

42/83

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

USTHB

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

2EX

PROJET DE FIN D'ETUDES

Diplôme d'Ingénieur

ANALYSE DES SYSTEMES MECANIKES  
PAR ANALOGIES ELECTROMECHANIKES  
ET IMPEDANCE

Proposé par:  
M-KSIAZEK  
Maitre de Conférences  
à l'ENPA

Etudié par:  
A-ZERROUATI

Promotion Janvier 1983



UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

U S T H B

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

Diplôme d'Ingénieur

ANALYSE DES SYSTEMES MECANQUES  
PAR ANALOGIES ELECTROMECHANIQUES  
ET IMPEDANCE

Proposé par :  
M-KSIAZEK  
Maitre de Conférences  
à l'ENPA

Etudié par :  
A-ZERROUATI

Promotion Janvier 1983



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات

وزارة التعليم  
البحث العلمي

جامعة وهران  
المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
كلية العلوم الهندسية

بحث اتصال الدراسة ليل،

دكتور محمد بن بركة

في  
مهندسة الكهنة

ملاحظات على عمل محمد بن بركة  
في مهندسة الكهنة

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
كلية العلوم الهندسية  
جامعة وهران

مؤرخة وهران

علي زروالي

طبعة، الجزائر، 1985



## Remerciements

Je saisis cette occasion pour remercier vivement mon promoteur M<sup>ex</sup> MAREK-KSIAZEK pour son aide et suivi durant toute cette étude.

J'exprime aussi mes remerciements à tous les professeurs qui ont contribué à ma formation.

Enfin je remercie tous les amis pour leurs aides matériels.

## But du Travail.

- 1) - Description des méthodes d'analyse des systèmes mécaniques en utilisant l'analogie électromécanique et la notion d'impédance.
- 2) - Donner dans la manière applicable pour l'ingénieur mécanicien les procédures des méthodes pour l'analyse des systèmes mécaniques sur exemples de systèmes simples et complexes.
- 3) - Comparaison de l'efficacité des méthodes d'impédances et des méthodes classiques pour le calcul de fréquences propres et d'autres propriétés dynamiques des systèmes complexes.
- 4) - Proposition d'un essai pratique pour confirmation des résultats théoriques.

## Introduction

### 1- Analogies électromécaniques

A l'origine, les analogies avaient un but plutôt pédagogique. Elles étaient destinées à faciliter la compréhension d'un phénomène en se référant à une image semblable prise dans un domaine plus familier. Peu à peu les analogies électromécaniques faisaient un grand progrès dans la similitude des systèmes mécaniques aux circuits électriques, ce qui a permis à l'ingénieur mécanicien d'en tirer de grands avantages. L'analogie électromécanique consiste à transposer des problèmes physiques du domaine où ils se rencontrent dans un <sup>autre</sup> domaine plus familier et où les montages expérimentaux sont plus aisés à réaliser. Le modèle de systèmes mécaniques est non seulement difficile à réaliser mais aussi pénible à mettre au point; Généralement un modèle mécanique n'est réalisable que partiellement; Dans ces conditions on fait recours à l'analogie électromécanique et après avoir établi une convenable similitude entre grandeurs mécaniques et grandeurs électriques, il est possible de synthétiser un système globalement; vérifier les éléments et leurs influences sur l'ensemble du système, cela est très possible, du fait qu'une maquette électrique est à faibles dimensions et permet de reproduire les phénomènes et caractéristiques analogues et celles d'un système mécanique.



qui peut être à immenses dimensions. De plus la mesure sur un circuit électrique est relativement simple et exacte; les montages et les éléments utilisés sont plus économique.

Par Analogie électromécanique on a la possibilité d'obtenir des résultats quantitatives ainsi que qualitatives.

## 2- Impédance

la popularité de la méthode d'impédance ainsi que son emploi pour l'investigation des systèmes très complexes ont augmentés plus récemment.

l'utilisation de la méthode d'impédance donne la possibilité de décomposer un système très complexe en subsystemes où l'analyse est déjà plus simple; puis le reconstituer de nouveau pour trouver les réponses aux points prévus pour l'analyse.

Si un mouvement relatif entre deux points est connu; on peut prévoir l'effet de substitution d'un autre élément à cet endroit.

l'impédance mécanique a été défini sur la base de l'analogie électromécanique; ce qui donne directement les relations entre systèmes mécaniques et systèmes électriques.

la méthode d'impédance donne la possibilité d'analyse de systèmes très complexes tels que; le corps de l'homme opérateur [6], les corps d'avions et les corps des bateaux [8] etc - - -

# I-GENERALITES

## A. Analogie électromécanique dans les milieux discrets

On distingue deux types d'analogies électromécaniques dans la similitude des systèmes mécaniques aux circuits électriques. Le premier type se base sur l'analogie "Force-tension", le second sur l'analogie "Force-courant".

Définition et description des analogies électromécaniques:

### 1. Analogie "Force-tension":

1.1.1 énoncé: dans une maille quelconque prise d'un circuit électrique dérivé, la somme algébrique des tensions aux bornes des éléments constituant cette maille est nulle.

1.1.2 Formule: si  $\Delta U_i$  est la tension au borne d'un élément de la maille, alors:  $\sum_{i=1}^n \Delta U_i = 0$ ,  $n$ : nombre d'éléments constituant cette maille.

1.1.3 exemple:



R: résistance  
L: inductance  
C: Capacité  
 $i$ : courant traversant la maille  
 $U$ : tension d'alimentation

la tension au borne de chacun des éléments: R, L et C est:

$\Delta U_R = R \cdot i$ ;  $\Delta U_L = L \cdot \frac{di}{dt}$ ;  $\Delta U_C = \frac{1}{C} \int i dt$ , en vertu de la seconde

loi de Kirchhoff on a:  $L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt + R \cdot i - U(t) = 0$  or  $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ ,

( $q$ : charge électrique);  $[L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = U(t)]$  (1-1)

1-2 loi fondamentale de la mécanique:

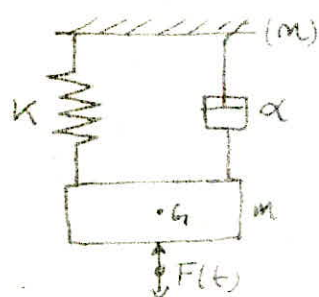
1-2-1 énoncé: la somme algébrique de toutes les forces agissantes sur une borne mécanique (une borne mécanique est un point



rigide).  $y$  comprise la force d'inertie est nulle.

1-2-2 formule: si  $F_i$  est une force agissant sur une borne donnée, alors  $\sum_{i=1}^m F_i = 0$ ,  $m$ : est le nombre de forces agissant sur la borne considérée.

1-2-3. exemple:



$\alpha$ : coefficient de résistance mécanique de l'amortisseur visqueux sans masse.  
 $k$ : raideur du ressort sans masse.  
 $m$ : masse.  
 $x$ : déplacement de la masse par rapport à la référence (m)

le point G: Centre de gravité de m

représente une borne commune aux trois éléments mécaniques, et sur lequel agissent les forces suivantes:  $F(t)$ : force extérieure.

$F_m = m d^2x/dt^2 = m\ddot{x}$ ,  $F_k = kx$ : force de rappel du ressort et

$F_\alpha = -\alpha dx/dt = -\alpha \dot{x}$ : force de résistance de l'amortisseur.

En vertu de la loi fondamentale de la mécanique on a:  $F_m + F_k + F_\alpha - F(t) = 0$

$$\text{ou } m\ddot{x} + kx + \alpha \dot{x} - F(t) = 0, \quad [m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F(t)]_{[1-2]}$$

Remarque: à partir des points (1.1) et (1.2) on peut faire les constatations suivantes: la force mécanique  $F(t)$ ; la borne mécanique et l'équation différentielle 1-1 sont respectivement assimilables à: la tension électrique  $u(t)$ , la maille électrique et l'équation différentielle 1-2. de cela il en résulte qu'aux éléments mécaniques: masse, amortisseur et ressort on peut faire correspondre respectivement: une inductance, une résistance et une capacité, de même au déplacement  $x$  on peut faire correspondre la charge électrique  $q$ , ( $x \equiv q/q_0 \equiv i$ )

"D'où une définition à un niveau plus général de l'analogie "Force-Tension"

"Force-Tension"



1.3. Transposition de systemes mecanique en circuits electriques.

1.3.1. Cas d'un ensemble mecanique en parallele.

Sur l'exemple mecanique donne en 1.2.3 on voit bien que les elements ont une borne commune qui est la masse ou son centre de gravite' (en mecanique on represente un corps rigide par son centre de gravite'), la reference (m) represente une deuxieme borne commune pour toutes les elements, alors le systeme mecanique est compose d'elements en parallele. Tandis que le circuit electrique correspondant donne en 1.3.1 est constitue d'elements connectes en serie.

D'une facon generale a un systeme mecanique constitue d'elements en parallele, correspond un circuit electrique constitue en serie.

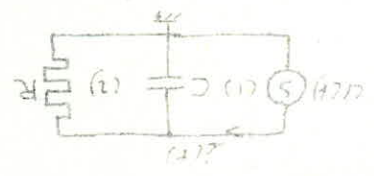
1.3.2. Cas d'un ensemble mecanique en serie.

Soit le systeme mecanique ci-dessous :



systeme mecanique en serie

circuit electrique en parallele



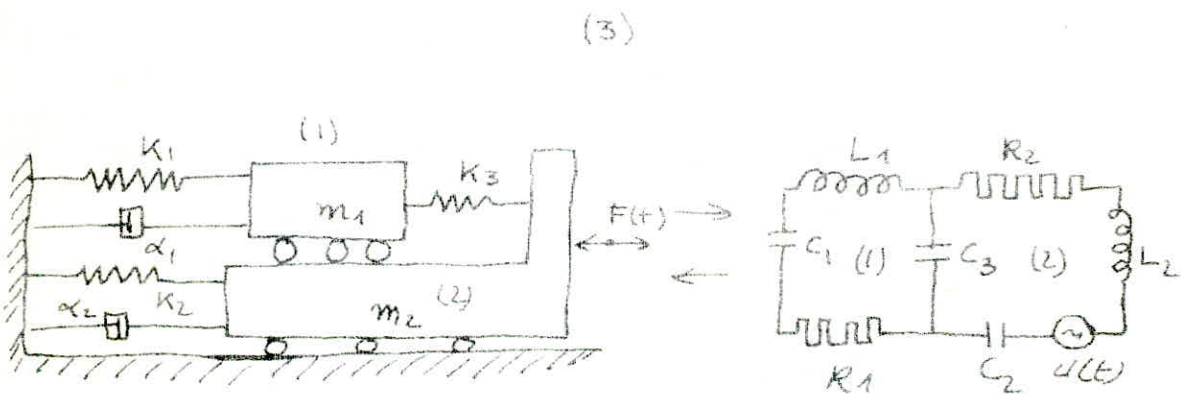
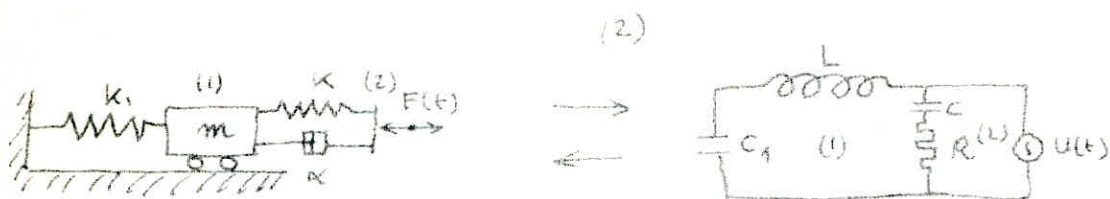
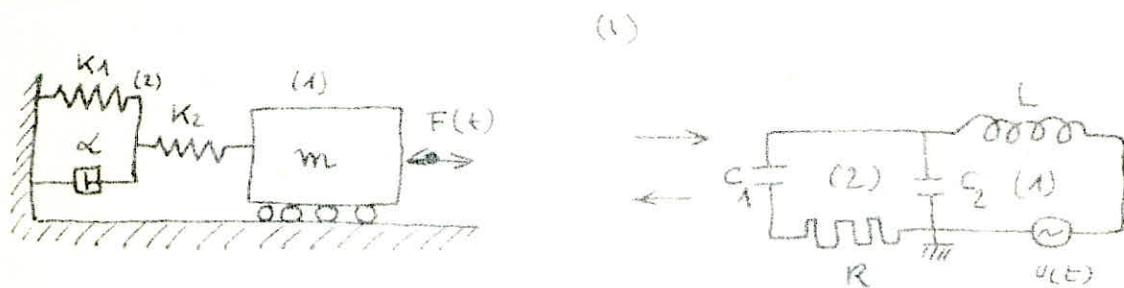
Les bornes mecaniques (1) et (2) correspondent respectivement aux mailles (1) et (2).

On voit bien qu'a un systeme mecanique d'elements en serie correspond un circuit electrique d'elements connectes en parallele et vis versa. On peut montrer sur des exemples que plus les systemes mecaniques sont complexes plus leur transposition en circuits electriques devient difficile.

Remarque: Afin d'eviter toute confusion entre les ensembles mecaniques en serie et en parallele, tenons que deux elements

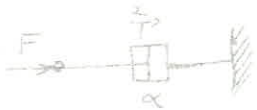

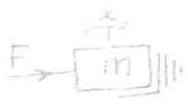



mécaniques sont en parallèle lorsqu'ils sont attaqués par la force extérieure en leur point de jonction.

1-3.3 Exemple plus compliqués :



on donne sur la page suivante la Table (u) résumé de l'analogie "Force-tension"

Table (1): [Analogie "Force - tension"]

Grandeurs mecaniques	Grandeurs elétriques
<ul style="list-style-type: none"> <li>. Force : <math>F(t)</math></li> <li>. raideur : <math>K</math></li> <li>. Coefficient de resistance : <math>\alpha</math></li> <li>. masse : <math>m</math></li> <li>. vitesse : <math>v</math></li> <li>. déplacement : <math>x</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Tension : <math>u(t)</math></li> <li>Capacité : <math>1/C</math></li> <li>Resistance : <math>R</math></li> <li>inductance : <math>L</math></li> <li>courant : <math>i</math></li> <li>charge : <math>q</math></li> </ul>
<p>Amortisseur</p>  <p><math>F = \alpha \cdot v = \alpha \cdot \dot{x}</math></p> <p>énergie = <math>F \cdot v = \alpha \cdot v^2</math></p>	<p>Résistance</p>  <p><math>u(t) = R \cdot i = R \cdot \dot{q}</math></p> <p>énergie = <math>u \cdot i = R \cdot \dot{q}^2</math></p>
<p>masse</p>  <p><math>F = m \frac{dv}{dt} = m \ddot{x}</math></p> <p>énergie = <math>\frac{1}{2} m v^2</math></p>	<p>inductance</p>  <p><math>u = L \frac{di}{dt} = L \ddot{q}</math></p> <p>énergie = <math>\frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}^2</math></p>
<p>ressort élastique</p>  <p><math>F = K \int v dt = Kx</math></p> <p>énergie = <math>\frac{1}{2} F^2 / K</math></p>	<p>Capacité</p>  <p><math>u = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \cdot q</math></p> <p>énergie = <math>\frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2</math></p>



## 2 Analogie "Force - courant":

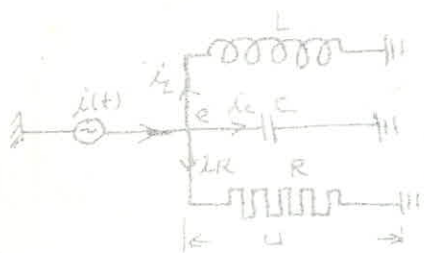
### 2.1. Première loi de Kirchhoff:

2.1.1 énoncé: Soit un noeud électrique pris arbitrairement d'un circuit électrique dérivé, la somme algébrique de tous les courants traversant les conducteurs aboutissant à ce noeud est nulle.

2.1.2 formule:  $\sum_{k=1}^n i_k = 0$ , où  $n$ : nombre de conducteurs aboutissant au noeud: e.



### 2.1.3 exemple:



le courant traversant chacun des éléments est:  $i_R = \frac{u}{R}$ ;  $i_L = \frac{1}{L} \int u dt$  et  $i_C = C \cdot \frac{du}{dt}$ .  
en vertu de la première loi de Kirchhoff on

a:  $i_R + i_C + i_L - i = 0$  ou  $\frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt$ , soit  $u = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ .  
 $\left\{ C \cdot \ddot{v} + \frac{1}{R} \dot{v} + \frac{1}{L} v = i(t) \right\}$  (2-1).

## 2.2 loi fondamentale de la mécanique:

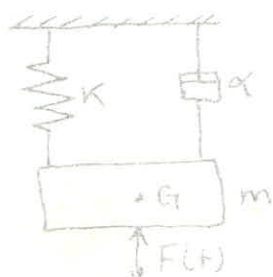
2.2.1. énoncé: la somme algébrique de toutes les forces agissantes sur un noeud mécanique est nulle.

### 2.2.2 formule



$\sum_{k=1}^n F_k = 0$ ;  $n$ : nombre de forces agissantes sur le noeud  $m$ .

### 2.2.3 exemple:



les forces agissantes sur la masse  $m$  sont:  
 $F_K = -Kx$ ;  $F_\alpha = \alpha \frac{dx}{dt} = \alpha \dot{x}$ ;  $F_m = m \ddot{x}$  et  $F(t)$   
 en vertu de loi fondamentale de la mécanique on a:  $F_m + F_\alpha + F_K - F(t) = 0$ .

$$\text{ou } (m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \kappa x = F(t)) \quad (2-2).$$

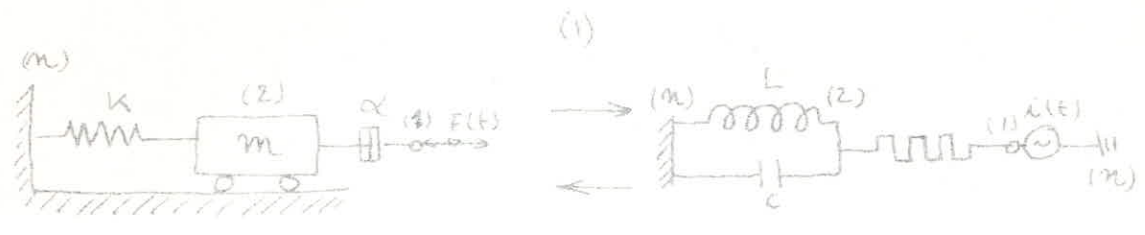
à partir des points 2-1 et 2-2 on peut faire les constatations suivantes : la force  $F(t)$ , la borne mécanique et l'équation différentielle (2-2) sont respectivement assimilables à : le courant  $i(t)$  ; le nœud électrique et l'équation différentielle (2-1) ; de cela il en découle qu'aux éléments mécaniques : masse  $m$ , ressort  $\kappa$  et amortisseur  $\alpha$  on peut faire correspondre respectivement les éléments électriques : capacité  $c$ , self  $L$  et résistance  $R$ . L'analogie des paramètres est comme suite : ( $m \equiv c$ ) ; ( $\kappa \equiv 1/L$ ) et ( $\alpha \equiv 1/R$ ) - de même à la vitesse  $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$  on peut faire correspondre la tension électrique  $u$ .

"D'où une définition plus générale de l'analogie Force-courant"

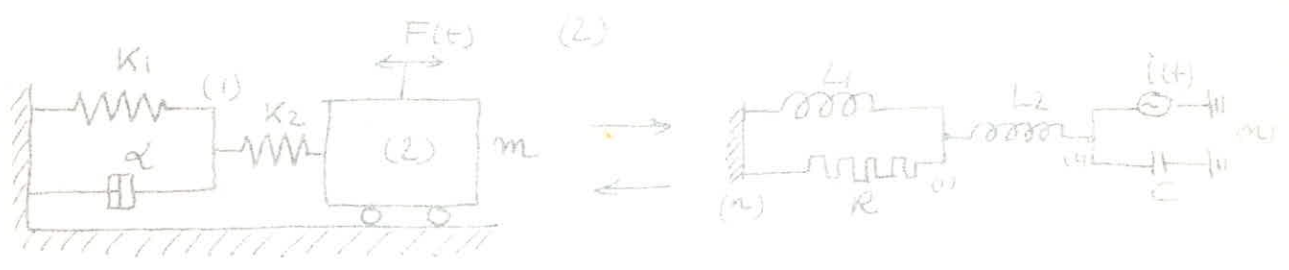
2-3 Transposition : sur les deux exemples donnés en 2-1-3. et 2-2-3 on voit bien que les deux bornes de chacun des éléments mécaniques : ressort et amortisseur correspondent respectivement aux deux bornes de chacun des éléments électriques : inductance et résistance. Pour la masse l'une de ses bornes est confondue avec son centre de gravité l'autre à la référence ( $n$ ). La capacité analogue à la masse aura obligatoirement une borne au correspondant électrique de la référence ( $M$ ), donc le sol.

On se servant tout simplement des correspondances établies ci-dessus on arrive à transposer n'importe quel système mécanique en un circuit électrique courant.

2.3.4 exemple plus compliqués:





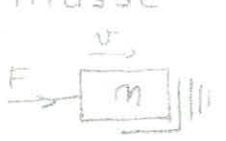
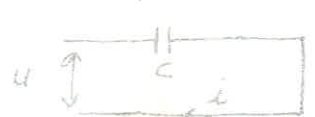
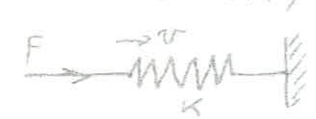
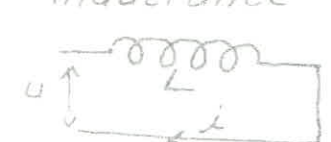
le ressort et la masse ont deux bornes communes, l'une la référence (n) l'autre le centre de gravité de la masse (2), (donc éléments en parallèle) la borne (2) de l'amortisseur étant commune à la borne des éléments précédents, à la borne d'action de la force extérieure  $F(t)$



on voit bien que les schémas mécaniques et électriques se correspondent.



Table (2) : [Analogie : "Force - courant"]

Grandeurs mécaniques	Grandeurs électriques
<p>Force : <math>F(t)</math></p> <p>Coefficient de Résistance : <math>\alpha</math></p> <p>masse : <math>m</math></p> <p>raideur : <math>\kappa</math></p> <p>vitesse : <math>v</math></p> <p>déplacement : <math>x = \int v dt</math></p>	<p>Courant : <math>i(t)</math></p> <p>Conductance : <math>1/R</math></p> <p>capacité : <math>1/C</math></p> <p>inductance : <math>1/L</math></p> <p>tension : <math>u</math></p> <p>_____ <math>\int u dt</math></p>
<p>Amortisseur</p>  <p><math>F = \alpha \cdot v = \alpha \cdot \frac{dx}{dt} = \alpha \dot{x}</math></p> <p>énergie : <math>F \cdot v = \alpha \cdot v^2</math></p>	<p>Résistance</p>  <p><math>i = u/R \rightarrow q = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = \frac{1}{R} \dot{u}</math></p> <p>énergie : <math>u \cdot i = \frac{1}{R} u^2</math></p>
<p>masse</p>  <p><math>F = m \cdot \dot{v} = m \ddot{x}</math></p> <p>énergie : <math>\frac{1}{2} m v^2</math></p>	<p>capacité</p>  <p><math>i = C \cdot \dot{u} \rightarrow q = C \cdot \dot{u}</math></p> <p>énergie : <math>\frac{1}{2} C \cdot u^2</math></p>
<p>ressort élastique</p>  <p><math>F = \kappa \int v dt = \kappa x</math></p> <p>énergie : <math>\frac{1}{2} F^2 / \kappa</math></p>	<p>inductance</p>  <p><math>i = \frac{1}{L} \int u dt \rightarrow q = u/L</math></p> <p>énergie : <math>\frac{1}{2} L \cdot i^2</math></p>

3. Unités à employer lors du passage d'un système mécanique à un système électrique et vis-versa :

la règle est d'adopter

dans chaque domaine un système d'unités cohérent. On peut adopter le système C.G.S ou Giorgi en mécanique comme en électricité. On peut également utiliser le système C.G.S en mécanique et le système Giorgi en électricité et vis-versa. Cette correspondance est possible du fait que l'analogie électro-mécanique est surtout formelle. Comme il faut bien se garder dans l'état actuel de la science de donner un sens physique aux analogies.

On donne ci-dessous la correspondance des unités (Giorgi) employées en électricité aux unités (C.G.S) utilisées en mécanique. Pour l'analogie "Force - courant"

unités mécaniques	unités électriques
Force [dynes]	Courant [Amperes]
vitesse [cm/s]	Tension [Voltes]
masse [g]	Capacité [Farades]
souplesse [cm/dynes]	Inductance [Henrys]
Coefficient d'amortissement visqueux $\times$	Resistance [mhos]

## -B- Notion d'impédance

### 1) Définition:

On définit l'impédance mécanique  $Z_m$  comme le rapport de la valeur maximale de la force harmonique  $F$  appliquée en un point à la valeur maximale de la réponse  $R$  en ce même point:  $Z_m = F/R$ ; l'admittance  $Y_m$  est l'inverse de l'impédance:  $Y_m = \frac{1}{Z_m} = R/F$ .

la réponse peut être: un déplacement, une vitesse ou une accélération.

on suppose linéaire le système à étudier et comme on s'intéresse à l'analyse harmonique, c.à dire que  $F(t)$  peut prendre l'une des deux formes:  $F = F_0 \cos \omega t$  ou  $F = F_0 \sin \omega t$ , la réponse comme vitesse sera obligatoirement de la forme:  $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi)$  ou  $v = v_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Pour généraliser on prendra une combinaison linéaire des deux formes possible:  $F = F_0 \cos \omega t + j F_0 \sin \omega t = F_0 e^{j\omega t}$  et  $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi) + j v_0 \sin(\omega t + \varphi) = v_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ . l'impédance vitesse sera:  $Z_m^v = F/v = |Z_m^v| e^{j\theta}$ , ou  $|Z_m^v| = \frac{F_0}{v_0}$  rapport de l'amplitude de l'excitation à l'amplitude de la vitesse, et  $\theta = -\varphi$ : argument: déphasage entre la réponse et l'excitation.

Par définition la vitesse est  $v = \frac{dx}{dt} = j\omega x = s \cdot x$ ; alors  $Z_m^D = F/x = (F/v) \cdot s = Z_m^v \cdot s$ ; pour obtenir l'expression de

l'impédance déplacement il suffit de multiplier l'expression de l'impédance vitesse par  $s = j\omega$ .

l'accélération est:  $\gamma = \frac{dv}{dt} = j\omega \cdot v$ ; l'impédance accélération est:  $Z_m^\gamma = F/\gamma = \frac{F}{s \cdot v} = \frac{1}{s} Z_m^v$ ; pour obtenir l'expression de l'impédance accélération il suffit de diviser l'expression de l'impédance vitesse par  $s$ .

lorsque l'impédance  $Z$  est connue, la réponse à une excitation extérieure  $F$  est donnée par:  $R = \mathcal{R}(F(t)/Z)$ :



Harmonique  $F(t)$  est donnée par  $R = \Re(F/2)$  : Partie réelle ou par  $R = \Im(\frac{F}{2})$  Partie imaginaire.

$|Z| = |Z| \cos \theta + j |Z| \sin \theta$  ;  $|Z| \cos \theta$  : Partie réelle est proportionnelle à l'énergie perdue dans le système et  $|Z| \sin \theta$  : Partie imaginaire correspond à tous les éléments qui fournissent de l'énergie au système

## 2 Impédance d'éléments simples:

a) Ressort: Soit un ressort élastique AB de raideur  $K$ .



l'allongement du ressort étant  $x_B - x_A = x$  ;  $F =$  Force de rappel du ressort donnée par :  $F = K(x_B - x_A) = Kx$  ; soit  $x = x_0 e^{j\omega t}$

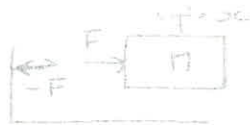
$$v_B - v_A = \frac{d(x_B - x_A)}{dt} = \frac{dx}{dt} = v = j\omega x = s \cdot x \quad ; \quad (s = j\omega)$$

$$Z_{mk}^v = F/v = \frac{Kx}{s \cdot x} = \frac{K}{s} \quad ; \quad \boxed{Z_{mk}^v = K/s} \quad ; \quad \boxed{Z_{mk}^D = K}$$

b) masse:

une masse  $M$  , soumise à une force  $F(t)$  , animée d'un

mouvement  $x = x_0 e^{j\omega t}$ .



$$F = +M \frac{d^2x}{dt^2} = M j\omega \frac{dx}{dt} = M \cdot s \cdot v \quad ; \quad Z_{mM}^v = F/v = \frac{M \cdot s \cdot v}{v} = Ms$$

$$\boxed{Z_{mM}^v = M \cdot s} \quad ; \quad \boxed{Z_{mM}^D = Ms^2}$$

c) Amortisseur: Soit un amortisseur visqueux de conf.  $\alpha$  , soumis à ...



$$F_A + F_B = 0 \\ \Rightarrow F_A = -F_B = F$$

$$v_B - v_A = \frac{dx_B}{dt} - \frac{dx_A}{dt} = \frac{d(x_B - x_A)}{dt} = \frac{dx}{dt} = v; F = \alpha \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot v$$

$$Z_{max}^v = F/v = \alpha v/v = \alpha$$

$$Z_{max}^v = \alpha; \quad Z_{max}^D = \alpha \cdot S$$

### 3 Impédance électrique d'éléments simples:

En se servant de la Table (U) [Analogie "Force-tension"]

On remplace les paramètres mécaniques par leurs analogues électriques dans les expressions d'impédances mécaniques déterminées en 2. on aboutit aux expressions d'impédances électriques suivantes:

impédance d'une capacité:  $Z_C^v = \frac{1}{5C}$

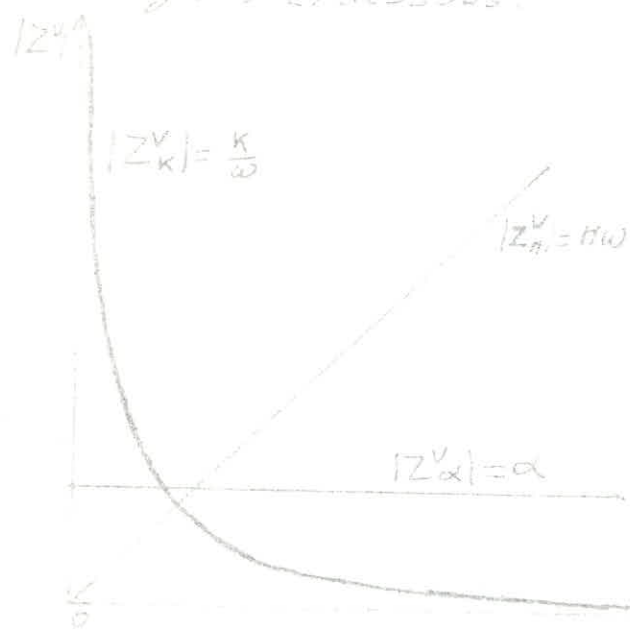
impédance d'une viself sans résistance:  $Z_L^v = 5L$

impédance d'une résistance:  $Z_R^v = R$

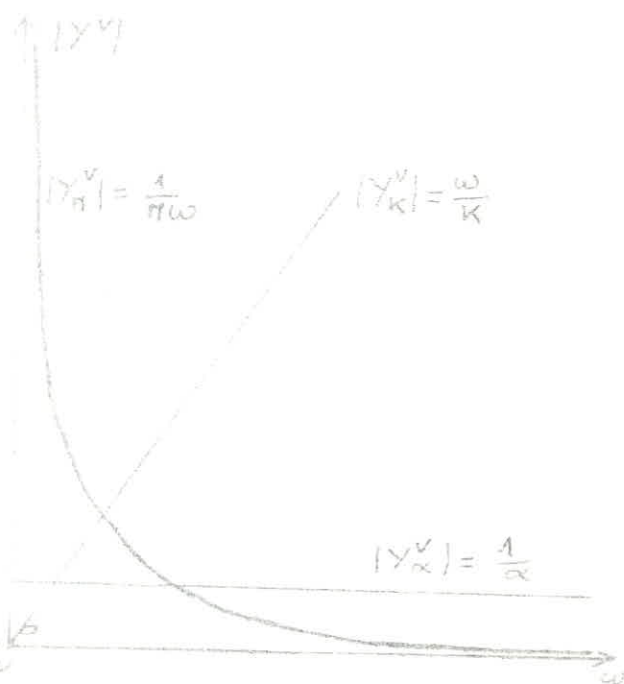
$Z_C^v$ ;  $Z_R^v$  et  $Z_L^v$  sont dites respectivement: capacitance, Réactance et inductance.

4 Variations des impédances d'éléments simples sont illustrées

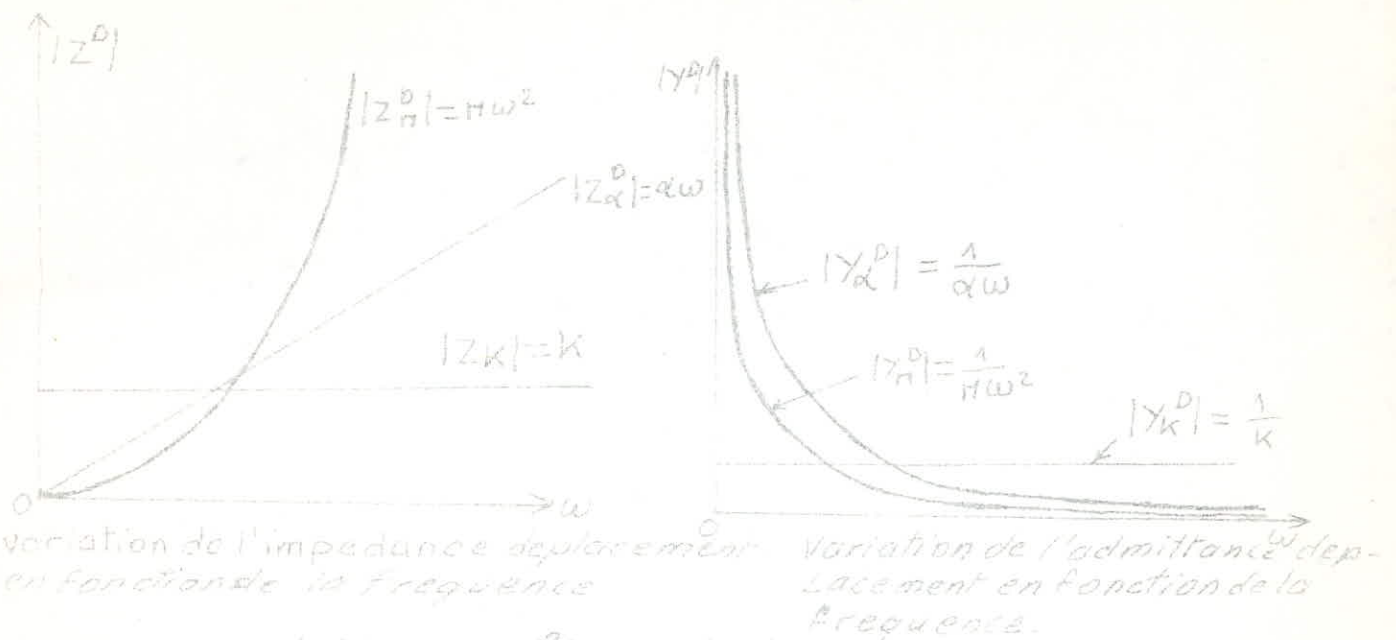
sur les figures ci-dessous:



impédance vitesse en fonction de la fréquence



Admittance vitesse en fonction de la fréquence.



#### 4.1 Interprétation graphique de l'impédance :

4.1.1 Impédance vitesse :  $|Z_m^v|$  est une droite passant par l'origine ;  $|Z_k^v|$  : demi-hyperbolique et  $|Z_\alpha^v|$  : une droite constante.

à faible fréquence :  $|Z_m^v|$  tend vers zéro de la même manière que  $\omega$  l'inertie : une grande résistance à s'opposer à la vitesse qu'on cherche à lui imprimer ;  $|Z_k^v|$  : augmente considérablement, la rigidité est dominante, à haute fréquence :  $|Z_m^v|$  augmente considérablement, la vitesse domine l'inertie,  $|Z_k^v|$  tend vers zéro, l'effet de la rigidité est faible. Pour l'amortisseur de coefficient  $\alpha$ , l'effet de résistance est indépendant de la fréquence.

4.1.2 Impédance déplacement :  $|Z_n^D|$  est une demi-Parabole,  $|Z_k^D|$  est une droite constante et  $|Z_\alpha^D|$  est une droite passant par l'origine. à faible fréquence on a : forte inertie, forte résistance et à haute fréquence on a : faible inertie et faible résistance, l'effet de rigidité ne dépend pas de la fréquence.

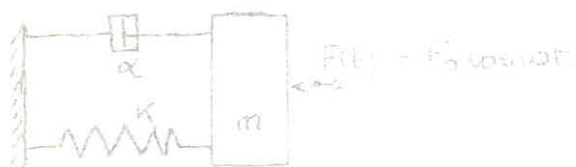


Remarque :

Généralement pour des faibles fréquences on prend comme réponse le déplacement linéaire  $x$  et pour les hautes fréquences la vitesse linéaire  $\dot{x}$ .

### 5- Variation de l'admittance de déplacement pour le plus simple système composé :

soit l'isovibrateur schématisé ci-dessous



en pratique l'admittance est préférable à l'impédance pour cette raison, on illustre les graphiques de variation de l'admittance.

#### 5.1. admittance de déplacement : $Y^D$

$$Y_m^D = \frac{1}{m s^2} ; Y_K^D = \frac{1}{K} ; Y_\alpha^D = \frac{1}{\alpha s} ; s = j\omega ; Y^D = |Y^D| \{ \cos \varphi + j \sin \varphi \}$$

$$|Y^D| = \frac{1}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}} : \text{amplitude admittance.}$$

$$\text{déphasage entre excitation et réponse : } \varphi = -\text{Arctg} \left[ \frac{\alpha \cdot \omega}{(K - m\omega^2)} \right]$$

Les graphes de  $|Y^D|$  et  $\varphi$  sont donnés sur la page suivante.

Interprétation graphique de  $|Y^D|$  et  $\varphi$  :

\* Pour  $\omega = 0$ , "état stable" : le système répond par son élasticité la rigidité du ressort est dominante, le déplacement est en phase avec l'excitation.

\* lorsque l'amplitude admittance <sup>Passé</sup> par le maximum et le déphasage entre l'excitation et la réponse est de  $-\pi/2$ , deux définitions peuvent être

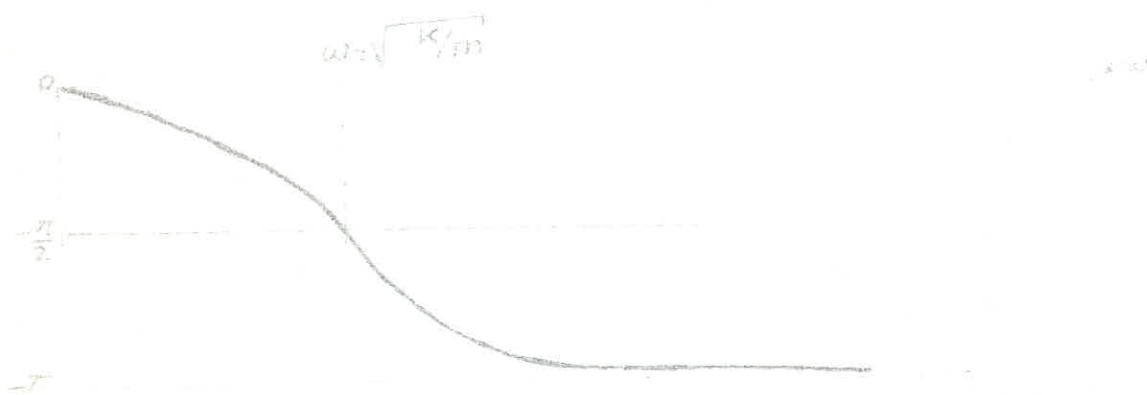
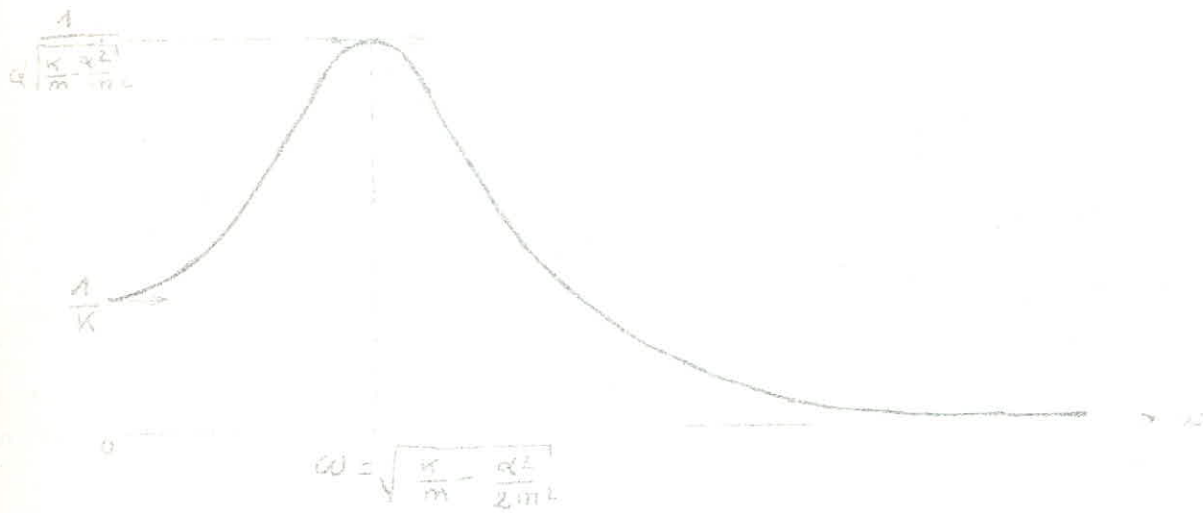
$$\text{accordées à la résonance, 1) } \omega = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}} \text{ et 2) } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

qui sont identiques pour  $\alpha$  faible. si  $\alpha > \sqrt{2} \cdot \sqrt{K \cdot m}$ , la résonance apparaît sur le graphique de  $\varphi$  seulement.

à la résonance "La sensibilité est maxima": le système répond par sa viscosité, la résistance mécanique est dominante, la vitesse est en phase avec l'excitation.

• Pour  $\omega \gg \sqrt{k/m}$ : "sensibilité minima": le système répond par son inertie, la masse est dominante, l'accélération est en phase avec l'excitation.

↑ |Y<sup>v</sup>|



## 5.2 Admittance vitesse: $Y^v$

$$Y_m^v = \frac{1}{m \cdot s} ; Y_\alpha^v = \frac{1}{\alpha} ; Y_k^v = \frac{s}{\alpha} ; Y^v = |Y^v| \{ \cos \theta + j \sin \theta \}$$

$$\text{amplitude admittance: } |Y^v| = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha} - \frac{1}{m\omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}$$

$$\text{dephasage: } \theta = \text{Arctg} \left[ \frac{k - m\omega^2}{\alpha \cdot \omega} \right]$$

## 6 lois de composition des impedances :

### 6.1 Association d'impedances en serie :

soit le systeme mecanique :



La force appliquee le long d'une chaine mecanique d'elements en serie sans masse se conserve.

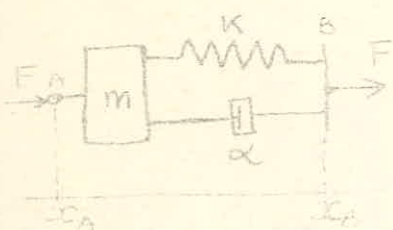
$$v_C - v_A = \frac{dx_C}{dt} - \frac{dx_A}{dt} = \frac{d(x_C - x_A)}{dt} = \frac{d(x_C - x_B) + d(x_B - x_A)}{dt} = \frac{dx_A}{dt} + \frac{dx_K}{dt}$$

$v_K + v_\alpha$  ;  $v = v_\alpha + v_K$  - l'admittance vitesse du systeme global

$$\text{est : } Y^v = \frac{v}{F} = \frac{v_\alpha + v_K}{F} = \frac{v_\alpha}{F} + \frac{v_K}{F} = Y_K^v + Y_\alpha^v ; Y^v = Y_K^v + Y_\alpha^v$$

D'une facon generale : l'admittance d'un ensemble d'elements connectes en serie est egale a la somme des admittances elementaires.

### 6.2 Association d'impedances en parallele :



systeme mecanique d'elements en parallele, une force appliquee au point de jonction d'un ensemble d'elements connectes en parallele se repartit sur ces elements

Dans le cas present on a :  $F = F_\alpha + F_m + F_K$  ; la vitesse le long du systeme est  $v_B - v_A = \frac{d(x_B - x_A)}{dt} = \frac{dx}{dt} = v$  ; soit  $x = x_0 e^{j\omega t}$  ;  $v = j\omega \dot{x}$

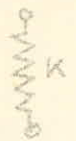





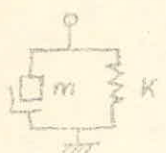

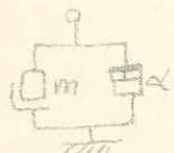

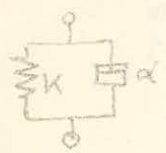


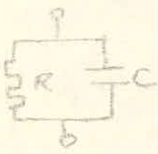
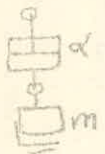
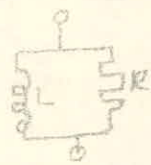
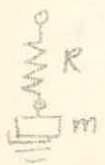
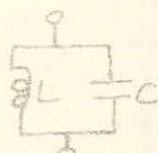
$$F_m = m \ddot{x} = m j\omega \dot{x} ; F_K = K \cdot x = \frac{K \cdot \dot{x}}{j\omega} ; F_\alpha = \alpha \cdot \dot{x}$$

$$\text{L'impedance du systeme global est } Z^v = \frac{F}{v} = \frac{F_m + F_K + F_\alpha}{v} = \frac{m j\omega \dot{x} + \frac{K \cdot \dot{x}}{j\omega} + \alpha \cdot \dot{x}}{\dot{x}} = j m \omega + \frac{K}{j\omega} + \alpha = Z_m^v + Z_K^v + Z_\alpha^v$$

d'une facon generale : l'impedance d'un ensemble d'elements connectes en parallele est egale a la somme des impedances elementaires.

On donne sur <sup>La</sup> Page suivante, une Table(3) : resume d'expressions d'impedances et admittances de systemes mecaniques et de leurs analogues electriques.



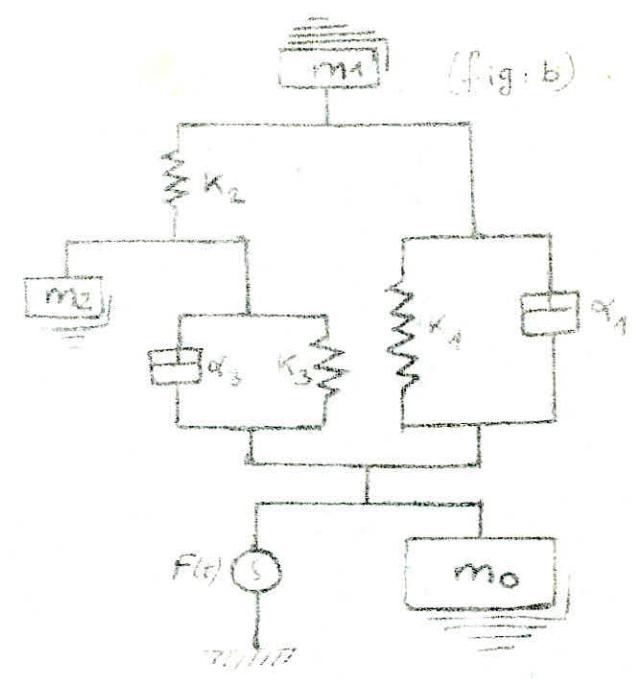
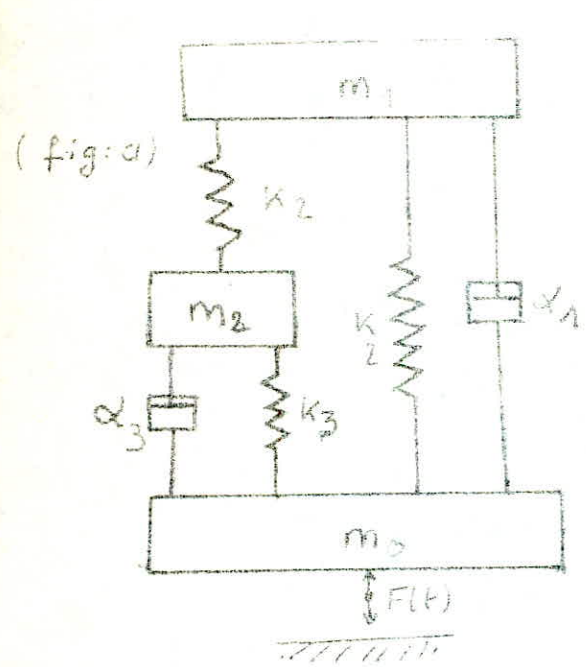
systeme mecanique			Table (3)	systeme électrique		
Schemas	Impedance $Z_m(s)$	Admittance $Y_m(s)$	Schemas	Impedance $Z(s)$	admittance $Y(s)$	
	$\frac{k}{s}$	$\frac{s}{k}$		$\frac{1}{Cs}$	$C \cdot s$	
	$\alpha$	$\frac{1}{\alpha}$		$R$	$\frac{1}{R}$	
	$m \cdot s$	$\frac{1}{m \cdot s}$		$L \cdot s$	$\frac{1}{L \cdot s}$	
	$m \cdot s + \frac{k}{s}$	$\frac{s}{m \cdot s^2 + k}$		$L \cdot s + \frac{1}{C \cdot s}$	$\frac{s}{L \cdot s^2 + \frac{1}{C}}$	
	$\alpha + m \cdot s$	$\frac{1}{\alpha + m \cdot s}$		$R + L \cdot s$	$\frac{1}{L \cdot s + R}$	
	$\alpha + \frac{k}{s}$	$\frac{s}{\alpha \cdot s + k}$		$\frac{R \cdot s + \frac{1}{C}}{s}$	$\frac{s}{R \cdot s + \frac{1}{C}}$	
	$\frac{\alpha \cdot k}{\alpha \cdot s + k}$	$\frac{\alpha \cdot s + k}{\alpha \cdot k}$		$\frac{\frac{R}{C}}{R \cdot s + \frac{1}{C}}$	$\frac{R \cdot s + \frac{1}{C}}{\frac{R}{C}}$	
	$\frac{\alpha \cdot m \cdot s}{\alpha + m \cdot s}$	$\frac{\alpha + m \cdot s}{\alpha \cdot m \cdot s}$		$\frac{R \cdot L \cdot s}{R + L \cdot s}$	$\frac{R + L \cdot s}{R \cdot L \cdot s}$	
	$\frac{m \cdot k \cdot s}{m \cdot s^2 + k}$	$\frac{k + m \cdot s^2}{m \cdot k \cdot s}$		$\frac{L \cdot \frac{1}{C} \cdot s}{L \cdot s^2 + \frac{1}{C}}$	$\frac{\frac{1}{C} + L \cdot s^2}{L \cdot \frac{1}{C} \cdot s}$	

## II APPLICATION DE LA METHODE D'IMPEDANCE POUR ANALYSE DE SYSTEMES MECANIQUES DISCRETS

### 1. Calcul de l'impédance du corps de l'homme opérateur en position d'assise:

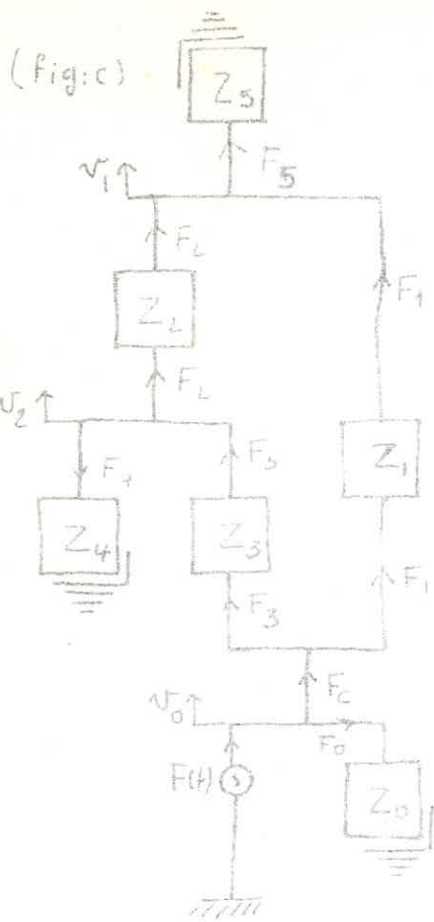
Pour montrer l'efficacité de la méthode d'impédance dans l'analyse de système mécanique, on prend comme système mécanique plus ou moins complexe le corps de l'homme opérateur en position d'assise. le Principe de calcul reste le même pour tout autre système ayant le caractère de linéarité.

le modèle mécanique peut être représenté comme sur la (fig: a)



sur la base d'analogie électromécanique "Force - courant", on transpose le système mécanique en un système électrique (fig: b)

En remplaçant chacun des systèmes simples par son impédance, on aboutit au diagramme d'impédance (fig: c).



Par analogie "Force-courant" on a:  
 $F(t) \equiv i(t)$  ;  $V \equiv u$

Calcul de l'impédance globale du système.  
 d'après la première loi de Kirchhoff  
 appliquée à chacun des nœuds on a:

$$\sum_{(i)} \vec{F}_i = 0$$

$$F_c + F_0 - F = 0 \quad (1)$$

$$F_c - F_3 - F_1 = 0 \quad (2)$$

$$F_2 + F_4 - F_3 = 0 \quad (3)$$

$$F_1 + F_2 - F_5 = 0 \quad (4)$$

d'autre part, par définition de  
 l'impédance sur la base "Force-cour-  
 ant" on a:

$$F_0 = V_0 Z_0 \quad (5)$$

$$F_1 = (V_0 - V_1) Z_1 \quad (6)$$

$$F_2 = (V_2 - V_1) Z_2 \quad (7)$$

$$F_3 = (V_0 - V_2) Z_3 \quad (8)$$

$$F_4 = V_2 \cdot Z_4 \quad (9)$$

$$F_5 = V_1 Z_5 \quad (10)$$

de la Table (3) on tire les expressions d'impédances:

$Z_0 = m_0 s$  ;  $Z_1 = \alpha_1 + k/s$  ;  $Z_2 = k_2/s$  ;  $Z_3 = \alpha_3 + k_3/s$  ;  $Z_4 = m_2 s$   
 et  $Z_5 = m_1 s$

les relations de (1) à (10) forment un système d'équations  
 linéaires de 10 inconnues:  $F_0$  à  $F_5$  et  $V_0, V_1$ , et  $V_2$

on cherche ici à déterminer  $Z = F/V_0$  en fonction de  $Z_i$ ;  $i=1, \dots, 5$

de (1)  $\rightarrow F = F_c + F_0$ , de (2)  $\rightarrow F = F_1 + F_3 + F_0 = f(Z_i) \cdot V_0$  ;  $F_0 = Z_0 \cdot V_0$

de (3)  $\rightarrow F_2 = F_3 - F_4 = F_3 - V_2 \cdot Z_4 = (V_2 - V_1) Z_2$

de (4)  $\rightarrow F_2 = F_5 - F_1 = V_1 Z_5 - F_1 = (V_2 - V_1) Z_2$



$$\begin{cases} V_2(Z_2+Z_4) - V_1 Z_2 = F_3 \\ -V_2 Z_2 + V_1(Z_2+Z_5) = F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{Z_2 \cdot F_3 + (Z_2+Z_4) \cdot F_1}{Z_2 \cdot Z_5 + Z_2 \cdot Z_4 + Z_4 \cdot Z_5} \\ V_2 = \frac{(Z_2+Z_5) \cdot F_3 + Z_2 \cdot F_1}{Z_2 \cdot Z_5 + Z_2 \cdot Z_4 + Z_4 \cdot Z_5} \end{cases}$$

On pose  $a = Z_2 \cdot Z_5 + Z_2 \cdot Z_4 + Z_4 \cdot Z_5$

en remplaçant  $V_1$  et  $V_2$  par leurs valeurs ci-dessus dans les relations (b) et (f) on aboutit au système suivant:

$$\begin{cases} \frac{Z_1(Z_2+Z_4)+4}{Z_1 \cdot a} F_1 + \frac{Z_3}{a} F_3 = V_0 \\ \frac{Z_2}{a} F_1 + \frac{Z_3(Z_2+Z_5)+9}{a \cdot Z_3} F_3 = V_0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} F_1 = \frac{Z_1(a+Z_3 \cdot Z_5)}{a + Z_3(Z_2+Z_5) + Z_1(Z_2+Z_4) + Z_1 Z_3} V_0 \\ F_3 = \frac{Z_3(a+Z_1 \cdot Z_4)}{a + Z_3(Z_2+Z_5) + Z_1(Z_2+Z_4) + Z_1 Z_3} V_0 \end{cases}$$

On remplace  $F_1$  et  $F_2$  par leurs expressions ci-dessus dans la relation  $F = F_1 + F_3 + F_0$  on arrive au résultat suivant:

$$F/V_0 = \left[ Z_0 + \frac{Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_3 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_4 + Z_2 Z_5 + Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_5 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4 + Z_2 Z_5 + Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_5 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_1 Z_3} \right]$$

$$F/V_0 = Z \Rightarrow Z = Z_0 + \frac{B}{A} = \frac{AZ_0 + B}{A}$$

$$A = Z_2 Z_4 + Z_2 Z_5 + Z_4 Z_5 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_5 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_1 Z_3$$

$$B = Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_5 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_2 Z_5 + Z_1 Z_4 Z_5 + Z_3 Z_4 Z_5 + Z_2 Z_4 Z_5$$

on remplace les  $Z_i, i=1 \text{ à } 5$  par leurs valeurs données précédemment on aura:

$$B = [k_1 k_2 \cdot m_2 + k_1 k_2 \cdot m_1 + k_2 k_3 \cdot m_2 + k_2 k_3 \cdot m_1 + k_1 \cdot k_3 m_1 + k_1 \cdot k_3 m_2] \frac{1}{s} \\ + [m_2 k_2 \alpha_1 + k_2 \cdot m_1 \alpha_1 + k_2 \cdot m_2 \alpha_3 + k_2 \cdot m_1 \alpha_3 + k_3 \cdot m_2 \alpha_1 + k_1 \cdot m_2 \alpha_3 + k_3 \cdot m_1 \alpha_1 \\ + k_1 \cdot m_1 \alpha_3] + [m_1 \cdot m_2 k_1 + m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 + m_1 \alpha_1 \alpha_3 + m_2 \alpha_1 \alpha_3] \cdot s + [m_1 \cdot m_1 \alpha_1 + m_1 \cdot m_2 \alpha_3] s^2$$

$$A = [k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3] \frac{1}{s^2} + [\alpha_1 k_1 + k_1 \alpha_3 + k_2 \alpha_3 + k_3 \alpha_1] s +$$

$$[m_1 k_2 + m_1 k_3 + m_2 k_2 + m_2 k_3 + \alpha_1 \alpha_3] s^2 + [m_1 \alpha_3 + m_2 \alpha_2] s^3 + m_1 m_2 s^4; (s = j\omega)$$

$$Z = \frac{Z_0 A + B}{B} = \frac{S [a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0]}{[b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0]}$$

avec  $[a_4 = m_0 m_1 m_2]$ ,  $[a_3 = m_0 m_1 \alpha_3 + m_0 m_2 \alpha_1 + m_1 m_2 \alpha_1 + m_2 m_2 \alpha_3]$ ;

$$a_2 = [m_0 m_2 k_2 + m_0 m_1 k_2 + m_0 m_1 k_3 + m_0 m_2 k_3 + m_0 m_1 \alpha_1 + m_2 m_1 k_1 + m_1 m_2 k_3 + m_2 \alpha_3 \alpha_1 + m_1 \alpha_1 \alpha_3]$$

$$; [a_1 = m_0 k_2 \alpha_3 + m_0 \alpha_1 k_1 + m_0 \alpha_1 k_3 + m_2 \alpha_1 k_2 + m_1 \alpha_1 k_2 + m_2 \alpha_3 k_2 + m_1 k_2 \alpha_3 + m_2 k_3 \alpha_3 + m_2 k_1 \alpha_3 + m_1 k_3 \alpha_1 + m_1 k_1 \alpha_3]$$

$$a_0 = m_0 k_1 k_3 + m_0 k_1 k_2 + m_0 k_2 k_3 + m_2 k_1 k_2 + m_1 k_1 k_2 + m_2 k_2 k_3 + m_1 k_2 k_3 + m_1 k_1 k_3 + m_1 k_1 k_3]$$

$$b_4 = m_1 m_2; b_3 = m_1 \alpha_3 + m_2 \alpha_1; b_2 = (k_2 m_2 + k_2 m_1 + k_3 m_1 + k_3 m_2 + \alpha_1 \alpha_3)$$

$$b_1 = \alpha_3 k_2 + \alpha_1 k_1 + \alpha_1 k_3 + \alpha_3 k_1; (b_0 = k_1 k_3 + k_1 k_2 + k_1 k_3)$$

Etude de l'impédance Z :

1) lorsque la fréquence de vibration d'un système donné coïncide avec la fréquence de son régime libre à résonance résulte, dans cet état,  $Z = 0$ , or  $Z = \frac{N(s)}{D(s)}$ ; alors les fréquences de résonances sont celles qui vérifient l'équation  $N(s) = 0$ ; dans notre cas le nombre de fréquences de résonance est de deux, qui coïncide avec le nombre de degré de liberté qu'a notre système.

2) Par mesure de l'impédance mécanique, on trouve une fonction  $Z(s)$  et par identification à  $Z(s)$  calculée ci-dessus, on détermine les constantes: ( $a_0$  à  $a_4$  et  $b_0$  à  $b_4$ ), qui forment un système d'équations linéaires d'inconnues les paramètres des éléments composants le système mécanique, Par sa résolution, la structure de ce dernier est complètement déterminée.

3)  $Z(s)$  sera utilisée plus loin pour analyse de système composé.

### 3. Autres emplois de la méthode d'impédance :

#### 3.1 exemple 1:

En particulier l'analyse de systèmes mécaniques complexes dans le but de déterminer les fréquences propres peut être faite plus aisément en décomposant le système global en deux subsystemes travaillant en parallèle. Le point de jonction des subsystemes n'étant soumis à aucune excitation extérieure, l'impédance du système global ou la somme des impédances des deux subsystemes est nulle (en ce point), d'où la résonance.

On montre sur un exemple simple la procédure de calcul:

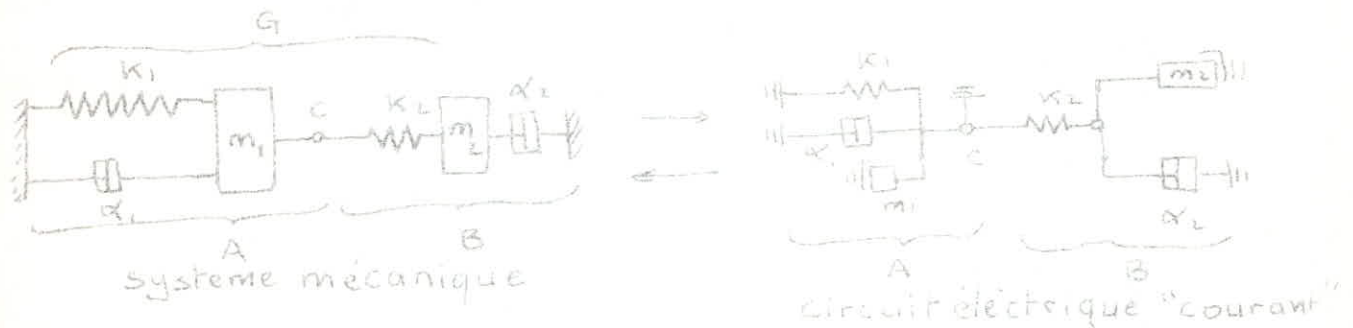


diagramme d'impédances



$$Z_{GC} = Z_{AC} + Z_{BC} = 0$$

$$Z_{AC}^D = K_1 + \alpha_1 s + m_1 s^2; \quad Z_{BC}^D = \frac{K_2 \alpha_2 + K_2 m_2 s + \alpha_2 m_2 s^2}{\alpha_2 + m_2 s}$$

$$Z_{AC}^D + Z_{BC}^D = \frac{(K_1 \alpha_2 + K_2 \alpha_2) + (K_2 m_2 + \alpha_2 \alpha_1 + m_2 K_1) s + (m_2 \alpha_2 + \alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_1) s^2 + m_1 m_2 s^3}{(\alpha_2 + m_2 s)} = 0$$

$s = j\omega$ ; les paramètres des éléments étant connus, il est possible de tirer les fréquences propres du système global G

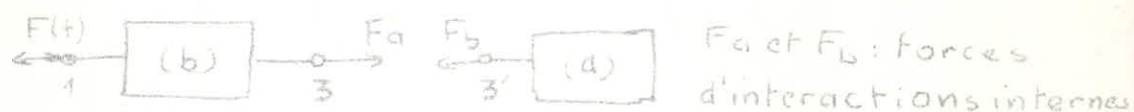
#### 3.2. exemple 2:

comme il a été dit en introduction, l'emploi de la méthode d'impédance après avoir décomposé en subsystemes de systèmes complexes facilite son analyse; cette opération est utilisée surtout lorsqu'on désire savoir la réponse

en un point donné du système global ou chercher les paramètres d'éléments composants ce système.

on montre le procédure de calcul sur un exemple:

soit un véhicule en mouvement; c'est un système composé de deux subsystemes (a) et (b), (a): système de vibration du véhicule, (b) le corps de l'homme operateur en position d'assise.



$$F_a + F_b = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{2'} \quad (2)$$

Par définition de l'admittance deplacement on:

$$x_3 = Y_{31a}^D \cdot F + Y_{33a}^D \cdot F_a \quad (3) \quad \text{et} \quad x_{3'} = Y_{3'3'b}^D \cdot F_b \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \Rightarrow F_b = -F_a \\ (2) \Rightarrow (3) \equiv (4) \end{array} \right\} \rightarrow F_a = -F \frac{Y_{31a}^D}{Y_{33a}^D + Y_{3'3'b}^D}$$

reponse au point (1):  $x_1 = Y_{11a}^D \cdot F + Y_{13a}^D \cdot F_a$

$$x_1 = \left[ Y_{11a}^D - \frac{Y_{13a}^D \cdot Y_{31a}^D}{Y_{33a}^D + Y_{3'3'b}^D} \right] F(t); \quad \text{par reciprocité on: } Y_{13a}^D = Y_{31a}^D$$

$Y_{3'3'b}^D$ : étant l'admittance deplacement du corps de l'homme operateur en position d'assise,  $Y_{3'3'b}^D = \frac{1}{SZ(s)} = \frac{1}{s^2} \left[ \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \right]$

la reponse au point (3') ou (2):

$$x_{3'} = Y_{3'3'b}^D \cdot F_b = Y_{3'3'b}^D \cdot F \frac{Y_{31a}^D}{Y_{33a}^D + Y_{3'3'b}^D} = \frac{Y_{3'3'b}^D \cdot Y_{31a}^D}{Y_{33a}^D + Y_{3'3'b}^D} \cdot F$$

$$\left[ x_2 = \frac{Y_{3'3'b}^D \cdot Y_{31a}^D}{Y_{33a}^D + Y_{3'3'b}^D} F \right] (1); \quad \text{La reponse en (1): } \left[ x_1 = \left( Y_{11a}^D - \frac{(Y_{13a}^D)^2}{Y_{33a}^D + Y_{3'3'b}^D} \right) F \right] (2)$$



## Déductions :

- 1) les valeurs de l'excitation et les paramètres des éléments étant connus, il est possible de tirer la réponse  $x$ , de (1).
- 2). Si on veut savoir quelles valeurs devront prendre les paramètres des éléments du système de vibration du véhicule pour que les valeurs de la réponse en (2) soient dans une plage donnée, il est possible de les déterminer de (2).
- 3). On cherche à avoir une réponse minimale au point (2), pour la protection et le confort du conducteur, de l'équation (1) on détermine les valeurs des paramètres des éléments du système de vibration du véhicule répondant à ces conditions.

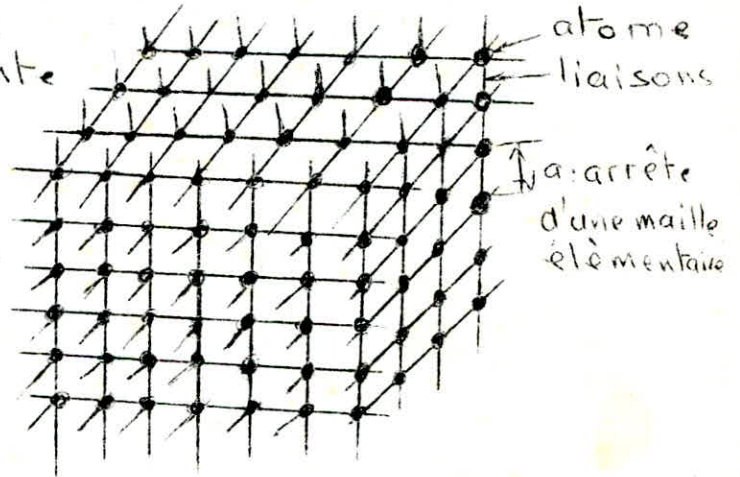
## - Conclusions :

- 1) l'impédance étant le rapport :  $F/R$ , la mesure de  $F$  et  $R$  sur un circuit électrique est relativement simple et précise. Par analogie électromécanique on déduit l'impédance mécanique.
- 2) -  $Z$  : l'impédance de système global s'obtient à partir de système d'équations, qu'on peut résoudre plus aisément en le programmant à un ordinateur numérique, surtout lorsque le système à étudier est très complexe et comporte un grand nombre d'impédances élémentaires.
- 3) les fréquences propres d'un système correspondent à une excitation extérieure nulle, or  $Z = F/R \Rightarrow Z = 0 \Rightarrow Z = N(s)/D(s) = 0 \Rightarrow N(s) = 0$  équation des fréquences propres du système global.
- 4) l'impédance  $Z$  étant donnée, la connaissance de l'excitation ou de la réponse permet de déterminer l'autre.

### III - Modèle mécanique d'un milieu continu siège de vibration

introduction: Tout solide est caractérisé par sa propre structure (répartition des atomes dans le volume du solide). Pour généraliser on prendra une structure idéalisée dont les constituants élémentaires les plus simples: (Maille cristalline cubique contenant un seul atome).

- chaque boule noire représente un atome de masse  $\mu$ .  
les segments reliant entre eux les atomes des liaisons qui assurent la cohésion du cristal.



Pour l'étude de propagation d'onde on assimile les forces de liaisons à des ressorts élastiques de raideur  $\bar{K}$ , reliant entre eux des atomes de masse  $\mu$ .  
à l'intérieur du cristal idéal, chaque atome est ainsi assimilé à une masse  $\mu$  rappelée vers sa position fixe par des ressorts élastiques. les masses  $\mu$  sont susceptibles d'effectuer des oscillations suivant les trois dimensions de l'espace.  
si les ressorts sont tous identiques, le cristal sera un milieu isotrope. un atome mis en vibration forcée à l'instant  $t_0$ ; à l'instant  $t_0 + \Delta t$  cette vibration se sera communiquée à tous les atomes contenus à l'intérieur d'une sphère de rayon  $d$ : (distance entre deux atomes successifs); on dit que la vibration se propage sous forme d'une onde sphérique et la sphère de rayon  $d$  est dite front de l'onde.



si la maille élémentaire n'avait pas la forme d'un cube et si ses arêtes n'étaient pas identiques : (ou si les <sup>forces de</sup> liaisons suivant les trois dimensions de l'espace n'avaient pas les mêmes valeurs). le milieu est dit anisotropes et l'étude de propagation d'onde sera plus complexe.

#### \* ONDES PLANES Progressives:

supposons qu'on impose un même mouvement à tous les atomes situés dans le même plan, ce mouvement se communiquera par l'intermédiaire des ressorts élastiques (forces de liaisons) aux autres plans parallèles. la vibration se propage le long de l'axe perpendiculaire à ces plans, le front d'onde est ici un plan.

à l'instant  $t_0 + \Delta t$ , le front d'onde se trouve à une distance  $d$  du plan émetteur (plan soumis à l'excitation extérieure à l'instant  $t_0$ ); entre ces deux plans existe une onde plane progressive. Pour une onde plane les dimensions transversales n'importent peu et une barre de section transversale constante  $S$  et de longueur infinie est l'équivalent d'un solide de dimensions infinies.

Une barre réelle étant toujours de longueur finie  $L$ , dans ce cas l'onde plane progressive sera un phénomène transitoire durant un certain temps  $\Delta t = L/v$ , ( $v = d/\Delta t$  : vitesse de propagation d'onde).

on distingue deux types de propagation d'ondes planes :  
ondes longitudinales et ondes transversales.

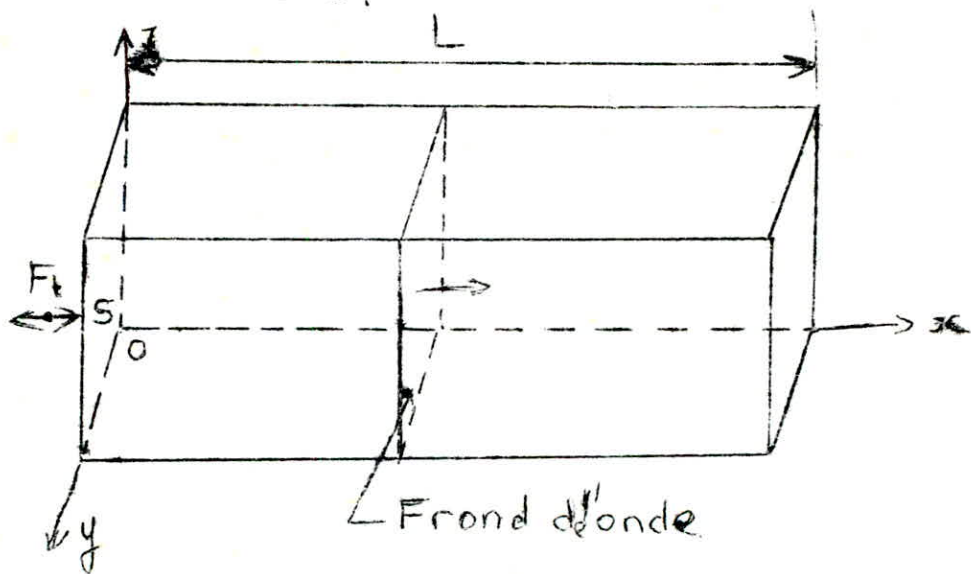
Toutes les atomes d'un même plan étant siège d'une même vibration dont l'expression de mouvement est  $u_0 \cos \omega t$ .  $u_0$  amplitude de vibration ;  $\vec{i}$  vecteur unitaire : définit l'orientation de propagation dans l'espace.

1) -  $i$ : parallèle à l'axe de la barre: Tous les atomes <sup>d'un même plan</sup> se déplacent suivant l'axe de la barre en comprimant et allongeant alternativement les ressorts (on dit qu'il s'agit d'une propagation longitudinale).

2) -  $i$ : perpendiculaire à l'axe de la barre: Tous les atomes d'un même plan se déplacent perpendiculairement à l'axe de la barre, (on dit que l'onde est transversale).

modèle mécanique d'un solide parcouru par une onde plane:

soit la barre de longueur  $L$  suffisamment grande et de section transversale  $S$ :



le plan origine étant soumis à une excitation harmonique  $F(t)$ , une onde plane se propage le long de l'axe  $ox$ .

le nombre d'atomes dans un plan transversal étant  $n = S/a^2$ ,  $a$  = arête d'une maille élémentaire. l'ensemble des

atomes d'un même plan forme une masse  $m = n\mu = \mu \cdot S/a^2$  ou

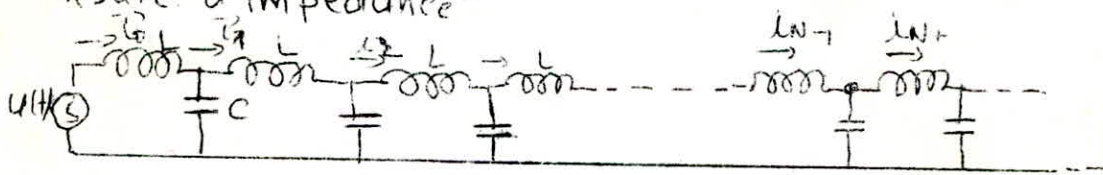
$m = \rho \cdot S \cdot a$ , ( $\rho$ : densité du matériau). les liaisons reliant les atomes de deux plans successifs sont équivalentes à une



liaison correspondant à un ressort de raideur  $k = m\kappa = \frac{G}{a^2} l$   
 donc il revient au même d'étudier la propagation d'une onde  
 plane dans la barre ou d'étudier la propagation d'une vibration  
 dans une chaîne formée d'un grand nombre de masses  $m$   
 reliées entre elles par des ressorts de raideur  $k$  chacun.



Par analogie électromécanique "Force-tension" on aboutit  
 au circuit électrique ci dessous "d'où la possibilité de  
 mesure d'impédance"



les solides réels sont toujours beaucoup plus complexes  
 que les modèles idéalisés considérés précédemment; la différence  
 réside essentiellement dans la structure de la maille  
 cristalline.

Pour l'étude des propagations d'ondes dans les solides réels  
 il faut tenir compte de la périodicité du cristal suivant  
 les trois dimensions de l'espace, il en résulte une théorie  
 plus complexe.

## IV. Comparaison de la méthode classique à la méthode d'impédance sur la base d'analyse des systèmes continus

Dans le but d'une analyse simple, on prendra comme systèmes dynamiques continus, les poutres qui trouvent une large application pratique.

1- Introduction: Tout corps soumis à des sollicitations

extérieures est susceptible de se déformer; Dans cet état apparaissent entre les particules des forces intérieures d'interactions qui opposent une réaction aux sollicitations extérieures et tendent à faire revenir les particules du corps dans la position qu'elles occupaient avant la déformation.

On distingue les déformations élastiques qui disparaissent avec les sollicitations extérieures et les déformations plastiques qui persistent après disparition des causes qui étaient à leur origine.

Les principales déformations sont: traction et compression; cisaillement, torsions et flexions. Dans notre analyse on ne s'intéresse qu'aux déformations élastiques de compression, traction et flexion.

Les compression et traction, ont lieu, lorsque les forces sont appliquées le long de l'axe de la poutre, provoquant le déplacement transversal des sections transversales le long de l'axe de la poutre.

La flexion consiste en un gauchissement de l'axe de la poutre dont le déplacement (des sections transversales) est décrit par une expression mathématique de la ligne élastique (la ligne élastique est la courbe plane que décrit l'axe de la poutre en flexion plane).



la flexion s'accompagne en même temps d'une rotation des sections transversales autour des axes se trouvant dans les plans des dites sections.

Pour l'étude de vibration des poutres ; on suppose que celles-ci sont homogènes, isotropes et travaillent dans le domaine élastique (selon loi de Hooke). On ne s'intéresse dans notre analyse qu'aux déplacements de translations des sections transversales. Pour ne pas tenir compte des effets de efforts d'inerties de rotation et de l'effort tranchant sur la flexion ; on considère que les dimensions transversales sont faibles en comparaison aux longueurs des poutres.

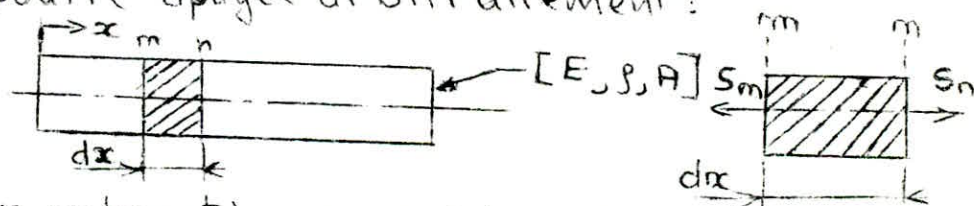
Pour pouvoir appliquer les formules de l'effort tranchant et du moment de flexion on suppose que la flexion se produit suivant l'un des axes principaux de flexion.

## 2-Généralités:

### 2-1-Vibration-longitudinale:

expressions de déplacements (cas général)

Supposons une poutre appuyée arbitrairement:



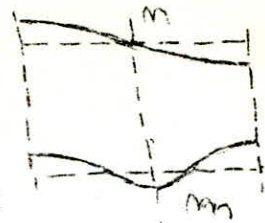
une compression ou traction ~~se suit~~ axiale se suivie d'une vibration longitudinale dont l'équation différentielle de déplacement s'obtient sur la base de l'analyse de l'équilibre dynamique d'un élément  $dx$  pris arbitrairement de la poutre. Dans une vibration longitudinale toutes les particules d'une section transversale se déplacent parallèlement à l'axe de la poutre.

$S_m$  et  $S_n$  efforts de compressions longitudinales intérieurs ;  $S_n = S_m + \frac{\partial S_m}{\partial x} dx$ .

soit  $u(x,t)$  le déplacement longitudinal

l'allongement relatif est donné par

la relation :  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$  ;  $S_m = A E \cdot \epsilon = A E \frac{\partial u}{\partial x}$



la condition d'équilibre dynamique de l'élément  $dx$  est exprimée par :  $S_m - S_n = F_i$  où  $F_i$  : force d'inertie de l'élément  $dx$  ;  $F_i = dm \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  ;  $\rho$  : densité du matériau,  $E$  : module d'élasticité et  $A$  section transversale de la poutre.

$S_m - S_n = \frac{\partial S_m}{\partial x} dx = A E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx$  ; on pose  $\rho/E = a^2$

$\left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\}$  (1) : équation différentielle de déplacement longitudinal.

on se sert de la méthode de Fourier pour résoudre (1).

la solution de (1) prend la forme :  $u(x,t) = u(x) \cdot \xi(t)$  ;  
 où  $u(x)$  : amplitude de vibration à la position  $x$  . avec cette expression de  $u(x,t)$ , l'équation (1) devient :  $u''(x) \cdot \xi(t) = a^2 u(x) \cdot \xi''(t)$   
 ou  $\frac{u''(x)}{u(x)} = a^2 \frac{\xi''(t)}{\xi(t)} = -\omega^2$  ; soit :  $\frac{\xi''(t)}{\xi(t)} = -\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} u''(x) + \beta^2 u(x) = 0, \beta^2 = \omega^2 a^2 \\ \xi''(t) + \omega^2 \xi(t) = 0, \omega^2 = \omega^2 \end{cases}$

les solutions respectives de (3) et de (4) sont :  $u(x) = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x$  et  $\xi(t) = c_3 \sin \omega t + c_4 \cos \omega t$  ;  
 Il reste à additionner à ces solutions générales les conditions aux limites qui permettent de déterminer les constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  ainsi que les fréquences propres des poutres en vibrations longitudinales.

2-1-2. Détermination des formes et fréquences propres :

considérons une poutre en porte-à-faux, connectée à l'extrémité libre à un système discret simple :



le système global (fig.1) peut être décomposé comme sur (fig.2)  
 $F(t)$  : effort d'interaction interne.



l'expression de déplacement longitudinale est de la forme:  $u(x,t) = U(x) \cdot \xi(t)$   
 $U(x,t) = U(x) \cdot \xi(t)$ ;  $C(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$ ; prenons  $\xi(t) = e^{j\omega t}$   
 Conditions aux limites:

1) en  $x=0$ , le déplacement est supprimé par le support fixe;  $u(0,t) = 0$ ; 2) en  $x=L$ , l'effort de compression longitudinal coïncide avec  $-F(t)$ ;  $A E \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L} = -F(t)$  or  
 $F(t) = \left[ M \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial U}{\partial t} + K \cdot U \right]_{x=L} = \left[ -M \omega^2 + j \alpha \omega + K \right] U(L, t)$ .

1)  $u(0,t) = 0 \Rightarrow C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow u(x,t) = C_1 \sin \beta x \cdot e^{j\omega t}$

2)  $A E \cos \beta L = \left[ -M \omega^2 + j \alpha \omega + K \right] \sin \beta L$ .

des conditions aux limites on aboutit à: formes propres;

$U(x,t) = C_1 \sin \beta x$ ;  $C_1$  constante dépendant de l'excitation qui a été à l'origine de la vibration; les fréquences propres sont données par l'équation:  $\left[ A E \beta \cot \beta L - \frac{M E}{\rho} \beta^2 + j \alpha \sqrt{\frac{E}{\rho}} \beta + K \right]$ ,  
 $\beta = \left[ \frac{\rho E}{E I} \right]^{1/2} \omega$ ;  $\omega$ : fréquence cyclique propres.

les fréquences et formes propres calculées ci-dessus seront comparées à celles qui seront calculées par la méthode d'impédance.

## 2-2-Vibration Transversale:

2-2-1. expression de déplacement: (cas général).

Supposons une poutre appuyée arbitrairement.

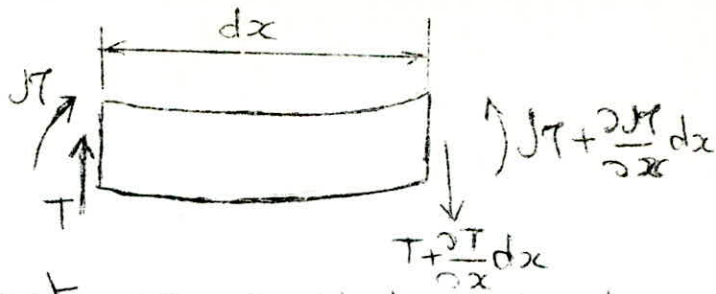


une flexion de la poutre se sera suivie d'une vibration transversale dont l'équation différentielle de déplacement s'obtient sur la base de l'analyse de l'équilibre dynamique d'un élément  $dx$  pris arbitrairement de la poutre en flexion. Dans une vibration transversale, les sections transversales (sans déplacement) sont

se déplacent perpendiculairement à l'axe de la poutre.

$$M = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$T = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$



$M$ : moment flechissant;  $T$ : effort tranchant.  
 $y$ : déplacement transversal.

L'équilibre dynamique de  $dx$  est exprimé par la relation suivante  $T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T = F_i$ ;  $F_i$  = force d'inertie =  $dm \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$

$$\frac{\partial T}{\partial x} dx = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx; \text{ ou a } \frac{\partial T}{\partial x} dx = F_i \Rightarrow -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2};$$

Soit:  $a^2 = \frac{\rho A}{EI} \Rightarrow \left\{ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \right\} (1)$ : équation dif-

ferentielle de déplacement transversal.

-  $\rho$ : densité du matériau;  $E$ : module d'Young;  $A$ : section transversale de la poutre; et  $I$  moment quadratique des sections  $A$ .

Dans une vibration transversale les particules des sections transversales se déplacent harmoniquement avec  $y(x,t)$ ;  
 $y(x,t) = x(x) \cdot \zeta(t)$  (2) où  $x(x)$ : amplitude de vibration ou formes propres de la poutre en vibration de flexion et  $\zeta(t)$ : fonction harmonique.

remplaçant dans (1) la valeur de  $y(x,t)$  donnée par (2).

$$x^{IV}(x) \cdot \zeta(t) + a^2 \cdot \ddot{\zeta}(t) = 0 \text{ ou } \frac{x^{IV}(x)}{x(x)} = -a^2 \cdot \frac{\ddot{\zeta}(t)}{\zeta(t)} = c \frac{1}{\zeta(t)}; \text{ soit}$$

$$\frac{\ddot{\zeta}(t)}{\zeta(t)} = -\omega^2 \text{ d'où } \begin{cases} x^{IV}(x) - q^4 x(x) = 0; (3) \\ \ddot{\zeta}(t) + \omega^2 \zeta(t) = 0; (4) \end{cases} \quad q^4 = a^2 \omega^2 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2$$

solutions de (3) et (4):  $x(x) = c_1 \sin qx + c_2 \cos qx + c_3 \sinh qx + c_4 \cosh qx$   
 on prendra:  $\zeta(t) = e^{i\omega t}$ .

Il reste à additionner à cette solution générale les conditions aux limites qui permettent de déterminer les formes propres et les fréquences propres; Dans le cas des poutres



à longueurs finies on a quatre conditions aux limites, ce qui permettent de déterminer les constantes  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$ .

1) extrémités libres: l'effort tranchant et le moment fléchissant sont nuls aux extrémités;  $x''=0$  et  $x'''=0$

2) extrémités articulées: le déplacement et le moment fléchissant sont nuls aux extrémités:  $x=0$  et  $x''=0$

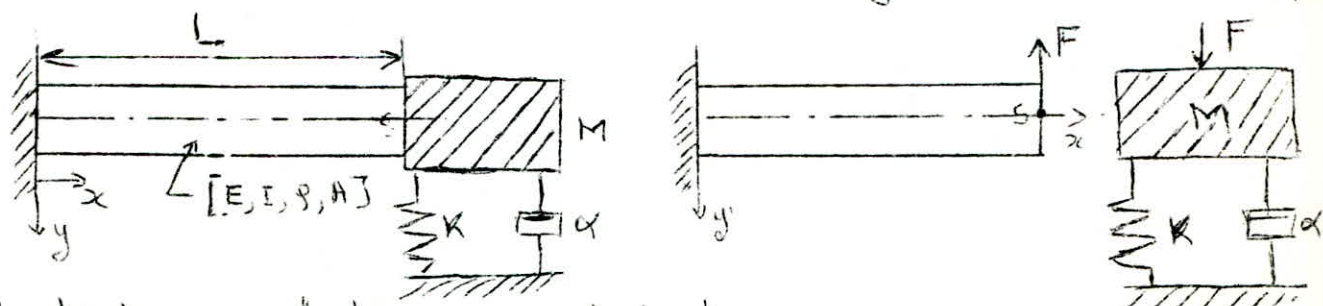
3) extrémités encastées: le déplacement et l'angle de rotation aux extrémités sont nuls:  $x=0$  et  $x'=0$

4) extrémités coulissantes: l'angle et l'effort tranchant aux extrémités sont nuls:  $x'=0$ ;  $x'''=0$ .

Si un effort ou un moment extérieurs agissent en un point de la poutre, il faut en tenir compte, on aura les efforts internes supplémentaires égaux aux efforts externes.

2-2-2. Détermination des fréquences et formes propres:

Soit le système composé d'une poutre en porte à faux connectée à l'extrémité libre à un système discret simple.



le déplacement transversal étant  $y(x,t) = x(x) \cdot \mathcal{G}(t)$  où  $x(x)$   
 $x(x) = c_1 \sin qx + c_2 \cos qx + c_3 \sinh qx + c_4 \cosh qx$  et  $\mathcal{G}(t) = e^{j\omega t}$   
 les conditions aux limites: 1)  $x=0 \mid \begin{matrix} x=0 \\ x'=0 \end{matrix}$  2) en  $x=L \mid \begin{matrix} x''=0 \\ T(L) = -EI x'''(L) e^{j\omega t} = -F \end{matrix}$

avec ces conditions on aboutit aux résultats suivants:

$$1) - \text{Formes Propres : } X(x) = \frac{C}{(\cos qL + \operatorname{ch} qL)} \left[ \begin{array}{l} (\cos qL + \operatorname{ch} qL)(\sin qL - \operatorname{sh} qL) \\ - (\sin qL + \operatorname{sh} qL)(\cos qx - \operatorname{ch} qx) \end{array} \right]$$

où  $C$ : constante dépendante de l'amplitude de l'excitation extérieure qui a été à l'origine de la vibration.

2) Equation des fréquences propres :

$$\frac{(1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)}{[\cos qL \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL]} - \left[ -\frac{Mg}{\rho A} + j \frac{\alpha}{\sqrt{\rho A EI}} q + \frac{\kappa}{EI q^3} \right] = 0$$

- 3 Impédance et admittance dans les Poutres:

3-1 Introduction: un procédé basé sur la technique d'admittance peut être appliqué pour l'analyse des Poutres. ce Procédé se base sur les tables d'admittances (Tables: (4) et (5)) obtenues à partir des expressions classiques de déplacements. ces Tables donnent l'admittance déplacement aux extrémités des Poutres. Seulement, quand l'excitation est appliquée ou que la réponse est exigée en des points autres que les extrémités des poutres, il est nécessaire d'utiliser la Table (6) des fonctions caractéristiques obtenues à partir des expressions classiques de déplacement:

les poutres comme composantes dynamiques peuvent être traitées par cette méthode; un système plus compliqué peut être décomposé en subsystemes (c.a.d. en poutres) répondant aux exigences des tables d'admittances; où l'analyse est déjà plus simple puis le reconstitué de nouveau pour trouver la réponse les réponses aux points prévus pour l'analyse. les Procédés utilisés pour trouver les réponses et les fréquences Propres en cas de milieux discrets, peuvent être aussi être utilisés.



dans les poutres.

### 3-2 Methode d'admittance déplacement.

l'admittance déplacement étant défini<sup>x</sup> comme le rapport de la valeur maximale de la réponse en un point à la valeur maximale de l'excitation en ce même point.

la réponse peut prendre la forme d'un déplacement harmonique  $y$ , ou une rotation harmonique  $\theta$ ; l'excitation peut prendre la forme d'une force harmonique  $F$  ou la forme d'un moment harmonique  $M$ .

On désigne l'admittance déplacement par  $Y_{ij}^D$  où  $i$  et  $j$  sont des indices, le premier désigne la position où la réponse est mesurée, le second la localisation de l'excitation extérieure.

Dans le cas où l'excitation est un moment et la réponse une rotation, les indices  $i$  et  $j$  sont menus d'un prime, (par exemple  $Y_{\alpha L}'$  désigne l'admittance déplacement (D) où la réponse est un déplacement rectiligne mesuré à la position  $\alpha$  et l'excitation un moment à l'extrémité ( $\alpha = L$ ) de la poutre.

D'après la règle de la réciprocity on a l'égalité<sup>t</sup> :  $Y_{L\alpha}^D = Y_{\alpha L}^D$  ( $Y_{ij}^D = Y_{ji}^D$ ).  
à l'aide des tables (4) et (5) on peut déterminer les admittances déplacements de poutres avec divers appuis aux extrémités. les admittances déplacements sont données en fonctions de  $N_L$ ,  $L=0,2, \dots, 30$  que l'on obtient de la table (6), les  $N_i$  sont données en fonction de  $qL$  : longueur de la poutre et  $q = \left\{ \left[ \frac{\rho \cdot A}{EI} \right] \omega^2 \right\}^{1/2}$  où  $\rho$  : densité du matériau de la poutre,  $A$  : aire de la section transversale de la poutre,  $E$  : module d'Young du matériau,  $I$  : moment quadratique des sections transversales et  $\omega$  : fréquences cycliques de vibration.

#### 4. Calcul d'admittance deplacement des Poutres:

##### 4-1 Poutre en vibration longitudinale:

Supposons une poutre

en porte à faux excitée à l'extrémité libre par une force harmonique  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ .



Comme la vibration est entretenue par une excitation harmonique de la forme  $F_0 \cos \omega t$ ; la réponse sera de la forme  $u(x,t) = u(x) \cdot \cos \omega t$ .

Où  $u(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x$ , avec  $\beta = \sqrt{\frac{S}{E}} \cdot \omega$ .

conditions aux limites: en  $x=0$ , le déplacement est supprimé par le support fixe;  $u(0,t) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow u(x,t) = C_1 \sin \beta x \cdot \cos \omega t$ . en  $x=L$ , l'effort de compression interne coïncide avec  $F(t)$ .

$$\Rightarrow AE \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = F_0 \cos \omega t \Rightarrow AE C_1 \beta \cos \beta L = F_0 \Rightarrow C_1 = \frac{F_0}{AE \beta \cos \beta L} \text{ d'où}$$

$$u(x,t) = \frac{F_0}{AE \beta \cos \beta L} \cdot \sin \beta x \cdot \cos \omega t \Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{F(t) \cdot \sin \beta x}{AE \beta \cos \beta L}}$$

l'admittance deplacement: (Réponse en  $x$ ; excitation en  $x=L$ ) est:  $\frac{u(x,t)}{F(t)}$

$$\boxed{Y_{xL}^D = \frac{\sin \beta x}{AE \beta \cos \beta L}} \quad \text{on déduit } Y_{0L}^D = 0 \text{ et } Y_{LL}^D = \frac{\sin \beta L}{AE \beta \cos \beta L}$$

Ces derniers résultats restent les mêmes pour toutes autres poutres ayant une extrémité libre (en  $x=L$ ) et l'autre fixe en ( $x=0$ ), c.à dire les poutres dont l'appui fixe peut être articulé ou coulissant.

Cas de poutre libre aux deux extrémités: les conditions aux limites sont: à l'extrémité excitée:  $AE \frac{\partial u}{\partial x} = F(t)$ ; à l'extrémité non excitée:

$AE \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ; avec ces conditions on aboutit aux résultats suivants:

$$Y_{00}^D = Y_{LL}^D = \frac{\cos \beta L}{AE \beta \sin \beta L} \quad \text{et } Y_{0L}^D = Y_{L0}^D = \frac{1}{AE \beta \sin \beta L}$$

on donne sur la page suivante la Table(4) résumé d'expressions d'admittances deplacements calculées aux extrémités des poutres.



Table: (4)

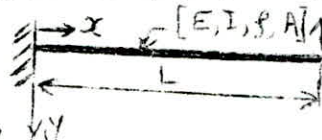
Types d'appuis	$Y_{00}^D$	$Y_{0L}^D = Y_{L0}^D$	$Y_{LL}^D$
Libre: $x=0$	$\frac{\cos \beta L}{AE \beta \sin \beta L}$	1	$\frac{\cos \beta L}{AE \beta \sin \beta L}$
Libre: $x=L$	$\frac{\cos \beta L}{AE \beta \sin \beta L}$	$\frac{1}{AE \beta \sin \beta L}$	$\frac{\cos \beta L}{AE \beta \sin \beta L}$
fixe: $x=0$	/	/	$\frac{\sin \beta L}{AE \beta \cos \beta L}$
Libre: $x=L$	/	/	$\frac{\sin \beta L}{AE \beta \cos \beta L}$

$$\beta = \left[ \frac{\rho}{E} \right]^{1/2} \omega$$

#### 4-2 Poutre en vibration Transversale:

Supposons une poutre

en porte à faux, actionnée à l'extrémité libre par une force harmonique  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ .



comme la vibration est entretenue

par une force harmonique de la forme  $F_0 \cos \omega t$ , la réponse sera

de la forme  $y(x,t) = x(x) \cdot \cos \omega t$ , où  $x(x) = [C_1 \sin qx + C_2 \cos qx + C_3 \sinh qx + C_4 \cosh qx]$

$$q = \left( \rho A / EI \right)^{1/4} \cdot \omega^{1/2}, \quad C_1, C_2, C_3, \text{ et } C_4 = \text{const}$$

conditions aux limites: en  $x=0$   $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{array} \right.$  en  $x=L$   $\left\{ \begin{array}{l} M(L) = 0 \Rightarrow X''(L) = 0 \\ -EI X'''(L) = F_0 \end{array} \right.$

avec ces conditions on aboutit aux résultats suivants:

1) déplacement:

$$y(x,t) = \frac{F(t)}{2EIq^3} \frac{(\cos qL + \cosh qL)(\sin qx + \sinh qx) - (\sin qL + \sinh qL)(\cos qx + \cosh qx)}{(1 + \cos qL \cdot \cosh qL)}$$

2) l'admittance déplacement, réponse en  $x$ ; excitation en  $x=L$ .

$$Y_{xL}^D = \frac{F(t)}{y(x,t)} = \frac{(\cos qL + \cosh qL)(\sin qx - \sinh qx) - (\sin qL + \sinh qL)(\cos qx - \cosh qx)}{2EIq^3(1 + \cos qL \cdot \cosh qL)}$$

on en déduit:  $Y_{0L}^D = 0$ ;  $Y_{LL}^D = -\frac{\cos qL \sinh qL - \sin qL \cosh qL}{EIq^3(1 + \cos qL \cdot \cosh qL)}$

$$Y_{x'L}^D = \frac{F(t)}{\partial x} = \frac{(\cos qL + \cosh qL)(\cos qx - \cosh qx) + (\sin qL + \sinh qL)(\sin qx + \sinh qx)}{2EIq^2(1 + \cos qL \cdot \cosh qL)}$$

on en déduit:  $Y_{0'L}^D = 0$ ;  $Y_{L'L}^D = (\sin qL \cdot \sinh qL) / EIq^2(1 + \cos qL \cdot \cosh qL)$



si l'excitation extérieure était un moment harmonique  $J(t) = J_0 \cos \omega t$   
 $J(t) = J_0 \cos \omega t$  la réponse prend la forme :  $y(x, t) = x(x) \cdot \cos \omega t$   
 les conditions au limites sont : en  $x=0$  (la même que précédemment); en  $x=L$  :  $\left. \begin{array}{l} J(L) = -J_0 \cos \omega t \\ T(L) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x''(L) = -M_0/EI \\ x'''(L) = 0 \end{array}$

avec ces conditions au limites on aboutit aux résultats suivants :

$$y(x, t) = \frac{-J(t)}{2EIq^2(1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)} \left[ (\sin qL - s\operatorname{h} qL)(\sin qx - s\operatorname{h} qx) + (\cos qL + \operatorname{ch} qL)(\cos qx - \operatorname{ch} qx) \right]$$

d'où l'admittance déplacement : (réponse en  $x$ , excitation  $J(t)$  en  $L$ )

$$Y_{xL}^D = - \frac{(\sin qL - s\operatorname{h} qL)(\sin qx - s\operatorname{h} qx) + (\cos qL + \operatorname{ch} qL)(\cos qx - \operatorname{ch} qx)}{2EIq^2 [1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL]}$$

et l'admittance rotation :

$$Y_{xL}^D = - \frac{(\sin qL - s\operatorname{h} qL)(\cos qx - \operatorname{ch} qx) - (\cos qL + \operatorname{ch} qL)(\sin qx + s\operatorname{h} qx)}{2EIq [1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL]}$$

on en déduit :  $Y_{0L}^D = 0$  ;  $Y_{LL}^D = \frac{\sin qL \cdot s\operatorname{h} qL}{EIq^2 (1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)}$  ;  $Y_{0L}^D = 0$  ;

et  $Y_{LL}^D = - \frac{\cos qL \cdot s\operatorname{h} qL + \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL}{EIq (1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)}$ .

en procédant de la même façon on détermine les admittances déplacement et rotation de toute poutre ayant divers appuis aux extrémités et excitée en ces points par des forces ou moments harmoniques.

on résume les expressions des admittances déplacements des poutres ayant divers appuis aux extrémités sur la Table : (5) ; ces expressions sont données en fonction de  $N_i$  ;  $i=1, 2, \dots, 10$  ; on donne les expressions de  $W_i$  sur la Table : (6)

Type of diapypis	extremities	$Y_{00}^D$	$Y_{00}^D = Y_{00}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$	$Y_{00}^D = Y_{01}^D$
Libre	$\alpha = \beta$	$\frac{-N_3}{EIq^3 N_3}$	$\frac{-N_1}{EIq^2 N_3}$	$\frac{N_8}{EIq^3 N_3}$	$\frac{N_{10}}{EIq^2 N_3}$	$\frac{N_6}{EIq N_3}$	$\frac{-N_{10}}{EIq^2 N_3}$	$\frac{N_7}{EIq N_3}$	$\frac{-N_5}{EIq^3 N_3}$	$\frac{N_4}{EIq^2 N_3}$	$\frac{N_6}{EIq N_3}$	$\frac{-N_5}{EIq^3 N_3}$	$\frac{N_1}{EIq N_3}$	$\frac{N_6}{EIq N_3}$	$\frac{-N_5}{EIq^3 N_3}$	$\frac{N_4}{EIq^2 N_3}$	$\frac{N_6}{EIq N_3}$	$\frac{-N_5}{EIq^3 N_3}$
Libre	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = 0$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Libre	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = 0$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Articulé	$\alpha = L$	$\frac{2N_1}{EIq^3 N_6}$	$\frac{-N_6}{EIq^2 N_5}$	---	$\frac{-N_7}{EIq^2 N_5}$	$\frac{2N_2}{EIq N_5}$	---	$\frac{N_9}{EIq N_5}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Libre	$\alpha = 0$	$\frac{-2N_2}{EIq^3 N_6}$	$\frac{N_5}{EIq^2 N_6}$	$\frac{-N_9}{EIq^3 N_6}$	---	$\frac{2N_1}{EIq N_6}$	$\frac{-N_8}{EIq^2 N_6}$	---	$\frac{-N_4}{EIq^3 N_6}$	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Articulé	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Articulé	$\alpha = 0$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
Articulé	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = 0$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = 0$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = 0$	$\frac{-N_6}{2EIq^3 N_1}$	---	$\frac{-N_7}{2EIq^3 N_1}$	---	---	---	---	$\frac{-N_3}{EIq^3 N_6}$	---	---	$\frac{-N_6}{2EIq^3 N_1}$	---	---	---	---	---	---
encastrement	$\alpha = L$	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Table: (6)

$$N_1 = \sin qL \cdot \operatorname{sh} qL \quad , \quad N_2 = \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL$$

$$N_3 = \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL - 1 \quad N_4 = \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL + 1$$

$$N_5 = \cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL; \quad N_6 = \cos qL \cdot \operatorname{sh} qL + \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL$$

$$N_7 = \sin qL + \operatorname{sh} qL \quad N_8 = \sin qL - \operatorname{sh} qL$$

$$N_9 = \cos qL + \operatorname{ch} qL \quad N_{10} = \cos qL - \operatorname{ch} qL$$

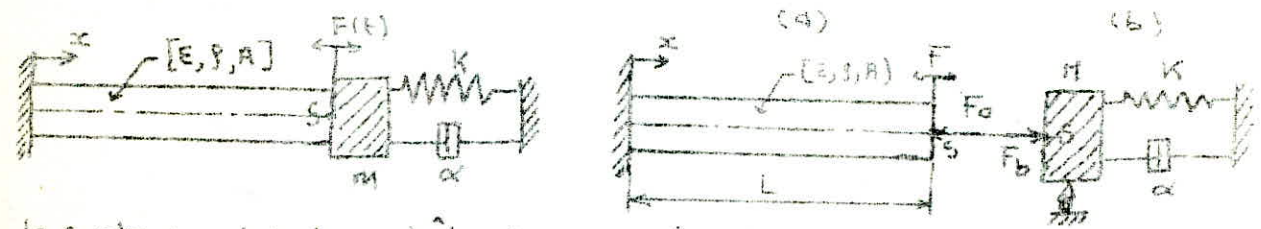


# II ADMITTANCE - DEPLACEMENTS DES SYSTEMES COMPOSES

On prendra comme systèmes continus les poutres en vibrations longitudinales ou transversales avec des systèmes composés d'éléments discrets

## 1 Poutres en vibrations longitudinales:

Pour pouvoir comparer les résultats de calcul: (Méthode classique et méthode d'impédance), on utilise les mêmes systèmes que ceux du chapitre précédent.



le système global peut être décomposé en deux sous-systèmes (a) et (b) où l'analyse devient simple, le point s étant choisi pour l'analyse.

Le sous-système (a): Poutre en porte à faux, sollicitée à l'extrémité libre par l'effort interne  $F_a$  et l'excitation extérieure  $F(t)$ ; le sous-système (b) système discret sollicité par l'effort interne  $F_b$  et guidé horizontalement de façon qu'il effectue un mouvement harmonique comme s'il était dans son état de mouvement d'origine.

Par définition de l'admittance déplacement on a:  $u_{sa} = Y_{as}^D [F + F_a]$  (1)  
 $u_{sb} = F_b \cdot Y_{bs}^D$  (2) d'autre part:  $F_a + F_b = 0$  (3) et  $u_{sa} = u_{sb} = u_s$  déplacement du système global au point s. de (2) on a:  $F_b = u_{sb} / Y_{bs}^D$ ; de (3)  $F_b = -F_a$   
 d'où  $F_a = -\frac{u_{sb}}{Y_{bs}^D} = -\frac{u_s}{Y_{bs}^D}$ ; (3) devient  $u_{sa} = u_s = Y_{as}^D [F - \frac{u_s}{Y_{bs}^D}] \Rightarrow F = \frac{u_s}{Y_{as}^D} [1 + \frac{Y_{as}^D}{Y_{bs}^D}]$

l'admittance du système global au point s est:  $Y_s^D = \frac{u_s}{F} = \frac{Y_{as}^D \cdot Y_{bs}^D}{Y_{as}^D + Y_{bs}^D}$   
 de la table (4) on a:  $Y_{as}^D = Y_{LL}^D = \frac{\sin \beta L}{A E \beta \cos \beta L}$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \cdot \omega$   
 $Y_{bs}^D = \frac{1}{m s^2 + \alpha s + K}$ ;  $s = j\omega$

$$Y_s^D = \frac{Y_{as}^D \cdot Y_{bs}^D}{Y_{as}^D + Y_{bs}^D}$$

$$Y_s^D = \frac{1}{(Ms^2 + \alpha s + K) + AE \operatorname{ctg} \beta L}$$

la résonance correspond à une réponse maximale donc à une admittance maximale ;  $Y_s^D = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = +\infty \Rightarrow D(\omega) = 0$

Alors l'équation de fréquences propres est  $D(\omega) = 0$   
 $D(\omega) = [Ms^2 + \alpha s + K] + AE \operatorname{ctg} \beta L = 0$ ,  $s = j\omega$ , et  $\beta = \left[\frac{\rho}{E}\right]^{1/2} \omega$

d'où  $\left[-\frac{M E \beta^2}{\rho} + j \alpha \sqrt{\frac{E}{\rho}} \beta + K\right] + AE \beta \operatorname{ctg} \beta L = 0$  le même résultat étant trouvé par la méthode classique

n-1-1 cas particulier de système discret :

a) Poutre seule ; ( $M=0$  ;  $K=0$ ,  $\alpha=0$ )

$$AE \beta \operatorname{ctg} \beta L = 0 \Rightarrow \omega = 0 \text{ (parasite à rejeter)} ;$$

$$\omega_i = \frac{2i-1}{2L} \cdot \pi \sqrt{\frac{E}{\rho}} ; i=1, 2, \dots, \infty$$

b) Poutre-masse : ( $M \neq 0$  ;  $K=0$ ,  $\alpha=0$ ).

$$AE \beta \operatorname{ctg} \beta L - \frac{M \beta^2}{\rho} = 0 \rightarrow \frac{AE \operatorname{ctg} \beta L}{\rho} = \frac{M}{m} ; m = \text{masse de la poutre seule} ; \theta = \left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2} L \cdot \omega$$

c) Poutre-ressort : ( $M=0$ ,  $\alpha=0$ , et  $K \neq 0$ )

$$AE \beta L \operatorname{tg} \beta L = -KL \text{ ou } AE \theta \operatorname{tg} \theta = -KL ; \theta = \beta L$$

\* Pour les cas b) et c) on détermine les fréquences propres des courbes de  $[\theta]$  en fonction des paramètres des éléments discrets correspondant.

d) Poutre-amortisseur : les fréquences peuvent être déterminées en traçant les courbes d'admittance comme il a été fait pour le système discret seul au

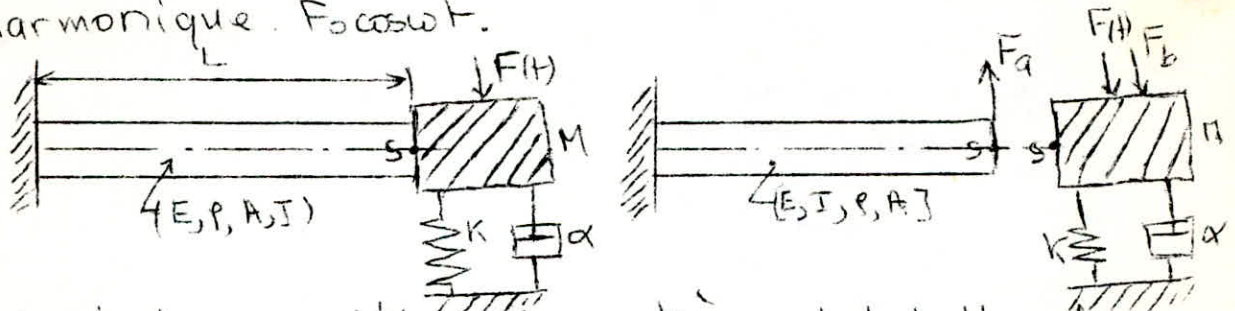
Chapitre (II)

\* influence des paramètres ( $M, K, \alpha$ ) sur les fréquences des poutres  
 En traçant les courbes de fréquences propres en fonction des paramètres correspondant on remarque qu'elles varient dans le même sens



## 1-2 - Poutres en vibrations transversales;

\* une poutre en porte à faux connectée à l'extrémité libre à un système discret; et excitée au point  $s$  par une force harmonique  $F_0 \cos \omega t$ .



Après décomposition du système global l'analyse devient simple.

Par définition de l'admittance de déplacement :  $y_{as} = F_a \cdot Y_{as}^D$  (1) ;  $y_{bs} = [F_b + F] \cdot Y_{bs}^D$  (2)

d'autre part :  $F_a + F_b = 0$  (3) et  $y_{as} = y_b = y_s$  (4)

de (1) on a :  $F_a = y_s / Y_{as}^D$ , de (3)  $F_a = -F_b = \frac{y_s}{Y_{as}^D}$

(2) devient :  $y_s = [-\frac{y_s}{Y_{as}^D} + F] \cdot Y_{bs}^D \Rightarrow \frac{F}{y_s} = \frac{1}{Y_{as}^D} + \frac{1}{Y_{bs}^D}$

l'admittance de déplacement du système global au point  $s$

$$\text{est : } \left\{ Y_s^D = \frac{Y_{as}^D \cdot Y_{bs}^D}{Y_{as}^D + Y_{bs}^D} \right\}$$

de la Table (B) on tire :  $Y_{as}^D = Y_{LI}^D = -\frac{\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL}{EI q^3 (1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)}$

$Y_{bs}^D = \frac{1}{Ms^2 + \alpha s + k}$  ;  $s = j\omega$  ; avec ces expressions  $Y_s^D$

devient :  $Y_s^D = \frac{(\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL)}{[Ms^2 + \alpha s + k](\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL) - EI q^3 (1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)}$

la résonance résulte pour  $Y_s^D = +\infty$  ; alors l'équation de fréquences propres est :

$(Ms^2 + \alpha s + k)(\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL) - EI q^3 (1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL) = 0$   
avec  $q = \left[ \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \right]^{1/4}$  ; le même résultat étant obtenu par la méthode classique.



1-2-1 cas particuliers des systèmes discrets: - fréquences propres -

a) Poutre seule: ( $M=0, \alpha=0, \kappa=0$ )

$$(1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL) = 0; \quad qL = \left[ \frac{mL^3}{EI} \cdot \omega^2 \right]^{1/4}; \quad m: \text{masse de la poutre}$$

on trouve:  $q_1 L = 1,875; q_2 L = 4,695$  et pour  $i \geq 3; q_i L = \frac{2i-1}{2} \pi$ .

b) Poutre-masse: ( $M \neq 0, \alpha=0$  et  $\kappa=0$ ).

$$\frac{1 + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL}{(\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL)} = -\frac{M \cdot qL}{m}; \quad [\alpha = qL].$$

c) Poutre-ressort: ( $M=0; \alpha=0$  et  $\kappa \neq 0$ )

$$\frac{\alpha^3 (1 + \cos \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha)}{(\cos \alpha \cdot \operatorname{sh} \alpha - \sin \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha)} = \frac{\kappa L^3}{EI}; \quad \alpha = qL.$$

d) Poutre-amortisseur: ( $M=0; \alpha \neq 0$  et  $\kappa=0$ )

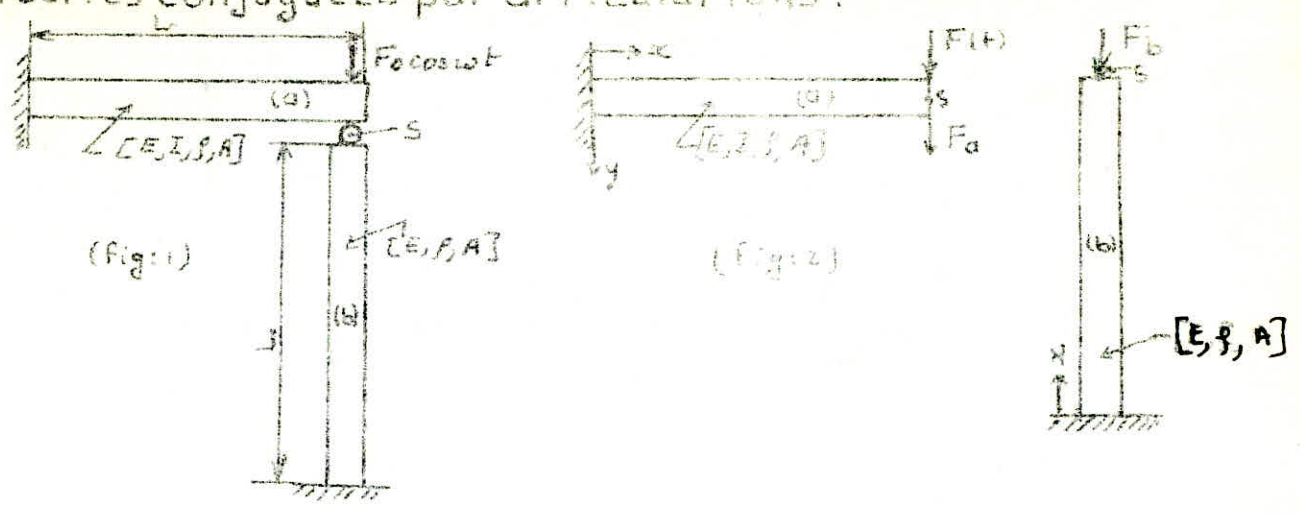
les fréquences propres peuvent être déterminées en traçant les courbes de variation de l'admittance déplacement en fonction de  $\omega$ ; comme il a été dit fait pour le système discret seul au chapitre I.

L'influence des paramètres des éléments discrets sur les fréquences propres des poutres en vibrations transversales est la même que celle dans le cas de poutre en vibrations longitudinales.

Remarque: les fréquences propres des cas (a) et (b) peuvent être déterminées à partir des courbes de  $\alpha = qL$  en fonction des paramètres des éléments discrets correspondant à chacun des cas.

$$\alpha = qL = \left[ \frac{SAL^4}{EI} \omega^2 \right]^{1/4} \Rightarrow f = \frac{\alpha^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EIL}{m}}.$$

2. Poutres conjuguées par articulations :



le système global (fig. 1) étant décomposé en deux sous-système (a) et (b) : (fig. 2)

le sous-système (a) : poutre en porte-à-faux, excitée à l'extrémité libre par :  $F$  : force harmonique extérieure et sollicitée en ce même point par l'effort d'interaction interne  $\rightarrow F_a$ , qui l'entraîne dans une vibration transversale.

le sous-système (b) : poutre en porte-à-faux, sollicitée à l'extrémité libre par l'effort d'interaction interne, qui l'entraîne dans une vibration longitudinale.

le point  $S$  étant choisi pour l'analyse

Par définition de l'admittance de déplacement on a :

$$Y_{as} = (F_a + F) Y_{as}^D \quad (1) \quad \text{et} \quad Y_{bs} = F_b \cdot Y_{bs}^D \quad (2)$$

$$\text{d'autre part : } (F_a + F_b = 0) \quad (3) \quad \text{et} \quad y_{as} = y_{bs} = y_s \quad (4)$$

les quatre relations (1), (2), (3) et (4) forment un système d'équations linéaires, de quatre inconnus ;  $F_a$ ,  $F_b$ ,  $Y_{as}$  et  $Y_{bs}$  sa résolution nous conduit au résultat suivant.

admittance de déplacement du système global, au point  $S$  :  $Y_s^D$

$$Y_s^D = (Y_{as}^D \cdot Y_{bs}^D) / (Y_{as}^D + Y_{bs}^D)$$

$Y_{as}$  et  $Y_{bs}$  étant données par les Tables : (4) et (5)

$$Y_{as}^D = Y_{LL}^D = \frac{(\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL)}{EI q^3 (A + \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL)} ; q = \left[ \frac{\rho \cdot A}{EI} \cdot \omega^2 \right]^{\frac{1}{4}}$$

et  $Y_{bs}^D = Y_{LL}^D = - \frac{\sin \beta L}{AE \beta \cos \beta L} ; \beta = \left[ \frac{\rho}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \omega$

d'où  $Y_s^D = \frac{-\sin \beta L (\cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL)}{EI q^3 (\cos qL \operatorname{ch} qL + 1) \sin \beta L + AE \beta (\cos qL \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL) \cos \beta L}$

[Equation des fréquences propres du système global]

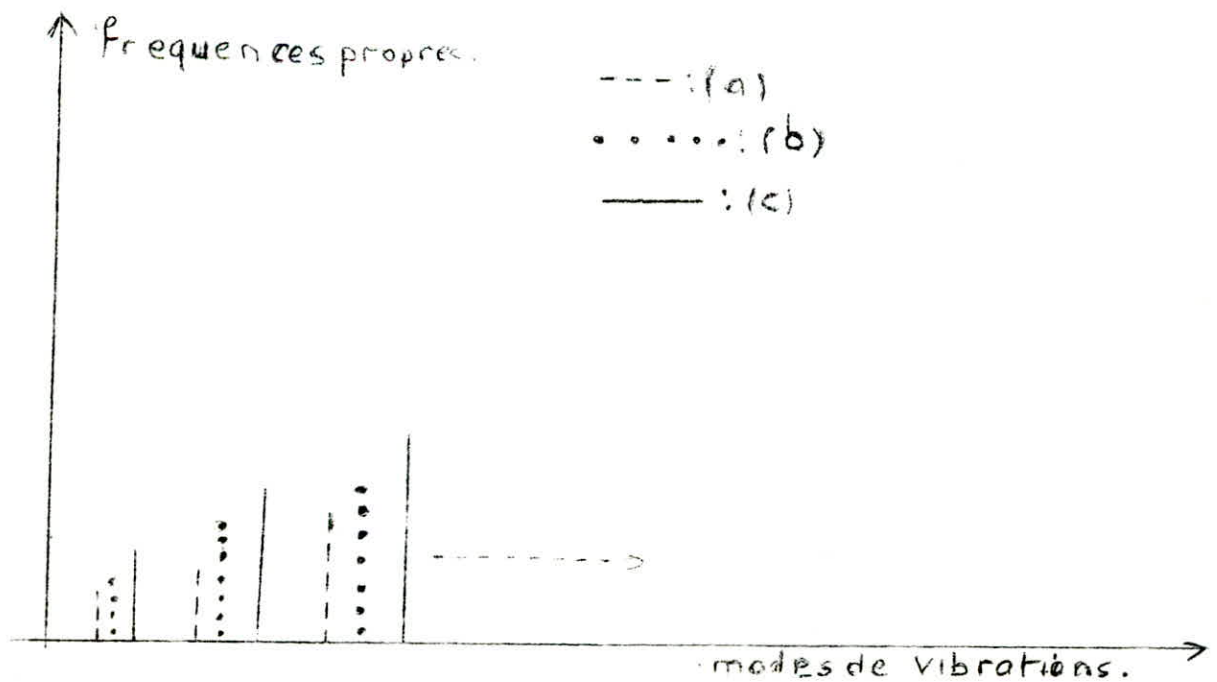
$$EI q^3 [\cos qL \cdot \operatorname{ch} qL + 1] \sin \beta L + AE \beta [\cos qL \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL] \cos \beta L = 0$$

$q$  et  $\beta$  étant données en fonction de  $\omega$ , on peut tracer les courbes de fréquences en fonction de  $I/A$ .

Influence de la rigidité sur les fréquences propres.

on illustre sur un graphique ci-dessous l'ordre de grandeur des fréquences propres pour chacun des systèmes suivants :

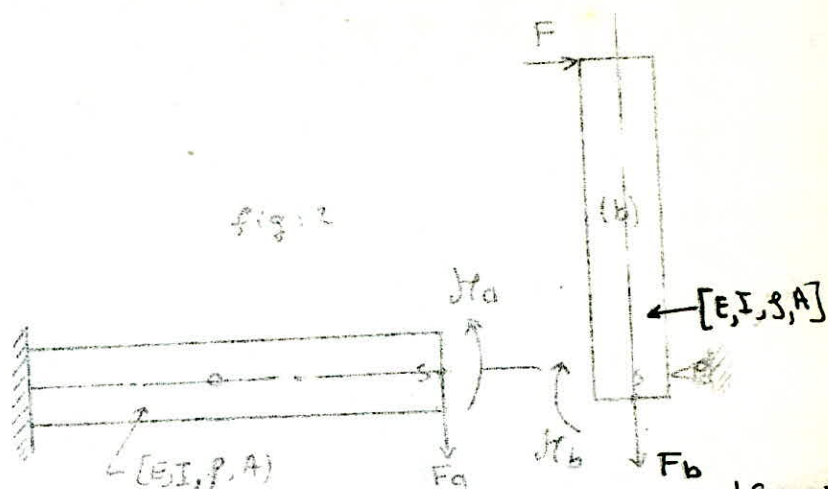
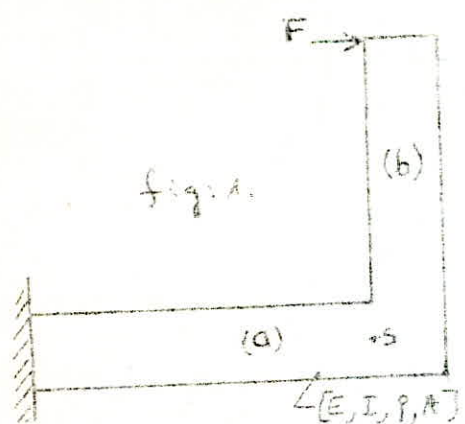
(a) poutre en porte à faux ; (b) poutre en porte à faux connectée à l'extrémité libre à un ressort ; (c) deux poutres en porte à faux conjuguées.





### 3 - Analyse de système poutre plus compliqué :

une poutre en porte à faux excitée par une force harmonique.  $F$



le système global (fig:1) peut être décomposé comme sur la (fig:2)

le sous-système (a): poutre en porte à faux sollicitée à l'extrémité libre (s) par l'effort interne  $F_a$  et le moment fléchissant  $M_a$ , qui l'entraîne dans une vibration transversale.

le sous-système (b): poutre à support libre-articulé, sollicitée à l'extrémité articulée par l'effort interne  $F_b$  et le moment fléchissant  $M_b$ , à l'extrémité libre actionne l'excitation extérieure. (b) est guidé verticalement dans mouvement rectiligne limité transversalement.

si  $Y_{as}^D$  et  $Y_{bs}^D$  désignent respectivement les admittances de déplacements de (a) et (b), alors:

$$y_{as} = Y_{as}^D F_a + Y_{as}^D M_a \quad (1)$$

$$y_{bs} = Y_{bs}^D F_b \quad (2)$$

$$\theta_{as} = Y_{as}^D F_a + Y_{as}^D M_a \quad (3)$$

$$\theta_{bs} = Y_{bs}^D F_b + Y_{bs}^D M_b \quad (4)$$

$$y_{as} = y_{bs} = y_s \quad (5)$$

$$\theta_{as} = \theta_{bs} = \theta_s \quad (6)$$

$$F_a + F_b = 0 \quad (7)$$

$$M_a + M_b = 0 \quad (8)$$

les relations de (1) à (8) forment un système d'équations linéaires à 8 inconnus

la résolution de ce système nous conduit au résultat suivant: admittance déplacement du système global au point s:  $Y_s^D$

$$Y_s^D = \frac{Y_{as2}^D \cdot Y_{bs2}^D \cdot Y_{bs1}^D}{[Y_{as3}^D \cdot Y_{as2}^D + (Y_{as1}^D + Y_{bs1}^D)(Y_{as4}^D + Y_{bs3}^D)]}$$

de la Table (5) on tire:

$$Y_{as1}^D = Y_{LL}^D = \frac{-N_5}{EIq^3 N_4} ; Y_{as2}^D = Y_{LL}^D = Y_{LL}^D = \frac{N_1}{EIq^3 N_4} = Y_{as3}^D ; Y_{as4}^D = Y_{LL}^D = \frac{N_6}{EIq N_4}$$

$$Y_{bs2}^D = Y_{LL}^D = \frac{-N_7}{EIq^2 N_5} ; Y_{bs3}^D = Y_{LL}^D = \frac{N_4}{EIq N_5} ; Y_{bs1}^D = -\frac{1}{m_b \omega^2}$$

$m_b$ : masse de la poutre (b).

les fonctions  $N_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$  et  $7$  sont données par la Table (6)

$$Y_s^D = \frac{\left(-\frac{N_7}{EIq^2 N_5}\right) \left(-\frac{1}{m_b \omega^2}\right) \left(\frac{N_1}{EIq^3 N_4}\right)}{\left\{\left(\frac{-N_5}{EIq^3 N_4} - \frac{1}{m_b \omega^2}\right) \left(\frac{N_6}{EIq N_4} + \frac{N_4}{EIq N_5}\right) - \left(\frac{N_1}{EIq^2 N_4}\right)^2\right\}}$$

connaissant la valeur de  $F$ , il est possible de tirer la réponse en  $s$

$$y_s = Y_s \cdot F.$$

les fréquences propres du système global correspondent à une

excitation extérieure nulle, or  $Y_s^D = \frac{y_s}{F} := \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \Rightarrow D(\omega) = 0$

équation des fréquences propres:

$$\left(\frac{-N_5}{EIq^3 N_4} - \frac{1}{m_b \omega^2}\right) \left(\frac{N_6}{EIq N_4} + \frac{N_4}{EIq N_5}\right) - \left(\frac{N_1}{EIq^2 N_4}\right)^2 = 0.$$

$$q = \left[\frac{S \cdot A}{EI} \omega^2\right]^{1/4}.$$

Si les poutres (a) et (b) étaient de différentes dimensions et

paramètres; alors il faut en tenir compte en prenant:

$$q_a = \left[\frac{S_a \cdot A_a}{E_a \cdot I_a} \omega^2\right]^{1/4}; L_a; q_b = \left[\frac{S_b \cdot A_b}{E_b \cdot I_b} \omega^2\right]^{1/4} \text{ et } L_b.$$

## VI CONFIRMATION Pratique des résultats théoriques

Etude de vibration de flexion des Poutres.

I - Introduction :

une barre uniforme à sections transversales rectangulaires :  $b \times h$  et de longueur  $L$ , porte à chacune de ses extrémités un tourillon. l'un des tourillons pivote sur deux roulements à billes, montés dans un support fixe ; l'autre tourillon porte deux roulements à billes, libre transversalement dans un support fixe, permettant la vibration transversale de la Poutre. les deux supports sont boulonnés sur deux montants opposés d'un portique fixe au sol. |

la barre porte en son milieu une charge variable où elle est excitée par un moteur alimenté par une source électrique continue.

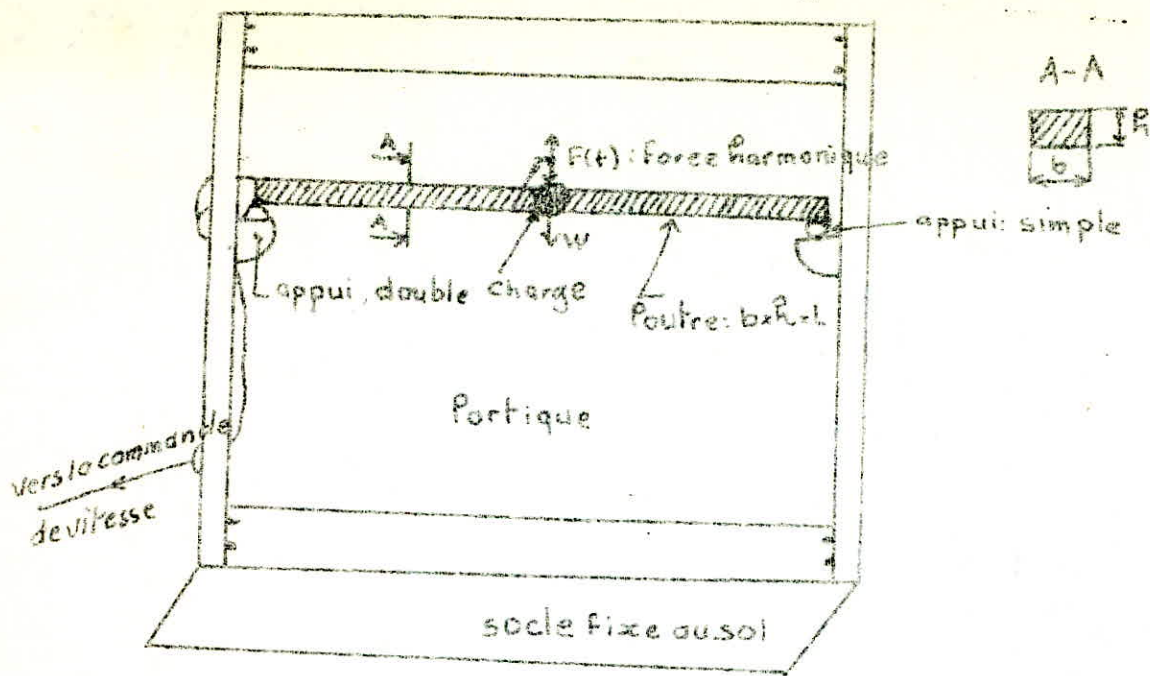
l'arbre du moteur porte à ses deux extrémités deux disques déséquilibrés (origine de l'excitation de la poutre.).

au moyen d'une commande de vitesse, la vitesse du moteur peut être réglée, pour avoir une gamme de vibrations forcées de la poutre.

le système est schématisé sur la page suivante.



## schéma du système



Dimensions de la poutre: longueur  $L = 812,8 \text{ mm}$ , épaisseur  $b = 25,4 \text{ mm}$

hauteur  $R = 12,7 \text{ mm}$ , moment quadratique de section transversale  $I = \frac{bR^3}{12}$

$$I = \frac{25,4 \times (12,7)^3}{12} \text{ mm}^4 ; [I = 4335,744 \text{ mm}^4]$$

Paramètres de la poutre: Poids:  $2,05 \text{ kgf}$ . Module d'Young:

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$$

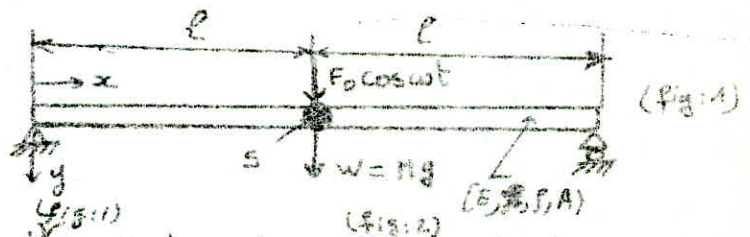
## 2.2 Détermination des fréquences naturelles par méthode d'impédance:

modèle du système:

l'analyse par méthode

d'impédance consiste à

décomposer le système global en subsystemes répondant aux exigences des tables d'admittances.



le subsysteme (a): poutre aux appuis: articulé - libre, dont l'extrémité libre est sollicitée par l'effort interne  $F_a$  et le moment fléchissant  $M_a$ .

le subsysteme (b): Poutre identique à (a) et dont l'extrémité libre est actionnée

Par l'effort interne  $F_b$  et le moment fléchissant  $J\theta_b$

le sous-système (II) : masse concentrée, guidée verticalement de façon qu'elle effectue un mouvement rectiligne comme si elle était dans son système d'origine. La masse  $M$  est sollicitée par l'effort interne  $F_b$  et l'excitation extérieure  $F(t)$ .



(fig: 2)



respectivement

si  $Y_{asi}^D$ ,  $Y_{bsi}^D$ ,  $i=1, 2, \dots$  et  $Y_{ms}^D$  designent les admittances de déplacements au point  $s$  des sous-systèmes (a), (b) et  $M$ .

$$y_{as} = F_a \cdot Y_{as1}^D + J\theta_a \cdot Y_{as2}^D \quad (1)$$

les sous-systèmes (a) et (b)

$$y_{bs} = F_b \cdot Y_{bs1}^D + J\theta_b \cdot Y_{bs2}^D \quad (2)$$

étant identiques alors

$$y_{ms} = (F + F_b) \cdot Y_{ms}^D \quad (3)$$

$$Y_{asi}^D = Y_{bsi}^D \text{ pour}$$

$$\theta_{as} = F_a \cdot Y_{as3}^D + J\theta_a \cdot Y_{as4}^D \quad (4)$$

tout  $i=1, 2, \dots$

$$\theta_{bs} = F_b \cdot Y_{bs3}^D + J\theta_b \cdot Y_{bs4}^D \quad (5)$$

d'autre part on a :

$$F_a + F_b + F_m = 0 \quad (6)$$

$$y_{as} = y_{bs} = y_{ms} = y_s \quad [\text{déplacement du point } s] \quad (7) \text{ et } (8)$$

$$\theta_{as} = \theta_{bs} = 0 \quad [\text{rotation de la poutre au point } s] \quad (9) \text{ et } (10)$$

les relations de (1) à (10) forment un système d'équations linéaires d'inconnues :  $y_{as}$ ,  $y_{bs}$ ,  $y_{ms}$ ,  $\theta_{as}$ ,  $\theta_{bs}$ ,  $F_a$ ,  $F_b$ ,  $F_m$ ,  $J\theta_a$  et  $J\theta_b$ . On s'intéresse à la détermination de fréquences naturelles ce qui revient au même à déterminer l'impédance du système global.

Après résolution du système d'équations, on aboutit au résultat

$$\text{suivant : } Y_S^D = \frac{Y_{MS}^D \{ Y_{AS1}^D \cdot Y_{AS4}^D - Y_{AS3}^D \cdot Y_{AS2}^D \}}{\{ Y_{AS1}^D \cdot Y_{AS4}^D - Y_{AS2}^D \cdot Y_{AS3}^D - 2 Y_{AS4}^D Y_{MS}^D \}}$$

de la Table (5) on tire les expressions des  $Y_{ASi}^D$ .

$$Y_{AS1}^D = Y_{00}^D = \frac{2N_1}{EIq^3 N_5} ; Y_{AS2}^D = Y_{AS3}^D = Y_{00}^D = Y_{0'0}^D = \frac{-N_6}{EIq^2 N_5}$$

$$Y_{AS4}^D = \frac{2N_2}{EIq N_5} ; M: \text{ (élément discret) } ; Y_{MS}^D = -\frac{1}{M\omega^2}$$

les fonctions caractéristiques  $N_i$  sont données par la Table 6.

$$\text{d'où } Y_S^D = \frac{m}{2q^2 \{ \Pi(qL) \{ \cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL + 2m \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL \} \}}$$

$$q = \left[ \frac{5H}{EI} \omega^2 \right]^{1/4} \text{ et } m: \text{ masse de la poutre seule.}$$

les fréquences naturelles correspondent à  $Y_S^D = +\infty$  d'où leur équation :  $2q^2 \{ \Pi(qL) \{ \cos qL \cdot \operatorname{sh} qL - \sin qL \cdot \operatorname{ch} qL + 2m \cos qL \cdot \operatorname{ch} qL \} \} = 0$  la masse  $m$  étant fixe, pour chaque valeur de  $\Pi$  correspond une infinité de fréquences propres qu'on peut déterminer en traçant la courbe de  $qL$  en fonction de  $M$ .

en particulier pour  $M=0$  ; les fréquences naturelles de la poutre pesante seule sont données par l'équation suivante :  $\cos qL \cdot \operatorname{ch} qL = 0$

$$\Rightarrow \cos qL = 0 \Rightarrow q_i L = \alpha_i = \frac{2i-1}{2} \pi ; i = 1, 2, \dots, \infty$$

$$q_i^2 = q_i \frac{L}{2} = \left[ \frac{5AL^4 \pi^2}{4EI} \frac{f_i^2}{L^2} \right]^{1/4} = \frac{\alpha_i}{2} \Rightarrow \left\{ f_i = \frac{2\alpha_i^2}{\pi L^2} \sqrt{\frac{EIGL}{P}} \right\}$$

$$\text{la fréquence fondamentale pour } i=1 \text{ est : } \left\{ f_1 = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EIGL}{P}} \right\}$$

$$E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2 ; L = 812,8 \text{ mm} ; I = 4335,744 \text{ mm}^4 ; P = 2,05 \text{ kgf} \text{ et } g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$f_1 = 44,744 \text{ Hz.}$$

fondamentales

les valeurs des fréquences naturelles  $f_i$  pour quelques valeurs de  $M$  sont données sur un Tableau des résultats pratiques et théoriques sur la page suivante.



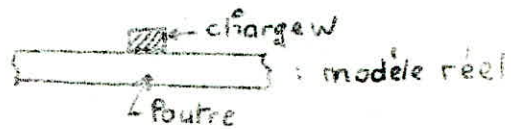
### 3-Manupilation :

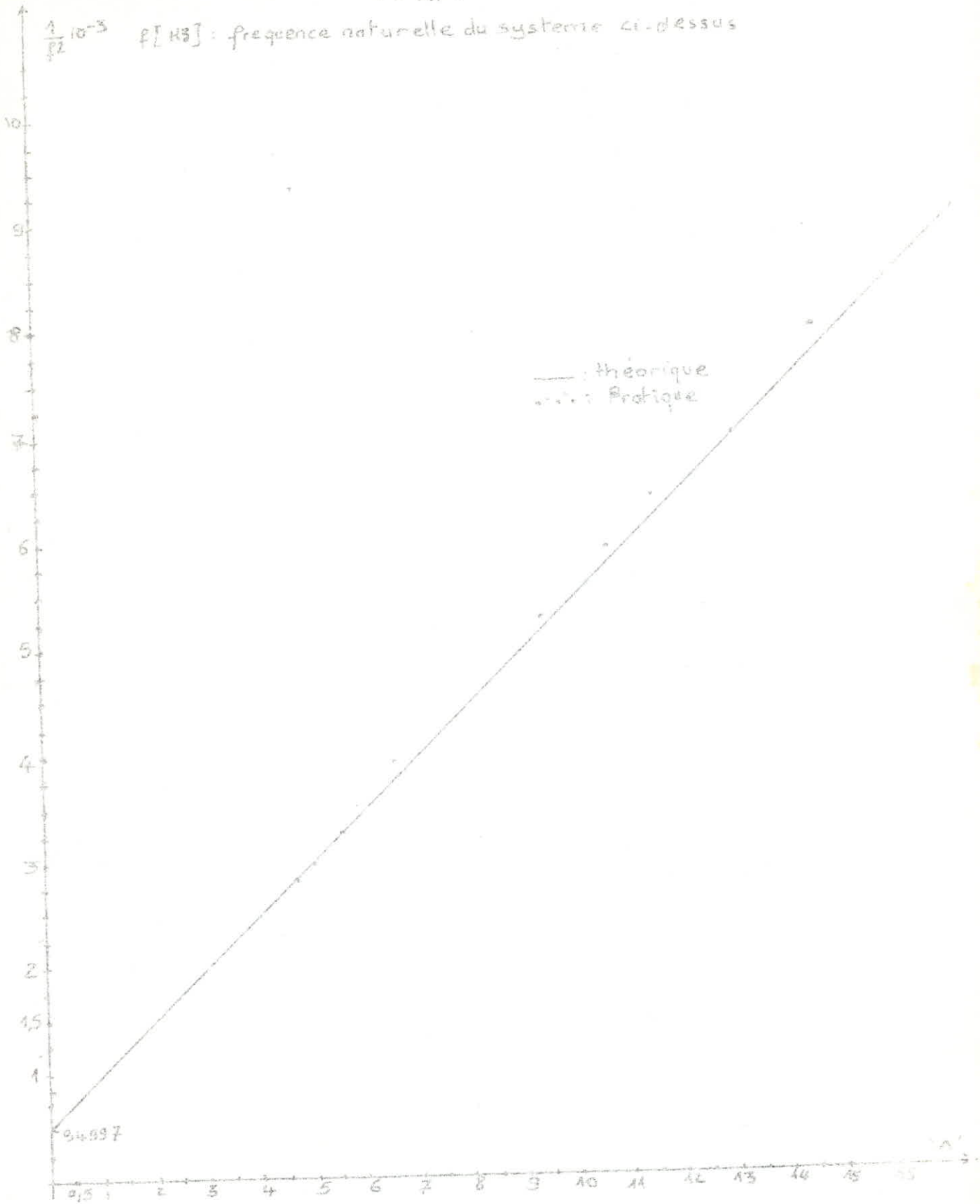
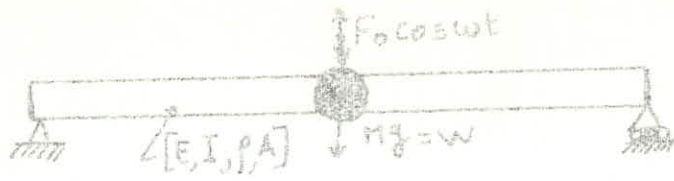
En fixant différentes  $W$  au milieu de la poutre . les frequences étant réglées à la commande de vitesse, correspondant à un maximum d'amplitude de vibration de la poutre, on peut tracer le graphique donnant  $1/f^2$  en fonction de la charge  $W$

### 4 Resultats pratiques :

W (kgf)	$(1/f^2) \cdot 10^3, f(\text{Hz})$	
	Pratiques	théoriques
0	0,467	0,4995
4,71	2,82	2,822
5,08	3	3,006
6,62	4	4,001
8,16	4,54	4,54
9,40	5,26	5,15
10,65	5,90	5,75
11,52	6,43	6,1
13,06	6,98	6,98
14,60	8,00	7,7.

on voit bien que les resultats pratiques et théoriques sont très comparables . \* les différences sont dues aux erreurs de mesure et de calculs et le modèle du système utilisé pour le calcul théorique été approxiné au milieu de la poutre .





## Conclusion

la méthode d'impédance donne la possibilité d'établir certaines Tables résumées (comme les Tables d'admittances déterminées précédemment). ce qui réduit considérablement les calculs dans la tâche d'analyse.

les applications faites dans cette étude ne concernent que la détermination des fréquences propres et donner la manière pour la recherche de certaines propriétés des systèmes plus ou moins complexes.

l'efficacité ainsi que l'importance de la méthode d'impédance dans l'analyse apparaissent mieux lorsqu'on fait une analyse plus complète des systèmes plus compliqués tels que : les membranes vibrantes ; les corps des bateaux et les corps d'avions - etc. -

En plus de son efficacité, la méthode d'impédance est un moyen d'analyse complet ; Elle permet la prévision du comportement dynamique et la détermination des propriétés des systèmes etc. -

Tandis que la méthode classique est répartie en plusieurs étapes, chacune des étapes étant destinée à la détermination de certaines caractéristiques avec des difficultés de résolution.

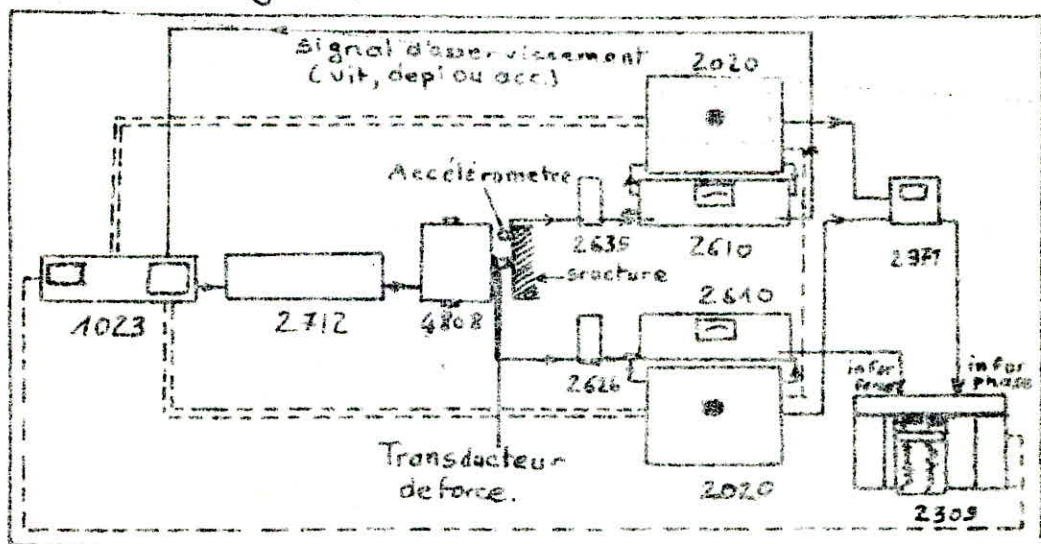


## Annexe

### Mesure d'impédance mécanique

Mesurer l'impédance mécanique revient à mesurer les variations de la réponse (vitesse, déplacement ou accélération), avec une excitation extérieure constante et leurs déphasages respectives. Ces mesures permettent la détermination des fréquences naturelles, la forme des modes, les propriétés des matériaux et la prévision de leur comportement dynamique dans des systèmes combinés à partir des mesures sur les composantes individuelles. Les mesures sont faites en maintenant certaines quantités constantes, on s'intéresse aux variations d'autres pour déterminer certaines caractéristiques telles que: la flexibilité, la rigidité, la compliance et la masse dynamique.

On donne ci-dessous le schéma d'un montage typique pour mesure d'impédance mécanique. (Relevé d'un catalogue: Instruments pour analyse des vibrations, édité par la société Danoise Brüel & Kjaer)



## Annexe.

### Description du montage.

- 1) Générateur sinusoïdal (1023) : commande mécanique ou électrique du balayage pour l'enregistrement automatique des courbes de réponses sur l'enregistreur de niveau : (2-309).
- 2) Amplificateur de Puissance (2712) : instrument transistorisé à couplage direct pour la commande de l'excitateur (4808) ; le choix de sortie sous haute ou basse impédance.
- 3) l'excitateur (4808) : (excitateur de vibration à aimant permanent) ayant le rôle d'une source dynamique (pour la mesure d'impédance mécanique).
- 4) Accéléromètre : transducteur électromécanique : produit un signal électrique de sortie proportionnel à l'accélération à laquelle il est soumis.
- 5) Preamplificateur : \* (2626) : Amplificateur conditionneur, permet de régler la sensibilité de sortie à une valeur choisie ; choix de la fréquence limite inférieure et supérieure et inducteur de charge <sup>sur</sup>.  
\* (2635) : amplificateur de charge avec intégrateur pour mesure de vitesse et de déplacement. Possibilité de choix de la tension de sortie, permet de régler la sensibilité de sortie à une valeur choisie.
- 6) Amplificateur (2610) : amplificateur-voltmètre de mesure avec inducteur ; pour mesure de vibration et de tension ; indique la gamme de mesure et les charges <sup>sur</sup> de l'entrée et de la sortie.
- 7) filtre Hétérodyne asservi (2020) : accordé automatiquement par le générateur (1023), utile pour supprimer le bruit de fond.

## Annexe

- 8) Phasemètre (2971) : mesure la différence de phase entre signaux de même fréquence ; l'angle de phase indiqué par un affichage numérique en degrés ou en radians ; utiliser pour déterminer les caractéristiques de phases des filtres et amplificateurs.
- 9) Enregistreur de niveau bicanal (2309) : enregistrement logarithmique des signaux alternatifs et pour l'enregistrement linéaire et logarithmique des signaux continus, sur papier d'enregistrement.



# PLAN DU TRAVAIL

Introduction	1
I+ Généralités	3
Définition et description des analogies électromécaniques	3
A - Analogie " Force - Tension "	3
1-1 seconde loi de Kirchoff	
1-2 loi fondamentale de la mécanique	3
1-3 Transposition des systèmes	4
2 Analogie " Force - courant "	8
2-1. Première loi de Kirchoff	8
2-2 loi fondamentale de la mécanique	8
2-3. Transposition des systèmes	9
3. unités à employer lors du passage d'un système mécanique à un système électrique et vis-versa	12
B Notion d'impédance	13
1 - Définition et Généralités	
2 - Impédances d'éléments simples	14
3 - Impédances électriques d'éléments simples	15
4 - Variations des impédances d'éléments simples	15
5 - Variations de l'admittance pour le système le plus simple. (composé)	17
6 - lois de composition des impédances	19
II APPLICATION de la méthode d'impédance pour l'analyse des systèmes mécaniques complexes	21
1 - Calcul de l'impédance du corps de l'homme opérateur en position d'assise	
2 - Etude de l'impédance $Z(s)$	24
3 - Autres emplois de la méthode d'impédance	25
4 - Conclusions	27

<b>III</b>	<b>Modèle mécanique d'un milieu continu siège de vibration</b>	28
1-	Introduction	28
2-	ondes Planes Progressives	29
3-	Modèle mécanique d'un solide parcouru par une onde plane	30
<b>IV</b>	<b>Comparaison de la méthode d'impédance à la méthode classique sur la base de l'analyse des systèmes continus</b>	32
1-	Introduction	32
2-	Généralités	33
3-	Impédances et admittances dans les poutres	38
3-1-	Introduction	38
3-2-	Méthode d'admittance des poutres	39
4-	calcul d'admittance de déplacement des poutres	40
<b>V</b>	<b>Admittance - déplacements des systèmes composés</b>	45
1-	Poutre - systèmes discrets	45
2-	Deux Poutres conjuguées	49
3-	Analyse de systèmes poutres plus compliqués	51
<b>VI</b>	<b>Confirmation Pratique des résultats théoriques</b>	53
	Etude de vibration de flexion des Poutres	
1-	Introduction	
2-	calcul. théorique	54
	Détermination des fréquences propres par la méthode d'impédance.	
3-	Manipulation	57
4-	Resultats experimentaux	
	courbes des fréquences propres	58
	Conclusion	59
	Annexe;	
	Mesure d'impédance mécanique.	60

- 1- A-H. CHURCH. Mechanical-Vibration  
John and Sons, Inc. New-York.  
New-York . Toronto - London 1961
- 2- G. MEY- Analogies et Modèles Electriques,  
Acoustique - mécanique vibratoire, Université de Paris 1965
- 3- William. W. Seto. B.S. in M.E., M.S.,  
Schaum's outline series. 1964.
- 4- R-Maget - Mécanique - vibratoire.  
Librairie Polytechnique Beranger.
- 5- R. Gabillard. Vibration et Phénomènes de Propagation  
Dunod . Paris 1972
- [6]- Thèse de doctorat M. Książek - Crakovie 1978
- 7 - B. YAVORSKI et A-DETLAF.  
Aide mémoire de Physique - Troisième édition,  
Edition Mir - Moscou 1980
- [8]- C.M. HARRIS . C.H.E. Crede. " Shock and vibration,  
Hand book " - Volume 3; Mc. Graw-Mill Book Company, Inc  
New-York , Toronto; London. 1961
- 9]- Brüel & Kjaer- catalogue Résumé - Instruments  
de mesure pour l'analyse du bruit, des vibrations et  
du signal.  
DANEMARK - 1980.



