الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

VIBRO ISOLATION OPTIMUM DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Proposé par : M.KSIAZEK

Etudié par : B.AIT HADDAD

Dirigé par : M.KSIAZEK

PROMOTION : JUIN 1986

بسم الله الرحمن الرحيم

وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ

من الآية 88 : سورة هود

REMERCIEMENTS

Qu'il me soit permis de remercier mon promoteur Mr M. KSIAZEK pour m'avoir inspiré le sujet de mon travail, de m'avoir estimé capable de le mener à bien, qu'il trouve ici l'expression de ma réspectueuse reconnaissance pour l'aide que j'ai trouvé auprés de lui.

Je remercie vivement tous les amis qui m'ont aidé de prés ou de loin à l'elaboration de ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- la mémoire de mon pére
- ma mére
- mes fréres et soeurs
- tous mes amis

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le phénomène de vibrations est nuisible et rencontré pratiquement dans tous les systemes. L'isolation de ces vibrations constitue un domaine d'étude trés poussé et varié afin d'assurer le maximum de securité et de confort.

l'étude des systemes de vibro-isolation, soumis à des vibrations aléatoires et des efforts non linéaires, est delicate et presente des difficultés tant au niveau des approximations des fonctions caracteristiques qu'au niveau des calculs qui sont pratiquement impossible à résoudre sans l'apport de micro-ordinateur.

Il est parfois possible d'approximer les fonctions non lineaires par des fonctions lineaires, ce qui simplifie considerablement la difficulté du probleme car on peut utiliser des methodes d'analyse lineaire qui sont beaucoup plus simple et moins difficile à manier.

Il existe plusieurs methodes d'analyse de vibrations aléatoires non lineaires qui sont developpées sur la base de l'analyse déterministique. Parmi ces methodes on peut citer :

- la methode des petits paramètres de Poincarré.
- la methode de linéarisation equivalante.

- la methode de linéarisation statistique.

La methode choisie dans l'étude de ce projet est la methode de linearisation statistique qui consiste à approximer les fonctions non linaaires.

On distingue en pratique trois systemes de vibro-isolation:

- les systemes passifs : caracterisés par l'action des ressorts et amortisseurs, choisis en fonctions des parametres de l'objet à vibro-isoler.
- les systemes actifs: caracterisés par l'action des differents servo-mécanismes
- les systemes mixtes: qui constituent une combinaison des deux systemes deja cités.

CHA I : GENERALITES

1.1 Notions de statistiques :

Soit un processus stochastique dont $\varphi^n(t)$ représente n réalisations.

1.1.1 Densité de probabilité d'ordre n :

$$w_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

où F_n est la fonction de repartition d'ordre n.

Pour n = 1 (1^{er} ordre)

$$F_1(x_1, t_1) = \mathcal{P}(\varphi(t_1) \leqslant x_1)$$

$$w_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}$$

Exemple :

Pour un processus Gaussien (loi normale) on a :

$$w_1(x, t) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$

1.1.2 Moyennes statistiques :

- Valeur moyenne (Esperance mathematique)

$$\overline{\varphi(t_1)} = \langle \varphi(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \, w_1(x_1, t_1) \, dx_1$$

- Moyenne quadratique :

$$\overline{\varphi^2(t_1)} = \langle \varphi^2(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^2 \, w_1(x_1, t_1) \, dx_1$$

- Dispersion (Variance) :

$$\sigma^2(t_1) = \overline{[\varphi(t_1) - \langle \varphi(t_1) \rangle]^2} = \langle \varphi^2(t_1) \rangle - [\langle \varphi(t_1) \rangle]^2$$

1.1.3 Moyennes temporelles :

Dans ce cas, on considère une realisation particulière $\varphi(t)$ à partir de laquelle on tire une moyenne dans le temps qui nous permettera d'évaluer le processus.

- Valeur moyenne:

$$\overline{\varphi(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\,dt$$

- Moyenne quadratique:

$$\overline{\varphi^2(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi^2(t)\,dt$$

1.2 *Processus stationnaire*:

On appelle ainsi tout processus dont la densité de probabilité du 1er ordre est indépendante du temps.

1.3 *Processus ergodique*:

Il est appelé ainsi si les moyennes statistiques sont égales aux moyennes temporelles.

1.4 Transformation de Fourrier:

X(s) représente la transformée de Fourrier de $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} X(s) e^{st}\,ds \Rightarrow X(s) = \int_{-j\infty}^{j\infty} x(t) e^{-st}\,dt$$

Transformées des dérivées: si $s = j\omega$

$$\dot{x}(t) = s X(s) = j\omega X(j\omega)$$

$$\ddot{x}(t) = s^2 X(s) = -\omega^2 X(j\omega)$$

1.5 *Relations entre densités spectrales*:

Soit $x(t)$ un processus aléatoire dont $X(j\omega)$ est sa transformée de Fourrier, sa densité spectrale est donnée par:

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} |X(j\omega)|^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} X(j\omega) X(-j\omega)$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \dot{X}(j\omega)\dot{X}(-j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} j\omega X(j\omega)(-j\omega)X(j\omega)$$

$$= -j^2\omega^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X(j\omega)X(-j\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \ddot{X}(j\omega)\ddot{X}(-j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} (j\omega)^2 X(j\omega)(-j\omega)^2 X(-j\omega)$$

$$= \omega^4 S_x(\omega)$$

1.6 Relations entre valeurs moyennes:

$$\overline{x(t)} = \langle x(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, W(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,dx\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega .$$

$$\langle \dot{x}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}\, W(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,dx\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{X}(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,dx\, \frac{j\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} x\, W(x)\,dx$$

$$\langle \dot{x}(t)\rangle = j\omega\langle x(t)\rangle$$

$$\langle \ddot{x}(t)\rangle = j\omega\langle \dot{x}(t)\rangle = (j\omega)^2\langle x(t)\rangle$$

$$\langle \ddot{x}(t)\rangle = -\omega^2\langle x(t)\rangle$$

1.7 *Definitions des transformations*:

Considerons $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ le signal d'entrée dans un système et $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ son signal de sortie.

Si dans le systeme reel, les valeurs du signal X ne dependent, en chaque instant, que des valeur de Z au même instant, alors le systeme corraspond à un schéma de transformat° appelé transformation sans retard dont l'équation s'écrit:

$$X = f(Z)$$

Si la reaction de ce systeme à la combinaison de plusieurs signaux est egale à la somme des reaction de chaque signal pris individuellement et si sa reaction pour un signal d'entrée unidimensionnel est un signal unidimensionnel (principe de superposition vrai), alors on dit qu'on a affaire à un systeme lineaire

1.7.1 Transformation lineaire sans retard:

Son équation s'ecrit sous la forme:

$X = hZ$ où h: c^{te} ou fonction de temps donneé.

1.7.2 Transformation N.L sans retard:

L'équation s'ecrit : $X = f(Z)$

où f : fonction quelconque N.L de Z.

mais généralement, la transformation N.L. est donneé sous une forme implicite : $X = f(Z, X)$

1.7.3 Transformation N.L avec retard :

La forme fondamentale de cette classe d'équations est l'équation implicite differentielle:

$f(\frac{d}{dt}, X, Z, t) = 0$. Il n'existe pas une methode d'analyse generale qui resoud ces équations differentielles.

1.7.4 Transformation L avec retard:

La forme implicite de cette transformation est:

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, \tau)\, Z(\tau)\, d\tau$$

$h(t, \tau)$: fonction de ponderation (reponse impulsive).

CHA II: LINEARISATION-STATISTIQUE

2.1 Principe de la linearisation statistique (L. S):

Le probleme de la linearisation statistique consiste à trouver la meilleure description d'une transformation non-lineaire donnée, en termes d'une transformation lineaire. Cette solution est importante pour l'etude des systemes complexes où les mecanismes qui representant les transformations non-lineaires sont introduits, comme éléments.

L'insertion d'element non lineaire dans une transformat. lineaire (les parametres ne dépendant que des caracteristiques du signal d'entreé Z) nous donne la possibilité d'etudier des systemes non-lineaires en utilisant des methodes d'analyse lineaire qui simplifiant considerablement le probléme.

Le probleme de la L.S peut être formulé mathematique-ment de la façon suivante:

Soit F_0 une transformation n-L donneé, et soit F une transformation lineaire. Nous devons, choisir F de telle façon que le signal $Y = F(Z)$ approxime au mieux le signal de sortie $X = F_0(Z)$.

Il est evidant que c'est un cas particulier du probleme de synthese génerale pour la recherche des transformations qui donnent la meilleure approximation de, certaines propriétés desirées. Nous nous limiterons dans ce cas à l'étude de la linearisation d'une transformation N.L sans retard : soit

$$X = f_o(Z)$$

En premier lieu, nous allons considerer la solution du probleme de la L.S basé sur le critére de la minimisation de l'erreur quadratique qui consiste à minimiser l'ecart σ_ε^2 definit comme suit :

$$\sigma_\varepsilon^2 = M\{(F(z) - X)^2\} = \min$$

la variation de l'ecart $\delta\sigma_\varepsilon^2$, qui provoque une légère variation $\varepsilon\, G(z)$ de l'operateur $F(z)$, est donneé par l'equation :

$$\delta\sigma_\varepsilon^2 = 2\varepsilon\, \overline{G(z)[F(z) - X]} + \varepsilon^2\, \overline{[G(z)]^2}$$

- où ε : petit parametre , G : operateur arbitraire

Pour que F soit optimum, il faut que :

$$\frac{\partial(\delta\sigma_\varepsilon^2)}{\partial\varepsilon} = 0 \Longrightarrow \overline{G(z)\,[F(z) - X]} = 0 \quad \text{(équation generale)}$$

Donc, si l'on considére que $z(t)$ est un processus gaussien (normal), l'approximation optimale est une transformation lineaire sans retard qui s'ecrit sous la forme suivante :

$$Y = h_o\, m_z + h_1\, Z^o$$

où : $h_o = \dfrac{\overline{f_o(z)}}{m_z}$; $h_1 = \dfrac{\overline{f_o(z) Z^o}}{\sigma_z^2}$; $Z \sim N(m_z, \sigma_z)$

Z^o : valeur centreé s'ecrit : $Z^o = Z - \overline{Z} = Z - m_z$

En 2ème lieu, la solution du pb. de la L.S basé sur le critére "weaker", souvent utilisé pour sa commodité au niveau des calculs, est une transformation linéaire sans retard qui s'écrit aussi sous la forme :

$$Y = h_0 m_z + h_1^* Z^\circ$$

en tenant compte que : $X = f(Z)$

et comme hypothèses du critère : $m_y = m_x$; $\sigma_y^2 = \sigma_x^2$

Nous obtiendront les coefficients suivants :

$$h_0(m_z, \sigma_z) = \frac{m_x}{m_z} \quad ; \quad h_1^*(m_z, \sigma_z) = \frac{\sigma_x}{\sigma_z}$$

2.2 Examples de linéarisation :

2.2.1 Linéarisation d'une fonction symétrique :

Soit à linéariser la fonction symétrique :

$$Y = f_0(Z) = Z^3 \qquad Z \sim N\{m_z, \sigma_z)$$

a) Critère de l'erreur quadratique minimale :

Z obéit à une loi normale dont l'écart type σ_z et le moment m_z sont considérés comme connus.

la transformation linéaire s'écrira :

$$Y = h_0 m_z + h_1 Z^\circ \quad \text{où} \quad h_0 = \frac{\overline{f_0(Z)}}{m_z} \quad \text{et} \quad h_1 = \frac{\overline{f_0(Z) Z^\circ}}{\sigma_z^2}$$

$$\overline{f_0(Z)} = M\{f_0(Z)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \int_{-\infty}^{+\infty} Z^3 e^{-\frac{(Z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dZ$$

posons : $a = 1/\sqrt{2\pi}\,\sigma_z$; $t = Z - m_z$; $dt = dZ$

$$\overline{f_0(Z)} = a \int_{-\infty}^{+\infty} (t + m_z)^3 \, Exp(-t^2/2\sigma_z^2) \, dt = a \Big[\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt +$$

$$+ 3m_z \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt + 3m_z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt + m_z^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt \Big]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2\sigma_z^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma_z^2} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = 2\sigma_z^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{2\sigma_z^2} e^{-t^2/2\sigma_z^2} d\left(t^2/2\sigma_z^2\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma_z^4\, x e^{-x} dx = 2\sigma_z^4 \left[+ \int_{-\infty}^{0} x e^{-x} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-x} dx \right] = 0$$

d'après la formule de récurence on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt = \sqrt{2\pi}\, \sigma_z\, (2\times 1 - 1)!!\, \sigma_z^2 = \sqrt{2\pi}\, \sigma_z^3$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt = \sqrt{2\pi}\, \sigma_z$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{f_0(Z)} = m_z \left(3\sigma_z^2 + m_z^2\right)$$

Donc: $\quad h_0 = \dfrac{\overline{f_0(Z)}}{m_z} = 3\sigma_z^2 + m_z^2$

$$\overline{f_0(Z) Z^\circ} = \overline{f_0(Z)(Z - m_z)} = \overline{Z^3 (Z - m_z)} = \overline{Z^4} - m_z \overline{Z^3}$$

$$\overline{Z^4} = a \int_{-\infty}^{+\infty} Z^4 e^{-\frac{(Z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dZ = a \int_{-\infty}^{+\infty} (t + m_z)^4 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt$$

$$= a \left[\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt + m_z^4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt + 4 m_z \int_{-\infty}^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt + \right.$$
$$\left. + 6 m_z^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt + 4 m_z^3 \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt \right]$$

la formula de récurence nous donne:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2/2\sigma_z^2} dt = \sqrt{2\pi}\, \sigma_z\, (4-1)!!\, \sigma_z^4 = 3\sqrt{2\pi}\, \sigma_z^5$$

on aura après tout calcul fait

$$\overline{Z^4} = 3\sigma_z^4 + 6 m_z^2 \sigma_z^2 + m_z^4$$

d'où $\quad \overline{f_0(Z) Z^\circ} = \overline{Z^4} - m_z \overline{Z^3} = 3\sigma_z^4 + 6 m_z^2 \sigma_z^2 + m_z^4 - m_z^2 (3\sigma_z^2 + m_z^2)$

$$\Rightarrow \quad \overline{f_0(Z) Z^\circ} = 3\sigma_z^2 \left(\sigma_z^2 + m_z^2\right)$$

Donc $\quad h_1 = \dfrac{\overline{f_0(Z) Z^\circ}}{\sigma_z^2} = 3\left(\sigma_z^2 + m_z^2\right)$

l'approximation linéaire de $Y = Z^3$ sera :

$$Y = h_0 m_z + h_1 Z^\circ = (3\sigma_z^2 + m_z^2) m_z + 3(\sigma_z^2 + m_z^2) Z^\circ$$

b) Critère "weaker" :

De la même façon que précédemment on a :

$$Y = h_0 m_z + h_1^* Z^\circ \quad \text{où} \quad h_0 = \frac{m_Y}{m_z} = 3\sigma_z^2 + m_z^2$$

$$h_1^* = \frac{\sigma_X}{\sigma_z}$$

Calcul de σ_X :

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \, w_1(x) \, dx \qquad w_1(x) : \text{fonction de densité}$$

Recherche de $w_1(x)$:

$$Z \sim N(m_z, \sigma_z) \Rightarrow w_{1z}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} e^{-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$X = f(Z) = Z^3 \Rightarrow Z = \sqrt[3]{X} = \varphi(X) \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{3X^{2/3}}$$

La dencité de probabilité $w_1(x)$ nous est donnée par la formule suivante :

$$w_1(x) = w_{1z}[\varphi(x)] \left|\frac{d\varphi}{dx}\right| = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\,\sigma_z\, x^{2/3}} e^{-\frac{(x^{1/3} - m_z)^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$\Rightarrow \sigma_X^2 = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - m_X)^2}{x^{2/3}} e^{-\frac{(x^{1/3} - m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dx$$

$$\sigma_X^2 = a\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^{4/3} e^{-\frac{(x^{1/3} - m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dx - 2m_X \int_{-\infty}^{+\infty} x^{1/3} e^{-\frac{(x^{1/3} - m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dx + m_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2/3} e^{-\frac{(x^{1/3} - m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dx\right]$$

En développant les calculs, on trouve :

$$\sigma_X^2 = 3\sigma_z^2 (5\sigma_z^4 + 12\, m_z^2 \sigma_z^2 + 3m_z^4)$$

on obtiendra finalement les coefficients :

$$\begin{cases} h_0(m_z, \sigma_z) = 3\sigma_z^2 + m_z^2 \\ h_1^*(m_z, \sigma_z) = \dfrac{\sigma_x}{\sigma_z} = \sqrt{3(5\sigma_z^4 + 12\, m_z^2 \sigma_z^2 + 3 m_z^4)} \end{cases}$$

et l'approximation optimale de Z^3 sera:

$$Y = h_0 m_z + h_1^* \, Z^0$$

2.2.2 linearisation d'une fonction non symetrique:

Soit à lineariser la fonction non symetrique suivante:

$$Y = f_0(Z) = \begin{cases} tg\, a_1\, z = a_1 z & z \leq 0 \\ tg\, a_2\, z = a_2 z & z < 0 \end{cases} \qquad Z \sim N(m_z, \sigma_z)$$

Critère de l'erreur quadratique minimale:

$$\overline{f_0(Z)} = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \int_{-\infty}^{0} z\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \int_{0}^{+\infty} z\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} z\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz = \int_{-\infty}^{-m_z} (x+m_z)\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-m_z} x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}} dx + m_z \int_{-\infty}^{-m_z} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}} dx = \sigma_z^2 \int_{-\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}} d\left(\frac{x^2}{2\sigma_z^2}\right) + m_z \int_{-\infty}^{-m_z} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_z^2}}$$

$$= -\sigma_z^2 \int_{\frac{m_z^2}{2\sigma_z^2}}^{\infty} e^{-t} dt + m_z \sigma_z \left[\int_{0}^{\infty} e^{-t^2/2} dt + \int_{\frac{m_z}{\sigma_z}}^{0} e^{-t^2/2} dt \right]$$

En continuant ainsi les calculs, on trouve:

$$I_1 = -\sigma_z^2 e^{-\frac{m_z^2}{2\sigma_z^2}} + m_z \sigma_z \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[1 - 2\phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right) \right]$$

$$\text{avec} \quad \phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{m_z}{\sigma_z}} e^{-t^2/2} dt$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} z\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}} dz = \sigma_z^2 e^{-\frac{m_z^2}{2\sigma_z^2}} + m_z \sigma_z \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left[1 + 2\phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right) \right]$$

$$\overline{f_0(Z)} = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} I_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} I_2$$

$$\overline{f_0(Z)} = \frac{1}{2}(a_2 + a_1) m_z + (a_2 - a_1) \left[\frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{m_z^2}{2\sigma_z^2}} + m_z\, \phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right) \right]$$

De cette expression, on tire :

$$h_0 = \frac{\overline{f_0(z)}}{m_z} = \frac{1}{2}(a_1+a_2)+(a_2-a_1)\left[\frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi}\, m_z}\, e^{-\frac{m_z^2}{2\sigma_z^2}} + \phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right)\right]$$

$$\overline{f_0(z)z^\circ} = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z}\int_{-\infty}^{0} z(z-m_z)\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}dz + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z}\int_{0}^{\infty} z(z-m_z)\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}dz$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} z(z-m_z)\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma_z^3\left[1-2\phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right)\right]$$

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} z(z-m_z)\, e^{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}}dz = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma_z^3\left[1+2\phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right)\right]$$

$$\overline{f_0(z)z^\circ} = \frac{a_1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} I_1 + \frac{a_2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} I_2$$

$$\overline{f_0(z)z^\circ} = \frac{1}{2}(a_1+a_2)\sigma_z^2 + (a_2-a_1)\sigma_z^2\, \phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right)$$

De cette expression, on tire :

$$h_1(m_z,\sigma_z) = \frac{1}{2}(a_1+a_2) + (a_2-a_1)\,\phi\left(\frac{m_z}{\sigma_z}\right)$$

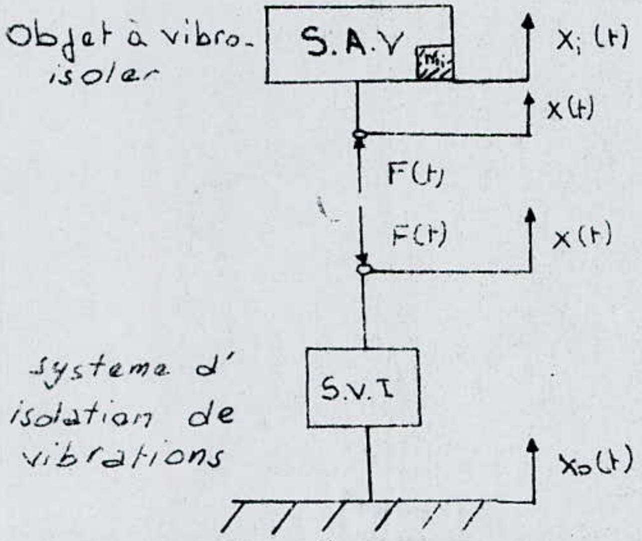
La solution linéaire optimum de la fonction non linéaire et non symetrique peut être approximeé par :

$$Y = h_0 m_z + h_1 z^\circ$$

$$\Rightarrow\quad Y = \frac{\sigma_z}{\sqrt{2\pi}}(a_2-a_1)\, e^{-\frac{m_z^2}{2\sigma_z^2}} + h_1 z$$

CHA. III : CONSTRUCTION ANALYTIQUE DES S.V.I

3.1 Schematisation du probléme pour un objet donné:



3.2 Hypotheses et Critére:

La construction analytique d'un tel systeme depend des hypotheses que l'on se fixe ainsi que du choix du critére. On considére les hypotheses suivantes:

. Le systeme de vibro-isolation est non linéaire et à structure inconnue.

. les vibrations sont unidimensionnelles (vib. verticales)

. L'excitation $x_o(t)$ est independante des systemes considérés. C'est un processus Gaussien (normale), stationnaire (proprietés statistiques sont indépendantes du changement de l'origine des temps) et ergodique (moyennes temporelles = moyennes statistiques). Sa densité spectrale $S_{\ddot{x}_0}$ est supposée, comme étant connue.

Choix du critère :

Nous savons que l'être humain ne supporte pas les grandes et brusques, changements de l'accélération d'où la nécessité de la minimiser afin d'obtenir un système souple mais en même temps pour éviter d'importants déplacements relatifs, il faudrait avoir un système rigide. Deux critères contradictoires dont il faut trouver la solution optimum qui consiste à minimiser la fonctionnelle C définit comme suit :

$$C = \int_0^{\infty} [\delta(t)]^2 \, dt + \sum_1^n \lambda_i \int_0^{\infty} [\ddot{x}_i(t)]^2 \, dt$$

λ_i : multiplicateurs de Lagrange

$\ddot{x}_i(t)$: accélération de la $i^{\text{ème}}$ masse.

$\delta(t) = x(t) - x_0(t)$: déplacement relatif.

Supposons que les moyennes de $\delta(t)$ et $\ddot{x}_i(t)$ sont nulles on aura alors par définition:

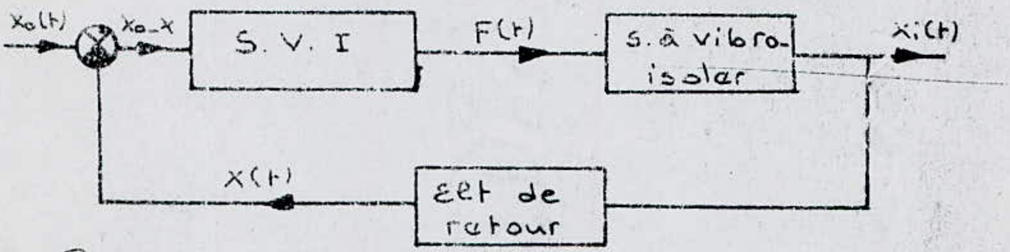
$$\langle \delta^2(t) \rangle = \sigma^2_{x-x_0}$$

$$\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \sigma^2_{\ddot{x}_i}$$

moyennes quadratiques = dispersions.

3.3 Représentation analogique et formulation mathématique du système :

L'analogie mécanique - électrique nous permet d'identifier le système mécanique considéré à un réseau éléctrique qui tient compte des paramatres discrats et des hypothéses déja cités. Ce reseau peut-être representé par ce schema bloc :



Puisqu'on considére que le processus est stationnaire, donc on peut passer aux transformeés de Laplace on aura :

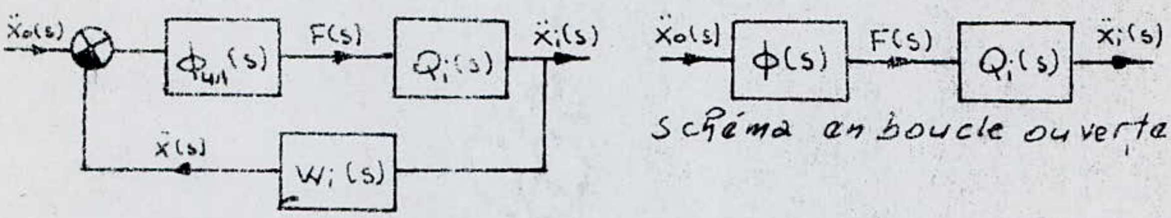


schéma en boucle ouverte.

avec :
$$\phi(s) = \frac{1}{1 + \Phi_{4A}(s)\, Q_i(s)\, W_i(s)} = \frac{\overline{F}(s)}{\ddot{x}_0(s)}$$

posons :

$$L_i(s) = \frac{\ddot{\overline{x}}_i(s)}{\ddot{\overline{x}}(s)} \qquad L(s) = \frac{\overline{F}(s)}{\ddot{\overline{x}}(s)}$$

on aura :
$$Q_i(s) = \frac{\ddot{\overline{x}}_i(s)}{\overline{F}(s)} = p^2 \frac{L_i(s)}{L(s)} \quad ; \quad W_i(s) = \frac{\ddot{\overline{x}}_i(s)}{\ddot{x}(s)} = \frac{1}{L_i(s)}$$

3.4 Relation entre dispersion et fonction de transfert :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}\, ds$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x_i}{\ddot{x}_0}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}\, ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}} = \frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{\bar{\ddot{x}}_0} = \frac{\bar{x}-\bar{x}_0}{s^2\bar{x}_0} = \frac{s^2\frac{\phi(s)}{L(s)}-1}{s^2} = \frac{\varphi(s)G(s)-1}{s^2}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}} = \frac{\bar{\ddot{x}}_i(s)}{\bar{\ddot{x}}_0(s)} = \frac{s^2 L_i(s)\phi(s)}{L(s)} = G(s)L_i(s)\phi(s)$$

en remarquant que: $G(s) = \frac{s^2}{L(s)}$ $\quad |H(s)|^2 = H(s)H(-s)$

3.5 Solution Générale du problème:

- fonction caractéristique $\phi(s)$:

La fonctionnelle C s'écrira sous la forme:

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \sum_1^n \lambda_i \sigma^2_{\ddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} [\phi(s)G(s)-1][\phi(-s)G(-s)-1]\, S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\sum_1^n \lambda_i s^4[G(s)L_i(s)\phi(s)][G(-s)L_i(-s)\phi(-s)]\,S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$$

en tenant compte que $S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 S_0\varphi(s)\varphi(-s)$

on définit la fonction : $\phi_w(s) = \phi(s) + \varepsilon\eta(s)$

dont la fonctionnelle C^* est minimale

ε: paramètre constant

$\eta(s)$: fonction de balance arbitraire.

L'erreur $\delta C = C^* - C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[\phi_w(s)G(s)-1][\phi_w(-s)G(-s)-1]\,S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds -$

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}[\phi(s)G(s)-1][\phi(-s)G(-s)-1]\,S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\sum_1^n \lambda_i s^4[G(s)L_i(s)\phi_w(s)][G(-s)L_i(-s)\phi_w(-s)]\,S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\sum_1^n \lambda_i s^4[G(s)L_i(s)\phi(s)][G(-s)L_i(-s)\phi(-s)]\,S_0\varphi(s)\varphi(-s)\,ds$$

Pour trouver la fonction optimale, on doit minimiser l'erreur pour $\varepsilon = 0$, ce qui revient à identifier $\phi(s)$ à $\phi_w(s)$ donc

$$I = \frac{d(\delta c)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \implies \phi(s) = \dot{\phi}_w(s)$$

le calcul de I nous donne finalement la relation:

$$2\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(s)\varphi(s)\,\phi(s) - \left\{\frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}\right\}_+\right] D(-s)\,\varphi(-s)\,\eta(-s)\,ds = 0$$

avec:

$$D(-s)D(s) = \left[1 + \sum_1^n \lambda_i s^4 L_i(s) L_i(-s)\right] G(s)\,G(-s)$$

en posant :

$$R(s)\,R(-s) = 1 + \sum_1^n \lambda_i s^4 L_i(s) L_i(-s)$$

on aura :

$$D(s)\,D(-s) = R(s)\,R(-s)\,G(s)\,G(-s) \implies D(s) = R(s)\,G(s)$$

De l'expression finale de I on tire la fonction caractéristique optimale :

$$\phi(s) = \frac{1}{D(s)\,\varphi(s)}\left\{\frac{G(-s)\,\varphi(s)}{D(-s)}\right\}_+$$

et qui s'écrira:

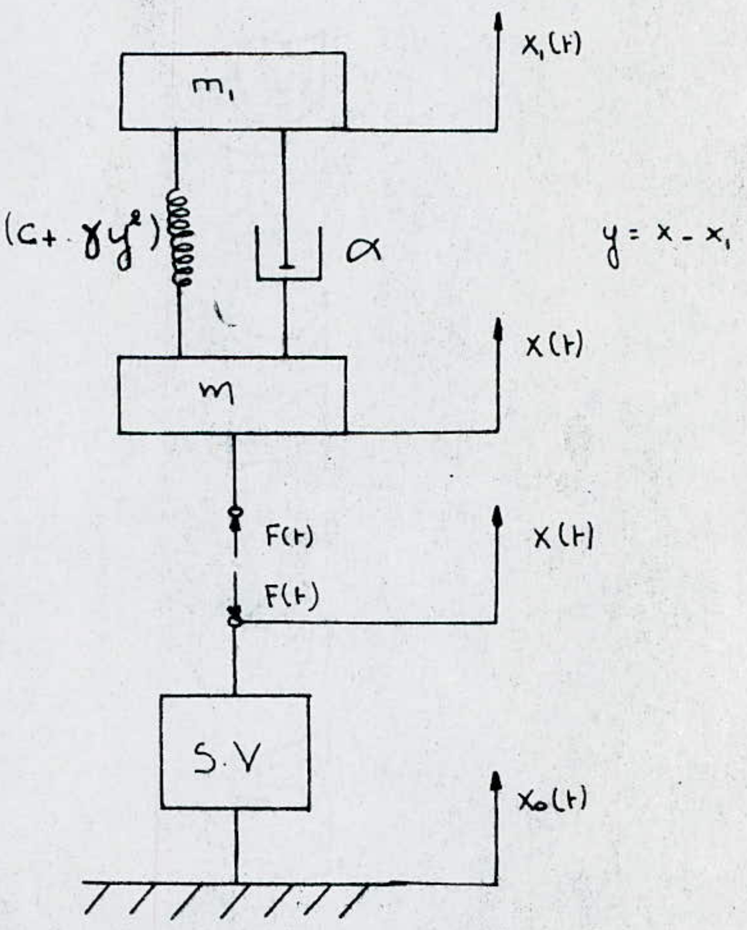
$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\,\varphi(s)}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

CHA : IV VIBRO-ISOLATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE N-L

Nous allons considerer deux non- linearités symetriques respectivemant du rassort et de l'amortisseur et tirer les dispersions de l'acart et de l'acceleration.

4.1 Non- linearité symetrique du rassort :

4.1.1 Schema et relations :



Les equations dynamiques s'ecrivent

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -C(x_1 - x) - \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}) - \gamma(x_1 - x)^3 \\ m \ddot{x} = +C(x_1 - x) + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}) + \gamma(x_1 - x)^3 + F(t) \end{cases}$$

posons : $y = x - x_1$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = C y + \alpha \dot{y} + \gamma y^3 \\ m \bar{x} = -C y - \alpha \dot{y} - \gamma y^3 + F(t) \end{cases}$$

$$m\ddot{x} = m(\ddot{y} + \bar{x}_1) = m\ddot{y} + m\ddot{x}_1$$

$$= m\bar{y} + \frac{m}{m_1}(C\bar{y} + \alpha\dot{y} + \gamma y^3) = -Cy - \alpha y \quad \gamma y^3 + F(t)$$

$$\Rightarrow F(t) = m\ddot{y} + \frac{m}{m_1}(C\bar{y} + \alpha\dot{y} + \gamma y^3) + Cy + \alpha\dot{y} + \gamma y^3$$

$$\Rightarrow F(t) = m\ddot{y} + \left(1 + \frac{m}{m_1}\right) C y + \left(1 + \frac{m}{m_1}\right)\alpha\dot{y} + \left(1 + \frac{m}{m_1}\right)\gamma y^3$$

$$F(t) = m\ddot{y} + Cy + \alpha\dot{y} + \gamma y^3$$

D'apres la linearisation on a :

$$y^3 = h_0 M y + h_1 y^\circ$$

On aura alors:

$$\Rightarrow F(t) = m\ddot{y} + Cy + \alpha\dot{y} + \gamma h_0 M y + \gamma h_1 \dot{y}$$

$$\Rightarrow F^\circ + M_F = m\ddot{y}^\circ + m M\ddot{y} + Cy^\circ + C M_y + \alpha\dot{y}^0 + \alpha M\dot{y}$$
$$+ \gamma h_1 \dot{y} + \gamma h_0 M y$$

Par identification on tir :

$$\Longrightarrow \begin{cases} F^\circ = m\ddot{y}^\circ + \alpha \dot{y}^\circ + (C + \gamma h_1)\, y^\circ \\ M_F = m M\ddot{y} + \alpha M\dot{y} + (C + \gamma h_0)\, M_y \end{cases}$$

En utilisant les transformations de Laplace on aura

$$\Longrightarrow \begin{cases} \bar{F}^\circ(s) = m s^2 \bar{y}^\circ + \alpha s \bar{y}^\circ + (C + \gamma h_1)\, \bar{y}^\circ \\ M_F = -m\omega^2 M_y + j\omega\alpha M_y + (C + \gamma h_0)\, M_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{y}^\circ}{\bar{F}^\circ} = \dfrac{1}{m s^2 + \alpha s + (C + \gamma h_1)} \\ \dfrac{M_y}{M_F} = \dfrac{1}{-m\omega^2 + j\alpha\omega + (C + \gamma h_0)} = \dfrac{(C + \gamma h_0) - m\omega^2}{[(C + \gamma h_0) - m\omega^2]^2 + \alpha^2\omega^2} \end{cases}$$

$$- j \frac{\alpha\omega}{[(C + \gamma h_0) - m\omega^2]^2 + \alpha^2\omega^2}$$

la symetrie de distribution des forces nous permet d'ecrire que $M_F = 0$.

Dans le cas contraire : Si $M_F \neq 0$ alors le systeme isolé ne sera pas en equilibre et aura tendance à monter vers le haut.

$$M_F = 0 \Longrightarrow M_y = 0 \Longrightarrow M_{x_1} = M_x$$

Puisque on est dans le cas d'un systeme en equilibre stable et stationnaires alors :

$$M_{x_1} = M_x = 0$$

Consequences :

$$\left.\begin{aligned} y &= y^\circ + M_y \\ &= x^\circ + M_x - x_1^\circ - M_{x_1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow y = y^\circ = x^\circ - x_1^\circ$$

$$h_0 = 3\sigma y^2 + M_y^2 = 3\sigma y^2$$

$$h_1 = 3\sigma y^2 + 3M_y^2 = 3\sigma y^2$$

$$y^3 = h_0 M_y + h_1 y^\circ$$

$$\Longrightarrow y^3 = 3\sigma y^2 y$$

Les equations dynamiques s'ecrivent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -C(x_1 - x) - \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}) - 3\gamma\sigma\bar{y}^2(x_1 - x) \\ m\ddot{x} = C(x_1 - x) + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}) + 3\gamma\sigma\bar{y}^2(x_1 - x) + F(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (C + 3\gamma\sigma\bar{y}^2)x_1 = \alpha\dot{x} + (C + 3\gamma\sigma\bar{y}^2)x \\ m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (C + 3\gamma\sigma\bar{y}^2)x = \alpha\dot{x}_1 + (C + 3\gamma\sigma\bar{y}^2)x_1 + F(t) \end{cases}$$

En passant aux transformées de Laplace on aura:

$$\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}} = \frac{s\alpha + (C + 3\gamma\sigma_y^2)}{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)}$$

$$\bar{F}(s) = \left(m s^2 + \alpha s + C + 3\gamma\sigma_y^2 - \frac{(s\alpha + C + 3\gamma\sigma_y^2)^2}{m_1 s^2 + \alpha s + C + 3\gamma\sigma_y^2} \right) . \bar{X}$$

$$\frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}} = \frac{m m_1 s^4 + (m + m_1)\alpha s^3 + (m + m_1)(C + 3\gamma\sigma_y^2) s^2}{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\,\varphi(s)\,G(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

Calcul de $R(s)$

$$R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s) L_1(-s)$$

$$L_1(s) = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}} = \frac{\alpha s + 3\gamma\sigma_y^2 + C}{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)}$$

$$\Longrightarrow R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 \left(\frac{\alpha s + C + 3\gamma\sigma_y^2}{m_1 s^2 + \alpha s + C + 3\gamma\sigma_y^2} \right) \cdot \left(\frac{-\alpha s + C + 3\gamma\sigma_y^2}{m_1 s^2 - \alpha s + C\, 3\gamma\sigma_y^2} \right)$$

$$\Longrightarrow R(s)R(-s) = \frac{-\lambda\alpha^2 s^6 + [m_1^2 + \lambda(C + 3\gamma\sigma_y^2)^2] s^4 + [2m_1(C + 3\gamma\sigma_y^2) - \alpha^2] s^2}{[m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)][m_1 s^2 - \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)]} +$$

$$+ \frac{(C + 3\gamma\sigma_y^2)^2}{[m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)][m_1 s^2 - \alpha s + (C + 3\gamma\sigma_y^2)]}$$

Cette relation peut être ecrite sous la forme suivante:

$$R(s)\,R(-s)=\left(\frac{As^3+Bs^2+Ds+E}{m_1 s^2+\alpha s+C+3\gamma\sigma_y^2}\right)\times\left(\frac{-As^3+Bs^2-Ds+E}{m_1 s^2-\alpha s+C+3\gamma\sigma_y^2}\right)$$

Les coefficients A, B, D, E sont determines à partir du systeme d'equation suivant:

$$\begin{cases} A=\alpha\sqrt{\lambda} \\ E=C+3\gamma\sigma_y^2 \\ B^2-2\alpha\sqrt{\lambda}\,D=m_1^2+\lambda\left(C+3\gamma\sigma_y^2\right)^2 \\ 2B\left(C+3\gamma\sigma_y^2\right)-D^2=2m_1\left(C+3\gamma\sigma_y^2\right)-\alpha^2 \end{cases}$$

En resolvant ce systeme on aura:

$$R(s)=\frac{As^3+Bs^2+Ds+E}{m_1 s^2+\alpha s+(C+3\gamma\sigma_y^2}$$

Calcul de $G(s)$:

$$G(s)=\frac{\Delta^2}{L(s)};\quad L(s)=\frac{\overline{F}(s)}{\overline{X}}=\frac{\left[m m_1 s^2+(m+m_1)\alpha s+(m+m_1)(C+3\gamma\sigma_y^2)\right]s^2}{m_1 s^2+\alpha s+(C+3\gamma\sigma_y^2)}$$

En remplaçant ces termes dans $\phi(s)$ on aura :

$$\phi(s)=\frac{m m_1 s^2+(m+m_1)s\alpha+(m+m_1)(C+3\gamma\sigma_y^2)}{[As^3+Bs^2+Ds+E]\,\varphi(s)}\left[\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right]_+ \quad (1)$$

Determination des dispersions :

$$\left\{\begin{array}{l}
\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega \\[2ex]
\sigma^2_{x-x_0} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega \\[2ex]
\sigma^2_{x-x_1} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega
\end{array}\right.$$

Calcul de $H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}}$ et $H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}$

$$H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{\bar{X} - \bar{X}_1}{\bar{\ddot{X}}_0} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{\bar{X}}{\bar{X}_0} - \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_0}\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{\bar{X}}{\bar{X}_0} - \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{X}_0}\right]$$

$$H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{1}{s^2}\, H_{\frac{x}{x_0}} \left(1 - H_{\frac{x_1}{x}}\right)$$

Remarquons que :

$$\phi(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{\ddot{X}}_0(s)} = \frac{\bar{F}}{s^2\, \bar{X}_0} = \frac{\bar{X}\, L(s)}{s^2\, \bar{X}_0} = \frac{\bar{X}}{\bar{X}_0} \times \frac{L(s)}{s^2}$$

On a :

$$H_{\frac{x}{x_0}} = \frac{\bar{X}(s)}{\bar{X}_0(s)} = \frac{s^2}{L(s)}\, \phi(s) =$$

$$= \frac{(m_1 s^2 + \alpha s + C + 3\gamma\sigma_y^2)\, \phi(s)}{m\, m_1 s^2 + (m + m_1)\alpha s + (m + m_1)(C + 3\gamma\sigma_y^2)}$$

En remplaçant $\phi(s)$ par (1) on aura.

$$H_{\frac{x}{x_0}} = \frac{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \times \frac{1}{\varphi(s)} \times \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \qquad (2)$$

$$H_{\frac{x_1}{x}} = \frac{\bar{X}_1}{X} = \frac{\alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)}{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)} \qquad (3)$$

D'où l'on tire la relation:

$$H_{\frac{x-x_1}{x_0}} = \frac{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)}{s^2(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \times \frac{1}{\varphi(s)} \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \left[1 - \frac{\alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)}{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)}\right]$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{m_1 s^2 + \alpha s + (C + 3\gamma\sigma^2 y)}{s^2(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \times \frac{1}{\varphi(s)} \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \frac{m_1 s^2}{(m_1 s^2 + \alpha s + C + 3\gamma\sigma^2 y)}$$

En définitive on a :

$$\Longrightarrow H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{m_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \times \frac{1}{\varphi(s)} \times \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

De la même façon on tire:

$$H_{\frac{x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{\bar{X}_1}{s^2 X_0} = \frac{1}{s^2} H_{\frac{x_1}{x_0}} \quad ; \quad H_{\frac{x-x_0}{\bar{x}_0}} = \frac{\bar{x} - \bar{x}_0}{s^2 \bar{x}_0} = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}} - 1\right]$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x_1}{x_0}} = H_{\frac{x_1}{x}} \times H_{\frac{x}{x_0}} = \frac{(\alpha s + E)\, 1/\varphi(s)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{m_1 s^2 + \alpha s + E}{A s^3 + B s^2 + D s + E} \times \frac{1}{\varphi(s)} \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ - 1\right]$$

4.1.2 Cas où l'excitation est un bruit blanc :

Sa densité spectrale s'écrit :

$$S_{\ddot{x}_0}(S) = N^2 = S^4 S_0 \varphi(S)\varphi(-S)$$

On aura par identification

$$\begin{cases} S_0 = N^2 \\ \varphi(S) = \dfrac{1}{S^2} \end{cases} \qquad E = C + 3\gamma\sigma_y^2$$

$$\frac{\varphi(S)}{R(-S)} = \frac{m_1 S^2 - \alpha S + E}{S^2(-AS^3 + BS^2 - D + E)} = \underbrace{\frac{F}{S^2} + \frac{G}{S}}_{\left[\frac{\varphi(S)}{R(-S)}\right]_+} + \underbrace{\frac{HS^2 + JS + I}{-AS^3 + BS^2 - DS + E}}_{\left[\frac{\varphi(S)}{R(-S)}\right]_-}$$

$\left[\dfrac{\varphi(S)}{R(-S)}\right]_-$ possède des pôles dans le ½ plan de droite

$$F = \lim_{S \to 0}\left[\frac{m_1 S^2 - \alpha S + E}{-AS^3 + BS^2 -}\right] = \frac{E}{E} = 1$$

$$G = \frac{d}{dS}\left[\frac{m_1 S^2 - \alpha S + E}{-AS^3 + BS^2 + DS + E}\right]_{S=0} = \left[\frac{-\alpha E + ED}{E^2}\right] = \frac{(D-\alpha)}{E}$$

$$\left[\frac{\varphi(S)}{R(-S)}\right]_+ = \frac{1}{S^2} + \frac{(D-\alpha)}{ES} = \frac{(D-\alpha)S + E}{ES^2}$$

D'après la relation (1) on aura

D'apres la relation (1) on aura

$$\phi(s) = \frac{m m_1 (D-\alpha) s^3 + [m m_1 (C + 3\gamma\Gamma^2 y) + (m+m_1)(D-\alpha)\alpha] s^2}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) E} +$$

$$+ \frac{\{[(m+m_1)(D-\alpha)(C+3\gamma\Gamma^2 y)] + (m+m_1)\alpha\} s + (m+m_1)(C+3\gamma\Gamma^2 y) E}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) E}$$

Calcul des dispersions :

$$H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}} = H_{\frac{x_1}{x_0}} = H_{\frac{x_1}{x}} \; H_{\frac{x}{x_0}} = \frac{(\alpha s + E)\; 1/\varphi(s)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

$$H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{\alpha (D-\alpha) s^2 + E D s' + E^2}{A E s^3 + B E s^2 + D E s + E^2}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{N^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}} \right|^2 d\omega$$

D'apres les tables d'integrales on tire

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \frac{D\alpha^2 (D-\alpha)^2 - 2 A E^2 \alpha (D-\alpha) + A E^2 (D^2 + B E)}{2 A E^2 (B D - A E)}$$

$$H_{\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0}} = \frac{1}{s^2} \left[H_{\frac{x}{x_0}} - 1 \right] = \frac{[m_1 (D-\alpha) - A E] s^3 + [\alpha (D-\alpha) + m_1 E - B E] s^2}{s^2 [A s^3 + B s^2 + D s + E] E}$$

$$+ \frac{[\alpha E + E(D-\alpha) - D E] s}{s^2 [A s^3 + B s^2 + D s + E] E}$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x - x_0}{\ddot{x}_0}} = \frac{[m_1 (D-\alpha) - A E] s + [\alpha (D-\alpha) + m_1 E - B E]}{A E s^3 + B E s^2 + D E s + E^2}$$

D'apres les tables d'integrales on tire

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{N^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}} \right|^2 d\omega$$

$$\Longrightarrow \sigma^2_{x-x_0} = N^2 \frac{AE[m_1(D-\alpha)-AE]^2 + AB[m_1E+\alpha(D-\alpha)-BE]^2}{2AE^3(BD-AE)}$$

$$H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{m_1\, 1/\varphi(s)}{AS^3+BS^2+DS+E}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{m_1(D-\alpha)s+m_1E}{(AS^3+BS^2+DS+E)E}$$

$$\sigma^2_{x-x_1} = \frac{N^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left| H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} \right|^2 d\omega$$

D'apres les tables d'integrales :

$$E = c + 3\gamma\sigma^2_y \quad ; \quad \sigma^2_y = \sigma^2_{x-x_1}$$

$$\sigma^2_{x-x_1} = N^2 \frac{m_1^2(D-\alpha)^2 + Bm_1^2 E}{2E^2(BD-AE)}$$

4 13 Cas où l'excitation est :

$$S_{\ddot{x}_0} = 2\alpha_2 N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2+s^2)^2 + 4\alpha_2 s^2} = S_0 S^4 \varphi(s)\,\varphi(-s)$$

La densité peut être ecrite autrement sous la forme :

$$S_{\ddot{x}_0} = 2\alpha_2 N^2 \frac{s^4(\Omega+s)}{s^2(\Omega^2+2\sqrt{\alpha_2}s+\Omega^2)} \times \frac{(\Omega-s)}{s^2(s^2-2\sqrt{\alpha_2}s+\Omega^2)}$$

On aura alors

$$\varphi(s) = \frac{\mathcal{B} + s}{s^2(\mathcal{B}^2 + 2\sqrt{\alpha_2}\, s + s^2)}$$

d'où :
$$\frac{\varphi(s)}{R(-s)} = \frac{(\mathcal{B}+s)(m_1 s^2 - \alpha s + E)}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_2}\, s + \mathcal{B}^2)(-A s^3 + B s^2 - D s + E)}$$

$$\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\} = \underbrace{\frac{F}{s^2} + \frac{G}{s} \quad \frac{H s + I}{s^2 + 2\sqrt{\alpha_2}\, s + \mathcal{B}^2}}_{\left[\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right]_+} + \underbrace{\frac{J s^2 + K s + L}{-A s^3 + B s^2 - D s + E}}_{\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_-}$$

$$F = \lim_{s \to 0} \frac{(\mathcal{B}+s)(m_1 s^2 - \alpha s + E)}{(s^2 + 2\sqrt{\alpha}\, s + \mathcal{B}^2)(-A s^3 + B s^2 - D s + E)} = \frac{1}{\mathcal{B}}$$

$$G = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left\{ s^2 \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\} = \frac{D - \alpha}{\mathcal{B} E} + \frac{1}{\mathcal{B}^2} - \frac{2\sqrt{\alpha_2}}{\mathcal{B}^3}$$

$$\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\} = \frac{F}{s^2} + \frac{G}{s} + \frac{H^*}{s - s_1} + \frac{I^*}{s - s_2} + \frac{J s^2 + K s + L}{-A s^3 + B s^2 - D s + E}$$

Avec
$$H^* = \frac{(\mathcal{B} + s_1)(m_1 s_1^2 - \alpha s_1 + E)}{s_1^2 (s_1 - s_2)(-A s_1^3 + B s_1^2 - D s_1 + E)}$$

$$I^* = \frac{(\mathcal{B} + s_2)(m_1 s_2^2 - \alpha s_2 + E)}{s_2^2 (s_2 - s_1)(-A s_2^3 + B s_2^2 - D s_2 + E)}$$

$$s_1 = -\sqrt{\alpha_2} + j\sqrt{\mathcal{B}^2 - \alpha_2} \qquad s_2 = -\sqrt{\alpha_2} - j\sqrt{\mathcal{B}^2 - \alpha_2}$$

On montre que $(H^*, I^*) \in \mathbb{C}^2$

alors que $(H, I) \in \mathbb{R}^2$

En remarquant que :

$$H = H^* + I^*$$

$$I = (H^* + I^*)\sqrt{\alpha_2} + (H^* - I^*)\sqrt{\alpha_2 - \beta^2}$$

On peut tirer ainsi

$$\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ = \frac{F}{s^2} + \frac{G}{s} + \frac{Hs + I}{s^2 + 2\sqrt{\alpha}\, s + \beta^2}$$

$$\Longrightarrow \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ = \frac{N(s)}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha}\, s + \beta^2}$$

$$N(s) = (G + H)s^3 + [(F + 2\sqrt{\alpha_2}\, G + I]s^2 + (2\sqrt{\alpha_2}\, F + G\beta^2)s + F\beta^2$$

D'apres la relation ① on a:

$$\phi(s) \quad \frac{[m\, m_1 s^2 + (m + m_1)\alpha s + (m + m_1)E]\, N(s)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\beta + s)}$$

Calcul des dispersions

$$H_{\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_0}} = H_{\frac{x_1}{x_0}} = H_{\frac{x_1}{x}} \cdot H_{\frac{x}{x_0}} = \frac{\alpha s + E}{A s^3 + B s^2 + D s + E} \times \frac{1}{\varphi(s)} \times \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x_1}{x_0}} = \frac{(\alpha s + E)[(G + H)s^3 + (F + 2\sqrt{\alpha_2}\, G + I)s^2 + (2\sqrt{\alpha_2}\, F + G\beta^2)s + F\beta^2}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\beta + s)}$$

$$\Longrightarrow H_{\frac{x_1}{x_0}} = \alpha(G + H)s^4 + [\alpha(F + 2\sqrt{\alpha_2}\, G + I) + E(G + H)]s^3 + [\alpha(2\sqrt{\alpha_2}\, F + G\beta^2) + E(F + 2\sqrt{\alpha_2}\, G + I)]s^2 + s[E(2\sqrt{\alpha_2}\, F + G\beta^2) + \alpha F\beta^2] + EF\beta^2$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} \left|H\frac{x_1}{x_0}\right|^2 S\ddot{x}_0\, ds = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\left|H\frac{x_1}{x_0}\right|^2 \frac{\mathcal{B}^2 - s^2}{(\mathcal{B}^2+s^2)^2 - 4\alpha_2 s^2}\, ds$$

On remarque que :

$$|\mathcal{B}+s|^2 = \mathcal{B}^2 - s^2$$

$$|(s^2 + 2\sqrt{\alpha_2}\, s + \mathcal{B}^2)|^2 = (\mathcal{B}^2 + s^2)^2 - 4\alpha_2 s^2$$

d'où on aura l'expression suivante :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{N_1(s)}{D_1(s)}\right|^2 ds$$

Avec, $N_1(s) = N\frac{x_1}{x_0}$

$$D_1(s) = (As^3 + Bs^2 + Ds + E)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_2}\, s + \mathcal{B}^2)$$

$$D_1(s) = As^5 + [2A\sqrt{\alpha_2} + B]s^4 + [A\mathcal{B}^2 + 2B\sqrt{\alpha_2} + D]s^3 + [B\mathcal{B}^2 + 2D\sqrt{\alpha_2} + E]s^2 + [D\mathcal{B}^2 + 2E\sqrt{\alpha_2}]s + E\mathcal{B}^2$$

$$\Longrightarrow \sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\Delta_5}\left[C_4^2 m_0 + (C_3^2 - 2C_2C_4)m_1 + (C_2^2 - 2C_1C_3 + 2C_0C_4)m_2 + (C_1^2 - 2C_0C_2)m_3 + C_0^2 m_4\right]$$

où :

$$\begin{cases} m_0 = \frac{1}{d_5}(d_3 m_1 - d_1 m_2) \\ m_1 = -d_0 d_3 + d_1 d_2 \\ m_2 = -d_0 d_5 + d_1 d_4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} m_3 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_2 - d_4 m_1) \\ m_4 = \frac{1}{d_0}(d_2 m_3 - d_4 m_2) \\ \Delta_5 = d_0(d_1 m_4 - d_3 m_3 + d_5 m_2) \end{cases}$$

$$H_{\frac{x-x_0}{x_0}} = \frac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}} - 1\right] = \frac{1}{s^2}\left[\frac{m_1 s^2 + \alpha s + E}{A s^3 + B s^2 + D s + E} \times \frac{1}{\varphi(s)}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{s^2}\left[\frac{m_1 s^2 + \alpha s + E}{A s^3 + B s^2 + D s + E} \times \frac{N(s)}{(\omega + s)} - 1\right] = \frac{N_3(s)}{D_3(s)}$$

$$N_3(s) = m_1(G+H)s^3 + \left[m_1(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) + \alpha(G+H) - A\right]s^2$$
$$+ s^1\left[m_1(2F\sqrt{\alpha_2} + G\omega^2) + \alpha(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) - (A\omega + B) + E(G+H)\right]$$
$$+ \left[m_1 F\omega^2 + \alpha(F\sqrt{\alpha_2}\,2 + G\omega^2) + E(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) - (B\omega + D)\right]$$

$$D_3 = (A s^3 + B s^2 + D s + E)(\omega + s)$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(s^2 + 2\sqrt{\alpha_2}\,s + \omega^2)}\right|^2 ds$$

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{j\infty}^{j\infty}\left|\frac{N_3(s)}{D_5(s)}\right|^2 ds$$

$$D_1(s) = A s^5 + \left[B + 2A\sqrt{\alpha_2}\right]s^4 + \left[A\omega^2 + 2B\sqrt{\alpha_2} + D\right]s^3$$
$$+ \left[B\omega^2 + 2D\sqrt{\alpha_2} + E\right]s^2 + \left[D\omega^2 + 2E\sqrt{\alpha_2}\right]s + E\omega^2$$

D'apres les tables d'integrales on aura

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{2\alpha_2 N^2}{2 D_5}\left[C_3^2 m_1 + (C_2^2 - 2C_1C_3)m_2 + (C_1^2 - 2C_0C_3)m_3 + C_0^2 m_4\right]$$

$$\begin{cases} C_0 = \left[m_1 F\omega^2 + \alpha(2F\sqrt{\alpha_2} + G\omega^2) + E(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) - (B\omega + D)\right. \\ C_1 = m_1(2F\sqrt{\alpha_2} + G\omega^2) + \alpha(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) + E(G+H) - (A\omega + B) \\ C_2 = m_1(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) + \alpha(G+H) - A \\ C_3 = m_1(G+H) \end{cases}$$

les autres paramétres ont été défini auparavant.

$$C_0 = EF\mathcal{B}^2 \quad ; \quad d_0 = E\mathcal{B}^2$$

$$C_1 = \alpha F\mathcal{B}^2 + E(2\sqrt{\alpha_2}F + G\mathcal{B}^2) \quad ; \quad d_1 = D\mathcal{B}^2 + 2E\sqrt{\alpha_2}$$

$$C_2 = \alpha(2F\sqrt{\alpha_2} + G\mathcal{B}^2) + E(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) \quad ; \quad d_2 = B\mathcal{B}^2 + 2D\sqrt{\alpha_2} + E$$

$$C_3 = \alpha(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) + E(G + H) \quad ; \quad d_3 = A\mathcal{B}^2 + 2B\sqrt{\alpha_2} + D$$

$$C_4 = \alpha(G + H) \quad ; \quad d_4 = 2A\sqrt{\alpha_2} + B$$

$$d_5 = A$$

$$H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} = \frac{m_1}{As^3 + Bs^2 + Ds + E} \times \frac{1}{\Psi(s)} \times \left[\frac{\Psi(s)}{R(-s)}\right]_+ = \frac{m_1 N(s)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(\mathcal{B} + s)}$$

$$\sigma^2_{x-x_1} = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| H_{\frac{x-x_1}{\ddot{x}_0}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}\, ds = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \right|^2 ds$$

$$N_2(s) = m_1(G+H)s^3 + m_1(F + 2\sqrt{\alpha_2}G + I)s^2 + m_1(2F\sqrt{\alpha_2} + G\mathcal{B}^2)s + m_1 F\mathcal{B}^2$$

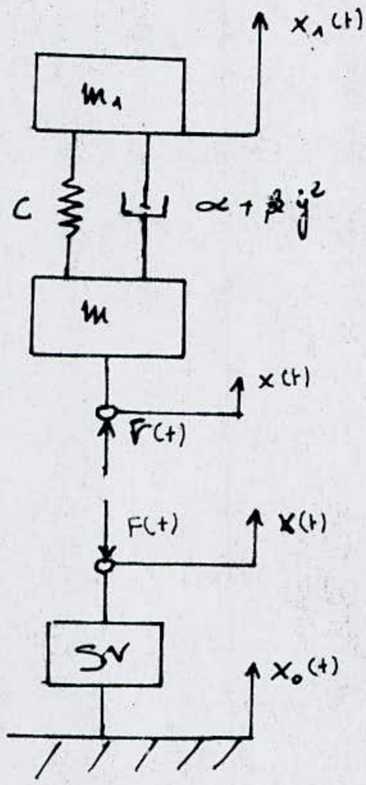
$$\sigma^2_{x-x_1} = \frac{2\alpha_2 N^2}{2D_5}\left[C_3^2 m_1 + (C_2^2 - 2C_1C_3)m_2 + (C_1^2 - 2C_0C_2)m_3 + C_0^2 m_4\right]$$

$$\begin{cases} C_0 = m_1 F\mathcal{B}^2 \\ C_1 = m_1(2F\sqrt{\alpha_2} + G\mathcal{B}^2) \\ C_2 = m_1(F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) \\ C_3 = m_1(G + H) \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \\ m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, D_5 \end{array}\right\}$ définis précédemment

4.2 Non linearité symetrique de l'amortisseur

4.2.1 Schema et relations



Les equations dynamiques s'ecrivent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = C y + \alpha \dot{y} + \beta \dot{y}^3 \\ m \ddot{x} = - C y - \alpha \dot{y} - \beta \dot{y}^3 + F(t) \end{cases}$$

La linearisation de $\dot{y}^3$ donne :

$$\dot{y}^3 = h_0 \langle \dot{y} \rangle + h_1 \dot{y}^0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} h_0 = 3\sigma_{\dot{y}}^2 + \langle \dot{y} \rangle^2 \\ h_1 = 3(\sigma_{\dot{y}}^2 + \langle \dot{y} \rangle^2) \end{cases}$$

$$\langle \dot{y} \rangle = M_y = M\{y\}$$

En tenant compte de la symetrie de la distribution des Forces et que l'on est dans le cas d'un systeme en equilibre stable on aura :

$$\dot{y}^3 = 3\,\sigma_{\dot{y}}^2\,\dot{y}$$

Les equation dynamiques deviennent :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -C\,(x_1 - x) - \alpha\,(\dot{x}_1 - \dot{x}) - 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2\,(\dot{x}_1 - \dot{x}) \\ m\,\ddot{x} = C\,(x_1 - x) + \alpha\,(\dot{x}_1 - \dot{x}) + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2\,(\dot{x}_1 - \dot{x}) + F(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,\dot{x}_1 + C x_1 = (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,\dot{x} + Cx \\ m\,\ddot{x} + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,\dot{x} + C\dot{x} = (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,\dot{x}_1 + C x_1 + F(t) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\bar{x}_1}{\bar{x}} = \dfrac{(\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,s + C}{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,s + C} \\[2ex] \dfrac{\bar{F}}{\bar{x}} = \dfrac{s^2\left[m\,m_1 s^2 + (m + m_1)(\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,s + (m + m_1)\,C\right]}{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,s + C} \end{cases}$$

La Fonction caracteristique

$$\phi(s) = \frac{1}{R(s)\;\varphi(s)\;G(s)} \left\{ \frac{Y(s)}{R(-s)} \right\}_+$$

On demontre comme precedement que :

$$R(s) = \frac{A s^3 + B s^2 + D s + E}{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\,s + C}$$

A, B. D. E Sont determines à partir du systeme d'eq. non lineaire

$$\begin{cases} A = \alpha\sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2(\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)\sqrt{\lambda}\,D = m_1^2 + \lambda C^2 \\ 2BC - D^2 = 2\,m_1 C - (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)^2 \\ E = C \end{cases}$$

et que : $G(s) = \frac{s^2}{L}$; $L(s) = \frac{\bar{F}}{\bar{x}} \Rightarrow G(s) = s^2\,\frac{\bar{x}}{\bar{F}}$

d'où l'on tire l'expression :

$$\phi(s) = \frac{m\,m_1 s^2 + (m+m_1)(\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + (m+m_1)C}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)\,\varphi(s)}\left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \quad (4)$$

Determination des Fonctions de transfert :

$$\phi(s) = \frac{\bar{F}}{\ddot{x}\,d(s)} = \frac{\bar{x}\,L(s)}{s^2\,\bar{\ddot{x}}_0} = \frac{\bar{x}}{x_0} \times \frac{L(s)}{s^2}$$

$$H\frac{x}{x_0} = \frac{\bar{x}}{\bar{x}_0} = \frac{s^2}{L(s)}\,\phi(s) = \frac{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}{m\,m_1 s^2 + (m+m_1)(\alpha + 3\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}\,\phi(s)$$

$$H\frac{x}{x_0} = \frac{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}{As^3 + Bs^2 + Ds + E} \times \frac{1}{\varphi(s)} \times \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

$$H\frac{x_1}{x} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}} = \frac{(\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}$$

$$H\frac{x_1 - x_0}{\ddot{x}_0} = \frac{x_1 - x_0}{\ddot{x}_0} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{m_1 s^2 + (\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}{As^3 + Bs^2 + Ds + E} \times \frac{1}{\varphi(s)} \times \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ - 1\right] \quad (5)$$

$$H\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0} = H\frac{x_1}{x_0} = H\frac{x_1}{x}\,H\frac{x}{x_0} = \frac{(\alpha + 3\beta\,\sigma_{\dot{y}}^2)s + C}{As^3 + Bs^2 + Ds + E} \times \frac{1}{\varphi(s)} \times \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \quad (6)$$

$$H\frac{\dot{x}-\dot{x}_1}{\ddot{x}_0}=\frac{\overline{\dot{x}-\dot{x}_1}}{\ddot{x}_0}=\frac{s}{s^2}\,H\frac{x}{x_0}\left[1-H\frac{x_1}{x}\right]=\frac{m_1 s}{A s^3+B s^2+D s+E}\times\frac{1}{\Psi(s)}\times\left\{\frac{\Psi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \quad (7)$$

4.2.2 Cas d'un bruit blanc

$$\Psi(s)=\frac{1}{s^2} \quad ; \quad S_0=N^2$$

$$\frac{\Psi(s)}{R(-s)}=\frac{m_1 s^2-(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})s+E}{s^2[-As^3+Bs^2-Ds+E}=\frac{F}{s^2}+\frac{G}{s}+\frac{Hs^2+Js+I}{As^3+Bs^2-Ds+E}$$

$$F=1 \quad ; \quad G=\frac{D-(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})}{E}$$

$$\Longrightarrow\left\{\frac{\Psi(s)}{R(-s)}\right\}_+=\frac{[D-(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})]s+E}{E s^2}$$

On aura la fonction caracteristique :

$$\phi(s)=\frac{m m_1[D-(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})]s^3+[m m_1 C+(m+m_1)(D-\alpha-3\beta\sigma^2\dot{y})(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})]s^2}{(As^3+Bs^2+Ds+E)E}$$

$$+\frac{[(m+m_1)DC]s+(m+m_1)CE}{(As^3+Bs^2+Ds+E)E}$$

Calcul des fonctions de transfert,

$$H\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}=\frac{(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})[D-(\alpha+3\beta\sigma^2\dot{y})]s^2+EDs+E^2}{AEs^3+BEs^2+DEs+E^2}$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1}=\frac{N^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}\right|^2 d\omega$$

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = N^2 \frac{\Delta(-\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)^2 [D-(\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)]^2}{2AE^2(BD-AE)}$$

$$-\frac{2AE^2(\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)[D-(\alpha+3\sigma_{\dot{y}}^2)]+AE^2(D^2+BE)}{2AE^2(BD-AE)}$$

$$H\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0} \frac{\{m_1[D-\alpha-3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)]-AE\}s^1+[(\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(D-\alpha-3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)+m_1E-BE]}{AEs^3+BEs^2+DEs+E^2}$$

Les tables d'integrales nous donne

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{AE[m_1(D-\alpha-3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)-AE]^2+AB[m_1E+(\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(D-\alpha-3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)-BE]^2}{2AE^3(BD-AE)}$$

$$H\frac{\dot{x}-\dot{x}_1}{\ddot{x}_0} = \frac{m_1[D-(\alpha+3\beta\sigma^2_{\dot{y}})]s^2+m_1Es'}{EAs^3+BEs^2+DEs+E^2}$$

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = N^2 m_1^2 \frac{D[D-(\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)]^2+AE^2}{2AE^2(BD-AE)}$$

4.2.3 Cas où l'excitation est:

$$S\ddot{x}_0 = 2\alpha_2 N^2 \frac{\omega^2-s^2}{(\omega^2+s^2)^2-4\alpha_2 s^2}$$

D'apres la relation (4) on à

$$\phi(s) = \frac{[m\,m_1 s^2+(m+m_1)(\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)s+(m+m_1)c]\,N(s)}{(As^3+BS^2+Ds+E)(\omega+s)}$$

Calcul des dispersions:

D'apres la relation (6) on a :

$$H\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0} = \frac{[(\alpha+3\beta\sigma_y^2)s+C]N(s)}{(As^3+Bs^2+Ds+E)(\mathcal{B}+s)} = \frac{N_4(s)}{(As^3+Bs^2+Ds+E)(\mathcal{B}+s)}$$

$$\begin{aligned} N_4(s) = {} & (\alpha+3\beta\sigma_y^2)(G+H)s^4 + s^3[(\alpha+3\beta\sigma_y^2)(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I)+C(G+H)] \\ & + s^2[(\alpha+3\beta\sigma_y^2)(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2)+C(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I)] \\ & + s[(\alpha+3\beta\sigma_y^2)F\mathcal{B}^2+C(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2)] + CF\mathcal{B}^2 \end{aligned}$$

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{N_4(s)}{D_1(s)}\right|^2 ds$$

$D_1(s)$ a été defini precedement

D'apres les tables d'integrales on a

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{2\alpha_2 N^2}{2D_5}\Big[C_4^2 m_0 + (C_3^2-2C_2C_4)m_1 + (C_2^2-2C_1C_3+2C_0C_4)m_2 + (C_1^2-2C_0C_2)m_3 + C_0^2 m_4\Big]$$

$$C_0 = CF\mathcal{B}^2$$

$$C_1 = (\alpha+3\beta\sigma_y^2)F\mathcal{B}^2 + C(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2)$$

$$C_2 = (\alpha+3\beta\sigma_y^2)(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2) + C(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I)$$

$$C_3 = (\alpha+3\beta\sigma_y^2)(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) + C(G+H)$$

$$C_4 = (\alpha+3\beta\sigma_y^2)(G+H)$$

$$\left.\begin{matrix} m_0,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ D_5 \\ d_0,\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5 \end{matrix}\right\}$$ Ont été defini precedement

D'apres la relation (5)

$$H\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0} = \frac{1}{s^2}\left[\frac{m_1s^2+(\alpha+3\beta\sigma_y^2)s+C}{As^3+Bs^2+Ds+E}\times\frac{N(s)}{(\mathcal{B}+s)} - 1\right] = \frac{N_3(s)}{D_3(s)}$$

$$N_3(s) = m_1(G+H)s^3 + \left[m_1(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) + (\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(G+H) - A\right]s^2$$
$$+ \left[m_1(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2) + (\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) - (A\mathcal{B}+B)\right.$$
$$\left. + C(G+H)\right]s + \left[m_1 F\mathcal{B}^2 + (\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2) + \right.$$
$$\left. + C(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) - (B\mathcal{B}+D)\right]$$

$$\Longrightarrow \sigma_{x-x_0}^2 = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{N_3(s)}{D_1(s)}\right|^2 ds.$$

Les tables d'integrales nous donne :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{2\alpha_2 N^2}{2D_5}\left[C_3^2 m_1 + (C_2^2 - 2C_1C_3)m_2 + (C_1^2 - 2C_0C_2)m_3 + C_0^4 m_4\right]$$

$$C_0 = m_1F\mathcal{B}^2 + (\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2) + C(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) - (B\mathcal{B}+D)$$
$$C_1 = m_1(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2) + (\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) - (A\mathcal{B}+B) + C(G+H)$$
$$C_2 = m_1(F+2G\sqrt{\alpha_2}+I) + (\alpha+3\beta\sigma_{\dot{y}}^2)(G+H) - A$$
$$C_3 = m_1(G+H)$$

$d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$; $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, D_5$ } Ont été determinés precedement.

D'apres la relation ⑦ on a :

$$H\frac{\dot{y}}{\ddot{x}_0} = \frac{m_1 s \quad N(s)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(\mathcal{B}+s)} = \frac{N_4(s)}{D_3(s)}$$

$$N_4(s) = m_1(G+H)s^4 + m_1\left[F+2G\sqrt{\alpha_2}+I\right]s^3 + m_1(2F\sqrt{\alpha_2}+G\mathcal{B}^2)s^2 + F\mathcal{B}^2 s m_1$$

$$\Longrightarrow \sigma_{\dot{y}}^2 = \frac{2\alpha_2 N^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left|\frac{N_4(s)}{D_1(s)}\right| ds$$

Les tables d'integrales nous donne

$$\sigma_{\dot{y}}^2 = \frac{2\alpha_2 N^2}{2 D_5}\left[C_4^2 m_0 + (C_3^2 - C_2 C_4^2) m_1 + (C_2^2 - 2 C_1 C_3) m_2 + C_1^2 m_3\right]$$

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = m_1 F \mathcal{B}^2 \\ C_2 = m_1 (2F\sqrt{\alpha_2} + G\mathcal{B}^2) \\ C_3 = m_1 (F + 2G\sqrt{\alpha_2} + I) \\ C_4 = m_1 (G + H) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 \\ m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, D_5 \end{matrix}\right\} \text{ defini precedement.}$$

APPENDIX :

Nous avons choisi pour la resolution du système d'équations N.L aux inconnues A, B, D et E la methode de Gauss-Seidel où l'on a élaboré un programme en FORTRAN "Microsoft" simple precision sur olivetti M24 du centre de calcul de l'ENP. les graphes ont été tracés sur le même micro-ordinateur avec des programmes en basic. Tous les programmes ont été stocké sur disquette portant le nº 66. L'algorithme de la methode de G.S existe sur le livre de Mrs:

M. BOUMAHRAT et A. GOURDIN "METHODES Numeriques appliquées"

NOTATIONS et DONNEES utilisées dans les programmes:

$\alpha = A1 = 141.688$ kg/s ; $m_1 = W1 = 80.862$ kg ; $C = C1 = 7961.05$ kg/s²

$\lambda = P = R/R-1$; $\gamma = G1$; $\Omega = Q = 1.52792\ s^{-1}$

$\alpha_2 = A2 = 0.083774\ s^{-1}$; $F \equiv G$; $G \equiv H$

$Z0 = \sigma_{x-x_0} / \lambda\sigma_{\ddot{x}_0}$; $Z1 = \sigma_{\ddot{x}_1}$ pour un bruit blanc

$Z3 = \sigma_{x-x_0} / \lambda\sigma_{\ddot{x}_0}$; $Z6 = \sigma_{\ddot{x}_1}$ pour le bruit couleur

FORMULES DE RECURENCES $n \in \mathbb{N}^*$, $m \neq -1$

$$I_n = \int_0^1 x^m (\log x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$$

$$\overline{N^{2m}} = \langle N^{2m} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n} \int_0^\infty N^{2m} e^{-\frac{N^2}{2\sigma_n^2}} dN = (2m-1)!!\,\sigma_n^{2m}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \ ; \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha) = \alpha!$$

```
      ***DENCITE SPCTRALE=N**2=CONSTANTE***
C     *****PROGRAMME DE CALCUL DES DISPERSIONS****
C          **Z1=Dispersion de l'acceleration**
C          **Z0=(Dispersion de l'ecart)/P**
C Calcul de (A,B,D,E) par la methode de GAUSS-SEIDEL
      DIMENSION V(9),W(9),X(9),Y(9),Z(9)
      DATA V /.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9/
      DATA W /47.22,65.,90.,112.5,135.,167.5,210.,270.,405./
      DATA X /2653.06,4081.6,5306.12,6632.6,7959.18,9693.9,
     *12448.9,16734.7,24898./
      DATA Y /8200.,9800.,10800.,11900.,13000.,14200.,15700.,
     *17700.,21350./
      DATA Z /7961.05,7961.05,7961.05,7961.05,7961.05,7961.05,
     *7961.05,7961.05,7961.05/
      EPS=1.E-9
      A1=141.688
      W1=80.862
      C1=7961.05
      G1=3.E6
      WRITE(*,*)CHAR(27),'[2J',CHAR(27),'[1;1H'
C ESTIMES INITIAUX I,A,B,D,E
      DO 30 J=1,9
      R=V(J)
      I=0
      A=W(J)
      B=X(J)
      D=Y(J)
      E=Z(J)
      WRITE(*,*)'====================R=',R,'===================='
      WRITE(*,200)
      WRITE(*,201)I,A,B,D,E
      P=R/(1-R)
      DO 10 I=1,10,1
      AL=A
      A=SQRT(P)*A1
      B=(D**2+2*W1*E-A1**2)/(2*E)
      D=(B**2-P*(E**2)-W1**2)/(2*A1*SQRT(P))
      T10=(((D-A1)**2)+B*E)*3*G1*(W1**2)
      T20=2*(E**2)*(B*D-A*E)
      E=(T10/T20)+C1
      WRITE(*,201)I,A,B,D,E
      IF(ABS(AL-A).LT.EPS) GOTO 20
10    CONTINUE
20    CONTINUE
200   FORMAT('I',11X,'A',13X,'B',13X,'D',13X,'E')
```

```
201     FORMAT(I2,4E15.7)
        T2=((W1*(D-A1)-A*E)**2)*A*E
        T3=((W1*E+A1*(D-A1)-B*E)**2)*A*B
        D1=2.*A*(B*D-A*E)*(E**3)
        Z0=(T2+T3)/(P*D1)
        T5=((D-A1)**2)*(A1**2)*D-2.*A*A1*(D-A1)*(E**2)
        T6=A*(E**2)*(D**2+B*E)
        D2=2.*A*(B*D-A*E)*(E**2)
        Z1=(T5+T6)/D2
        WRITE(*,202)
        WRITE(*,203)Z0,Z1
202     FORMAT(17X,'Z0=',25X,'Z1=')
203     FORMAT(10X,E14.7,15X,E14.7)
 30     CONTINUE
        END
```

C>==

DENCITE SPECTRALE=N**2=CONSTANTE

*****RESULTATS DU CALCUL DES DISPERSIONS*****

Z1=Dispersion de l'acceleration

Z0=(Dispersion de l'ecart)/P

=====================R= 1.000000E-001======================

I	A	B	D	E
0	.4722000E+02	.2653060E+04	.8200000E+04	.7961050E+04
1	.4722934E+02	.4302662E+04	.1213687E+06	.2106613E+05
2	.4722934E+02	.3497025E+06	.1294137E+10	.2533266E+06

Z0= .3618419E-02 Z1= .1771113E+05

=====================R= 2.000000E-001======================

I	A	B	D	E
0	.6500000E+02	.4081600E+04	.9800000E+04	.7961050E+04
1	.7084400E+02	.6111469E+04	.1517343E+06	.1949745E+05
2	.7084400E+02	.5904988E+06	.2460292E+10	.3304488E+06

Z0= .1029614E-02 Z1= .1538406E+05

=====================R= 3.000000E-001======================

I	A	B	D	E
0	.9000000E+02	.5306120E+04	.1080000E+05	.7961050E+04
1	.9275657E+02	.7405268E+04	.1491502E+06	.1732503E+05
2	.9275657E+02	.6420933E+06	.2221703E+10	.3471498E+06

Z0= .3249858E-03 Z1= .8632945E+04

=====================R= 4.000000E-001======================

I	A	B	D	E
0	.1125000E+03	.6632600E+04	.1190000E+05	.7961050E+04
1	.1156878E+03	.8973528E+04	.1653825E+06	.1653038E+05
2	.1156878E+03	.8273861E+06	.2957900E+10	.3929168E+06

Z0= .1504798E-03 Z1= .7730499E+04

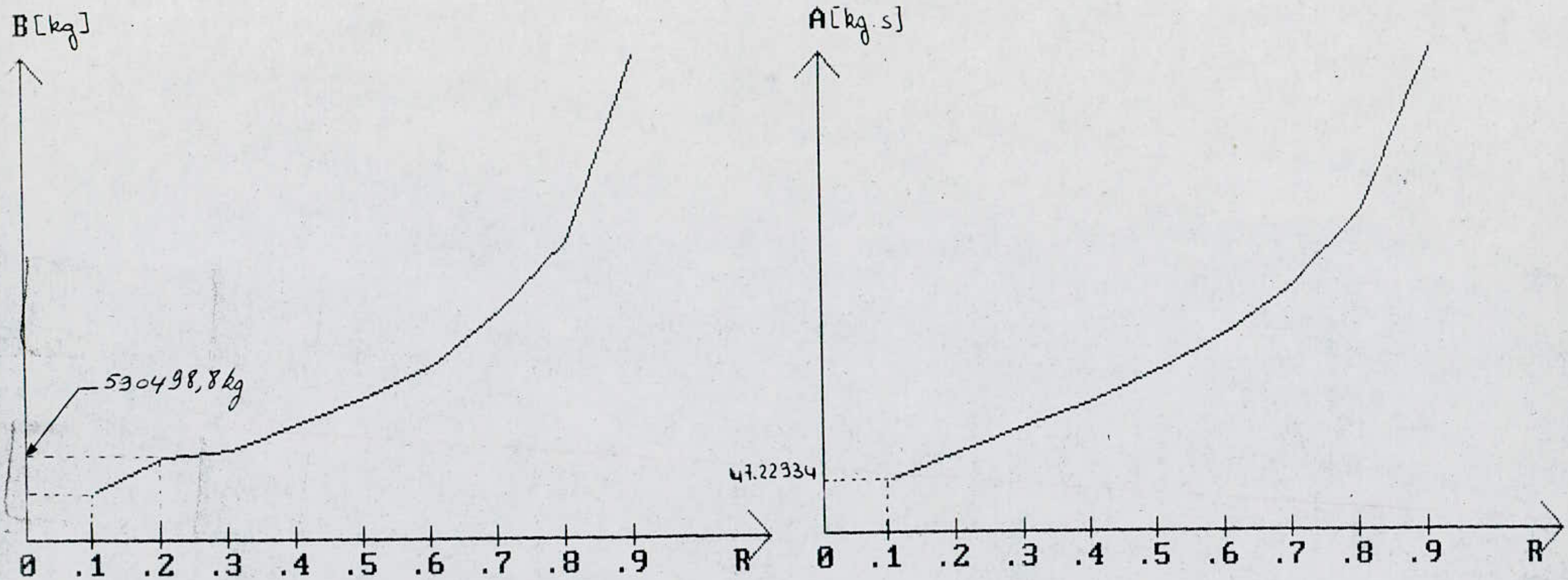
=====================R= 5.000000E-001======================

I	A	B	D	E
0	.1350000E+03	.7959180E+04	.1300000E+05	.7961050E+04
1	.1416880E+03	.1069378E+05	.1798743E+06	.1578295E+05
2	.1416880E+03	.1025072E+07	.3707168E+10	.4351435E+06

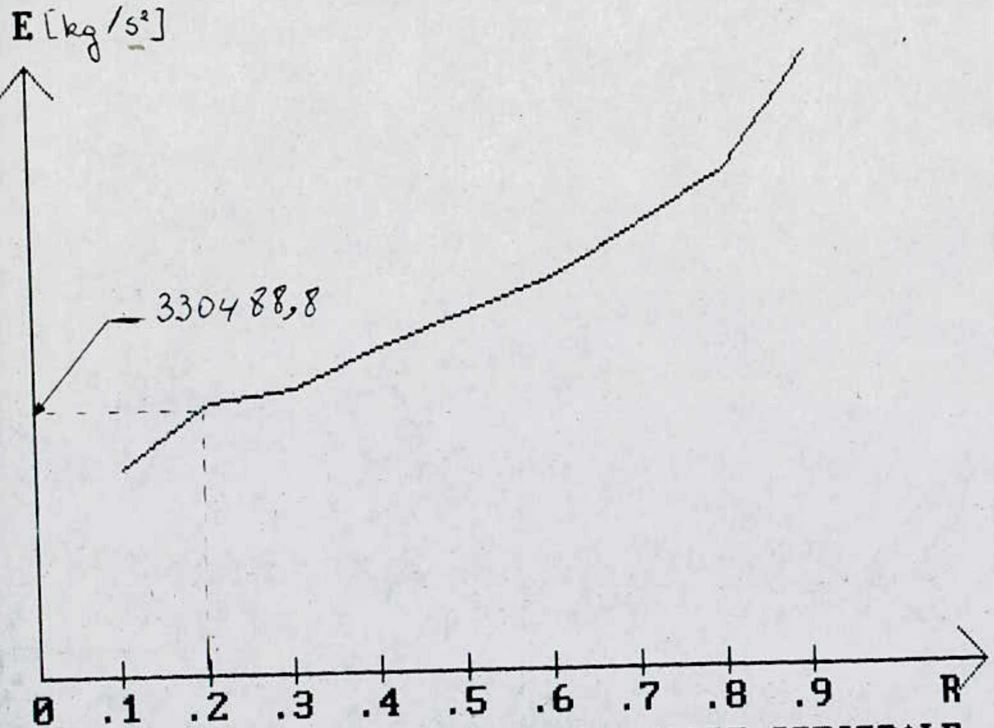
Z0= .7269612E-04 Z1= .6824374E+04

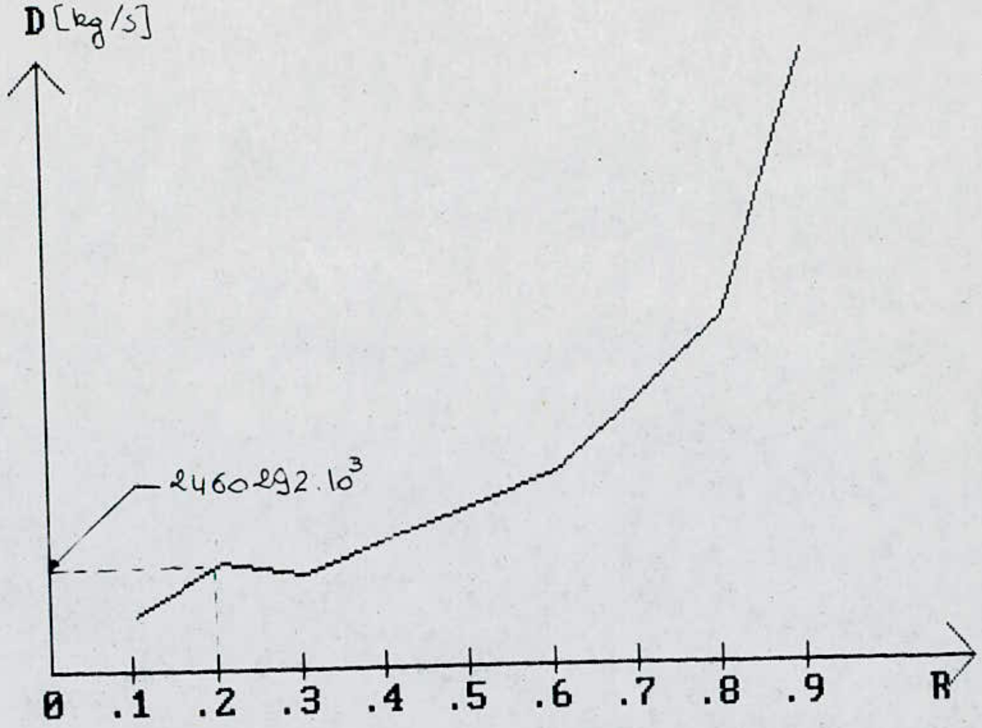
```
=====================R=  6.000000E-001=====================
I          A              B              D              E
0    .1675000E+03    .9693900E+04    .1420000E+05    .7961050E+04
1    .1735317E+03    .1274376E+05    .1939974E+06    .1504113E+05
2    .1735317E+03    .1251150E+07    .4509369E+10    .4767172E+06
              Z0=                                  Z1=
         .3578401E-04                        .5938829E+04
=====================R=  7.000000E-001=====================
I          A              B              D              E
0    .2100000E+03    .1244890E+05    .1570000E+05    .7961050E+04
1    .2164320E+03    .1556060E+05    .2177196E+06    .1446868E+05
2    .2164320E+03    .1638165E+07    .6198475E+10    .5397889E+06
              Z0=                                  Z1=
         .1819475E-04                        .5625075E+04
=====================R=  8.000000E-001=====================
I          A              B              D              E
0    .2700000E+03    .1673470E+05    .1770000E+05    .7961050E+04
1    .2833760E+03    .1975603E+05    .2413414E+06    .1364383E+05
2    .2833760E+03    .2134586E+07    .8038281E+10    .6031822E+06
              Z0=                                  Z1=
         .1001922E-04                        .4829925E+04
=====================R=  9.000000E-001=====================
I          A              B              D              E
0    .4050000E+03    .2489800E+05    .2135000E+05    .7961050E+04
1    .4250640E+03    .2870789E+05    .2984632E+06    .1279746E+05
2    .4250640E+03    .3480468E+07    .1424748E+11    .7434131E+06
              Z0=                                  Z1=
         .5758308E-05                        .4538846E+04
===========================================================

C>
C>
```

```
10 REM=====PROGRAMME DU TRACE DES COURBES =====
20 REM====DENCITE SPECTRALE=N**2=CONSTANTE=====
30 SCREEN 3:CLS
40 DIM A(9,6),A$(6)
50 A$(1)="A":A$(2)="B":A$(3)="D"
60 A$(4)="E":A$(5)="Z0":A$(6)="Z1"
70 OPEN "A:E.DAT" FOR INPUT AS 1
80 FOR J=1 TO 6
90 AM(J)=0
100 FOR I=1 TO 9
110 INPUT #1,A(I,J):A=A(I,J)
120 IF A< AM(J) THEN  130 ELSE AM(J)=A
130 PRINT A(I,J);",";
140 NEXT
150 PSET (100,300)
160 DRAW "U200G10E10F10H10D200R350H10F10G10E10"
170 FOR X=30 TO 300 STEP 32:PSET(100+X,305):DRAW"U10":NEXT X
180 LOCATE 20,13:PRINT"0   .1   .2   .3   .4   .5   .6   .7   .8   .9"
190 LOCATE 19,60:PRINT"R"
200 LOCATE 6,13:PRINT A$(J)
210 FOR I=2 TO 9 :X1=32*(I-1)+100:Y1=300-A(I-1,J)*200/AM(J)
220 X2=32*(I)+100:Y2=300-A(I,J)*200/AM(J)
230 LINE(X1,Y1)-(X2,Y2):NEXT
240 LOCATE 23,20:PRINT"TAPEZ SU LA BARRE D'ESPACE";
250 IF INKEY$<>" " THEN 250 ELSE CLS
260 NEXT
270 CLOSE
```

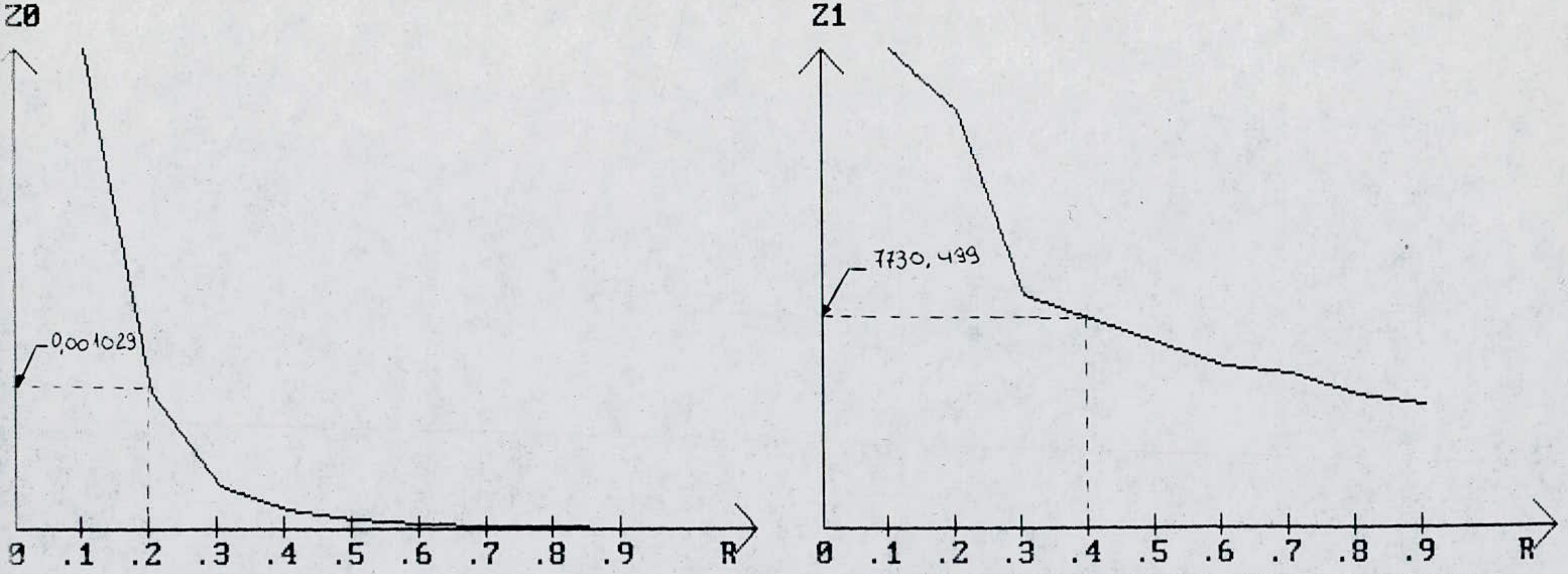


TRACE DE A,B POUR UNE DESITE SPECTRALE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTE

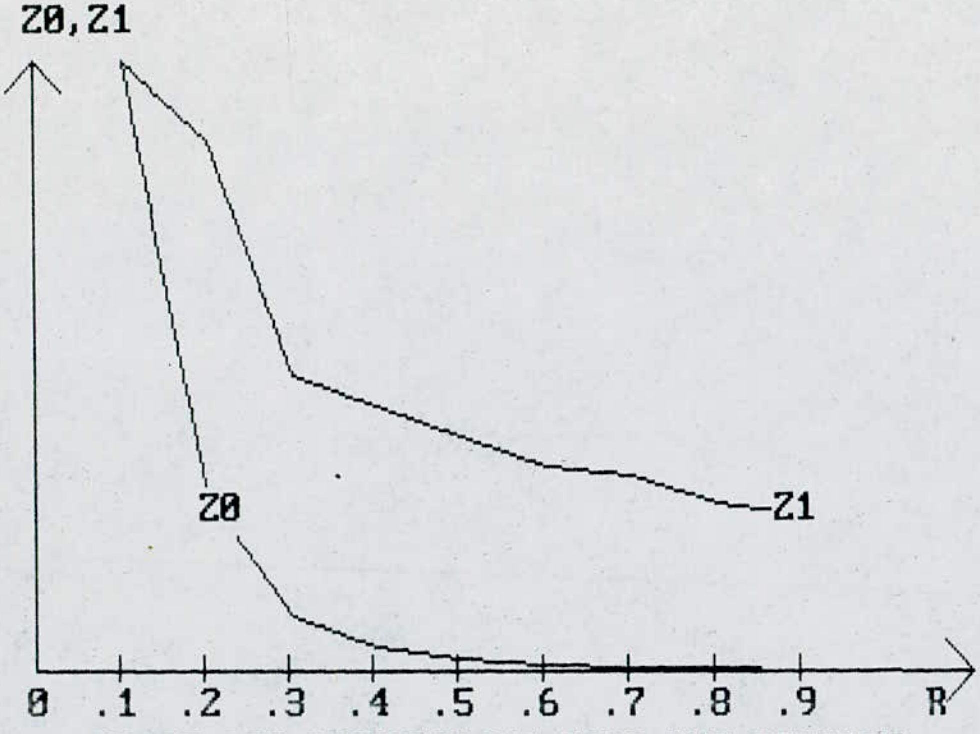




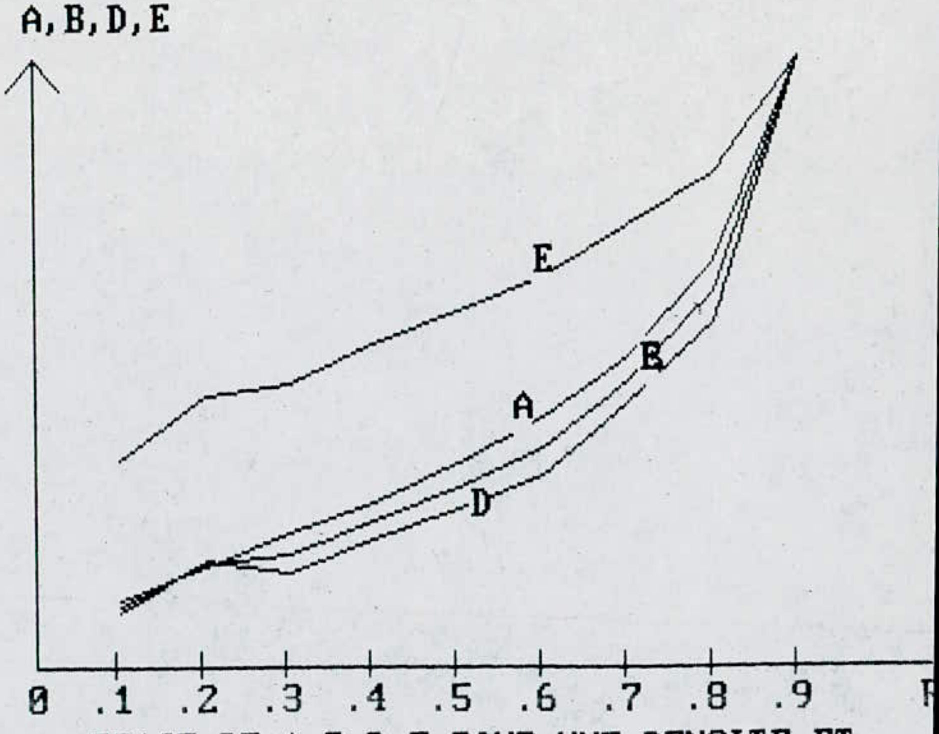
TRACE DE D,E POUR UNE DENSITE SPECTRALE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTES



TRACE DES DISPERSIONS POUR UNE DENSITE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTES



TRACE DES DISPERSIONS POUR UNE DENSITE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTES



TRACE DE A,B,D,E POUR UNE DENSITE ET
VALEUR DE G1 CONSTANTES

```
C               ***DENSITE SPCTRALE=N**2=CONSTANTE***
C           *****PROGRAMME DE CALCUL DES DISPERSIONS****
C                **POUR DIFFERENTES VALEURS DE G1**
C                **Zf=Dispersion de l'acceleration**
C                  **Z0=(Dispersion de l'ecart)/P**
C Calcul de (A,B,D,E) par la methode de GAUSS-SEIDEL
      DIMENSION V(9),W(9),X(9),Y(9),Z(9),V1(4)
      DATA V /.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9/
      DATA W /47.22,65.,90.,112.5,135.,167.5,210.,270.,405./
      DATA X /2653.06,4081.6,5306.12,6632.6,7959.18,9693.9,
     *12448.9,16734.7,24898./
      DATA Y /8200.,9800.,10800.,11900.,13000.,14200.,15700.,
     *17700.,21350./
      DATA Z /7961.05,7961.05,7961.05,7961.05,7961.05,7961.05,
     *7961.05,7961.05,7961.05/
      DATA V1 /0.,3.E5,3.E6,3.E7/
      EPS=1.E-9
      A1=141.688
      W1=80.862
      C1=7961.05
      WRITE(*,*)CHAR(27),'[2J',CHAR(27),'[1;1H'
C ESTIMES INITIAUX I,A,B,D,E
      DO 40 K=1,4
      G1=V1(K)
      DO 30 J=1,9
      R=V(J)
      I=0
      A=W(J)
      B=X(J)
      D=Y(J)
      E=Z(J)
      WRITE(*,*)'===================R=',R,'=================='
      WRITE(*,200)
      WRITE(*,201)I,A,B,D,E
      P=R/(1-R)
      DO 10 I=1,10,1
      AL=A
      A=SQRT(P)*A1
      B=(D**2+2*W1*E-A1**2)/(2*E)
      D=(B**2-P*(E**2)-W1**2)/(2*A1*SQRT(P))
      T10=(((D-A1)**2)+B*E)*3*G1*(W1**2)
      T20=2*(E**2)*(B*D-A*E)
      E=(T10/T20)+C1
      WRITE(*,201)I,A,B,D,E
```

```
      IF(ABS(AL-A).LT.EPS) GOTO 20
10    CONTINUE
20    CONTINUE
200   FORMAT('I',11X,'A',13X,'B',13X,'D',13X,'E')
201   FORMAT(I2,4E15.7)
      T2=((W1*(D-A1)-A*E)**2)*A*E
      T3=((W1*E+A1*(D-A1)-B*E)**2)*A*B
      D1=2.*A*(B*D-A*E)*(E**3)
      Z0=(T2+T3)/(P*D1)
      T5=((D-A1)**2)*(A1**2)*D-2.*A*A1*(D-A1)*(E**2)
      T6=A*(E**2)*(D**2+B*E)
      D2=2.*A*(B*D-A*E)*(E**2)
      Z1=(T5+T6)/D2
      WRITE(*,202)
      WRITE(*,203)Z0,Z1
202   FORMAT(17X,'Z0=',25X,'Z1=')
203   FORMAT(10X,E14.7,15X,E14.7)
 30   CONTINUE
 40   CONTINUE
      END
```

```
=====================================================================
      **DENSITE SPECTRALE=N*N=CONSTANTE**
    ***RESULTATS DU CALCUL DES DISPERSIONS***
       **POUR DIFFERENTES VALEURS DE G1**
       **Z1=Dispersion de l'acceleration**
         **Z0=(Dispersion de l'ecart)/p**
    **G1=0**
=====================R=  1.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .4722000E+02    .2653060E+04    .8200000E+04    .7961050E+04
1  .4722934E+02    .4302662E+04    .1213687E+06    .7961050E+04
2  .4722934E+02    .9252319E+06    .9062663E+10    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .1608631E+04                     .2976815E+09
=====================R=  2.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .6500000E+02    .4081600E+04    .9800000E+04    .7961050E+04
1  .7084400E+02    .6111469E+04    .1517343E+06    .7961050E+04
2  .7084400E+02    .1446077E+07    .1475864E+11    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .1163652E+04                     .3367444E+09
=====================R=  3.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .9000000E+02    .5306120E+04    .1080000E+05    .7961050E+04
1  .9275657E+02    .7405268E+04    .1491502E+06    .7961050E+04
2  .9275657E+02    .1397244E+07    .1052358E+11    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .4821465E+03                     .1353374E+09
=====================R=  4.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .1125000E+03    .6632600E+04    .1190000E+05    .7961050E+04
1  .1156878E+03    .8973528E+04    .1653825E+06    .7961050E+04
2  .1156878E+03    .1717903E+07    .1275480E+11    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .3754545E+03                     .1296490E+09
=====================R=  5.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .1350000E+03    .7959180E+04    .1300000E+05    .7961050E+04
1  .1416880E+03    .1069378E+05    .1798743E+06    .7961050E+04
2  .1416880E+03    .2032146E+07    .1457270E+11    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .2857562E+03                     .1168156E+09
=====================R=  6.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .1675000E+03    .9693900E+04    .1420000E+05    .7961050E+04
1  .1735317E+03    .1274376E+05    .1939974E+06    .7961050E+04
2  .1735317E+03    .2363776E+07    .1609891E+11    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .2102418E+03                     .1000733E+09
=====================R=  7.000000E-001=====================
        A               B               D               E
0  .2100000E+03    .1244890E+05    .1570000E+05    .7961050E+04
1  .2164320E+03    .1556060E+05    .2177196E+06    .7961050E+04
2  .2164320E+03    .2977190E+07    .2047643E+11    .7961050E+04
               Z0=                              Z1=
          .1718946E+03                     .1030601E+09
=====================================================================
```

====================R= 8.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.2700000E+03	.1673470E+05	.1770000E+05	.7961050E+04
1	.2833760E+03	.1975603E+05	.2413414E+06	.7961050E+04
2	.2833760E+03	.3658245E+07	.2361262E+11	.7961050E+04

Z0= .1154858E+03 Z1= .8518529E+08

====================R= 9.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.4050000E+03	.2489800E+05	.2135000E+05	.7961050E+04
1	.4250640E+03	.2870789E+05	.2984632E+06	.7961050E+04
2	.4250640E+03	.5594836E+07	.3681989E+11	.7961050E+04

Z0= .8004281E+02 Z1= .9028894E+08

==

G1=3E5

====================R= 1.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.4722000E+02	.2653060E+04	.8200000E+04	.7961050E+04
1	.4722934E+02	.4302662E+04	.1213687E+06	.9271558E+04
2	.4722934E+02	.7944646E+06	.6681910E+10	.2958481E+06

Z0= .1600181E-01 Z1= .1406678E+06

====================R= 2.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.6500000E+02	.4081600E+04	.9800000E+04	.7961050E+04
1	.7084400E+02	.6111469E+04	.1517343E+06	.9114690E+04
2	.7084400E+02	.1263058E+07	.1125921E+11	.3236811E+06

Z0= .8486575E-02 Z1= .1401918E+06

====================R= 3.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.9000000E+02	.5306120E+04	.1080000E+05	.7961050E+04
1	.9275657E+02	.7405268E+04	.1491502E+06	.8897447E+04
2	.9275657E+02	.1250201E+07	.8425115E+10	.2584373E+06

Z0= .6851033E-02 Z1= .9536212E+05

====================R= 4.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.1125000E+03	.6632600E+04	.1190000E+05	.7961050E+04
1	.1156878E+03	.8973528E+04	.1653825E+06	.8817983E+04
2	.1156878E+03	.1550965E+07	.1039626E+11	.2616129E+06

Z0= .5069859E-02 Z1= .9169669E+05

====================R= 5.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.1350000E+03	.7959180E+04	.1300000E+05	.7961050E+04
1	.1416880E+03	.1069378E+05	.1798743E+06	.8743239E+04
2	.1416880E+03	.1850353E+07	.1208193E+11	.2592877E+06

Z0= .3921529E-02 Z1= .8639468E+05

====================R= 6.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.1675000E+03	.9693900E+04	.1420000E+05	.7961050E+04
1	.1735317E+03	.1274376E+05	.1939974E+06	.8669058E+04
2	.1735317E+03	.2170731E+07	.1357666E+11	.2528362E+06

Z0= .3084450E-02 Z1= .7996220E+05

==

```
====================R=  7.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .2100000E+03    .1244890E+05    .1570000E+05    .7961050E+04
1   .2164320E+03    .1556060E+05    .2177196E+06    .8611813E+04
2   .2164320E+03    .2752221E+07    .1749867E+11    .2602128E+06
              Z0=                            Z1=
        .2292334E-02                    .7938415E+05
====================R=  8.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .2700000E+03    .1673470E+05    .1770000E+05    .7961050E+04
1   .2833760E+03    .1975603E+05    .2413414E+06    .8529328E+04
2   .2833760E+03    .3414515E+07    .2057094E+11    .2516282E+06
              Z0=                            Z1=
        .1689179E-02                    .7234428E+05
====================R=  9.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .4050000E+03    .2489800E+05    .2135000E+05    .7961050E+04
1   .4250640E+03    .2870789E+05    .2984632E+06    .8444690E+04
2   .4250640E+03    .5274415E+07    .3272309E+11    .2639457E+06
              Z0=                            Z1=
        .1004153E-02                    .7191766E+05
==========================================================
    **G1=3E6
====================R=  1.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .4722000E+02    .2653060E+04    .8200000E+04    .7961050E+04
1   .4722934E+02    .4302662E+04    .1213687E+06    .2106613E+05
2   .4722934E+02    .3497025E+06    .1294137E+10    .2533266E+06
              Z0=                            Z1=
        .3618419E-02                    .1771113E+05
====================R=  2.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .6500000E+02    .4081600E+04    .9800000E+04    .7961050E+04
1   .7084400E+02    .6111469E+04    .1517343E+06    .1949745E+05
2   .7084400E+02    .5904988E+06    .2460292E+10    .3304488E+06
              Z0=                            Z1=
        .1029614E-02                    .1538406E+05
====================R=  3.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .9000000E+02    .5306120E+04    .1080000E+05    .7961050E+04
1   .9275657E+02    .7405268E+04    .1491502E+06    .1732503E+05
2   .9275657E+02    .6420933E+06    .2221703E+10    .3471498E+06
              Z0=                            Z1=
        .3249858E-03                    .8632945E+04
====================R=  4.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .1125000E+03    .6632600E+04    .1190000E+05    .7961050E+04
1   .1156878E+03    .8973528E+04    .1653825E+06    .1653038E+05
2   .1156878E+03    .8273861E+06    .2957900E+10    .3929168E+06
              Z0=                            Z1=
        .1504798E-03                    .7730499E+04
====================R=  5.000000E-001====================
        A               B               D               E
0   .1350000E+03    .7959180E+04    .1300000E+05    .7961050E+04
1   .1416880E+03    .1069378E+05    .1798743E+06    .1578295E+05
2   .1416880E+03    .1025072E+07    .3707168E+10    .4351435E+06
              Z0=                            Z1=
        .7269612E-04                    .6824374E+04
==========================================================
```

```
===================R=  6.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .1675000E+03   .9693900E+04   .1420000E+05   .7961050E+04
1   .1735317E+03   .1274376E+05   .1939974E+06   .1504113E+05
2   .1735317E+03   .1251150E+07   .4509369E+10   .4767172E+06
             Z0=                              Z1=
          .3578401E-04                    .5938829E+04
===================R=  7.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .2100000E+03   .1244890E+05   .1570000E+05   .7961050E+04
1   .2164320E+03   .1556060E+05   .2177196E+06   .1446868E+05
2   .2164320E+03   .1638165E+07   .6198475E+10   .5397889E+06
             Z0=                              Z1=
          .1819475E-04                    .5625075E+04
===================R=  8.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .2700000E+03   .1673470E+05   .1770000E+05   .7961050E+04
1   .2833760E+03   .1975603E+05   .2413414E+06   .1364383E+05
2   .2833760E+03   .2134586E+07   .8038281E+10   .6031822E+06
             Z0=                              Z1=
          .1001922E-04                    .4829925E+04
===================R=  9.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .4050000E+03   .2489800E+05   .2135000E+05   .7961050E+04
1   .4250640E+03   .2870789E+05   .2984632E+06   .1279746E+05
2   .4250640E+03   .3480468E+07   .1424748E+11   .7434131E+06
             Z0=                              Z1=
          .5758308E-05                    .4538846E+04
=========================================================

     **G1=3E7
===================R=  1.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .4722000E+02   .2653060E+04   .8200000E+04   .7961050E+04
1   .4722934E+02   .4302662E+04   .1213687E+06   .1390118E+06
2   .4722934E+02   .5306321E+05   .7077742E+07   .9992252E+04
             Z0=                              Z1=
          .1820586E+00                    .2076137E+04
===================R=  2.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .6500000E+02   .4081600E+04   .9800000E+04   .7961050E+04
1   .7084400E+02   .6111469E+04   .1517343E+06   .1233251E+06
2   .7084400E+02   .9342478E+05   .3476593E+08   .1516038E+05
             Z0=                              Z1=
          .2246500E+00                    .8161510E+04
===================R=  3.000000E-001===================
          A               B               D               E
0   .9000000E+02   .5306120E+04   .1080000E+05   .7961050E+04
1   .9275657E+02   .7405268E+04   .1491502E+06   .1016008E+06
2   .9275657E+02   .1095571E+06   .4085282E+08   .1858997E+05
             Z0=                              Z1=
          .7083860E-01                    .4956624E+04
=========================================================
```

=====================R= 4.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1125000E+03	.6632600E+04	.1190000E+05	.7961050E+04
1	.1156878E+03	.8973528E+04	.1653825E+06	.9365438E+05
2	.1156878E+03	.1461036E+06	.6698562E+08	.2334139E+05

Z0=	Z1=
.3669794E-01	.5120218E+04

=====================R= 5.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1350000E+03	.7959180E+04	.1300000E+05	.7961050E+04
1	.1416880E+03	.1069378E+05	.1798743E+06	.8618001E+05
2	.1416880E+03	.1877969E+06	.9824643E+08	.2868710E+05

Z0=	Z1=
.1778092E-01	.4686173E+04

=====================R= 6.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1675000E+03	.9693900E+04	.1420000E+05	.7961050E+04
1	.1735317E+03	.1274376E+05	.1939974E+06	.7876186E+05
2	.1735317E+03	.2389972E+06	.1377688E+09	.3530287E+05

Z0=	Z1=
.7765131E-02	.3974140E+04

=====================R= 7.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.2100000E+03	.1244890E+05	.1570000E+05	.7961050E+04
1	.2164320E+03	.1556060E+05	.2177196E+06	.7303730E+05
2	.2164320E+03	.3245850E+06	.2146365E+09	.4443533E+05

Z0=	Z1=
.3378820E-02	.3664404E+04

=====================R= 8.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.2700000E+03	.1673470E+05	.1770000E+05	.7961038E+04
1	.2833760E+03	.1975603E+05	.2413414E+06	.6478887E+05
2	.2833760E+03	.4495844E+06	.3270138E+09	.5894756E+05

Z0=	Z1=
.9051979E-03	.2788406E+04

=====================R= 9.000000E-001=====================

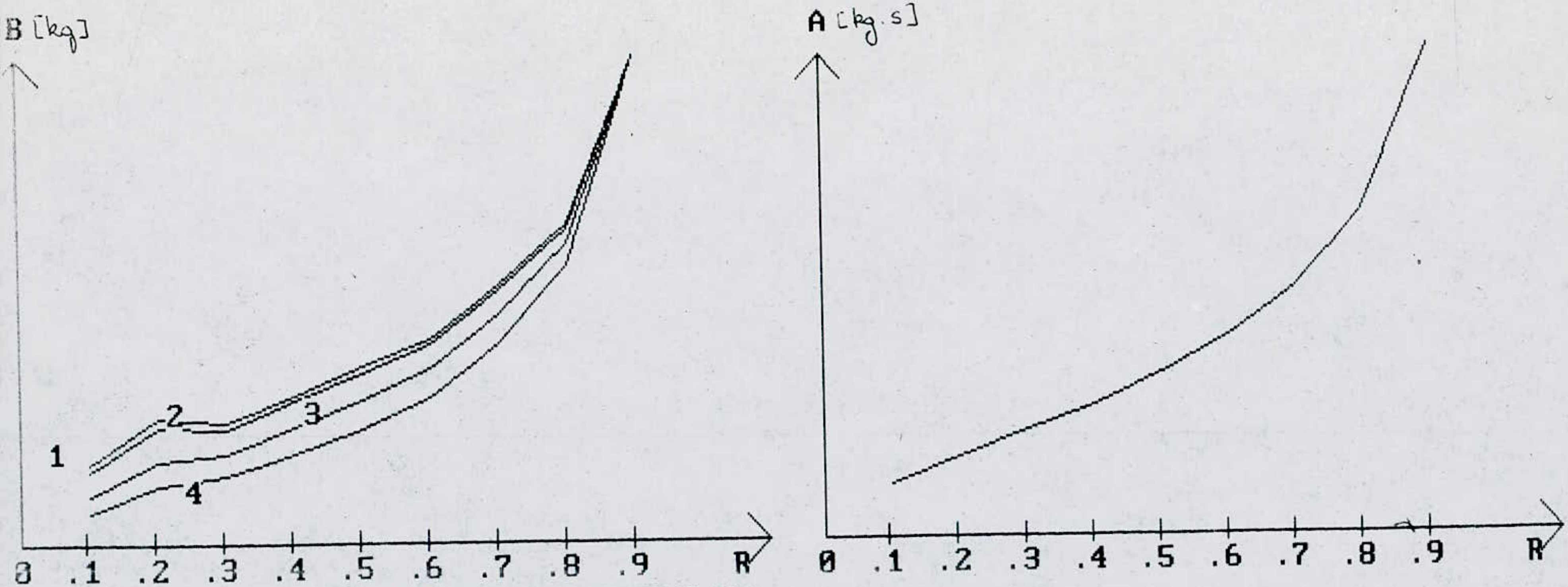
	A	B	D	E
0	.4050000E+03	.2489800E+05	.2135000E+05	.7961050E+04
1	.4250640E+03	.2870789E+05	.2984632E+06	.5632516E+05
2	.4250640E+03	.7908486E+06	.7021165E+09	.9030132E+05

Z0=	Z1=
.1241893E-03	.2249073E+04

==

```
5 REM=====TRACE DES COURBES POUR UNE DENSITE =N*N=======
7 REM==========ET POUR DIFFERENTES VALEURS DE G1========
10 SCREEN 3:CLS
20 DIM A(9,6),A$(6)
25 A$(1)="A":A$(2)="B":A$(3)="D"
26 A$(4)="E":A$(5)="Z0":A$(6)="Z1"
30 OPEN "A:T1.DAT" FOR INPUT AS 1
40 FOR J=1 TO 6:FOR K=1 TO 4
50 AM(J)=0
60 FOR I=1 TO 9
70 INPUT #1,A(I,J):A=A(I,J)
80 IF A< AM(J) THEN  90 ELSE AM(J)=A
90 REM ***
100 NEXT
105 PSET (100,300)
106 DRAW "U200G10E10F10H10D200R350H10F10G10E10"
108 FOR X=30 TO 300 STEP 32:PSET(100+X,305):DRAW"U10":NEXT X
110 LOCATE 20,13:PRINT"0   .1   .2   .3   .4   .5   .6   .7   .8   .9"
111 LOCATE 19,60:PRINT"R"
112 LOCATE 6,13:PRINT A$(J)
115 FOR I=2 TO 9 :X1=32*(I-1)+100:Y1=300-A(I-1,J)*200/AM(J)
120 X2=32*(I)+100:Y2=300-A(I,J)*200/AM(J)
125 LINE(X1,Y1)-(X2,Y2):NEXT:NEXT
128 LOCATE 23,20:PRINT"TAPEZ SU LA BARRE D'ESPACE";
130 IF INKEY$<>" " THEN 130 ELSE CLS
140 NEXT
150 CLOSE
```

```
5 REM======PROGRAMME D'ORDONNENSEMENT=======
10 DIM A(36,6)
20 CLS
30 OPEN "A:T.DAT" FOR INPUT AS 1
40 OPEN "A:T1.DAT" FOR OUTPUT AS 2
50 FOR I=1 TO 36
55 FOR J=1 TO 6
60 INPUT #1,A(I,J)
70 NEXT
75 NEXT
80 CLOSE #1
90 FOR J=1 TO 6
100 FOR I=1 TO 36
110 PRINT #2,A(I,J);",";
115 PRINT A(I,J);",";
120 NEXT
125 PRINT
130 NEXT
140 CLOSE
```



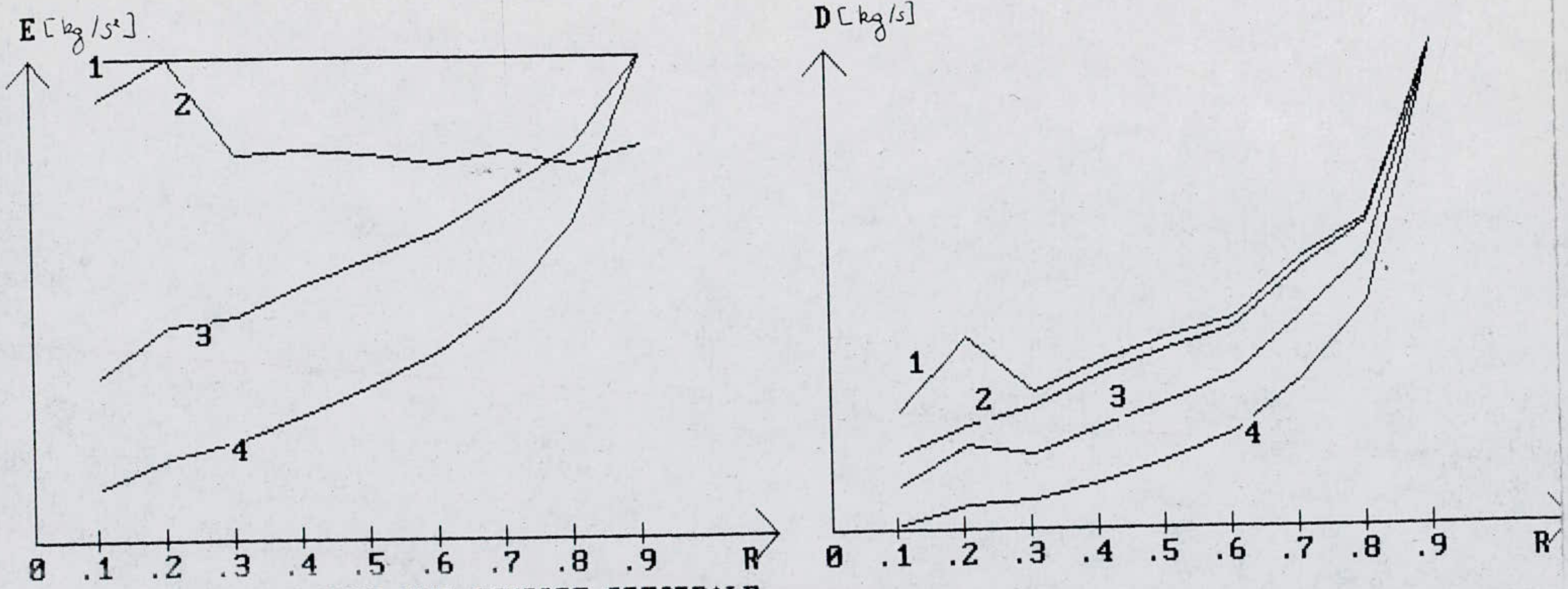
TRACE DE A,B POUR UNE DENSITE SPECTRALE
CONSTANTE ET DIFFERENTES VALEURS DE G1

1: $G1 = 0$

2: $G1 = 3\,10^5$ [N/m³]

3: $G1 = 3.10^6$

4: $G1 = 3\,10^7$



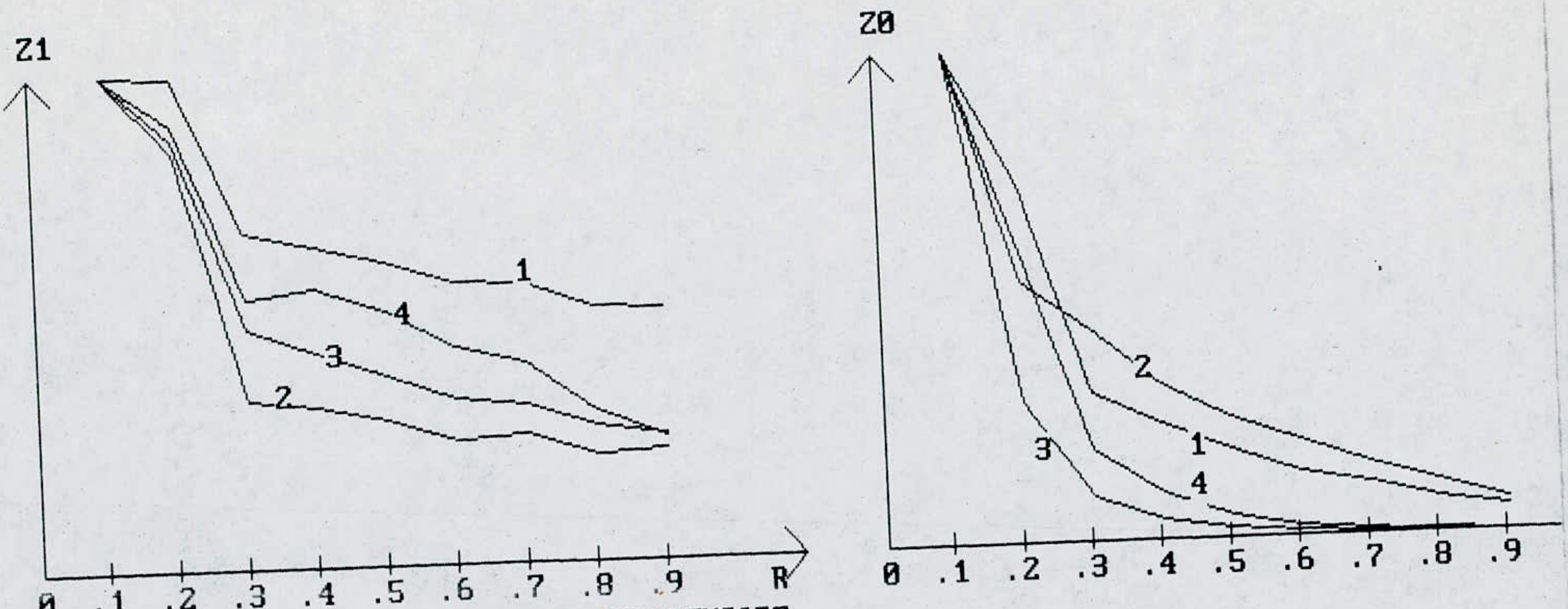
TRACE DE D,E POUR UNE DENSITE SPECTRALE
CONSTANTE ET DIFFERENTES VALEURS DE G1.

1: $G1 = 0$

2. $G1 = 3\ 10^5$ [N/m^3]

3 $G1 = 3\ 10^6$

4: $G1 = 3\ 10^7$



TRACE DES DISPERSIONS POUR UNE DENSITE
CONSTANTE ET DIFFERENTES VALEURS DE G1.

1: $G1 = 0$
2: $G1 = 3\,10^5$ $[N/m^3]$
3: $G1 = 3.10^6$ $[N/m^3]$
4: $G1 = 3.10^7$ $[N/m^3]$

```
C   **Dencite Spectrale=2*A2*N**2*((Q**2-S**2)/((Q**2+S**2)-4*A2*S**2)
C                ****PROGRAMME DE CALCUL DES DISPERSIONS****
C                      **Z6=(Dispersion de l'acceleration**
C                        **Z3=(Dispersion de l'ecart)/P**
C   **Calcul de (A,B,D,E) par la methode de GAUSS-SEIDEL**
        DIMENSION V(9),W(9),X(9),Y(9),Z(9)
        DATA V /.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9/
        DATA W /47.22,65.,90.,112.5,135.,167.5,210.,270.,405./
        DATA X /2653.06,4081.6,5306.12,6632.6,7959.18,9693.9,
     *12448.9,16734.7,24898./
        DATA Y /8000.1,9620.1,10850.,11900.1,13000.1,14200.1,
     *15600.1,17670.1,21200.1/
        DATA Z /7961.,7961.,7961.,7961.,7961.,7961.,7961.,
     *7961.,7961./
        WRITE(*,*)CHAR(27),'[2J',CHAR(27),'[1;1H'
        EPS=1.E-9
        A1=141.688
        W1=80.862
        C1=7961.05
        G1=3.E6
         Q=1.52792
        A2=.083774
C ESTIMES INITIAUX I,A,B,D,E
        DO 30 J=1,9
        R=V(J)
        I=0
        A=W(J)
        B=X(J)
        D=Y(J)
        E=Z(J)
        WRITE(*,*)'====================R=',R,'====================='
        WRITE(*,200)
        WRITE(*,201)I,A,B,D,E
        P=R/(1-R)
        DO 10 I=1,10,1
        AL=A
```

```
      A=SQRT(P)*A1
      B=(D**2+2*W1*E-A1**2)/(2*E)
      D=(B**2-P*(E**2)-W1**2)/(2*A1*SQRT(P))
      E1=(((D-A1)**2)+B*E)*3*G1*(W1**2)
      E2=2*(E**2)*(B*D-A*E)
      E=(E1/E2)+C1
      WRITE(*,201)I,A,B,D,E
      IF(ABS(AL-A).LT.EPS) GOTO 20
10    CONTINUE
20    CONTINUE
200   FORMAT('I',11X,'A',13X,'B',13X,'D',13X,'E')
201   FORMAT(I2,4E15.7)
      G=1/Q
      H=1/Q**2+(D-A1)/(Q*E)-2*SQRT(A1)/Q**3
      H1=Q-SQRT(A2)
      H11=SQRT(Q**2-A2)
      H2=W1*(2*A2-Q*Q)+A1*SQRT(A2)+C1
      H22=-2*W1*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)-A1*SQRT(Q*Q-A2)
      H3=H1*H2+H11*H22
      H33=H2*H11-H1*H22
      H5=-(2*A2-Q*Q)+SQRT(A2)+2*SQRT(A2)*(Q*Q-A2)
      H55=(4*A2-Q*Q)*SQRT(Q*Q-A2)
      H6=-A*H5+B*(2*A2-Q*Q)+D*SQRT(A2)+E
      H66=A*H55+2*B*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)+D*SQRT(Q*Q-A2)
      H7=H6
      H77=-H66
      H8=-2*H77*SQRT(Q*Q-A2)
      H88=2*H7*SQRT(Q*Q-A2)
      H9=(2*A2-Q*Q)*H8+2*H88*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)
      H99=(2*A2-Q*Q)*H88-2*H8*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)
      TT=(H9*1E-20)*H9+(H99*1E-20)*H99
      B1=2*(((H9*H3)/TT)*1E-20+((H33*H99)/TT)*1E-20)
      B12=2*(((H33*H9)/TT)*1E-20-((H3*H99)/TT)*1E-20)*SQRT(Q*Q-A2
      B2=B1*SQRT(A2)-B12
      D0=E*Q*Q
```

```
      D1=D*Q*Q+2*E*SQRT(A2)
      D2=B*Q*Q+2*D*SQRT(A2)+E
      D3=A*Q*Q+2*B*SQRT(A2)+D
      D4=2*A*SQRT(A2)+B
      D5=A
      Y1=(-D0*D3+D1*D2)*1E-30
      Y2=(-D0*D5+D1*D4)*1E-30
      Y3=D2*(Y2/D0)-D4*(Y1/D0)
      Y4=D2*(Y3/D0)-D4*(Y2/D0)
      Y0=D3*(Y1/D5)-D1*(Y2/D5)
      DEL=D0*(D1*Y4-D3*Y3+D5*Y2)
      T14=2*G*SQRT(A2)+H*Q*Q
      T24=G+2*H*SQRT(A2)+B2
      T0=W1*G*Q*Q+A1*T14+E*T24-(B*Q+D)
      T1=W1*T14+A1*T24+E*(H+B1)-(A*Q+B)
      T2=W1*T24+A1*(H+B1)-A
      T3=W1*(H+B1)
      ZG=DEL*P
      Z1=T3*T3*(Y1/ZG)+T2*T2*(Y2/ZG)-2*T1*T3*(Y2/ZG)
      Z2=Z1+T1*T1*(Y3/ZG)-2*T0*T3*(Y3/ZG)+T0*T0*(Y4/ZG)
      Z3=Z2*SQRT(A2)
      T60=E*G*Q*Q
      T61=A1*G*Q*Q+E*(2*G*SQRT(A2)+H*Q*Q)
      T62=A1*(2*G*SQRT(A2)+H*Q*Q)+E*(G+2*H*SQRT(A2)+B2)
      T63=A1*(G+2*H*SQRT(A2)+B2)+E*(H+B1)
      T64=A1*(H+B1)
      Z4=T64*T64*(Y0/DEL)+T63*T63*(Y1/DEL)-2*T64*T62*(Y1/DEL)
      Z5=Z4+T62*T62*(Y2/DEL)-2*T61*T63*(Y2/DEL)+2*T60*T64*(Y2/DEL
      Z6=Z5+T61*T61*(Y3/DEL)-2*T60*T62*(Y3/DEL)+T60*T60*(Y4/DEL)
      WRITE(*,202)
      WRITE(*,203)Z3,Z6
202   FORMAT(17X,'Z3=',25X,'Z6=')
203   FORMAT(10X,E14.7,15X,E14.7)
 30   CONTINUE
      END
```

```
=======================================================================
*Dencite Spectrale=2*A2*N**2*((Q**2-S**2)/((Q**2+S**2)-4*A2*S**2)))*
            ***RESULTATS DE CALCUL DES DISPERSIONS***
               **Z6=Dispersion de l'acceleration
                  **Z3=(Dispersion de l'ecart)/P

=======================R=  1.000000E-001=========================
I          A               B               D               E
0   .4722000E+02   .2653060E+04   .8000100E+04   .7961000E+04
1   .4722934E+02   .4099297E+04   .1032806E+06   .1967220E+05
2   .4722934E+02   .2711963E+06   .7781647E+09   .2261252E+06
               Z3=                             Z6=
         .6365754E+03                    .9129657E+04
=======================R=  2.000000E-001=========================
I          A               B               D               E
0   .6500000E+02   .4081600E+04   .9620100E+04   .7961000E+04
1   .7084400E+02   .5892082E+04   .1331497E+06   .1846554E+05
2   .7084400E+02   .4801323E+06   .1626403E+10   .3002716E+06
               Z3=                             Z6=
         .4447984E+03                    .8835958E+04
=======================R=  3.000000E-001=========================
I          A               B               D               E
0   .9000000E+02   .5306120E+04   .1085000E+05   .7961000E+04
1   .9275657E+02   .7473301E+04   .1546084E+06   .1757827E+05
2   .9275657E+02   .6800039E+06   .2491861E+10   .3569095E+06
               Z3=                             Z6=
         .3343224E+03                    .8191242E+04
=======================R=  4.000000E-001=========================
I          A               B               D               E
0   .1125000E+03   .6632600E+04   .1190010E+05   .7961000E+04
1   .1156878E+03   .8973733E+04   .1654007E+06   .1653123E+05
2   .1156878E+03   .8275254E+06   .2958896E+10   .3929420E+06
               Z3=                             Z6=
         .2318129E+03                    .6608782E+04
=================================================================
```

=======================R= 5.000000E-001=======================

I	A	B	D	E
0	.1350000E+03	.7959180E+04	.1300010E+05	.7961000E+04
1	.1416880E+03	.1069401E+05	.1798944E+06	.1578375E+05
2	.1416880E+03	.1025249E+07	.3708452E+10	.4351740E+06

Z3= .1748795E+03 Z6= .5836819E+04

=======================R= 6.000000E-001=======================

I	A	B	D	E
0	.1675000E+03	.9693900E+04	.1420010E+05	.7961000E+04
1	.1735317E+03	.1274402E+05	.1940198E+06	.1504189E+05
2	.1735317E+03	.1251375E+07	.4510994E+10	.4767544E+06

Z3= .1294433E+03 Z6= .5079241E+04

=======================R= 7.000000E-001=======================

I	A	B	D	E
0	.2100000E+03	.1244890E+05	.1560010E+05	.7961000E+04
1	.2164320E+03	.1536431E+05	.2037003E+06	.1412927E+05
2	.2164320E+03	.1468444E+07	.4980462E+10	.5078508E+06

Z3= .8625834E+02 Z6= .4046971E+04

=======================R= 8.000000E-001=======================

I	A	B	D	E
0	.2700000E+03	.1673470E+05	.1767010E+05	.7961000E+04
1	.2833760E+03	.1968973E+05	.2367326E+06	.1355462E+05
2	.2833760E+03	.2067358E+07	.7539863E+10	.5920439E+06

Z3= .6532462E+02 Z6= .3937944E+04

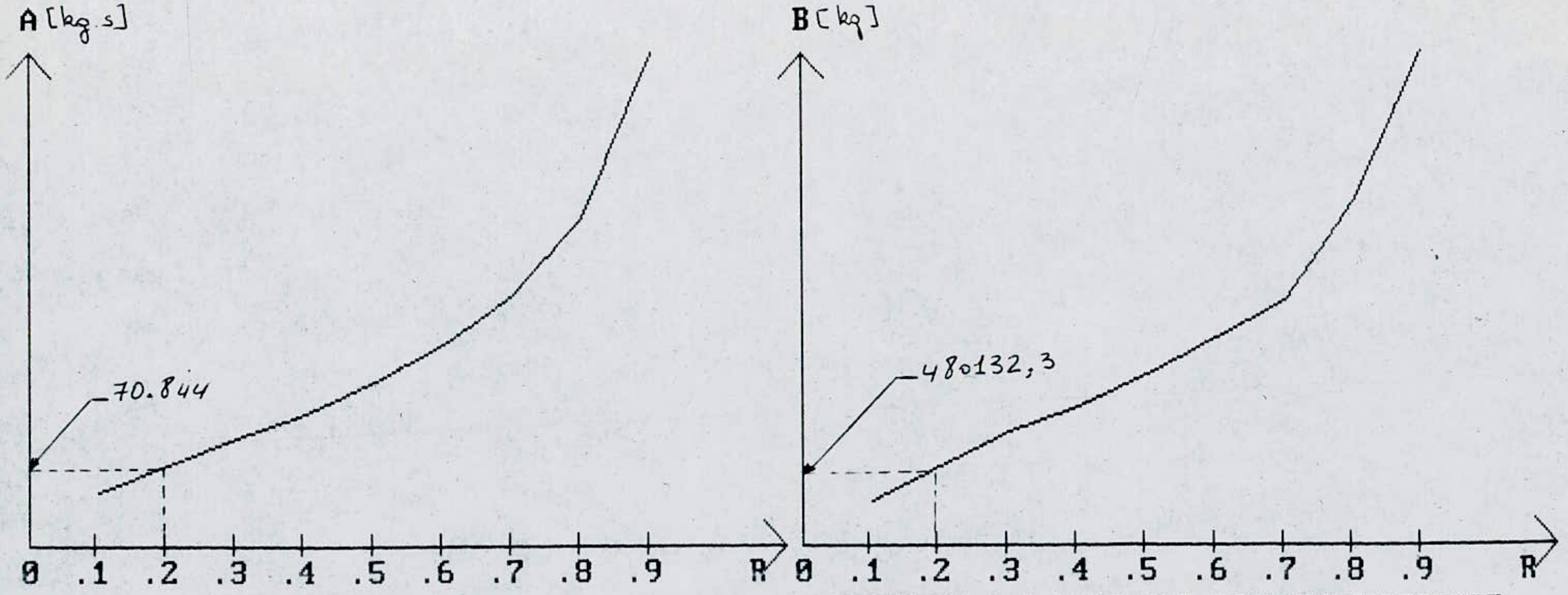
=======================R= 9.000000E-001=======================

I	A	B	D	E
0	.4050000E+03	.2489800E+05	.2120010E+05	.7961000E+04
1	.4250640E+03	.2830748E+05	.2716169E+06	.1242671E+05
2	.4250640E+03	.2968514E+07	.1036395E+11	.6731964E+06

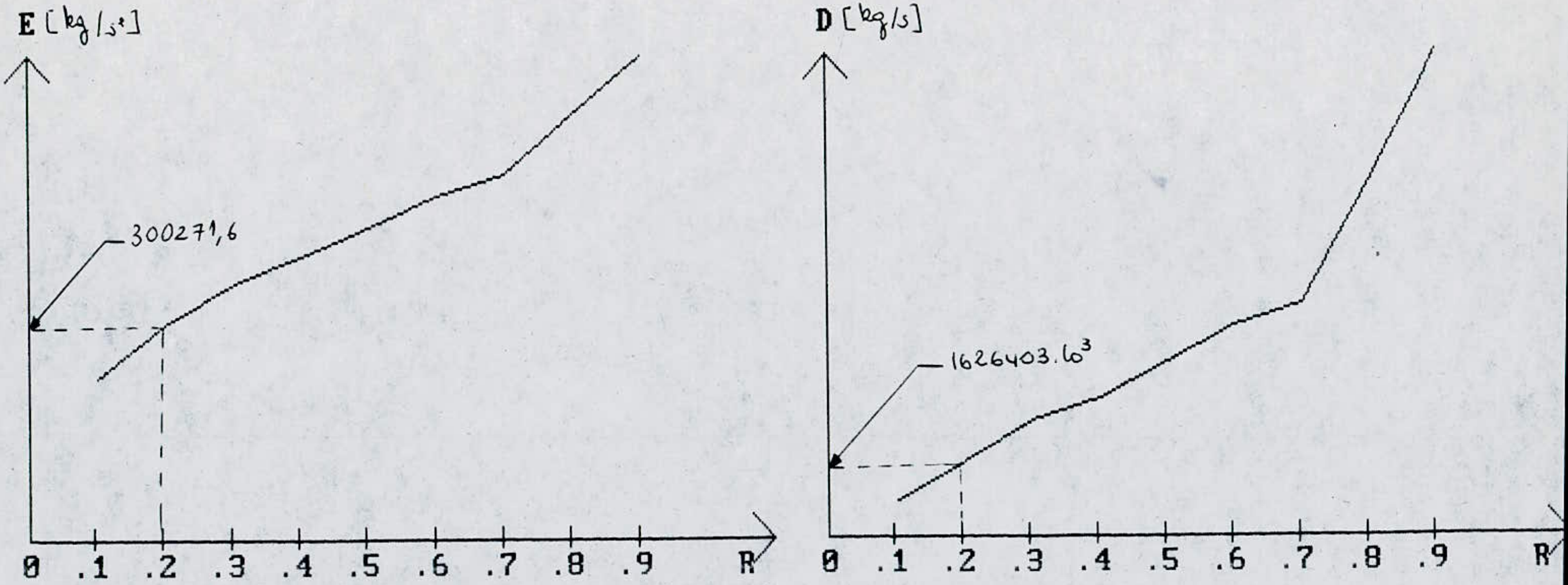
Z3= .3509660E+02 Z6= .3108070E+04

==

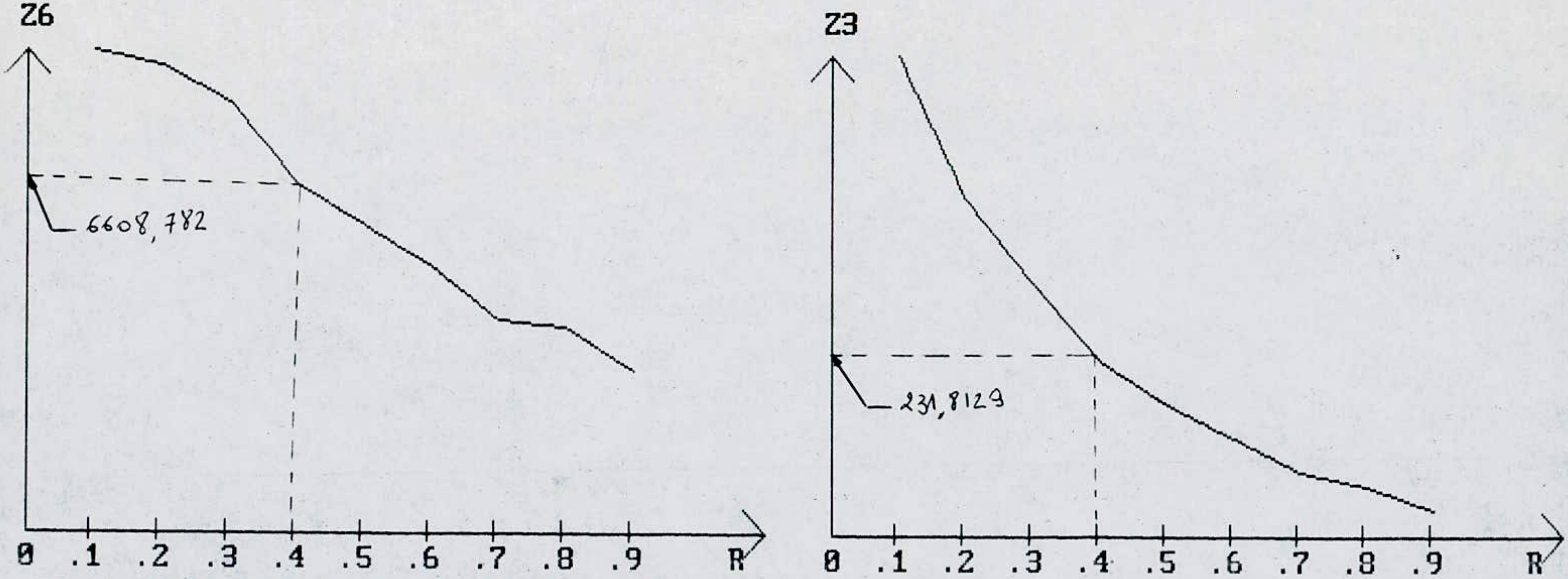
```
10 REM====PPROGRAMME DES TRACE DES COURBES======
20 REM=======DENCITE SPECTRALE#CONSTANTE========
30 SCREEN 3:CLS
40 DIM A(9,6),A$(6)
50 A$(1)="A":A$(2)="B":A$(3)="D"
60 A$(4)="E":A$(5)="Z3":A$(6)="Z6"
70 OPEN "A:Y.DAT" FOR INPUT AS 1
80 FOR J=1 TO 6
90 AM(J)=0
100 FOR I=1 TO 9
110 INPUT #1,A(I,J):A=A(I,J)
120 IF A< AM(J) THEN  130 ELSE AM(J)=A
130 PRINT A(I,J);",";
140 NEXT
150 PSET (100,300)
160 DRAW "U200G10E10F10H10D200R350H10F10G10E10"
170 FOR X=30 TO 300 STEP 32:PSET(100+X,305):DRAW"U10":NEXT X
180 LOCATE 20,13:PRINT"0  .1  .2  .3  .4  .5  .6  .7  .8  .9"
190 LOCATE 19,60:PRINT"R"
200 LOCATE 6,13:PRINT A$(J)
210 FOR I=2 TO 9 :X1=32*(I-1)+100:Y1=300-A(I-1,J)*200/AM(J)
220 X2=32*(I)+100:Y2=300-A(I,J)*200/AM(J)
230 LINE(X1,Y1)-(X2,Y2):NEXT
240 LOCATE 23,20:PRINT"TAPEZ SU LA BARRE DE L'ESPACE";
250 IF INKEY$<>" " THEN 250 ELSE CLS
260 NEXT
270 CLOSE
```



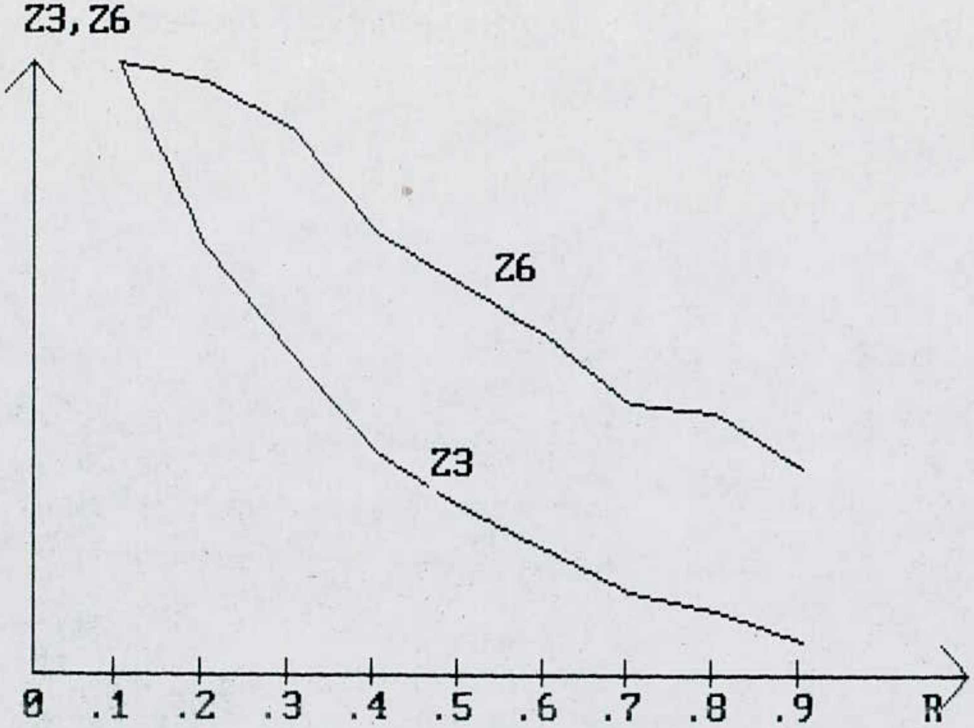
TRACE DE A,B POUR UNE DENSITE#CONSTANTE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTE



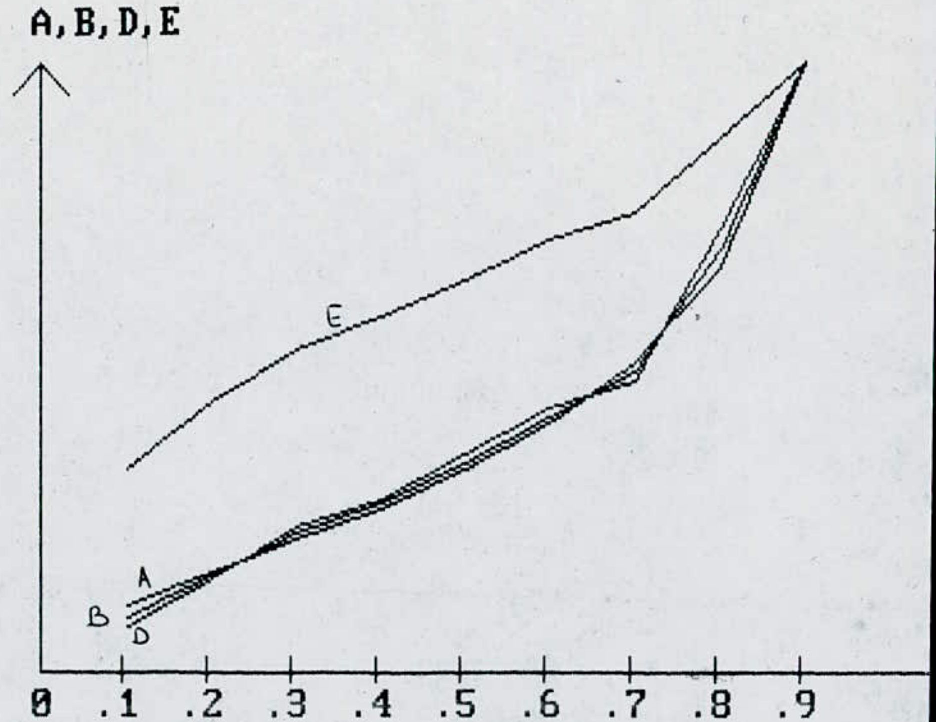
TRACE DE D,E POUR UNE DENSITE # CONSTANTE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTE



TRACE DE Z3,Z6 POUR UNE DENSITE # CONSTANTE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTE



TRACE DE Z3,Z6 POUR UNE DENSITE # CONSTATE
ET VALEUR DE G1 CONSTANTE



TRACE DE A,B,D,E POUR UNE DENSITE # CONSTA
ET VALEUR DE G1 CONSTANTE

```
C   **Dencite Spectrale=2*A2*N**2*((Q**2-S**2)/((Q**2+S**2)-4*A2*S**2))
C                 ****PROGRAMME DE CALCUL DES DISPERSIONS****
C                     **POUR DIFFERENTES VALEURS DE G1**
C                     **Z6=(Dispersion de l'acceleration**
C                       **Z3=(Dispersion de l'ecart)/P**
C   **Calcul de (A,B,D,E) par la methode de GAUSS-SEIDEL**
        DIMENSION V(9),W(9),X(9),Y(9),Z(9),V1(4)
        DATA V /.1,.2,.3,.4,.5,.6,.7,.8,.9/
        DATA W /47.22,65.,90.,112.5,135.,167.5,210.,270.,405./
        DATA X /2653.06,4081.6,5306.12,6632.6,7959.18,9693.9,
    *12448.9,16734.7,24898./
        DATA Y /8000.1,9620.1,10850.,11900.1,13000.1,14200.1,
    *15600.1,17670.1,21200.1/
        DATA Z /7961.,7961.,7961.,7961.,7961.,7961.,7961.,
    *7961.,7961./
        DATA V1 /0.,3.E5,3.E6,3.E7/
        WRITE(*,*)CHAR(27),'[2J',CHAR(27),'[1;1H'
        EPS=1.E-9
        A1=141.688
        W1=80.862
        C1=7961.05
         Q=1.52792
        A2=.083774
C ESTIMES INITIAUX I,A,B,D,E
        DO 40 K=1,4
        G1=V1(K)
        DO 30 J=1,9
        R=V(J)
        I=0
        A=W(J)
        B=X(J)
        D=Y(J)
        E=Z(J)
        WRITE(*,*)'===================R=',R,'====================='
        WRITE(*,200)
        WRITE(*,201)I,A,B,D,E
        P=R/(1-R)
```

```
      DO 10 I=1,10,1
      AL=A
      A=SQRT(P)*A1
      B=(D*D+2*W1*E-A1*A1)/(2*E)
      D=(B**2-P*(E**2)-W1**2)/(2*A1*SQRT(P))
      E1=(((D-A1)**2)+B*E)*3*G1*(W1**2)
      E2=2*(E**2)*(B*D-A*E)
      E=(E1/E2)+C1
      WRITE(*,201)I,A,B,D,E
      IF(ABS(AL-A).LT.EPS) GOTO 20
10    CONTINUE
20    CONTINUE
200   FORMAT('I',11X,'A',13X,'B',13X,'D',13X,'E')
201   FORMAT(I2,4E15.7)
      G=1/Q
      H=1/Q**2+(D-A1)/(Q*E)-2*SQRT(A2)/Q**3
      H1=Q-SQRT(A2)
      H11=SQRT(Q**2-A2)
      H2=W1*(2*A2-Q*Q)+A1*SQRT(A2)+C1
      H22=-2*W1*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)-A1*SQRT(Q*Q-A2)
      H3=H1*H2+H11*H22
      H33=H2*H11-H1*H22
      H5=-(2*A2-Q*Q)+SQRT(A2)+2*SQRT(A2)*(Q*Q-A2)
      H55=(4*A2-Q*Q)*SQRT(Q*Q-A2)
      H6=-A*H5+B*(2*A2-Q*Q)+D*SQRT(A2)+E
      H66=A*H55+2*B*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)+D*SQRT(Q*Q-A2)
      H7=H6
      H77=-H66
      H8=-2*H77*SQRT(Q*Q-A2)
      H88=2*H7*SQRT(Q*Q-A2)
      H9=(2*A2-Q*Q)*H8+2*H88*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)
      H99=(2*A2-Q*Q)*H88-2*H8*SQRT(A2*Q*Q-A2*A2)
      TT=(H9*1E-20)*H9+(H99*1E-20)*H99
      B1=2*(((H9*H3)/TT)*1E-20+((H33*H99)/TT)*1E-20)
      B12=2*(((H33*H9)/TT)*1E-20-((H3*H99)/TT)*1E-20)*SQRT(Q*Q-A2)
      B2=B1*SQRT(A2)-B12
      D0=E*Q*Q
      D1=D*Q*Q+2*E*SQRT(A2)
```

```
      D2=B*Q*Q+2*D*SQRT(A2)+E
      D3=A*Q*Q+2*B*SQRT(A2)+D
      D4=2*A*SQRT(A2)+B
      D5=A
      Y1=(-D0*D3+D1*D2)*1E-30
      Y2=(-D0*D5+D1*D4)*1E-30
      Y3=D2*(Y2/D0)-D4*(Y1/D0)
      Y4=D2*(Y3/D0)-D4*(Y2/D0)
      Y0=D3*(Y1/D5)-D1*(Y2/D5)
      DEL=D0*(D1*Y4-D3*Y3+D5*Y2)
      T14=2*G*SQRT(A2)+H*Q*Q
      T24=G+2*H*SQRT(A2)+B2
      T0=W1*G*Q*Q+A1*T14+E*T24-(B*Q+D)
      T1=W1*T14+A1*T24+E*(H+B1)-(A*Q+B)
      T2=W1*T24+A1*(H+B1)-A
      T3=W1*(H+B1)
      ZG=DEL*F
      Z1=T3*T3*(Y1/ZG)+T2*T2*(Y2/ZG)-2*T1*T3*(Y2/ZG)
      Z2=Z1+T1*T1*(Y3/ZG)-2*T0*T3*(Y3/ZG)+T0*T0*(Y4/ZG)
      Z3=Z2*SQRT(A2)
      T60=E*G*Q*Q
      T61=A1*G*Q*Q+E*(2*G*SQRT(A2)+H*Q*Q)
      T62=A1*(2*G*SQRT(A2)+H*Q*Q)+E*(G+2*H*SQRT(A2)+B2)
      T63=A1*(G+2*H*SQRT(A2)+B2)+E*(H+B1)
      T64=A1*(H+B1)
      Z4=T64*T64*(Y0/DEL)+T63*T63*(Y1/DEL)-2*T64*T62*(Y1/DEL)
      Z5=Z4+T62*T62*(Y2/DEL)-2*T61*T63*(Y2/DEL)+2*T60*T64*(Y2/DEL)
      Z6=Z5+T61*T61*(Y3/DEL)-2*T60*T62*(Y3/DEL)+T60*T60*(Y4/DEL)
      WRITE(*,202)
      WRITE(*,203)Z3,Z6
202   FORMAT(17X,'Z3=',25X,'Z6=')
203   FORMAT(10X,E14.7,15X,E14.7)
30    CONTINUE
40    CONTINUE
      END
```

```
===========================================================================
            ***DENSITE SPECTRALE # CONSTANTE****
         ****REULTATS DU CALCUL DES DISPERSIONS****
              **POUR DIFFERENTES VALEURS DE G1**
             **Z6=Dispersion de l'acceleration**
              **Z6=(Dispersion de l'ecart)/p**
===========================================================================
   **G1=0**
=====================R=  1.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .4722000E+02    .2653060E+04    .8000100E+04    .7961000E+04
1    .4722934E+02    .4099297E+04    .1032806E+06    .7961050E+04
2    .4722934E+02    .6700222E+06    .4752583E+10    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .1007311E+06                    .9887426E+08
=====================R=  2.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .6500000E+02    .4081600E+04    .9620100E+04    .7961000E+04
1    .7084400E+02    .5892082E+04    .1331496E+06    .7961050E+04
2    .7084400E+02    .1113552E+07    .8751501E+10    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .8243285E+05                    .1304844E+09
=====================R=  3.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .9000000E+02    .5306120E+04    .1085000E+05    .7961000E+04
1    .9275657E+02    .7473302E+04    .1546085E+06    .7961050E+04
2    .9275657E+02    .1501376E+07    .1215063E+11    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .6676120E+05                    .1432678E+09
=====================R=  4.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .1125000E+03    .6632600E+04    .1190010E+05    .7961000E+04
1    .1156878E+03    .8973733E+04    .1654007E+06    .7961050E+04
2    .1156878E+03    .1718281E+07    .1276042E+11    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .4507433E+05                    .1174703E+09
=====================R=  5.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .1350000E+03    .7959180E+04    .1300010E+05    .7961000E+04
1    .1416880E+03    .1069401E+05    .1798943E+06    .7961050E+04
2    .1416880E+03    .2032599E+07    .1457920E+11    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .3433342E+05                    .1057157E+09
=====================R=  6.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .1675000E+03    .9693900E+04    .1420010E+05    .7961000E+04
1    .1735317E+03    .1274402E+05    .1940197E+06    .7961050E+04
2    .1735317E+03    .2364318E+07    .1610630E+11    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .2528740E+05                    .8186090E+08
=====================R=  7.000000E-001=====================
            A               B               D               E
0    .2100000E+03    .1244890E+05    .1560010E+05    .7961000E+04
1    .2164320E+03    .1536431E+05    .2037004E+06    .7961050E+04
2    .2164320E+03    .2606134E+07    .1569034E+11    .7961050E+04
                  Z3=                             Z6=
          .1583794E+05                    .6468335E+08
===========================================================================
```

```
=====================R=  8.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .2700000E+03    .1673470E+05    .1767010E+05    .7961000E+04
1   .2833760E+03    .1968973E+05    .2367326E+06    .7961050E+04
2   .2833760E+03    .3519863E+07    .2185996E+11    .7961050E+04
              Z3=                            Z6=
        .1287124E+05                    .6596958E+08
=====================R=  9.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .4050000E+03    .2489800E+05    .2120010E+05    .7961000E+04
1   .4250640E+03    .2830748E+05    .2716169E+06    .7961050E+04
2   .4250640E+03    .4633624E+07    .2525490E+11    .7961050E+04
              Z3=                            Z6=
        .6609737E+04                    .4811046E+08
=============================================================
      **G1=3E5**
=====================R=  1.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .4722000E+02    .2653060E+04    .8000100E+04    .7961000E+04
1   .4722934E+02    .4099297E+04    .1032806E+06    .9132165E+04
2   .4722934E+02    .5841084E+06    .3611880E+10    .2261304E+06
              Z3=                            Z6=
        .2939269E+04                    .8218523E+05
=====================R=  2.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .6500000E+02    .4081600E+04    .9620100E+04    .7961000E+04
1   .7084400E+02    .5892082E+04    .1331496E+06    .9011499E+04
2   .7084400E+02    .9837575E+06    .6830208E+10    .2595278E+06
              Z3=                            Z6=
        .2152936E+04                    .8840140E+05
=====================R=  3.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .9000000E+02    .5306120E+04    .1085000E+05    .7961000E+04
1   .9275657E+02    .7473302E+04    .1546085E+06    .8922772E+04
2   .9275657E+02    .1339562E+07    .9672583E+10    .2748199E+06
              Z3=                            Z6=
        .1679698E+04                    .8875468E+05
=====================R=  4.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .1125000E+03    .6632600E+04    .1190010E+05    .7961000E+04
1   .1156878E+03    .8973733E+04    .1654007E+06    .8818068E+04
2   .1156878E+03    .1551291E+07    .1040063E+11    .2616614E+06
              Z3=                            Z6=
        .1219366E+04                    .7849880E+05
=====================R=  5.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .1350000E+03    .7959180E+04    .1300010E+05    .7961000E+04
1   .1416880E+03    .1069401E+05    .1798943E+06    .8743319E+04
2   .1416880E+03    .1850748E+07    .1208710E+11    .2593368E+06
              Z3=                            Z6=
        .9531765E+03                    .7411640E+05
=====================R=  6.000000E-001======================
        A               B               D               E
0   .1675000E+03    .9693900E+04    .1420010E+05    .7961000E+04
1   .1735317E+03    .1274402E+05    .1940197E+06    .8669134E+04
2   .1735317E+03    .2171211E+07    .1358266E+11    .2528859E+06
              Z3=                            Z6=
        .7322590E+03                    .6840206E+05
=============================================================
```

=====================R= 7.000000E-001

	A	B	D	E
0	.2100000E+03	.1244890E+05	.1560010E+05	.7961000E+04
1	.2164320E+03	.1536431E+05	.2037004E+06	.8577872E+04
2	.2164320E+03	.2418737E+07	.1351490E+11	.2314040E+06

Z3= .5117863E+03 Z6= .5843405E+05

=====================R= 8.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.2700000E+03	.1673470E+05	.1767010E+05	.7961000E+04
1	.2833760E+03	.1968973E+05	.2367326E+06	.8520407E+04
2	.2833760E+03	.3288792E+07	.1908394E+11	.2431476E+06

Z3= .4012399E+03 Z6= .5932668E+05

=====================R= 9.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.4050000E+03	.2489800E+05	.2120010E+05	.7961000E+04
1	.4250640E+03	.2830748E+05	.2716169E+06	.8407616E+04
2	.4250640E+03	.4387515E+07	.2264324E+11	.2227815E+06

Z3= .2308930E+03 Z6= .4989478E+05

==

G1=3E6

=====================R= 1.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.4722000E+02	.2653060E+04	.8000100E+04	.7961000E+04
1	.4722934E+02	.4099297E+04	.1032806E+06	.1967220E+05
2	.4722934E+02	.2711963E+06	.7781647E+09	.2261252E+06

Z3= .6343358E+03 Z6= .9182673E+04

=====================R= 2.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.6500000E+02	.4081600E+04	.9620100E+04	.7961000E+04
1	.7084400E+02	.5892082E+04	.1331496E+06	.1846554E+05
2	.7084400E+02	.4801319E+06	.1626400E+10	.3002715E+06

Z3= .4438024E+03 Z6= .8870422E+04

=====================R= 3.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.9000000E+02	.5306120E+04	.1085000E+05	.7961000E+04
1	.9275657E+02	.7473302E+04	.1546085E+06	.1757828E+05
2	.9275657E+02	.6800043E+06	.2491863E+10	.3569095E+06

Z3= .3337421E+03 Z6= .8215975E+04

=====================R= 4.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1125000E+03	.6632600E+04	.1190010E+05	.7961000E+04
1	.1156878E+03	.8973733E+04	.1654007E+06	.1653123E+05
2	.1156878E+03	.8275254E+06	.2958896E+10	.3929420E+06

Z3= .2314396E+03 Z6= .6626279E+04

=====================R= 5.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1350000E+03	.7959180E+04	.1300010E+05	.7961000E+04
1	.1416880E+03	.1069401E+05	.1798943E+06	.1578374E+05
2	.1416880E+03	.1025248E+07	.3708446E+10	.4351739E+06

Z3= .1746304E+03 Z6= .5846948E+04

==

====================R= 6.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.1675000E+03	.9693900E+04	.1420010E+05	.7961000E+04
1	.1735317E+03	.1274402E+05	.1940197E+06	.1504189E+05
2	.1735317E+03	.1251374E+07	.4510987E+10	.4767543E+06

Z3= .1292772E+03

Z6= .5089832E+04

====================R= 7.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.2100000E+03	.1244890E+05	.1560010E+05	.7961000E+04
1	.2164320E+03	.1536431E+05	.2037004E+06	.1412927E+05
2	.2164320E+03	.1468445E+07	.4980468E+10	.5078509E+06

Z3= .8615175E+02

Z6= .4056340E+04

====================R= 8.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.2700000E+03	.1673470E+05	.1767010E+05	.7961000E+04
1	.2833760E+03	.1968973E+05	.2367326E+06	.1355462E+05
2	.2833760E+03	.2067358E+07	.7539863E+10	.5920439E+06

Z3= .6526241E+02

Z6= .3944104E+04

====================R= 9.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.4050000E+03	.2489800E+05	.2120010E+05	.7961000E+04
1	.4250640E+03	.2830748E+05	.2716169E+06	.1242671E+05
2	.4250640E+03	.2968514E+07	.1036395E+11	.6731964E+06

Z3= .3506894E+02

Z6= .3112091E+04

==

G1=3E7

====================R= 1.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.4722000E+02	.2653060E+04	.8000100E+04	.7961000E+04
1	.4722934E+02	.4099297E+04	.1032806E+06	.1250725E+06
2	.4722934E+02	.4272361E+05	.9228721E+06	.8369840E+04

Z3= .2391047E+02

Z6= .6149724E+02

====================R= 2.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.6500000E+02	.4081600E+04	.9620100E+04	.7961000E+04
1	.7084400E+02	.5892082E+04	.1331496E+06	.1130059E+06
2	.7084400E+02	.7852277E+05	.2098436E+08	.1411854E+05

Z3= .1183490E+03

Z6= .3531133E+04

====================R= 3.000000E-001====================

	A	B	D	E
0	.9000000E+02	.5306120E+04	.1085000E+05	.7961000E+04
1	.9275657E+02	.7473302E+04	.1546085E+06	.1041333E+06
2	.9275657E+02	.1148557E+06	.4605872E+08	.1884238E+05

Z3= .1141541E+03

Z6= .4996681E+04

==

=====================R= 4.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1125000E+03	.6632600E+04	.1190010E+05	.7961000E+04
1	.1156878E+03	.8973733E+04	.1654007E+06	.9366287E+05
2	.1156878E+03	.1461225E+06	.6700487E+08	.2334103E+05

Z3=	Z6=
.8665109E+02	.4389463E+04

=====================R= 5.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1350000E+03	.7959180E+04	.1300010E+05	.7961000E+04
1	.1416880E+03	.1069401E+05	.1798943E+06	.8618800E+05
2	.1416880E+03	.1878214E+06	.9827396E+08	.2868636E+05

Z3=	Z6=
.6921947E+02	.4017264E+04

=====================R= 6.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.1675000E+03	.9693900E+04	.1420010E+05	.7961000E+04
1	.1735317E+03	.1274402E+05	.1940197E+06	.7876941E+05
2	.1735317E+03	.2390291E+06	.1378077E+09	.3530168E+05

Z3=	Z6=
.5277242E+02	.3407268E+04

=====================R= 7.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.2100000E+03	.1244890E+05	.1560010E+05	.7961000E+04
1	.2164320E+03	.1536431E+05	.2037004E+06	.6964327E+05
2	.2164320E+03	.2979836E+06	.1789872E+09	.4440056E+05

Z3=	Z6=
.3516242E+02	.2424896E+04

=====================R= 8.000000E-001=====================

	A	B	D	E
0	.2700000E+03	.1673470E+05	.1767010E+05	.7961000E+04
1	.2833760E+03	.1968973E+05	.2367326E+06	.6389679E+05
2	.2833760E+03	.4386187E+06	.3106388E+09	.5900118E+05

Z3=	Z6=
.2685475E+02	.2221588E+04

=====================R= 9.000000E-001=====================

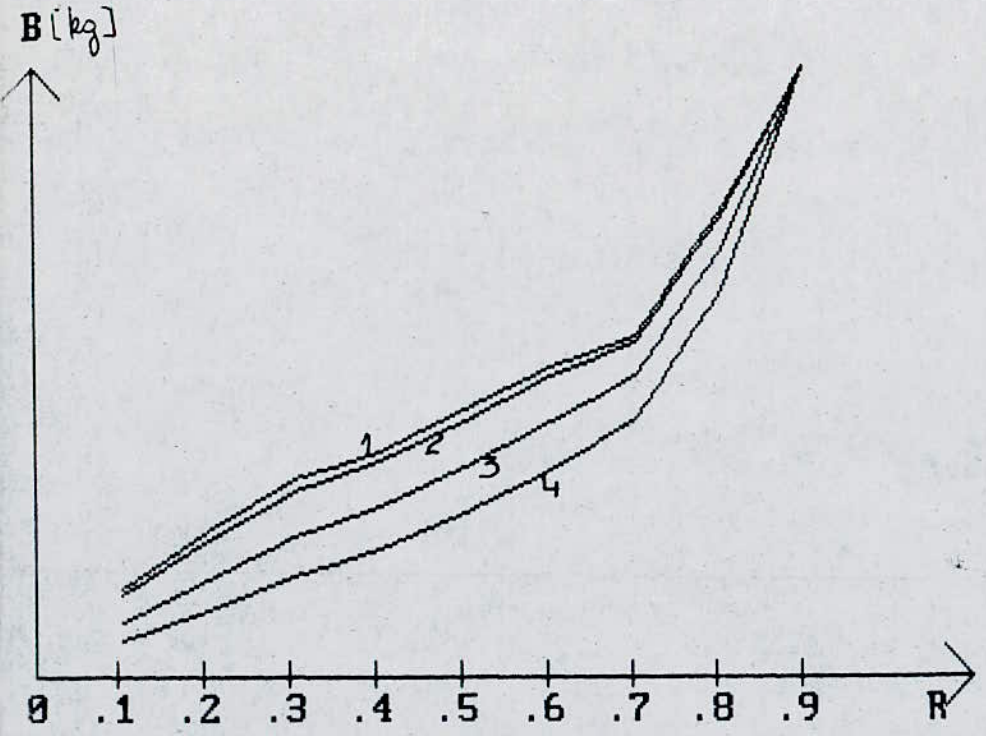
	A	B	D	E
0	.4050000E+03	.2489800E+05	.2120010E+05	.7961000E+04
1	.4250640E+03	.2830748E+05	.2716169E+06	.5261767E+05
2	.4250640E+03	.7011356E+06	.5489450E+09	.9116905E+05

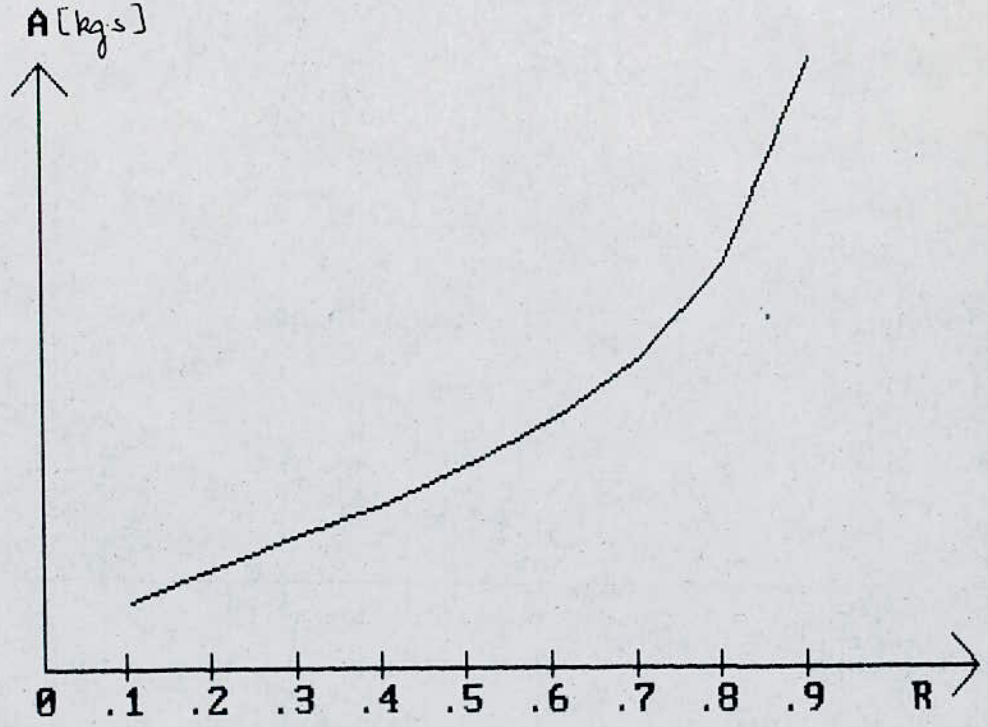
Z3=	Z6=
.1369663E+02	.1381328E+04

==

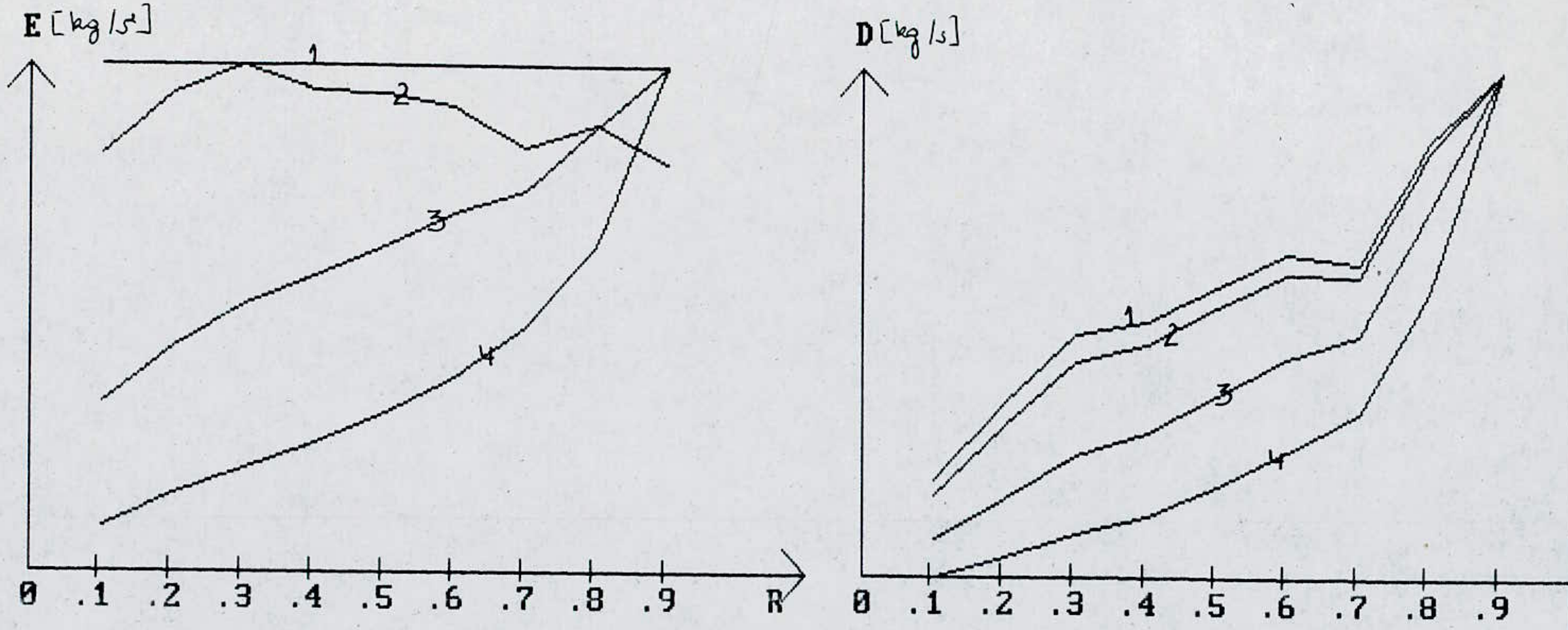
```
REM===TRACE DE COURBES POUR UNE DENSITE # CONSTANTE===
REM======ET POUR DIFFERENTES VALEURS DE G1===========
SCREEN 3:CLS
DIM A(9,6),A$(6)
A$(1)="A":A$(2)="B":A$(3)="D"
A$(4)="E":A$(5)="Z0":A$(6)="Z1"
OPEN "A:T1.DAT" FOR INPUT AS 1
FOR J=1 TO 6:FOR K=1 TO 4
AM(J)=0
0 FOR I=1 TO 9
0 INPUT #1,A(I,J):A=A(I,J)
0 IF A< AM(J) THEN  130 ELSE AM(J)=A
0 REM ***
0 NEXT
0 PSET (100,300)
0 DRAW "U200G10E10F10H10D200R350H10F10G10E10"
0 FOR X=30 TO 300 STEP 32:PSET(100+X,305):DRAW"U10":NEXT X
0 LOCATE 20,13:PRINT"0  .1  .2  .3  .4  .5  .6  .7  .8  .9"
0 LOCATE 19,60:PRINT"R"
0 LOCATE 6,13:PRINT A$(J)
0 FOR I=2 TO 9 :X1=32*(I-1)+100:Y1=300-A(I-1,J)*200/AM(J)
0 X2=32*(I)+100:Y2=300-A(I,J)*200/AM(J)
0 LINE(X1,Y1)-(X2,Y2):NEXT:NEXT
0 LOCATE 23,20:PRINT"TAPEZ SU LA BARRE D'ESPACE";
0 IF INKEY$<>" " THEN 250 ELSE CLS
0 NEXT
0 CLOSE
```

```
REM======PROGRAMME D'ORDONNENSEMENT=======
DIM A(36,6)
CLS
OPEN "A:U.DAT" FOR INPUT AS 1
OPEN "A:U1.DAT" FOR OUTPUT AS 2
FOR I=1 TO 36
5 FOR J=1 TO 6
INPUT #1,A(I,J)
NEXT
5 NEXT
0 CLOSE #1
0 FOR J=1 TO 6
00 FOR I=1 TO 36
10 PRINT #2,A(I,J);",";
15 PRINT A(I,J);",";
20 NEXT
25 PRINT
30 NEXT
40 CLOSE
```





1: $G1 = 0$
2: $G1 = 3\ 10^5$ [N/m^3]
3: $G1 = 3.\ 10^6$
4: $G1 = 3.\ 10^7$

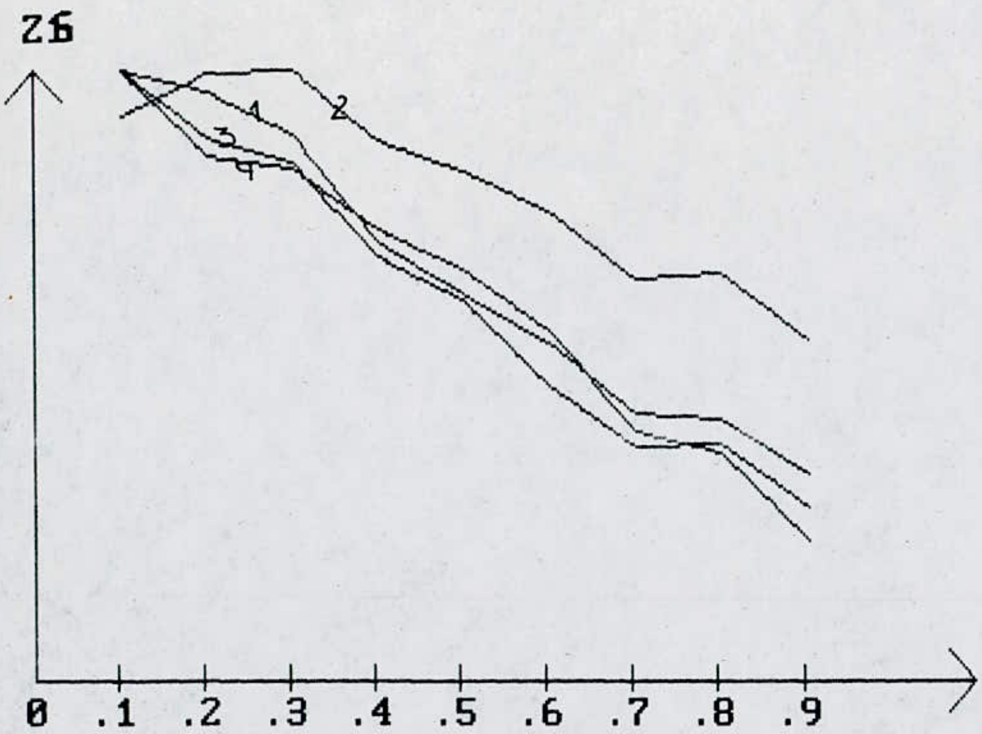


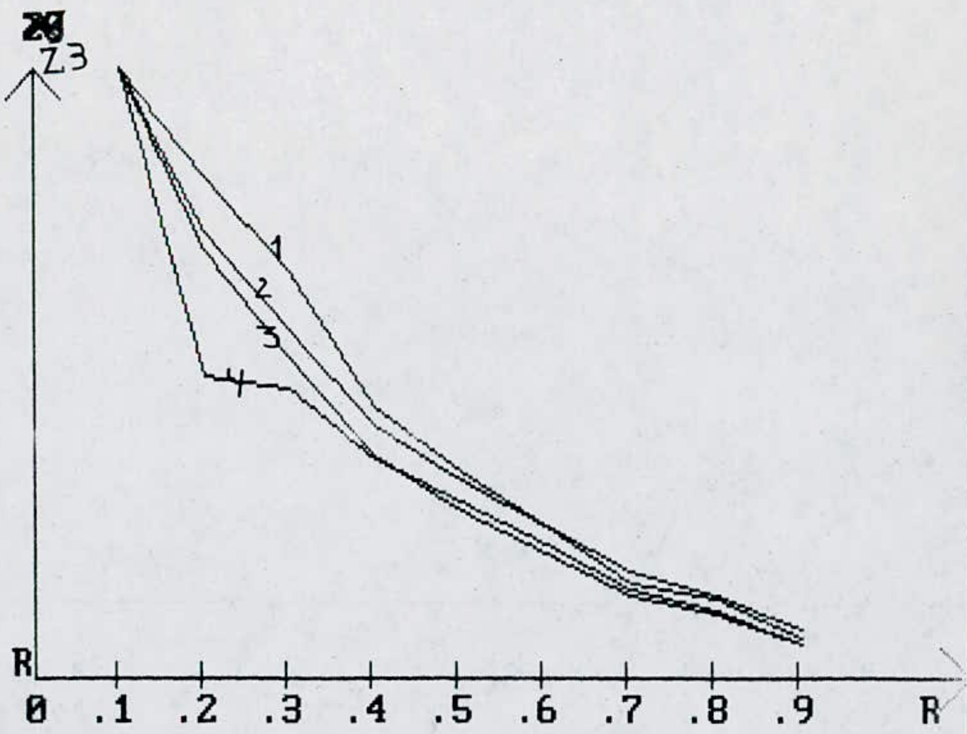
1: $G1 = 0$

2: $G1 = 3 . 10^5$ [N/m³]

3: $G1 = 3 . 10^6$

4: $G1 = 3 . 10^7$





COURBES DE DISPERSIONS POUR UNE
DENSITE SPECTRALE # CONSTANTE
ET DIFFERENTES VALEURS DE G1

1: G1 = 0
2. G1 = 3 10^5 [N/m3]
3 G1 = 3 10^6
4 G1 = 3 10^7

Interpretation des resultats:

-Nous remarquons que à peu-près toutes les courbes presentent au moins un point de discontinuité et, ceci est dût à notre avis à la methode de Gauss-Seidel en simple precision qui n'effectue que deux iterations qui sont quelquefois insuffisantes pour approcher de la solution optimale pour une valeur donneé de R.

. L'influence de γ (G1): γ n'a aucune influence sur A car A est indépendante de γ. Pour les coefficients B, D et E, plus γ augmente et plus, ces paramètres diminuent c'est à dire que B, D, E varient d'une façon inversement proportionnelle par rapport à γ, en d'autres termes on peut dire que la non linéarité caracteriseé par le paramètre γ diminue de **la valeur** de ces coefficients. Pour ce qui est des dispersions Z0, Z1, Z3 et Z6 plus γ augmente, plus ces dispersions diminuent (voir courbes) sauf pour le cas où $\gamma = 3.10^5$ et, ceci est dût au fait que le vecteur initial, choisi est trop loin de la solution optimale recherchée et 2 iterrations sont insuffisantes pour l'atteindre; un calcul en double precision serait préférable, mais malheureusement, ne disposant pas de documentation sur l'utilisation de la double precision en Fortran 'microsoft', on était dans l'obligation de faire les calculs en simple precision.

Donc la non-linéarité diminue les dispersions de l'accélération et celles de l'écart divisées par λ pour les differentes densités considerées.

Si on choisi une valeur de $\sigma_{\ddot{x}_1}$ qu'on appelera $\sigma_{\ddot{x}_1 lim.L}$ dans d'un systeme lineaire ($\gamma=0$), on peut tirer la valeur de $\sigma_{\ddot{x}_1 lim.N.L}$ correspondant à $\gamma \neq 0$ ainsi que $\sigma_{x-x_0 L}$ et $\sigma_{x-x_0 N.L}$ en respectant le critére d'optimisation; on determine ainsi la valeur de $R(\lambda)$ correspondante à partir de laquelle on tire les coefficients $(A, B, D, E)_{Lineaire}$ et $(A, B, D, E)_{N.L}$. Une fois, ces coefficients connus, on determine les fonctions de transfert respectives, faire leur rapport et voir l'influence de la non linearité sur le systeme lineaire.

CONCLUSION

* La methode de linéarisation statistique est un moyen trés éfficace pour trouver et avec une bonne approximation le systeme optimum de vibro-isolation d'objets considerés comme modeles à parametres discrets.

- Son efficacité réside dans le fait que l'on peut l'assimiler, à un facteur de non linéarité prés, à un systeme linéaire dont l'étude est plus simple et les calculs plus faciles.

* La fonction caractaristique $\phi(s)$ qui decrit le

système de vibro-isolation ne dépend, dans le cas d'un bruit blanc, que de la structure de l'objet à vibro-isoler et du paramètre de la non linéarité (γ) tandisque dans le cas des vibrations forcées, il y'a en plus les paramètres de la densité spectrale qui rentre en jeu.

* la forme des équations dynamiques utilisées dans le cas de la non linéarité symetrique est:

$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma x^3 = F(t)$ où l'on a quatre parametres à fixer, il serait beaucoup plus préférable d'avoir une forme plus générale qui s'ecrit:

$\ddot{x} + 2\omega_0 \xi \dot{x} + \omega_0^2 x + \gamma_0 x^3 = f(t)$ dont le parametre ξ est addimensionnel et étudier ainsi l'influence de la non linearité du systeme à vibro-isoler sur le systeme de vibro-isolation par rapport au parametre ξ^2 pour des valeurs de γ_0 fixeés et en prenant la valeur de ω_0 la plus defavorable c'est à dire celle qui correspond au cas où la densite spectrale atteint son maximum.

l'étude serait ainsi **indépendante des valeurs numeriques** des parametres de l'objet à vibro-isoler, on peut même tracer des abaques pour chaque non linearité approximeé par la methode de linéarisation statistique.

BIBLIOGRAPHIE

1. "Random processus in N.L control systems"
   A.A Parvozvanskii Academic press (N.Y - LONDON)
   ENP côte 518.1 PER.

2. G.C Newton. Jr. L.A. GOULD. JF KAÏSER
   "ANALYTICAL design of linear feedback controls

3. Marek Ksiazek et C. Ahri Kencheikh.
   "vibro-isolation optimum des excitations stochastiques"

4. Z. Boutaghou et Marek Ksiazek
   "Vibro-isolation optimum d'une structure mecanique"

5. P. LIGNELET
   "FORTRAN 77" MASSON.

6. Techniques de l'ingénieur
   "MECANIQUE ET CHALEUR"

7 "Traités theoriques"
   Revue ASME V. n°: 4 serie n°: 4

8 "Vibrations et acoustique"
   Revue n°: 8 ASME.

9 "METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES"
   M. BOUMAHRAT et A. GOURDIN EDITION O.P.U

EXTRASTRONG