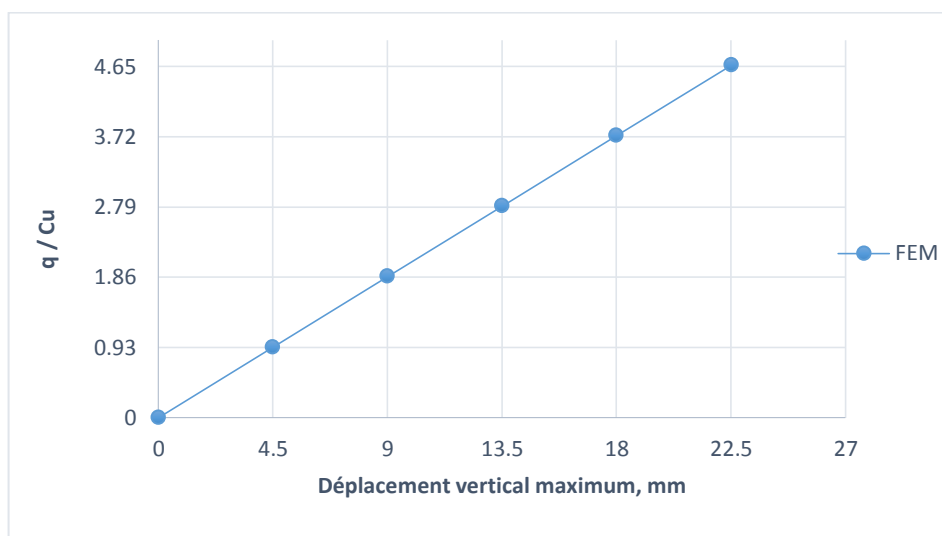


Figure VI.5 : déplacement vertical maximum de la fondation dans le cas linéaire.

VI.3.2) Calcul non linéaire :

On présente les résultats obtenus par le calcul non linéaire dans le tableau suivant et leur graphe :

Tableau VI.6 : déplacement max de la fondation dans le cas non linéaire

$\frac{q_u}{C_u}$	Δ (max) (mm)
0	0
0.4666	2.252
0.933	4.5
1.4	6.756
1.866	9
2.333	11.26
2.8	13.71
3.266	17.83
3.733	23.86
4.2	32.39
4.66	44

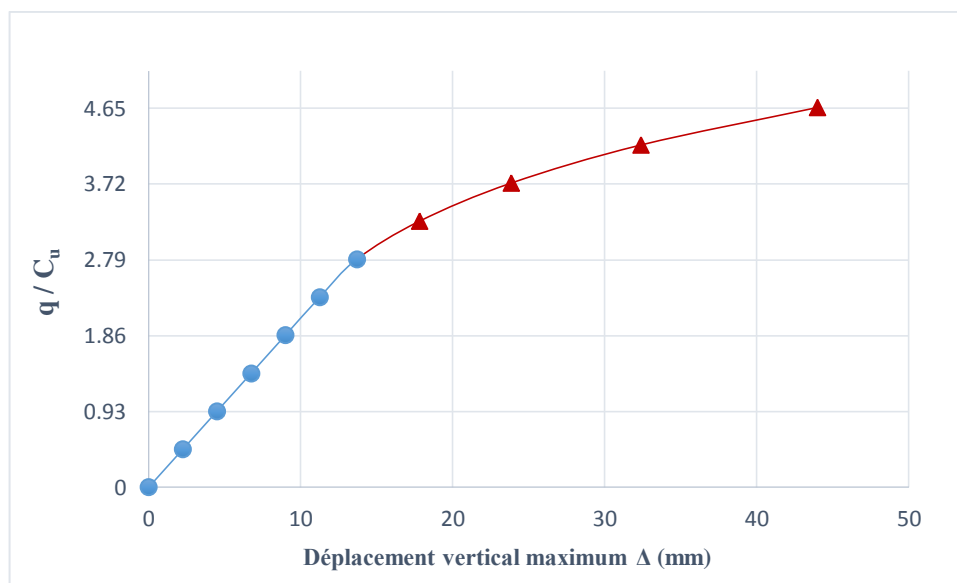


Figure VI.5 : déplacement vertical maximum de la fondation dans le cas non linéaire.

- Les courbes de convergence de déplacement et de contrainte en fonction du nombre d'éléments. Nous avons constaté que plus le nombre d'éléments augmente plus la solution se stabilise autour de la solution exacte.

- A travers l'analyse des résultats obtenus, on peut dire que l'utilisation de la technique de couplage entre la M.E.F et la M.E.I, offre un avantage considérable pour le calcul des tassements de fondation. En effet, on a remarqué que le nombre d'éléments à résoudre a été considérablement réduit. Aussi, la construction des fichiers de données et l'exploitation des fichiers de sorties ont été fortement allégés.

- Nous avons remarqué que la courbe de convergence de déplacement converge rapidement par rapport à la courbe de convergence de contrainte.

- On remarque que le modèle en série pour l'homogénéisation du sol donne des résultats plus proches aux résultats exacts.

- D'après les résultats obtenus par l'analyse linéaire et non linéaire de déplacement verticale de la fondation, on remarque :

- On remarque que pour l'analyse non linéaire, le comportement non linéaire commence (le sol rentre dans l'état plastique) à partir du rapport $\frac{q_u}{C_u}$ égal à 2.79, et à partir de cette valeur les déplacements sont irréversibles.

- Le déplacement vertical de la fondation maximum obtenue par une analyse linéaire est de 22.5 mm.

- Le déplacement vertical de la fondation obtenue par une analyse non linéaire est de 44 mm.

- on remarque que le déplacement max obtenu par l'analyse non linéaire est supérieur presque 50% par rapport à ce trouvé par l'analyse linéaire.

Conclusion

Conclusion :

Nous avons de présente une analyse le déplacement vertical d'une fondation sur un sol multicouche qui tient compte le comportement linéaire et non linéaire du sol.

Le choix de la méthode des éléments finis permet d'aborder des problèmes très généraux sans faire des hypothèses simplificatrices. Elle est susceptible de prendre en compte le comportement non linéaire.

Les problèmes liés à l'utilisation des éléments finis pour les domaines non bornés ont été résolu grâce aux éléments infinis, qui modélisent d'une façon très satisfaisante le comportement du sol à l'infini.

A travers la présente étude nous avons pu aboutir aux conclusions suivantes :

- 1) Il a été observé que la rapidité de convergence et la précision des résultats peuvent être améliorées par l'introduction des éléments infinis.
- 2) Les résultats obtenus en utilisant un modèle éléments finis-éléments infinis, sont précis et converge rapidement vers la solution exacte avec un nombre réduit d'éléments comparé à un modèle éléments finis.
- 3) Le déplacement max obtenu par l'analyse non linéaire est plus important par rapport à celle obtenu par l'analyse linéaire.
- 4) A partir du rapport $\frac{q_u}{C_u}$ égal à 2.79 le comportement non linéaire commence (le sol rentre dans l'état plastique), et les déplacements sont irréversibles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]- Bettess ,Pn "Infinite Element " . Int.J.Num. Meth .ENG ,v1.11,PP.53-64.
- [2]- Dhatt. G, Touzot. G, " Une Présentation de la méthode des éléments finis", Maloine S.A, 2eme édition, 1984.
- [3]- K.RAHAB, T.KAMEL " Investigation Numérique Des Différentes Phases D'un Creusement Souterrain Par Eléments Finis et Une Technique De Couplage D'éléments Finis et Infinis" mémoire de fin d'étude, Juin 2009 E.N.P.
- [4]-Kumar ,P., "static Infinite Element formulation ".Jou Str .Eng .Vol.111,PP.2355-2372.
- [5] -M.DEMIDEM : « Notes de cours de la méthode des éléments finis ».2014
- [6]-Notes de cours MEF et Programmes informatiques des Universite's de Sherbrooke ,Laval et Mc Gill Quebec ,Canada
- [7]- O.REFFIS, M.ABOUBAKEUR " Calcul des déplacements et des contraintes Des structures compte tenu de l'effet du Demi-espace élastique par La méthode des éléments finis" mémoire de fin d'étude, Juin 2007 E.N.P.
- [8]- S.BOUZIANE " Modélisation non linéaire du comportement du sol par couplage éléments finis et éléments infinis" mémoire de fin d'étude, Juin 1996 E.N.P.
- [9]- YVES Débarde "élasticité " Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique 24 mars 2006 / 21 novembre 2007.
- [10]- Zienkiewics. O. C., Taylor. R. L., "The finite element Method: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity", volume 2. McGraw-Hill Book Company, 4th édition, 1989.