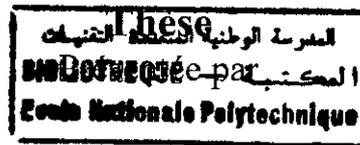


République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique
DER de Génie Electrique et Informatique



M^r BACHIR BOUYADJRA ROCHDI
Ingénieur d'état en AUTOMATIQUE de l'E.N.P.

pour l'obtention du diplôme de

Magister en Automatique

***Commande Adaptative Décentralisée des
Robots Manipulateurs***

Soutenue le Avril 1998 devant le jury composé de :

F. Boudjema	Maitre de conférence à l'E.N.P.....	Président
M.S. Boucherit	Maitre de conférence à l'E.N.P.....	Rapporteur
D. Boukhetala	Chargé de cours à l'E.N.P.....	Rapporteur
M. Tadjine	Docteur à l'E.N.P.....	Examineur
E.M. Berkouk	Docteur à l'E.N.P.....	Examineur
M.S. Aït Cheikh	Chargé de cours à l'E.N.P.....	Examineur
K. Djebara	Attaché de recherche au C.D.S.E.....	Invité

AVANT PROPOS



Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Commande des Processus (LCP) de la DER de Génie Electrique et Informatique de l'Ecole Nationale Polytechnique (ENP) sous la direction conjointe de Monsieur M.S. BOUCHERIT, maître de conférence à l'ENP et Monsieur D. BOUKHETALA, chargé de cours à l'ENP, qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma gratitude pour les conseils avisés et l'encouragement constant qu'ils n'ont cessé de me prodiguer tout au long de cette étude.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à Monsieur F. BOUDJEMA, maître de conférence à l'ENP, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements vont aussi à Monsieur M. TADJINE, Docteur à l'ENP, je suis très honoré de sa présence dans le jury de cette thèse.

J'exprime ma grande gratitude à Monsieur E.M. BERKOUK, Docteur à l'ENP, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de faire partie de ce jury.

Je remercie également Monsieur M.S. AIT CHEIKH, chargé de cours à l'ENP, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail en me faisant l'honneur de participer à ce jury.

Je ne saurais comment remercier monsieur K. DJEBARA, dont j'ai pu, au cours de deux années passées au C.D.S.E d'Aïn Oussara, apprécier non seulement sa compétence scientifique mais aussi et surtout ses qualités humaines. Son aide m'a été d'un apport appréciable.

Que mes amis, S. BARKATI, D. MOSTEFAL, H. AIDJOULI, S. BOUMAZA, S. LABIOD, O. BOUHALI trouvent ici toute m'a gratitude pour leur compréhension, leur aide, leur ambiance bien sympathique et leur soutien moral et matériel qui n'ont cessé de m'apporter tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je n'oublie pas non plus ce que je dois à mes amis qui sont au C.D.S.E d'Aïn Oussara et plus particulièrement mes amis: F. BELAZREG, K. HALBAOUI, A. BERRAHAL, N. BENAMAR pour leur encouragement et soutien moral tout au long de cette étude.

Je ne peut citer tout le monde, mais tous ceux qui ont contribué de façon ou d'une autre soient assuré de ma reconnaissance. Je les remercie tous, particulièrement: ma famille, mes amis, et le personnel de la bibliothèque de l'ENP.

Enfin, je ne pourrais clôturer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants, qui sont à l'origine de tout mon savoir.

R . Bachir Bouyadjra



Sommaire

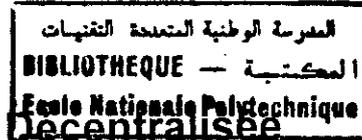
Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre 1 Modélisation des Robots Manipulateurs

1.1 Introduction.....	4
1.2 Modélisation.....	4
1.2.1 Modélisation Cinématique.....	4
1.2.1.1 Problème cinématique directe.....	5
1.2.1.2 Application au robot <i>PUMA</i> à 2 d.d.l.....	7
1.2.1.3 Modélisation géométrique.....	8
1.2.2 Modélisation dynamique.....	9
1.2.2.1 Approche de Lagrange - Euler.....	10
1.2.2.1.1 Energie cinétique du robot manipulateur.....	10
1.2.2.1.2 Energie potentielle du robot manipulateur.....	12
1.2.2.1.3 Equations dynamiques du robot manipulateur.....	12
1.2.2.1.4 Application au robot <i>PUMA</i>	13
1.2.2.2 Approche de Newton-Euler.....	15
1.2.2.2.1 Rappel théorique.....	15
1.2.2.2.2 Application au repères liées aux liaisons du robot.....	16
1.2.2.2.3 Equations récursives du mouvement du robot.....	17
1.2.2.2.4 Equations récursives modifiées.....	19
1.2.2.2.5 Algorithme de Newton-Euler.....	20
1.3 Validation des modèles dynamiques.....	21
1.4 Conclusion.....	26

Chapitre 2 Commande Adaptative décentralisée à Modèle de Référence

2.1 Introduction.....	27
2.2 Modèle dynamique du robot avec charge.....	28
2.3 Structure du système de commande.....	30
2.4 Synthèse de la commande adaptative décentralisée.....	34
2.5 Résultats de simulation.....	38
2.5.1 Commande dans le plan articulaire.....	38
2.5.2 Commande dans le plan opérationnel.....	43
2.6 Conclusion.....	48



Chapitre 3 Commande Adaptative à Perturbation (DAPC)

3.1 Introduction.....	49
3.2 Modèle à perturbation du robot manipulateur.....	50
3.3 Commande adaptative décentralisation.....	51
3.4 Application à la commande des robots manipulateurs.....	54
3.4.1 Résultats de simulation.....	56
3.5 Conclusion.....	66

Chapitre 4 Commande Adaptative décentralisée des Systèmes Faiblement Interconnectés

4.1 Introduction.....	67
4.2 description du système et hypothèses.....	68
4.3 Commande adaptative décentralisée.....	69
4.3.1 Interconnexions à dynamique négligeable.....	69
4.3.2 Interconnexions à dynamique rapide.....	71
4.3.2.1 Commande sans signal auxiliaire.....	71
4.3.2.2 Commande avec signal auxiliaire.....	72
4.3.3 Résultats de simulation.....	74
4.4 Synthèse d'un contrôleur minimal décentralisé.....	84
4.4.1 Système en boucle fermée.....	85
4.4.2 Stabilité et robustesses du MCS décentralisée.....	88
4.4.3 Application au robot manipulateur <i>PUMA</i>	89
4.5 Conclusion.....	94

Chapitre 5 Commande Adaptative Décentralisée des Systèmes Fortement Interconnectés

5.1 Introduction.....	95
5.2 Modèle des systèmes interconnectés.....	96
5.3 Influence des interconnexions d'ordre élevé (Exemple illustratif).....	98
5.4 Commande adaptative décentralisée.....	101
5.4.1 Commande avec compensateur partiellement centralisé.....	101
5.4.2 Commande avec compensateur décentralisé (Interconnexions d'ordre 2).....	103
5.4.2.1 Commande décentralisée semi-adaptative.....	103
5.4.2.2 Commande décentralisée complètement adaptative.....	104
5.4.3 Commande avec compensateur décentralisé	

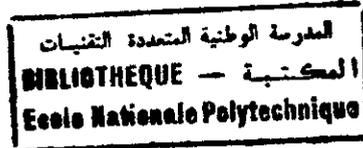
(Interconnexions d'ordre élevé).....	104
5.4.3.1 Commande décentralisée semi-adaptative.....	104
5.4.3.2 Commande décentralisée complètement adaptative.....	105
5.5 Algorithme générale de commande.....	105
5.6 Résultats de simulation.....	106
5.7 Conclusion.....	114
Conclusion générale.....	115
Annexe A	
Dérivation des lois d'adaptation pour la commande adaptative décentralisée à modèle de référence « <i>MRDAC</i> ».....	117
Annexe B	
Preuves de stabilité des schémas de commande des systèmes fortement interconnectés.....	122
Annexe C	
Commande Adaptative Décentralisée Via les Structures Variables des Robots Manipulateurs.....	130
Annexe D	
Commande Adaptative Décentralisée des Systèmes Fortement interconnectés Application à la commande des robots manipulateurs.....	136
Bibliographie.....	141

A_i^{-1}	: matrice homogène de <i>Denavit Hartenberg</i> .
A_i, b_i	: matrices d'état et de commande du sous système .
A_{mi}, b_{mi}	: matrices d'état et de commande du modèle de référence M_i .
$A(t), B(t)$: matrices d'état et de commande du système globale.
$A_m(t), B_m(t)$: matrices d'état et de commande du modèle de référence.
A_{ij}	: matrice d'interconnexion.
(A, B, C)	: matrices de l'action d'anticipation de la commande.
a_i, d_i	: paramètres (distances) de la transformation de <i>Denavit Hartenberg</i> .
$a_i, \dot{\omega}_i$: accélération absolue linéaire et angulaire de l'articulation i .
$c(q), G(\theta)$: vecteur couple gravitationnel.
$D(q), M(\theta)$: matrice d'inertie du robot manipulateur.
$d_i(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$: couple d'interconnexion de l'articulation i avec les autres liaisons.
E_c, E_p	: énergie cinétique et potentielle du bras manipulateur.
$e(t), e_i(t)$: erreur de poursuite d'une trajectoire.
$F(t)$: force appliquée à l'élément terminale.
f_i, n_i	: force et moment appliqué sur l'articulation i par l'articulation $i-1$.
$f_i(t)$: signal auxiliaire.
$H(\theta)$: vecteur des couples de frottements secs et visqueux.
$h(q, \dot{q}), N(\theta, \dot{\theta})$: vecteur couple centrifuge et de <i>Coriolis</i> .
$J(\theta)$: matrice jacobienne du système.
J_i	: matrice d'inertie.
k_p	: coefficient de l'action proportionnelle d'un PD.
k_v	: coefficient de l'action dérivé d'un PD.
(k_{i0}, k_{i1})	: coefficients de l'action " <i>feed-back</i> " décentralisée.
l_i	: longueur de la liaison i .
L	: fonction de Lagrange.
$m_{ii}(\theta)$: élément diagonale de la matrice d'inertie M .
N	: nombre des sous-systèmes interconnectés.
n	: nombre de degrés de liberté du robot.
n_i	: ordre du sous-système S_i .
P_i, Q_i	: matrices de Lyapunov.
q_i, \dot{q}_i	: coordonnée et vitesse généralisée de l'articulation i .
(q_{i0}, q_{i1}, q_{i2})	: coefficients de l'action " <i>feed-forward</i> " décentralisée.
${}^{i-1}R_i$: matrice de rotation extrême de A_i^{-1} .
$r(t)$: erreur pondérée.
r_i	: entrée du modèle de référence M_i .
S_i	: sous-système interconnecté.
T_i, τ_i	: force généralisée de l'articulation i .
T_{ff}	: action " <i>feed-forward</i> " de la commande.

T_{fb}	: action "feed-back" de la commande.
$u_i(t)$: l' $i^{\text{ème}}$ composante de la commande.
V	: fonction scalaire de Lyapunov.
v_i, ω_i	: vitesse absolue linéaire et angulaire de l'articulation i .
$X(t) \equiv (x, y)$: vecteur des coordonnées cartésiennes de l'élément terminale.
(x_i, y_i, z_i)	: référentiel lié à l'articulation i .
$x(t), x_i(t)$: vecteurs d'état.
y, y_d	: sortie réelle et désirée du système.
z_i	: fonction nonlinéaire d'interconnexion.
$\theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i$: angle, vitesse et accélération de rotation de l'articulation i .
α_i	: paramètre (angle) de la transformation de Denavit Hartenberg.
$\Lambda(\theta)$: modèle géométrique du robot.
δx	: écart mesuré sur la grandeur x .
θ_r	: trajectoire désirée du robot manipulateur.
g_i, g_i^*	: vecteur des gains ajustables et optimales.
v_i	: vecteur de régression.
$\ \cdot \ $: norme d'un vecteur.
d.d.l	: degrés de liberté.

Liste des Tableaux et Schémas

Tab. 1.1 Paramètres de D-H pour le <i>PUMA</i> à 2 d.d.l.....	7
Tab. 1.2 Paramètres du robot.....	21
Tab. 2.1 Paramètres de la commande <i>MRAC</i> décentralisée.....	38
Tab. 2.2 Comparaison entre les différents 'scénarios' de la commande <i>MRAC</i> décentralisée.....	39
Fig. 1.1 Présentation du <i>PUMA</i> à 2 d.d.l.....	7
Fig. 1.2 Implémentation de la méthode de D-H.....	7
Fig. 1.3 Rotation d'un repère par rapport à un autre.....	15
Fig. 1.4 Mouvement de translation et de rotation d'un repère.....	16
Fig. 1.5 Relation entre divers repères d'une chaîne articulée.....	17
Fig. 1.6 Forces et moments pour diverses liaisons.....	18
Fig. 1.9 Couplage de N-E et E-L.....	23
Fig. 2.1 Configuration du système de commande.....	31
Fig. 2.2 Système de commande incrémentale.....	32
Fig. 2.3 Structure de commande adaptative.....	34
Fig. 2.4 Commande adaptative décentralisée.....	35
Fig. 3.1 Schéma général de la commande <i>APC</i>	50
Fig. 3.2 Schéma bloc de la commande adaptative décentralisée à perturbation.....	56
Fig. 4.7 Schéma d'un contrôleur minimal.....	84
Fig. 5.1 Structure d'une commande adaptative décentralisée.....	98



Introduction Générale

Les préoccupations de l'automatique issues de la régulation de processus comportant quelques entrées et quelques sorties ont évolué vers la conduite de vastes ensembles technologiques appelés : grands systèmes, dont les réseaux de distribution ou de service (électricité, eau, gaz, télécommunication, réseaux d'ordinateurs) ou les ateliers flexibles sont des exemples typiques.

Chronologiquement, le premier problème qui a été posé autour de ces grands systèmes est le problème d'optimisation. Ainsi, les premiers résultats ont porté sur l'optimisation déterministe de ces systèmes par des méthodes de décomposition, d'agrégation et de coordinations [Singh 81]. Il s'agissait de ramener l'optimisation globale du système considéré comme l'interconnexion de plusieurs sous-systèmes à celle de l'optimisation indépendante de ces sous-systèmes. En ramenant l'optimisation du tout à celles des parties, on tente de surmonter les problèmes de taille (grand nombre de variables, de contraintes, etc...) mais un autre avantage important est de pouvoir adapter à chaque sous-système une méthode spécifique de résolution.

L'optimisation des grands systèmes s'est confrontée à de nouvelles questions pratiques. En effet, l'acharnement des chercheurs à vouloir exploiter et à mieux maîtriser l'environnement, souvent mal connu ou inconnu, a rendu les techniques classiques, de synthèse et d'optimisation, rapidement obsolètes. Le développement des techniques tenant compte de ces contraintes a été donc indispensable.

Parmi les techniques développées on trouve la théorie de la commande adaptative. Cette théorie est une tentative d'aborder, par des techniques linéaires d'estimation et de commande, la régulation de systèmes dont le modèle ou l'environnement sont mal connus à priori ou susceptibles de varier de façon imprévisible. Cette situation peut résulter par exemple de la prise en compte d'un modèle linéaire pour un processus non linéaire (le modèle linéaire étant vu comme une linéarisation autour d'un point de fonctionnement variable).

Deux types de commande sont généralement utilisés [Benhammou 88]: les régulateurs auto-ajustables (*Self-Tuning Regulators*) et la commande adaptative à modèle de référence (*MRAC*). On peut distinguer dans les régulateurs auto-ajustables la commande adaptative directe et la commande adaptative indirecte. La commande adaptative indirecte comporte deux étapes à chaque période d'échantillonnage. Dans une première phase, on identifie de manière récursive un modèle de procédé, puis dans une deuxième phase, on calcule les paramètres du régulateur à partir des paramètres estimés du procédé. La commande adaptative directe comporte une seule étape à chaque période d'échantillonnage. Les paramètres du régulateur sont directement identifiés de manière récursive.

L'approche avec modèle de référence, consiste à utiliser un système auxiliaire excité par les mêmes entrées que celles du procédé. Son rôle est de fournir un indice de performance qui, comparé avec l'indice de performance du système ajustable, est utilisé par le mécanisme d'adaptation, soit pour modifier les paramètres du système ajustable, soit pour synthétiser un signal de commande. Deux voies ont été développées dans ce contexte. La première, la plus ancienne, qui est due à PARK utilise la théorie de stabilité de Lyapunov. La seconde, la plus utilisée, a été introduite par LANDAU. Elle se base sur la théorie de l'hyperstabilité et de positivité de POPOV.

Le premier travail mené autour de la commande adaptative décentralisée (*ADC*) est celui de SUNDARESHAN où est posée pour la première fois la décentralisation d'un schéma de commande adaptative [Benhammou, 88]. Par la suite, plusieurs auteurs ont porté leurs contributions au développement des différentes techniques adaptatives décentralisées en se basant sur autant de concepts et d'hypothèses. On présente dans ce qui suit, quelques exemples par ordre chronologiques de leur apparition :

- IOANNOU, dans [Ioannou, 85], [Ioannou, 86] et dans ses articles antérieurs donne une analyse théorique approfondie de la stabilité des systèmes linéaires interconnectés et avec des degrés relatifs inférieurs ou égale à deux. Il introduit aussi le terme « σ - modification » dans les lois d'adaptation pour assurer une certaine robustesse. On trouve aussi, parmi ces travaux, la commande *ADC* des systèmes possédant deux dynamiques différentes: une dynamique rapide et une dynamique longue. Pour le développement théorique de la stabilité, il se base sur la théorie des perturbations singulières.
- Al Abbass et Oznuger [Al Abbass 85] proposent un schéma adaptatif à modèle de référence qui comporte une action synthétisée à partie des systèmes à structures variables et des modes glissants. Cet approche élimine les effets des interconnexions quand le système atteint la surface de glissement.
- BUNDEL, dans [Bundel, 85] traite la commande *ADC* à modèle de référence appliquée aux systèmes discrets. Cette étude est une généralisation du cas continu et apparue des travaux de KOKOTOVIC et IOANNOU [Ioannou, 85].
- Dans [Osmman, 89], l'auteur propose une commande *ADC* indirecte où il a supposé que les paramètres estimés du système et les interconnexions sont bornés. Pour limiter les effets des perturbations et des interactions dans la phase d'identification, OSMMAN introduit ce qu'il appelle une zone morte variable dans l'algorithme du gradient utilisé pour l'estimation.
- Dans le même contexte, TITLI et KAMOUN [Titli, 89] suggère une commande *ADC* à STR pour les systèmes interconnectés discrets.
- SPOONER et PASSINO proposent dans leur article [Spooner, 95] une commande *ADC* indirecte non linéaire qui utilise les techniques de la géométrie différentielle pour les systèmes bilinéaires ayant des degrés relatifs quelconques. L'algorithme établi est appliqué pour la commande longitudinale d'un train de véhicules pour assurer une distance constante entre les différents véhicules.

L'objectif de notre travail présenté dans ce mémoire est de faire une étude de synthèse des différentes commandes adaptatives décentralisées et de les appliquées par simulation sur un modèle non linéaire d'un robot manipulateur à deux d.d.l de type *PUMA* pour permettre une bonne compréhension et une analyse approfondie du problème. Un robot manipulateur à n d.d.l peut toujours être modélisé par un système interconnecté où chaque liaison est considérée comme étant un sous-système couplé avec les autres sous-systèmes.

Notre travail est scindé en deux grandes parties. La première englobe des commandes synthétisées à partir du modèle dynamique du robot manipulateur (Chapitre 2 et Chapitre 3).

La seconde englobe des techniques de commande partant des systèmes interconnectés quelconques. Ces dernières sont ensuite appliquées dans le domaine de la robotique (Chapitre 4 et Chapitre 5).

A cet effet, Notre mémoire est divisé en cinq chapitres:

Le premier problème qui se pose à l'automaticien, chronologiquement, est d'obtenir un modèle du système à étudier. Le premier chapitre traite donc cette étape primordiale. Après avoir effectué l'étude géométrique et cinématique du robot en utilisant la transformation homogène de *Denavit-Hartenberg*, on s'est intéressé à l'élaboration du modèle dynamique du système. On a utilisé deux approches complémentaires à savoir celle d'*Euler-Lagrange* et de *Newton-Lagrange*. Le couplage entre ces deux derniers est aussi exposé.

L'objet du deuxième chapitre est de développer une commande adaptative décentralisée basée sur le modèle inverse du robot manipulateur. On présente en premier lieu, le modèle général du manipulateur plus charge, ensuite, on utilise la technique du modèle inverse pour synthétiser la loi de commande. Cette dernière est composée d'un signal auxiliaire, d'un contrôleur *PD2* à gains ajustables dans la chaîne directe et d'un *PD* à gains ajustables dans la chaîne de retour. L'extension de la commande dans le plan opérationnel (espace de la tâche) est aussi présentée.

Au chapitre trois, la commande adaptative décentralisée à perturbation est détaillée. Après avoir considéré le modèle à perturbation du robot, on présente la loi de commande utilisée comme un « *feed-back* » pour assurer la régulation des erreurs de poursuite (états du modèle à perturbation) vers zéro. Les performances de la commande décentralisée étudiée sont vérifiées par les résultats de simulation.

L'objet du quatrième chapitre est d'aborder la commande adaptative décentralisée des systèmes interconnectés quelconques, en particulier les systèmes caractérisés par des faibles interconnexions. Différents 'scénarios' de la commande sont alors exposés et appliqués dans le cas du robot manipulateur. Des conditions sur la structure et taille des interactions sont imposées et les performances des algorithmes sont améliorées en utilisant des signaux auxiliaires adaptatifs. Les Travaux de Stoten et Benchoubane sur le *MCS (Minimal Controller Synthesis)* sont généralisés au cas décentralisé et on obtient des algorithmes décentralisés *DMCS*.

Dans le dernier chapitre, on expose la commande adaptative décentralisée des systèmes fortement interconnectés. Les conditions faites sur ces derniers sont plus rigoureuses. On présente l'algorithme décentralisé avec compensateur partiellement centralisé, puis complètement décentralisé dans le cas des interconnexions d'ordre deux et d'ordre quelconque.

Enfin, notre mémoire est clôturé par une conclusion générale suivie de perspectives.

Chapitre 1

Modélisation des Robots Manipulateurs

1.1 INTRODUCTION

En automatique la modélisation constitue une étape indispensable dans la commande des systèmes dynamiques. En effet, il existe deux façons d'élaborer les relations d'entrées/sorties du système : Le modèle de connaissance est obtenu en utilisant les lois physiques, tandis que le modèle de représentation est obtenu en utilisant les techniques d'identification en se basant sur des observations faites sur les entrées et les sorties du système.

Dans le cas de la robotique les concepts fondamentaux de la mécanique, tels que les formalismes de *NEWTON-EULER* et de *LAGRANGE* peuvent être utilisés indifféremment pour obtenir les équations différentielles régissant le mouvement dynamique du robot [Fu 87], [Paul 77]

Examinant d'abord qu'est ce que la robotique et les robots manipulateurs:

La robotique est une technique fondamentalement pluridisciplinaire car elle utilise de nombreuses technologies : mécanique, pneumatique, hydraulique, électronique, informatique, etc., elle est donc une notion vaste dont une définition universelle semble impossible à donner bien que de nombreuses tentatives aient été faites. La définition la plus précise à notre égard est celle de l'*AFNOR*, qui définit ce qu'est un manipulateur: « mécanisme multi-fonctionnel à plusieurs degrés de liberté commandé directement par un opérateur humain ou par un système logique ».

Le robot industriel est présenté comme un manipulateur automatique asservi en position, reprogrammable, polyvalent et capable de positionner et d'orienter des matériaux, pièces, outils ou dispositifs spécialisés. Il est aussi présent dans des environnements hostiles, où il est destiné à accomplir des tâches dont l'homme est incapable de les effectuer (manipulation des matériaux radioactifs dans les cellules chaudes des réacteurs nucléaires, etc..).

1.2 MODELISATION

1.2.1 MODÉLISATION CINÉMATIQUE

Un manipulateur est considéré comme étant une chaîne de liaisons connectées entre elles par des articulations rotationnelles ou prismatiques. Une extrémité de cette chaîne est attachée à la base, tandis que l'autre extrémité est libre et reliée à l'outil terminal, en vue de manipuler des objets ou effectuer des tâches d'assemblages. Le mouvement relatif de chaque

articulation entraîne celui des liaisons, ce qui permet de positionner l'extrémité libre et de donner à l'outil terminal l'orientation désirée. En effet, dans la plupart des applications en robotique, on s'intéresse à la trajectoire de l'outil terminal par rapport à un référentiel fixe et arbitraire. La cinématique d'un robot se veut l'étude analytique de cette trajectoire sans celle des forces et moments qui causent le mouvement.

Dans ce qui suit on va considérer un manipulateur dont les paramètres géométriques sont supposés connus et on va essayer de répondre aux deux questions suivantes :

1. pour un manipulateur dont les paramètres géométriques sont supposés connus, pour chaque vecteur des variables d'articulations $[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T$, n étant le nombre de D.D.L. du manipulateur, quelle est la position et l'orientation de l'outil terminal correspondante, par rapport au référentiel fixe (La base) ?
2. Soit une position et une orientation désirées de l'outil terminal, le manipulateur peut-il atteindre celles-ci ? Et si oui, quelles sont les différentes configurations du manipulateur, c'est à dire l'ensemble des vecteurs q , qui peuvent nous le garantir ?

La première de ces questions est appelée problème cinématique direct, et la seconde problème cinématique inverse, seule l'approche directe est traitée du fait qu'elle intervient directement dans la modélisation dynamique des robots.

1.2.1.1 Problème cinématique direct

Pour décrire les relations de translations et de rotations entre les liaisons adjacentes d'un robot manipulateur, *DENAVIT & HARTENBERG* (1955) proposèrent une méthode matricielle pour en établir systématiquement les repères attachés à chaque liaison dans une chaîne articulée. La représentation de D-H résulte dans l'utilisation d'une transformation homogène 4×4 qui représente le système de coordonnées de chaque liaison par rapport au système de coordonnées de la liaison précédente. Et delà, à travers une séquence de transformations on peut ramener le système de coordonnées attaché à l'élément terminale (la tâche) au système de coordonnées attaché à la base (repère fixe).

Les repères sont déterminés selon les règles suivantes :

- l'axe z_{i-1} est le long de l'axe de l'articulation i .
- l'axe x_i est normal à l'axe z_{i-1} : $x_i = z_{i-1} \wedge z_i$.
- l'axe y_i est déterminé de telle manière à constituer un trièdre direct.

Il est à noter que le choix du référentiel de base est arbitraire, pour autant que l'axe z_0 soit le long de l'axe de mouvement de l'articulation 1, de même le référentiel de l'outil terminal pourra être placé n'importe où, tant que l'axe x_n est normal à z_{n-1} . Il est maintenant possible de définir les paramètres cinématique, de la manière suivante :

1. θ_i est l'angle de l'axe x_{i-1} vers l'axe x_i autour de l'axe z_{i-1} .
2. α_i est l'angle de l'axe z_{i-1} vers l'axe z_i autour de l'axe x_i .
3. a_i est la distance comprise entre l'intersection de l'axe z_{i-1} avec l'axe x_i et l'origine du référentiel i le long de l'axe x_i .
4. d_i est la distance comprise entre l'origine du référentiel $i-1$ et l'intersection de l'axe z_{i-1} avec l'axe x_i le long de l'axe z_{i-1} .

Enfin, on va présenter dans ce qui suit l'algorithme qui permet de traiter n'importe quelle configuration d'un robot manipulateur de n d.d.l.

1. Etablir le système de coordonnées lié à la base, en s'assurant que l'axe z_0 est bien selon l'axe de rotation de l'articulation 1, et qu'il pointe vers « l'épaule » du bras manipulateur.
2. Pour chaque articulation $i=1, n-1$ faire les étapes 3 à 6.
3. Aligner l'axe z_i avec l'axe de l'articulation $i+1$.
4. Etablir l'origine de chaque système de coordonnées, celui-ci sera donné par l'intersection de l'axe z_{i-1} et z_i ou bien l'intersection de leurs normales communes avec l'axe z_i .
5. Etablir l'axe x_i , selon la règle suivante : $x_i = \pm(z_{i-1} \wedge z_i) / \|z_{i-1} \wedge z_i\|$
ou bien le long de la normale commune aux axes z_i et z_{i-1} .
6. Etablir l'axe y_i , selon la règle suivante : $y_i = \pm(z_i \wedge x_i) / \|z_i \wedge x_i\|$ afin d'établir le trièdre direct (x_i, y_i, z_i) .
7. Etablir l'axe z_n selon la direction de l'axe z_{n-1} , et est sortant du corps du robot.
8. Déterminer les paramètres de chaque articulation : $i=1, n-1$.

Une fois ces étapes effectuées, on détermine les matrices de transitions homogènes relatives à chaque articulation, elles sont données en fonction des paramètres décrits ci-dessus et en remarquant qu'un point r_i exprimé dans le référentiel i , peut être exprimé dans le référentiel $i+1$ en opérant les transformations successives suivantes :

1. Rotation autour de l'axe z_{i-1} d'un angle θ_i afin d'aligner l'axe x_{i-1} avec l'axe x_i .
2. Translation le long de l'axe z_{i-1} d'une distance d_i , afin de faire coïncider x_i et x_{i-1} .
3. Translation le long de l'axe x_i d'une distance a_i afin de faire coïncider les origines des axes x_i et x_{i-1} .
4. Rotation autour de l'axe z_{i-1} d'un angle θ_i afin de faire coïncider les deux systèmes de coordonnées i et $i-1$.

Ce qui donne la matrice de transformation homogène suivante :

$$A_i^{i-1} = T_{z,d} \times R_{z,\theta} \times T_{x,a} \times R_{x,\alpha} \quad (1.1)$$

$$A_i^{i-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

On va appliquer l'algorithme donné ci-dessus sur le PUMA à 2 d.d.l.

1.2.1.2 Application au PUMA à 2 D.D.L

Dans ce travail, nous avons opté pour un robot planaire PUMA à 2 d.d.l. (seul les articulations 2 et 3 du robot industriel PUMA 500 sont prises en compte). Le schéma descriptif de ce manipulateur est donné à la figure (Fig.1.1). [Seraji 89]

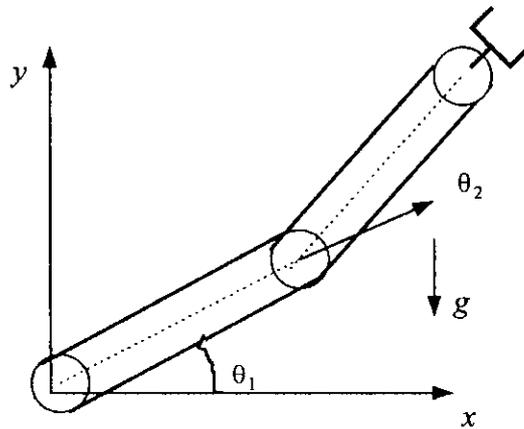


Fig. 1.1: Présentation du PUMA à 2 d.d.l.

Les paramètres de la transformation [D-H] du robot, sont regroupés dans le tableau suivant:

articulation	θ_i	a_i	d_i	α_i
1	θ_1	l_1	0	0
2	θ_2	l_2	0	0

Tab. 1.1: paramètres de D-H pour le PUMA à 2 d.d.l.

L'implémentation des repères pour chaque liaison, en suivant les étapes de l'algorithme cité ci-dessus, est illustrée sur la figure (Fig.1.2)

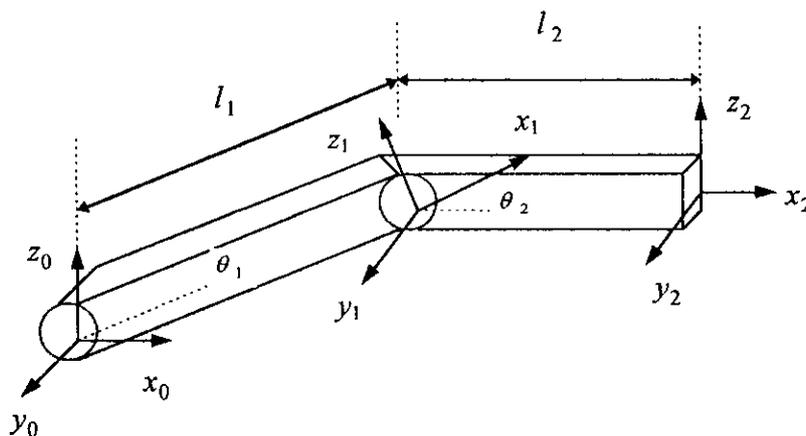


Fig.1.2: Implémentation de la méthode de D-H

Ainsi en utilisant l'algorithme de la représentation de *Denavit-Hartenberg* nous aboutissons aux matrices de transformations homogènes suivantes :

$$A_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_1 + c_{12}) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l(s_1 + s_{12}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

avec $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$ et $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$.

1.2.1.3 Modélisation géométrique

Les transformations précédentes peuvent être utilisées pour établir les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées généralisées. En effet, le modèle géométrique consiste à résoudre l'équation de transformation afin de trouver la position de l'élément terminale en terme d'angles et de déplacements entre les articulations. Les angles et déplacements entre les articulations sont appelés: coordonnées articulaires alors que les positions de l'élément terminale (outil de travail) dans l'espace sont décrites comme étant des coordonnées opérationnelles ou cartésiennes.

Dans l'analyse d'un modèle géométrique, il y a deux problèmes à résoudre: le modèle géométrique directe et le modèle géométrique inverse.

Le modèle géométrique direct s'obtient en égalisant la matrice de transformation homogène qui relie l'élément terminal à la base (A_2^0 dans notre cas) et la matrice de transformation générale suivante :

$$A_2^0 = \begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x & P_x \\ X_y & Y_y & Z_y & P_y \\ X_z & Y_z & Z_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Où:

$(X_x \ X_y \ X_z)^T$ est l'orientation de l'élément terminale suivant l'axe X de la base.

$(Y_x \ Y_y \ Y_z)^T$ est l'orientation de l'élément terminale suivant l'axe Y de la base.

$(Z_x \ Z_y \ Z_z)^T$ est l'orientation de l'élément terminale suivant l'axe Z de la base.

$(P_x \ P_y \ P_z)^T$ est la position de l'élément terminale.

On trouve donc:

$$\begin{aligned} x &= P_x = l(c_1 + c_{12}) \\ y &= P_y = l(s_1 + s_{12}) \\ z &= P_z = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Cette équation est appelée modèle géométrique directe du robot manipulateur. Elle peut être obtenue facilement en utilisant les relations trigonométriques et en se référant à la figure Fig.1.1. Le modèle géométrique inverse est obtenu en inversant l'équation (1.6). Il donne la

configuration géométrique du robot en fonction de la position de l'élément terminal et ne conduit pas toujours à une solution unique.

En partant de (1.6), on obtient:

$$x^2 + y^2 = 2l^2(1 + c_2)$$

donc:

$$\theta_2 = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - A^2}}{A}\right) \quad (1.7.a)$$

avec: $A = \frac{x^2 + y^2}{2l^2} - 1$

d'autre part, on a:

$$x = l(1 + c_2)c_1 - ls_1s_2$$

$$y = l(1 + c_2)s_1 + lc_1s_1$$

alors:

$$\frac{y}{x} = \frac{\left(\frac{s_1}{c_1}\right) + \frac{s_2}{1 + c_2}}{1 - \frac{s_1s_2}{c_1(1 + c_2)}}$$

en utilisant la relation suivante:

$$\arctg(a) + \arctg(b) = \arctg\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right)$$

on obtient:

$$\theta_1 = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \arctg\left(\frac{s_2}{1 + c_2}\right) \quad (1.7.b)$$

avec: $a = \frac{s_1}{c_1} = \tg(\theta_1)$ et $b = \frac{s_2}{1 + c_2}$

Les équations (1.7.a) et (1.7.b) représentent le modèle géométrique inverse du robot manipulateur.

1.2.2 Modélisation dynamique

Les équations dynamiques du mouvement d'un bras manipulateur, sont l'ensemble des équations mathématiques, décrivant le comportement dynamique du manipulateur, de telles équations sont utilisées pour la simulation par ordinateur, du mouvement du bras manipulateur, ainsi que pour la conception d'une commande en vue de satisfaire les performances imposées.

Le modèle du bras manipulateur, peut être déterminé à partir des lois connues de la physique, telles les lois de *NEWTON* et de *LAGRANGE* ; des approches conventionnelles comme l'approche de *LAGRANGE-EULER* [L-E] ou celle de *NEWTON-EULER* [N-E], peuvent ainsi être systématiquement appliquées, en vue de déterminer le modèle dynamique du bras manipulateur, cependant, il est à noter qu'il existe plusieurs variantes de ces deux approches, telles que la « *Uicker's-L.E* », « *Hollerbach's recursive Lagrange* », la « *Lee's generalized d'Alembert G.D.* »...etc. Ces approches peuvent aboutir à des équations dont la structure est différente, car elles ont été conçues pour différentes tâches. Dans ce qui suit, on va uniquement présenter les approches de *Lagrange-Euler* et *Newton-Euler*.

1.2.2.1 Approche de Lagrange-Euler. [Fu 87]

Les équations générales du mouvement du bras manipulateur peuvent être convenablement exprimées par l'application directe du formalisme de *Lagrange-Euler*, celui-ci, associé à la représentation de [D-H], peut constituer un algorithme efficace et compact afin d'aboutir aux équations décrivant le mouvement du bras manipulateur.

L'algorithme est exprimé sous forme matricielle, ce qui facilite l'analyse et l'implémentation sur ordinateur. La détermination des équations dynamiques d'un bras manipulateur à n d.d.l. est basée sur le fait que la matrice homogène de transformation relie le référentiel de la liaison i et celui de la liaison i-1.

L'équation de [L-E] est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt} \right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = T_i \quad (1.8)$$

où :

L : Fonction de Lagrange = $E_c - E_p$.

E_c : Energie cinétique totale du bras manipulateur.

E_p : Energie potentielle totale du bras manipulateur.

q_i : $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée.

dq_i/dt : dérivée première par rapport au temps de q_i .

T_i : force généralisée appliquée à la $i^{\text{ème}}$ articulation

1.2.2.1.1 Energie cinétique du robot manipulateur

Le formalisme de Lagrange-Euler exige la connaissance de l'énergie cinétique du système physique, qui à son tour exige la connaissance de la vitesse de chaque liaison.

Soient ${}^i r_i$ les coordonnées homogènes d'un point fixe appartenant à la liaison i, par rapport au référentiel de la liaison i, ${}^0 r_i$ ses coordonnées par rapport au référentiel fixe de la base, on a donc :

$${}^0 r_i = A_i^0 \times {}^i r_i \quad (1.9)$$

avec : $A_i^0 = A_1^0 \times A_2^1 \times \dots \times A_i^{i-1}$.

Puisqu'il s'agit d'une liaison rigide, il s'ensuit que : $\frac{d{}^i r_i}{dt} = 0$

d'où :

$${}^0 v_i = \frac{d{}^0 r_i}{dt} = {}^i r_i \left(\frac{dA_i^0}{dt} \right) \quad (1.10)$$

D'une manière générale, on trouve :

$${}^0 v_i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} \cdot {}^i r_i \quad (1.11)$$

En remarquant que la dérivée précédente de la matrice A_i^0 peut être obtenue aisément à l'aide de la matrice Q_i définie pour une structure à articulations rotationnelles, comme suit :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

et pour une structure à articulations prismatiques, comme suit :

$$Q_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

on obtient :

$$U_{ij} = \frac{\partial A_i^0}{\partial q_j} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \geq i. \\ A_{j-1}^0 Q_j A_i^{j-1} & \text{si } j \leq i. \end{cases}$$

D'où en utilisant les notations précédentes, on aura :

$${}^0 v_i = \sum U_{ij} \frac{dq_j}{dt} \cdot {}^i r_i \quad (1.14)$$

Si on désigne par E_{ci} l'énergie cinétique de la liaison i , et par dE_{ci} l'énergie cinétique d'une particule de masse dm de l'articulation i , on a :

$$dE_{ci} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt} \right)^2 \right) \cdot dm \quad (1.15)$$

$$dE_{ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left({}^0 v_i \cdot {}^0 v_i^T \right) \cdot dm \quad (1.16)$$

En substituant, l'équation (1.14) dans (1.16), on trouve :

$$dE_{ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left[\sum_{p=l}^i \sum_{r=l}^i U_{ip} \left({}^i r_i \cdot dm \cdot {}^i r_i^T \right) U_{ir}^T \cdot \dot{q}_p \cdot \dot{q}_r \right] \quad (1.17)$$

L'énergie cinétique totale de l'articulation i est donc donnée par :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \text{trace} \left[\sum_{p=l}^i \sum_{r=l}^i U_{ip} \left(\int {}^i r_i \cdot {}^i r_i^T \cdot dm \right) U_{ir}^T \cdot \dot{q}_p \cdot \dot{q}_r \right] \quad (1.18)$$

Le terme entre parenthèses représente l'inertie de l'articulation et peut s'écrire sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} \int x_i^2 \cdot dm & \int x_i y_i \cdot dm & \int x_i z_i \cdot dm & \int x_i \cdot dm \\ \int y_i x_i \cdot dm & \int y_i^2 \cdot dm & \int y_i z_i \cdot dm & \int y_i \cdot dm \\ \int x_i z_i \cdot dm & \int z_i y_i \cdot dm & \int z_i^2 \cdot dm & \int z_i \cdot dm \\ \int x_i \cdot dm & \int y_i \cdot dm & \int z_i \cdot dm & \int dm \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Cette matrice d'inertie peut être exprimée à l'aide des moments d'inertie de la liaison i par rapport aux principales axes du référentiel (x_i, y_i, z_i) .

$$\begin{bmatrix} \frac{-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{xy} & I_{xz} & \overline{m}x_i \\ I_{xy} & \frac{I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}}{2} & I_{yz} & \overline{m}y_i \\ I_{xz} & I_{yz} & \frac{I_{xx} + I_{yy} - I_{zz}}{2} & \overline{m}z_i \\ \overline{m}x_i & \overline{m}y_i & \overline{m}z_i & \overline{m} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Il s'ensuit que l'énergie totale du bras manipulateur sera la suivante :

$$E_{c\ Totale} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=l}^i \sum_{r=l}^i \text{trace}(U_{ip} \cdot J_i \cdot U_{ir}^T) \cdot \dot{q}_p \cdot \dot{q}_r \right) \quad (1.21)$$

1.2.2.1.2 Energie Potentielle du bras manipulateur

L'énergie potentielle de l'articulation i E_{pi} est donnée par :

$$E_{ci} = -m_i \cdot g \cdot (A_i^0 \cdot r_i) \quad (1.22)$$

L'énergie potentielle totale du bras manipulateur sera donc :

$$E_c = \sum_{i=1}^n -m_i \cdot g \cdot (A_i^0 \cdot r_i) \quad (1.23)$$

tel que g est le vecteur gravitation : $g = (0 \ 0 \ -|g| \ 0)^T$

1.2.2.1.3 Equation dynamique du bras manipulateur

La fonction de Lagrange sera donnée

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=l}^i \sum_{r=l}^i \text{trace}(U_{ip} J_i U_{ir}^T) \cdot \dot{q}_p \cdot \dot{q}_r \right) + \sum_{i=1}^n m_i g (A_i^0 \cdot r_i) \quad (1.24)$$

En appliquant l'équation (1.8) à la fonction Lagrangienne donnée ci-dessus, on trouve :

$$T_i = \sum_{j=i}^n \sum_{k=j}^i \text{tr}(U_{jk} \cdot J_j \cdot U_{jk}^T) \cdot \frac{d^2 q_k}{dt^2} + \sum_{j=i}^n \sum_{k=l}^j \sum_{m=l}^j \text{tr}(U_{jkm} \cdot J_j \cdot U_{ji}^T) \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j g \cdot U_{ji} \cdot r_j^j \quad (1.25)$$

avec:

$$U_{ijk} = \begin{cases} A_0^{k-1} Q_k A_{k-1}^{j-1} Q_j A_{j-1}^i & ; k \leq j \leq i \\ A_0^{j-1} Q_j A_{j-1}^{k-1} Q_k A_{k-1}^i & ; j \leq k \leq i \\ 0 & ; i < j \text{ ou } i < k \end{cases} \quad (1.26)$$

T_i est le couple généralisé appliqué à la $i^{\text{ème}}$ articulation.

L'écriture matricielle de l'équation dynamique du mouvement du bras manipulateur est la suivante:

$$T = D(q) \cdot \frac{d^2 q}{dt^2} + h(q, \frac{dq}{dt}) + c(q) \quad (1.27)$$

avec:

- $D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n \text{tr}(U_{jk} \cdot J_j \cdot U_{ji}^T) \quad i, k = 1, n.$
- $h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^n \text{tr}(U_{jkm} \cdot J_j \cdot U_{ji}^T) \quad i, k, m = 1, n$
- $h_i = \sum_{k=l}^n \sum_{m=l}^n h_{ikm} \cdot \dot{q}_k \cdot \dot{q}_m \quad i = 1, n.$
- $c_i = \sum_{j=l}^n -m_j \cdot g \cdot U_{ji} \cdot r_j^j \quad i = 1, n.$

Remarques

1. Les coefficients c_i , D_{ik} , h_{ikm} sont fonction des variables d'articulation θ_i et des paramètres d'inertie du robot et sont appelés les coefficients dynamiques du robot manipulateur. A partir des équations données ci-dessus il est aisé de donner à chacun d'eux le sens physique correspondant.
2. les coefficients D_{ik} représentent l'accélération des variables d'articulation. Pour $i=k$, D_{ii} est relié à l'accélération de l'articulation i quand le couple T_i est appliqué. Pour $i \neq k$, D_{ik} est relié au couple de réaction induit par l'articulation k et appliqué à l'articulation i ou vice versa.
3. les coefficients c_i représentent l'effet de la charge dû à la gravité de la liaison i .
4. h_{ikm} est relié aux vitesses angulaires des articulations k et m , qui en se combinant induisent un couple de réaction exercé sur l'articulation i . En particulier, pour $k=m$, il s'agira de la force centrifuge générée par la vitesse angulaire $d\theta_k/dt$ et exercée sur l'articulation i , autrement, il s'agira de la force de Coriolis générée par les vitesses angulaires des articulations k et m . Enfin, le bon sens physique nous montre que : $h_{ikm} = h_{imk}$.

1.2.2.1.4 Application au PUMA à 2 D.D.L

Pour établir le modèle dynamique du robot, nous avons besoin de calculer les matrices U_{ij} et U_{ijk} , pour cela en utilise les équations (1.12), (1.13) et (1.26):

$$Q_1 = Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U_{11} = A_0^1 Q_1 A_0^1 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & -ls_1 \\ -c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = Q_1 A_0^2 = \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l(s_{12} - s_1) \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12} + c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U_{22} = A_0^2 Q_2 A_0^2 = \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -ls_{12} \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & lc_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{212} = U_{221} = Q_1 A_0^1 Q_2 A_1^2 = Q_1 U_{22} = \begin{bmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 & -lc_{12} \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 & -ls_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{211} = \begin{bmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 & -l(c_{12} + c_1) \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l(s_{12} + s_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad U_{222} = A_0^1 Q_2 A_1^1 Q_2 A_1^2 = U_{212}$$

Les matrices d'inertie sont données par:

$$J_i = \begin{bmatrix} I_i & 0 & 0 & \bar{x}_i m_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{x}_i m_i & 0 & 0 & m_i \end{bmatrix}; \quad i = 1, 2$$

avec $I_i = \frac{1}{3} m_i l^2$ et $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = -\frac{l}{2}$

on obtient finalement et après quelque calculs le modèle dynamique du robot manipulateur:

$$\begin{aligned} T(t) &= D(\theta) \cdot \ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta) \\ \begin{bmatrix} T_1(\theta) \\ T_2(\theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{4}{3} m_2 l^2 + m_2 l^2 c_2 & \frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 c_2 \\ \frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 c_2 & \frac{1}{3} m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} m_2 l^2 s_2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 l^2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2} m_2 l^2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 g l c_1 + m_2 g l \left(\frac{1}{2} c_{12} + c_1 \right) \\ \frac{1}{2} m_2 g l c_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.2.2.2 Approche de Newton-Euler [Fu 87]

Dans la partie précédente, on a élaboré les équations différentielles non linéaires du second ordre obtenues par le formalisme d'*Euler-Lagrange*. L'utilisation de ces équations pour déterminer les forces généralisées à partir des positions, vitesses, accélérations généralisées pour une trajectoire donnée devient une tâche ardente et fastidieuse dès que le nombre de degré de liberté est supérieure à deux, en plus elle nécessite un temps de calcul énorme. Dans le but d'améliorer la commande en temps réel du robot, un modèle dynamique simplifié a été proposé. Ce modèle néglige les forces de Coriolis et centrifuges, et réduit remarquablement le temps de calcul de la commande. Néanmoins, l'effet Coriolis et centrifuge est très important quand le robot est amené à suivre des trajectoires rapides. Cela dit, le modèle dynamique simplifié restreint le mouvement du robot aux plages des faibles vitesses qui ne sont pas désirables dans un environnement industriel.

La méthode de *Newton-Euler* est actuellement considérée comme l'approche la plus favorable et la plus exploitable. En effet, sa structure récursive la rend facilement implémentable sur des calculateurs numériques. Le formalisme de N-E peut être considéré comme l'inverse du modèle dynamique obtenu par l'approche d'E-L, et donc utilisé dans la commande inverse des robots manipulateurs. La méthode de N-E utilise deux étapes pour la dérivation des forces généralisées à partir des positions, vitesses et accélérations désirées. Ces deux étapes vont être déterminées dans les sections qui suivent.

1.2.2.2.1 Rappel théorique

soit le repère fixe (O, X, Y, Z) , et le repère mobile (O, X^*, Y^*, Z^*) tournant autour du repère fixe à la vitesse angulaire ω . (Fig. 1. 3)

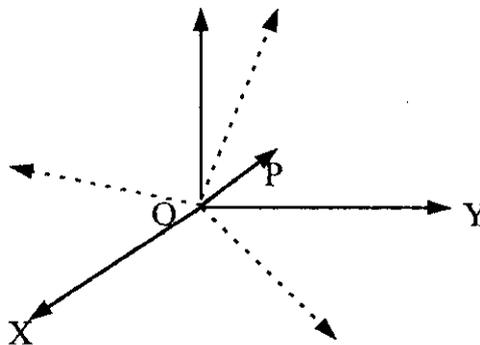


Fig.1.3: Rotation d'un repère par rapport à un autre

La vitesse et l'accélération du point mobile P par rapport au repère fixe (O, X, Y, Z) sont données par :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^*r}{dt} + \omega \times r \quad (1.23)$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^{*2}r}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d^*r}{dt} + \omega \times (\omega \times r) + \frac{d\omega}{dt} \times r \quad (1.24)$$

tels que $\frac{d^*r}{dt}$ et $\frac{d^{*2}r}{dt^2}$ sont respectivement les vitesses et accélérations relatives du point P par rapport au repère mobile (O, X^*, Y^*, Z^*) .

Le terme $2\omega \times \frac{d^*r}{dt}$ représente l'accélération complémentaire ou de Coriolis, et le terme $\omega \times (\omega \times r)$ représente l'accélération centrifuge.

Dans le cas où le repère (O, X^*, Y^*, Z^*) possède un mouvement de translation par rapport au repère fixe (Fig.1.4)

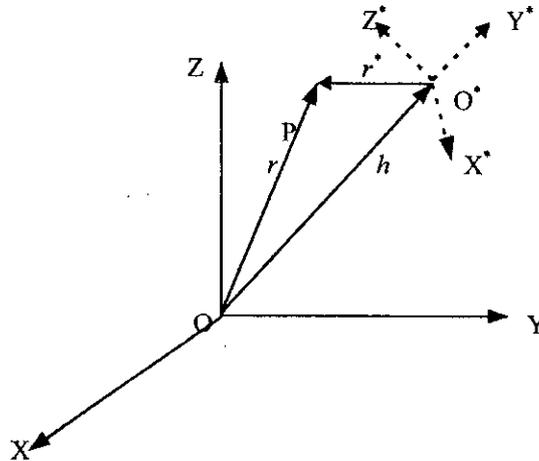


Fig.1.4: Mouvement de translation et de rotation d'un repère

la vitesse et accélération absolue du point P s'expriment par :

$$v(t) = \frac{dr^*}{dt} + \frac{dh}{dt} = \frac{d^*r^*}{dt} + \omega \times r^* + \frac{dh}{dt} \tag{1.25}$$

$$a(t) = \frac{d^{*2}r^*}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d^*r^*}{dt} + \omega \times (\omega \times r^*) + \frac{d\omega}{dt} \times r^* + \frac{d^2h}{dt^2} \tag{1.26}$$

Les équations (1.24) à (1.26) vont être utilisées pour déterminer les vitesses et accélérations linéaires et angulaires de chaque liaison par rapport à la liaison adjacente.

1.2.2.2.2 Application au repères liées aux liaisons d'un robot

Soit v_i et ω_i les vitesses linéaires et angulaire du repère (x_i, y_i, z_i) par rapport à la base (x_0, y_0, z_0) , ω_i^* est la vitesse angulaire du point O' par rapport à la base. (Fig.1.5)

on a : $\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_i^*$

avec :

$$\omega_i^* = \begin{cases} z_{i-1} \dot{q}_i & \text{si } \mathfrak{R} \\ 0 & \text{si } \mathfrak{T} \end{cases}$$

où \mathfrak{R} désigne une liaison rotationnelle et \mathfrak{T} une liaison translationnelle .

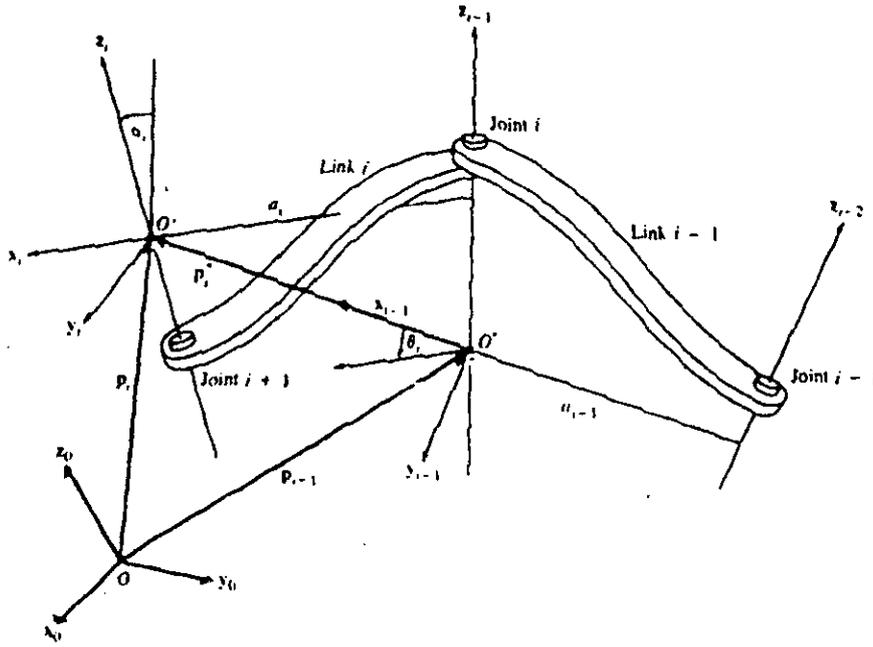


Fig.1.5: Relation entre divers repères d'une chaîne articulée on obtient donc :

$$\omega_i = \begin{cases} \omega_{i-1} + z_{i-1}\dot{q}_i & \text{si } \mathfrak{R} \\ \omega_{i-1} & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases} \quad (1.27)$$

et

$$\dot{\omega}_i = \begin{cases} \dot{\omega}_{i-1} + z_{i-1}\ddot{q}_i + \omega_{i-1} \times (z_{i-1}\dot{q}_i) & \text{si } \mathfrak{R} \\ \dot{\omega}_{i-1} & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases} \quad (1.28)$$

Les vitesses et accélérations linéaires de la liaison i sont obtenues en utilisant les équations (1.24) à (1.27) et peuvent être exprimées par :

$$v_i = \begin{cases} \omega_i \times P_i^* + v_{i-1} & \text{si } \mathfrak{R} \\ z_{i-1}\dot{q}_i + \omega_i \times P_i^* + v_{i-1} & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases} \quad (1.29)$$

$$a_i = \begin{cases} \dot{\omega}_i \times P_i^* + \omega_i \times (\omega_i \times P_i^*) + \dot{v}_{i-1} & \text{si } \mathfrak{R} \\ z_{i-1}\ddot{q}_i + \dot{\omega}_i \times P_i^* + 2\omega_i \times (z_{i-1}\dot{q}_i) \\ + \omega_i \times (\omega_i \times P_i^*) + \dot{v}_{i-1} & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases} \quad (1.30)$$

1.2.2.2.3 Equations récursives du mouvement du robot

Après qu'on a obtenu les informations cinématique de chaque liaison $(v_i, a_i, \omega_i, \dot{\omega}_i)$, on va maintenant déterminer les équations de mouvement du robot en utilisant le principe de D'Alembert. Le principe mis en évidence les conditions d'équilibre statique, et s'annonce comme suit : pour chaque système mécanique, la somme algébrique des forces extérieures et des forces de résistance dans n'importe quelle directions et appliquées sur un point est nulle. Considérant une chaîne de liaisons articulées (Fig.1.6)

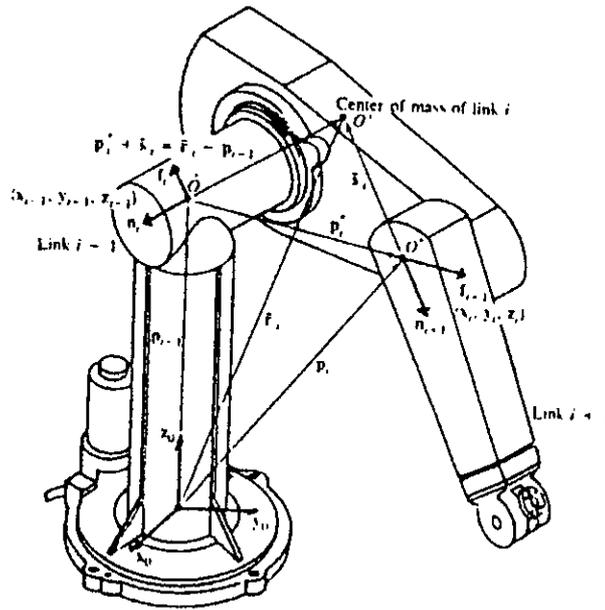


Fig.1.6: Forces et moments pour diverses liaisons

On définit les paramètres suivants :

O_i : centre de masse de la liaison i .

\bar{s}_i : position du centre de masse par rapport au repère $R_i(x_i, y_i, z_i)$

\bar{v}_i, \bar{a}_i : vitesses et accélérations linéaires absolues du centre de masse (par rapport à la base).

F_i : la force extérieure totale exercée sur la liaison i en son centre de masse.

N_i : le moment extérieure totale exercé sur la liaison i en son centre de masse.

I_i : matrice d'inertie de la liaison i calculée autour de son centre de masse et par rapport à la base.

f_i : force appliquée sur la liaison i par la liaison $i-1$ par rapport au repère R_{i-1} .

n_i : moment appliqué sur la liaison i par la liaison $i-1$ par rapport au repère R_{i-1} .

on a :

$$F_i = \frac{d(m_i \bar{v}_i)}{dt} = m_i \bar{a}_i \quad (1.31)$$

$$N_i = \frac{d(I_i \omega_i)}{dt} = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i) \quad (1.32)$$

la vitesse et accélération absolue du centre de masse sont données par :

$$\bar{v}_i = v_i + \omega_i \times \bar{s}_i \quad (1.33)$$

$$\bar{a}_i = \dot{v}_i + \dot{\omega}_i \times \bar{s}_i + \omega_i \times (\omega_i \times \bar{s}_i) \quad (1.34)$$

Les équations reliant les forces et moments exercées sur la liaison i à celles exercées sur la liaison $i+1$ sont données par :

$$f_i = m_i \bar{a}_i + f_{i+1} \quad (1.35)$$

$$n_i = n_{i+1} + P_i^* \times f_{i+1} + (P_i^* + \bar{s}_i) \times F_i + N_i \quad (1.36)$$

Ces équations récursives peuvent être utilisées pour obtenir les forces et moments pour chaque liaison i . f_{n+1}, n_{n+1} sont respectivement les forces et moments appliqués par l'élément terminal sur un objet extérieure du système.

Dans la modélisation cinématique, on a vu que si la liaison i est rotationnelle, elle va tourner d'un angle q_i par rapport au R_{i-1} suivant l'axe z_{i-1} . Donc le couple appliqué sur l'articulation i est la somme de la projection de n_i sur l'axe z_{i-1} et du moment visqueux. Dans le cas d'une articulation prismatique (translationnelle), cette dernière va se déplacer de q_i le long de l'axe z_{i-1} . La force appliquée sur l'articulation i est donc la somme de la projection de f_i sur l'axe z_{i-1} et une force due au déplacement visqueux.

On obtient donc :

$$\tau_i = \begin{cases} n_i^T z_{i-1} + b_i \dot{q}_i & \text{si } \mathfrak{R} \\ f_i^T z_{i-1} + b_i \dot{q}_i & \text{si } \mathfrak{T} \end{cases} \quad (1.37)$$

Les équations de N-E se compose de deux ensemble d'équations récursives : les équations directes « *forward equations* » données par (1.28), (1.29), (1.31) et (1.35), et les équations de retour « *backward equations* » données par (1.31), (1.32), (1.33), (1.36), (1.37) .

Les équations directes propagent les informations cinétiques de la base jusqu'à l'élément terminal. Pour les équations de retour, les couples et force de chaque liaison sont calculés récursivement de l'élément terminal jusqu'à la base.

1.2.2.2.4 Equations récursives modifiées

L'inconvénient majeur des équations récursives précédentes est le fait que les matrices d'inertie I_i et les paramètres géométriques (\bar{s}_i, P_i^*) sont établies par rapport à la base, donc ils changent quant le robot est en mouvement. Il existe une version améliorée de la méthode de N-E qui consiste à référencer tous les vitesses, accélérations, matrices d'inertie, centres de masse, forces et moments par rapport à ses repères. Par cette nouvelle méthode le temps de calcul diminue remarquablement et devient proportionnel au nombre de d.d.l.

soit la matrice de rotation du repère R_i vers le repère R_{i-1} .

$${}^{i-1}R_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & -s\alpha_i s\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Les équations de N-E par rapport au repère lié à chaque liaison deviennent :

Forward equations : $i=1, 2, \dots, n$

$${}^iR_0 \omega_i = \begin{cases} {}^iR_{i-1} ({}^{i-1}R_0 \omega_{i-1} + z_{i-1} \dot{q}_i) & \text{si } \mathfrak{R} \\ {}^iR_{i-1} ({}^{i-1}R_0 \omega_{i-1}) & \text{si } \mathfrak{T} \end{cases}$$

$${}^i R_0 \dot{\omega}_i = \begin{cases} {}^i R_{i-1} \left[{}^{i-1} R_0 \dot{\omega}_{i-1} + z_0 \ddot{q}_i + ({}^{i-1} R_0 \omega_{i-1}) \times z_0 \dot{q}_i \right] & \text{si } \mathfrak{R} \\ {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 \dot{\omega}_{i-1}) & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases}$$

$${}^i R_0 a_i = \begin{cases} \left(({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 P_i^*) + ({}^i R_0 \omega_i) \right. \\ \quad \left. \times \left[({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 P_i^*) \right] + {}^i R_{i-1} ({}^{i-1} R_0 a_{i-1}) \right) & \text{si } \mathfrak{R} \\ {}^i R_{i-1} \left[z_0 \ddot{q}_i + {}^{i-1} R_0 a_{i-1} \right] + ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 P_i^*) & \\ \quad + 2 ({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_{i-1} z_0 \dot{q}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times \left[({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 P_i^*) \right] & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases}$$

$${}^i R_0 \bar{a}_i = ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) \times ({}^i R_0 \bar{s}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times \left[({}^i R_0 \omega_i) \times ({}^i R_0 \bar{s}_i) \right] + {}^i R_0 a_i$$

Backward equations : $i=n, n-1, \dots, 1$

$${}^i R_0 F_i = m_i {}^i R_0 \bar{a}_i$$

$${}^i R_0 N_i = ({}^i R_0 I_i {}^0 R_i) ({}^i R_0 \dot{\omega}_i) + ({}^i R_0 \omega_i) \times \left[({}^i R_0 I_i {}^0 R_i) ({}^i R_0 \omega_i) \right]$$

$${}^i R_0 f_i = {}^i R_0 F_i + {}^i R_{i+1} ({}^{i+1} R_0 f_{i+1})$$

$${}^i R_0 n_i = {}^i R_{i+1} \left[{}^{i+1} R_0 n_{i+1} + ({}^{i+1} R_0 P_i^*) \times ({}^{i+1} R_0 f_{i+1}) \right] \\ + ({}^i R_0 P_i^* + {}^i R_0 \bar{s}_i) \times ({}^i R_0 F_i) + {}^i R_0 N_i$$

et

$$\tau_i = \begin{cases} ({}^i R_0 n_i)^T ({}^i R_{i-1} z_0) + b_i \dot{q}_i & \text{si } \mathfrak{R} \\ ({}^i R_0 f_i)^T ({}^i R_{i-1} z_0) + b_i \dot{q}_i & \text{si } \mathfrak{I} \end{cases}$$

1.2.2.2.5 Algorithme de Newton-Euler

Conditions initiales : n nombre de degré de liberté

$$\omega_0 = \dot{\omega}_0 = v_0 = 0 \quad a_0 = \begin{bmatrix} g_x & g_y & g_z \end{bmatrix}$$

Etape 1 : attribuer au compteur la valeur $i=1$

Etape 2 : calcul de ${}^i R_0 \omega_i$, ${}^i R_0 \dot{\omega}_i$, ${}^i R_0 a_i$, ${}^i R_0 \bar{a}_i$

Etape 3 : test si $i=n$ goto Etape 4 si non $i=i+1$ goto Etape 2

Etape 4 : calcul de f_{n+1} , n_{n+1} en cas de charge, si il n'y a pas de charge, ils sont nulles.

Etape 5 : calcul de ${}^i R_0 F_i$, ${}^i R_0 N_i$, ${}^i R_0 f_i$, ${}^i R_0 n_i$ et τ_i

Etape 6 : si $i=1$ goto stop si non $i=i-1$ goto Etape 5.

1.3 VALIDATION DES MODELES DYNAMIQUES

Les paramètres du robot manipulateur *PUMA* à 2 d.d.l. sont regroupés dans le tableau suivant : [Seraji 89]

	1er art.	2ème art.
Masses (kg)	10	11.54
longueurs (m)	0.432	0.432
frottements visqueux (N.m/ rad.s ⁻¹)	1	1

Tab.I.2 Paramètres du robot

Pour tester la validité du modèle obtenu par l'approche d'Euler-Lagrange, on a pris au début les conditions initiales suivantes : $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0rad$ et le robot est abandonné à lui-même sans l'application d'aucun couple. Dans une deuxième simulation, les conditions initiales sont maintenues et un couple de frottement est appliqué. Le choix des coefficients de frottement visqueux sont pris cette fois-ci non nuls. Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures (Fig.1.7) et (Fig.1.8).

Dans le cas où aucun couple n'est appliqué, la première liaison oscille d'une extrémité à une autre (cas d'un pendule sans résistance d'air), et la deuxième liaison se manifeste d'une façon aléatoire forcée par son couplage avec la première liaison.

Si on applique un couple de frottement visqueux sur le robot, le mouvement de ce dernier s'amortit jusqu'à atteindre le point d'équilibre suivant :

$$\theta_1(t_f) = -\frac{\pi}{2}rad, \theta_2(t_f) = 0rad$$

L'enveloppe de l'exponentielle dépend de façon primordiale des coefficients de frottements.

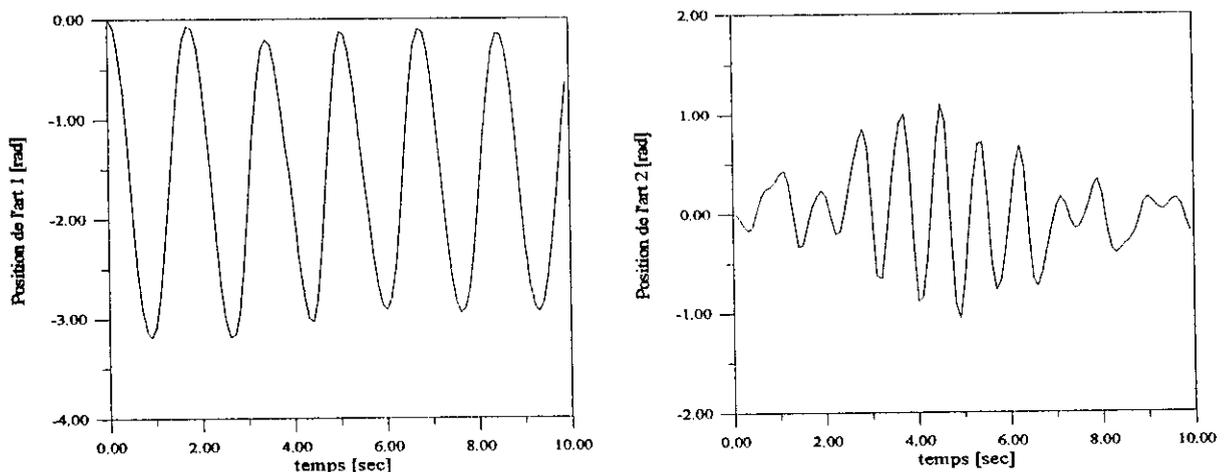


Fig.1.7.a positions des deux articulations sans frottements

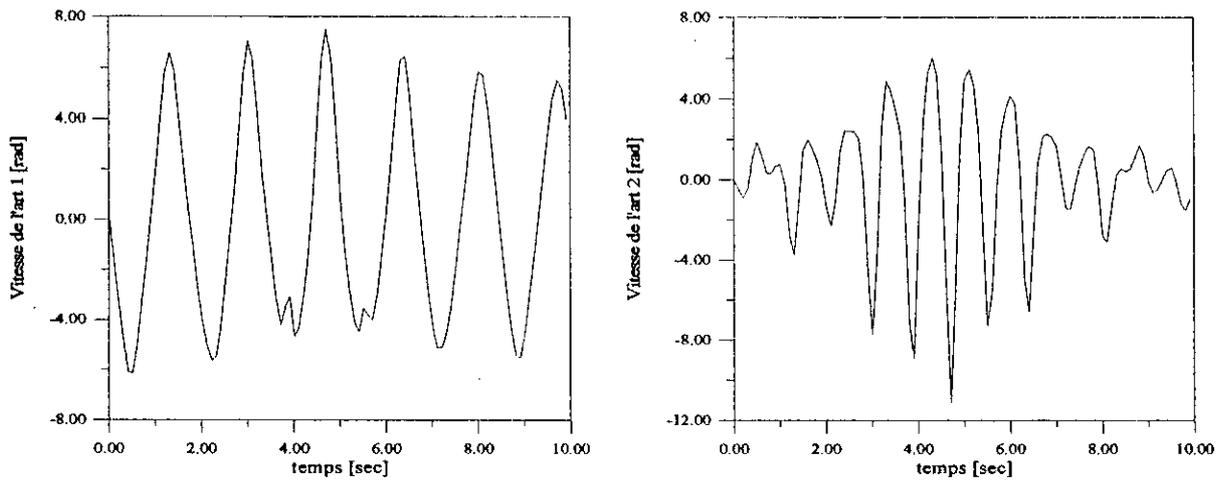


Fig.1.7.b vitesses des deux articulations sans frottements

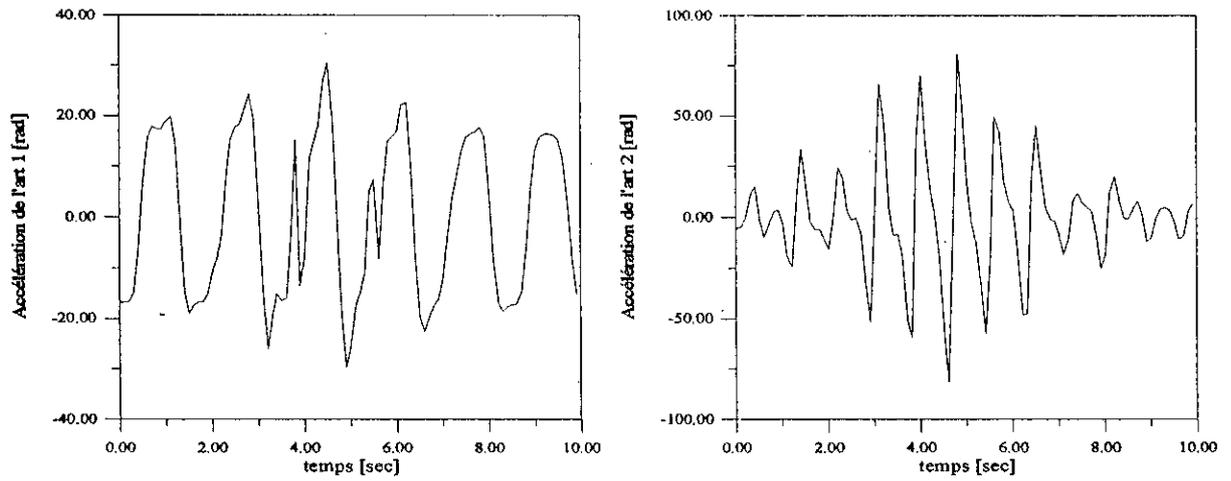


Fig.1.7.c accélérations des deux articulations sans frottements

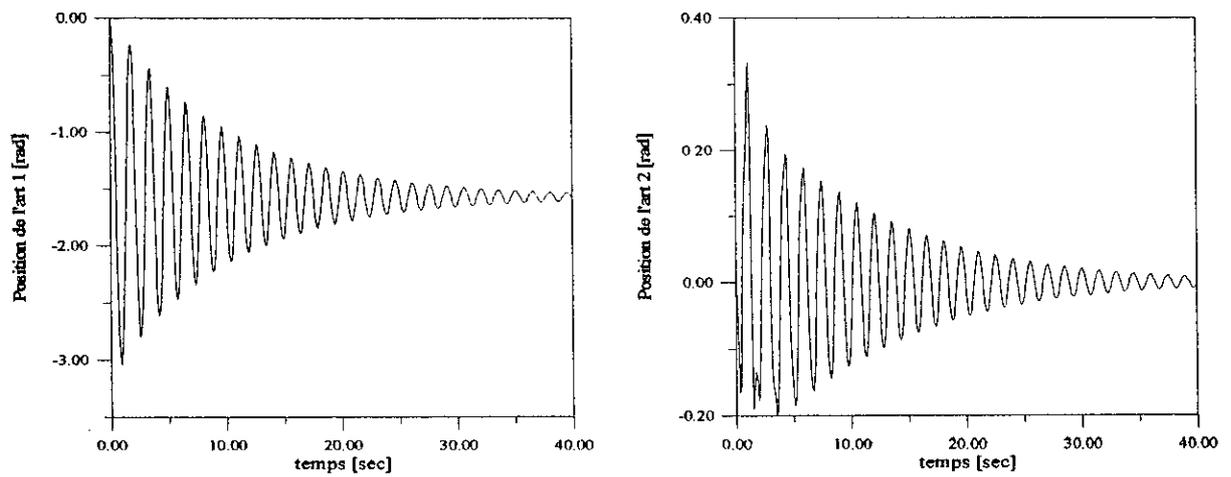


Fig.1.8.a positions des deux articulations avec frottements

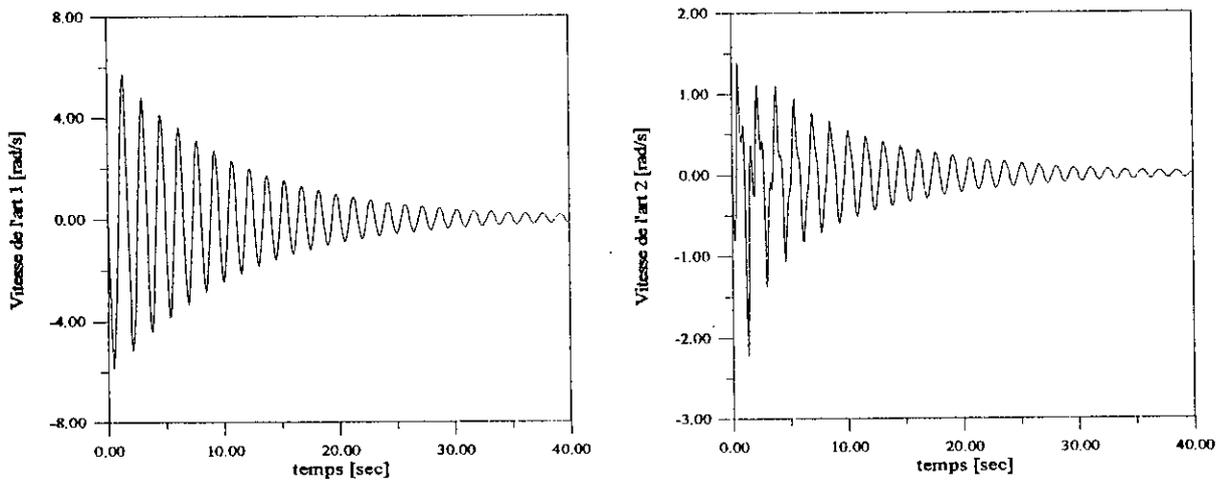


Fig.1.8.b vitesses des deux articulations avec frottements

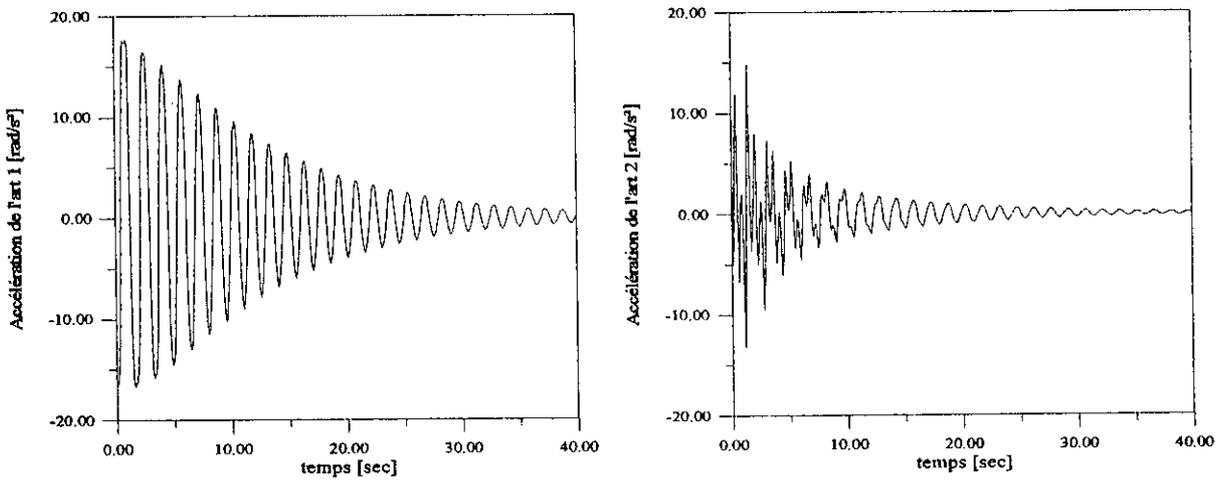


Fig.1.8.c accélérations des deux articulations avec frottements

Pour valider le modèle dynamique du robot manipulateur obtenu par l'approche récursif de *Newton-Euler*, ce dernier est couplé au modèle obtenu par la méthode d'*Euler-Lagrange*. Le schéma du couplage est donné sur la figure (Fig.1.9) : [Genfap 95]

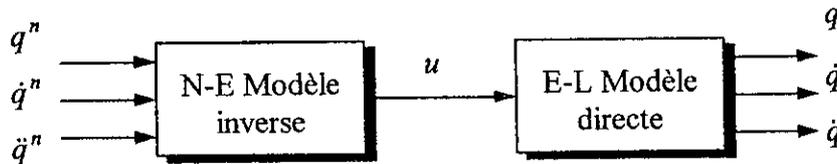


Fig.1.9: Couplage de N-E et E-L

q^n est la trajectoire nominale (de référence).

Cette trajectoire est choisie deux fois dérivables de telle façon à assurer un couple réalisable. Elles sont définies par l'équation suivante : [Seraji 89]

$$q^n(t) = \begin{cases} q^n(t_0) + \frac{\Delta}{2\pi} [\omega t - \sin(\omega t)] & \text{pour } t < t_f \\ q^n(t_f) & \text{pour } t > t_f \end{cases} \quad (1.39)$$

avec

$$\Delta = q^n(t_f) - q^n(t_0) \quad \omega = \frac{2\pi}{t_f}$$

$$t_f = 10 \text{ sec}, q_1^n(0) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}, q_1^n(10) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}, q_2^n(0) = 0 \text{ rad}, q_2^n(10) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Les figures Fig.1.10.a à Fig.1.10.c illustrent les position réelles et nominales, les erreurs en positions et couples de la simulation du couplage entre les deux méthodes sans variation paramétriques ou de charge. Pour voir la sensibilité du couplage vis à vis des perturbations brusques que peut subir le système, on a introduit une variation de la masse de la charge de 0 kg à 1 kg à l'instant $t=t_f/2$ sec. On remarque que le robot manipulateur s'éloigne de la trajectoire programmée à cet instant (Fig.1.11.a à Fig.1.11.c).

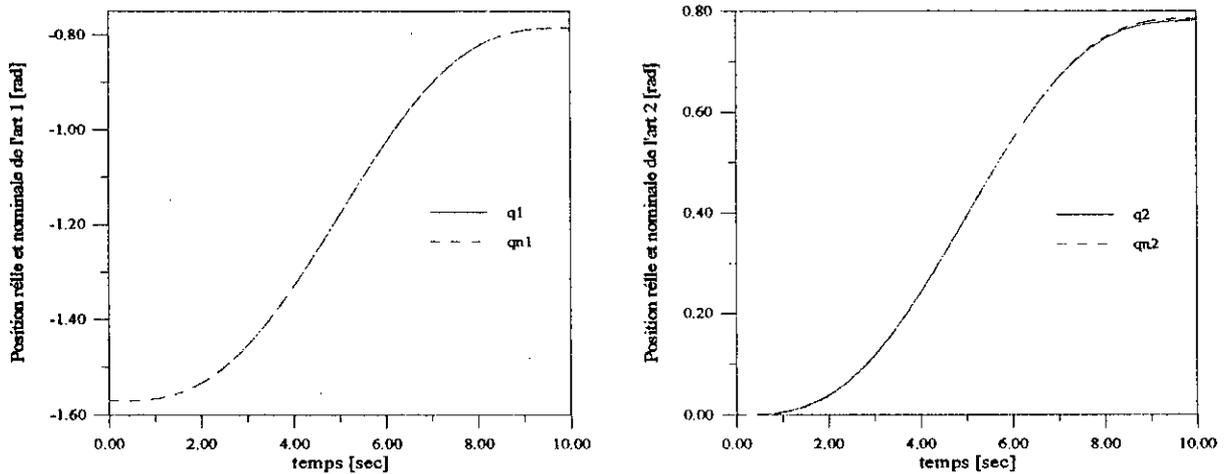


Fig.1.10.a positions réelles et nominales des deux articulations sans effet de variation de charge

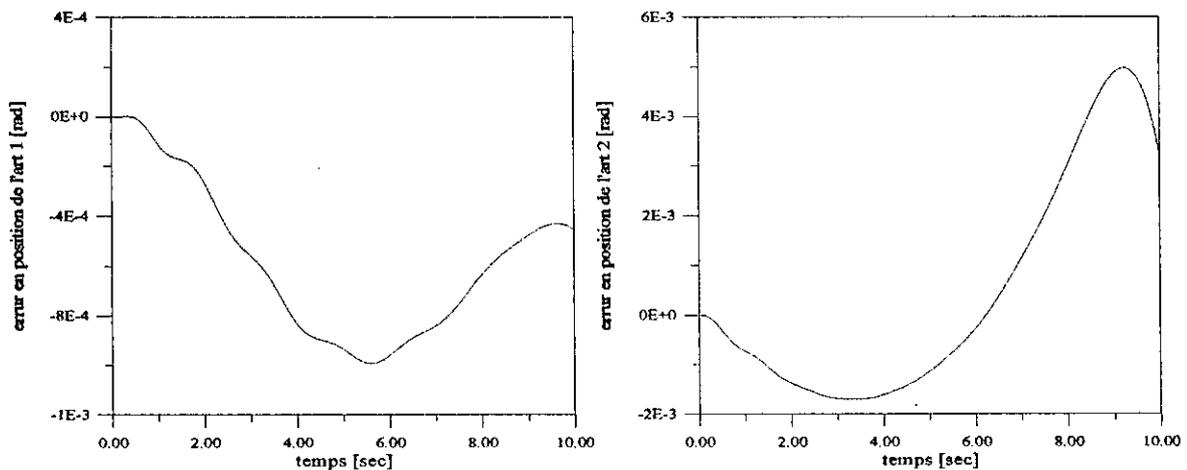


Fig.1.10.b erreurs en position des deux articulations sans effet de variation de charge

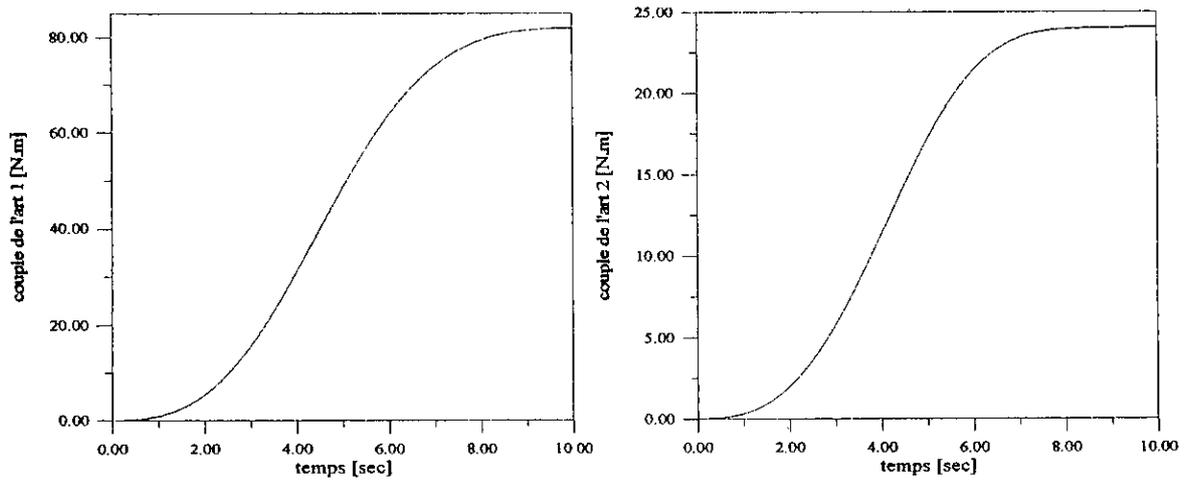


Fig.1.10.c couples appliqués aux deux articulations sans effet de variation de charge

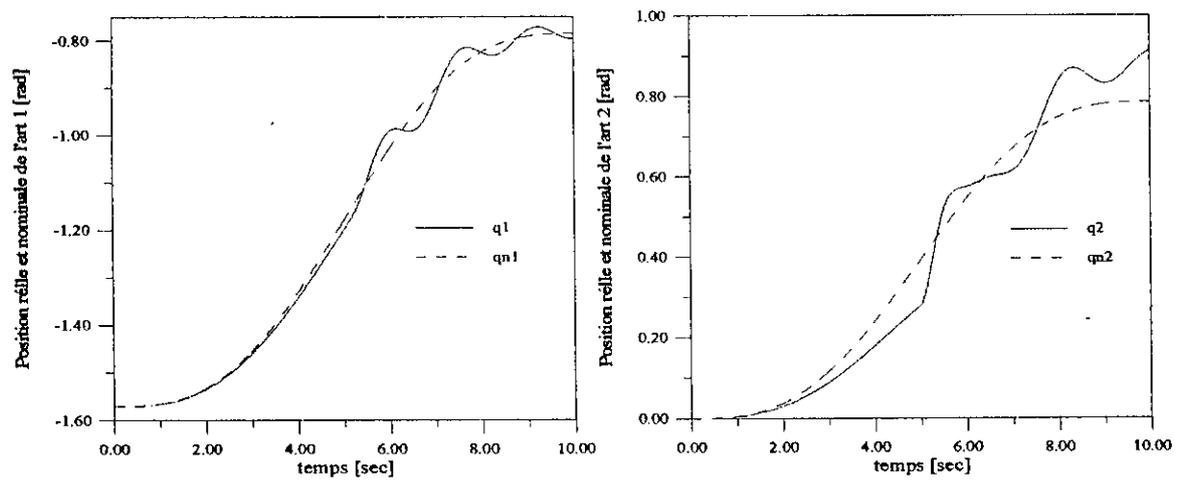


Fig.1.11.a positions réelles et nominales des deux articulations avec effet de variation de charge

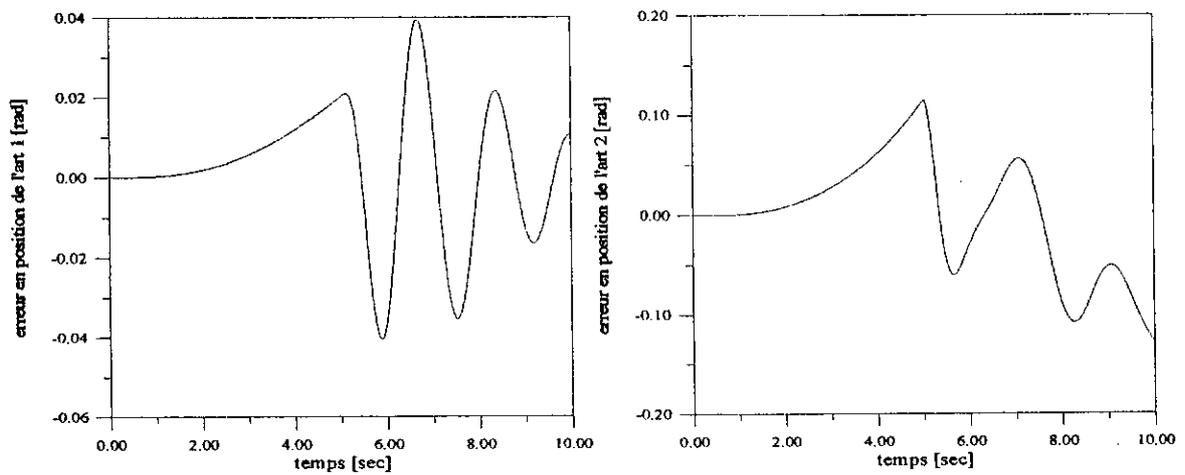


Fig.1.11.b erreurs en position des deux articulations avec effet de variation de charge

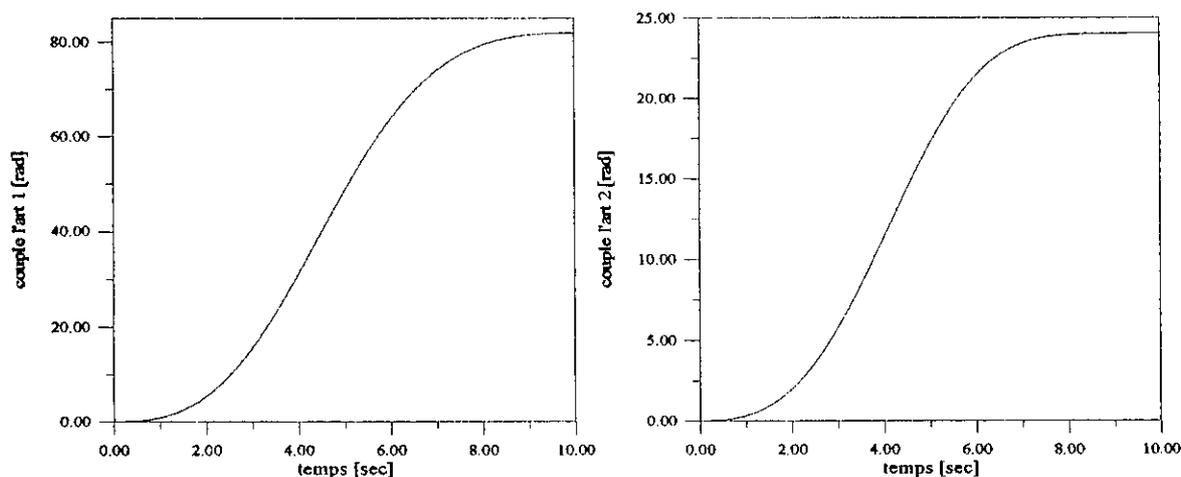


Fig.1.11.c couples appliqués aux deux articulations avec effet de variation de charge

1.4 CONCLUSION

Les modèles: cinématique et dynamique du robot manipulateur *PUMA* à 2 d.d.l. ont été décrits en présentant toutes les démarches utilisées. Les relations cinématique sont dérivées en considérant le concept de *Denavit-Hartenberg*, et les lois de la mécanique classique. Le but est d'établir les transformations géométriques mettant en évidence la correspondance entre les coordonnées opérationnelles et les coordonnées généralisées, ainsi que les vitesses linéaires et angulaires.

Dans la deuxième partie, une dérivation des équations dynamique décrivant le système a été menée en utilisant deux approches ainsi que l'étude cinématique établie. L'approche d'Euler-Lagrange de nature analytique n'est pas adéquat dans le cas où le nombre de degré de liberté dépasse 2, cela est du aux calculs ardents et fastidieux que nécessite la méthode.

L'approche de Newton-Euler de nature récursive, nous permet de rendre la dérivation des équations dynamiques du robot plus aisée. L'utilisation des vecteurs positions-vitesses-accélérations relatives, ainsi que les matrices de rotation d'un repère à un autre, donne l'aspect récursif à l'algorithme et le rend facilement implémentable sur calculateurs numériques. Le seul inconvénient de ce formalisme est sa forme non structurée, et donc, ne peut pas être utilisé pour la synthèse des commandes. Néanmoins, l'approche de Newton-Euler peut être considéré comme un modèle inverse du robot manipulateur. Ce modèle inverse est utilisé comme une commande directe "*feedforward controller*" pour générer les couples nominales qui assurent la poursuite des trajectoires nominales. La sensibilité de la commande vis à vis des variations paramétriques ou de charge est surmontée par l'utilisation d'une autre commande additive dans la chaîne de retour "*feedback controller*".

Il existe une autre façon d'obtenir les équations dynamiques du robot manipulateur, c'est l'approche généralisé de D'Alembert (G-D) [Fu 87]. Cette approche combine les avantages des deux autres méthodes pour obtenir un algorithme à la fois récursif et structuré. En effet, cette méthode utilise les informations cinématique relatives à chaque liaison pour la dérivation des énergies: cinétique et potentielle. L'approche (G-D) nécessite moins d'opérations arithmétiques, et donc moins de temps de calcul, par rapport à l'approche d'E-L, et indique de façon explicite les contributions rotationnelles et translationnelles des liaisons du robot manipulateur.

Chapitre 2

Commande Adaptative Décentralisée à Modèle de Référence

2.1 INTRODUCTION

La commande décentralisée a été largement acceptée dans l'industrie robotique grâce à son implémentation facile et à sa tolérance à la défaillance. Les régulateurs conventionnels des robots sont basés sur des schémas de commande indépendants synthétisés pour chaque articulation. L'idée simple consiste à appliquer un simple servomécanisme de position avec des gains pré-définis. Le schéma de commande est bien adéquat pour des tâches ne nécessitant pas des poursuites de trajectoires rapides et précises, et dans un environnement bien connu. Une variation paramétrique ou de charge n'est pas tolérée dans une telle situation.

Dans le but de palier aux inconvénients des contrôleurs classiques des robots manipulateurs, des recherches considérables ont été avancées. Ces travaux [M'sirdi 92][Seraji 87][Seraji 89] ont fait apparaître deux techniques de commande différentes. La première technique appelée « *Model-based Method* », telle que la commande « *Computed Torque Control* » qui nécessite une connaissance exacte du modèle du robot manipulateur, de ces paramètres et de la charge. Cette approche conduit à un schéma de commande complexe et centralisé nécessitant un volume de temps de calcul élevé. En plus les performances du système de commande sont liées à la fidélité du modèle mathématique utilisé. Ce modèle contient des paramètres qui sont successivement à changer durant le fonctionnement et qui sont difficiles à être mesurés avec exactitude tels que les coefficients de frottement, les paramètres des moteurs et la charge. Les erreurs de modélisation peuvent avoir des effets considérables puisqu'ils influent directement sur la performance du robot manipulateur. La seconde technique appelée « *Performance-based Method* » englobe les techniques adaptatives et ne nécessite pas un modèle mathématique complexe du robot pour établir les lois de commandes. Ces dernières sont passées par deux phases [M'sirdi 92], phase d'approximation (1978,1985) et phase de paramétrisation linéaires (1985,1991). La première phase regroupe d'une part les commandes à modèle de référence (MRAC), qui consistent à annuler l'écart entre l'état du système et l'état du modèle de référence convenablement choisi, et d'autre part les commandes dérivées de la théorie des régulateurs auto-ajustables (*Self-Tuning Control*) avec minimisation d'un critère de performance. Les commandes issues de la seconde phase peuvent être classées en deux grandes classes. La première classe est celle des commandes basées sur la linéarisation et le découplage des degrés de liberté du robot. La seconde englobe les techniques de commande qui cherchent la préservation de la propriété de passivité du robot rigide en boucle fermée.

La plupart des commandes adaptatives ont une structure centralisée et nécessitent souvent un temps de calcul très élevé qui influe fortement sur la dynamique souhaitée du robot

manipulateur. Récemment, la commande adaptative décentralisée a attirée l'attention de nombreux chercheurs travaillant dans les domaines de la robotique et de la commande adaptative [Seraji 89],[Choi 88],[Fu 92].

Ce présent chapitre a pour but de développer une commande adaptative décentralisée basée sur la technique du modèle inverse. Le schéma proposé présente deux caractéristiques majeurs:

- Premièrement, vue sa nature adaptative, la connaissance du modèle dynamique du robot, de ces paramètres et de la charge ne sont pas obligatoires dans le cas d'une implémentation en temps réel.
- Deuxièmement, la sa structure décentralisée rend l'implémentation sur une architecture parallèle possible, et le temps de calcul sera réduit considérablement par rapport aux mêmes algorithmes à structure centralisée.

La structure commande adaptative décentralisée proposée contient deux actions. Une action anticipatrice « *feedforward* » qui représente le modèle inverse et qui est synthétisée à partir du modèle linéarisé du robot. L'action de retour « *feedback* » est un régulateur de type Proportionnel-Dérivé (PD) ou de Position-Vitesse (PV). Pour contrecarrer les effets des nonlinéarités et du couplage entre les différentes articulations, un signal auxiliaire est ajouté au deux actions précédentes. Les trois composantes de la commande sont à gains ajustables assurant ainsi la régulation du système autour de la trajectoire désirée, et cela en dépit du point de fonctionnement du robot et les variations paramétriques que peut subir ce dernier.

Dans la première partie de ce chapitre, on présente le modèle dynamique du robot à n degrés de liberté avec charge. La seconde partie est une présentation de la structure du système de commande utilisée. La troisième partie présente l'algorithme de la commande, les lois d'adaptation des gains et l'étude de la stabilité du schéma présenté. On présente dans la quatrième partie les résultats de simulation, et on termine par une conclusion sur les avantages et inconvénients de la commande étudiée.

2.2 MODELE DYNAMIQUE DU ROBOT MANIPULATEUR AVEC CHARGE

Le modèle dynamique du manipulateur à n articulations est donné par l'équation différentielle vectorielle non linéaire du second ordre suivante : (voir chapitre 1)

$$M(\theta)\ddot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) + H(\dot{\theta}) = \tau(t) \quad (2.1)$$

où $\theta(t)$ est un vecteur $n \times 1$ des positions généralisées, $\tau(t)$ est un vecteur $n \times 1$ des couples appliqués aux articulations, $M(\theta)$ est la matrice symétrique définie positive d'inertie de dimension $n \times n$. $N(\theta, \dot{\theta})$ est le vecteur $n \times 1$ des couples de Coriolis et centrifuges. $G(\theta)$ est le vecteur $n \times 1$ dû à la gravitation et $H(\dot{\theta})$ représente le vecteur des couples qui sont dus aux frottements secs et visqueux. Les éléments de M , N , G et H sont non linéaires et fonction de la configuration du robot et de la charge appliquée à l'élément terminal.

Les vecteurs positions, vitesses et accélérations de l'élément terminal sont reliés aux positions articulaires par les relations suivantes :

$$X(t) = \Lambda(\theta) \quad (2.2)$$

$$\dot{X}(t) = J(\theta)\dot{\theta}(t) \quad (2.3)$$

2.3 STRUCTURE DU SYSTEME DE COMMANDE

L'approche utilisée dans cette section est basée sur le concept du « système inverse ». On considère un système linéaire multivariable invariant dans le temps défini par l'équation des entrées / sorties suivante :

$$y(s) = W(s)u(s)$$

où u et y sont respectivement les vecteurs des entrées et de sorties du système et $W(s)$ est la matrice de transfert $n \times n$. Le modèle inverse est un système dynamique dont la matrice de transfert est : $Q(s) = W(s)^{-1}$.

Le système et son modèle inverse se valide par mise en cascade. Si les entrées du modèle inverse sont les sorties de référence, ce dernier génère le vecteur de commande approprié pour s'assurer que les sorties du système coïncident avec les entrées du modèle inverse : $W(s)Q(s) = I_n$.

Cet approche peut être utilisée pour la commande des systèmes non linéaires. Dans une première étape, on approche le système non linéaire par un modèle linéaire $W^i(s)$ défini autour d'un point de fonctionnement P et dans un intervalle de temps restreint $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$.

Dans cet intervalle, le modèle inverse $Q^i(s)$ est utilisé comme une commande à action direct ou anticipatrice «*feedforward*» $u_{ff}(t)$. Les gains (coefficients) du modèle inverse sont ajustés pour prendre en considération la variation du point de fonctionnement et donc la variation des coefficients de $W^i(s)$.

Dans le cas où la commande directe représente de façon idéale le modèle inverse, l'erreur de poursuite $e(t) = y_d(t) - y(t)$ entre les sorties de référence et les sorties du système devient nulle. L'erreur $e(t)$ est une mesure de la déviation de la commande autour du modèle inverse.

Un bloc de retour «*feedback*» défini par $k^i(s)$ est utilisé pour générer la commande $u_{fb}(t)$ dans l'intervalle $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$. Cette commande assure la stabilité du système en boucle fermée et améliore les performances du système de commande. Les gains de la commande sont aussi ajustés en se basant sur l'erreur pour palier aux effets de variation du point nominal P .

En plus un signal auxiliaire $u_{ax}(t)$ qui correspond au point P est aussi synthétisé et ajusté.

La commande globale est donnée donc par :

$$u(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) + u_{ax}(t)$$

Cette méthodologie de synthèse est présentée par le bloc diagramme de la figure Fig.2.1:

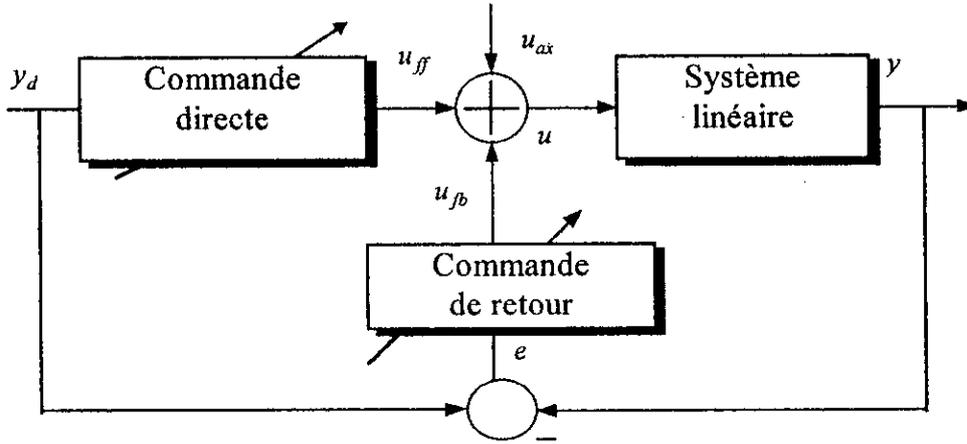


Fig.2.1: Configuration du système de commande

Appliquant maintenant la méthodologie précédente pour la synthèse de la commande des robots manipulateurs.

L'équation dynamique de l'ensemble robot avec charge est donnée par :

$$\tau(t) = M^*(m, \theta)\ddot{\theta} + N^*(m, \theta, \dot{\theta}) + G^*(m, \theta) + H(\dot{\theta}) \quad (2.9)$$

Après linéarisation du modèle (2.9) autour d'un point de fonctionnement nominal P défini par

$P = [\tau(t_i), \theta(t_i), \dot{\theta}(t_i)]$ dans l'intervalle $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$, on obtient :

$$A\delta\ddot{\theta}(t) + B\delta\dot{\theta}(t) + C\delta\theta(t) = T(t) \quad (2.10)$$

où $\delta\theta(t)$ et $T(t)$ sont les déviations des positions et des couples articulaires autour du point P, c'est à dire $\delta\theta(t) = \theta(t) - \theta(t_i)$, $T(t) = \tau(t) - \tau(t_i)$.

Les matrices $n \times n$ A, B, C du modèle linéaire (2.10) sont données par :

$$A = [M]_P, B = \left[\frac{\partial(N+H)}{\partial\dot{\theta}} \right]_P, C = \left[\frac{\partial(N+G)}{\partial\theta} \right]_P \quad (2.11)$$

La représentation dans le domaine fréquentiel du modèle linéaire (2.10) est donnée par :

$$\delta\theta(s) = (C + Bs + As^2)^{-1} T(s) \quad (2.12)$$

Le modèle inverse $Q(s)$ du modèle linéarisé (2.10) est donc donné par :

$$Q(s) = \left[(C + Bs + As^2)^{-1} \right]^{-1} = C + Bs + As^2 \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) représente une expression extrêmement simple et facile à implémenter. La commande à action anticipatrice est donnée par :

$$T_{ff}(s) = Q(s)\delta\theta_r(s) = [C + Bs + As^2]\delta\theta_r(s)$$

ou

$$T_{ff}(t) = C\delta\theta_r(t) + B\delta\dot{\theta}_r(t) + A\delta\ddot{\theta}_r(t) \quad (2.14)$$

avec $\delta\theta_r(t) = \theta_r(t) - \theta_r(t_i)$.

La commande à action anticipatrice est de type PD2, elle est dite de type position-vitesse-accélération. Les coefficients A, B, C dépendent du point nominal P et doivent être ajustés au cas de variation de P .

La commande à action de retour $k(s)$ est spécifiée en terme d'un régulateur proportionnel-dérivé (PD) donné par :

$$k(s) = k_p + k_v s \quad (2.15)$$

Les matrices de gain k_p et k_v sont diagonales, positives et sont choisies pour imposer une dynamique de rejection de l'erreur du second ordre.

La loi de commande est exprimée par :

$$T_{fb}(s) = k(s)[\delta\theta_r(s) - \delta\theta(s)] = [k_p + k_v s]e(s)$$

ou

$$T_{fb}(t) = k_p e(t) + k_v \dot{e}(t) \quad (2.16)$$

Les équations (2.14) et (2.16) définissent une loi de commande « incrémentale » appliquée au modèle linéaire (2.10)

$$T(s) = T_{ff}(s) + T_{fb}(s) = [C + Bs + As^2]\delta\theta_r(s) + [k_p + k_v s]e(s)$$

ou

$$T(t) = k_p e(t) + k_v \dot{e}(t) + C\delta\theta_r(t) + B\delta\dot{\theta}_r(t) + A\delta\ddot{\theta}_r(t) \quad (2.17)$$

Le schéma de principe est illustré par la figure (Fig.2.2) suivante :

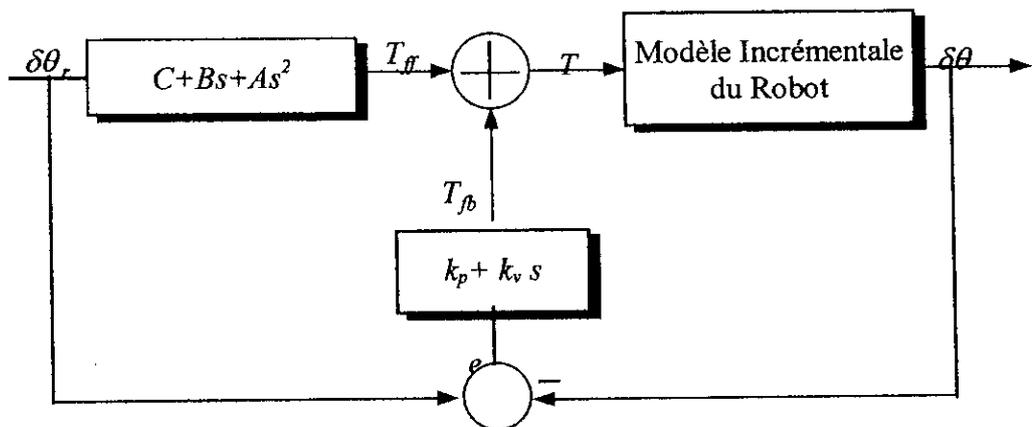


Fig. 2.2: Système de commande incrémentale

Les équations (2.10) et (2.17) conduisent à l'équation vectorielle du $2n$ - ordre de l'erreur en boucle fermée :

$$\ddot{e}(t) + A^{-1}(B + k_v)\dot{e}(t) + A^{-1}(C + k_p)e(t) = 0 \quad (2.18)$$

La dynamique de l'erreur (2.18) est déterminée en termes des gains k_p et k_v . On note qu'en choisissant l'action anticipatrice de la commande comme modèle inverse du système linéarisé on obtient une équation différentielle homogène de l'erreur.

La solution de (2.18) est exprimée par :

$$e(t) = \left[\sum_{i=1}^{2n} L_i \exp(\eta_i t) \right] e(0) + \left[\sum_{i=1}^{2n} \hat{L}_i \exp(\eta_i t) \right] \dot{e}(0) \quad (2.19)$$

ou $e(0)$ et $\dot{e}(0)$ sont les vecteurs initiaux des erreurs en position et en vitesse, L_i et \hat{L}_i sont des matrices constantes $n \times n$ et η_i sont les racines de l'équation caractéristique donnée par :

$$\Delta(s) = \left| I_n s^2 + A^{-1}(B + k_v)s + A^{-1}(C + k_p) \right| = 0 \quad (2.20)$$

Si on choisit k_p , k_v de telle sorte à avoir des racines η_i à partie réelle négative, la solution de l'équation (2.18) est un signal qui tend exponentiellement vers zéro. On conclue que le système en boucle fermée est exponentiellement stable.

La loi de commande globale appliquée au modèle non linéaire du robot manipulateur donné par (2.9) est exprimée par :

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau(t_i) + T(t) \\ &= \tau(t_i) + k_p e(t) + k_v \dot{e}(t) + C \delta \theta_r(t) + B \delta \dot{\theta}_r(t) + A \delta \ddot{\theta}_r(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

On remarque que la commande $\tau(t)$ est composée d'un terme qui est fonction du point nominale P et de la contribution de deux actions incrémentales $k(s)$ et $Q(s)$. Si on substitue les positions articulaires et de référence $\theta(t) = \theta(t_i) + \delta\theta(t)$ et $\theta_r(t) = \theta_r(t_i) + \delta\theta_r(t)$ dans l'équation (2.21), elle devient :

$$\tau(t) = \tau^*(t_i) + k_p E(t) + k_v \dot{E}(t) + A \ddot{\theta}_r(t) + B \dot{\theta}_r(t) + C \theta_r(t) \quad (2.22)$$

où $E(t) = \theta(t) - \theta_r(t)$.

Le terme $\tau^*(t_i)$ vient s'ajouter aux deux actions de la commande, et représente l'effet du point de fonctionnement nominal P.

La loi de commande (2.22) est efficace seulement au voisinage de P et dans l'intervalle de temps $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$. Durant le fonctionnement du système le point nominal P ainsi que les matrices A, B , et C varient dans le temps. Il est cependant essentiel d'ajuster les gains des deux actions pour assurer la stabilité et la poursuite des trajectoires du robot manipulateur.

Un signal auxiliaire $F(t)$ qui correspond au point de fonctionnement P est inclut dans la commande. Ce dernier, synthétisé par l'algorithme d'adaptation, n'est que l'ajustement du terme $\tau^*(t_i)$.

Le schéma de principe global de la commande est illustré par la figure suivante :

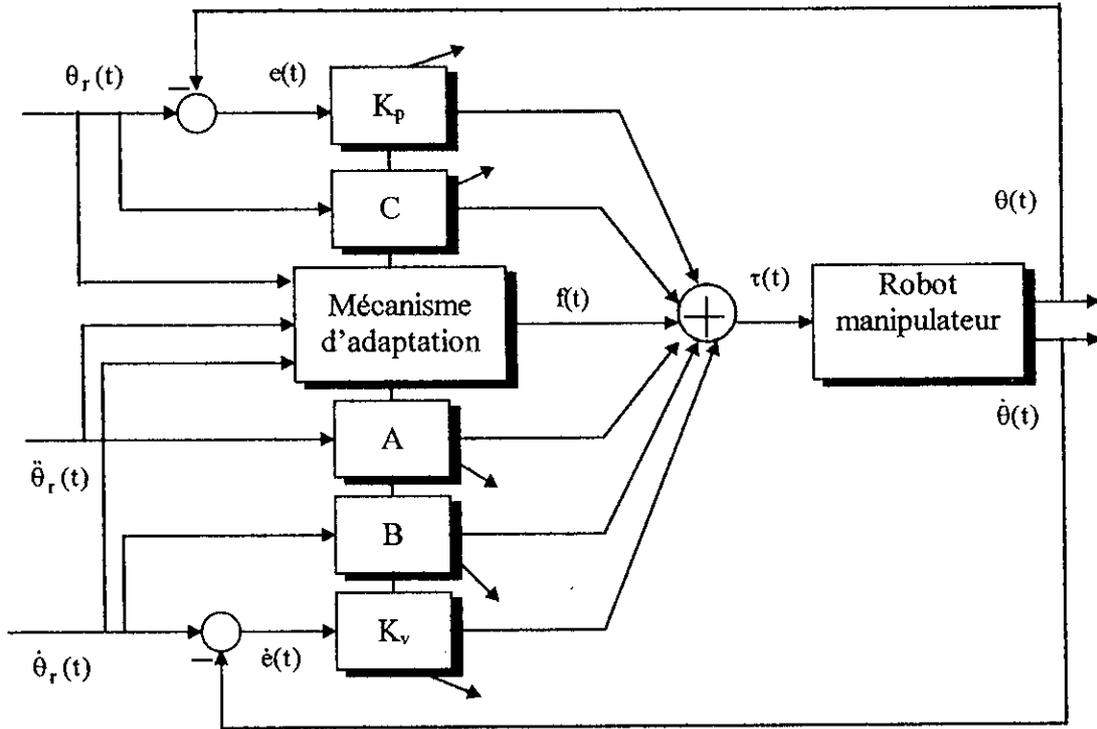


Fig.2.3: Structure de commande adaptative

2.4 SYNTHÈSE DE LA COMMANDE DÉCENTRALISÉE

Le problème de la commande est de générer des couples $\tau_i(t)$ ($i=1, \dots, n$) de telle façon que les sorties $\theta_i(t)$ poursuivent fidèlement et avec précision les trajectoires de références $\theta_r(t)$ en dépit des variations paramétriques et du couplage non linéaire du modèle (2.9).

Pour le développement de la commande décentralisée, il est convenable de voir le modèle dynamique du manipulateur en sous-systèmes interconnectés par des couplages représentant les termes non diagonales de la matrice d'inertie M et les vecteurs non linéaires $N(\theta, \dot{\theta})$, $G(\theta)$ et $H(\dot{\theta})$:

$$m_{ii}(\theta)\ddot{\theta}_i(t) + \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_{ij}(\theta)\ddot{\theta}_j(t) \right] + N_i(\theta, \dot{\theta}) + G_i(\theta) + H_i(\dot{\theta}) = \tau_i(t) \quad (2.23)$$

$m_{ii}(\theta)$ est l'inertie liée à l'articulation i quand le couple $\tau_i(t)$ est appliqué. L'équation (2.23) est réécrite sous la forme suivante :

$$m_{ii}(\theta)\ddot{\theta}_i(t) + d_i(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \tau_i(t) \quad (2.24)$$

avec :

$$d_i(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}) = \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_{ij}(\theta) \ddot{\theta}_j(t) \right] + N_i(\theta, \dot{\theta}) + G_i(\theta) + H_i(\theta) \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) représente le modèle Entrée/Sortie (E/S) de l'articulation i et le terme d_i est considéré comme une perturbation extérieure ou une interaction entre le sous-système i et les autres sous-systèmes.

La loi de commande appliquée au $i^{\text{ème}}$ sous-système est dite décentralisée dans la mesure où chaque contrôleur local opère uniquement sur son sous-système associé, sans échange d'information. Cela implique que pour chaque contrôleur adaptatif, le schéma d'adaptation n'utilise que les informations locales. En d'autres termes, le problème de la commande décentralisée est la synthèse d'un ensemble de commandes locaux qui génèrent à chaque instant le couple $\tau_i(t)$ en utilisant seulement $\theta_i(t)$ et $\theta_r(t)$ et ses dérivés successives.

En utilisant la méthodologie de synthèse développée dans 2.2, la loi de commande est :

$$\tau_i(t) = f_i(t) + [k_{i0}(t)e_i(t) + k_{i1}(t)\dot{e}_i(t)] + [q_{i0}(t)\theta_r(t) + q_{i1}(t)\dot{\theta}_r(t) + q_{i2}(t)\ddot{\theta}_r(t)] \quad (2.26)$$

avec $e_i(t) = \theta_r(t) - \theta_i(t)$.

D'où le schéma adaptatif suivant :

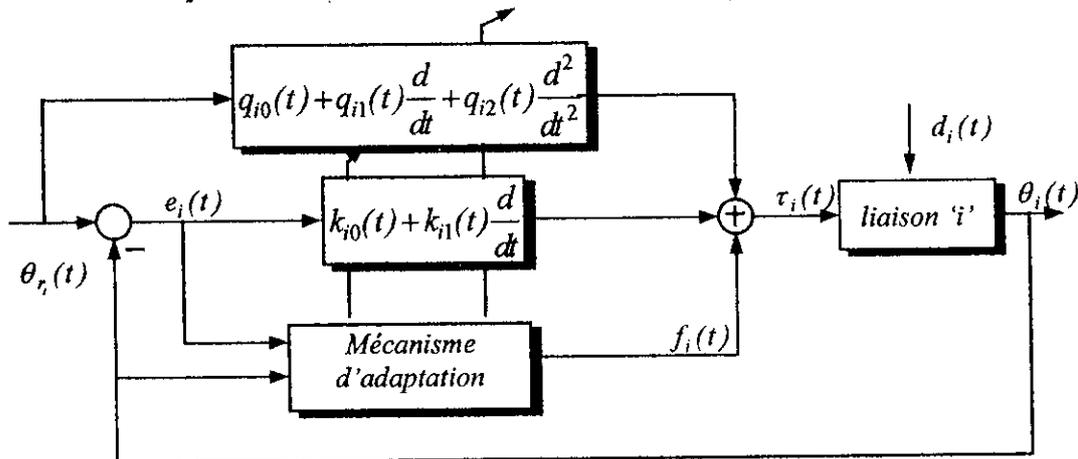


Fig.2.4: Commande adaptative décentralisée

La commande (2.26) est composée de :

1. un signal auxiliaire $f_i(t)$ synthétisé par le mécanisme d'adaptation pour améliorer la poursuite et compenser partiellement la perturbation $d_i(t)$.
2. un contrôleur de retour position-vitesse (PD) avec ses gains ajustables.
3. un contrôleur direct position-vitesse-accélération qui agit avec ses gains ajustables sur la position, vitesse et accélération de référence.

Le théorème suivant donne les lois d'adaptation des gains de la commande (2.26).

Théorème [Seraji 89]

Considérons le robot manipulateur décrit par l'équation (2.9) et la loi adaptative décentralisée suivante :

$$\tau_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=0}^1 k_{ij} e_i^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^2 q_{ij} \theta_r^{(j)}(t) \quad (2.27)$$

j désigne la $j^{\text{ème}}$ dérivée par rapport au temps.

Les lois d'adaptation de f_i , k_{ij} et q_{ij} qui assurent une stabilité asymptotique de l'erreur de poursuite en se basant sur l'erreur pondérée $r_i(t)$ définie par :

$$r_i(t) = w_{p_i} e_i(t) + w_{v_i} \dot{e}_i(t) \quad (2.28)$$

sont données par :

$$f_i(t) = f_i(0) + \delta_i \int_0^t r_i(t) dt + \rho_i r_i(t) \quad (2.29)$$

$$k_{ij}(t) = k_{ij}(0) + \alpha_{i,j+1} \int_0^t r_i(t) e_i^{(j)}(t) dt + \beta_{i,j+1} r_i(t) e_i^{(j)}(t) \quad j = 0,1 \quad (2.30)$$

$$q_{ij}(t) = q_{ij}(0) + \gamma_{i,j+1} \int_0^t r_i(t) \theta_r^{(j)}(t) dt + \lambda_{i,j+1} \theta_r^{(j)}(t) \quad j = 0,1,2 \quad (2.31)$$

avec $\{\delta_i, \alpha_{ij}, \gamma_{ij}\}$ sont les gains d'intégration des lois d'adaptation choisis strictement positifs, et $\{\rho_i, \beta_{ij}, \lambda_{ij}\}$ sont les gains proportionnels choisis positifs.

w_{p_i}, w_{v_i} sont des facteurs positifs représentant les poids de l'erreur de poursuite, et sa dérivé dans la formation de l'erreur pondérée $r_i(t)$.

La démonstration de ce théorème est donnée dans l'annexe (A).

Remarque

Lors de la dérivation des lois d'adaptation, on suppose que les termes $m_i(\theta)$ et $d_i(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ sont lentement variables dans le temps (annexe A), ceci est justifié par le fait que la variation des gains d'adaptation doivent être très rapides par rapport aux variations des paramètres du modèle.

Le signal auxiliaire $f_i(t)$ peut être généré par un simple régulateur PID à gains constants. En effet, on a :

$$\begin{aligned} f_i(t) &= f_i(0) + \rho_i \left[w_{p_i} e_i(t) + w_{v_i} \dot{e}_i(t) \right] + \delta_i \int_0^t \left[w_{p_i} e_i(t) + w_{v_i} \dot{e}_i(t) \right] dt \\ f_i(t) &= f_i(0) + \left[\rho_i w_{p_i} + \delta_i w_{p_i} \right] e_i(t) + \left[\rho_i w_{v_i} \right] \dot{e}_i(t) + \left[\delta_i w_{p_i} \right] \int_0^t e_i(t) dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

La loi de commande (2.26) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\tau_i(t) = \tau_i(0) + \left[\tilde{k}_{ip} + \tilde{k}_{ii} \int_0^t dt + \tilde{k}_{iv} \frac{d}{dt} \right] e_i(t) + \left[q_{i0} + q_{i1} \frac{d}{dt} + q_{i2} \frac{d^2}{dt^2} \right] \theta_r(t) \quad (2.33)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{ip} &= k_{i0} + \rho_i w_{p_i} + \delta_i w_{v_i} \\ \tilde{k}_{ii} &= \delta_i w_{p_i} \\ \tilde{k}_{iv} &= k_{i1} + \rho_i w_{v_i} \\ \tau_i(0) &= f_i(0) \end{aligned}$$

La loi de commande devient une combinaison d'un PID adaptatif dans la chaîne de retour et d'un PD2 adaptatif dans la chaîne directe.

Le schéma de commande présenté possède les caractéristiques suivantes :

1. chaque contrôleur décentralisé a une structure très simple et est composé par un signal auxiliaire, un PD adaptatif dans la chaîne de retour et un PD2 adaptatif dans la chaîne directe. Alternativement, il est composé d'un PID adaptatif dans la chaîne de retour et un PD2 adaptatif dans la chaîne directe.
2. les gains idéaux à imposer à chaque commande doivent dépendre de toutes les trajectoires de référence et de la charge. Quelques trajectoires et charges nécessitent des gains élevés, tandis que d'autres nécessitent des gains faibles. L'ajustement adaptatif s'avère donc indispensable.
3. Les lois d'adaptation (2.28) à (2.31) sont extrêmement simples. L'implémentation numérique de ces équations peut être faite par la méthode d'intégration trapézoïdale comme suit :

$$\begin{aligned} k(N) &= k(N-1) + \mu_1 \frac{T_s}{2} [r(N)v(N) + r(N-1)v(N-1)] \\ &+ \mu_2 [r(N)v(N) - r(N-1)v(N-1)] \end{aligned} \quad (2.34)$$

pour $f_i(t)$ on a $v(t) = 1$.

N est l'instant d'échantillonnage, T_s est la période d'échantillonnage. Il est à noter que pour une implémentation numérique, le problème de la commande doit être reformulée de façon discrète. Cependant, du fait que le temps de calcul est relativement faible par rapport aux commandes centralisées, T_s doit être choisie très petite pour négliger l'effet de l'échantillonnage.

4. Les lois d'adaptation de type proportionnel-intégral utilisées assurent des réponses transitoires améliorées et accélèrent la convergence en les comparant avec les lois d'adaptation de type intégral.
5. On remarque que les lois d'adaptation données par (2.28) à (2.31) et la commande donnée par (2.27) sont basées sur l'information disponible localement c'est à dire sur $\theta_{ri}(t)$ et $\theta_i(t)$ plutôt que sur le modèle dynamique du manipulateur (2.8). Donc la connaissance du modèle ou des paramètres tels que les frottements secs et visqueux et la charge n'est pas nécessaire

dans la formalisation de la commande. Ceci est une caractéristique extrêmement désirable dans les applications pratiques.

6. La stabilité globale du système est assurée. La méthode utilisée lors de la synthèse des lois d'adaptation est la seconde méthode de Lyapunov.
7. Lors de la dérivation des lois d'adaptation, il a été supposé que le terme d'inertie $m_2(\theta)$ varie très lentement par rapport aux variations de $f_i(t)$ et les gains de la commande. En plus, le terme d'interaction satisfait l'inégalité (A.23). Ces suppositions peuvent être violées dans le cas de la poursuite d'une trajectoire rapide ou dans le cas d'une variation brusque de la charge. Mais, en dépit de ces éventuelles violations, les contrôleurs adaptatifs sont robustes. Cette robustesse est attribuée à plusieurs facteurs : d'une part l'utilisation de la méthode de Lyapunov donne une condition suffisante de stabilité, et d'autre part, la commande adaptative directe développée dans l'annexe (A) force l'erreur de poursuite à s'annuler sans considérer la convergence des gains d'adaptation.

2.5 RESULTATS DE SIMULATION

2.5.1 Commande dans le plan articulaire

Le robot manipulateur utilisé pour la validation de la partie théorique de l'algorithme est un PUMA à 2 degrés de liberté dont la modélisation est détaillée dans le chapitre I.

Les trajectoires de références sont de type cycloïde qui assurent une continuité en position et vitesse pour avoir des couples réalisables [Seraji 89]. Chaque articulation passe d'une position initiale $\theta_r(t_0)$ vers une position finale $\theta_r(t_f)$ en suivant le profil donné par :

$$\theta_{r_i}(t) = \begin{cases} \theta_{r_i}(t_0) + \frac{\Delta_i}{2\pi}(\omega t - \sin(\omega t)) & \text{pour } t < t_f \\ \theta_{r_i}(t_f) & \text{pour } t \geq t_f \end{cases} \quad (2.35)$$

avec $\Delta_i = \theta_{r_i}(t_f) - \theta_{r_i}(t_0)$ et $\omega = \frac{2\pi}{t_f}$

$$t_f = 3 \text{ sec}, \theta_{r_1}(0) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}, \theta_{r_1}(3) = 0 \text{ rad}, \theta_{r_2}(0) = 0 \text{ rad}, \theta_{r_2}(3) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Les paramètres des lois d'adaptation (2.28) à (2.31) sont :

	Articulation 1	Articulation 2
$w_{p_i} ; w_{v_i}$	6000 ; 600	6000 ; 600
$\delta_i ; \rho_i$	10 ; 0	10 ; 0
$\alpha_{ij} ; \beta_{ij}$	10 ; 1	10 ; 1
$\gamma_{ij} ; \lambda_{ij}$	2 ; 0	2 ; 0

Tab.2.1: Paramètres de la commande

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures Fig.2.5.a à Fig.2.5.f, dans le cas où les paramètres du robot sont parfaitement connus et sans variation de charge. Dans Fig. 2.5.a sont consignées les positions des articulations et les positions de référence (2.35).

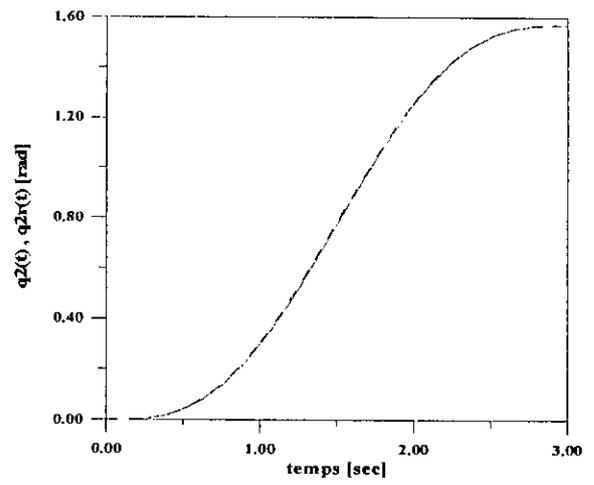
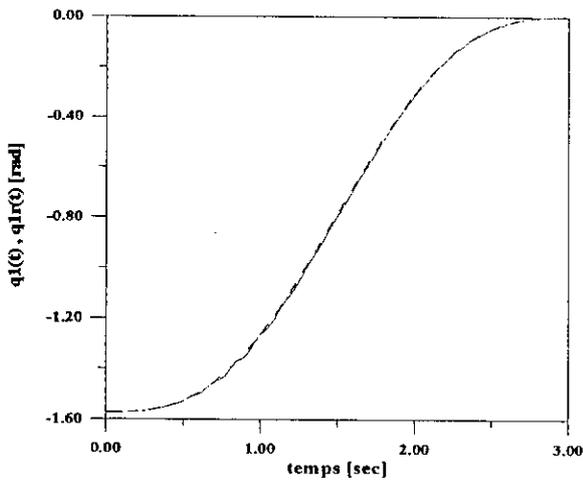
La figure Fig.2.5.b illustre les erreurs de poursuite. On remarque clairement qu'il y a une poursuite parfaite pour les deux articulations. Sur la figure Fig.2.5.c sont présentés les couples, le phénomène oscillatoire peut être éliminé en variant les paramètres des lois d'adaptation. L'allure du signal auxiliaire est très proche de celle de la commande, ce qui fait que ce signal est prépondérant dans le schéma de la commande. Les gains d'adaptation sont consignés sur les figures Fig.2.5.d à Fig.2.5.f, les gains convergent vers leurs valeurs optimales.

Dans le cas où on introduit une variation brusque de la charge (violation de la supposition faite sur la dynamique des termes d'inertie et de couplage - annexe A-) les résultats de simulation d'une telle situation sont données dans les figures Fig.2.6.a, Fig.2.6.b et Fig.2.6.c. On remarque que les articulations poursuivent les trajectoires de référence avec des erreurs de poursuite quasiment nulles et cela en dépit de cette violation. Cette robustesse est expliquée dans la remarque 7.

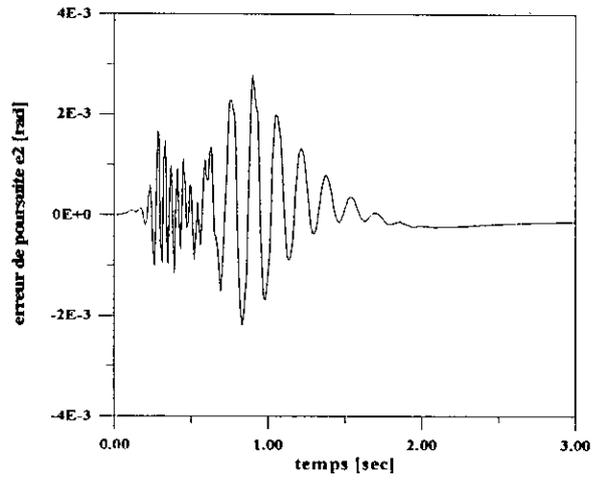
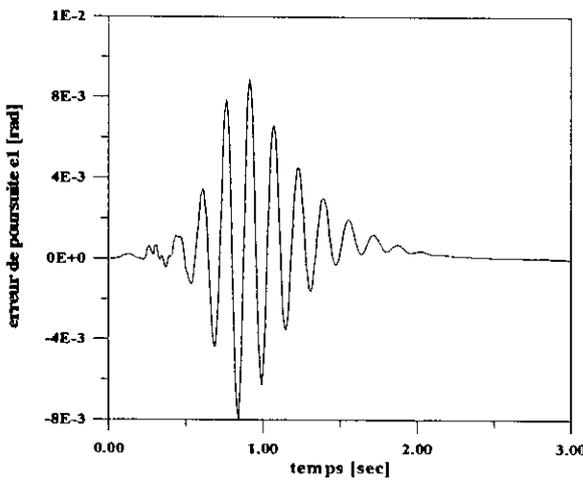
On présente dans le tableau (Tab.2.2) une comparaison entre la commande adaptative décentralisée (D.A.C) et la commande sans signal auxiliaire (S.S.A) ainsi que la commande sans action anticipatrice (S.A.A). Les erreurs maximales et finales des deux articulations sont aussi présentées. On remarque bien l'importance de l'introduction du signal auxiliaire dans l'amélioration des performances de la commande, sans ce signal on aura une détérioration des performances. Le signal auxiliaire peut être considéré comme un compensateur qui élimine l'effet des couplages entre les différentes liaisons et l'effet du changement de la charge.

Conditions de charge	Articulations	erreurs en position maximales			erreurs en positions finales		
		SSA	SAA	DAC	SSA	SAA	DAC
Cas n#1: pas de charge	1	3.7°	0.85°	0.65°	3.7°	0.02°	0.008°
	2	0.8°	0.3°	0.27°	0.165°	0.008°	0.017°
Cas n#2: charge de masse 10kg à t=1s	1	3.7°	0.85°	0.8°	3.7°	0.02°	0.008°
	2	0.95°	0.35°	0.35°	0.165°	0.008°	0.017°

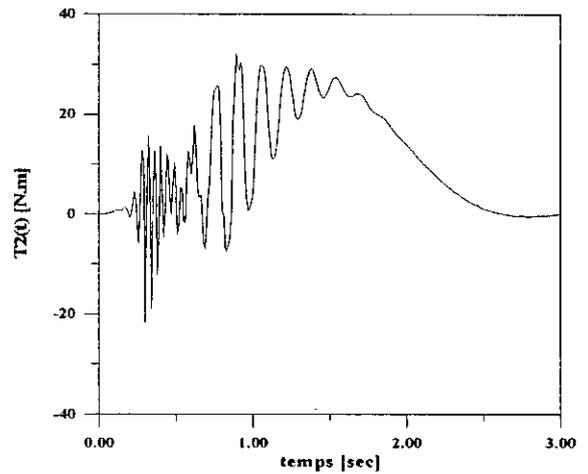
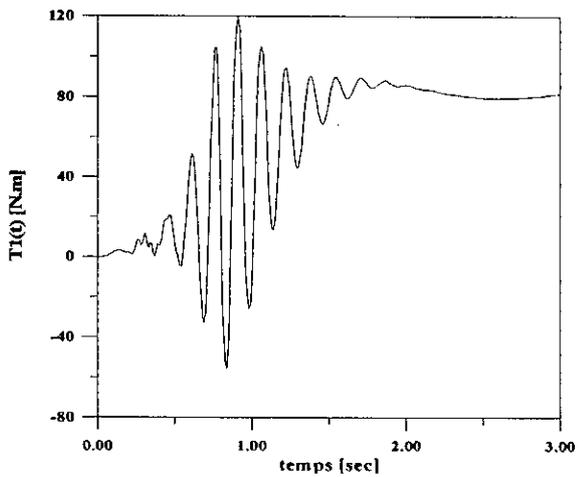
Tab.2.2: Comparaison entre la commande adaptative décentralisée DAC, la commande sans signal auxiliaire SSA, et la commande sans action anticipatrice SAA



a- positions et positions de référence des articulations

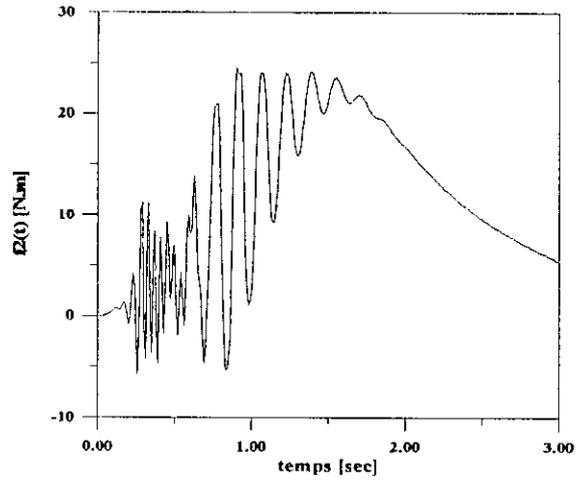
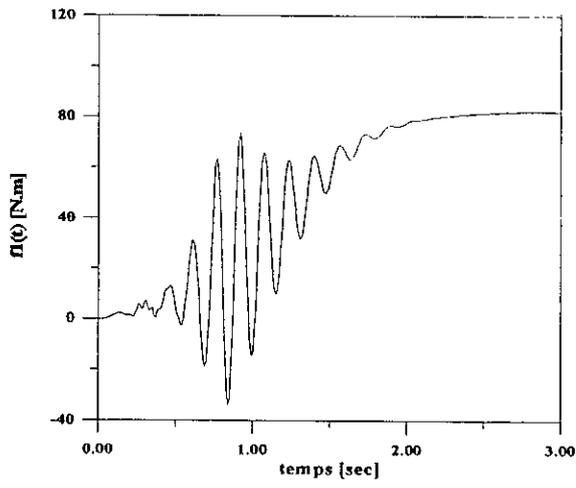


b- erreurs en position des deux articulations

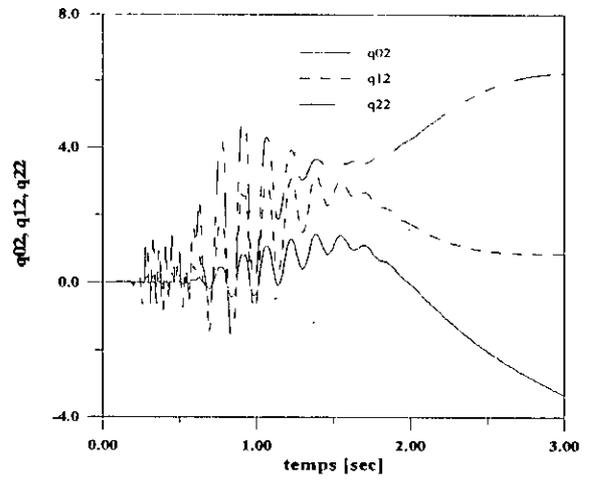
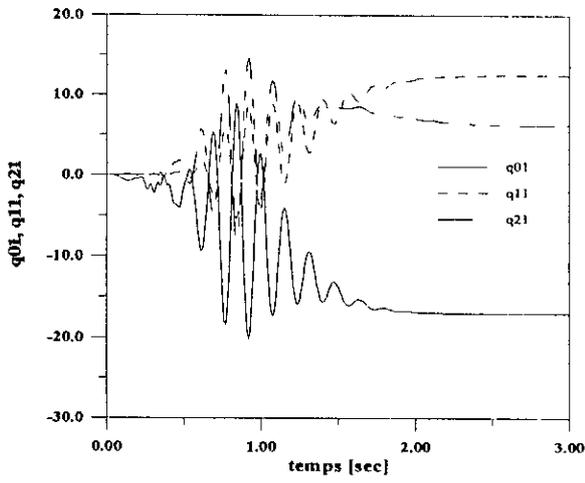


c- couples $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ des deux articulations

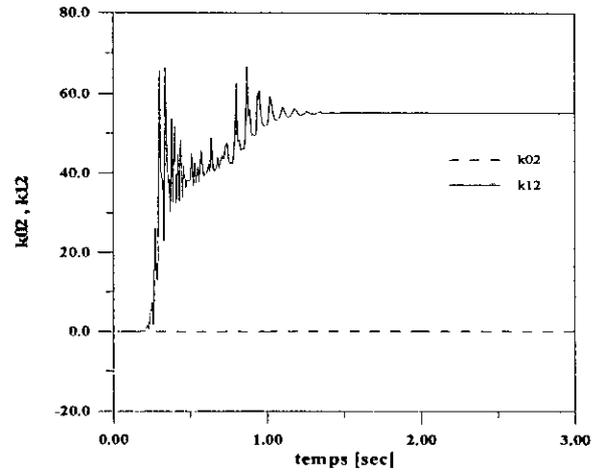
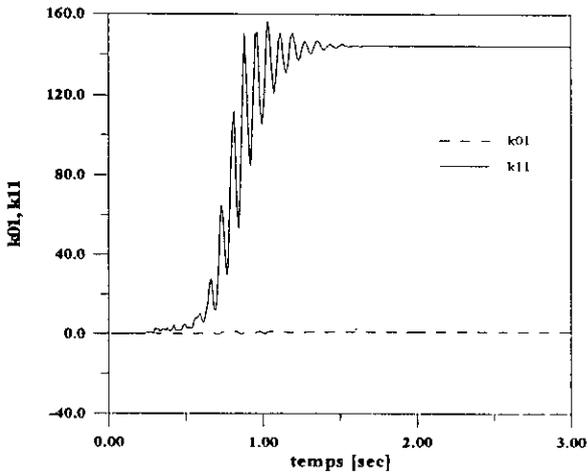
Fig. 2.5.1: Positions, erreurs en position et couples sans variations de charge



a- signaux auxiliaires $f_1(t)$ et $f_2(t)$

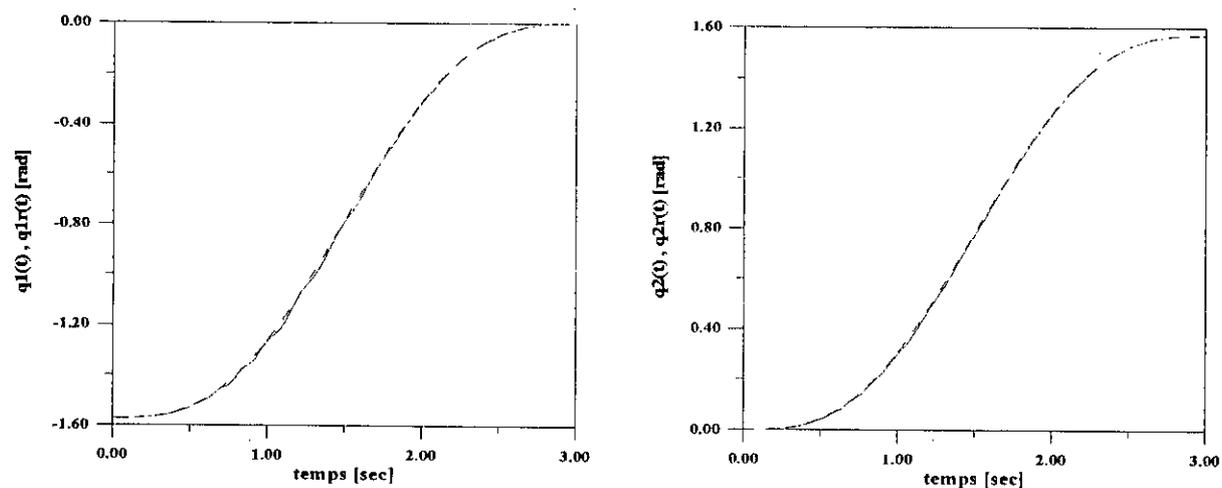


b- gains de la commande anticipatrice PD2

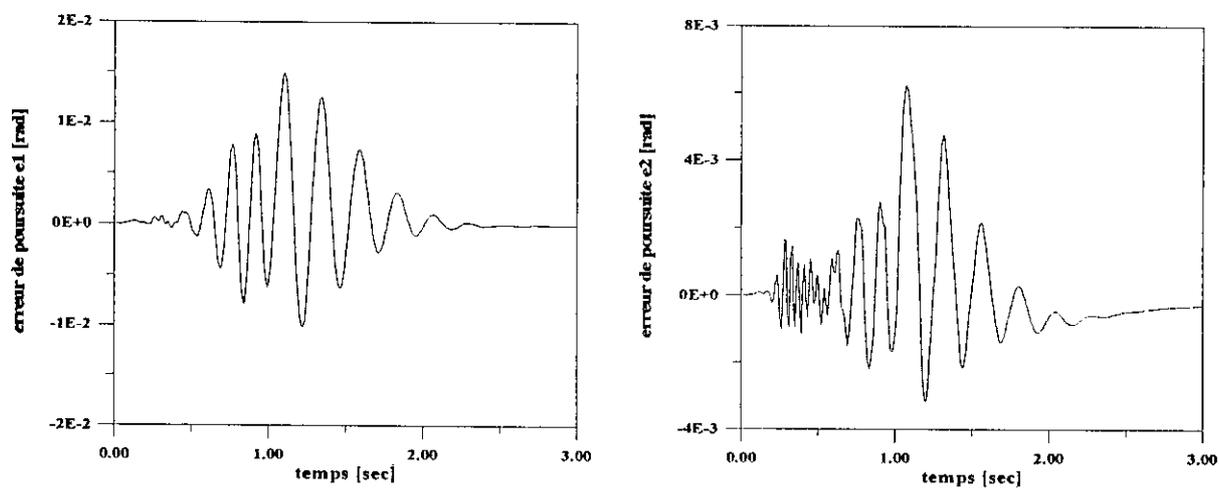


c- gains de la commande PD

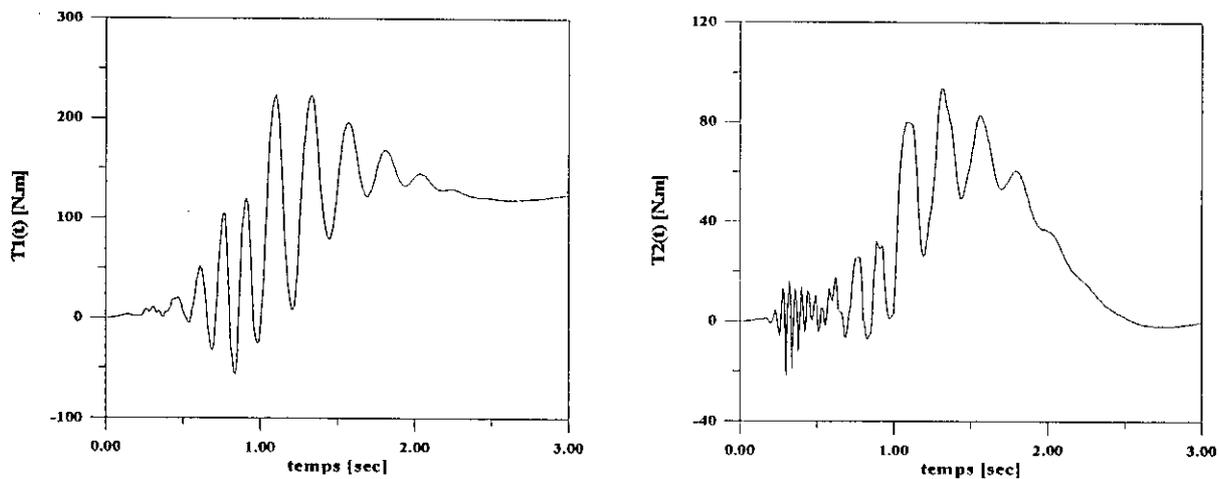
Fig. 2.5.2: Signaux auxiliaires et gains d'adaptation



a- positions et positions de référence des articulations



b- erreurs en position des deux articulations



c- couples $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ des deux articulations

Fig. 2.6: Positions, erreurs en position et couples avec variations de charge à $t=1$ sec.

2.5.2 Commande dans le plan opérationnel (Cartésien)

Dans cette partie, on présente la commande en position de l'élément terminal dans l'espace opérationnel (espace des tâches).

Le modèle du robot manipulateur décrit par l'équation (1.9) est réécrit en fonction de la position de l'élément terminal sous la forme suivante [Seraji 89]:

$$M(x, \dot{x})\ddot{x} + N(x, \dot{x}) + G(x) + H(\dot{x}) = F(t) \quad (2.36)$$

Les positions x sont reliées aux positions articulaires θ par le modèle géométrique donné par (2.2). Le vecteur $F(t)$ regroupe les forces appliquées sur l'élément terminal. Les éléments de $M, N, G,$ et H sont non linéaires et fonctions des positions et vitesses de déplacement de l'élément terminal.

Le problème de la commande cartésienne en position est d'amener l'élément terminal d'un point dans l'espace à un autre, et cela en dépit des variations paramétriques et /ou de charge que peut subir le système.

La commande adaptative décentralisée est obtenue de la même façon que dans la section 2.3 :

$$F_i(t) = f_i(t) + k_{i0}(t)e_i(t) + k_{i1}(t)\dot{e}_i(t) + q_{i0}(t)x_{r_i}(t) + q_{i1}(t)\dot{x}_{r_i}(t) + q_{i2}(t)\ddot{x}_{r_i}(t) \quad (2.37)$$

avec $x_{r_i}(t)$ est la trajectoire de référence qui correspond à l'axe i . L'erreur de poursuite est donnée par $e_i(t) = x_{r_i} - x_i$ ($x_1 \equiv X, x_2 \equiv Y$). Les lois d'adaptation (2.28) à (2.31) sont réécritent sous la forme suivante :

$$f_i(t) = f_i(0) + \delta_i \int_0^t r_i(t) dt + \rho_i r_i(t) \quad (2.38)$$

$$k_{ij}(t) = k_{ij}(0) + \alpha_{i,j} \int_0^t r_i(t) e_i^{(j)}(t) dt + \beta_{i,j} r_i(t) e_i^{(j)}(t) \quad j = 0,1 \quad (2.39)$$

$$q_{ij}(t) = q_{ij}(0) + \gamma_{i,j} \int_0^t r_i(t) x_{r_i}^{(j)}(t) dt + \lambda_{i,j} r_i(t) x_{r_i}^{(j)}(t) \quad j = 0,1,2 \quad (2.40)$$

Les remarques précédentes sont préservées dans le cas de la commande cartésienne, néanmoins, on ne peut pas appliquer le vecteur forces $F(t)$ au robot manipulateur. Le vecteur couples est relié au vecteur forces par la relation suivante :

$$\tau(t) = J^T(\theta)F(t) \quad (2.41)$$

Du fait que la matrice jacobienne $J(\theta)$ est pleine et non linéaire, la loi de commande (2.37) à une structure centralisée. En d'autre termes, on remarque que la décentralisation n'est pas possible dans le cas d'une commande cartésienne. Néanmoins, le schéma développé nécessite moins de calculs et présente l'avantage de pouvoir être implémenté sous une architecture parallèle.

Le choix des trajectoires de référence dépend essentiellement du parcours de déplacement de l'élément terminal.

Dans le cas du robot manipulateur *PUMA* à 2 D.D.L. et pour un parcours linéaire dans le plan (X,Y), les trajectoires de référence sont choisies de la façon suivante :

$$x(t) = \begin{cases} x(t_0) + \frac{\Delta_x}{2\pi} [\omega t - \sin(\omega t)] & \text{pour } t < t_f \\ x(t_f) & \text{pour } t \geq t_f \end{cases} \quad (2.42)$$

$$y(t) = \begin{cases} y(t_0) + \frac{\Delta_y}{2\pi} [\omega t - \sin(\omega t)] & \text{pour } t < t_f \\ y(t_f) & \text{pour } t \geq t_f \end{cases} \quad (2.43)$$

L'équation de la droite est donc donnée par :

$$y(t) + \frac{\Delta_y}{\Delta_x} x(t) = y(t_0) + \frac{\Delta_y}{\Delta_x} x(t_0) \quad (2.44)$$

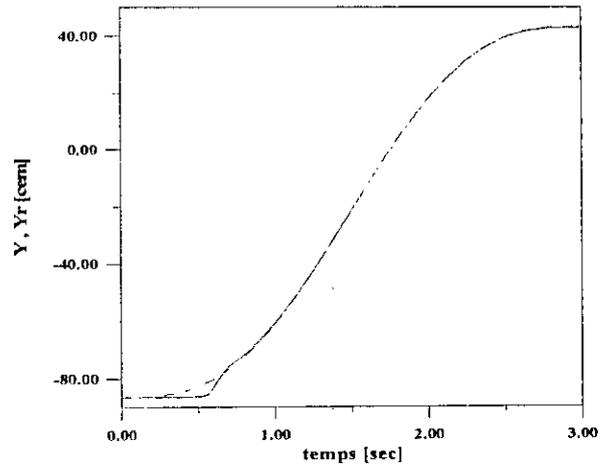
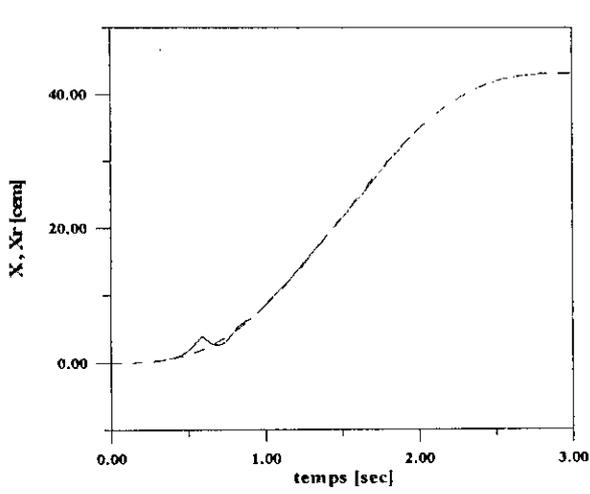
Par contre, pour un parcours circulaire, les trajectoires de référence sont données par :

$$\begin{aligned} x(t) &= c_x + l \cos(\omega t) \\ y(t) &= c_y + l \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

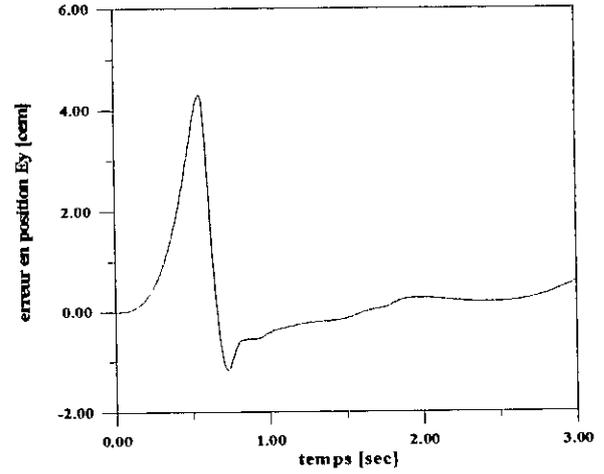
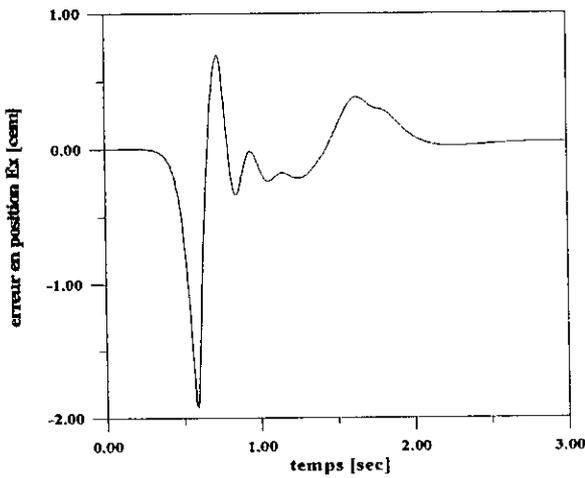
avec c_x, c_y sont les coordonnées du centre du cercle.

Les résultats de simulation pour des trajectoires de référence qui correspondent à un parcours linéaire sont illustrés dans les figures Fig.2.7.a à Fig.2.7.d. La figure Fig.2.7.a présente les positions de l'élément terminal ainsi que les positions désirées. Dans Fig.2.7.b sont consignées les erreurs de poursuite. On remarque qu'il y a une poursuite parfaite pour les deux axes X et Y, et cela en présence d'une variation brusque de la charge. Les couples et forces appliquées à l'élément terminal sont illustrés dans la figure Fig.2.7.c.

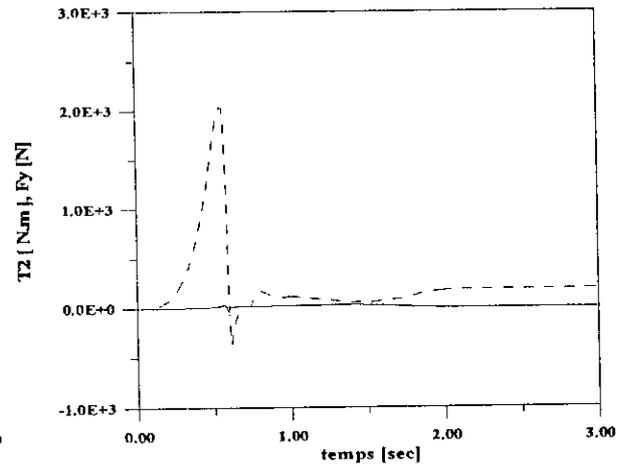
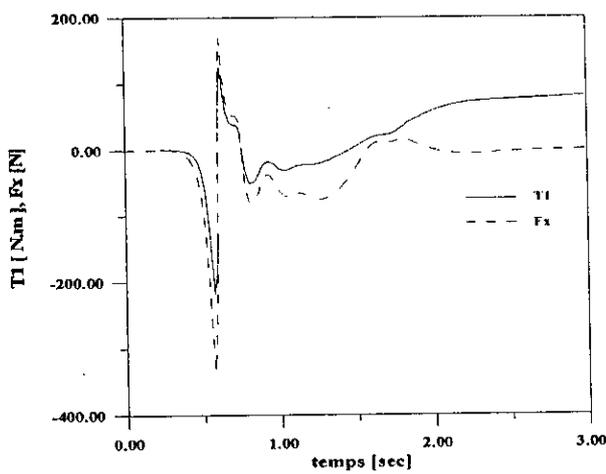
Pour des trajectoires définissant un parcours circulaire, les résultats de simulation sont illustrés dans les figures Fig.2.8.a à Fig.2.8.d.



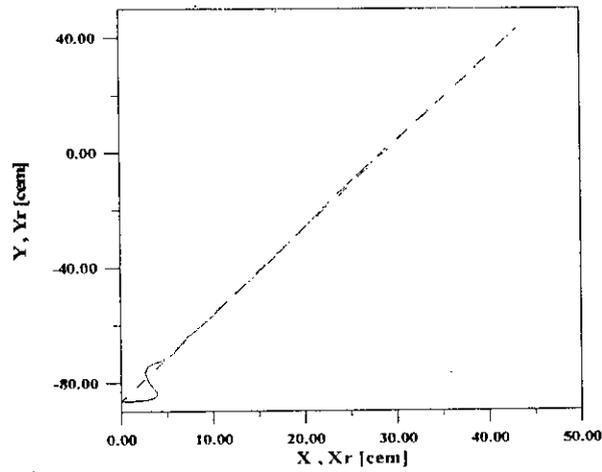
a- positions et positions de référence des deux axes



b- erreurs en position des deux axes

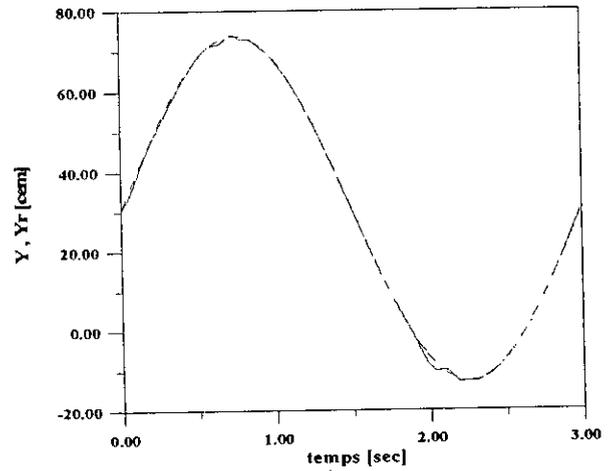
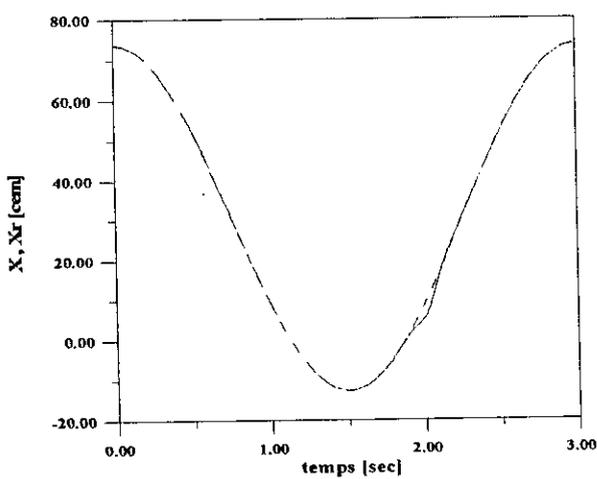


c- couples $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ et forces des deux axes

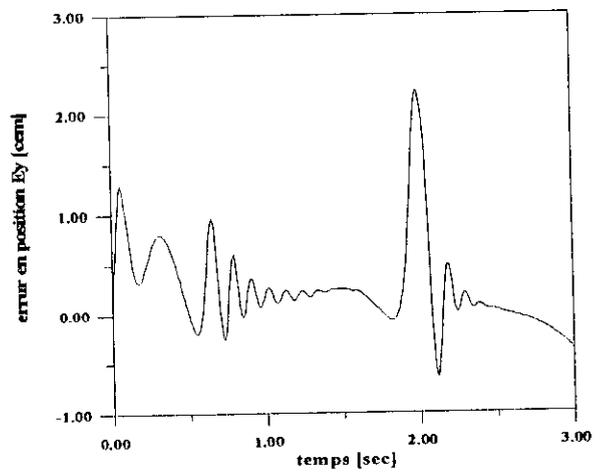
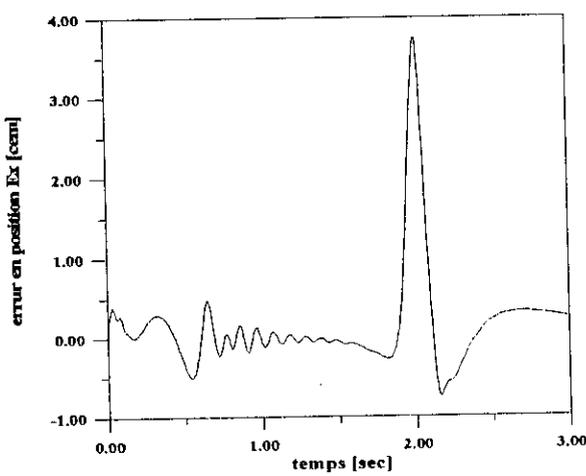


d- trajectoires désirées et réelles dans le plan (X,Y)

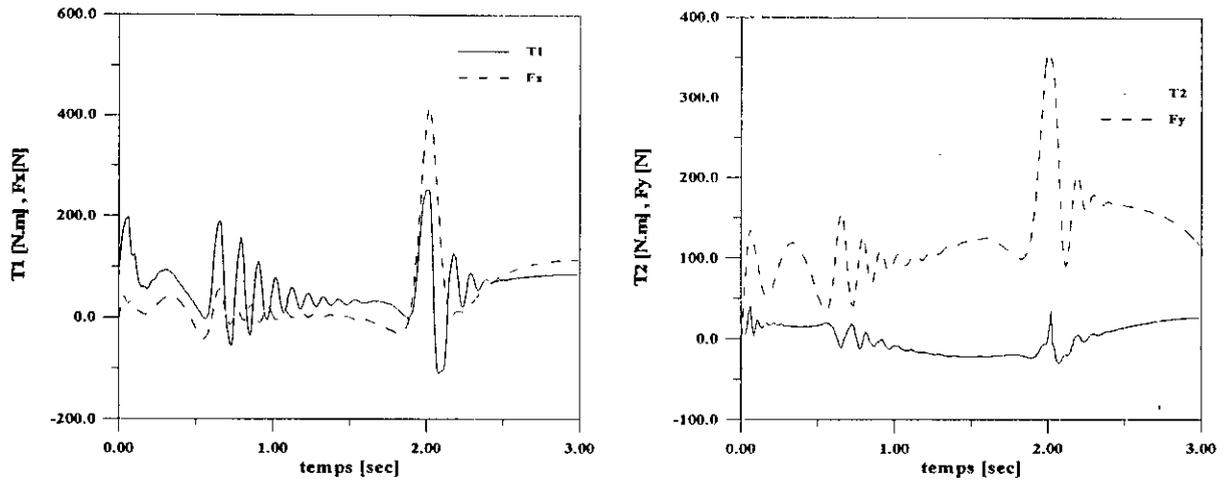
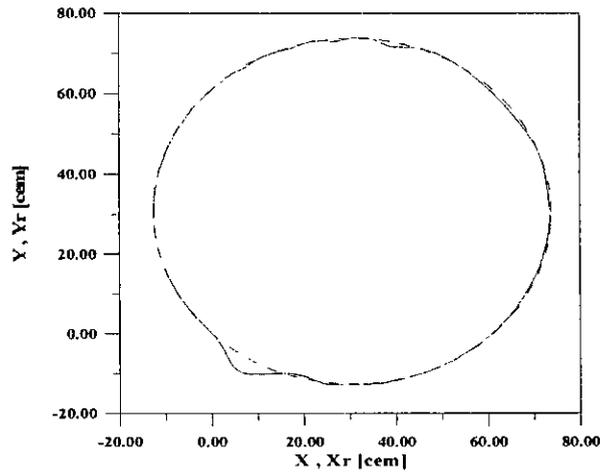
Fig. 2.7: Positions, erreurs en position et commandes dans le plan cartésien effet de variation de charge.



a- positions et positions de référence des deux axes



b- erreurs en position des deux axes

c- couples $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ et forces des deux axes

d- trajectoires désirées et réelles dans le plan (X,Y)

Fig.2.8: Positions, erreurs en position et commandes dans le plan cartésien effet de variation de charge.

2.6 CONCLUSION

Nous avons présenté, dans ce chapitre, un schéma simple pour la commande des robots manipulateurs. La commande adaptative à structure décentralisée est tolérante aux interactions non linéaires et variables existantes entre les différentes articulations du robot. L'algorithme d'adaptation est utilisé pour compenser les dynamiques inconnues du système. Ces dernières ne sont pas dues seulement aux changements de la charge, mais aussi aux changements de la dynamique des différentes trajectoires imposées au robot manipulateur.

Dans un premier lieu, nous avons présenté le modèle mathématique du robot manipulateur avec charge. En second lieu, nous avons appliqué le principe de la commande inverse des systèmes linéaires (ou linéarisés) comme méthodologie utilisée pour la synthèse de la commande. Par la suite, nous avons présenté l'algorithme de commande et les lois d'ajustement de ses gains, puis son application sur le robot *PUMA* à 2 d.d.l.

Deux raisons fondamentales ont fait que le schéma de commande présenté donne des meilleurs performances en le comparant avec d'autres commandes à structure centralisée:

- L'algorithme nécessite un temps de calcul considérablement réduit. En effet, pour un robot manipulateur à n d.d.l., nous n'avons que $6n$ gains à ajuster à chaque période d'échantillonnage, tandis que, dans la commande adaptative discrète avec modèle de référence présentée dans [Genfai 95](), le mécanisme d'adaptation ajuste $5n^2 + n$ gains à chaque période. Dans notre cas (le *Puma* à 2 d.d.l.), le nombre de gains à adapter diminue de $5n(n - 1)$, soit de 10. En plus, avec une telle structure, nous avons la possibilité d'implémenter l'algorithme de commande sur n microprocesseurs rapides, dans une architecture parallèle. Chaque microprocesseur spécialisé opère sur 6 gains avec une période d'échantillonnage choisie très élevée.
- L'implémentation décentralisée présente une certaine fiabilité et une résistance aux défaillances des capteurs. En supposant qu'un organe de mesure donne des résultats erronés sur la position de l'articulation dont il est associé, seul la boucle de commande de l'articulation considérée est infectée par cette défaillance.

Chapitre 3

Commande Adaptative Décentralisée à Perturbation

3.1 INTRODUCTION

Au chapitre précédent, nous nous sommes intéressé à la commande adaptative décentralisée à modèle de référence des robots manipulateurs. Cette commande se compose de deux actions. Une action anticipatrice spécifiée en terme d'un contrôleur P.V.A (Position - Vitesse - Accélération) et une action de retour "*feedback*". Le contrôleur P.V.A ajustable qui n'est qu'un régulateur de type PD2 peut être remplacé par une commande inverse calculée à partir du formalisme de *Newton-Euler* (Chapitre 1). Cette dernière ne nécessite pas une adaptations de ces gains, ce qui réduit de façon considérable le temps de calcul de l'algorithme.

C'est sous cette optique et en se basant sur la théorie des perturbations que Lee & Chung [Fu 87] ont proposés une nouvelle stratégie de commande des robots manipulateurs. Cette dernière assure une poursuite parfaite des trajectoires désirées pour une large plage des mouvements et de charge du robot. En effet, la commande adaptative à perturbation (*APC*) développée dans ce chapitre permet de compenser l'effet des couplages et des non linéarités qui existent entre les différents articulations du robot. Cette caractéristique est due au fait que la commande *APC* se compose d'une action anticipatrice "*feedforward*" qui utilise le couple nominal obtenu par l'approche de *Newton-Euler*. Cette action directe est considérée comme la dynamique inverse du modèle exacte du robot et est sensible aux variations paramétriques et de charge que peut subir le système. Pour parer à cette sensibilité, une commande complémentaire est spécifiée en terme d'action de retour "*feedback*". La commande est calculée en se basant sur un modèle à perturbation obtenu par linéarisation du modèle non linéaire du robot manipulateur. Les deux actions sont dérivées séparément et de façon simultanée. Le schéma bloc de la commande adaptative à perturbation est donné à la figure (Fig. 3.1).

Dans ce chapitre, après avoir considéré le modèle à perturbation continu d'un procédé (section 3.2), on présente la loi de commande utilisée dans la chaîne du retour "*feedback*" (3.3). L'application de cette dernière à la commande articulaire et opérationnelle du robot manipulateur ainsi que les résultats de simulation sont exposés dans la section 3.4. on clôture ce chapitre par une conclusion

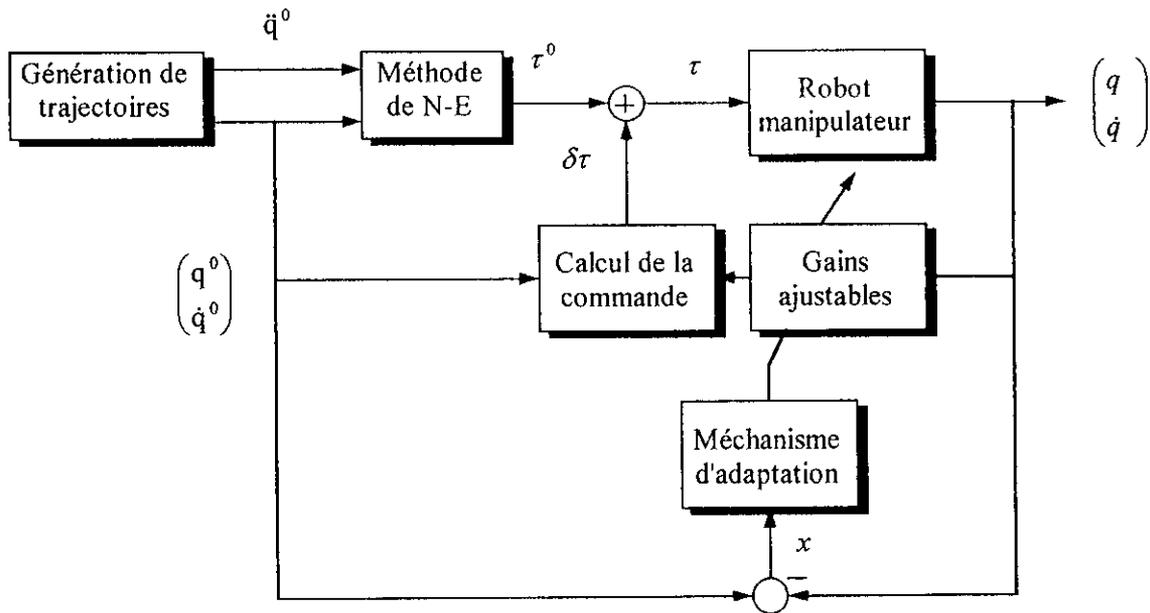


Fig.3.1: Schéma général de la commande APC

3.2 MODELE A PERTURBATION

Les équations de mouvement d'un robot manipulateur à n d.d.l. sont exprimées sous la forme d'état suivante:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \tag{3.1}$$

avec

$$x^T(t) = [q^T(t) \quad \dot{q}^T(t)] \text{ et } u(t) = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_n]$$

Le couple nominal développé par l'approche de N-E ainsi que les positions et les vitesses nominales vérifient (3.1), c'est à dire :

$$\dot{x}^0(t) = f(x^0(t), u^0(t)) \tag{3.2}$$

avec $x^{0T}(t) = [q^{0T}(t) \quad \dot{q}^{0T}(t)]$ et $u^0(t) \equiv \tau^0(t)$

Le développement en série de Taylor du système non linéaire donné par (3.1) autour du point nominal $(x^0(t), u^0(t))$ donne :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = f(x^0(t), u^0(t)) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \delta x(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0 \delta u(t) + o_0(\delta x(t), \delta u(t)) \tag{3.3}$$

où $o_0(\delta x(t), \delta u(t))$ englobe tous les termes d'ordre supérieur dans le développement en série de Taylor.

$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0$ et $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_0$ sont les matrices jacobiennes de la fonctionnelle $f(x(t), u(t))$ calculées au point nominal $(x^0(t), u^0(t))$.

$\delta x(t)$ est la perturbation d'état autour de la trajectoire nominale:

$$\delta x(t) = x(t) - x^0(t) \quad (3.4)$$

$\delta u(t)$ est le vecteur commande à perturbation.

En utilisant la dérivé de l'équation (3.4) et en négligeant les termes d'ordre supérieur, l'équation (3.3) se réécrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_0 \delta x(t) + \left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_0 \delta u(t) \\ &= A(t)\delta x(t) + B(t)\delta u(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

l'équation (3.5) est dite modèle à perturbation du système non linéaire (3.1). C'est ce modèle qui va être utilisé pour la synthèse de la commande adaptative décentralisée à perturbation.

3.3 COMMANDE ADAPTATIVE DECENTRALISEE

Dans cette section, nous allons présenter la méthodologie de synthèse d'un contrôleur adaptatif décentralisé à perturbation qui va compléter l'action anticipatrice "feedforward" dans la commande des robots manipulateurs.

Considérons le système complexe, linéaire, interconnecté et invariant dans le temps décrit par l'équation d'état suivante:

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.6)$$

où $x_i(t) \in R^n$ est le vecteur d'état du $i^{\text{ème}}$ sous-système, $u_i(t) \in R^m$ est son vecteur de commande, $d_i \in R^n$ est le vecteur des perturbations constantes et inconnues et A_i, B_i et A_{ij} sont des matrices constantes et inconnues de dimension convenable.

L'objectif est de déterminer une loi de commande adaptative décentralisée assurant la convergence asymptotique des états des sous-systèmes vers zéro.

Soit les modèles de référence implicites définies par les paires $\{A_m, B_m\}$, $i = 1, 2, \dots, N$.

L'équation (3.6) peut être réécrite sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_m x_i(t) + B_m u_i(t) + (A_i - A_m) x_i(t) + (B_i - B_m) u_i(t) \\ &\quad + d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.7)$$

La loi de commande adaptative décentralisée ainsi que les lois d'adaptation sont données par [Choi 88]:

$$u_i(t) = -(F_i(t) + K_i) x_i(t) - G_i(t) u_i(t) - h_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{F}_i(t) &= \Gamma_{1i} K_i x_i(t) x_i^T(t) \\ \dot{G}_i(t) &= \Gamma_{2i} K_i x_i(t) u_i^T(t) \\ \dot{h}_i(t) &= \Gamma_{3i} K_i x_i(t) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.9)$$

Où Γ_{1i}, Γ_{2i} et Γ_{3i} sont des matrices gains définies positive. K_i est une matrice constante qui satisfait l'équation suivante:

$$K_i = B_m^T P_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

P_i est une matrice définie positive solution de l'équation algébrique de Riccati donnée par:

$$(A_{m_i} + \alpha_i I)^T P_i + P_i (A_{m_i} + \alpha_i I) - P_i B_m B_m^T P_i + Q_i = 0 \quad (3.11)$$

Q_i est une matrice semi définie positive, et α_i est un paramètre constant choisi positif. Le système en boucle fermée s'obtient en combinant les équations (3.7) et (3.8):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & (A_{m_i} - B_m K_i)x_i(t) + (A_i - A_{m_i} - B_m F_i(t))x_i(t) + (B_i - B_m - B_m G_i(t))u_i(t) \\ & + (d_i - B_m h_i(t)) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.12)$$

On obtient ainsi une équation décrivant le système adaptatif à modèle de référence. Pour analyser la stabilité d'un tel système, on établit les conditions suivantes :

C1: Il existe des matrices constantes F_i^* , G_i^* et h_i^* qui satisfassent les relations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} A_i - A_{m_i} - B_m F_i^* &= 0 \\ B_i - B_m - B_m G_i^* &= 0 \\ d_i - B_m h_i^* &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

Pour obtenir cette condition, il suffit d'imposer la dynamique du système en boucle fermée, et de vérifier l'équation suivante :

$$(A_i - A_{m_i} - B_m F_i^*)x_i(t) + (B_i - B_m - B_m G_i^*)u_i(t) + (d_i - B_m h_i^*) = 0 \quad (3.14)$$

Dans le cas où $x_i(t)$ et $u_i(t)$ sont indépendants, on obtient les équations données par (3.13). Ces dernières sont équivalentes aux conditions d'Erzberger, établies dans le cas de la commande linéaire par poursuite d'un modèle [Fu 87][Genfap 95].

C2: Pour $i, j = 1, 2, \dots, N$ la borne supérieure de la norme de A_{ij} est connue.

Soit D_i une matrice définie par:

$$D_i = Q_i + P_i B_m B_m^T P_i \quad (3.15)$$

et soit E une matrice $N \times N$ dont son $ij^{\text{ième}}$ élément est définie par:

$$e_{ij} = \begin{cases} \lambda_m[D_i + 2\alpha_i P_i] / \lambda_M[P_i], & j = i \\ -\|A_{ij}\|_{UB} - \|A_{ji}\|_{UB}, & j \neq i \end{cases} \quad (3.16)$$

où $\lambda_m[P_i]$ et $\lambda_M[P_i]$ sont respectivement le minimum et le maximum des valeurs propres de la

matrice P_i , et $\|A_{ij}\|_{\cup B}$ est la borne supérieure de la norme de A_{ij} .

Théorème: [Choi 88]

Si pour $i = 1, 2, \dots, N$, α_i est choisi de telle façon que la matrice E est définie positive et que $\lambda_M[P_1] = \lambda_M[P_2] = \dots = \lambda_M[P_N]$, alors le système interconnecté en boucle fermée (3.12) avec les lois d'adaptations définies dans (3.9) est asymptotiquement stable quand les conditions C1 et C2 sont vérifiées.

Démonstration:

Soit $\Delta F_i(t)$, $\Delta G_i(t)$ et $\Delta h_i(t)$ des matrices définies comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F_i(t) &= F_i(t) - F_i^* \\ \Delta G_i(t) &= G_i(t) - G_i^* \\ \Delta h_i(t) &= h_i(t) - h_i^* \end{aligned} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

En utilisant les équations (3.13) et (3.17), le système en boucle fermée (3.12) peut être écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= (A_{m_i} - B_{m_i} K_i)x_i(t) - B_{m_i} \Delta F_i(t)x_i(t) - B_{m_i} \Delta G_i(t)u_i(t) \\ &\quad - B_{m_i} \Delta h_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.18)$$

La fonction de Lyapunov conditâte est choisie comme suit:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{i=1}^N \left\{ x_i^T(t) P_i x_i(t) + Tr(\Delta F_i^T(t) \Gamma_{1i}^{-1} \Delta F_i(t)) \right. \\ &\quad \left. + Tr(\Delta G_i^T(t) \Gamma_{2i}^{-1} \Delta G_i(t)) + \Delta h_i^T(t) \Gamma_{3i}^T \Delta h_i(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

de l'équation (3.17), on a:

$$\Delta \dot{F}_i(t) = \dot{F}_i(t), \quad \Delta \dot{G}_i(t) = \dot{G}_i(t), \quad \Delta \dot{h}_i(t) = \dot{h}_i(t) \quad (3.20)$$

La dérivé de la fonction de Lyapunov s'obtient en utilisant les équations (3.9) et (3.20):

$$\dot{v}(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ -x_i^T(t) (D_i + 2\alpha_i P_i)x_i(t) + 2x_i^T(t) P_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij}x_j(t) \right\} \quad (3.21)$$

En utilisant l'inégalité suivante pour une matrice réelle et symétrique R_i :

$$\lambda_m[R_i] \|x_i\|^2 < x_i^T R_i x_i < \lambda_M[R_i] \|x_i\|^2 \quad (3.22)$$

et la condition: $\lambda_M[P_1] = \lambda_M[P_2] = \dots = \lambda_M[P_N]$, l'équation (3.19) devient:

$$\dot{v}(t) < -\lambda_M [P_1] \bar{x}^T E \bar{x} \quad (3.23)$$

où $\bar{x} = [\|x_1\|, \|x_2\|, \dots, \|x_N\|]^T$.

Si pour $i = 1, 2, \dots, N$, α_i est choisi de telle manière que la matrice E est définie positive ($E > 0$), on a $\dot{v}(t) \leq 0$. De (3.21) et (3.23), on a $\dot{v}(t) = 0$ seulement si $x_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, donc en utilisant le second théorème de Lyapunov [Slotine 88] on conclut que le système interconnecté (3.12) est asymptotiquement stable.

Remarque 1

La condition $\lambda_M [P_1] = \lambda_M [P_2] = \dots = \lambda_M [P_N]$ est vérifiée seulement dans le cas où A_m, B_m, Q_i, α_i dans l'équation de Reccati (3.11) sont maintenus inchangés pour $i = 1, 2, \dots, N$.

3.4 APPLICATION A LA COMMANDE DES ROBOTS MANIPULATEURS

La dynamique d'un robot manipulateur à n d.d.l. est obtenue par le formalisme d'Euler-Lagrange (Chapitre 1):

$$M(q(t); l) \ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t); l) + c(q(t); l) = \tau(t) \quad (3.24)$$

Où $q(t)$ et $\tau(t)$ sont respectivement les vecteurs des positions et des forces généralisées, l est un vecteur englobant les paramètres des liaisons et de la charge du robot.

La commande $\tau(t)$ est composée d'un couple nominal τ^0 et d'un couple variationnel ou de perturbation $\delta\tau(t)$, c'est à dire $\tau(t) = \tau^0(t) + \delta\tau(t)$.

Le couple nominale est calculé à partir de l'approche de Newton-Euler, tandis que le couple variationnel, ayant comme objectif la régulation des perturbations autour de la trajectoire nominale, est dérivé à partir du schéma de commande développé dans la section précédente. Le modèle à perturbation du robot manipulateur obtenu par linéarisation de ce dernier autour des trajectoires nominales doit être disponible.

Le modèle à perturbation linéarisé est donné par:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\delta\tau(t) + d \quad (3.25)$$

où $x(t) \in R^{2N}$, l' $i^{\text{ème}}$ et l' $(i+N)^{\text{ème}}$ éléments du vecteur $x(t)$ sont respectivement les erreurs en position et en vitesse de la $i^{\text{ème}}$ articulation, d représente l'incertitude due aux paramètres et à la charge du robot.

Les matrices A , B et d sont données par:

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{O_N \quad I_N}^{2N} \\ A^* \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ N \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \overbrace{O_N}^N \\ B^* \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ N \end{matrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \overbrace{O}^1 \\ d^* \end{bmatrix} \begin{matrix} N \\ N \end{matrix} \quad (3.26)$$

avec:

$$A^* = \left. \frac{\partial [M^{-1}(q(t); l) \{ \tau(t) - h(q(t), \dot{q}(t); l) - c(q(t); l) \}]}{\partial \dot{q}(t)} \right|_0$$

$$B^* = M^{-1}(q^0(t); l^0)$$

$$d^* = \frac{\partial [M^{-1}(q(t); l) \{ \tau(t) - h(q(t), \dot{q}(t); l) - c(q(t); l) \}]}{\partial a} \Big|_0$$

A^* , B^* et d^* sont variables dans le temps, et dépendent de la trajectoire nominale, des paramètres du robot et de la charge. Ils sont considérés constants en utilisant des lois d'adaptation rapides [Choi 88].

Remarque 2

Si le robot manipulateur est de type cylindrique ou sphérique la matrice d'inertie $M(q^0(t); l^0)$ est diagonale [Choi 88][Paul 72].

Si la matrice d'inertie est diagonale, le modèle à perturbation donné en (3.25) peut être réécrit sous la forme de plusieurs sous-systèmes interconnectés définis par :

$$\dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N A_{ij} x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.27)$$

avec:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{ii}^* & a_{i,i+N}^* \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{ii}^* \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{bmatrix} 0 \\ d_i^* \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{ij}^* & a_{i,j+N}^* \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

a_{ij}^* et b_{ii}^* sont respectivement les éléments (i,j) et (i,i) des matrices A^* et B^* définies dans (3.26). $u_i(t)$ est le $i^{\text{ème}}$ élément du couple variationnel $\delta\tau(t)$ et $x_i(t)$ est composé du $i^{\text{ème}}$ et $(i+N)^{\text{ème}}$ élément de $x(t)$.

Les matrices A_m et B_m sont données sous la forme suivante:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \beta_{i1}^m & \beta_{i2}^m \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_{i3}^m \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.29)$$

Cette écriture sous la forme canonique de commande du sous-système interconnecté (3.27) et du modèle de référence (3.29), nous garantit la confirmation de la condition C1.

La solution des équations (3.13), nous donne les résultats suivants avec $\beta_{i3}^m \neq 0$:

$$F_i^* = \frac{1}{\beta_{i3}^m} \begin{bmatrix} a_{ii}^* - \beta_{i1}^m & a_{i,i+N}^* - \beta_{i2}^m \end{bmatrix} \quad (3.30.a)$$

$$G_i^* = \frac{b_{ii}^* - \beta_{i3}^m}{\beta_{i3}^m} \quad (3.30.b)$$

$$h_i^* = \frac{d_i^*}{\beta_{i3}^m} \quad (3.30.c)$$

Le fait qu'on ne connaît pas les éléments des matrices A_i et B_i une adaptation de F_i , G_i et h_i est nécessaire et indispensable pour parer aux incertitudes dues à la modélisation.

Remarque 3

La borne supérieure de $\|A_{ij}\|$ dépend de celle de a_{ij}^* et $a_{i,j+N}^*$. En effet, d'après (3.28) on a :

$$\|A_{ij}\| = (\lambda_M [A_{ij}^T \ A_{ij}])^{1/2} = [(a_{ij}^*)^2 + (a_{i,j+N}^*)^2]^{1/2}$$

Donc, on peut toujours estimer les éléments de la matrice A_{ij} de telle façon à vérifier la condition C2.

Le schéma bloc de la commande adaptative décentralisée à perturbation est illustré par la figure suivante :

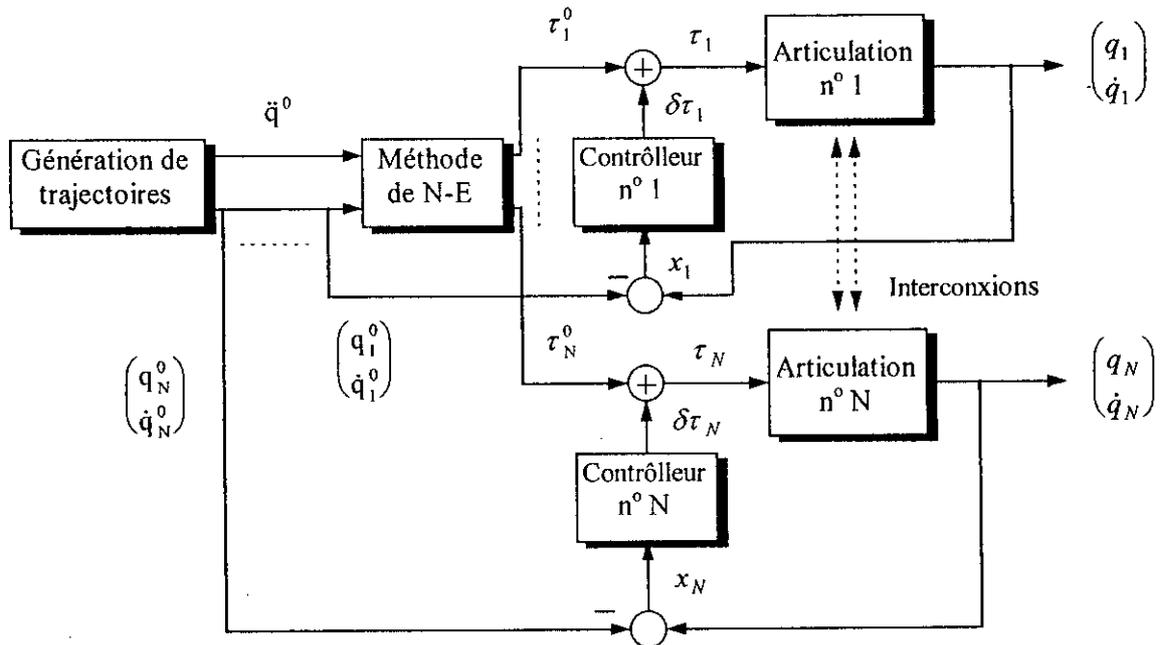


Fig. 3.2: Schéma bloc de la commande adaptative décentralisée à perturbation

3.4.1 Résultats de Simulation

Le robot manipulateur utilisé dans ce chapitre pour la simulation de la commande adaptative décentralisée à perturbation est celui développé au chapitre I. Les trajectoires de références (nominales) sont de type cycloïde (Chapitre 2). On présente en premier lieu la simulation de la commande dans le plan articulaire (plan des articulations), en second lieu, on présente la commande cartésienne (plan de la tâche).

Pour chaque sous-système, nous avons choisis :

$$A_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_{m_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q_i = 10I_2, \quad \alpha_i = 7, \quad i = 1,2$$

Les gains de la commande sont choisis, après plusieurs simulations, comme suit :

$$\Gamma_{1i} = 10, \quad \Gamma_{2i} = 1, \quad \Gamma_{3i} = 50, \quad i = 1,2$$

Les résultats de simulation de la commande sans variation paramétrique ni de charge sont illustrés aux figures Fig.3.3.a, Fig.3.3.b, Fig.3.3.c et Fig.3.3.d. Les erreurs de poursuite sont bornées dans $[-8E-5; 8E-5]$ pour la première articulation et dans $[-2E-5; 2E-5]$ pour la seconde.

Dans le cas où on applique une variation brusque de la charge à l'instant $t=5$ secondes les résultats de simulation sont donnés aux figures Fig.3.4.a, Fig.3.4.b, Fig.3.4.c et Fig.3.4.d. On constate que les couples variationnels se manifestent dans ce régime transitoire pour forcer les erreurs de poursuite à s'annuler.

Pour tester la robustesse de la commande à des variations paramétriques (Coefficients de frottement), ces derniers subissent une perturbation de 150% (Fig.3.5) et de 500% (Fig.3.6). Les résultats de simulation montrent l'insensibilité de la commande aux variations paramétriques.

Les résultats de simulation de la commande dans le plan opérationnel (X,Y) (plan de la tâche) sont consignés aux figures Fig.3.7 et Fig.3.8. Les trajectoires de références suivant les axes X et Y sont de type cycloïde pour assurer une trajectoire linéaire de élément terminale (Chapitre 2). Les figures Fig.3.7.a, Fig.3.7.b, Fig.3.7.c et Fig.3.7.d illustrent les résultats de simulation sans variation de charge. La simulation de l'introduction de cette dernière est schématisée aux figures Fig.3.8.a, Fig.3.8.b, Fig.3.8.c et Fig.3.8.d .

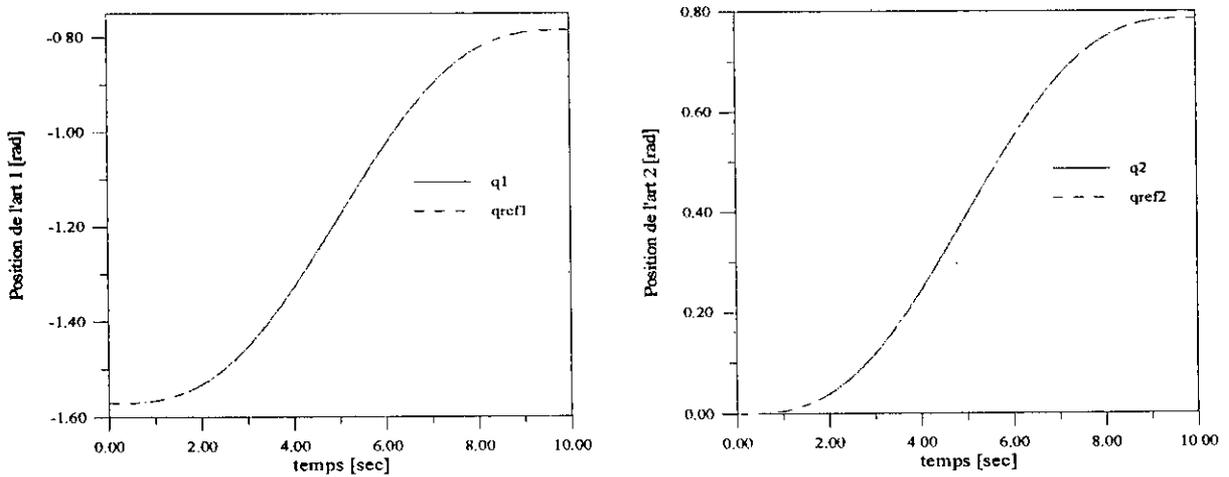


Fig.3.3.a: Présentation des positions réelles et désirées

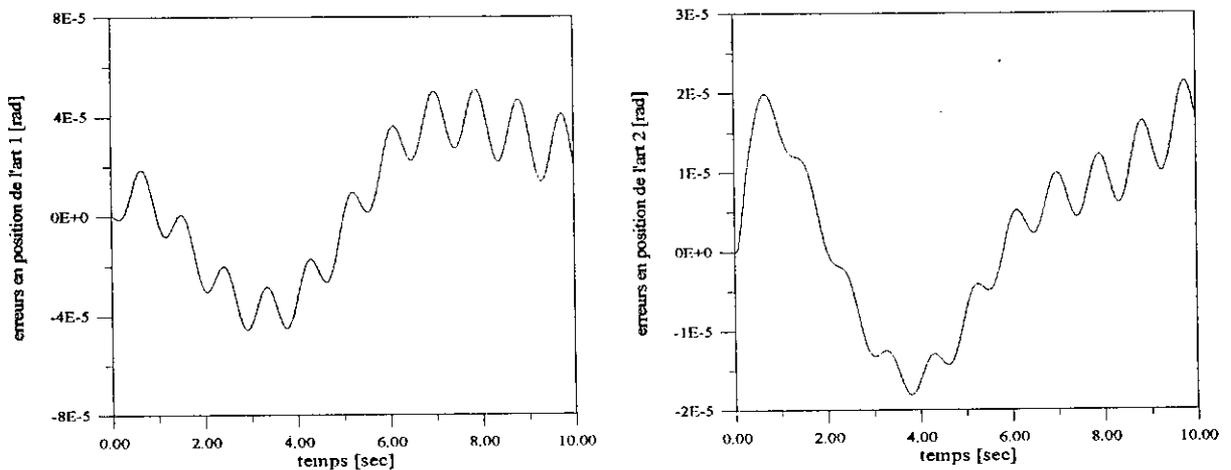


Fig.3.3.b: Présentation des erreurs en position

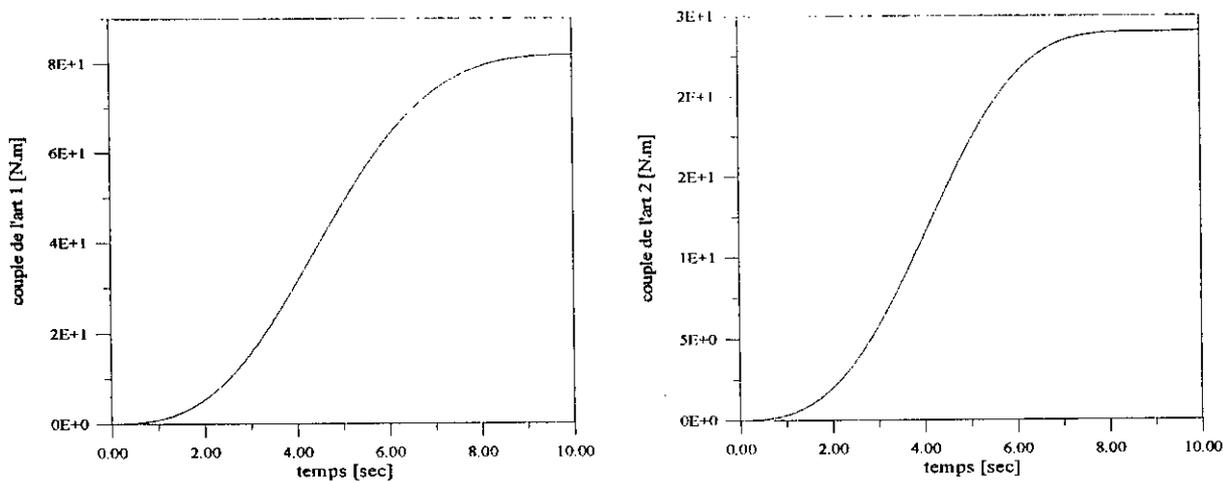


Fig.3.3.c: Présentation des couples des deux articulations

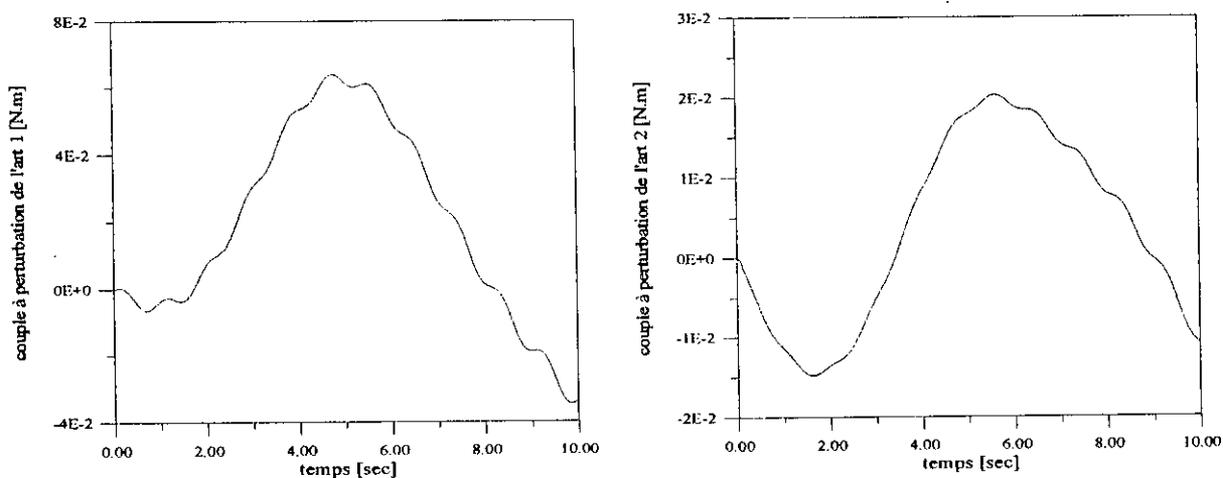


Fig.3.3.d: Présentation des couples variationnels δu_i

Fig.3.3: Résultats de simulation de la ADPC
Sans variation de charge

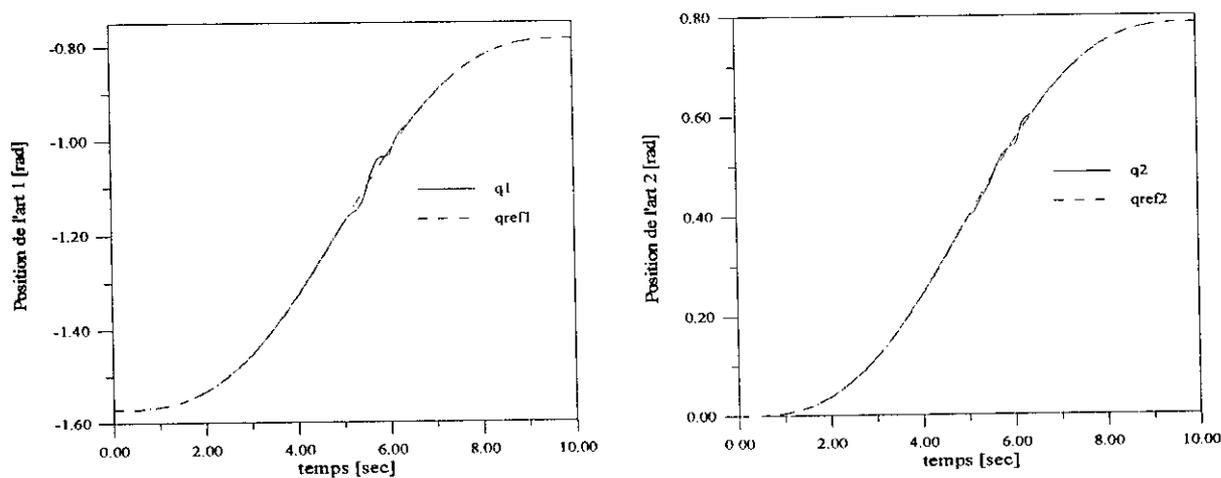


Fig.3.4.a: Présentation des positions réelles et désirées

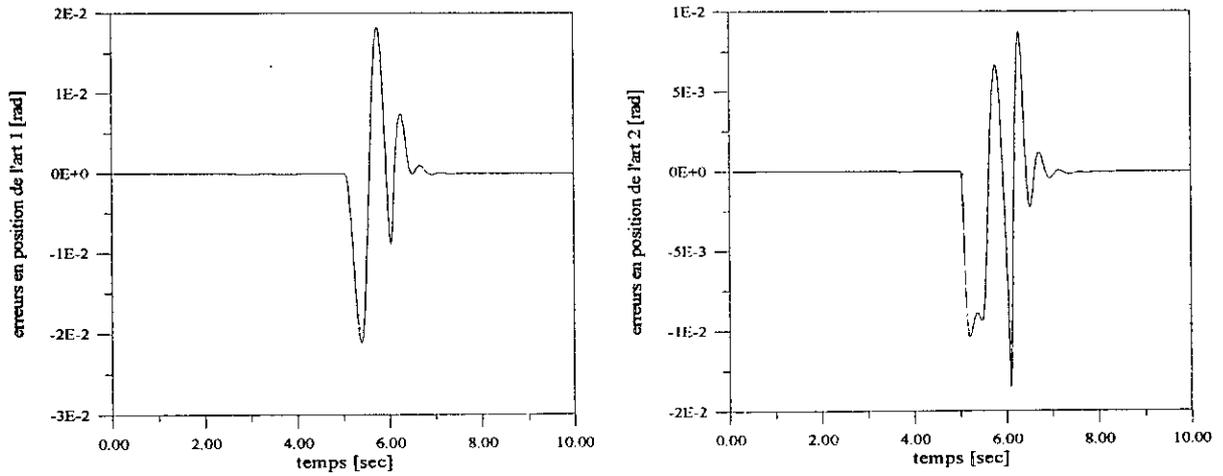


Fig.3.4.b: Présentation des erreurs en position

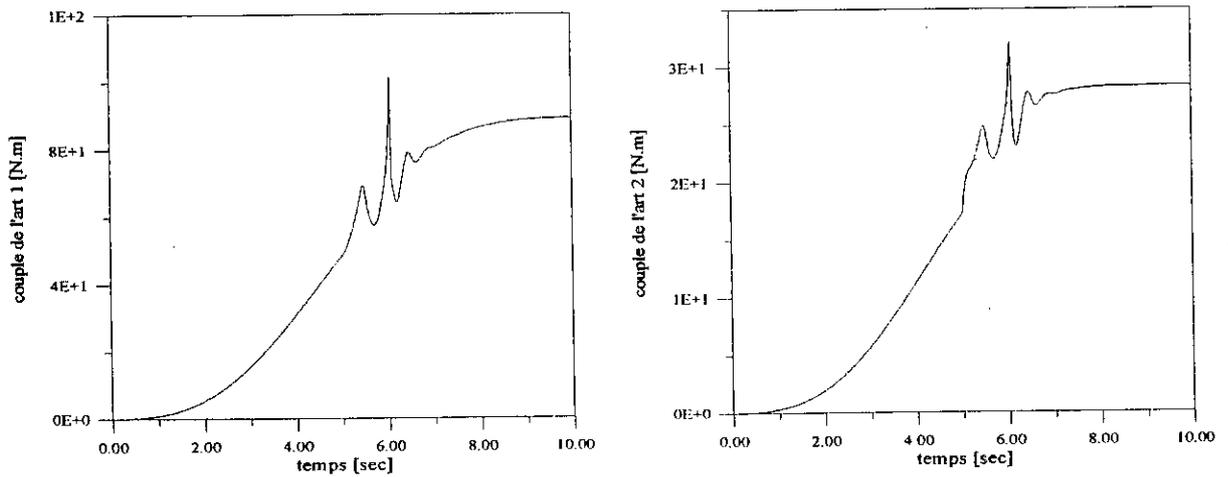


Fig.3.4.c: Présentation des couples des deux articulations

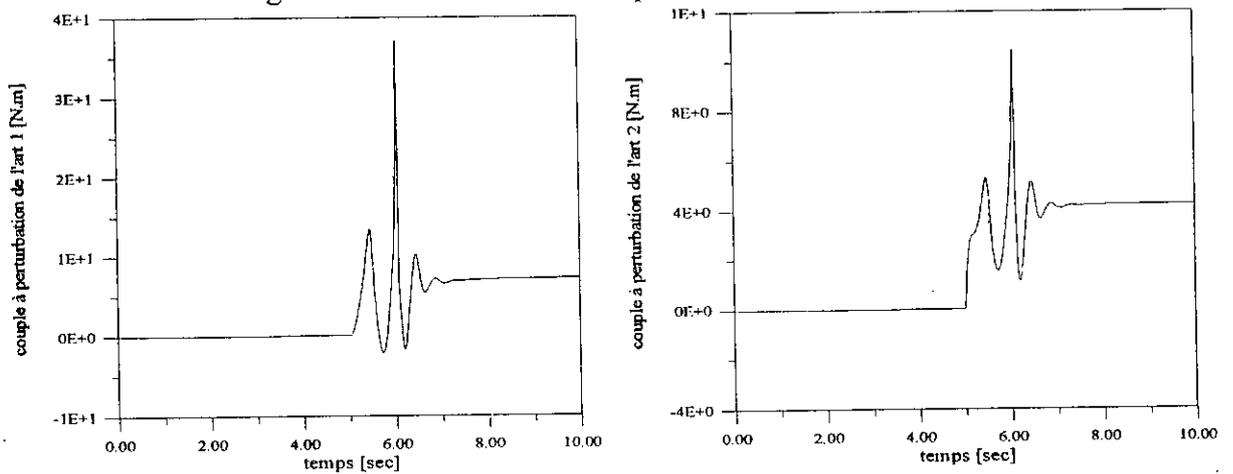


Fig.3.4.d: Présentation des couples variationnels δu_i

Fig.3.4: Résultats de simulation de la ADPC avec variation de charge à $t=5$ sec

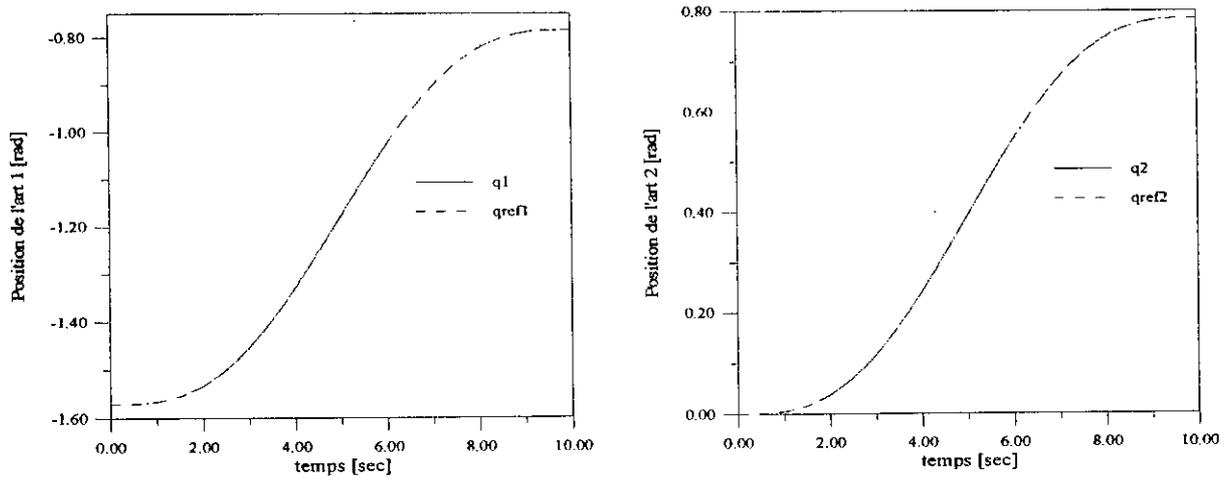


Fig.3.5.a: Présentation des positions réelles et désirées

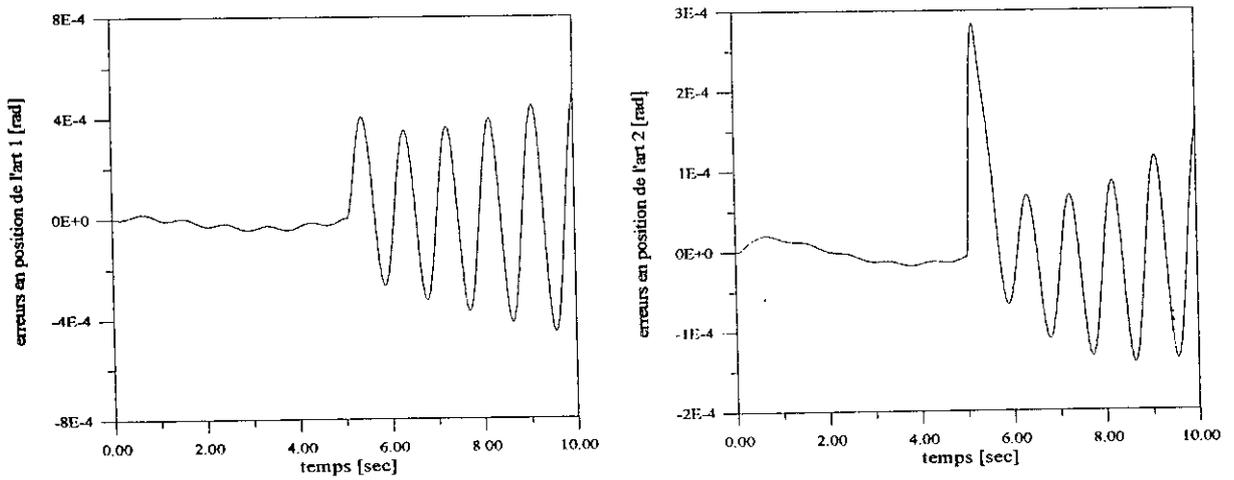


Fig 3.5.b: Présentation des erreurs en position

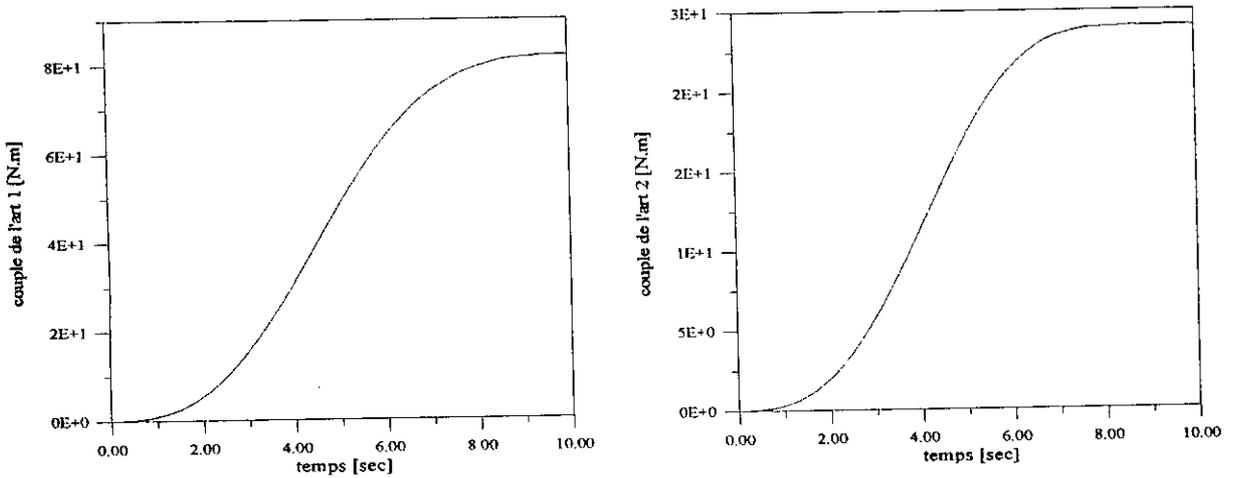


Fig.3.5.c: Présentation des couples des deux articulations

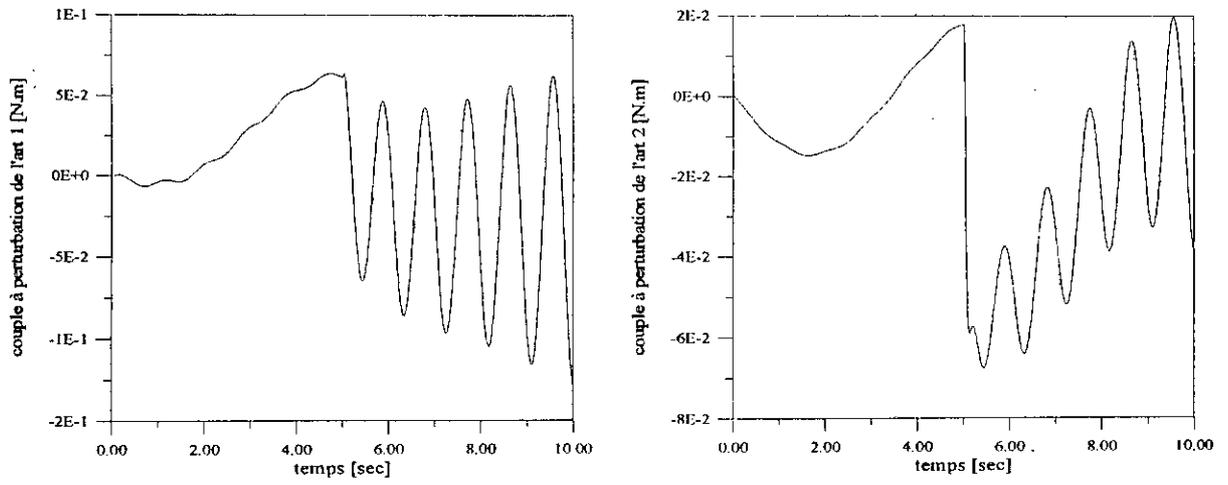


Fig.3.5.d: Présentation des couples variationnels δu_i

Fig.3.5: Résultats de simulation de la ADPC avec variation des coefficients de frottements de 150%

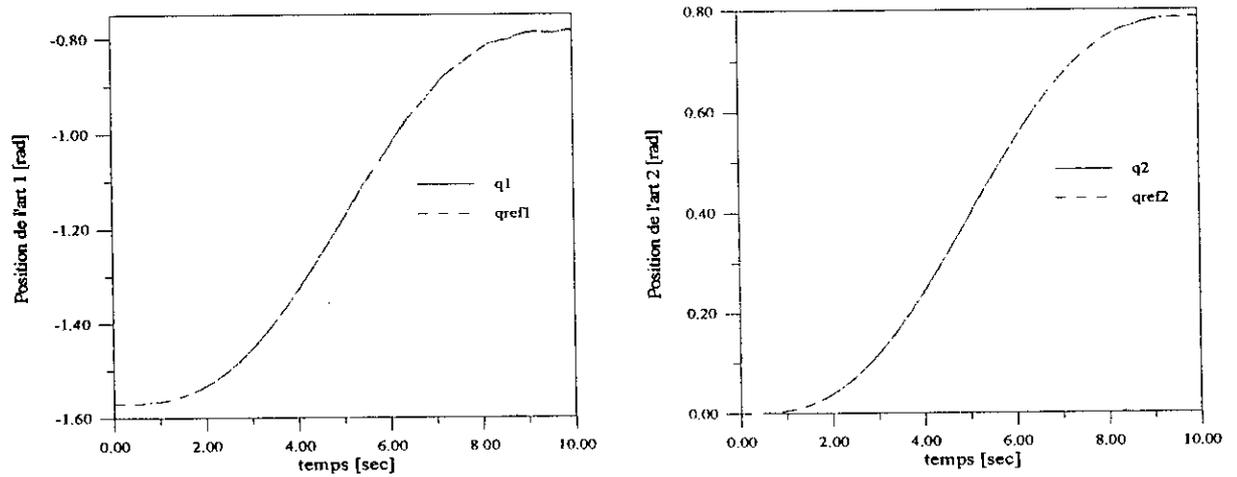


Fig.3.6.a: Présentation des positions réelles et désirées

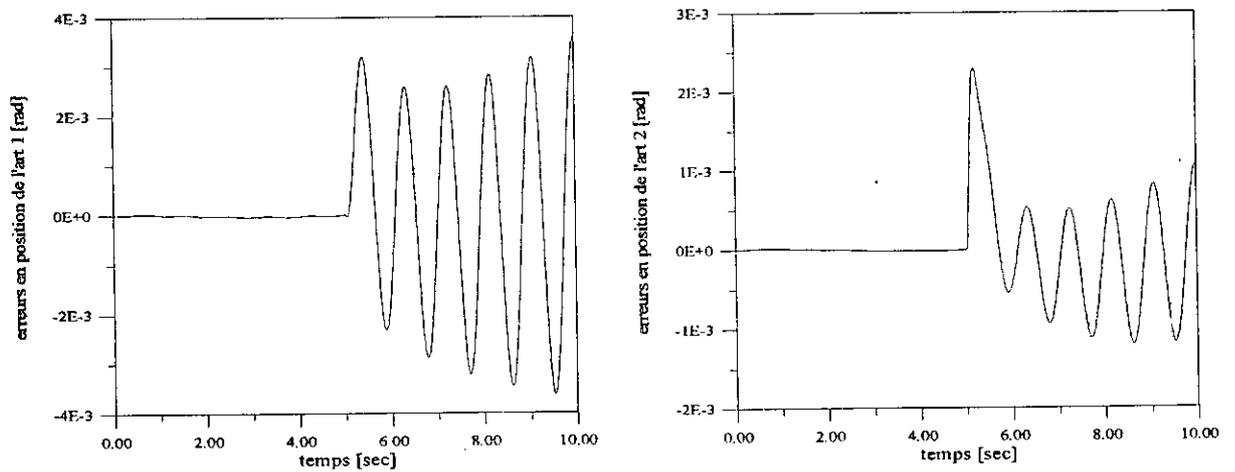


Fig.3.6.b: Présentation des erreurs en position

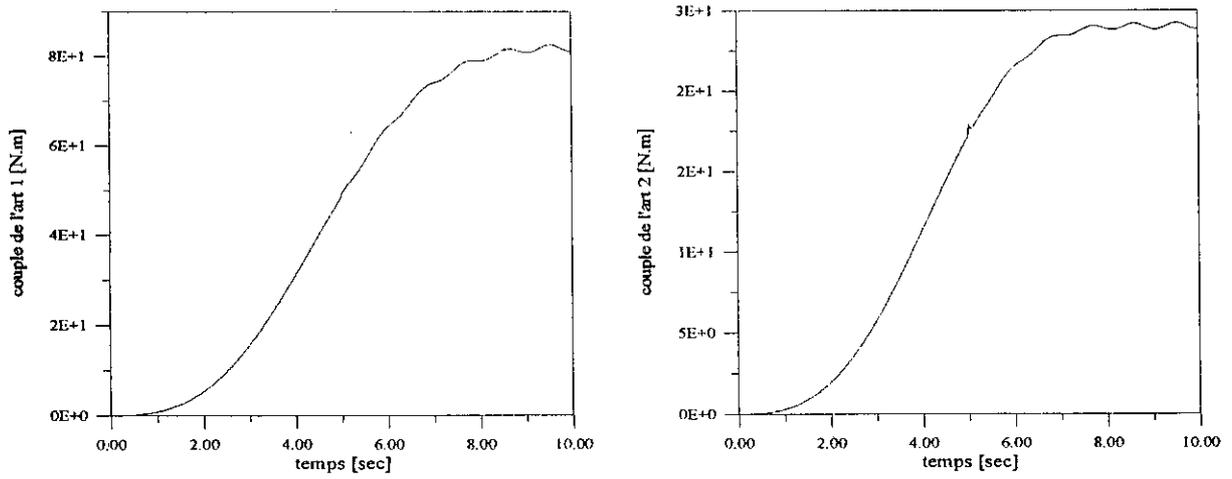


Fig.3.6.c: Présentation des couples des deux articulations

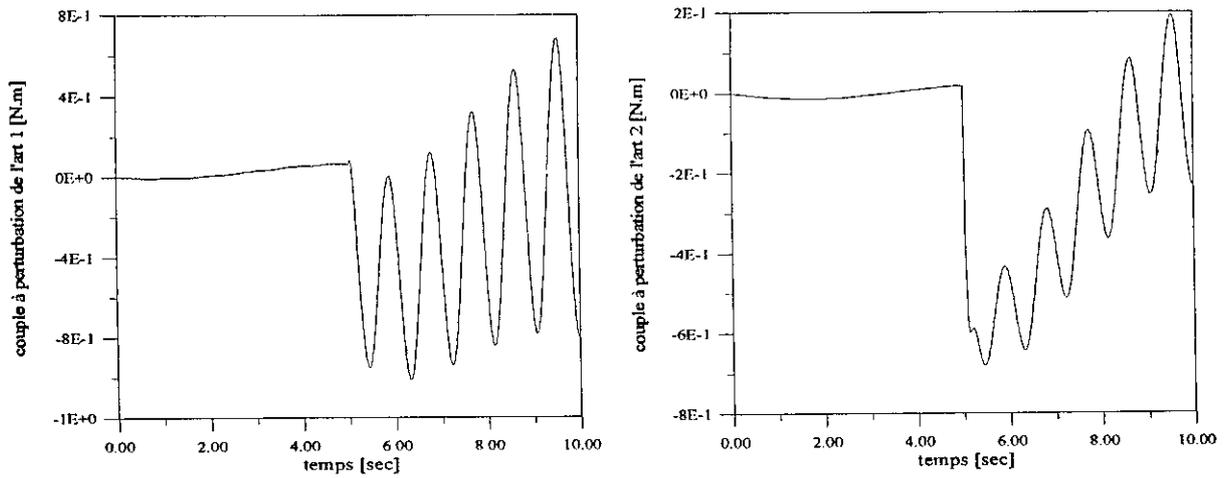


Fig.3.6.d: Présentation des couples variationnels δu_i

Fig.3.6: Résultats de simulation de la ADPC avec variation des coefficients de frottements de 500%

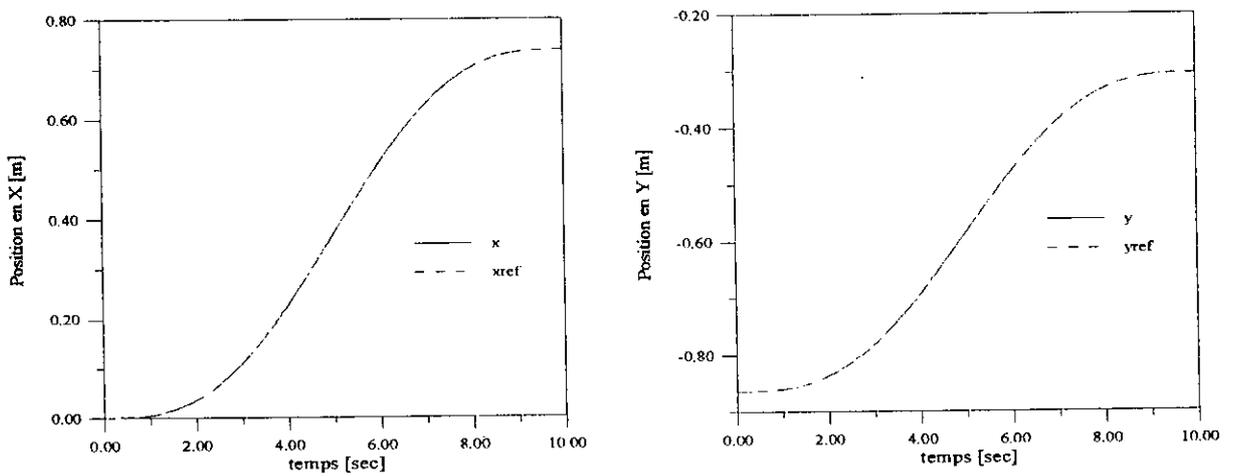


Fig.3.7.a: Présentation des positions opérationnelles réelles et désirées

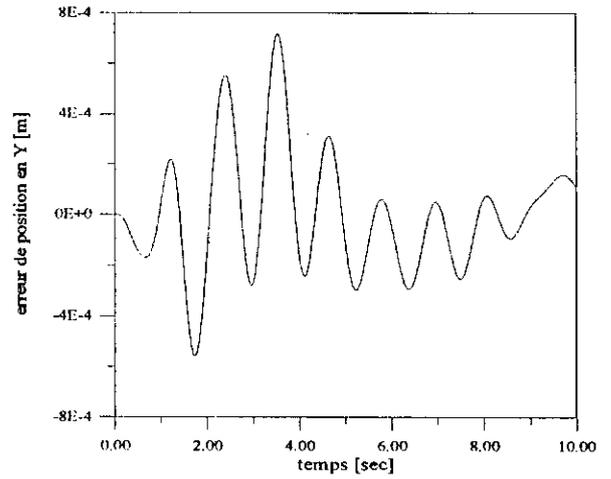
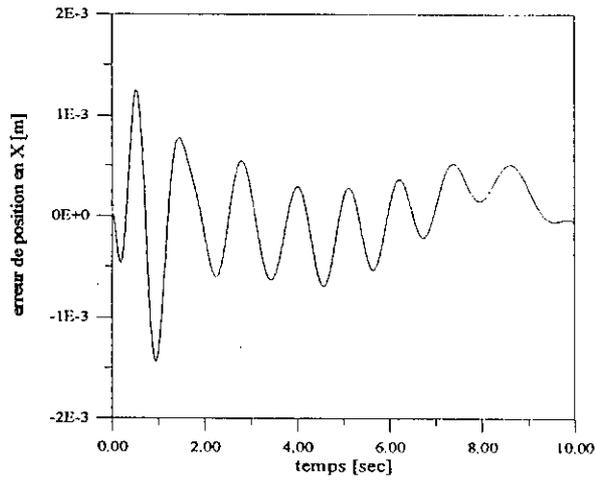


Fig.3.7.b: Présentation des erreurs en position

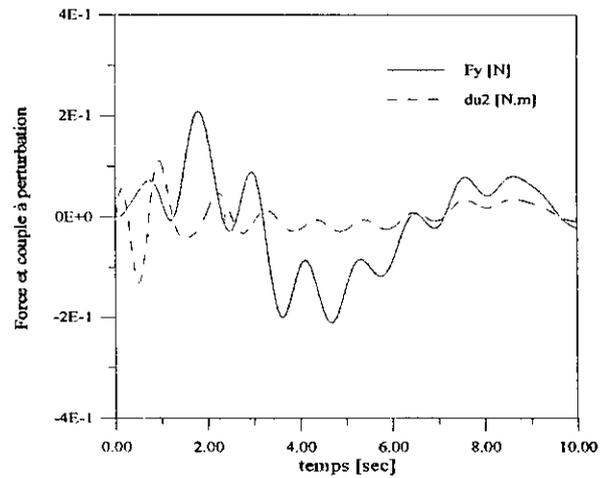
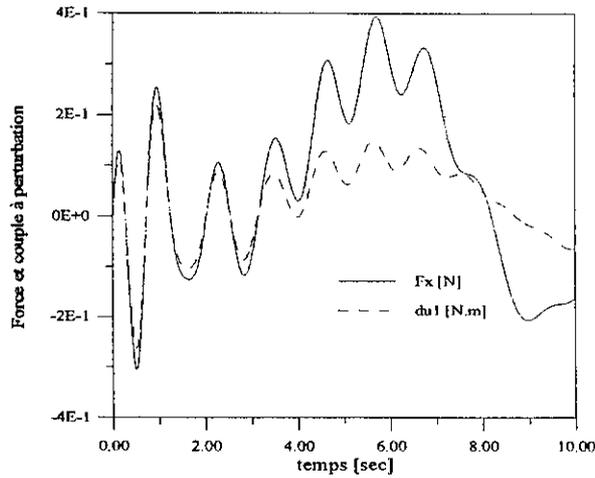


Fig.3.7.c: Présentation des couples et forces variationnels

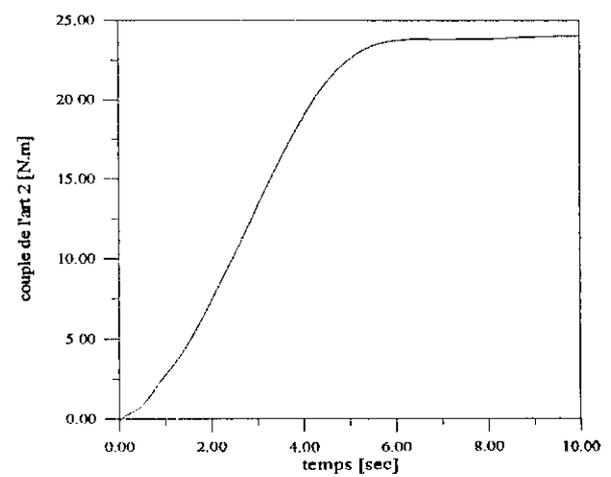
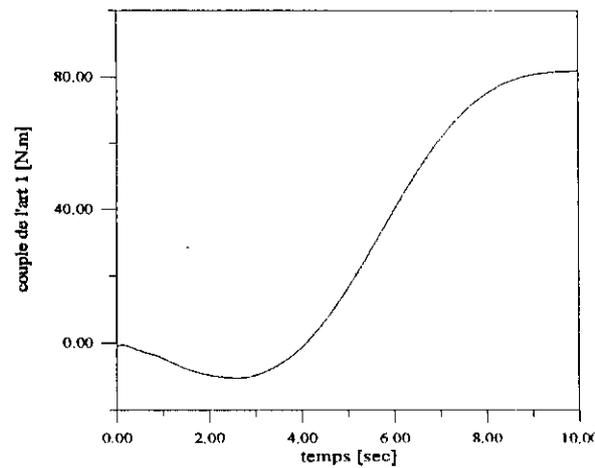


Fig.3.7.d: Présentation des couples des deux articulations

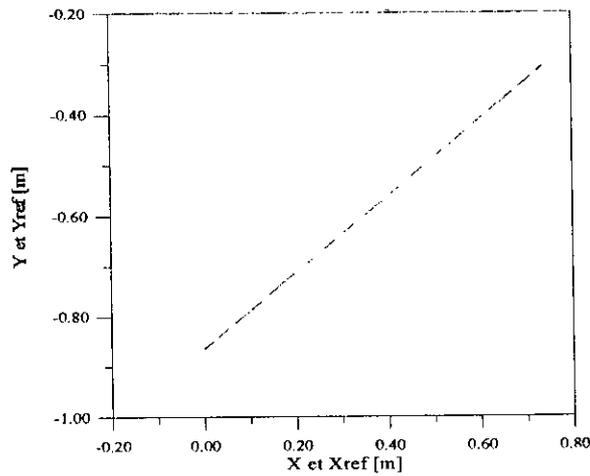


Fig.3.7.e: Présentation de la trajectoire réelle et désirée de élément terminal

Fig.3.7: Résultats de simulation de la ADPC cartésienne sans variation de charge

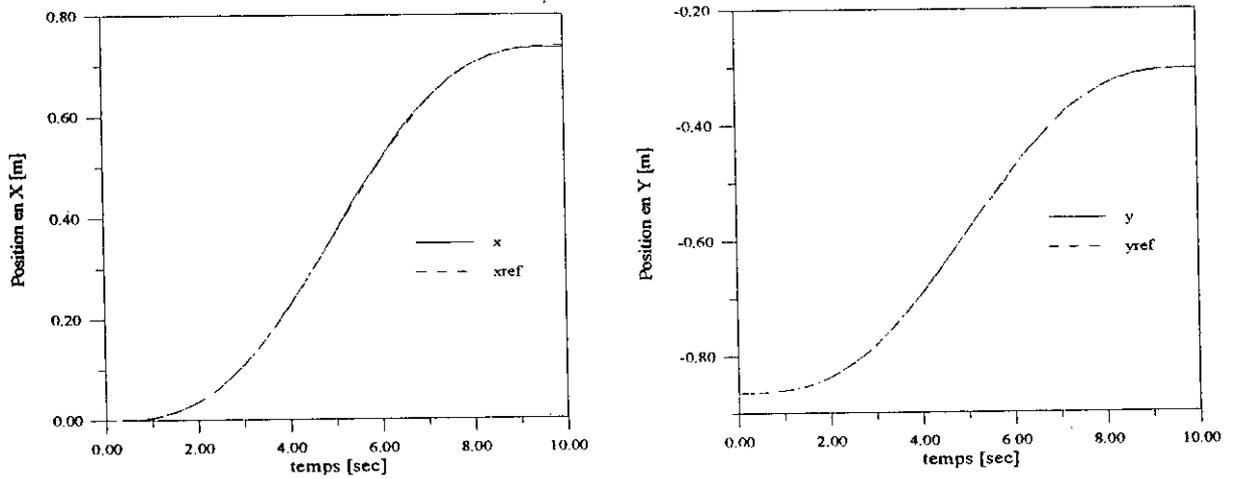


Fig.3.8.a: Présentation des positions opérationnelles réelles et désirées

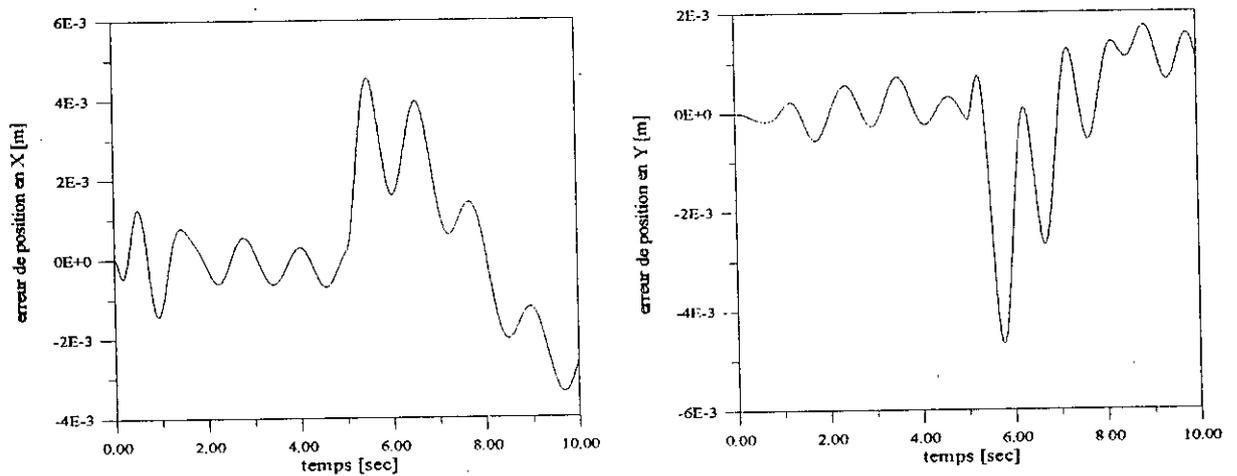


Fig.3.8.b: Présentation des erreurs en position

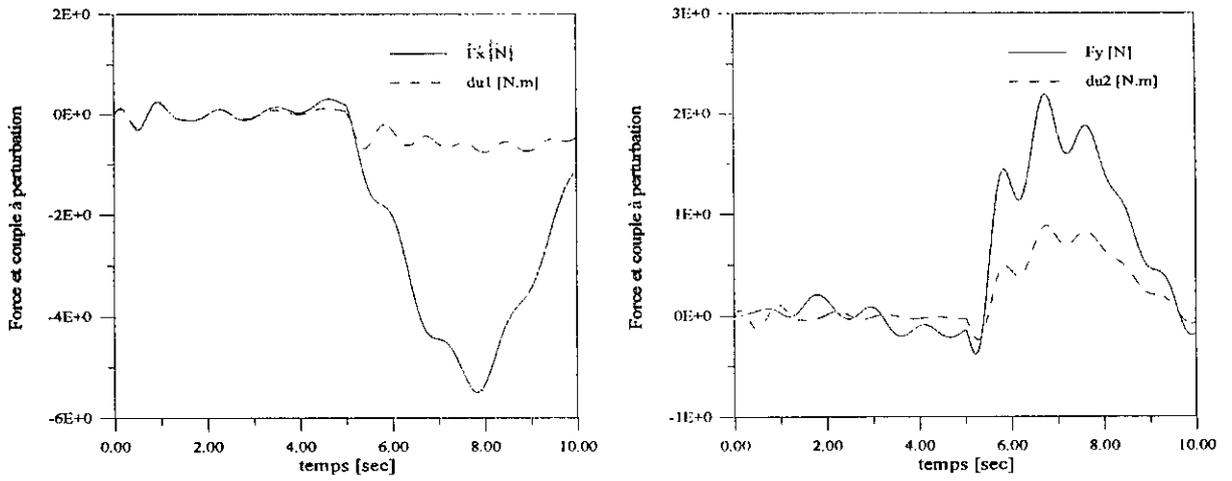


Fig.3.8.c: Présentation des couples et forces variationnels

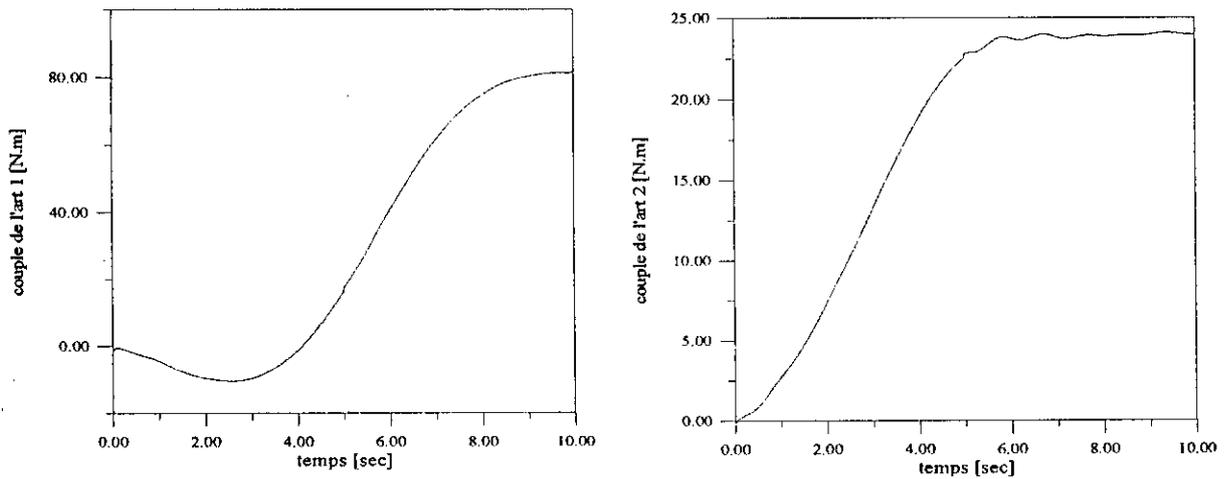


Fig.3.8.d: Présentation des couples des deux articulations

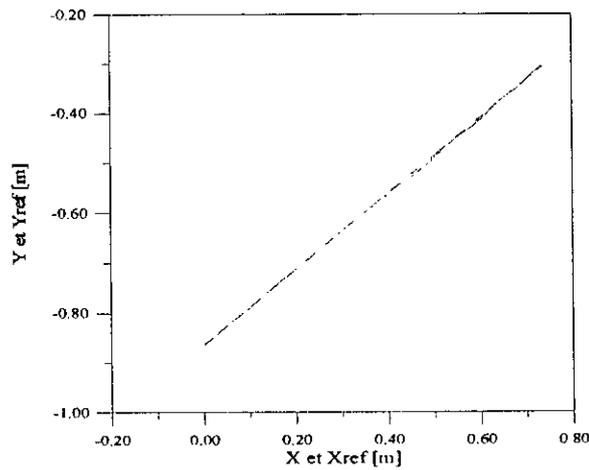


Fig.3.8.e: Présentation de la trajectoire réelle et désirée de élément terminal

Fig.3.8: Résultats de simulation de la ADPC cartésienne avec variation de charge à t=5 sec

3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressé à la commande adaptative décentralisée à perturbation (*DAPC*). Dans un premier temps, le modèle variationnel (à perturbation) du robot manipulateur a été présenté, puis on a présenté un algorithme de commande adaptatif décentralisé. L'application au robot manipulateur *PUMA* à 2 d.d.l. ainsi que les résultats de simulation sont aussi présentés. La commande "*DAPC*" n'est pas tout à fait décentralisée puisqu'elle est constituée de deux composante; l'une centralisée est synthétisée à partir du formalisme de *Newton-Euler* et l'autre décentralisée.

L'approche de *Newton-Euler* peut être considéré comme un modèle inverse du robot manipulateur. Ce modèle inverse est utilisé comme une commande directe "*feedforward controller*" pour générer les couples nominaux qui assurent la poursuite des trajectoires de références. La sensibilité de la commande aux variations paramétriques ou de charge est surmontée par l'utilisation d'une autre commande additive dans la chaîne de retour "*feedback controller*". Cette dernière à structure décentralisée et synthétisée à partir d'un modèle à perturbation du robot manipulateur assure la régulation des états du modèle (les écarts en position et vitesse) vers zéro.

Les résultats obtenus montrent la capacité de maintenir la poursuite des trajectoires et cela en présence des perturbations dues à des variations de charge ou paramétriques.

Le temps de calcul de la commande est estimé important, cela est dû à l'algorithme de N-E et au nombre de gains à ajuster ($4n$) à chaque instant d'échantillonnage. Pour atténuer ce volume de temps de façon considérable les couples nominaux générés par l'approche de N-E sont calculés hors-line via un autre processeur de calcul.

Chapitre 4

Commande Adaptative Décentralisée des Systèmes Faiblement Interconnectés

4.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents nous nous sommes intéressés aux types de commandes adaptatives à structure décentralisée développées autour du modèle dynamique d'un robot manipulateur à n degré de liberté (d.l.l). En effet, au deuxième chapitre, nous avons modélisé les différentes liaisons du robot sous formes de sous-systèmes interconnectés où nous avons négligé les variations des termes de couplage non linéaire afin de synthétiser la loi de commande. Au troisième chapitre, une commande a été élaborée à partir des équations de *Newton-Euler* et du modèle à perturbation du robot manipulateur.

Dans le présent chapitre nous sommes intéressés à la commande adaptative décentralisée des systèmes interconnectés particulièrement les systèmes faiblement interconnectés. Les travaux de base concernant la commande des systèmes interconnectés et complexes (*LSIS: Large Scale Interconnected Systems*) sont celles de GAVEL et SILJAK [Gavel 85], [Gavel 89]. Des Conditions sur la structure et le module "la taille" des interconnexions sont imposées ce qui restreint le domaine de l'application de ces techniques. SHI et SINGH [Shi 90] suggèrent des versions modifiées des algorithmes de GAVEL et SILJAK en présentant des contrôleurs adaptatifs synthétisés et fondés sur des fonctions de Lyapunov bien spécifiées. Il s'agit d'améliorer les performances des systèmes de commande en introduisant des signaux auxiliaires générés par le mécanisme d'adaptation. La commande des systèmes dont les interconnexions sont, soit de dynamique négligeable (*STVI: Slowly Time-Varing Interconnections*), ou de dynamique rapide (*RTVI: Rapidly Time-Varing Interconnections*) est exposée dans [Shi 90].

On note que le contrôleur adaptatif décentralisé à modèle de référence développée au chapitre 2 n'est qu'un cas particulier de la commande des systèmes avec des "STVI". Dans [Benchoubane 92] BENCHOUBANE et STOTEN proposent l'algorithme "DMCS" (*Decentralized Minimal Controller Synthesis*) similaire à l'algorithme centralisé "MCS" [Genfai 95]. Ce dernier ne nécessite qu'un minimum d'information à savoir le degré du système. La démonstration de la stabilité de cet algorithme se fait par le théorème de l'hyperstabilité de POPOV [Landau 79].

Dans la deuxième section de ce chapitre nous décrivons les systèmes faiblement interconnectés, ainsi que les hypothèses faites sur ces derniers. Dans la section suivante sont présentés les différents algorithmes adaptatifs et décentralisés de même que les résultats de leurs simulation. Le développement de la version décentralisée du "MCS" avec les résultats de simulation sont présentés dans la dernière section. Nous terminerons par une conclusion en montrant les limites de ces techniques.

4.2 DESCRIPTION DU SYSTEME ET HYPOTHESES

Dans cette étude on a opté pour la notation donnée dans [Gavel 89]. Un système complexe S est composé par l'interaction de N sous-systèmes interconnectés S_i définis par:

$$\dot{x} = A_i x_i + b_i u_i + b_i z_i(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

où:

$z_i(t, x)$ est une fonction modélisant les interactions du sous-système S_i avec les sous-systèmes S_j ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, N$).

Les paramètres des matrices A_i et b_i sont inconnus mais supposés bornés. On note que les interactions vérifient certaines conditions de structure "Matching property". Ces conditions sont déterminantes pour assurer la stabilité du système de commande.

Dans les travaux concernant la commande des systèmes faiblement interconnectés, on trouve plusieurs suppositions, ces derniers sont regroupées dans les points suivants:

A1: Le module des fonctions d'interaction $z_i(t, x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) est borné, c'est à dire:

$$\|z_i(t, x)\| \leq \beta \quad (4.2)$$

A2: Dans la plupart des cas, on suppose que les interactions sont bornés par un polynôme d'état linéaire, c'est à dire, il existe des coefficients strictement positifs ξ_{ij} tels que:

$$\|z_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^N \xi_{ij} \|x_j\| \quad (4.3)$$

A3: Une troisième supposition utilisée dans la commande des systèmes interconnectés est que la dynamique des interactions est négligeable:

$$|\dot{z}_i(t, x)| \approx 0 \quad (4.4)$$

La validation d'une supposition par rapport à une autre dépend du système à commander lui même.

L'objectif de la commande est d'assurer la poursuite d'un modèle de référence choisi stable et défini par les équations suivantes:

$$\dot{x}_{m_i} = A_{m_i} x_{m_i} + b_{m_i} r_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

La matrice A_{m_i} est stable, cela dit, on prouve facilement [Landau 79] qu'il existe pour toute matrice définie positive Q_i une et une seule matrice définie positive P_i tel que:

$$A_{m_i}^T P_i + P_i A_{m_i} = -Q_i \quad (4.6)$$

L'erreur de poursuite est définie comme étant l'écart entre les état du sous-système et celles du modèle de référence:

$$e_i(t) = x_i(t) - x_{m_i}(t)$$

La dérivé de l'erreur donne:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_{m_i}(t) = A_i x_i + b_i u_i + b_i z_i(t, x) - A_{m_i} x_{m_i} - b_{m_i} r_i \quad (4.7)$$

Si on suppose que les paires (A_i, b_i) et (A_m, b_m) sont (ou peuvent être mises) sous la forme canonique de commande on vérifie facilement l'existence d'un vecteur constant k_i^* et d'un scalaire k_{0i}^* qui satisfont les équations suivantes:

$$A_m = A_i + b_i k_i^* \quad ; \quad b_m = b_i k_{0i}^* \quad (4.8)$$

Ces paramètres de synthèse sont inconnus puisqu'on a supposé que A_i et b_i sont aussi inconnus. Néanmoins, on suppose que le signe de b_i est connu et sans perdre de généralité on présume que $k_{0i}^* > 0$.

4.3 COMMANDE ADAPTATIVE DECENTRALISEE

Cette section concerne le développement des algorithmes qui s'adressent aux systèmes faiblement interconnectés. La méthode choisie pour la synthèse et l'étude de la stabilité est la seconde méthode de Lyapunov.

La structure générale de la commande est linéaire par rapport au états des sous-systèmes:

$$u_i(t) = \mathcal{G}_i^T v_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.9)$$

où: $\mathcal{G}_i^T = (k_i^T, k_{0i}^T)^T$ est le vecteur des gains variables de la commande. Ces gains sont les estimés des vecteurs k_i^* et k_{0i}^* (l'estimation se fait de façon implicite).

v_i est le vecteur de régression donné soit par : $v_i = (e_i, r_i)$ ou par $v_i = (x_i, r_i)$ selon la nature de la dynamique des interconnexions.

4.3.1 Interconnexions à dynamique négligeable (Slowly Time-Varing Interconnections: STVI)

En présence des interactions inconnues et des incertitudes de modélisation et pour compenser ces derniers, des signaux auxiliaires $f_i(t)$ viennent compléter la loi de commande (4.9):

$$u_i(t) = \mathcal{G}_i^T v_i + f_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

où: $v_i = (x_i, r_i)$.

Le théorème suivant a été donné par Shi & Singh dans [Shi 90]

Théorème 1

Pour les sous-systèmes donnés par (4.1) dont les interactions satisfont la propriété (4.4), on choisit les lois d'adaptation suivantes:

$$\dot{\mathcal{G}}_i = \dot{\phi}_i = \dot{\phi}_i^* - \Gamma_i (b_m^T P_i e_i) v_i \quad (4.11)$$

où :

$$\begin{aligned} \phi_i^* &= -\Pi_i (b_m^T P_i e_i) v_i \\ \phi_i &= \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_i^* \quad ; \quad \mathcal{G}_i^* = (k_i^{*T}, k_{0i}^{*T})^T \\ \dot{f}_i(t) &= \dot{f}_i^*(t) - \alpha_i (b_m^T P_i e_i) \\ f_i^*(t) &= -\pi_i (b_m^T P_i e_i) \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec P_i est une matrice définie positive donnée par l'équation (4.6), π_i et α_i sont des constantes positives, Γ_i et Π_i sont des matrices définies positives de dimensions convenables. Donc, le sous-système (4.1) poursuit le modèle de référence (4.5) avec une erreur de poursuite qui tend asymptotiquement vers zéro.

Démonstration :

En partant des équations (4.7) et (4.10), on réécrit l'équation dynamique de l'erreur sous la forme suivante:

$$\dot{e}_i(t) = A_{m_i} e_i + b_i \left[\dot{\phi}_i^T v_i + z_i(t, x) + f_i(t) \right] \quad (4.13)$$

On considère la fonction de Lyapunov scalaire suivante: [Shi 90]

$$V(e, \phi, f) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* e_i^T P_i e_i + (\phi_i - \phi_i^*)^T \Gamma_i^{-1} (\phi_i - \phi_i^*) + \alpha_i^{-1} (f_i + z_i - f_i^*)^2 \right\} \quad (4.14)$$

1. Il est clair que $V(e, \phi, f) \geq 0$.
2. La dérivé de (4.14) par rapport aux solutions de (4.13) donne:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \phi, f) &= \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \dot{e}_i^T P_i e_i + k_{0i}^* e_i^T P_i \dot{e}_i + 2\alpha_i^{-1} (f_i + z_i - f_i^*) (f_i - f_i^*) \right. \\ &\quad \left. + (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i^*)^T \Gamma_i^{-1} (\phi_i - \phi_i^*) + (\phi_i - \phi_i^*)^T \Gamma_i^{-1} (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i^*) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* e_i^T Q_i e_i + 2(f_i + z_i) \left[\alpha_i^{-1} (\dot{f}_i - \dot{f}_i^*) + b_{m_i}^T P_i e_i \right] - 2\alpha_i^{-1} f_i^* (\dot{f}_i - \dot{f}_i^*) \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{\phi}_i^T \left[b_{m_i}^T P_i e_i v_i + \Gamma_i^{-1} (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i^*) \right] - 2\dot{\phi}_i^* \Gamma_i^{-1} (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i^*) \right\} \quad (4.15) \end{aligned}$$

En annulant les termes entre crochets, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha_i^{-1} (\dot{f}_i - \dot{f}_i^*) + b_{m_i}^T P_i e_i &= 0 \\ b_{m_i}^T P_i e_i v_i + \Gamma_i^{-1} (\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i^*) &= 0 \end{aligned}$$

Si on choisit : $\dot{\phi}_i^* = -\Pi_i (b_{m_i}^T P_i e_i) v_i$ et $\dot{f}_i^* = -\pi_i b_{m_i}^T P_i e_i$, l'équation (4.15) devient:

$$\dot{V}(e, \phi, f) = \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* e_i^T Q_i e_i - 2\pi_i \|b_{m_i}^T P_i e_i\|^2 - 2\Pi_i \|b_{m_i}^T P_i e_i v_i\|^2 \right\} \leq 0$$

On conclut donc que l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro.

Remarque 1

La loi d'adaptation du signal auxiliaire ou du vecteur paramétrique dépend de l'accélération du signal d'entrée du modèle de référence, cela est similaire au cas de la commande adaptative décentralisée à modèle de référence développée au chapitre 2. En effet, cette dernière est synthétisée en se basant sur l'hypothèse que la variation des termes de couplage est nulle, ce qui est le cas dans cette section, et elle est composée d'un contrôleur «*feedforward*» de type PD2 (position-vitesse-accélération).

Ce théorème n'est valide que si la propriété (4.4) est vérifiée. Le cas où les interconnexions varient rapidement dans le temps sera traité dans la section suivante.

4.3.2 Interconnexions à dynamique rapide (Rapidly Time-Varying Interconnections: RTVI)

4.3.2.1 Commande sans signal auxiliaire

Contrairement au schéma de commande précédant, cette partie traite les systèmes interconnectés dont les interactions sont à dynamique variable, et qui vérifient la propriété (4.2), c'est à dire:

$$\|z_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^N \xi_{ij} \|x_j\| \quad (4.16)$$

avec ξ_{ij} sont des constantes strictement positives.

Le lemme suivant donne une condition suffisante pour la stabilité de tels systèmes.

Lemme: [Gavel 89]

Etant donné l'équation dynamique des erreurs (4.7) et la loi de commande décentralisée suivante:

$$u_i(t) = \mathcal{G}_i^T v_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

v_i est le vecteur de régression défini par: $v_i(t) = (e_i^T, r_i)$, et en choisissant la loi d'adaptation du vecteur paramétrique \mathcal{G}_i comme suit:

$$\dot{\mathcal{G}}_i(t) = -\Gamma_i (b_m^T P_i e_i) v_i - \sigma \Gamma_i \mathcal{G}_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.17)$$

avec σ est le paramètre de la méthode dite « σ -Modification » utilisée pour améliorer la robustesse du système globale. On obtient le système en boucle fermée suivant:

$$\begin{aligned} \dot{e}_i(t) &= A_m e_i + b_i \left[\phi_i v_i - k_i^{*T} x_m + z_i(t, x) \right] \\ \dot{\phi}_i(t) &= -\sigma \Gamma_i (\phi_i + \mathcal{G}_i^*) - \Gamma_i (b_m^T P_i e_i) v_i \end{aligned} \quad (4.18)$$

les solutions $(e_i, \phi_i)(t; t_0, e_0, \phi_0)$ des équations (4.18) sont globalement bornées.

Démonstration:

On considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(e, \phi) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* e_i^T P_i e_i + (\phi_i + \rho \tilde{\mathcal{G}}_i)^T \Gamma_i^{-1} (\phi_i + \rho \tilde{\mathcal{G}}_i) \right\} \quad (4.19)$$

où $\tilde{\mathcal{G}}_i = (b_m^T P_i e_i, 0)^T$ et ρ est un paramètre strictement positif.

1. Il est clair que $V(e, \phi) \geq 0$.
2. La dérivée de (4.19) par rapport au solutions de (4.18) peut être bornée comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \phi) &\leq -\zeta \|e\|^2 - \sigma \|\phi + \rho \tilde{\mathcal{G}}\|^2 + \eta \\ &\leq -\mu V(e, \phi) + \eta \end{aligned} \quad (4.20)$$

où le paramètre μ est borné par l'inégalité suivante:

$$\mu \leq \min\{\lambda_{\max}(P)\zeta, \lambda_{\max}(\Gamma)\sigma\} \quad (4.21)$$

$\lambda_{\max}(P)$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice P , et:

$$\Gamma = \text{diag}[\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \quad \cdots \quad \Gamma_N], \quad P = \text{diag}[P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_N]$$

ζ et η sont donnés par les équations suivantes:

$$\zeta = \lambda_{\min}(Q) - \rho^{-1} \left\{ \max_{i,j \in N} [\xi_{ij}] \right\} \quad (4.22)$$

$$\eta = \rho^{-1} \sup_t \left\{ \|x_m(t)\|^2 \right\} \left\{ \|K^*\| + \max_{i,j \in N} [\xi_{ij}] \right\}^2 + \sigma \|\mathcal{G}^* - \rho \tilde{\mathcal{G}}\|^2 \quad (4.23)$$

K^* et Q sont données par:

$$K^* = \text{diag}[k_1^{*T} \quad k_2^{*T} \quad \cdots \quad k_N^{*T}], \quad Q = \text{diag}[Q_1 \quad Q_2 \quad \cdots \quad Q_N].$$

Si le paramètre ρ est choisit suffisamment large pour assurer la positivité de ζ , alors les solutions (e, ϕ) de (4.18) sont globalement bornées avec $V_f = V_{t \rightarrow +\infty} = \mu^{-1} \eta$.

Pour plus de détails concernant la démonstration précédente, on oriente le lecteur vers [Gavel 89] et l'annexe B.

Remarque 2

Nous n'avons pas besoin de choisir ρ suffisamment large pour assurer que ζ est positif puisqu'il n'intervient pas explicitement dans la loi de commande. Néanmoins, les seuls paramètres qui influent directement sur la stabilité du système sont σ et Γ . Il est facile à démontrer [Gavel 89] qu'en démunissant σ et en augmentant la valeur de Γ , on obtient une erreur de poursuite de plus en plus petite. Le seul inconvénient de cette méthode est le fait qu'en augmentant les gains de la commande, un comportement oscillatoire apparaît.

4.3.2.2 Commande avec signal auxiliaire

la rapidité de convergence de l'algorithme peut être évalué par le rapport $\kappa = -\frac{\dot{V}(e, \phi)}{V(e, \phi)}$.

Il est donc évident que si on trouve une autre fonction de Lyapunov avec un rapport plus petit que le précédent, on conclut que cette dernière assure une meilleure stabilité du système. Cela, peut être obtenu en introduisant un signal auxiliaire à la loi de commande (4.9).

Le théorème suivant a été énoncé dans [Shi 90]

Théorème 2:

Si on choisit la loi de commande suivante:

$$u_i(t) = \mathcal{G}_i^T v_i + f_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.24)$$

avec $v_i = (e_i^T, r_i)$

et les lois d'adaptation locales données par (4.17) et:

$$\dot{f}_i(t) = \dot{f}_i^*(t) - \alpha_i (b_m^T P_i e_i) - \alpha_i \sigma (f_i - f_i^*) \quad (4.25)$$

où : $f_i^*(t) = -\pi_i (b_m^T P_i e_i)$ et α_i, π_i sont des constantes positives, le système en boucle fermée devient donc :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_i(t) &= A_{m_i} e_i + b_i \left[\phi_i v_i - k_i^{*T} x_{m_i} + z_i(t, x) \right] \\
\dot{\phi}_i(t) &= -\sigma \Gamma_i (\phi_i + \mathfrak{g}_i^*) - \Gamma_i (b_{m_i}^T P_i e_i) v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \\
\dot{f}_i(t) &= \dot{f}_i^*(t) - \alpha_i (b_{m_i}^T P_i e_i) - \alpha_i \sigma (f_i - f_i^*)
\end{aligned} \quad (4.26)$$

Les solutions $(e, \phi, f)(t; t_0, e_0, \phi_0, f_0)$ du système en boucle fermée sont globalement bornées. La réponse du système est plus rapide que celle obtenue par les équations (4.18). La borne inférieure de la région de stabilité est inférieure ou égale à la limite précédente $V_f = \mu^{-1} \eta$.

Démonstration:

On considère la fonction de Lyapunov suivante:

$$\begin{aligned}
\bar{V}(e, \phi, f) &= \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0_i}^* e_i^T P_i e_i + (\phi_i + \rho \tilde{\mathfrak{g}}_i)^T \Gamma_i^{-1} (\phi_i + \rho \tilde{\mathfrak{g}}_i) + \alpha_i^{-1} (f_i - f_i^*)^2 \right\} \\
&= V(e, \phi) + \sum_{i=1}^N \alpha_i^{-1} (f_i - f_i^*)^2
\end{aligned} \quad (4.27)$$

où $V(e, \phi)$ est la fonction de Lyapunov donnée par (4.19). La dérivé $\dot{\bar{V}}(e, \phi, f)$ par rapport aux solutions de (4.26) est donnée par:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{V}}(e, \phi, f) &= \dot{V}(e, \phi) + \sum_{i=1}^N \left\{ 2b_{m_i}^T P_i e_i f_i + 2\alpha_i^{-1} (f_i - f_i^*) (\dot{f}_i - \dot{f}_i^*) \right\} \\
&= \dot{V}(e, \phi) + 2 \sum_{i=1}^N \left\{ \left[b_{m_i}^T P_i e_i + \alpha_i^{-1} (f_i - f_i^*) \right] (\dot{f}_i - \dot{f}_i^*) + b_{m_i}^T P_i e_i \dot{f}_i^* \right\}
\end{aligned} \quad (4.28)$$

$\dot{V}(e, \phi)$ est donnée par (4.20).

Si on choisit :

$$b_{m_i}^T P_i e_i + \alpha_i^{-1} (f_i - f_i^*) = -\sigma (f_i - f_i^*)$$

et :

$$\dot{f}_i^*(t) = -\pi_i (b_{m_i}^T P_i e_i)$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{V}}(e, \phi, f) &= \dot{V}(e, \phi) - 2 \sum_{i=1}^N \left\{ \sigma (f_i - f_i^*)^2 + \pi_i \|b_{m_i}^T P_i e_i\|^2 \right\} \\
&\leq \dot{V}(e, \phi) - 2\sigma \|f - f^*\|^2 - \lambda_{\min}(\Pi) \|e\|^2 \\
&\leq -\zeta \|e\|^2 - \sigma \|\phi + \rho \tilde{\mathfrak{g}}\|^2 + \eta - 2\sigma \|f - f^*\|^2 - \lambda_{\min}(\Pi) \|e\|^2
\end{aligned} \quad (4.29)$$

où: $\Pi = 2 \cdot \text{diag} \left\{ \left(\pi_1 P_1 b_{m_1} b_{m_1}^T P_1 \right) \cdots \left(\pi_N P_N b_{m_N} b_{m_N}^T P_N \right) \right\} \geq 0$

On conclut donc que:

1. D'après (4.27) et (4.29), on peut borner $\dot{\bar{V}}(e, \phi, f)$ de la façon suivante:

$$\dot{\bar{V}}(e, \phi, f) \leq -\tilde{\mu} \bar{V}(e, \phi, f) + \eta \quad (4.30)$$

où:

$$\tilde{\mu} \leq \min \left\{ \lambda_{\max}^{-1}(P) [\zeta + \lambda_{\min}(\Pi)], \lambda_{\max}(\Gamma) \sigma, 2 \cdot \max_i [\alpha_i] \sigma \right\} \quad (4.31)$$

ζ et η sont donnés par (4.23) et (4.22).

On remarque facilement que $\tilde{V}(e, \phi, f)$ décroît de façon monotone vers l'ensemble résiduel donné par:

$$\Omega_f = \{(e, \phi, f) \in R^n \times R^n \times R^n : \tilde{V}(e, \phi, f) \leq \tilde{V}_f = \tilde{\mu}^{-1}\eta\}$$

donc, les solutions (e, ϕ, f) sont globalement bornées avec $\tilde{V}_f = \tilde{\mu}^{-1}\eta$.

2. D'après les équations (4.27) et (4.30), on a:

$$\tilde{V}(e, \phi, f) \leq \exp(-\tilde{\mu}t)\tilde{V}_0 + [1 - \exp(-\tilde{\mu}t)]\tilde{\mu}^{-1}\eta$$

donc $\tilde{V}(e, \phi, f)$ converge vers sa valeur finale \tilde{V}_f avec une vitesse donnée par: $\exp(-\tilde{\mu}t)$.

Cependant, en choisissant une valeur suffisamment grande pour α_i , on obtient $\tilde{\mu} \geq \mu$.

On conclut donc que la dynamique des erreurs donnée par (4.26) possède une réponse transitoire plus rapide que celle obtenue par l'équation (4.18).

Remarque 3

Puisqu'on a introduit un signal auxiliaire dans la loi de commande, on n'a pas besoin de choisir des valeurs suffisamment larges pour Γ . D'autre part, les paramètres du signal auxiliaire α_i et Π_i sont suffisantes pour garantir une meilleure convergence de l'algorithme. En plus, le signal auxiliaire dépend non seulement de la position et la vitesse mais aussi de l'accélération. Cette dernière n'étant pas directement accessible, le signal auxiliaire peut être calculé en utilisant la méthode d'intégration trapézoïdale: [Seraji 89]

$$f_i(k) = f_i(k-1) - \pi_i b_m^T P_i [e_i(k) - e_i(k-1)] - 0.5 \cdot T \alpha_i b_m^T P_i [e_i(k) + e_i(k-1)] \quad (4.32)$$

où k et T sont respectivement l'instant et la période d'échantillonnage.

Remarque 4

Si on suppose que les interactions vérifient la propriété (4.2), alors en suivant la démonstration du Théorème 2, on peut montrer que les erreurs (4.26) sont encore globalement stables avec $V_f = \mu^{-1}\eta$, où:

$$\mu \leq \min\left\{\lambda_{\max}^{-1}(P)\lambda_{\min}(Q) + \lambda_{\max}(\Gamma)\sigma\right\} \quad (4.33)$$

$$\eta = \rho^{-1}\left\{\sup_t \left\{\|x_m(t)\|\right\} \|K^*\| + \beta\right\}^2 + \sigma\|\mathcal{G}^* - \rho\tilde{\mathcal{G}}\|^2 \quad (4.34)$$

4.3.3 Résultats de Simulation

Le robot manipulateur utilisé dans ce chapitre est le PUMA à 2 degrés de liberté dont la modélisation est détaillée dans le chapitre 1.

Les trajectoires de référence sont de type cycloïde qui assurent une continuité en position et vitesse pour avoir des couples réalisables [Seraji 89]:

$$\theta_r(t) = \begin{cases} \theta_r(t_0) + \frac{\Delta_i}{2\pi}(\omega t - \sin(\omega t)) & \text{pour } t < t_f \\ \theta_r(t_f) & \text{pour } t \geq t_f \end{cases}$$

avec $\Delta_i = \theta_{r_i}(t_f) - \theta_{r_i}(t_0)$ et $\omega = \frac{2\pi}{t_f}$

$$t_f = 3 \text{ sec}, \theta_{r_1}(0) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}, \theta_{r_2}(3) = 0 \text{ rad}, \theta_{r_1}(3) = 0 \text{ rad}, \theta_{r_2}(0) = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Les matrices d'états et de commande du modèle de référence (4.5) sont choisies pour chaque articulation comme suit:

$$A_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; i = 1, 2$$

pour $Q_i = I_2$ avec I_2 est la matrice d'identité 2×2 , la solution de l'équation de Lyapunov donne:

$$P_i = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}; \quad \bar{b}_{m_i}^T P_i = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}; i = 1, 2$$

Les paramètres des lois d'adaptation (4.17) et (4.25) sont choisis comme suit :

$$\Gamma_i = 1000 \cdot I_3, \alpha_i = 100, \pi_i = 500; i = 1, 2$$

Les résultats de simulation, dans le cas d'une commande sans signal auxiliaire (4.9), sont présentés sur les figures Fig.4.1.a à Fig.4.1.c. Dans Fig.4.1.a sont consignées les positions des articulations et les positions de référence, les figures Fig.4.1.b et Fig.4.1.c illustrent les erreurs de poursuite ainsi que les couples appliqués à chaque sous-système. On remarque clairement qu'il y a poursuite pour les deux articulations avec des réponses transitoires et des erreurs de poursuite qui ne sont pas tellement désirables. Pour améliorer la dynamique de ces erreurs nous avons introduit un signal auxiliaire donné par (4.25) et généré par le mécanisme d'adaptation. Les résultats de simulation de la nouvelle loi de commande (commande avec signal auxiliaire) sont consignés sur les figures Fig.4.2.a à Fig.4.2.d. On remarque que les réponses transitoires sont améliorées et les erreurs de poursuite sont devenues quasiment nulles. Le phénomène oscillatoire des couples et des signaux auxiliaires peut être éliminé en variant les paramètres de ces derniers. L'allure du signal auxiliaire est très proche de celle de la commande, ce qui fait que ce signal est prépondérant dans le schéma de la commande.

Les résultats de simulation pour des trajectoires de référence qui correspondent à un parcours linéaire (équations (2.42) à (2.44)) sont illustrés, dans les figures Fig.4.3.a à Fig.4.3.d dans le cas d'une commande sans signal auxiliaire. et dans les figures Fig.4.4.a à Fig.4.4.e pour le cas de la commande avec signal auxiliaire. Pour des trajectoires définissant un parcours circulaire : (équation (2.45)), les résultats de simulation sont illustrés dans les figures Fig.4.5.a à Fig.4.5.d et Fig.4.6.a à Fig.4.6.e. Les mêmes remarques concernant l'amélioration des performances en introduisant des signaux auxiliaires sont maintenues dans le cas de la commande cartésienne (dans l'espace des tâches).

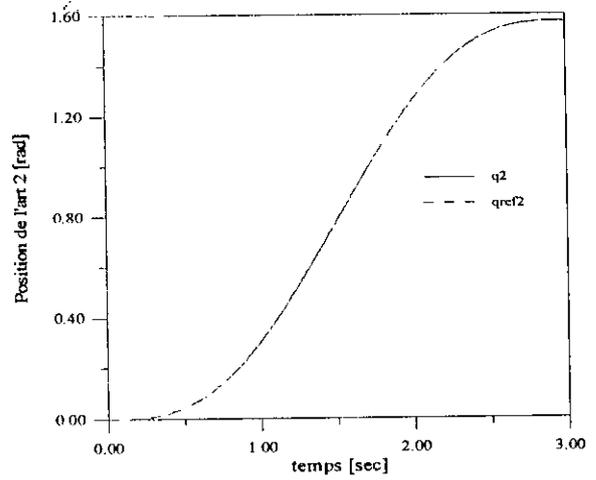
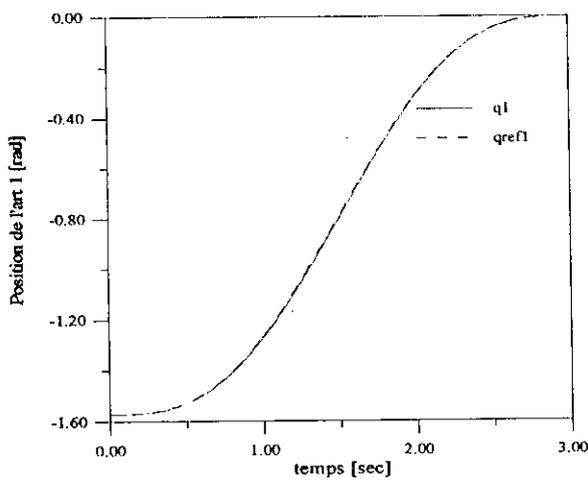


Fig.4.1.a- positions réelles et désirées des articulations

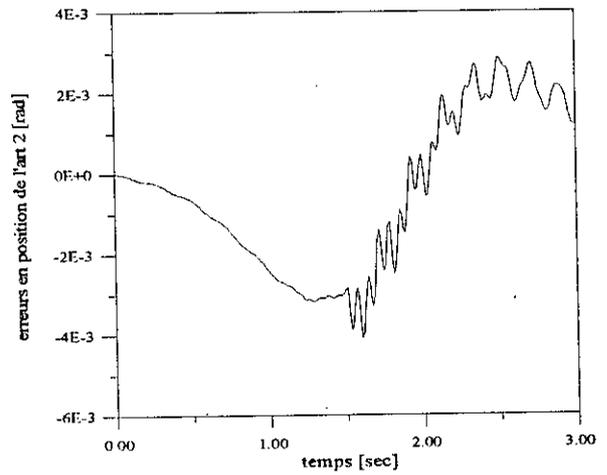
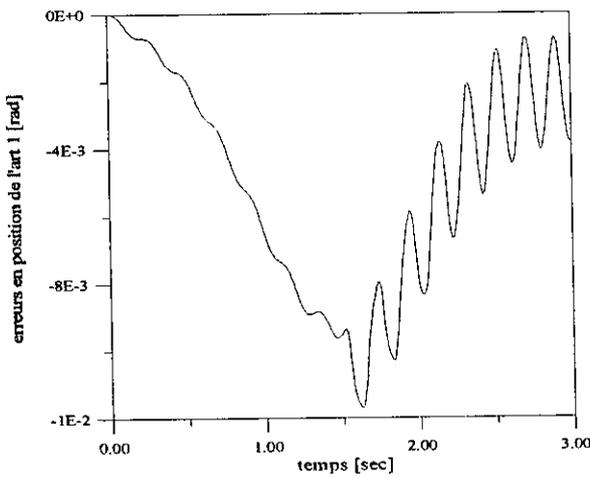


Fig.4.1.b- erreurs en positions des deux articulations

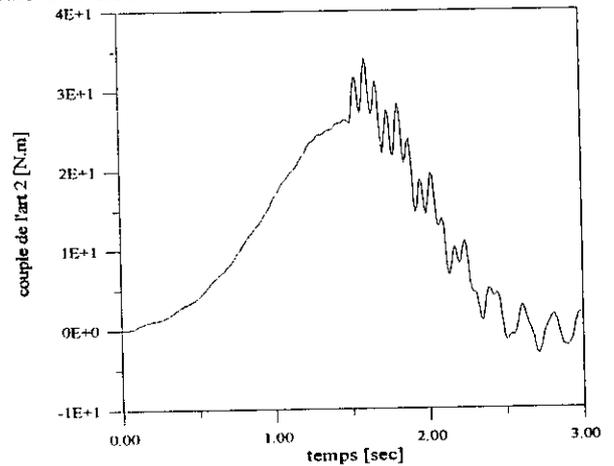
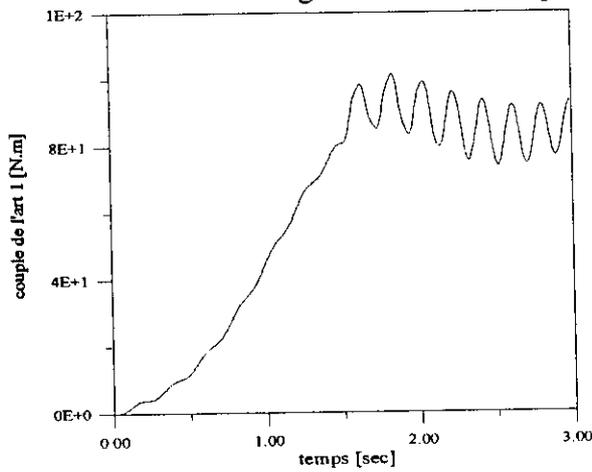


Fig.4.1.c- couples $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ des deux articulations

Fig.4.1: Simulations des positions, erreurs en position et couples avec introduction de charge à $t=1.5$ sec (sans signal auxiliaire)

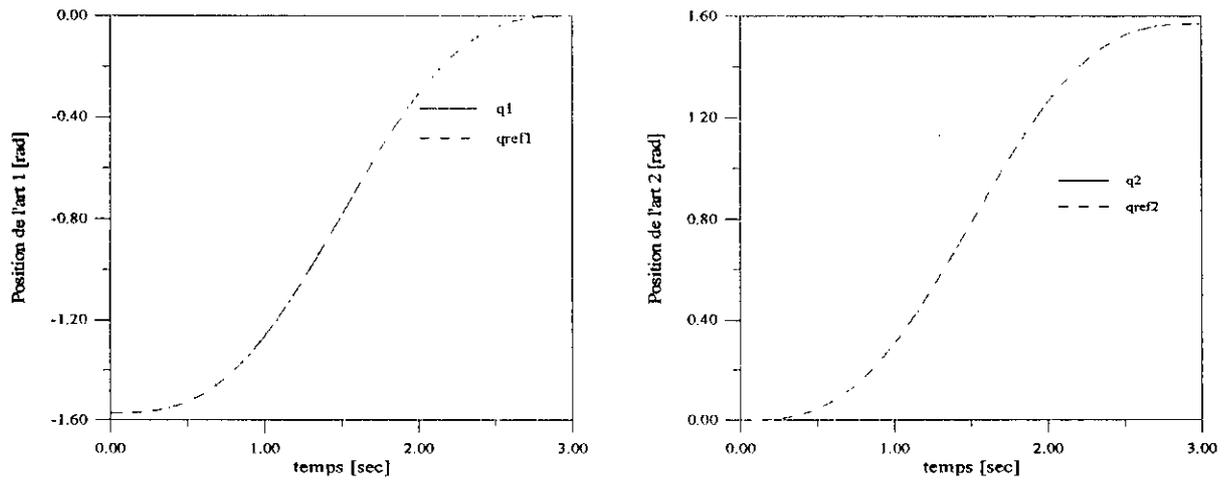


Fig.4.2.a- positions réelles et désirées des articulations

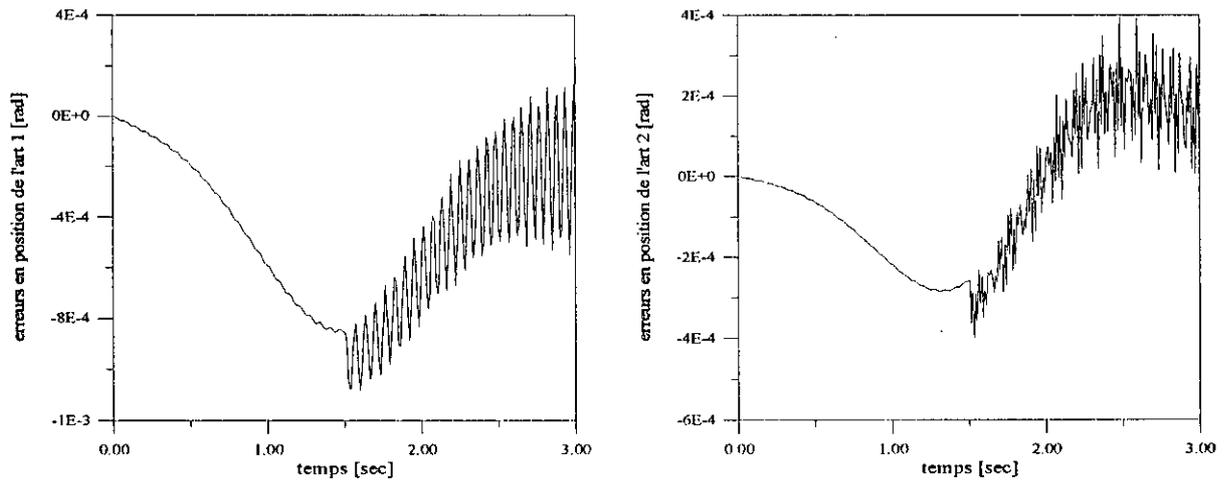


Fig.4.2.b- erreurs en positions des deux articulations

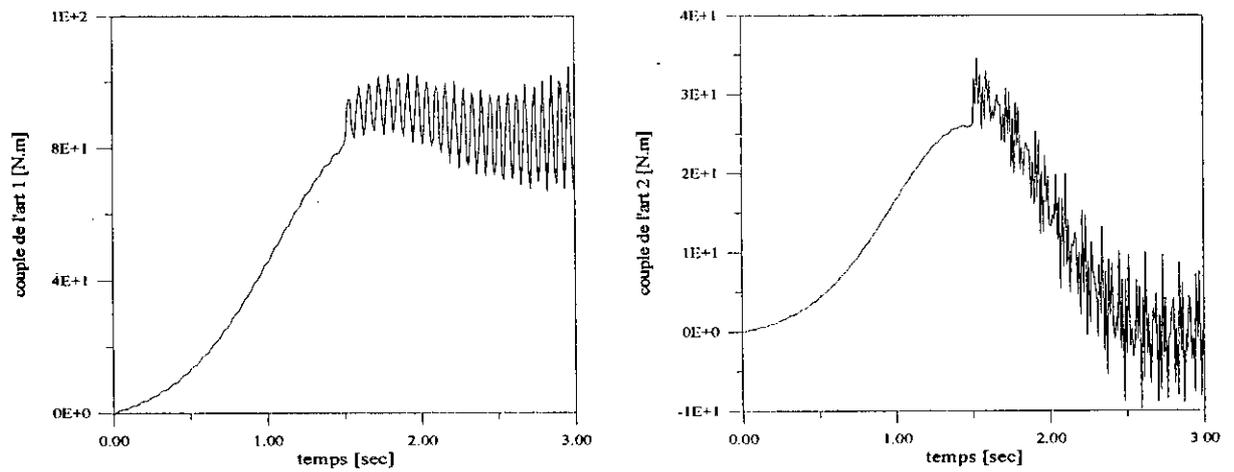


Fig.4.2.c- couples $\tau_1(t)$ et $\tau_2(t)$ des deux articulations

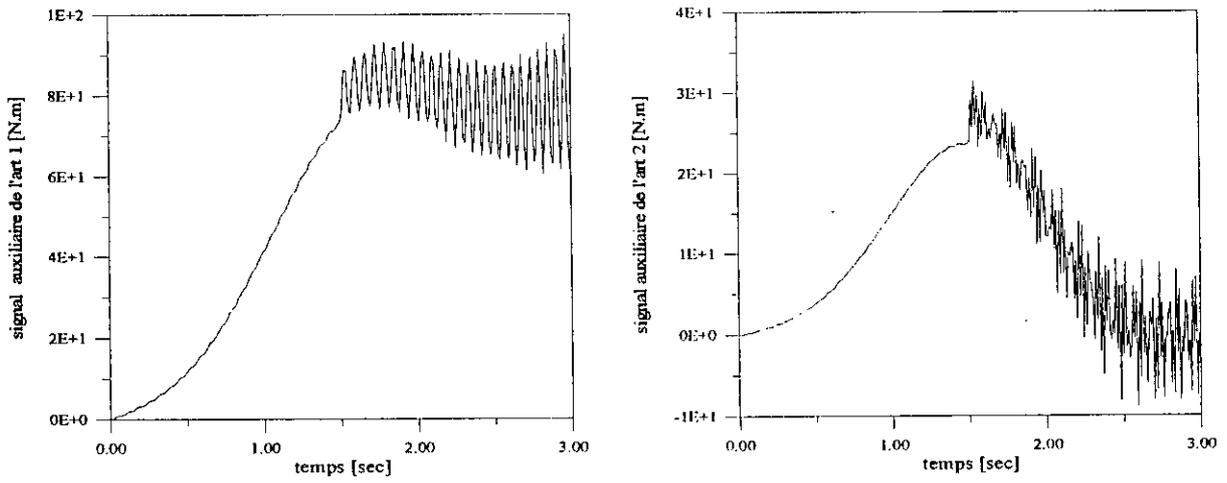


Fig.4.2.d- signaux auxiliaires $f_1(t)$ et $f_2(t)$

Fig.4.2: Simulations des positions, erreurs en position et couples avec introduction de charge à $t=1.5$ sec (avec signal auxiliaire)

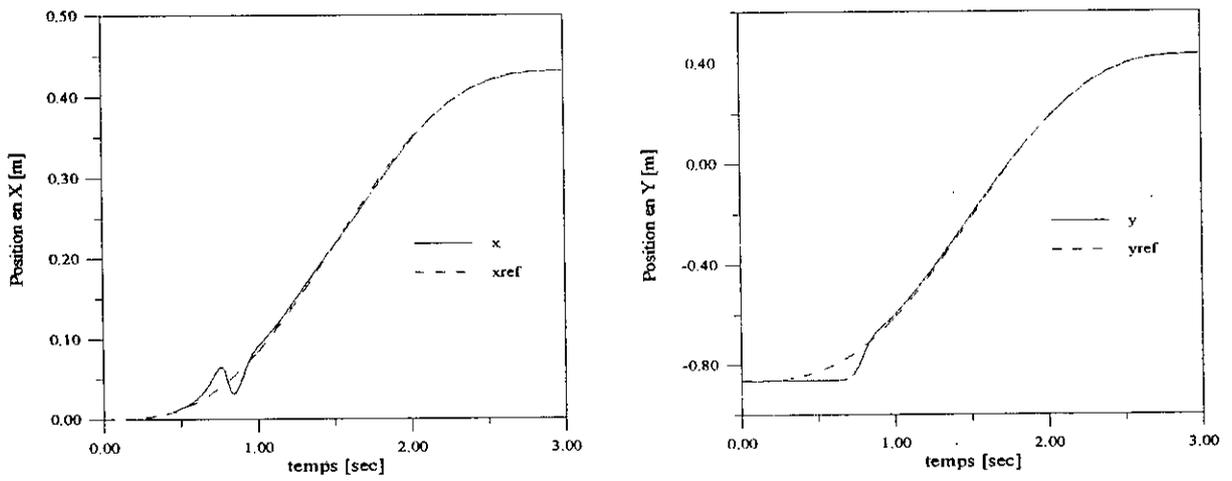


Fig.4.3.a- Positions opérationnelles réelles et désirées

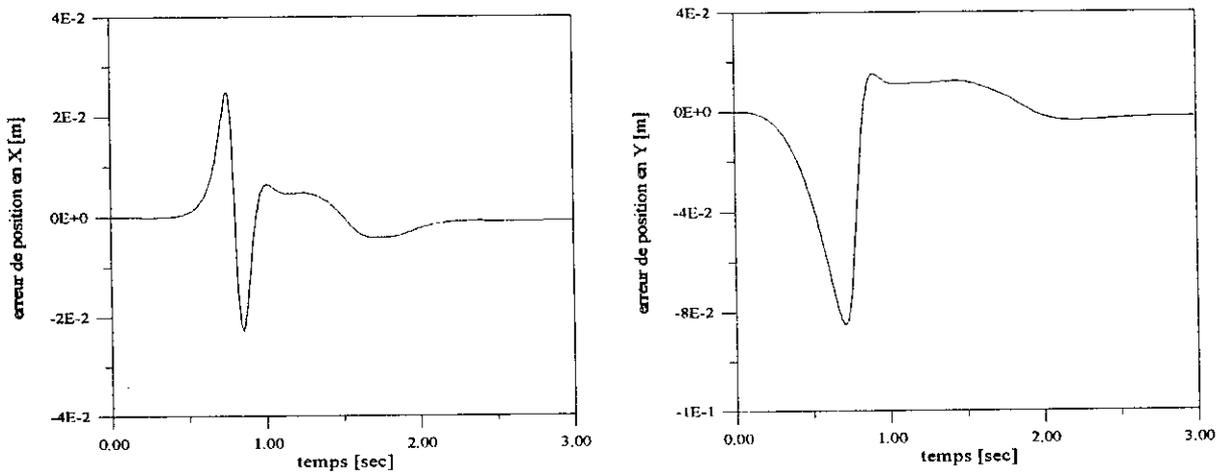


Fig.4.3.b- erreurs en position

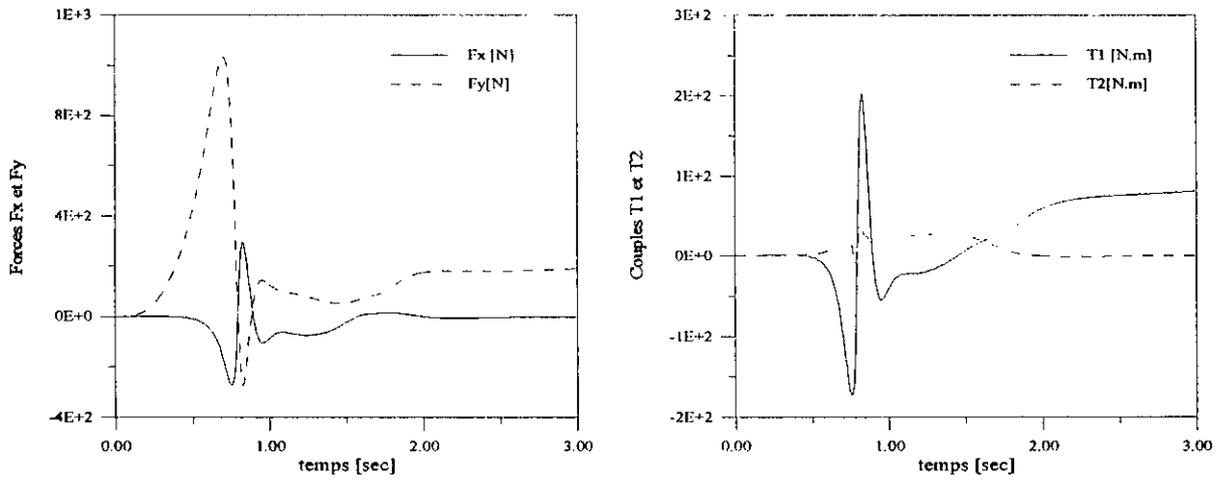


Fig.4.3.c- Présentations des couples et forces cartésiennes

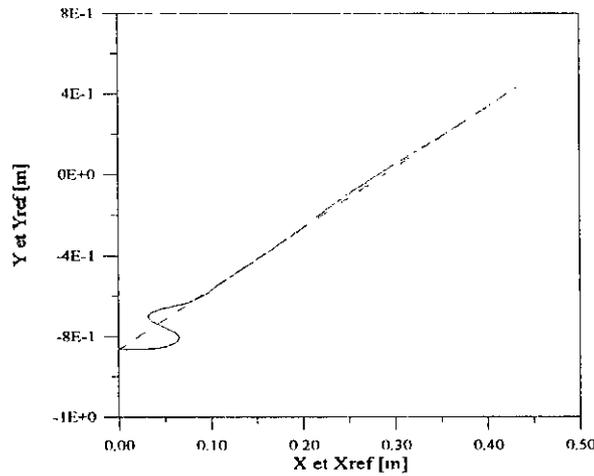


Fig.4.3.d- Présentation de la trajectoire réelle et désirée de l'élément terminal

Fig.4.3: Résultats de simulation de la commande adaptative décentralisée sans signal auxiliaire (trajectoire linéaire)

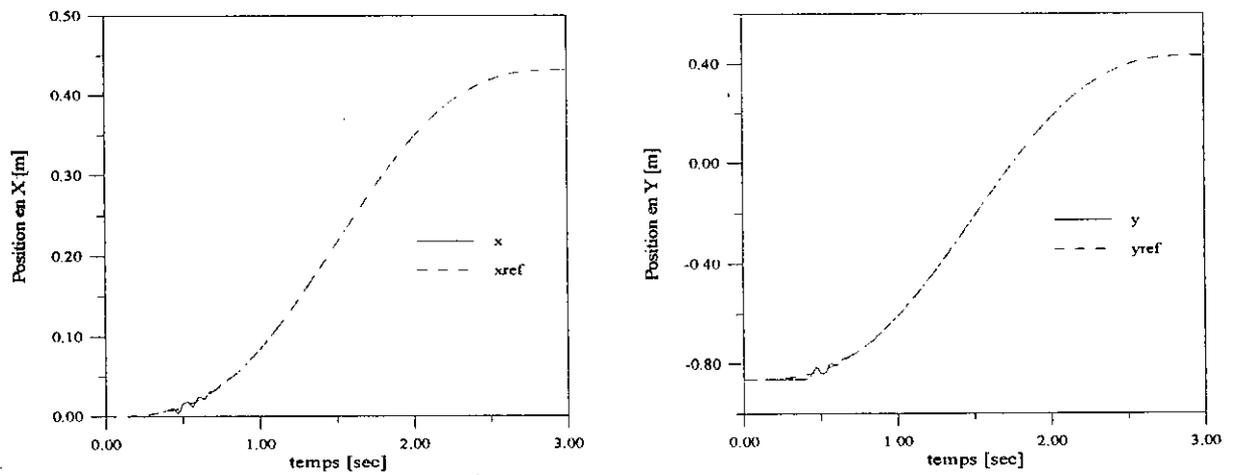


Fig.4.4.a- Positions opérationnelles réelles et désirées

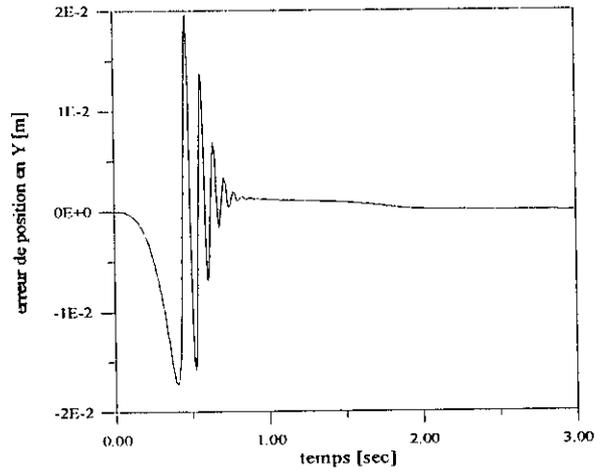
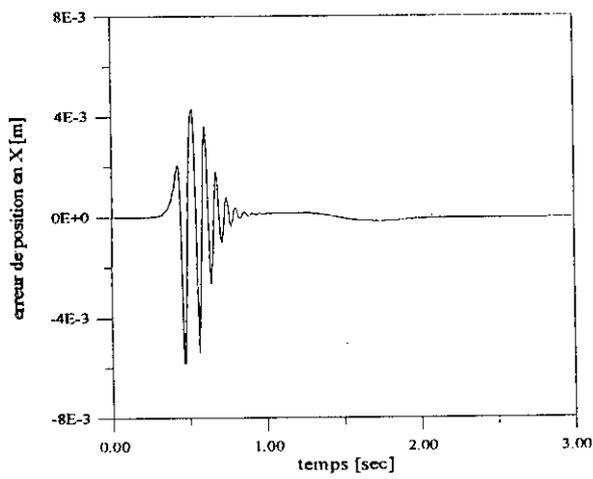


Fig.4.4.b- erreurs en position

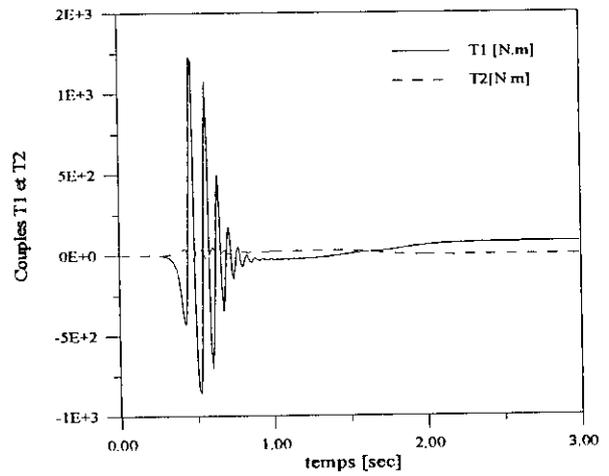
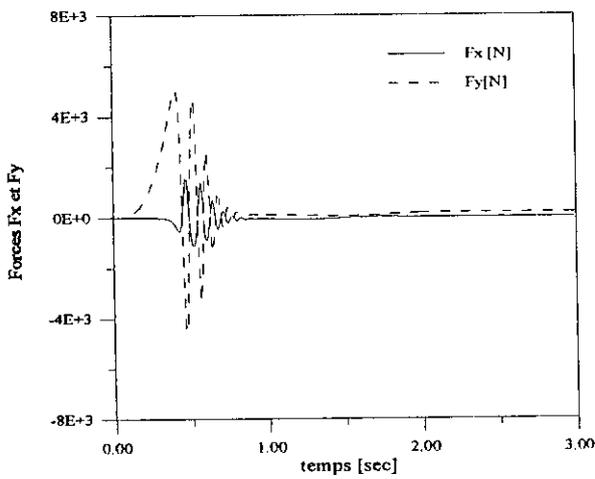


Fig.4.4.c- Présentations des couples et forces cartésiennes

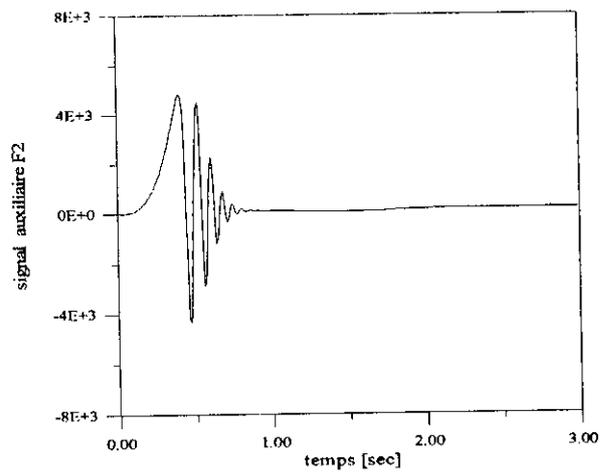
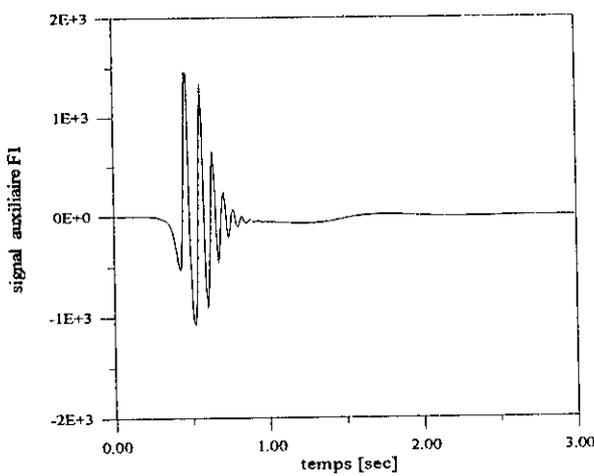


Fig.4.4.d- Présentation des signaux auxiliaires

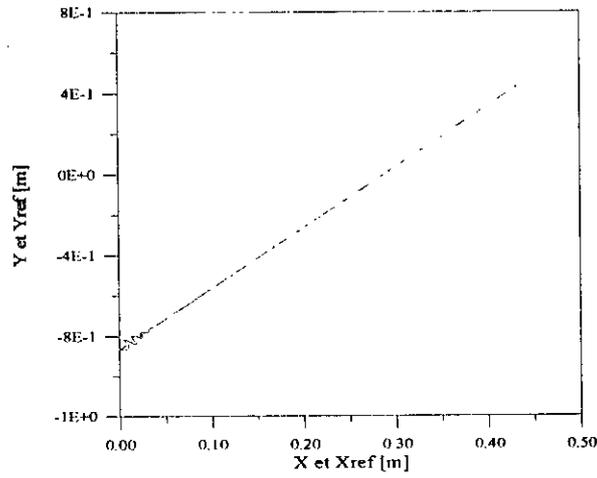


Fig.4.4.e- Présentation de la trajectoire réelle et désirée de l'élément terminal

Fig.4.4: Résultats de simulation de la commande adaptative décentralisée avec signal auxiliaire (trajectoire linéaire)

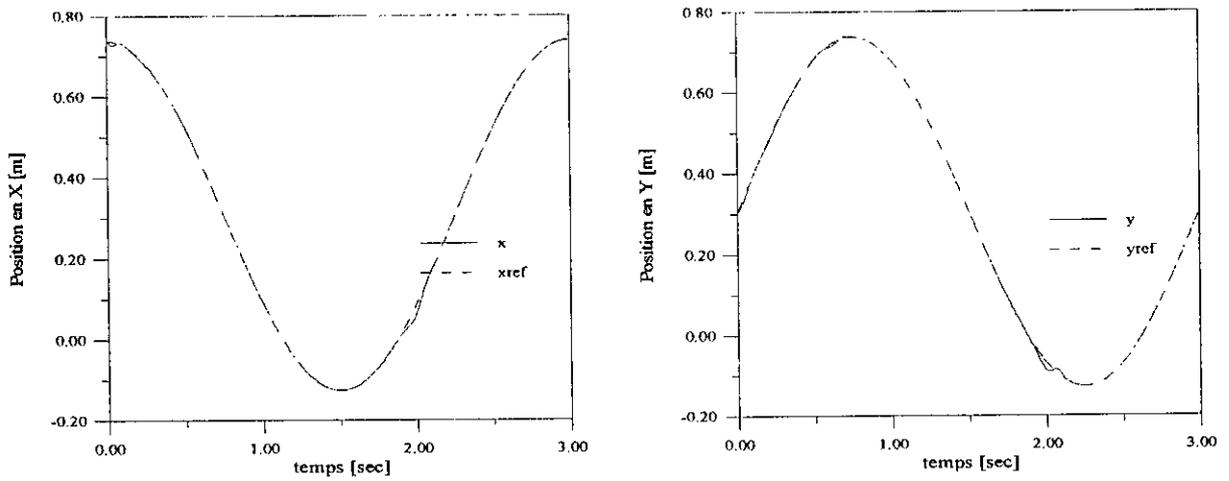


Fig.4.5.a- Positions opérationnelles réelles et désirées

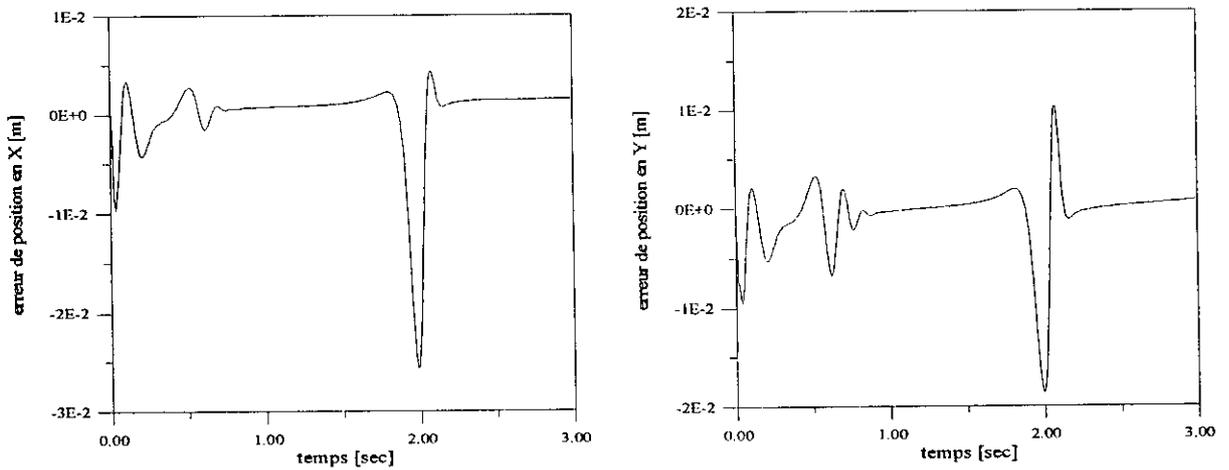


Fig.4.5.b- erreurs en position

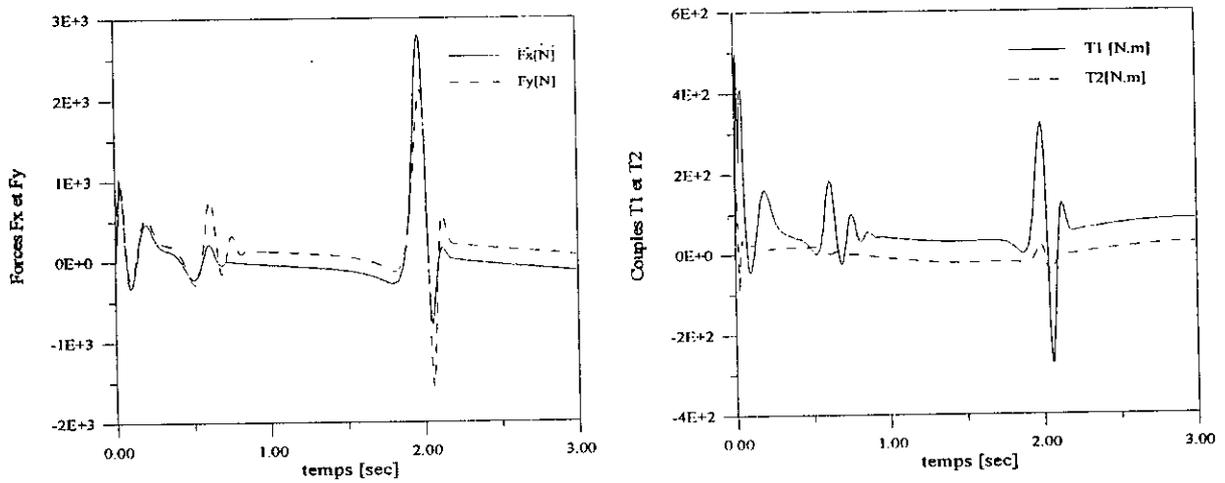


Fig.4.5.c- Présentations des couples et forces cartésiennes

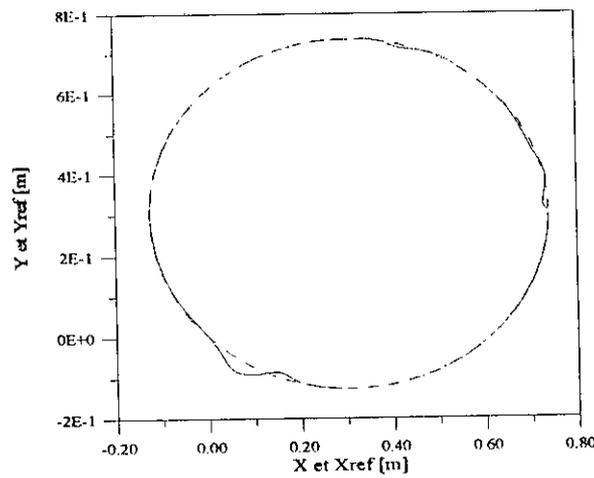


Fig.4.5.e- Présentation de la trajectoire réelle et désirée de l'élément terminal

Fig.4.5: Résultats de simulation de la commande adaptative décentralisée sans signal auxiliaire (trajectoire circulaire)

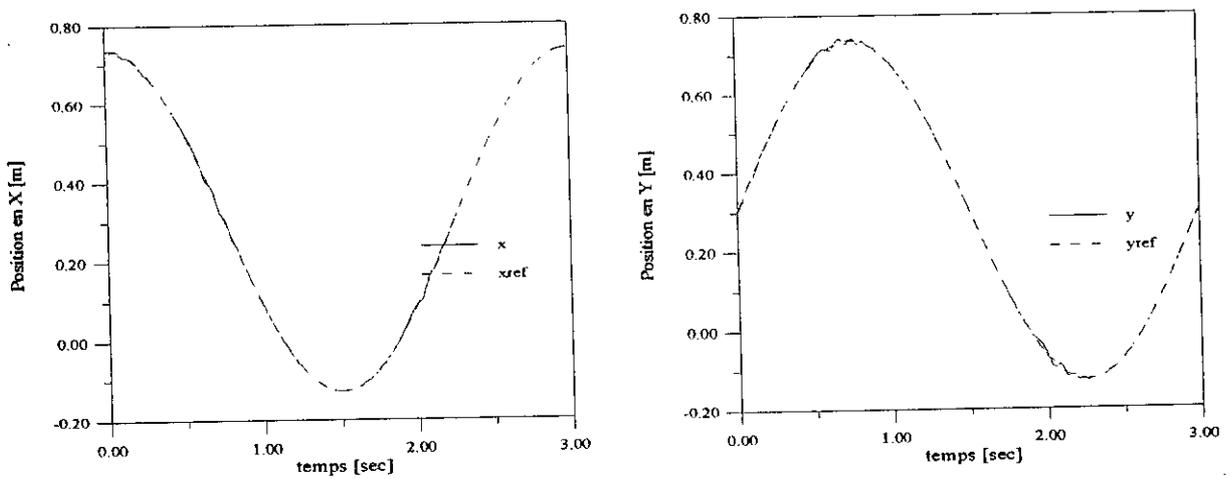


Fig.4.6.a- Positions opérationnelles réelles et désirées

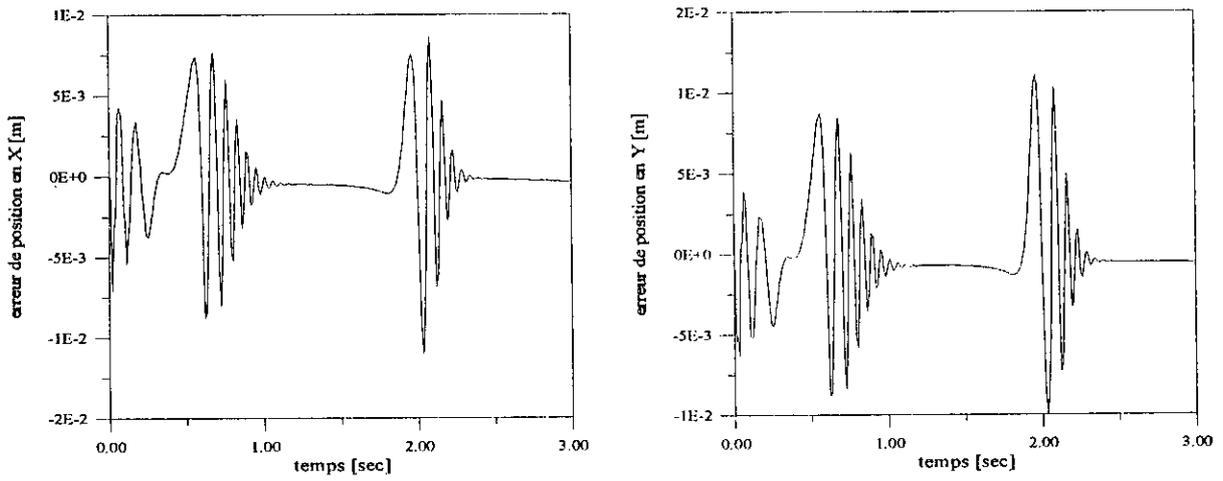


Fig.4.6.b- erreurs en position

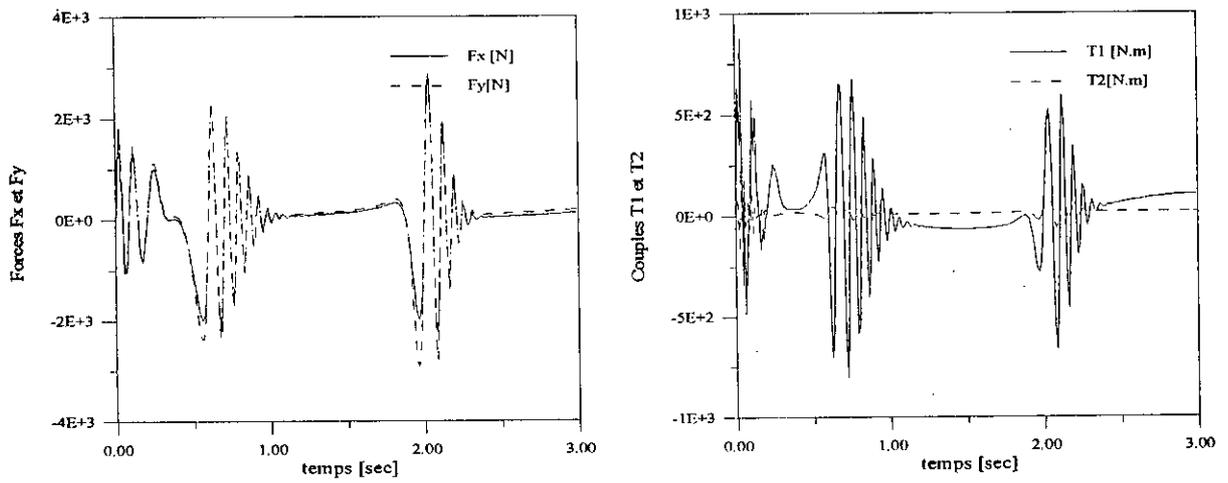


Fig.4.6.c- Présentations des couples et forces cartésiennes

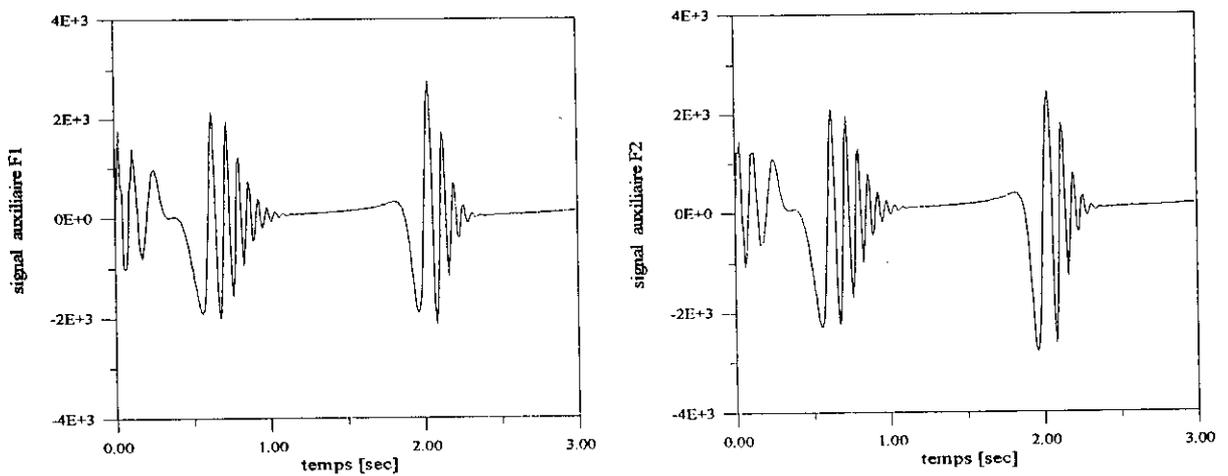


Fig.4.6.d- Présentation des signaux auxiliaires

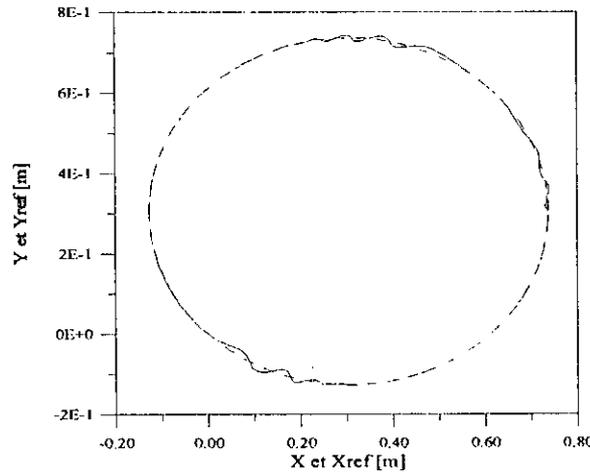


Fig.4.6.e- Présentation de la trajectoire réelle et désirée de l'élément terminal

Fig.4.6: Résultats de simulation de la commande adaptative décentralisée avec signal auxiliaire (trajectoire circulaire)

4.4 SYNTHÈSE D'UN CONTRÔLEUR MINIMAL DÉCENTRALISÉ

L'algorithme de synthèse d'un contrôleur minimal (*MCS*) a été le sujet de nombreuses recherches théoriques et pratiques menées sur les commandes adaptatives [Stoten 90.a],[Stoten 90.b]. D'ailleurs cette stratégie de commande a été originalement développée comme une extension de la commande adaptative à modèle de référence *MRAC* [Landau 79]. Contrairement au *MRAC* destinée seulement à la commande des systèmes linéaires, l'algorithme *MCS* est établi pour couvrir une large classe de systèmes et cela en dépit de la présence des incertitudes de modélisation, des variations paramétriques, des perturbations extérieurs, des nonlinéarités et des interconnexions dans le cas des systèmes complexes. En plus, l'algorithme *MCS* ne nécessite ni la disponibilité du modèle linéaire du système ni l'identification des paramètres de ce dernier, mais seulement un minimum d'informations (tel que le degré du système). Ce qui simplifie considérablement la synthèse et l'implémentation des lois de commande issues. Le contrôleur minimal provient directement du mécanisme d'adaptation et ne nécessite ni la présence d'un contrôleur non adaptative, ni celle d'un signal auxiliaire. Le schéma descriptif du contrôleur est donné par la figure suivante :

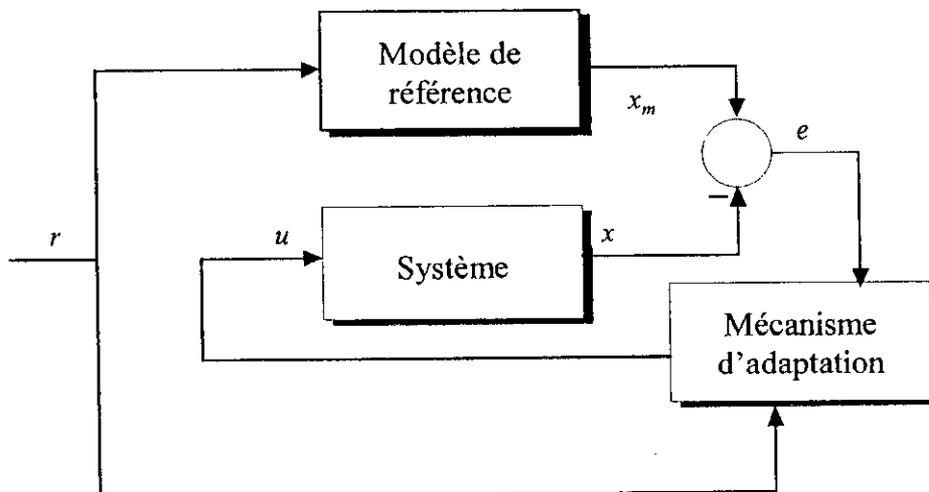


Fig.4.7: Schéma d'un Contrôleur Minimal

Dans le cas des systèmes multivariables [Benchoubane 92],[Genfai 95], tous les états et les entrées de références sont nécessaires pour la synthèse de chaque entrée de commande. Dans le cas des systèmes complexes constitués par l'interconnexion de plusieurs sous systèmes, la complexité de calcul des contrôleurs minimaux pour chaque sous système constitue un désavantage majeur dans le cas où une implémentation centralisée est faite. L'algorithme MCS décentralisé, dont lequel seulement les informations disponibles localement sont utilisées pour la synthèse de la commande, est extrêmement désirable non seulement pour les systèmes complexes mais aussi pour les systèmes simples. Chaque degré additionnel au système sera commandé par une boucle MCS sans modifier la commande MCS précédente. Dans cette section nous présentons l'algorithme MCS décentralisé pour les systèmes interconnectés avec des perturbations extérieures bornées et des fortes nonlinéarités inconnues. Dans la partie qui suit, sera présenté le système de commande en boucle fermée. La stabilité et la robustesse de l'algorithme seront traités en 4.4.3. Dans la partie 4.4.4, l'application au robot manipulateur PUMA à 2 d.d.l est présentée avec les résultats de simulation.

4.4.1 Système en Boucle Fermée

Considérant le système décrit par l'interaction de N sous systèmes interconnectés :

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + \sum_{j=1}^N f_{ij}(t, x_j) + d_i + \sum_{j=1}^N B_{ij} u_j \quad i = 1, N \quad (4.35)$$

pour chaque sous système i , on a :

x_i : est le vecteur d'état de dimension n_i

d_i : est un vecteur de dimension n_i contenant toutes les nonlinéarités et les perturbations extérieures.

$f_{ij}(t, x_i)$ et $B_{ij} u_j$: sont des vecteurs de dimensions n_i qui représentent respectivement les interactions linéaires et non linéaires d'états et de commandes.

Les matrices A_i et les vecteurs B_i , d_i , et B_{ij} sont inconnues et supposés sous la forme canonique de commande :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{i, n_i-1} & -a_{i, n_i} \end{bmatrix} \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{ij} \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{ii} \end{bmatrix}, \quad d_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Les termes interactions linéaires et non linéaires sont donnés sous la forme suivante :

$$f_{ij}(t, x_j) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f'_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

En plus ces interactions sont supposées satisfaire les relations suivantes :

$$\|f_{ij}(t, x_j)\| \leq c_{ij} \|x_j\| \quad (4.38)$$

ou c_{ij} sont des coefficients positifs inconnus.

Le système globale est donné par les équations suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu + D + F(t, x) \quad (4.39)$$

avec :

$x = [x_1^T \quad x_2^T \quad \dots \quad x_N^T]^T$ est le vecteur d'état global

$u = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_N]$ est le vecteur commande global

$D = [d_1^T \quad d_2^T \quad \dots \quad d_N^T]^T$ est le vecteur global contenant les nonlinéarité et les perturbations.

les matrices A et B ont les dimensions appropriées.

L'objectif de la synthèse d'un contrôleur minimal décentralisé pour chaque sous système est d'assurer une poursuite parfaite des trajectoires générées par les modèles de référence locaux exprimés par :

$$\dot{x}_{mi} = A_{mi}x_{mi} + B_{mi}r_i \quad i = 1, N \quad (4.40)$$

x_{mi} est le $i^{\text{ème}}$ vecteur d'état du modèle de référence.

r_i est la $i^{\text{ème}}$ entrée de référence choisie bornée.

Les modèles de référence sont choisies sous la même formes que les sous systèmes associés, c'est à dire :

$$A_{mi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_{mi1} & -a_{mi2} & \dots & -a_{min i-1} & -a_{min i} \end{bmatrix}, \quad B_{mi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{mii} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

L'information locale nécessaire pour la synthèse de la $i^{\text{ème}}$ loi de commande est regroupée dans l'ensemble $\{x_{mi}, x_i, r_i\}$. Dans le cas ou les systèmes interconnectés donnés par (4.35) sont traités comme un système global donné par (4.39), alors tous les éléments du vecteur d'état global ainsi que toutes les entrées de références r_i sont indispensables pour la synthèse de chaque contrôleur MCS u_i [Benchoubane 92]. Dans le cas ou N est grand, il est claire que les calculs des commandes devient une tâche compliquée et fastidieuse.

L'erreur de poursuite généralisée pour le $i^{\text{ème}}$ sous système est définie par :

$$e_i = x_{mi} - x_i \quad (4.42)$$

En utilisant les équations (4.35) et (4.40) on obtient la dynamique de l'erreur pour chaque sous système :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_{mi}e_i - B_i u_i - (A_i - A_{mi})x_i + B_{mi}r_i \\ &\quad - \sum_{j=1}^N f_{ij}(t, x_j) - d_i - \sum_{j=1}^N B_{ij}u_j \end{aligned} \quad (4.43)$$

ou :

$$\dot{e}_i = A_{mi}e_i - f_1^i - f_2^i \quad (4.44)$$

avec :

$$f_1^i = B_i u_i + (A_i - A_{mi}) x_i - B_{mi} r_i \quad (4.45)$$

$$f_2^i = \sum_{j=1}^N f_{ij}(t, x_j) + d_i + \sum_{j=1}^N B_{ij} u_j \quad (4.46)$$

Comme il a été déjà mentionné, seul les informations locaux sont utilisées pour la synthèse des commandes décentralisées, donc seulement les éléments $\{x_i, r_i\}$ de f_1^i .

Les lois de commandes MCS sont les mêmes que dans le cas centralisé [Benchoubane 92] :

$$u_i = k_i x_i + k_{ri} r_i \quad (4.47)$$

où :

$$k_i = \int_0^t \alpha_i y_{ni} x_i^T d\tau + \beta_i y_{ni} x_i^T \quad (4.48.a)$$

$$k_{ri} = \int_0^t \alpha_i y_{ni} r_i d\tau + \beta_i y_{ni} r_i \quad (4.48.b)$$

$$y_{ni} = b_i^T P_i e_i \quad (4.49)$$

$$b_i = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T = \text{vecteur } n_i \times 1 \quad (4.50)$$

P_i est une matrice symétrique définie positive solution de l'équation de l'Lyapunov suivante :

$$\begin{aligned} A_{mi} P_i + P_i^T A_{mi} &= -Q_i \\ Q_i &> 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

En substituant l'expression de u_i donnée par (4.47) dans l'équation (4.43) et en utilisant les équations (4.48) à (4.51), l'équation dynamique de l'erreur (4.43) devient :

$$\dot{e}_i = A_{mi} e_i - b_i \phi_i^T \omega_i - b_i \gamma_i^T \omega_i - f_2^i \quad (4.52)$$

avec :

$$\phi_i^T = \left[b_{ii} \int_0^t \alpha_i y_{ni} x_{i1} d\tau + a_{mi1} - a_{i1} \quad \dots \quad b_{ii} \int_0^t \alpha_i y_{ni} x_{ini} d\tau + a_{mini} - a_{mi} \quad b_{ii} \int_0^t \alpha_i y_{ni} r_i d\tau - b_{mii} \right] \quad (4.53)$$

$$\gamma_i = b_{ii} \beta_i y_{ni} \omega_i \quad (4.54)$$

$$\omega_i = [x_i^T \quad r_i]^T \quad (4.55)$$

La démonstration de la convergence des erreurs est la même que dans le cas centralisé [Benchoubane 92]. En utilisant la théorie de l'hyperstabilité [Landau 79], on peut montrer que la stabilité est assurée pour chaque sous système si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$1. \alpha_i b_{ii} > 0 \quad (4.56)$$

$$2. \beta_i b_{ii} \geq 0 \quad (4.57)$$

3. Les paramètres du système a_{ik} et b_{ii} ($k=1, n_i$) sont lentement variables dans le temps, c'est à dire constantes durant le processus d'adaptation.

Les équations (4.52) à (4.55) constituent le $i^{\text{ème}}$ sous - système hyperstable :

$$\dot{e}_i = A_{mi}e_i - b_i\phi_i^T\omega_i - b_i\gamma_i^T\omega_i \quad (4.58)$$

avec:

$$\dot{\phi}_i = b_{ii}\alpha_i y_{mi}\omega_i \quad (4.59)$$

commandé par l'entrée externe f_2^i donnée par (4.46).

Les termes d'interconnexions, ainsi que les termes englobant les nonlinéarités et les perturbations sont modélisés comme entrée externe au sous - système hyperstable. Dans ce cas la stabilité asymptotique des erreurs dépend de la vitesse de variation de f_2^i [Benchoubane 92]. Ce terme peut être judicieusement incorporer dans ϕ_i , dans le cas où il est considéré lentement variable dans le temps, c'est à dire constant durant le processus d'adaptation. Dans la partie qui suit on va établir la stabilité et la robustesse de l'algorithme dans le cas où on considère f_2^i constant .

4.4.2 Stabilité et Robustesse du MSC Décentralisé

Si l'entrée de référence r_i ($i=1,N$) est différent de 0, et comme il est indiqué en [Benchoubane 92], l'entrée externe f_2^i donnée par (4.46) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$f_2^i = \sum_{j=1}^N f_{ij}(t, x_j) + d_i + \sum_{j=1}^N B_{ij}u_j = \delta A_i r_i \quad (4.60)$$

ou δA_i est un vecteur inconnu de dimension ($n_i \times 1$) donné par :

$$\delta A_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta a_i \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

La vitesse de variation de δA_i est déterminée par la vitesse de variation de r_i et celle de f_2^i , et comme r_i est généralement choisie lentement variable dans le temps (consigne constante), la vitesse de variation de δA_i dépend seulement de f_2^i . Donc, dans le cas où f_2^i est considéré lentement variable, le terme δA_i devient constant et peut être incorporer dans ϕ_i .

Cependant, en substituant le terme f_2^i donné par (4.60) dans (4.52) et en utilisant l'équation (4.61), on obtient :

$$\dot{e}_i = A_{mi}e_i - b_i\phi_i^{*T}\omega_i - b_i\gamma_i^T\omega_i \quad (4.62)$$

$$\dot{\phi}_i^* = b_{ii}\alpha_i y_{mi}\omega_i \quad (4.63)$$

$$\gamma_i = b_{ii}\beta_i y_{mi}\omega_i \quad (4.64)$$

$$\omega_i = \begin{bmatrix} x_i^T & r_i \end{bmatrix}^T \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} A_{mi}P_i + P_i^T A_{mi} &= -Q_i \\ Q_i &> 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\phi_i^{*T} = \left[b_{ii} \int_0^t \alpha_i y_{ni} x_{i1} d\tau + a_{mi1} - a_{i1} \quad \dots \quad b_{ii} \int_0^t \alpha_i y_{ni} x_{imi} d\tau + a_{mimi} - a_{mi} \quad b_{ii} \int_0^t \alpha_i y_{ni} r_i d\tau + \delta a_i - b_{mii} \right] \quad (4.67)$$

Le système décrit par les équations (4.62) à (4.67) est asymptotiquement hyperstable (voir démonstration dans [Benchoubane 92]), si les conditions 1 à 3 ainsi que les conditions suivantes sont vérifiées :

C 1: L'entrée de référence r_i est non nulle pour tout $i=1,N$.

C 2: Les termes δa_i donnés par (4.61) sont lentement variables, donc constantes durant le processus d'adaptation.

4.4.3 Application au Robot Manipulateur PUMA 2 d.d.1

Le modèle de simulation est celui du bras manipulateur plus une charge de masse m que tient l'élément terminal.

Pour les trajectoires de références nous avons opté pour deux totalement différentes. La première est celle d'un modèle de référence M_i dont les matrices d'états et de commande sont données par :

$$A_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

la pulsation propre, ainsi que le coefficient d'amortissement de ce modèle de référence sont : $\omega_{0i} = 1 \text{ rad/s}$, $\xi = 1$.

La seconde trajectoire de référence est de type cycloïde donnée dans 4.3.3

Les mêmes trajectoires de référence est choisies dans le cas de l'extension de la commande dans le plan opérationnel (X,Y).

Pour $Q_i = 4I_2$, avec I_2 est la matrice d'identité de dimension 2×2 , la matrice de Lyapunov est résolue pour donner :

$$P_i = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b}_{m_i}^T P_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les paramètres de la commande sont choisis, après plusieurs simulations, comme suit:

$$\alpha_i = 100 \quad \beta_i = 50 \quad , i = 1,2$$

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures Fig.4.8.a à Fig.4.8.c. On présente dans Fig.4.8.a les position réelles et désirées des deux articulations pour une trajectoire définie par le modèle de référence (4.68). Dans la figure Fig.4.8.b sont consignées les erreurs en positions et couples des articulations. On remarque clairement qu'il y a poursuite pour les deux articulations avec des réponses transitoires qui ne sont pas tellement désirables, mais avec des erreurs de poursuite qui s'annulent asymptotiquement. Les résultats de simulation de la commande dans le cas d'une trajectoire cycloïde sont consignés sur les figures Fig.4.9.a à Fig.4.9.d. Le phénomène oscillatoire des couples et des erreurs de poursuite peut être éliminé en variant les paramètres de la commande

Les résultats de simulation pour des trajectoires de référence qui correspondent à un parcours linéaire sont donnés, dans les figures Fig.4.10.a à Fig.4.10.c, tandis que celles obtenus pour un parcours circulaire de l'élément terminal sont consignés sur les figures Fig.4.11.a à Fig.4.11.c.

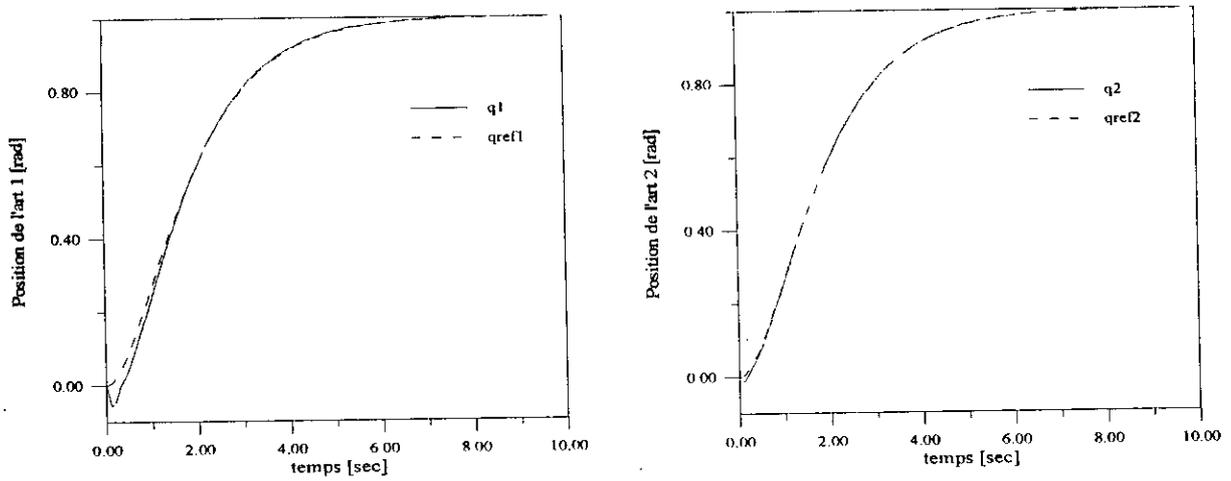


Fig.4.8.a- Positions réelles et désirées

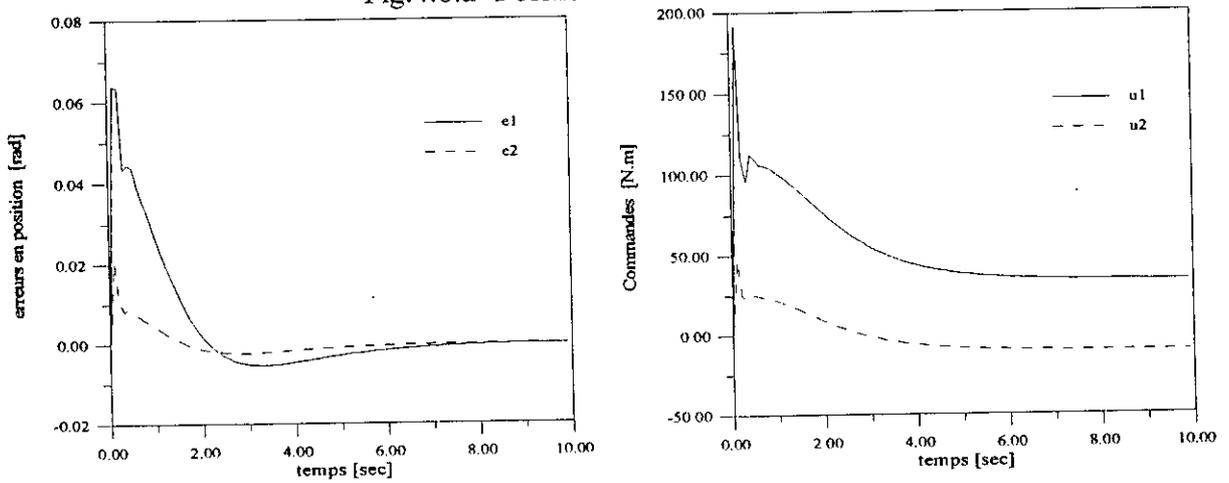


Fig.4.8.b- erreurs en position et commandes

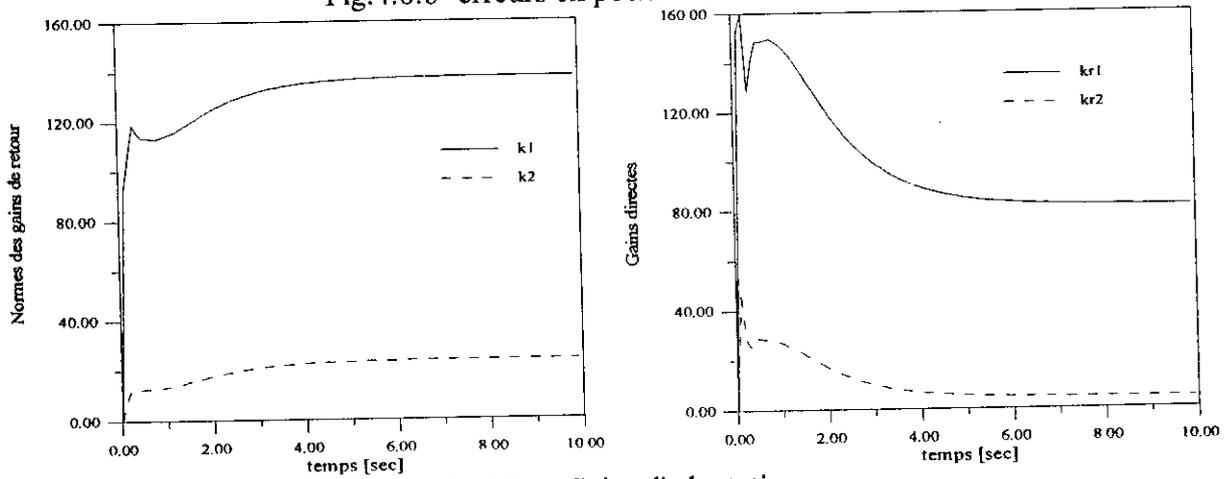


Fig.4.8.c- Gains d'adaptation

Fig.4.8: Résultats de simulation du MCS décentralisé (trajectoire générée par le modèle d'état)

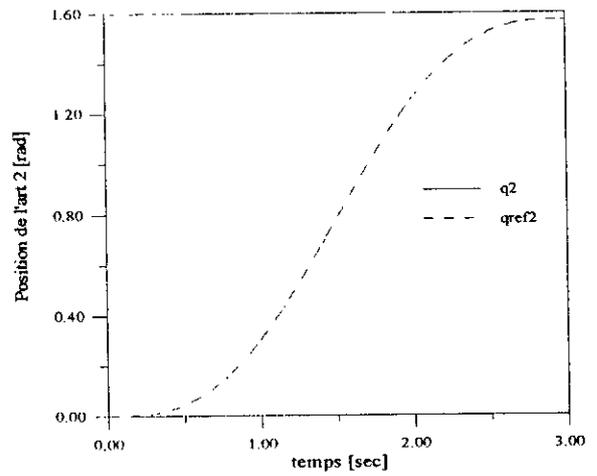
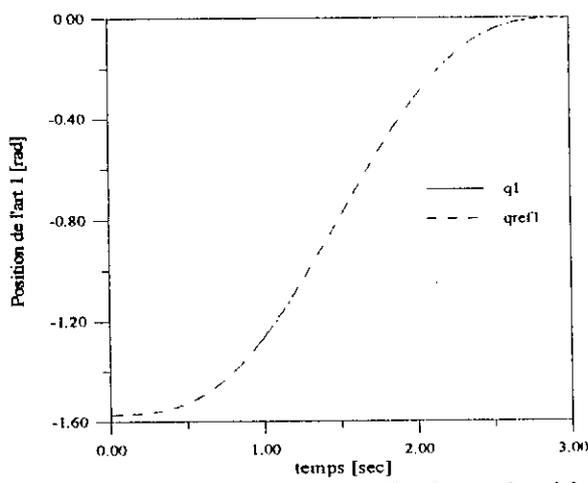


Fig.4.9.a- Positions réelles et désirées

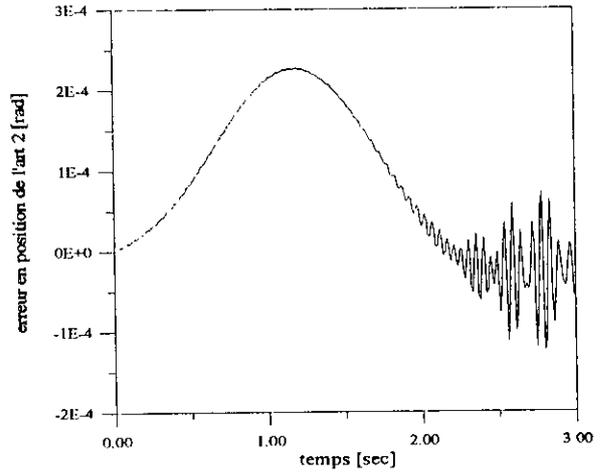
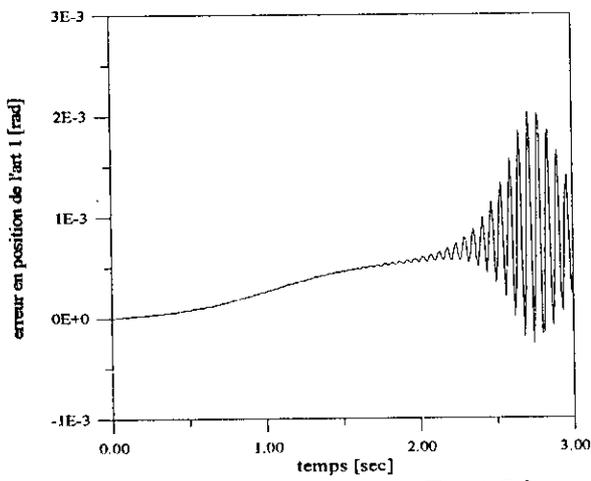


Fig.4.9.b- erreurs en position

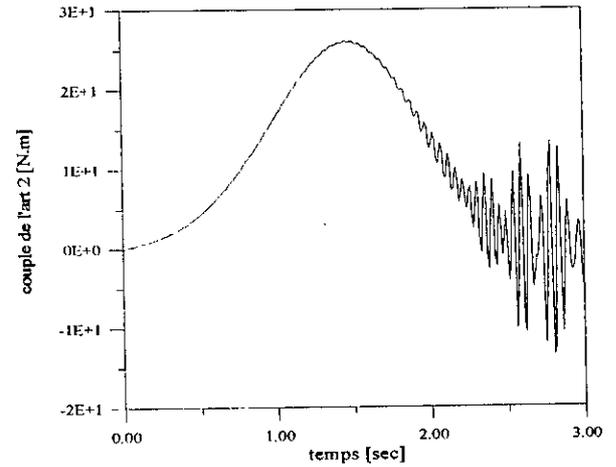
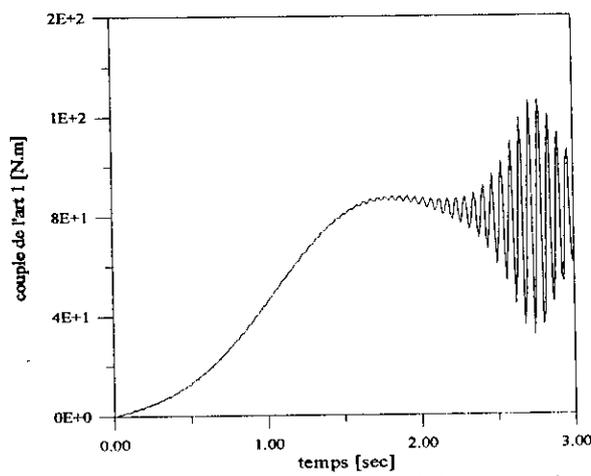


Fig.4.9.c- couples des deux articulations

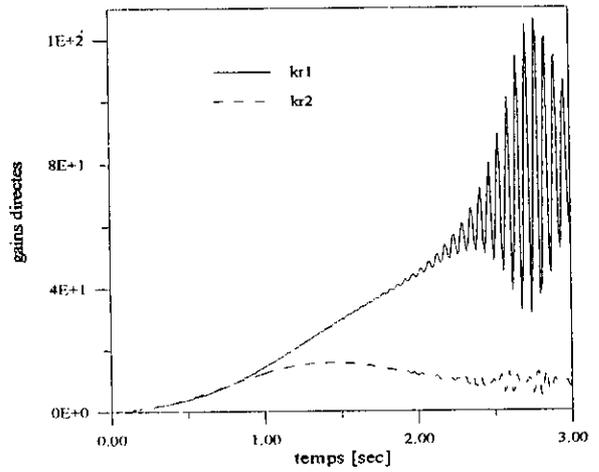
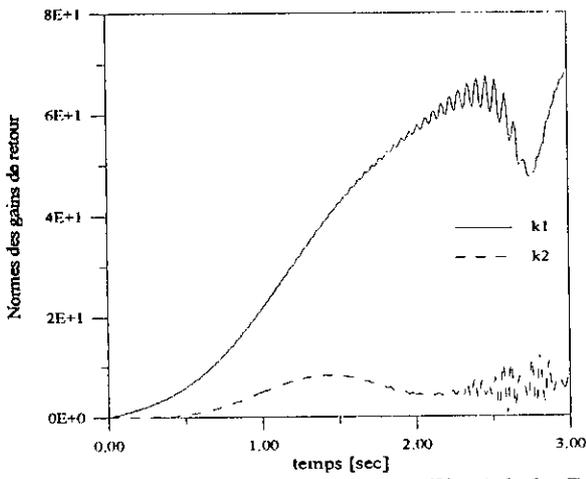


Fig.4.9.d- Gains d'adaptation

Fig.4.9: Résultats de simulation du MCS décentralisé (trajectoire cycloïde)

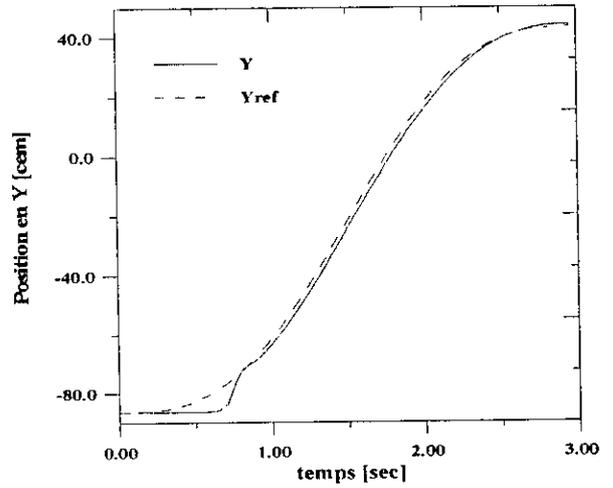
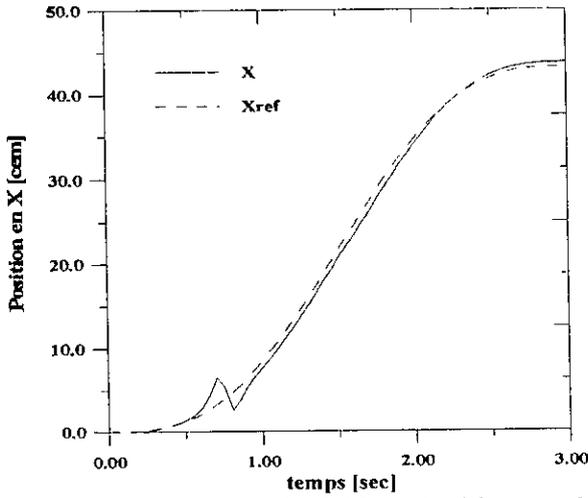


Fig.4.10.a- Positions opérationnelles réelles et désirées

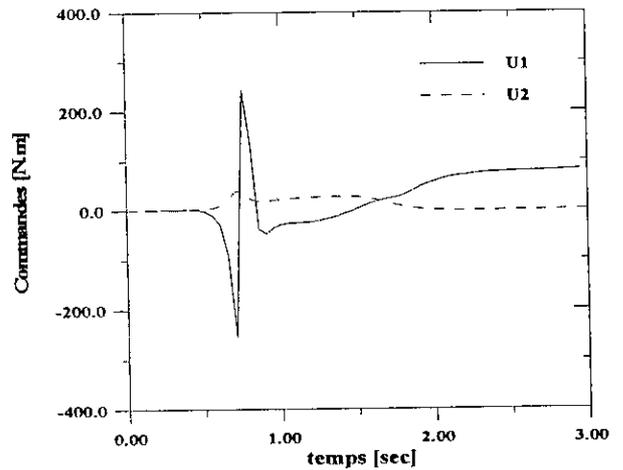
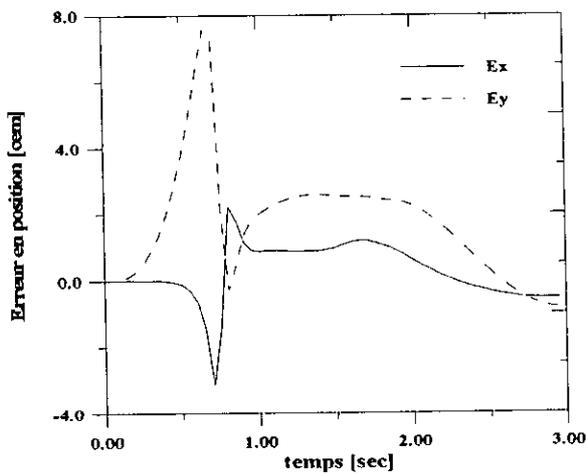


Fig.4.10.b- erreurs en position et commandes

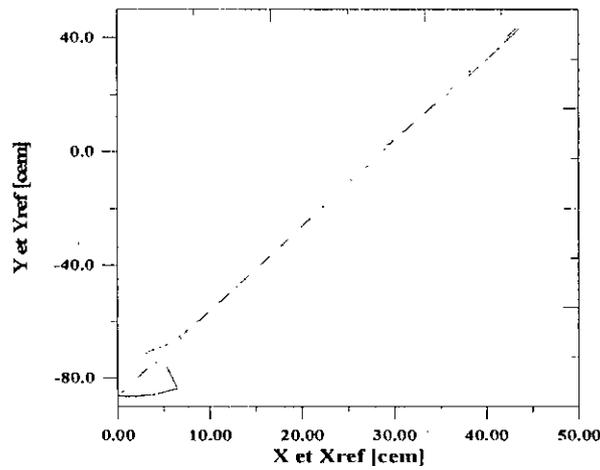


Fig.4.10.c- Présentation de la trajectoire réelle et désirée de l'élément terminal

Fig.4.10: Résultats de simulation du MCS décentralisé (trajectoire linéaire)

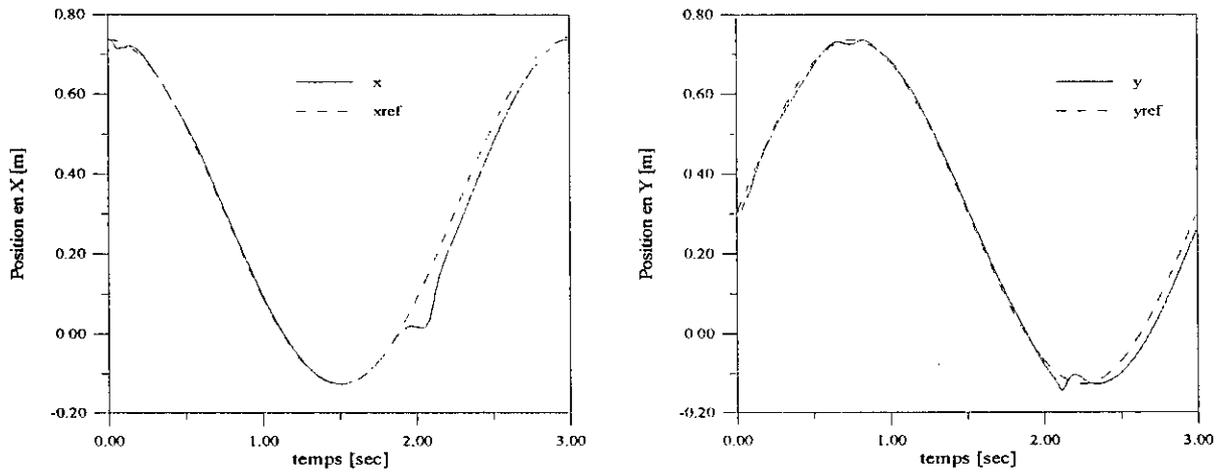


Fig.4.11.a- Positions opérationnelles réelles et désirées

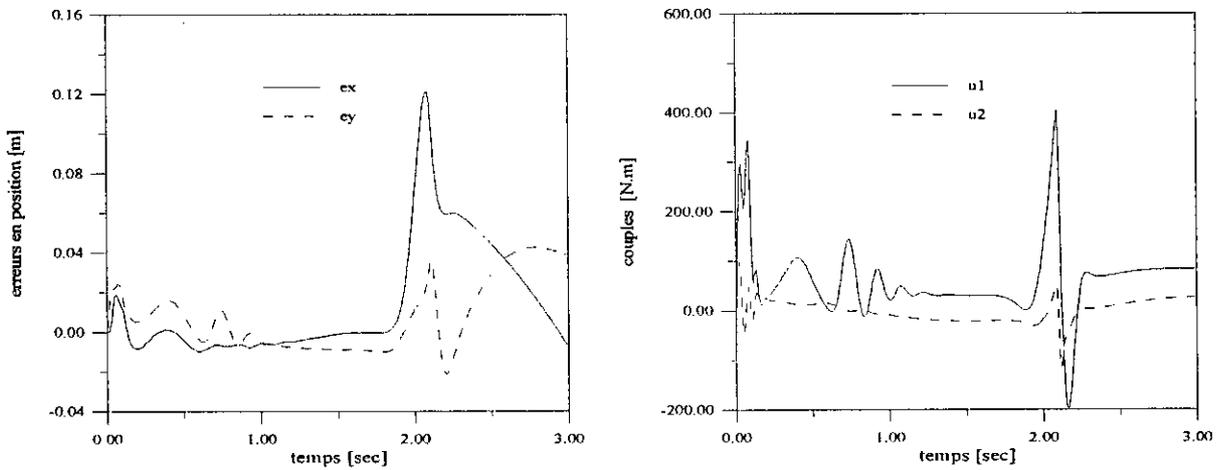


Fig.4.11.b- erreurs en position et commandes

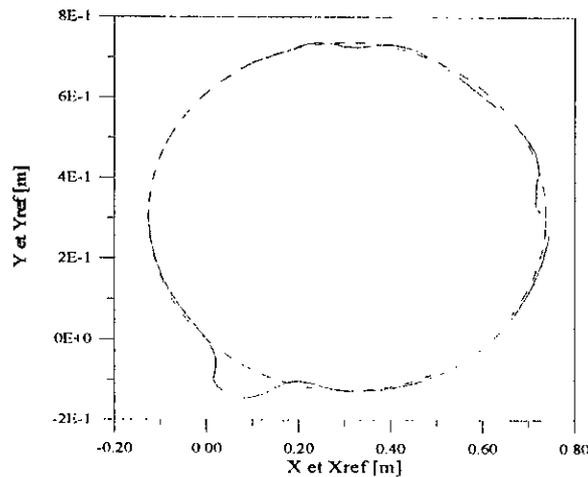


Fig.4.11.c- Présentation de la trajectoire réelle et désirée de l'élément terminal

Fig.4.11: Résultats de simulation du MCS décentralisé
(trajectoire circulaire)

4.5 CONCLUSION

Au terme de ce chapitre, nous avons étudié différentes algorithmes adaptatifs décentralisés. Ces derniers concernent les systèmes dont les interactions sont bornées par des polynômes d'état d'ordre strictement inférieur à deux. Après avoir modéliser les systèmes faiblement interconnectés et formuler les hypothèses faites sur ses interconnexions, nous avons présenté une commande composée d'un contrôleur à gains ajustables et d'un signal, ou compensateur, adaptatif. Nous avons remarqué que l'introduction du compensateur a augmenté les performances du système en boucle fermée en diminuant les erreurs de poursuite. Nous avons aussi distingué entre la commande des systèmes dont les interconnexions sont à dynamique négligée et celle des systèmes à dynamique rapide. La troisième partie de ce chapitre, a été consacrée à l'étude de l'algorithme MCS décentralisé.

La commande développée dans la seconde partie de ce chapitre est similaire à la commande adaptative par poursuite d'un modèle « *Adaptive Model Following Control AMFC* » [Landau 79], [Genfai 95]. Les conditions d'*Erzberger* sont formulées d'une autre manière, et les lois d'adaptation utilisées sont de type PI.

Nous avons remarqué que la commande adaptative décentralisée à modèle de référence développée au chapitre 2 n'est qu'un cas particulier de la commande des systèmes caractérisés par des interconnexions à dynamique nulle.

La loi de commande MCS décentralisée présente les mêmes caractéristiques que la commande précédente. D'ailleurs, en comparant les équations (4.11) et (4.48) nous remarquons que nous avons les mêmes lois d'adaptation. La seule différence dans ces deux algorithmes réside dans la pondération de l'erreur. En effet, pour la commande adaptative décentralisée avec des *STVI*, l'erreur pondérée est $b_m^T P_i e_i$, par contre, pour l'algorithme MCS décentralisé, elle est donnée par $b_i P_i e_i$, avec $b_i = [0, \dots, 1]$.

La stabilité des deux algorithmes est basée sur deux critères complètement différentes. Dans le premier algorithme, des fonctions de Lyapunov convenablement choisies ont été utilisées. tandis que, pour le second algorithme, l'approche de l'hyperstabilité de *POPOV* a été utilisé.

Chapitre 5

Commande Adaptative Décentralisée des Systèmes Fortement Interconnectés

5.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la commande des systèmes complexes dont les interconnexions sont d'ordre élevé. L'intérêt de cette approche réside dans le fait que la plupart des procédés réels tels que les réseaux électriques et les systèmes robotiques présentent cette caractéristique. Comme il a été déjà mentionné le qualificatif « décentralisé ou locale » de la commande découle du fait que la dynamique de chaque sous-système doit être stabilisée localement, et aucun échange d'information n'est permis. Le succès d'une commande locale dépend essentiellement des deux éléments suivants [Benhammou 88]:

1. La structure et la taille des termes d'interaction entre les différents sous-systèmes
2. La façon dont sont prises en compte ces interactions dans les algorithmes de calcul de la commande.

Quelques travaux portant sur la commande adaptative décentralisée sont donnés dans [Gavel 85], [Gavel 89], [Shi 90] et [Seraji 89]. Nous avons remarqué que la plupart d'entre eux posent des conditions sur la structure et l'ordre des interconnexions. Les schémas de commande qui en découlent ne sont valables que dans le cas où ces conditions sont vérifiées. Ces dernières sont regroupées dans les hypothèses suivantes :

1. Les interconnexions vérifient certaines conditions de structure : (Matching Conditions) Ces conditions restreignent le domaine d'application de la commande, néanmoins un grand nombre de systèmes, en particulier les systèmes mécaniques, les vérifient.
2. Les interconnexions sont, soit bornées par un polynôme d'état constant ou du premier ordre, soit de dynamique nulle.

Des interconnexions d'ordre élevé peuvent déstabiliser le système global si l'algorithme de calcul de commande n'a pas tenu explicitement compte de cette situation. Cette instabilité peut aussi être la conséquence de la poursuite de trajectoires rapides [Seraji 89]. En effet, les termes de couplage qui existent entre les liaisons des robots manipulateurs dépendent des vitesses des articulations adjacentes et donc de la dynamique des trajectoires désirées.

Dans ce chapitre nous allons présenter une étude comparative entre des différents algorithmes. Dans un premier lieu, nous donnons le modèle des systèmes interconnectés concernés par la commande adaptative décentralisée ainsi que les hypothèses faites sur les interconnexions. Dans la même section l'objectif des algorithmes de commande est exposé. Pour voir l'influence des interconnexions sur la stabilité des systèmes un exemple illustratif est étudié dans la section 5.3. La section 5.4 englobe tous les algorithmes de commande développés. Le paragraphe 5.4.1 expose l'algorithme de la commande adaptative décentralisée avec compensateur centralisé. La décentralisation de ce compensateur dans la loi de commande est le sujet du paragraphe 5.4.2 dans le cas des interconnexions du second ordre. L'extension de l'algorithme au cas général (interconnexions d'ordre quelconque) est exposé dans le paragraphe 5.4.3.

5.2 MODELISATION DES SYSTEMES INTERCONNECTES

Plusieurs modèles mathématiques ont été proposés pour représenter les systèmes interconnectés [Benhammou 88]. Le terme d'interaction est modélisé sous forme d'une fonction statique ou dynamique dépendant soit des états, soit des sorties des sous-systèmes en interaction.

Nous considérons, dans ce chapitre, un système complexe S composé par N sous-systèmes interconnectés, chaque sous-système S_i , avec $i = 1, 2, \dots, N$, est représenté sous la forme suivante :

$$S_i: \quad \dot{x}_i = A_i x_i + b_i u_i + b_i z_i(t, x) \quad (5.1)$$

où $x_i(t) \in R^{n_i}$ est le vecteur d'état, $u_i(t) \in R$ est la commande, $A_i \in R^{n_i} \times R^{n_i}$ est une matrice constante inconnue et $b_i \in R^{n_i}$ est un vecteur constant inconnu. La fonction $z_i(t, x): R \times R^n \rightarrow R$: $n = \sum_{i=1}^N n_i$ représente les interconnexions du sous-système S_i avec les autres sous-systèmes. On note que dans cette formulation, les interconnexions satisfont certaines conditions de structure [Gavel 89],[Shi 92]. Ces conditions restreignent la structure des sous-systèmes considérés par cette commande décentralisée en supposant que toutes les interconnexions et les signaux de commande sont factorisés par le vecteur de commande b_i .

Le système global S peut être représenté sous la forme compacte suivante:

$$S: \quad \dot{x} = Ax + Bu + Bz(t, x) \quad (5.2)$$

où $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^N$ et $z(t, x): R \times R^n \rightarrow R^N$, avec

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_N), \quad B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N). \quad (5.3)$$

Les hypothèses suivantes doivent être vérifiées pour chaque sous-système S_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

HP 1: La paire (A_i, b_i) est commandable. Cette supposition garantit le choix d'un système de coordonnées sous lequel les matrices d'état et de commande peuvent être mises sous la forme compagne de commande:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & I & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in_i} \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_i \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Dans cette étude, nous considérons seulement le cas où les interconnexions vérifient les conditions de structure précédentes. la nature de ces interconnexions influe de façon considérable sur la synthèse de la commande décentralisée.

Formulons maintenant l'hypothèse générale faite sur les bornes de ces interconnexions.

HP 2: Les interconnexions sont bornés par un polynôme d'état d'ordre p, c'est à dire, il existe des coefficients constants connus ou inconnus ξ_{ij}^k tels que:

$$\|z_i(t, x)\| \leq \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^k \|x_j\|^k \quad (5.5)$$

L'objectif des commandes adaptatives décentralisées est d'assurer une poursuite d'une trajectoire désirée générée par un modèle de référence M_i donné par :

$$M_i: \quad \dot{x}_{m_i} = A_{m_i} x_{m_i} + b_{m_i} r_i \quad (5.6)$$

avec A_{m_i} est une matrice constante stable satisfaisant l'équation matricielle de Lyapunov:

$$A_{m_i}^T P_i + P_i A_{m_i} = -Q_i \quad (5.7)$$

Le modèle de référence globale M associé au système globale S est donné sous la forme compacte suivante :

$$M: \quad \dot{x}_m = A_m x_m + B_m r \quad (5.8)$$

avec $A_m = \{A_{m_1}, \dots, A_{m_n}\}$, $B_m = \{b_{m_1}, \dots, b_{m_n}\}$ et $r \in R^N$ est le vecteur des signaux de référence.

Puisqu'on a supposé que la paire (A_i, b_i) peut être mis sous la forme canonique de commande, on peut toujours choisir (A_{m_i}, b_{m_i}) sous la même forme et donc , on vérifie facilement l'existence d'un vecteur $k_i^* \in R^{n_i}$ et d'un scalaire $k_{0i}^* \in R$ tels que :

$$A_{m_i} = A_i + b_i k_i^{*T}, \quad b_{m_i} = b_i k_{0i}^* \quad (5.9)$$

Ces derniers sont des paramètres de synthèse pour la commande linéaire par poursuite d'un modèle, dans le cas où les sous-systèmes S_i sont isolés: $z_i(t, x) = 0$, la loi de commande sera:

$$u_i(t) = -k_i^{*T} x_i + k_{0i}^* r_i \quad (5.10)$$

Ces paramètres de synthèse sont inconnus du fait que les dynamiques des sous-systèmes interconnectés sont aussi inconnues. Néanmoins, on suppose que le signe de b_i est connu et sans perdre de généralité on pose $k_{0i}^* > 0, i = 1, 2, \dots, N$.

Les lois d'adaptation dans la commande adaptative sont utilisées pour chercher les valeurs optimales de k_i^* et de k_{0i}^* assurant ainsi une poursuite d'un modèle de référence linéaire M_i (Fig.5.1).

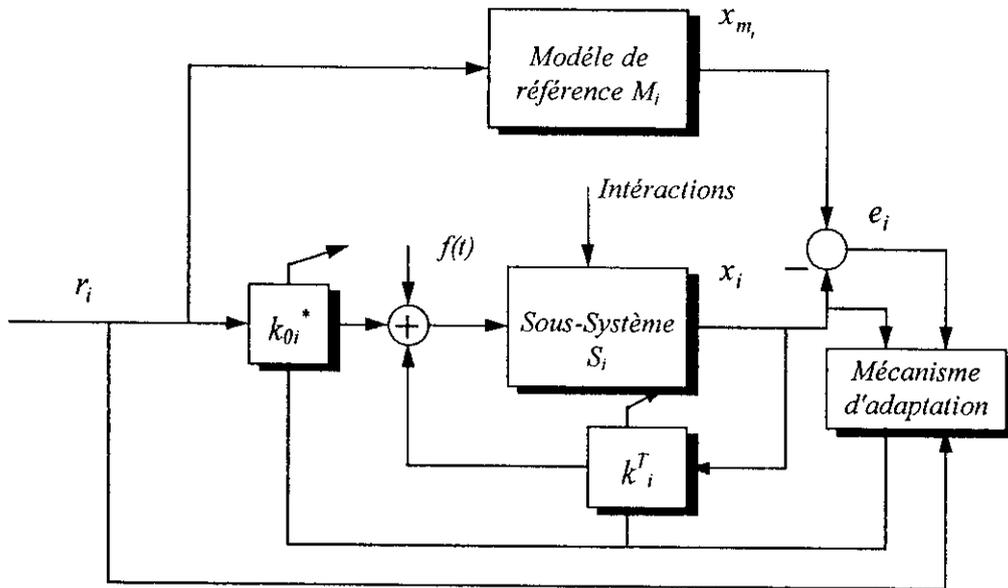


Fig.5.1: Structure d'une Commande Adaptative Décentralisée

En définissant $K^{*T} = \text{diag}\{k_1^{*T}, \dots, k_N^{*T}\}$ et $K_0^* = \text{diag}\{k_{01}^*, \dots, k_{0N}^*\}$ on aura

$$A_m = A + BK^{*T}, B_m = BK_0^* \tag{5.11}$$

5.3 INFLUENCE DES INTERCONNEXIONS D'ORDRE ELEVE (EXEMPLE ILLUSTRATIF)

Considérant le système interconnecté suivant :

$$\dot{v}_1 = b_1 u_1 - \sigma_1 v_1 v_2, \dot{v}_2 = b_2 u_2 - \sigma_2 v_1^2 \tag{5.12}$$

avec $b_i > 0$ et $\sigma_i > 0, i = 1, 2$.

On utilise les lois de commande adaptatives décentralisées suivantes: $u_i = -k_i v_i, \dot{k}_i = \gamma_i v_i^2$, avec $\gamma_i > 0$ et $i=1, 2$ pour la régulation du système (5.12) à l'origine. Le système en boucle fermée est donné par les équations :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -b_1 k_1 v_1 - \sigma_1 v_1 v_2, & \dot{k}_1 &= \gamma_1 v_1^2 \\ \dot{v}_2 &= -b_2 k_2 v_2 - \sigma_2 v_1^2, & \dot{k}_2 &= \gamma_2 v_2^2 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Le point d'équilibre du système en boucle fermée est donné par : $(v_1, v_2, k_1, k_2) = (0, 0, k_1^*, k_2^*)$.

Le système linéarisé autour de ce point d'équilibre est : $\dot{v}_i = -b_i k_i^* v_i, i = 1, 2$, le point d'équilibre est stable, instable, ou à la limite de stabilité. Cela dépend des valeurs de k_1^* et k_2^* . Pour mieux comprendre l'influence des termes d'interaction, nous traitons les cas suivants :

1^{er} cas : $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, dans ce cas le système (5.13) est réduit à :

$$\dot{v}_i = -b_i k_i v_i, \dot{k}_i = \gamma_i v_i^2, (i = 1, 2)$$

Ce système est composé de deux sous-systèmes isolés, et possède un point d'équilibre à $v_1 = v_2 = 0$, qui est globalement asymptotiquement stable. Pour la preuve de la stabilité on utilise la fonction de Lyapunov suivante $V = \gamma_1 v_1^2 + \gamma_2 v_2^2 + b_1 (k_1 - k_{01})^2 + b_2 (k_2 - k_{02})^2$ avec $k_{0i} > 0$.

Il est clair que $V(v_1, v_2, k_1, k_2)$ est une fonction positive et que

$$\dot{V} = -b_1 \gamma_1 k_{01} v_1^2 - b_2 \gamma_2 k_{02} v_2^2 < 0$$

En utilisant la seconde méthode de Lyapunov, on conclue que le point d'équilibre $(v_1, v_2) = (0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable.

2^{ème} cas: supposant, maintenant que les interconnexions sont bornés par un polynôme d'état du premier ordre, c'est à dire $\|z_i(t, \bar{x})\| \leq \sum_{j=1}^N \xi_{ij} \|\bar{x}_j\|$.

Le système en boucle fermé modifié devient :

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -b_1 k_1 v_1 - \sigma_1 v_2, \dot{k}_1 = \gamma_1 v_1^2 \\ \dot{v}_2 &= -b_2 k_2 v_2 - \sigma_2 v_1, \dot{k}_2 = \gamma_2 v_2^2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ce système possède aussi un point d'équilibre à $(v_1, v_2, k_1, k_2) = (0, 0, k_1^*, k_2^*)$. De nouveau la stabilité du système est démontrée en utilisant la fonction de Lyapunov précédente.

Si on pose $2\alpha = \gamma_1 \sigma_1 + \gamma_2 \sigma_2$, on aura

$$\dot{V} = -b_1 \gamma_1 k_{01} v_1^2 - b_1 \gamma_1 k_{01} v_1^2 + 2\alpha v_1 v_2 \leq -(b_1 \gamma_1 k_{01} - |\alpha|^{1/2}) v_1^2 - (b_2 \gamma_2 k_{02} - |\alpha|^{1/2}) v_2^2$$

Du fait que k_{0i} n'est pas spécifié directement dans la commande, on peut toujours choisir

$$k_{0i} > (1 + \frac{|\alpha|^{0.5}}{b_i \gamma_i}), i=1, 2.$$

On obtient donc, $\dot{V} \leq -v_1^2 - v_2^2$. En utilisant la seconde méthode de Lyapunov, on conclue que les solutions du système modifié (5.14) sont globalement bornées et $v_i \rightarrow 0, i=1, 2$, quand $t \rightarrow +\infty$. Ceci est un cas particulier du problème de la régulation démontré par Gavel & Siljak [Gavel 89].

3^{ème} cas: Pour voir l'effet des interconnexions d'ordre élevé, nous considérons le cas initial (5.13). Pour la simulation, les paramètres du système et de la commande sont choisis comme suit: $b_1=1/26$, $b_2=1$, $\sigma_1=5/13$, $\sigma_2=5$, $v_1(0) = v_2(0) = 1$, $k_1(0) = k_2(0) = 0$ et $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. La figure Fig.5.2 montre que le système est instable. Ainsi la présence des interconnexions d'ordre 2 déstabilise le point d'équilibre .

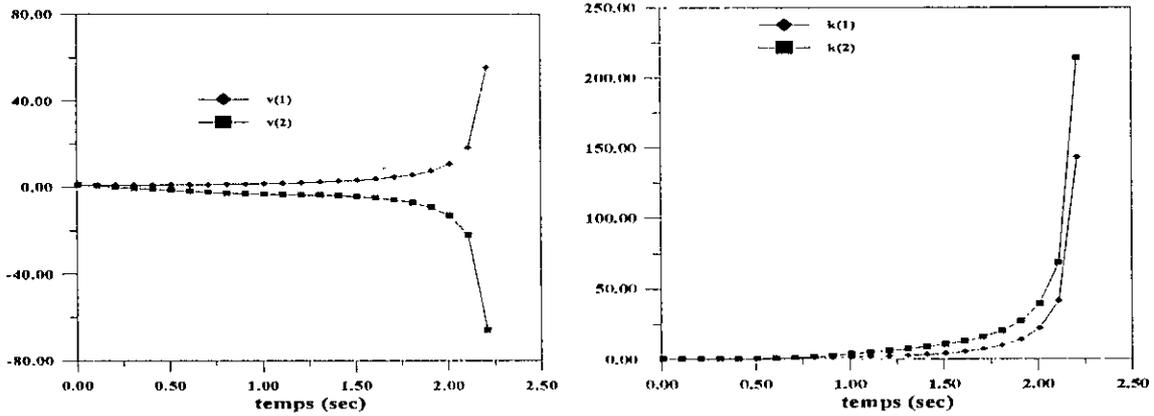


Fig.5.2: Instabilité du système causée par des interconnexions du second ordre

Une analyse qualitative du comportement du système en présence des interconnexions d'ordre élevé, nous aide à mieux maîtriser la synthèse des commandes compensant l'effet des termes d'interaction.

Les lois d'adaptation pour les gains k_i , indiquent que pour $v_i \neq 0$, k_i augmente proportionnellement à v_i^2 (5.14). Pour des valeurs élevées de v_i , k_i augmente rapidement par rapport à v_i , et donc les termes d'interaction $\sigma_i v_j$ sont négligés devant $b_i k_i v_i$.

Le système (5.14) se réduit donc à : $\dot{v}_i = -b_i k_i v_i$, $k_i > 0$ ($i = 1, 2$) pour t suffisamment grand.

Dans le cas où les interconnexions augmentent de façon proportionnelle à v_i^2 où à $v_i v_j$ (5.13), les remarques précédentes ne sont plus valables. Pour des conditions initiales spécifiques, v_i augmente plus rapidement que k_i , et même si k_i est grand et positif, le terme $k_i v_i$ est toujours plus petit devant $\sigma_i v_i^2$ (où $\sigma_i v_j^2$ où $\sigma_i v_i v_j$). Cela dit, une commande décentralisée classique de type: $u_i = -k_i v_i$ avec la loi d'adaptation standard pour k_i n'est pas adéquate pour stabiliser un système qui possède des interconnexions d'ordre élevé. Des termes non linéaires doivent être ajoutés soit dans la loi d'adaptation, soit comme signal auxiliaire dans la commande. Nous allons par la suite examiner en détail cette voie.

Pour illustrer l'utilisation des termes fortement non linéaires dans la synthèse des commandes décentralisées stabilisantes, nous étudions le système suivant :

$$\dot{x} = u_x + y^2, \dot{y} = u_y + x^2$$

Dans un premier lieu on utilise un retour de sortie à gain constant :

$$u_x = -\gamma x, u_y = -\gamma y; \gamma > 0.$$

Le système en boucle fermée possède deux point d'équilibres à $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et $(x_1, y_1) = (\gamma, \gamma)$, en linéarisant le système autour de ces points d'équilibre on déduit que le $(0, 0)$ est un point stable et (γ, γ) est un point à la limite de stabilité.

On considère maintenant l'introduction d'un signal auxiliaire d'ordre élevé dans la commande précédente: $u_x = -\gamma x(1+x^2)$, $u_y = -\gamma y(1+y^2)$, on note que la structure de ces commandes reste toujours décentralisée.

Le système en boucle fermée de 5ent $\dot{x} = -\gamma x(1+x^2) + y^2$, $\dot{y} = -\gamma y(1+y^2) + x^2$.

En choisissant $\gamma \geq 1$, le point d'équilibre à l'origine est globalement asymptotiquement stable du fait que $V = x^2 + x^4 + y^2 + y^4$ est une fonction de Lyapunov pour ce système.

Cette utilisation des termes d'ordre élevé dans la synthèse des commandes décentralisées est une introduction à une synthèse plus générale des commandes adaptatives décentralisées pour les systèmes caractérisés par des fortes interconnexions.

5.4 COMMANDE ADAPTATIVE DECENTRALISEE

Dans la partie précédente de ce chapitre, nous avons vu l'incapacité d'une commande adaptative décentralisée classique à stabiliser un système contenant des interconnexions d'ordre élevé. Etant donnée que ces dernières sont souvent fortement non linéaires, elles doivent être compensé de façon décentralisée soit par l'addition des termes non linéaires dans la loi de commande sans modifier sa structure, soit par modification de la loi d'adaptation. C'est dans cette voie, que Shi & Singh [Shi 92] ont portés leurs contributions. Le premier problème qui se pose chronologiquement, est d'obtenir une loi de commande partiellement centralisée, puis essayer de décentraliser tout l'algorithme de calcul de commande. Dans un premier lieu, Shi & Singh ont proposés une commande qui comporte une composante décentralisée et un compensateur (signal auxiliaire) centralisé, puis une décentralisation totale de ce dernier dans les deux cas suivants: interconnexions du second ordre et interconnexions d'ordre quelconque.

5.4.1 Commande avec Compensateur Partiellement Centralisé

L'idée d'utiliser cette stratégie de progression dans la décentralisation des commandes n'est pas nouvelle. En effet, Ossman [Ossman 89] a proposé une commande adaptative indirecte décentralisée, mais qui utilise pour l'estimation des paramètres un algorithme d'adaptation paramétrique centralisé. On trouve aussi dans [Benhammou 88] la possibilité d'utiliser des commandes locales avec des estimateurs adaptatives globales.

On considère le problème de la poursuite d'un modèle de référence (5.8), et soit $e_i(t) = x_i(t) - x_m(t)$ l'erreur de poursuite.

La commande adaptative décentralisée proposée est donnée par :

$$u_i(t) = \mathcal{G}_i^T v_i + f_i(t) \quad (5.15)$$

où $v_i(t) = (e_i^T(t), r_i)$ est le vecteur de régression et $\mathcal{G}_i^T = (k_i^T, k_{0i})$ est le vecteur gain d'adaptation.

La loi de commande (5.15) se compose de deux termes :

- $\mathcal{G}_i^T v_i$ est un contrôleur adaptatif décentralisé.
- $f_i(t)$ est un compensateur à structure centralisée.

Cette stratégie se veut être une tentative de passer d'une commande complètement centralisée à une commande partiellement centralisée.

La loi d'adaptation des paramètres utilisée est la suivante :

$$\bar{\mathcal{G}}_i = -\Gamma_i(b_m^T P_i e_i) v_i - \Gamma_i \sigma \mathcal{G}_i \quad (5.16)$$

où P_i est définie dans (5.7) et σ est le paramètre de la méthode dite « σ -modification » utilisée pour améliorer la robustesse du système globale, Γ_i est une matrice définie positive de dimension convenable.

Le compensateur centralisé proposé est donné par :

$$f_i(t) = -\rho(b_m^T P_i e_i) \sum_{k=0}^p \|e\|^{2k} \quad (5.17)$$

avec $e = (e_1^T, \dots, e_N^T)^T$ et ρ est un paramètre choisi strictement positif.

Le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_m e_i + b_i \left[\phi_i^T v_i - \rho(b_m^T P_i e_i) \sum_{k=0}^p \|e\|^{2k} + z_i(t, x) - k_i^{*T} x_m \right] \\ \dot{\phi} &= -\Gamma_i(b_m^T P_i e_i) v_i - \Gamma_i \sigma (\phi_i + \mathcal{G}_i^*) \end{aligned} \quad (5.18)$$

où $\phi_i = \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_i^*$, $\mathcal{G}_i^* = (k_i^{*T}, k_{0i}^*)^T$ désignent respectivement pour chaque sous-système l'erreur paramétrique et le vecteur gain de la commande linéaire à poursuite parfaite.

Le théorème suivant est donné dans [Shi 92].

Théorème 1:

D'après les hypothèses *HP1* et *HP2* avec ξ_{ij}^k inconnus, les solutions $(e, \phi)(t; t_0, e_0, \phi_0)$ des équations (5.18) convergent globalement vers un ensemble résiduel donné par :

$$\Omega_f = \{(e, \phi) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^L : V(e, \phi) \leq V_f\} \quad (5.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi &= (\phi_1^T, \dots, \phi_N^T)^T, n = \sum_{i=1}^N n_i, L = \sum_{i=1}^N (n_i + 1) \\ V_f &= \mu^{-1} \eta \text{ et} \\ \mu &= \min\{\lambda_{\max}^{-1}(P) \lambda_{\min}(Q), \sigma \lambda_{\max}(\Gamma)\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \eta &= \sigma \|\bar{\mathcal{G}}^*\|^2 + 0.5 \rho^{-1} N \left[(N \zeta_{\max} c_{\max} + \|k^{*T} \bar{x}_m\|)^2 + p (N \zeta_{\max} c_{\max})^2 \right] \\ \zeta_{\max} &= \max_{i,j,k} (\xi_{ij}^k), c_{\max} = \max_{k,j} (s_{kj}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

s_{kj} est donné en annexe B (équation B.5).

En plus on a :

$$P = \text{diag}\{P_1 \quad \dots \quad P_N\}, Q = \text{diag}\{k_{01}^* Q_1 \quad \dots \quad k_{0N}^* Q_N\} \text{ et } \Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1 \quad \dots \quad \Gamma_N\}.$$

La démonstration du théorème 1 est donnée en annexe B

Remarque 1

Puisque ξ_{\max} , c_{\max} et $\|k_i^{*T} \bar{x}_{m_i}\|$ sont des constantes bornées (quoique possible qu'ils soient inconnus), on peut diminuer σ et augmenter ρ et Γ pour rendre Ω_f petit autant qu'on le désire. Cependant un compromis est à faire entre la taille de l'ensemble résiduel et celle des gains de la commande (plus Ω_f est petit plus les gains sont élevés).

5.4.2 Commande avec Compensateur Décentralisé : Interconnexions d'ordre 2

Dans le cas où l'hypothèse *HP2* est utilisée pour caractériser la nature des interconnexions, nous avons vu qu'une commande décentralisée avec un compensateur centralisé peuvent être utilisés pour avoir un système globalement borné. La question qui se pose à ce niveau est : peut-on garantir la stabilité en choisissant un compensateur à structure décentralisée ?

Nous allons illustrer cette possibilité, dans cette section, pour des interconnexions d'ordre deux ($p=2$).

5.4.2.1 Commande Décentralisée Semi-Adaptative

On suppose que ξ_{ij}^k définis dans (5.5), sont connus (ou peuvent être estimés a priori). Cette condition ne va pas être respectée dans le cas du schéma complètement adaptative étudié dans la section prochaine.

On propose d'utiliser le compensateur décentralisé suivant :

$$f_i(t) = -\rho_i (b_{m_i}^T P_i e_i) (1 + \|e_i\|^2) \tag{5.22}$$

et la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\rho}_i = -\Gamma_i (b_{m_i}^T P_i e_i) \nu_i \sum_{k=1}^2 k (e_i^T P_i e_i)^{k-1} - \Gamma_i \sigma \rho_i \tag{5.23}$$

avec P_i définie en (5.7), $\sigma > 0$ et Γ_i est une matrice $n_i \times n_i$ définie positive (DP).

Dans le cas où ξ_{ij}^k sont connus, le gain ρ_i est constant, et on parle d'une commande décentralisée semi-adaptative, le gain ρ_i n'est pas adapté à chaque instant d'échantillonnage

le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} \dot{e}_i &= A_{m_i} e_i + b_i \left[\phi_i^T \nu_i + f_i + z_i(t, x) - k_i^{*T} x_{m_i} \right] \\ \dot{\phi}_i &= -\Gamma_i (b_{m_i}^T P_i e_i) \nu_i \sum_{k=1}^2 k (e_i^T P_i e_i)^{k-1} - \Gamma_i \sigma (\phi_i + \rho_i^*) \end{aligned} \tag{5.24}$$

Théorème 2:[Shi 92]

D'après les hypothèses *HP1* et *HP2* avec $p=2$ et pour ξ_{ij}^k connus, les solutions $(e, \phi)(t; t_0, e_0, \phi_0)$ des équations (5.24) convergent globalement vers un ensemble résiduel donné par (5.19)

La démonstration du théorème 2 est donnée en annexe B

Remarque 2

Les remarques citées dans la section précédente sont maintenues, en plus la méthode décrite précédemment possède l'inconvénient de prendre ρ_i grand ce qui détériore les signaux de commande. Un mauvais choix de ρ_i peut déstabiliser le système globale, ce qui nous oblige à utiliser une estimation adaptative de ce paramètre.

5.4.2.2 Commande Décentralisée Complètement Adaptative

Dans le cas où les paramètres ξ_{ij}^k donnés dans *HP2* sont inconnus, ρ_i l'est aussi, et la commande décentralisée semi-adaptative développée dans la section précédente n'est plus applicable. On introduit, donc la loi d'adaptation suivante de ρ_i :

$$\dot{\rho}_i = \gamma_i \|b_m^T P_i e_i\|^2 \left(1 + \|e_i\|^2\right) \sum_{k=1}^2 k (e_i^T P_i e_i)^{k-1} - \gamma_i \sigma_i \rho_i \quad (5.25)$$

avec γ_i, σ_i sont des scalaires positifs. Le système en boucle fermée est donc représentée par les équations (5.24) et (5.25).

Théorème 3: [Shi 92]

D'après les hypothèses *HP1* et *HP2* avec $p=2$ et ξ_{ij}^k inconnus,

les solutions $(e, \phi, \rho)(t; t_0, e_0, \phi_0, \rho_0)$ des équations (5.24) et (5.25) sont globalement asymptotiquement stables.

La démonstration de ce théorème est donnée en annexe B

Remarque 3

Les paramètres de synthèse $\delta_i, \rho_{i_{max}}^*,$ et ρ_i^* (annexe B) sont nécessaires pour garantir la stabilité du système en boucle fermée, Quoique l'existence de ρ_i^* est nécessaire pour la validité du théorème 3, ces paramètres n'interviennent pas explicitement dans les lois de commande. On peut obtenir le plus étroit ensemble résiduel possible que l'on désire en choisissant convenablement les paramètres de commande, et les modèles de références locaux. Un compromis est à faire entre la taille de l'ensemble résiduel et celle des gains de la commande, en effet plus Ω_f est petit plus les gains sont élevés (High-gain control) [Gavel 89].

5.4.3 Commande Adaptative Décentralisée : Interconnexions d'Ordre Elevé**5.4.3.1 Commande Décentralisée Semi Adaptative**

Dans le cas générale où les interconnexions satisfassent l'hypothèse *HP2*, avec $p>2$ et dans le cas où ξ_{ij}^k sont constants et bornés à la fois, on propose d'utiliser le compensateur suivant :

$$f_i(t) = -\rho_i (b_m^T P_i e_i) \left(1 + \|e_i\|^{2(p-1)}\right) \quad (5.26)$$

et la loi d'adaptation locale suivante :

$$\dot{\rho}_i = -\Gamma_i (b_m^T P_i e_i) v_i \sum_{k=1}^p k (e_i^T P_i e_i)^{k-1} - \Gamma_i \sigma_i \rho_i \quad (5.27)$$

Le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned}\dot{e}_i &= A_{m_i} e_i + b_i \left[\phi_i^T v_i + f_i + z_i(t, x) - k_i^{*T} x_{m_i} \right] \\ \dot{\phi} &= -\Gamma_i (b_{m_i}^T P_i e_i) v_i \sum_{k=1}^p k (e_i^T P_i e_i)^{k-1} - \Gamma_i \sigma (\phi_i + \mathcal{G}_i^*)\end{aligned}\quad (5.28)$$

avec $\phi_i = \mathcal{G}_i - \mathcal{G}_i^*$ et $\mathcal{G}_i^{*T} = \begin{pmatrix} k_i^{*T} & k_{0i}^* \end{pmatrix}$.

Le gain ρ_i est fixé ou estimé à priori (cas semi-adaptative) ou estimé adaptivement (voir théorème 5).

Théorème 4: [Shi 92]

D'après les hypothèses *HP1* et *HP2*, avec $p > 2$ et pour ξ_{ij}^k connus, les solutions $(e, \phi)(t; t_0, e_0, \phi_0)$ des équations (5.28) sont globalement asymptotiquement stables.

La démonstration du théorème 4 est donnée en annexe B

5.4.3.2 Commande Décentralisée Complètement Adaptative

Dans le cas où ξ_{ij}^k sont inconnus, on peut toujours utiliser des compensateurs à gains estimés adaptivement, on aura ainsi un schéma complètement adaptative (fully adaptive scheme).

La loi d'adaptation pour ces paramètres ρ_i est :

$$\dot{\rho}_i = \gamma_i \|b_{m_i}^T P_i e_i\|^2 \left(1 + \|e_i\|^{2(p-1)} \right) \sum_{k=1}^p k (e_i^T P_i e_i)^{k-1} - \gamma_i \sigma_i \rho_i \quad (5.29)$$

où γ_i, σ_i sont des paramètres choisis strictement positives.

Théorème 5: [Shi 92]

D'après les hypothèses *HP1* et *HP2* avec $p > 2$ et pour ξ_{ij}^k inconnues, les solutions $(e, \phi, \rho)(t; t_0, e_0, \phi_0, \rho_0)$ des équations (5.28) et (5.29) sont globalement asymptotiquement stables.

La démonstration du théorème 5 est détaillée en annexe B

5.5 ALGORITHME DE COMMANDE

1. initialiser les gains à ajuster.
2. choisir pour chaque sous-système un modèle de référence stable M_i (5.8).
3. choisir une matrice Q_i définie positive, et calculer la matrice P_i à partir de l'équation de Lyapunov (5.9).
4. choisir les paramètres de commande:
 - La matrice Γ_i (définie positive), et $\sigma > 0$
 - $\rho_i > 0$ dans le cas de la commande adaptative avec compensateur centralisé, et de la commande semi-adaptative ($p=2$ et $p>2$).
 - $\gamma_i > 0$ dans le cas du compensateur décentralisé adaptatif ($p=2, p>2$).

Etape1: générer les trajectoires de référence à partir de (5.8).

Etape2: Adaptation du vecteur gains \mathcal{G}_i en utilisant :

- (5.16) dans le cas de la commande avec compensateur centralisé.
- (5.23) dans le cas de la commande avec compensateur décentralisé ($p=2$).
- (5.27) dans le cas de la commande avec compensateur décentralisé ($p>2$).

Adaptation du gain ρ_i en utilisant :

- (5.25) dans le cas du compensateur décentralisé ($p=2$).
- (5.29) dans le cas du compensateur décentralisé ($p>2$).

Etape3: calcul du compensateur $f_i(t)$ à partir de :

- (5.17) dans le cas de la commande avec compensateur centralisé.
- (5.22) dans le cas de la commande avec compensateur décentralisé ($p=2$).
- (5.26) dans le cas de la commande avec compensateur décentralisé ($p>2$).
- calcul des commande à partir de (5.15).

revenir à l'étape 1.

Si les bornes des erreurs ne sont pas satisfaisantes, on doit opter pour un autre choix des paramètres de commande.

5.6 RESULTATS DE SIMULATIONS

Nous choisissons pour la simulation des différentes algorithmes de commande, le modèle de référence suivant pour chaque sous-système [Shi 92]:

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \bar{b}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la pulsation propre, ainsi que le coefficient d'amortissement de ce modèle de référence sont : $\omega_{0i} = 1 \text{ rad} / \text{s}$, $\xi = 1$.

pour $Q_i = 4I_2$, avec I_2 est la matrice d'identité de dimension 2×2 , l'équation de Lyapunov est résolue pour donner :

$$P_i = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \bar{b}_m^T P_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour permettre une étude comparative entre les différentes lois de commande, les paramètres sont maintenus constants pour les différents schémas, et sont donnés par :

- $\Gamma_i = 700 \times I_3$, $\rho_i = 20$, $\sigma_i = 0.05$, $i = 1, 2$ dans le cas de la commande avec compensateur centralisé et la commande avec compensateur décentralisé semi-adaptatif.

- $\Gamma_i = 700 \times I_3$, $\gamma_i = 10$, $\sigma_i = 0.05$, $i = 1, 2$ dans le cas de la commande avec compensateur décentralisé adaptatif.

Les résultats de simulation dans le cas de la commande avec compensateur centralisé sont consignés dans Fig.5.3 et Fig.5.4, nous avons varier brusquement la charge que porte l'élément terminal de 0 à 10 kg à l'instant $t=5$ sec. Nous constatons qu'il y'a poursuite parfaite, et les erreurs de poursuite sont bornées et convergent vers 0. On remarque aussi que les paramètres ajustés convergent vers leurs valeurs optimales et les compensateurs agissent de façon considérable dans le régime transitoire du système.

Dans Fig.5.5 et Fig.5.6, sont présentés les résultats de simulation de l'algorithme de commande avec compensateur décentralisé semi-adaptatif ($p=2$). Les mêmes constatations précédentes sont maintenues. En plus, on remarque qu'il y'a amélioration dans la poursuite de trajectoire.

On conclut que la décentralisation du compensateur n'a pas agi sur la stabilité du système, chose souhaitée. Une mauvaise estimation des paramètres des compensateurs peuvent déstabiliser le système en augmentant l'effort de la commande. Pour pallier à ce genre de problème nous avons optés pour l'application d'une commande où les gains sont ajustés de façon adaptative. On présente dans Fig.5.7 et Fig.5.8 les résultats de simulation de cette application, on remarque qu'une poursuite parfaite a été atteinte et cela en dépit de la variation brusque de la charge. En plus une amélioration a été obtenue concernant les efforts de la commande et les compensateurs en régime transitoire. Les résultats de simulation de la commande dans le cas des trajectoires cycloïdes sont regroupés dans Fig.5.9.

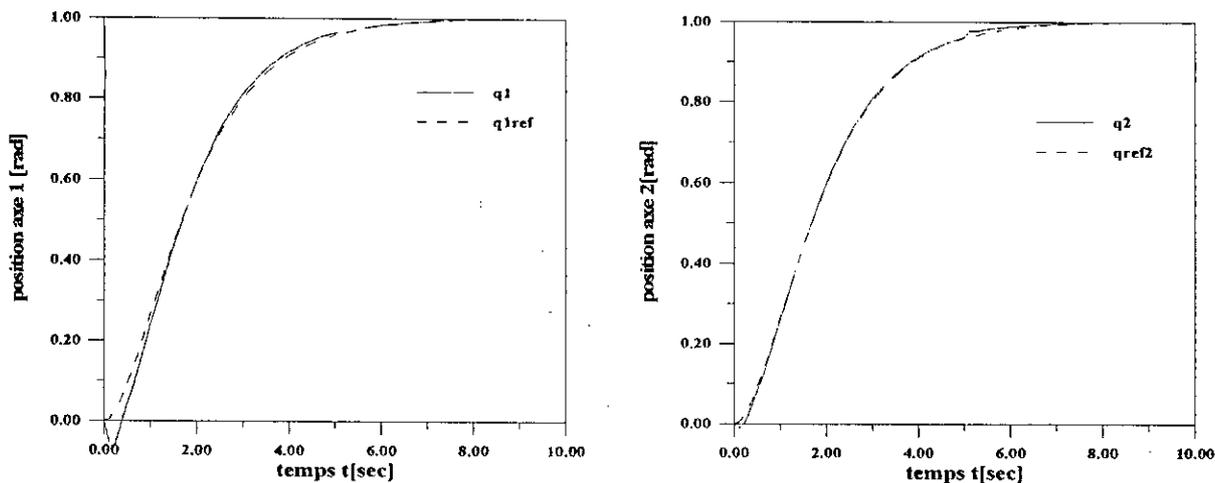


Fig.5.3.a- Positions réelles q et désirées qref

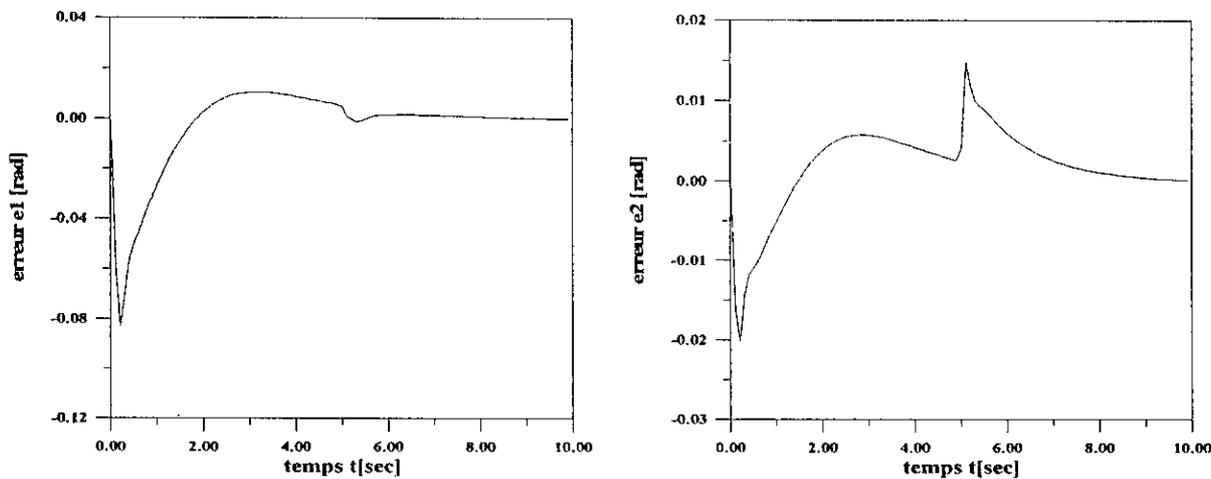


Fig.5.3.b- Présentation des erreurs de poursuite e1, e2

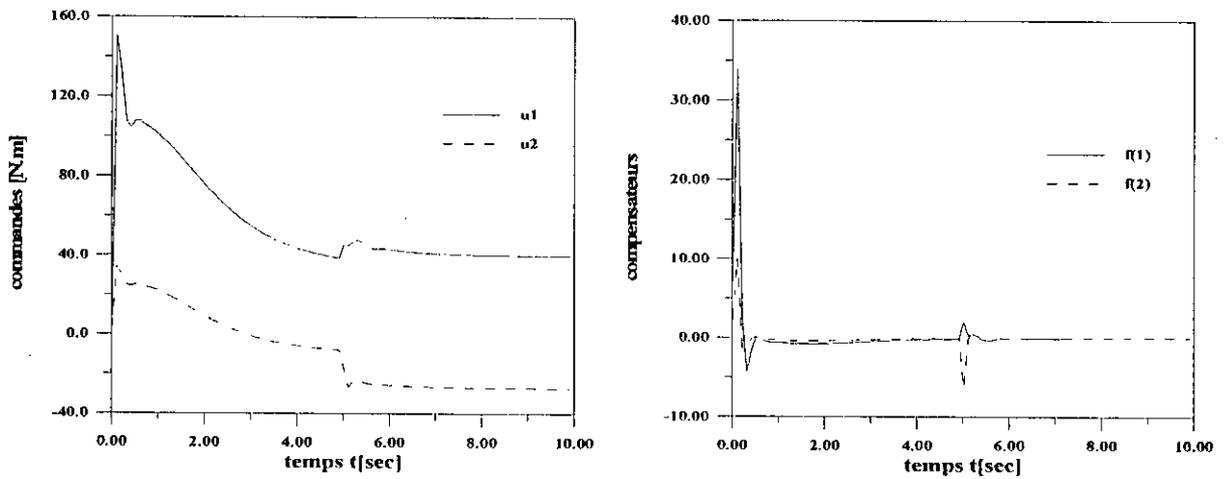
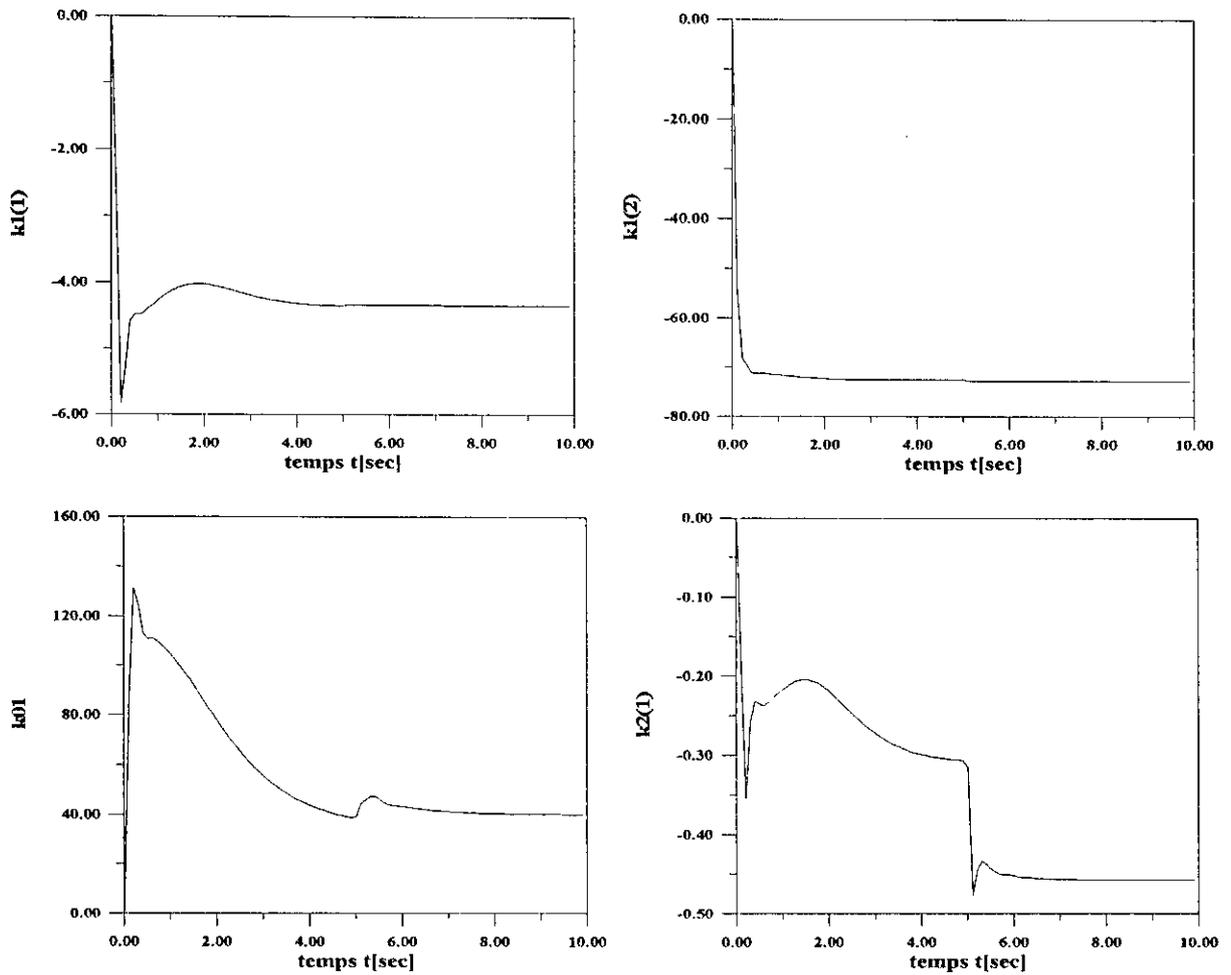


Fig.5.3.c- Présentation des commandes et des compensateurs

Fig.5.3: Commande Décentralisée avec Compensateur Centralisé - effet de variation de charge à $t=5$ sec-



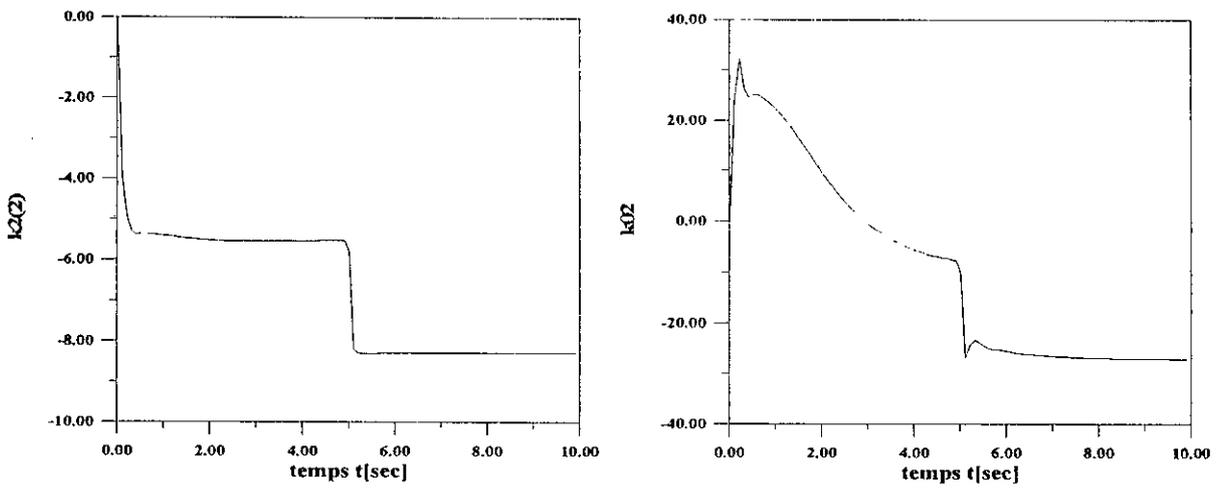


Fig.5.4: Présentation des gains ajustés
Commande Décentralisée avec Compensateur Centralisé
- effet de variation de charge à $t=5\text{sec}$ -

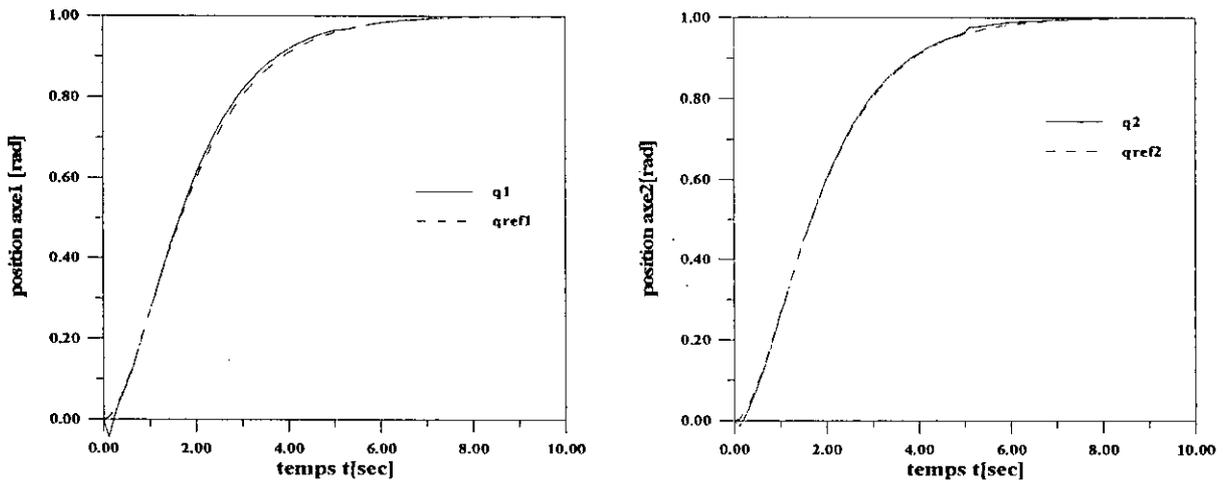


Fig.5.5.a- Positions réelles q et désirées q_{ref}

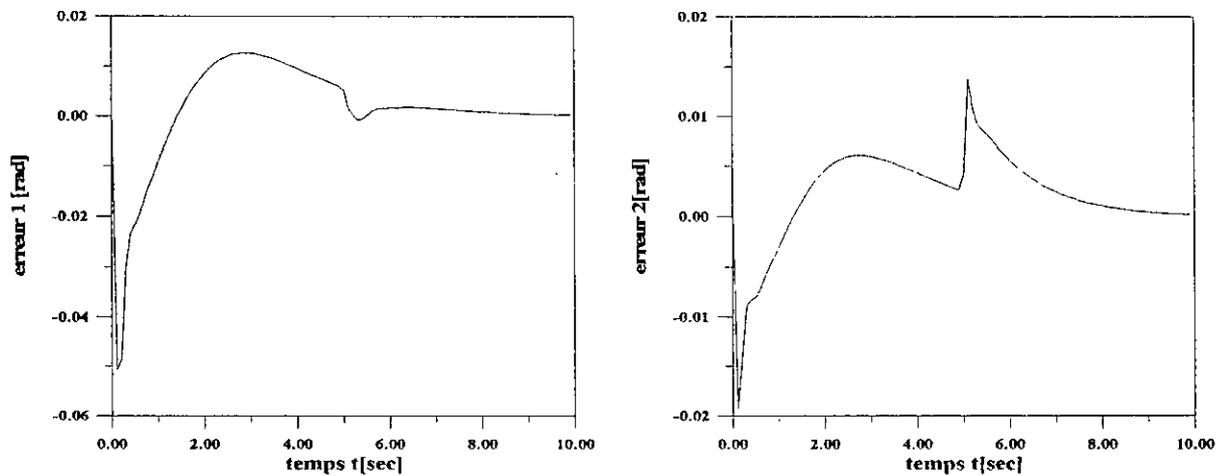


Fig.5.5.b- Présentation des erreurs de poursuite e_1 , e_2

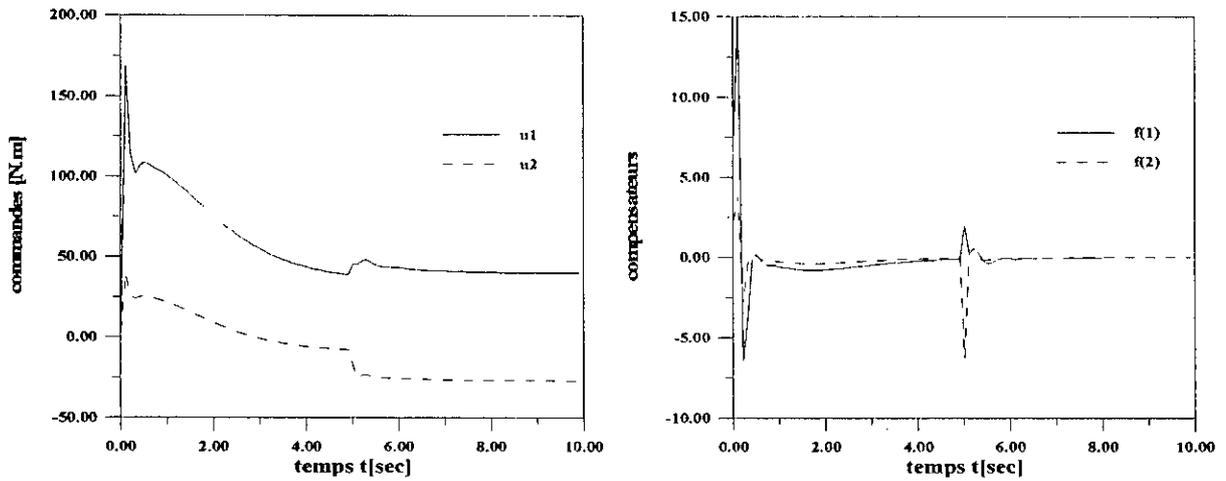
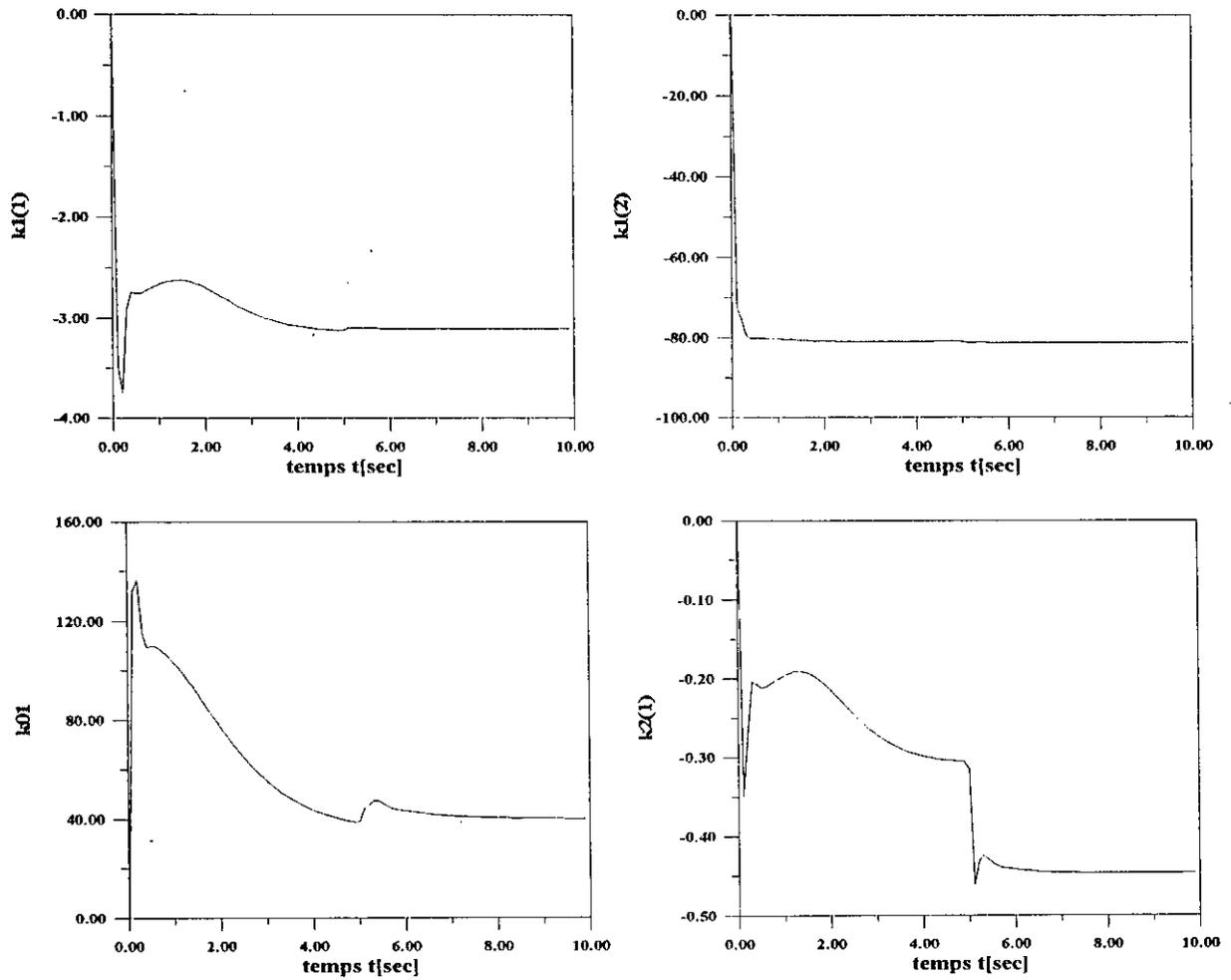


Fig.5.5.c- Présentation des commandes et des compensateurs

Fig.5.5: Commande Décentralisée avec Compensateur Décentralisé Semi-Adaptative - effet de variation de charge à $t=5$ sec -



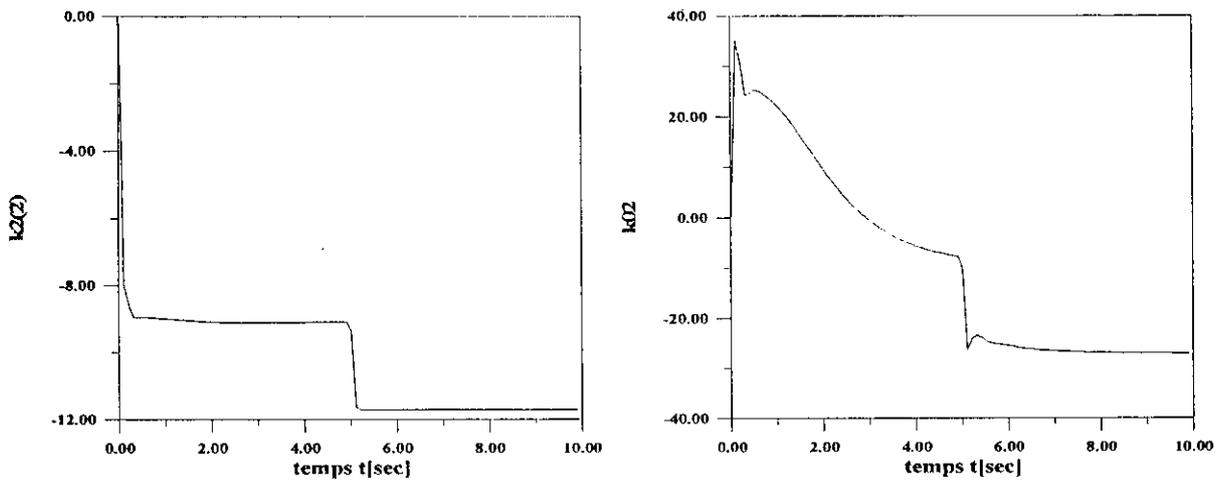


Fig.5.6: Présentation des gains ajustés
 Commande Décentralisée avec Compensateur Décentralisé Semi-Adaptative
 - effet de variation de charge à $t=5$ sec -

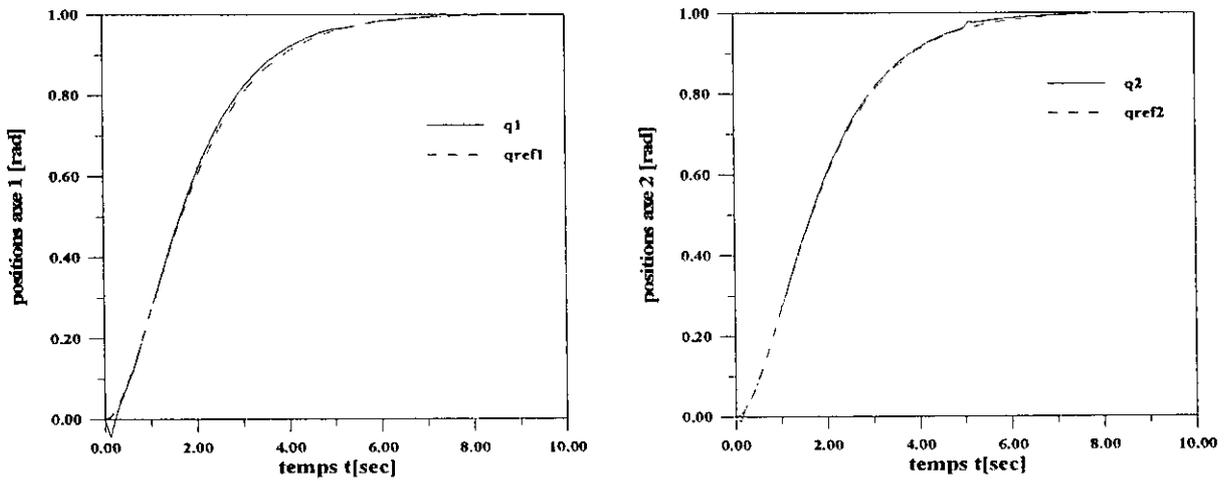


Fig.5.7.a- Positions réelles q et désirées $qref$

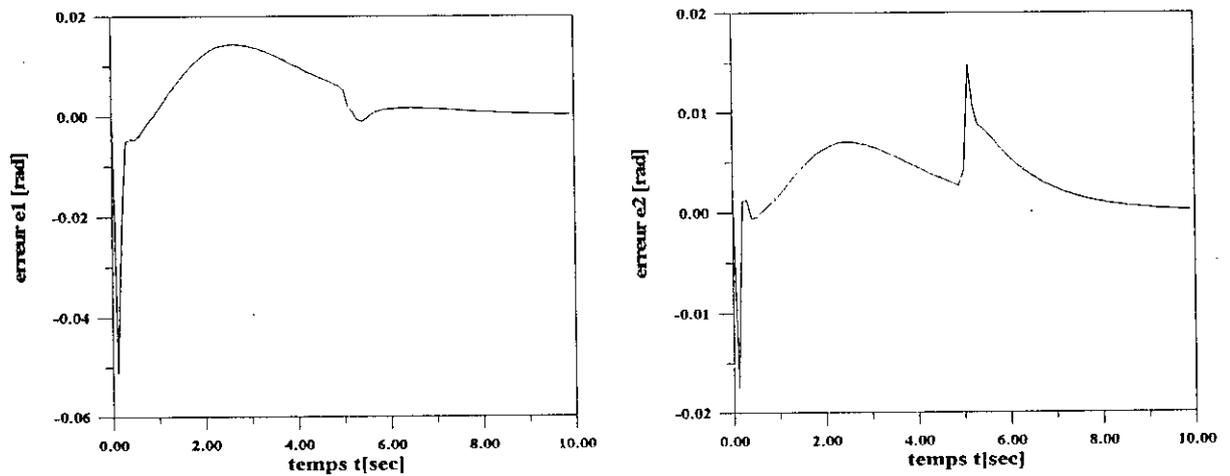


Fig.5.7.b- Présentation des erreurs de poursuite $e1, e2$

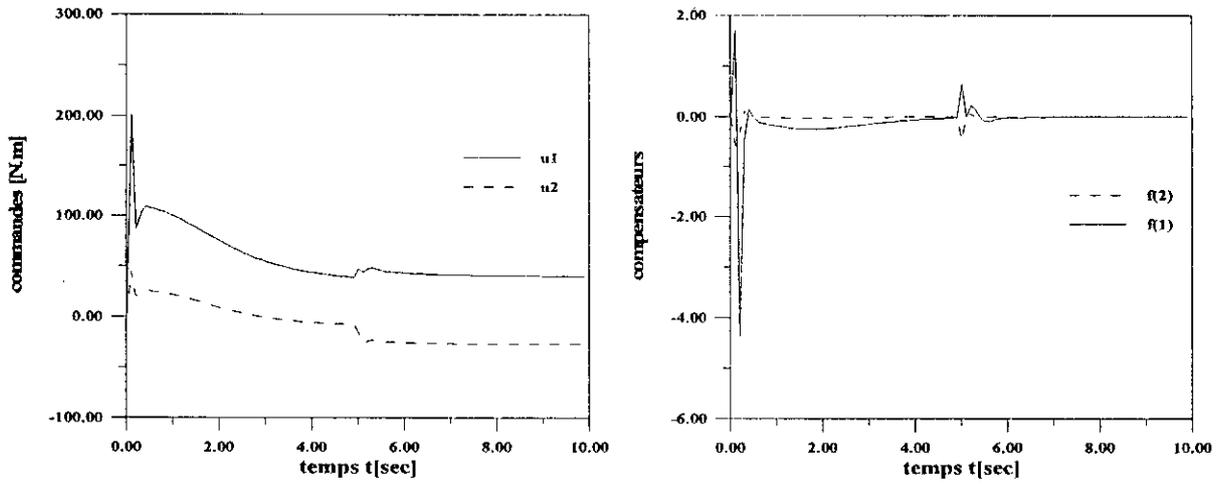
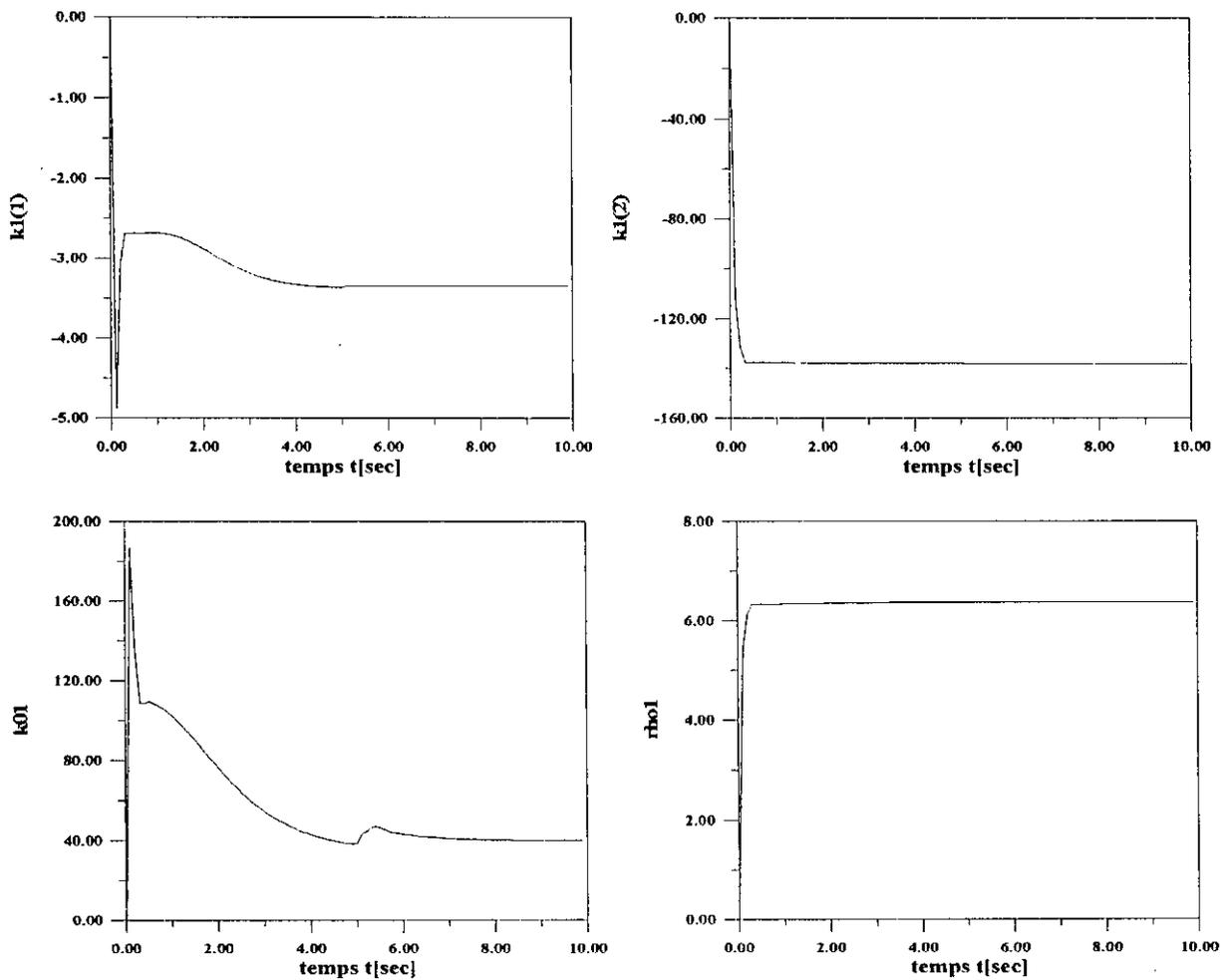


Fig.5.7.c- Présentation des commandes et des compensateurs

Fig.5.7: Commande Décentralisée avec Compensateur Décentralisé
- effet de variation de charge à $t=5$ sec-



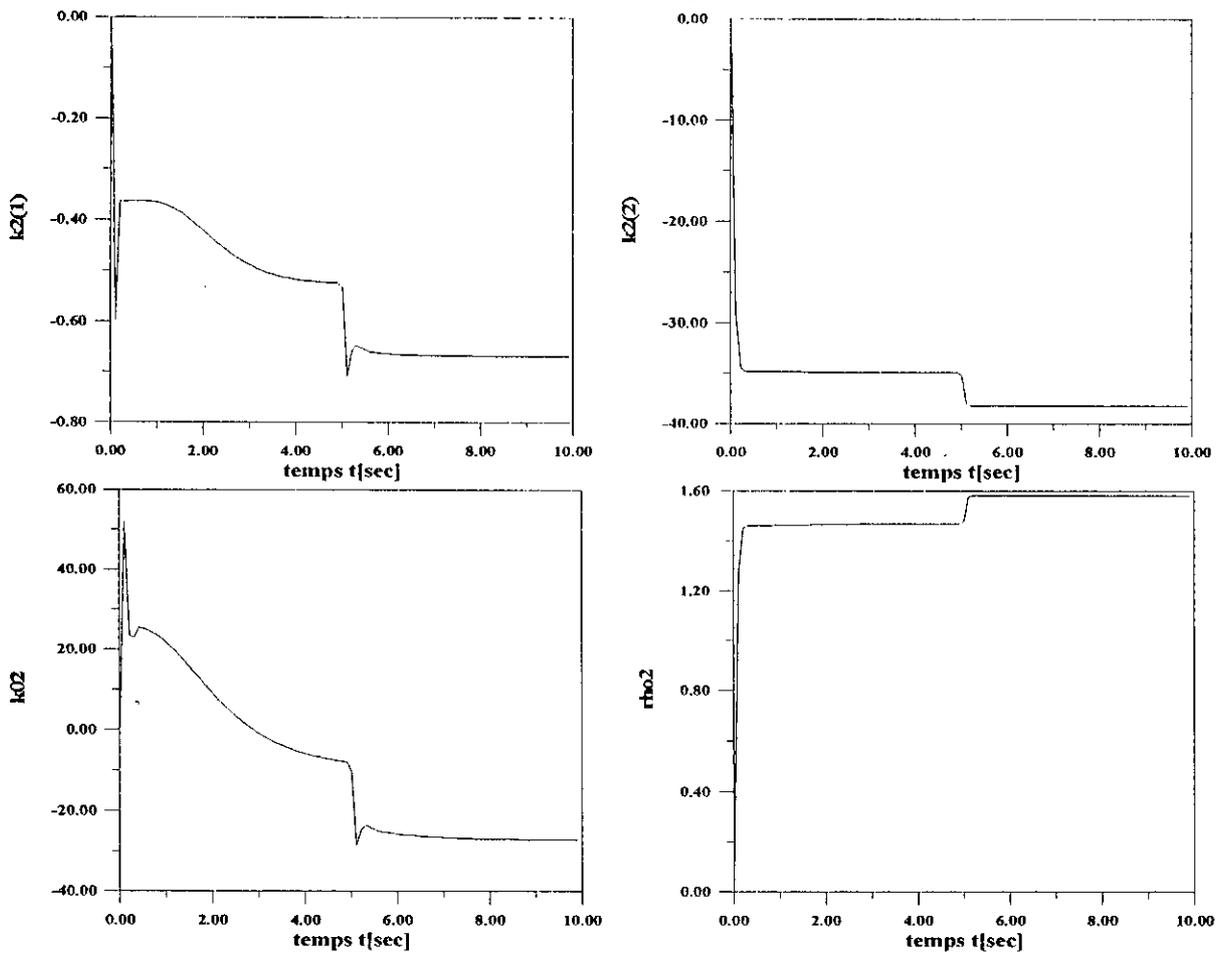


Fig.5.8: Présentation des gains ajustés
 Commande Décentralisée avec Compensateur Décentralisé
 - effet de variation de charge à $t=5$ sec -

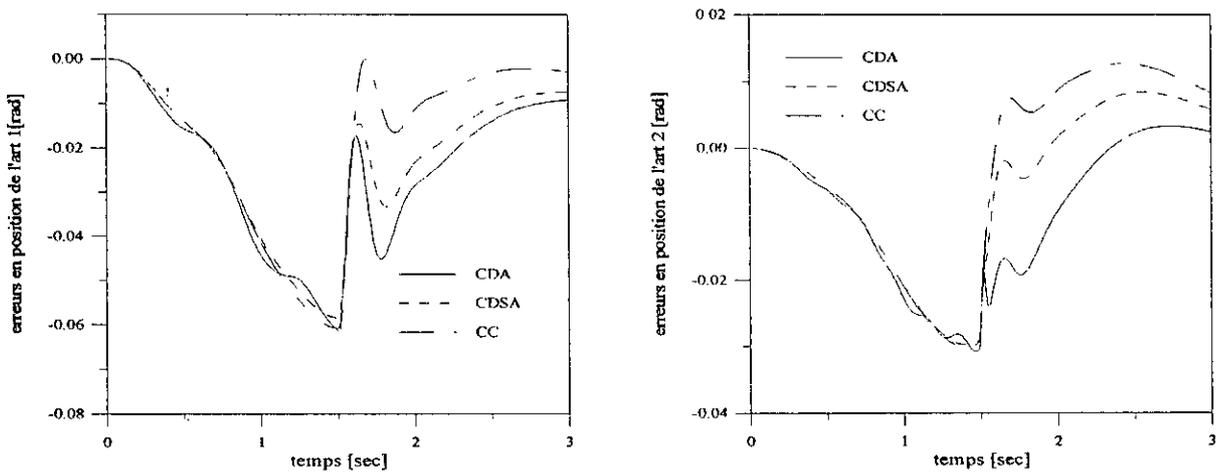


Fig.5.9.a- Présentation des erreurs de poursuite $e1, e2$

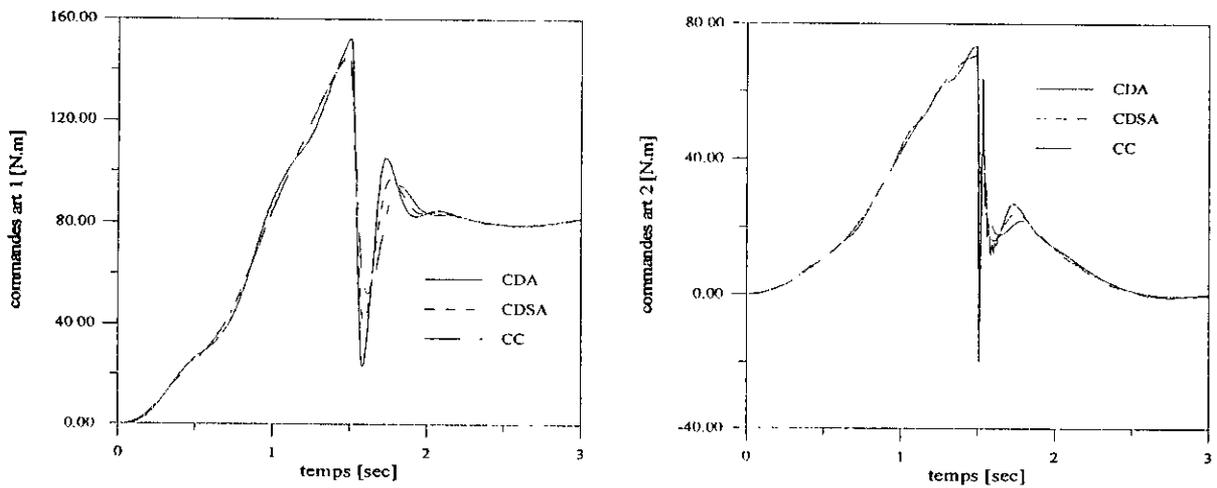


Fig.5.9.b- Présentation des commandes

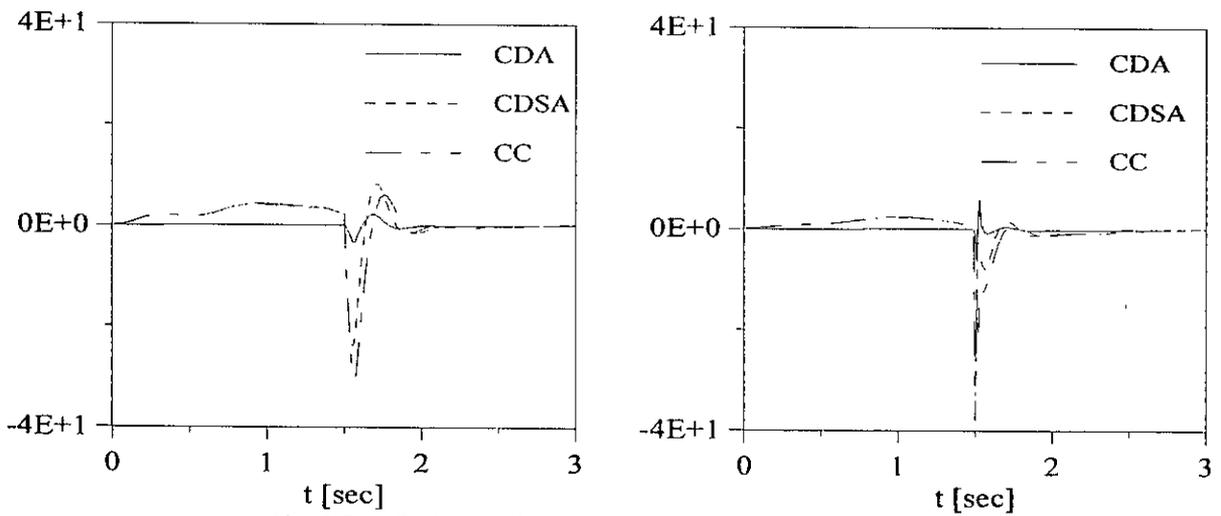


Fig.5.9.c- Présentation des compensateurs $f_1(t)$ et $f_2(t)$

Fig.5.9: Commande Adaptative Décentralisée avec variation de charge à $t=1.5$ sec

- C.C : Compensateur Centralisé
- C.D.S.A : Commande Décentralisée Semi - Adaptative
- C.D.A : Commande Décentralisée Adaptative

5.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude relative à l'élaboration des schémas adaptatifs décentralisés pour les systèmes caractérisés par des fortes interconnexions.

Dans un premier lieu, nous avons établi le modèle mathématique du système interconnecté ainsi que les hypothèses faites sur les interactions. En second lieu, un exemple illustratif a été étudié en détail permettant de conclure sur l'incapacité d'une commande adaptative classique à stabiliser un système contenant des interconnexions d'ordre élevé.

Dans la troisième partie de ce chapitre, les différents scénarios de la commande adaptative décentralisée sont présentés. Il s'agit de la commande avec compensateur centralisé et de la commande avec compensateur décentralisé dans les deux cas : Interconnexions d'ordre 2 et interconnexions d'ordre quelconque. Différentes simulations nous ont permis de juger positivement la stabilité et l'efficacité de ces algorithmes.

Conclusion Générale

L'objectif principal de ce travail était d'essayer d'ouvrir la voie vers la maîtrise des techniques de commandes adaptatives décentralisées et leurs applications pour la commande des robots manipulateurs. La majorité des travaux réalisés dans le domaine de la commande adaptative décentralisée concernent les systèmes interconnectés linéaires qui sont soumis à un certain nombre de contraintes structurelles.

Nous avons tout d'abord commencé par l'élaboration du modèle dynamique du robot en utilisant deux approches différentes à savoir l'approche d'E-L et l'approche de N-E. Nous avons montré que ce dernier peut faire le sujet d'une décomposition en sous-systèmes interconnectés. La commande de chaque liaison étant vue comme un sous-problème résolu de façon indépendante (*Independent Joint Control*). Le modèle des sous-systèmes après décomposition nous a permis d'écarter plusieurs commandes décentralisées qu'on trouve dans la littérature, notamment les commandes qui traitent les systèmes ayant des fonctions d'interconnexion linéaires par rapport aux états.

Nous avons ensuite présenté une commande adaptative décentralisée (*ADC*) simple de structure et robuste par rapport aux variations paramétrique. Basée sur le modèle inverse du robot, la commande utilise l'adaptation de ses gains pour parvenir à approcher les trajectoires désirées et pallier au variation du point de fonctionnement du système. Les lois d'adaptation ont été déduite à partir de la seconde méthode de Lyapunov et le nombre des gains ajustables a été réduit par rapport au cas centralisé ce qui a engendré un temps de calcul considérablement petit.

La deuxième commande *ADC* avancée utilise le modèle à perturbation du robot manipulateur pour générer un couple variationnel. Son rôle est de corriger l'écart en position des trajectoires du robot (régulation). L'approche de N-E est utilisée dans la chaîne "*feed-forward*" de la commande. Cette approche est susceptible de fournir les couples nominaux à partir des trajectoires de référence du robot. L'avantage d'une telle technique réside dans le fait qu'on peut geler l'action "*feed-forward*" sans que nous n'ayons pas repéré des variations paramétriques durant le fonctionnement du système. L'inconvénient majeur de la commande est due au fait que sa structure est qualifiée de 'partiellement' centralisée, car l'approche de N-E donne un modèle fortement couplé pour chaque sous-système.

La commande adaptative décentralisée des systèmes faiblement interconnectés suppose que les interconnexions sont bornées par un polynôme d'état d'ordre strictement inférieur à deux. Cette supposition restreint le nombre des systèmes considérés par cette commande. Les différentes techniques rassemblées dans ce contexte possèdent une certaine similarité. En effet, on trouve les mêmes lois d'adaptation, seule la pondération diffère d'un algorithme à un autre. L'introduction du signal auxiliaire comme un compensateur adaptatif a amélioré considérablement les performances des systèmes de commande.

Une partie de nos travaux de recherche a été consacrée aux systèmes ayant des fonctions d'interconnexions d'ordre quelconque. Pour une prise en compte de ces fonctions fortement non linéaires, l'algorithme de la commande est modifiée soit par l'addition d'un compensateur fortement non linéaire, soit par l'utilisation d'une autre loi d'adaptation plus compliquée. Le choix du gain constant du compensateur a un effet primordiale sur la taille de l'ensemble résiduel des erreurs de poursuite et paramétriques, c'est le cas de la commande semi-adaptative. Un mauvais choix peut déstabiliser le système, pour remédier à ce type de problème, le gain est adapté et on obtient un schéma complètement adaptatif.

Les résultats de simulation obtenus nous ont permet de juger de façon positive la stabilité et la robustesse des schémas de commande étudiés. Les écarts observés entre les performances désirées et celles obtenues sont dus au problème de choix des différents gains d'adaptation et facteurs de pondération optimales.

Dans notre étude, nous n'avons pas considéré l'utilisation d'une fonction de supervision pour les schémas de commande élaborés. En effet, cette fonction doit être appelée à intervenir dès qu'une situation indésirable apparaît. L'élaboration pratique des mécanismes de supervision consiste en l'utilisation des règles et de solutions heuristiques qui dépendent souvent de l'application et du processus considéré. A cet effet, nous suggérons d'utiliser la théorie de la logique floue comme un moyen efficace de décision.

Nous avons supposé que les états du système sont accessible lors de la mesure. Cette supposition n'est pas toujours vérifiée et on a souvent recours dans ces cas là à l'utilisation des observateurs d'états. Cependant, les observateurs classiques ne sont pas souhaités dans le cas où on veut maintenir la décentralisation du système de commande. A cet effet, nous suggérons l'utilisation des observateurs à structure décentralisée.

Annexe A

Dérivation des lois d'adaptation pour "MRDAC"

L'application de la commande définie par (2.26) au modèle de la $i^{\text{ème}}$ articulation défini par (2.24) donne l'équation dynamique de l'erreur de poursuite:

$$m\ddot{e} + k_1\dot{e} + k_0e = d - f - q_0\theta_r - q_1\dot{\theta}_r + (m - q_2)\ddot{\theta}_r \quad (\text{A.1})$$

on a omis l'indice i pour simplifier le développement.

On définit un vecteur d'état $x(t)$ comme suit:

$$x(t) = [e(t) \quad \dot{e}(t)]^T \quad (\text{A.2})$$

L'écriture sous forme d'état de l'équation dynamique de l'erreur (A.1) est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_0}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d-f}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q_0}{m} \end{bmatrix} \theta_r(t) \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{q_1}{m} \end{bmatrix} \dot{\theta}_r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m-q_2}{m} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_r(t) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

L'objectif de la commande est d'imposer une dynamique désirée à l'erreur de poursuite $e(t)$, cette dernière est définie par l'équation différentielle homogène suivante:

$$\ddot{e}_m(t) + 2\xi\omega\dot{e}_m(t) + \omega^2 e_m(t) = 0 \quad (\text{A.4})$$

On réécrit l'équation (A.4) sous la forme d'état suivante:

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} x_m(t) = Dx_m(t) \quad (\text{A.5})$$

avec $x_m(t) = [e_m(t) \quad \dot{e}_m(t)]^T$.

Le modèle de référence (A.5) est choisit stable, donc il existe une matrice symétrique et définie positive P et une matrice définie non négative Q qui satisfassent l'équation de Lyapunov suivante:

$$PD + D^T P = -Q \quad (\text{A.6})$$

Si la matrice Q est choisie diagonale tel que:

$$Q = \begin{bmatrix} 2q_{11} & 0 \\ 0 & 2q_{22} \end{bmatrix}, \quad q_{11} \text{ et } q_{22} > 0$$

alors, l'équation (A.6) devienne:

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & -2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2q_{11} & 0 \\ 0 & 2q_{22} \end{bmatrix}$$

La résolution de l'équation donnée ci-dessus donne le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} -2p_2\omega^2 = -2q_{11} \\ p_1 - 2\xi\omega p_2 = \omega^2 p_3 \\ 2p_2 - 4\xi\omega p_3 = -2q_{22} \end{cases}$$

on obtient facilement:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2\xi\omega} \left[(1 + 4\xi^2)q_{11} + \omega^2 q_{22} \right] \\ p_2 &= \frac{q_{11}}{\omega^2} \\ p_3 &= \frac{1}{2\xi\omega} \left(\frac{q_{11}}{\omega^2} + q_{22} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dans le but d'avoir une solution avec $p_2 = w_p$ et $p_3 = w_v$ tels que w_p et w_v sont des scalaires positifs, les éléments de la matrice Q seront:

$$\begin{cases} q_{11} = \omega^2 w_p \\ q_{22} = 2\xi\omega w_v - w_p \end{cases}$$

Pour garantir que la matrice Q soit toujours définie non négative il suffit d'imposer la condition suivante:

$$\frac{w_p}{w_v} < 2\xi\omega \quad (\text{A.8})$$

Si on choisit $x_m(0) = [e_m(0) \quad \dot{e}_m(0)]^T = 0$ la solution de l'équation homogène (A.5) est nulle pour tout t , c.à.d $x_m(t) = 0 \quad \forall t$.

On va maintenant dériver les lois d'adaptation qui assurent que pour n'importe quelle trajectoires de référence $\theta_r(t)$ le vecteur d'état $x(t) = [e(t) \quad \dot{e}(t)]^T$ tend asymptotiquement vers sa valeur désirée $x_m(t) = [e_m(t) \quad \dot{e}_m(t)]^T \doteq [0 \quad 0]^T$.

Définissant la dérivation qui existe entre l'erreur idéale $x_m(t)$ et l'erreur actuelle $x(t)$ par:

$$E = x_m(t) - x(t) \quad (\text{A.9})$$

En utilisant les équations (A.3) et (A.5) on obtient l'équation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\xi\omega \end{bmatrix} E + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_0}{m} - \omega^2 & \frac{k_1}{m} - 2\xi\omega \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f-d}{m} \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_0}{m} \end{bmatrix} \theta_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_1}{m} \end{bmatrix} \dot{\theta}_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_2 - m}{m} \end{bmatrix} \ddot{\theta}_r \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

On choisit la fonction scalaire de Lyapunov suivante:

$$V = E^T P E + Q_0 \left(\frac{f-d}{m} - f^* \right)^2 + Q_1 \left(\frac{k_0}{m} - \omega^2 - k_0^* \right)^2 + Q_2 \left(\frac{k_1}{m} - 2\xi\omega - k_1^* \right)^2 + Q_3 \left(\frac{q_0}{m} - q_0^* \right)^2 + Q_4 \left(\frac{q_1}{m} - q_1^* \right)^2 + Q_5 \left(\frac{q_2-m}{m} - q_2^* \right)^2 \quad (\text{A.11})$$

P est la matrice définie positive donnée par (A.6) et $Q_i > 0 \quad i = 0, 1, \dots, 5$.

La dérivé de la fonction de Lyapunov donne:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \dot{E}^T P E + E^T P \dot{E} + 2Q_0 \left(\frac{f-d}{m} - f^* \right) \left(\frac{\dot{f}}{m} - \dot{f}^* \right) + 2Q_1 \left(\frac{k_0}{m} - \omega^2 - k_0^* \right) \left(\frac{\dot{k}_0}{m} - \dot{k}_0^* \right) + \\ & 2Q_2 \left(\frac{k_1}{m} - 2\xi\omega - k_1^* \right) \left(\frac{\dot{k}_1}{m} - \dot{k}_1^* \right) + 2Q_3 \left(\frac{q_0}{m} - q_0^* \right) \left(\frac{\dot{q}_0}{m} - \dot{q}_0^* \right) + \\ & 2Q_4 \left(\frac{q_1}{m} - q_1^* \right) \left(\frac{\dot{q}_1}{m} - \dot{q}_1^* \right) + Q_5 \left(\frac{q_2-m}{m} - q_2^* \right) \left(\frac{\dot{q}_2}{m} - \dot{q}_2^* \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{on a } \dot{E}^T P E + E^T P \dot{E} = 2E P A x - 2r \left(\frac{f-d}{m} \right) - 2r \frac{q_0}{m} \dot{\theta}_r - 2r \frac{q_1}{m} \dot{\theta}_r - 2r \left(\frac{q_2-m}{m} \right) \ddot{\theta}_r - E^T Q E$$

$$\text{et } 2E^T P A x = -2r \left\{ \left(\frac{k_0}{m} - \omega^2 \right) e + \left(\frac{k_1}{m} - 2\xi\omega \right) \dot{e} \right\}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -E^T Q E - 2r \left\{ \left(\frac{k_0}{m} - \omega^2 \right) e + \left(\frac{k_1}{m} - 2\xi\omega \right) \dot{e} \right\} - 2r \left(\frac{f-d}{m} \right) - 2r \frac{q_0}{m} \dot{\theta}_r - \\ & 2r \frac{q_1}{m} \dot{\theta}_r - 2r \left(\frac{q_2-m}{m} \right) \ddot{\theta}_r + 2Q_0 \left(\frac{f-d}{m} - f^* \right) \left(\frac{\dot{f}}{m} - \dot{f}^* \right) + 2Q_1 \dots \end{aligned}$$

puis finalement

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -E^T Q E + 2 \left(\frac{f-d}{m} \right) \left[Q_0 \left(\frac{\dot{f}}{m} - \dot{f}^* \right) - r \right] - 2Q_0 f^* \left(\frac{\dot{f}}{m} - \dot{f}^* \right) + \\ & 2 \left(\frac{k_0}{m} - \omega^2 \right) \left[Q_1 \left(\frac{\dot{k}_0}{m} - \dot{k}_0^* \right) - r e \right] - 2Q_1 k_0^* \left(\frac{\dot{k}_0}{m} - \dot{k}_0^* \right) + \\ & 2 \left(\frac{k_1}{m} - 2\xi\omega \right) \left[Q_2 \left(\frac{\dot{k}_1}{m} - \dot{k}_1^* \right) - r \dot{e} \right] - 2Q_2 k_1^* \left(\frac{\dot{k}_1}{m} - \dot{k}_1^* \right) + \\ & 2 \left(\frac{q_0}{m} \right) \left[Q_3 \left(\frac{\dot{q}_0}{m} - \dot{q}_0^* \right) - r \dot{\theta}_r \right] - 2Q_3 q_0^* \left(\frac{\dot{q}_0}{m} - \dot{q}_0^* \right) + \\ & 2 \left(\frac{q_1}{m} \right) \left[Q_4 \left(\frac{\dot{q}_1}{m} - \dot{q}_1^* \right) - r \dot{\theta}_r \right] - 2Q_4 q_1^* \left(\frac{\dot{q}_1}{m} - \dot{q}_1^* \right) + \\ & 2 \left(\frac{q_2-m}{m} \right) \left[Q_5 \left(\frac{\dot{q}_2}{m} - \dot{q}_2^* \right) - r \ddot{\theta}_r \right] - 2Q_5 q_2^* \left(\frac{\dot{q}_2}{m} - \dot{q}_2^* \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{avec } r = P_2 e + P_3 \dot{e} = w_p e + w_v \dot{e}$$

On a supposé que $\{m, d\}$ sont inconnus et varient lentement par rapport aux gains $\{f, k_0, \dots\}$, ceci est justifié par le fait que la variation des lois d'adaptation doit être très rapide par rapport au variation des paramètres du modèle.

Pour avoir une convergence asymptotique de E vers 0, \dot{V} doit être négative $\forall t$, pour cela on doit avoir:

$$\begin{aligned} Q_0(\frac{\dot{f}}{m} - \dot{f}^*) &= r & Q_2(\frac{\dot{k}_1}{m} - \dot{k}_1^*) &= r\dot{e} & Q_4(\frac{\dot{q}_1}{m} - \dot{q}_1^*) &= r\dot{\theta}_r \\ Q_1(\frac{\dot{k}_0}{m} - \dot{k}_0^*) &= re & Q_3(\frac{\dot{q}_0}{m} - \dot{q}_0^*) &= r\theta_r & Q_5(\frac{\dot{q}_2}{m} - \dot{q}_2^*) &= r\ddot{\theta}_r \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

L'équation (A.13) devient:

$$\dot{V} = -E^T QE - 2f^*r - 2k_0^*re - 2k_1^*r\dot{e} - 2q_0^*r\theta_r - 2q_1^*r\dot{\theta}_r - 2q_2^*r\ddot{\theta}_r \quad (\text{A.15})$$

Maintenant choisissons les paramètres comme suit:

$$\begin{aligned} f^* &= Q_0^*r & k_0^* &= Q_1^*re & k_1^* &= Q_2^*r\dot{e} \\ q_0^* &= Q_3^*r\theta_r & q_1^* &= Q_4^*r\dot{\theta}_r & q_2^* &= Q_5^*r\ddot{\theta}_r \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

où $\{Q_0^*, \dots, Q_5^*\}$ sont des paramètres positifs.

En introduisant (A.16) dans (A.15), on aura:

$$\dot{V} = -E^T QE - 2Q_0^*r^2 - 2Q_1^*(re)^2 - 2Q_2^*(r\dot{e})^2 - 2Q_3^*(r\theta_r)^2 - 2Q_4^*(r\dot{\theta}_r)^2 - 2Q_5^*(r\ddot{\theta}_r)^2 \quad (\text{A.17})$$

Des équations (A.14) et (A.16) on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= mQ_0^*\dot{r} + \frac{m}{Q_0}r \\ \dot{k}_0 &= mQ_1^*\frac{d}{dt}(re) + \frac{m}{Q_1}(re) \\ \dot{k}_1 &= mQ_2^*\frac{d}{dt}(r\dot{e}) + \frac{m}{Q_2}(r\dot{e}) \\ \dot{q}_0 &= mQ_3^*\frac{d}{dt}(r\theta_r) + \frac{m}{Q_3}(r\theta_r) \\ \dot{q}_1 &= mQ_4^*\frac{d}{dt}(r\dot{\theta}_r) + \frac{m}{Q_4}(r\dot{\theta}_r) \\ \dot{q}_2 &= mQ_5^*\frac{d}{dt}(r\ddot{\theta}_r) + \frac{m}{Q_5}(r\ddot{\theta}_r) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Dans le but d'avoir des lois d'adaptation indépendantes de m on pose:

$$\begin{aligned} Q_0^* &= \frac{\rho}{m} & Q_1^* &= \frac{\beta_1}{m} & Q_2^* &= \frac{\beta_2}{m} & Q_3^* &= \frac{\lambda_1}{m} & Q_4^* &= \frac{\lambda_2}{m} & Q_5^* &= \frac{\lambda_3}{m} \\ Q_0 &= \frac{m}{\delta} & Q_1 &= \frac{m}{\alpha_1} & Q_2 &= \frac{m}{\alpha_2} & Q_3 &= \frac{m}{\gamma_1} & Q_4 &= \frac{m}{\gamma_2} & Q_5 &= \frac{m}{\gamma_3} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

En intégrant (A.18) et en utilisant (A.19) on obtient les lois d'adaptation de type PI suivantes:

$$\begin{aligned}
f(t) &= f(0) + \delta \int_0^t r(t) dt + \rho r(t) \\
k_0(t) &= k_0(0) + \alpha_1 \int_0^t r(t) e(t) dt + \beta_1 r(t) e(t) \\
k_1(t) &= k_1(0) + \alpha_2 \int_0^t r(t) \dot{e}(t) dt + \beta_2 r(t) \dot{e}(t) \\
q_0(t) &= q_0(0) + \gamma_1 \int_0^t r(t) \theta_r(t) dt + \lambda_1 r(t) \theta_r(t) \\
q_1(t) &= q_1(0) + \gamma_2 \int_0^t r(t) \dot{\theta}_r(t) dt + \lambda_2 r(t) \dot{\theta}_r(t) \\
q_2(t) &= q_2(0) + \gamma_3 \int_0^t r(t) \ddot{\theta}_r(t) dt + \lambda_3 r(t) \ddot{\theta}_r(t)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Lors de la dérivation de ces lois d'ajustement, on a supposé que le terme de couplage $d_i(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ varie lentement c.à.d $\dot{d}_i \approx 0$. dans ce qui suit on va considérer l'effet de la variation de ce terme sur la stabilité du système.

Soit \dot{V}_d le terme de la dérivé de V englobant le couplage d :

$$\dot{V}_d(t) = -2Q_0 \frac{\dot{d}(t)}{m} \left[\frac{f(t) - d(t)}{m} - f^*(t) \right] \tag{A.21}$$

En utilisant : $Q_0 = \frac{m}{\delta}$, $f^*(t) = Q_0^* r(t) = \frac{\rho}{m} r(t)$

(A.21) devient:

$$\dot{V}_d(t) = \frac{2}{m\delta} \dot{d}(t) \left[d(t) - f(0) - \delta \int_0^t r(t) dt \right] \tag{A.22}$$

La dérivé de la fonction de Lyapunov en prenant en compte la variation du terme de couplage d est donnée par: $\dot{V}_t(t) = \dot{V}_d(t) + \dot{V}(t)$. Cette dernière doit être négative pour assurer la stabilité asymptotique du système

On obtient donc l'inégalité $\dot{V}_d(t) < \dot{V}(t)$, ou tout simplement:

$$\dot{d}(t) \left[d(t) - f(0) - \delta \int_0^t r(t) dt \right] < -\frac{m\delta}{2} \dot{V}(t) \quad \forall t \tag{A.23}$$

L'inégalité (A.23) impose une contrainte sur la dynamique des couplage qui existent entre les différentes articulations du robot manipulateur. On peut prouver facilement que dans le cas où $\dot{d} \approx 0$ l'inégalité (A.23) est vérifiée.

Annexe B

Preuves de Stabilité des Schémas de Commande des Systèmes Fortement Interconnectés

(§3.1) Commande avec Compensateur Partiellement Centralisé

Démonstration du théorème 1:

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i \right\} \quad (\text{B.1})$$

Il est clair que $V(\bar{e}, \bar{\phi}) \geq 0$, la dérivée de cette fonction par rapport aux solutions de l'équation (5.18) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &= \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i - 2\sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + 2\sigma \bar{\phi}_i \bar{\vartheta}_i^* + 2(\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i) (f_i + z_i(t, \bar{x}) - \bar{k}_i^* \bar{x}_m) \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i - 2\sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + 2\sigma \bar{\phi}_i \bar{\vartheta}_i^* + 2(\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i) f_i \right. \\ &\quad \left. + 2\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| (\|\bar{k}_i^* \bar{x}_m\| + \|z_i(t, \bar{x})\|) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

D'après l'hypothèse HP2, on obtient l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \|z_i(t, \bar{x})\| &\leq \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^k \|\bar{x}_j\| \leq \zeta_{\max} \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^N (\|\bar{e}_j\| + \|\bar{x}_{mj}\|)^k \\ &\leq \zeta_{\max} \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^N s_{kj} \|\bar{e}_j\|^k \leq \zeta_{\max} c_{\max} \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^N \|\bar{e}_j\|^k \\ &\leq \zeta_{\max} c_{\max} \sum_{k=0}^p N \|\bar{e}\|^k \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

avec :

$$\zeta_{\max} = \max_{i,j,k} (x_{ij}^k), \quad c_{\max} = \max_{k,j} (s_{kj}) \quad (\text{B.4})$$

$$s_{kj} = \sum_{l=k}^p C_j^{j-l} \|\bar{x}_m\|^{j-l}, \quad C_j^{j-l} = \frac{j!}{l!(j-l)!} \quad (\text{B.5})$$

En utilisant les équations (5.17), (B.3) et en manipulant les carrés dans (B.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i + 2 \sum_{k=1}^p \left[-\rho \| \bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \|^2 \| \bar{e} \|^2 + N \zeta_{\max} c_{\max} \| \bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \| \| \bar{e} \|^k \right] \right. \\
&\quad \left. - \sigma \| \bar{\phi}_i \|^2 + \sigma \| \bar{\mathcal{G}}_i^* \|^2 - 2\rho \| \bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \|^2 + 2(N \zeta_{\max} c_{\max} + \| \bar{k}_i^{*T} \bar{x}_{m_i} \|) \| \bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \| \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i + 0.5 \rho^{-1} \left[(N \zeta_{\max} c_{\max} + \| \bar{k}_i^{*T} \bar{x}_{m_i} \|^2) + p(N \zeta_{\max} c_{\max})^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \sigma \| \bar{\phi}_i \|^2 + \sigma \| \bar{\mathcal{G}}_i^* \|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

L'écriture matricielle de l'équation (B.6) donne:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &\leq -\bar{e}^T Q \bar{e} - \sigma \| \bar{\phi} \|^2 + \sigma \| \bar{\mathcal{G}}^* \|^2 \\
&\quad + 0.5 \rho^{-1} N \left[(N \zeta_{\max} c_{\max} + \| \bar{k}^{*T} \bar{x}_m \|^2) + p(N \zeta_{\max} c_{\max})^2 \right] \\
&\leq -\mu V(\bar{e}, \bar{\phi}) + \eta
\end{aligned} \tag{B.7}$$

où μ et η sont donnés par les équations suivantes:

$$\mu = \min \left\{ \lambda_{\max}^{-1}(P) \lambda_{\min}(Q), \sigma \lambda_{\max}(\Gamma) \right\} \tag{B.8}$$

$$\eta = \sigma \| \bar{\mathcal{G}}^* \|^2 + 0.5 \rho^{-1} N \left[(N \zeta_{\max} c_{\max} + \| \bar{k}^{*T} \bar{x}_m \|^2) + p(N \zeta_{\max} c_{\max})^2 \right] \tag{B.9}$$

En intégrant l'inégalité (B.7), on obtient:

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \exp(-\mu t) V(\bar{e}, \bar{\phi})(t_0) + [1 - \exp(-\mu t)] \mu^{-1} \eta \tag{B.10}$$

On remarque que la fonction de Lyapunov décroît pour toutes les solutions des équations (5.18), et cela jusqu'à atteindre l'ensemble résiduel Ω_r donné en (5.19). On conclue donc que les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0)$ convergent vers Ω_r .

(§3.2) Commande Décentralisée Semi-Adaptative (Interconnexions d'ordre 2)

Démonstration du théorème 2:

Considérant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i + k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e})^2 + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i \right\} \tag{B.11}$$

La dérivé de cette fonction par rapport aux solutions de l'équation (5.26) est :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &= \sum_{i=1}^N \left\{ -(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i - 2\sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + 2\sigma \bar{\phi}_i^* \bar{\mathcal{G}}_i^* \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) (\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i) (f_i + z_i(t, \bar{x}) - \bar{k}_i^* \bar{x}_m) \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i - 2\sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + 2\sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\| \|\bar{\phi}_i\| \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| \left(\|\bar{k}_i^* \bar{x}_m\| + \|z_i(t, \bar{x})\| \right) + 2(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) (\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i) f_i \right\}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

En manipulant les équations (B.3), (5.22) pour $p=2$, et en complétant les carrés dans (B.12), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i - \sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + \sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\rho_i (1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 (1 + \|\bar{e}_j\|^2) \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 (\|\bar{k}_i^* \bar{x}_m\| + \zeta_{\max} c_{\max} \sum_{k=0}^2 \sum_{j=1}^N \|\bar{e}_j\|^k) \right\}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

En utilisant l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \left\{ 2 \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| \zeta_{\max} c_{\max} \delta_j^{0.5} \delta_j^{-0.5} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \|\bar{e}_j\|^k \right\} \\
&\leq \sum_{i=1}^N \zeta_{\max} c_{\max} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^N \left\{ \delta_j \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 + \delta_j^{-1} \|\bar{e}_j\|^{2k} \right\}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

on aura ,pour $p=2$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(1 + 2\lambda_{\min}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2) k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) \|\bar{e}_i\|^2 - \sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + \sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + 2\lambda_{\max}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| \left(\|\bar{k}_i^* \bar{x}_m\| + N \zeta_{\max} c_{\max} \right) \right. \\
&\quad \left. + N \zeta_{\max} c_{\max} \left[\delta^* p \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 (1 + 2\lambda_{\max}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2)^2 + \delta_i^{-1} \sum_{k=1}^2 \|\bar{e}_i\|^{2k} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\rho_i (1 + 2\lambda_{\min}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 (1 + \|\bar{e}_j\|^2) \right\}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

où $\delta^* = \sum_{j=1}^N \delta_j$. L'utilisation de l'inégalité suivante:

$$\left(\sum_{k=1}^p a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^p a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^p b_k^2 \right) \tag{B.16}$$

donne:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -(1 + 2\lambda_{\min}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2) k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) \|\bar{e}_i\|^2 - \sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + \sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(1 + 2\lambda_{\max}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| \left(\|\bar{k}_i^* \bar{x}_m\| + N \zeta_{\max} c_{\max} \right) \right. \\
&\quad \left. + N \zeta_{\max} c_{\max} \left[5\delta^* p (1 + \lambda_{\max}^2(P_i) \|\bar{e}_i\|^4) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 + \delta_i^{-1} \sum_{k=1}^2 \|\bar{e}_i\|^{2k} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2\rho_i (1 + 2\lambda_{\min}(P_i) \|\bar{e}_i\|^2) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 (1 + \|\bar{e}_j\|^2) \right\}
\end{aligned} \tag{B.17}$$

puis finalement :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\left(2\lambda_{\min}(P_i)k_{0i}^*\lambda_{\min}(Q_i) - \delta_i^{-1}N\zeta_{\max}c_{\max}\right)\|\bar{e}_i\|^4 - \sigma\|\bar{\phi}_i\|^2 + \sigma\|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 \right. \\ \left. -\left(k_{0i}^*\lambda_{\min}(Q_i) - \delta_i^{-1}N\zeta_{\max}c_{\max}\right)\|\bar{e}_i\|^2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\left(2\rho_i - 5\delta^*N\zeta_{\max}c_{\max}p\right)\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 + 2\left(N\zeta_{\max}c_{\max} + \|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\|\right)\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| \\ \Delta_2 &= -4\left\{\rho_i\lambda_{\min}(P_i)\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 - \lambda_{\max}(P_i)\|\bar{e}_i\|^2\left(\|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + N\zeta_{\max}c_{\max}\right)\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|\right\}\|\bar{e}_i\|^2 \\ \Delta_3 &= -\left\{4\rho_i\lambda_{\min}(P_i) - 5\delta^*N\zeta_{\max}c_{\max}p\lambda_{\max}^2(P_i)\right\}\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2\|\bar{e}_i\|^4 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Si on choisit $\rho_i = \rho_{i\max}\delta^*$ tel que $\rho_{i\max}$ satisfait l'inégalité suivante:

$$\rho_{i\max} > \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{\lambda_{\max}^2(P_i)}{4\lambda_{\min}(P_i)}\right\}10N\zeta_{\max}c_{\max} \quad (\text{B.19})$$

et le paramètre δ_i vérifiant l'inégalité suivante:

$$\delta_i > \max\left\{\frac{N\zeta_{\max}c_{\max} + c_{i1}}{k_{0i}^*\lambda_{\min}(Q_i)}, \frac{N\zeta_{\max}c_{\max}}{2k_{0i}^*\lambda_{\min}(Q_i)\lambda_{\min}(P_i)}\right\} \quad (\text{B.20})$$

avec c_{i1} est défini dans (B.21.b), on peut, pour $p=2$, établir les inégalités suivantes :

$$\Delta_1 \leq \delta_i^{-1}c_{i0} = \delta_i^{-1}\frac{\left(\|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + N\zeta_{\max}c_{\max}\right)^2}{2\rho_{i\max} - 10N\zeta_{\max}c_{\max}} \quad (\text{B.21.a})$$

$$\Delta_2 \leq \delta_i^{-1}c_{i1}\|\bar{e}_i\|^2 = \delta_i^{-1}\|\bar{e}_i\|^2\frac{\lambda_{\max}^2(P_i)\left(\|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + N\zeta_{\max}c_{\max}\right)^2}{\rho_{i\max}\lambda_{\min}(P_i)} \quad (\text{B.21.b})$$

$$\Delta_3 \leq 0 \quad (\text{B.21.c})$$

L'équation (B.18) peut se réécrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\varsigma_{i2}\|\bar{e}_i\|^4 - \varsigma_{i1}\|\bar{e}_i\|^2 - \sigma\|\bar{\phi}_i\|^2 + \eta_i \right\} \\ \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\mu_i V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) + \eta_i \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

avec

$$\begin{aligned} \varsigma_{i2} &= 2k_{0i}^*\lambda_{\min}(Q_i)\lambda_{\min}(P_i) - \delta_i^{-1}N\zeta_{\max}c_{\max} \\ \varsigma_{i1} &= k_{0i}^*\lambda_{\min}(Q_i) - \delta_i^{-1}\left[N\zeta_{\max}c_{\max} + c_{i1}\right] \\ \eta_i &= \delta_i^{-1}c_{i0} + \sigma\|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\text{et } \mu_i = \min\{\lambda_{\max}^{-2}(P_i)\zeta_{i2}, \lambda_{\max}^{-1}(P_i)\zeta_{i1}, \lambda_{\max}(\Gamma_i)\sigma\}$$

En partant de la définition de δ_i donné dans (B.20), on conclut que les paramètres ζ_{i1}, ζ_{i2} sont strictement positifs.

Si on pose :

$$\mu = \min_{i \in N}\{\mu_i\}, \quad \eta = \sum_{i=1}^N \eta_i \quad (\text{B.24})$$

on obtient, finalement, $\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq -\mu V(\bar{e}, \bar{\phi}) + \eta$.

Il est clair que la fonction de Lyapunov décroît de façon continue et cela pour toutes solutions des équations (5.26), jusqu'à atteindre Ω_r . En utilisant la seconde méthode de Lyapunov on conclut que les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0)$ convergent vers l'ensemble résiduel Ω_r .

Démonstration du théorème 3 :

Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i + k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^2 + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i + \gamma_i^{-1} (\rho_i - \rho_i^*)^2 \right\} \quad (\text{B.25})$$

avec ρ_i^* est un paramètre positif qui va être défini ultérieurement.

La dérivée de cette fonction par rapport aux solutions des équations (5.26) et (5.27) est :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho}) = \sum_{i=1}^N \left\{ & -\left(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i\right) k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i - 2\sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 - 2\sigma \bar{\phi}_i^T \bar{\mathcal{G}}_i^* \right. \\ & + 2\left(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i\right) \left(\bar{h}_m^T P_i \bar{e}_i\right) \left(z_i(t, \bar{x}) - \bar{k}_i^* \bar{x}_m\right) \\ & - 2\left(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i\right) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 \rho_i \left(1 + \|\bar{e}_i\|^2\right) \\ & \left. + 2\left(\rho_i - \rho_i^*\right) \left(1 + 2\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i\right) \left(1 + \|\bar{e}_i\|^2\right) \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 - 2\sigma_i \left(\rho_i - \rho_i^*\right) \rho_i \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

En utilisant l'inégalité (B.3) pour $p=2$ et en suivant les étapes de démonstration du théorème 2 on obtient :

$$\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\zeta_{i2} \|\bar{e}_i\|^4 - \zeta_{i1} \|\bar{e}_i\|^2 - \sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 - \sigma (\rho_i - \rho_i^*) + \eta_i \right\} \quad (\text{B.27})$$

avec:

$$\begin{aligned} \zeta_{i2} &= 2k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) \lambda_{\min}(P_i) - \delta_i^{-1} N \zeta_{\max} c_{\max} \\ \zeta_{i1} &= k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) - \delta_i^{-1} [N \zeta_{\max} c_{\max} + c_{i1}] \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\eta_i = \delta_i^{-1} c_{i0} + \sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 + \sigma_i \rho_i^{*2}$$

$$c_{i0} = \frac{\left(\|\bar{k}_i^* \bar{x}_m\| + N \zeta_{\max} c_{\max}\right)^2}{2\rho_{i\max}^* - 10N \zeta_{\max} c_{\max}} \quad (\text{B.29})$$

$$c_{i1} = \frac{\lambda_{\max}^2(P_i) (\|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + N \xi_{\max} c_{\max})^2}{\rho_{i \max}^* \lambda_{\min}(P_i)} \quad (\text{B.30})$$

Si on choisit $\rho_{i \max}^*$ et δ_i vérifiant les inégalités (B.19) et (B.20), et ρ_i^* tel que:

$$\rho_i^* = \rho_{i \max}^* \sum_{j=1}^N \delta_j^{-1} \quad (\text{B.31})$$

on conclut que les paramètres ζ_{i1}, ζ_{i2} sont strictement positifs

L'équation (B.27) peut se réécrire sous la forme simplifiée suivante:

$$\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\mu_i V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) + \eta_i \right\} \leq -\mu V(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho}) + \mu \quad (\text{B.32})$$

avec :

$$\mu_i = \min \left\{ \lambda_{\max}^{-2}(P_i) \zeta_{i2}, \lambda_{\max}^{-1}(P_i) \zeta_{i1}, \lambda_{\max}(\Gamma_i) \sigma_i, \gamma_i \sigma_i \right\},$$

$$\mu = \min_{i \in N} \{ \mu_i \}, \text{ et } \eta = \sum_{i=1}^N \eta_i,$$

on conclut que les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0, \bar{\rho}_0)$ sont globalement asymptotiquement stables.

(§3.3) Commande Décentralisée Semi-Adaptative (Interconnexions d'ordre Elevé)

Démonstration du théorème 4:

Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^k + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i \right\} \quad (\text{B.33})$$

La dérivée de cette fonction par rapport aux solutions de l'équation (5.30) est:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* \bar{e}_i^T Q_i \bar{e}_i \sum_{k=1}^p k (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^{(k-1)} - 2\sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 \right. \\ \left. + 2\sigma \|\bar{\phi}_i\| \|\bar{g}_i^*\| + 2(\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i) f_i \sum_{k=1}^p k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^{(k-1)} \right. \\ \left. + 2\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| (\|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + \|z_i(t, \bar{x})\|) \sum_{k=1}^p k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^{(k-1)} \right\} \quad (\text{B.34}) \end{aligned}$$

Si on utilise les équations (B.3), (B.14), (B.16), (5.28), et l'égalité suivante

$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{1}{6} p(p+1)(2p+1) \quad (\text{B.35})$$

et en complétant les carrés dans (B.34), on obtient:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ & -k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) \|\bar{e}_i\|^2 \sum_{k=1}^p k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i) \|\bar{e}_i\|^{2(k-1)} - \sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 \right. \\
& + \sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 - 2\rho_i \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 \left(1 + \|\bar{e}_i\|^{2(p-1)}\right) \sum_{k=1}^p k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i) \|\bar{e}_i\|^{2(k-1)} \\
& + 2 \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\| \left(\|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + \|z_i(t, \bar{x})\| \right) \sum_{k=1}^p k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i) \|\bar{e}_i\|^{2(k-1)} \\
& \left. + N \zeta_{\max} c_{\max} \left[\frac{1}{6} p^2 (p+1)(2p+1) \delta_i^* \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 \sum_{k=1}^p k \lambda_{\min}^{2(k-1)}(P_i) \|\bar{e}_i\|^{4(k-1)} + \delta_i^{-1} \sum_{k=1}^p \|\bar{e}_i\|^{2k} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Pour simplifier l'écriture, on définit

$$d_1 = \|\bar{k}_i^{*T} \bar{x}_m\| + N \zeta_{\max} c_{\max}, \text{ et } d_2 = \left(\frac{1}{6}\right) p^2 (p+1)(2p+1) N \zeta_{\max} c_{\max}.$$

Après avoir compléter les carrés qui contiennent $\|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|$ et éliminer les termes négatifs on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ & - \sum_{k=1}^p \left[k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i) - \delta_i^{-1} N \zeta_{\max} c_{\max} \right] \|\bar{e}_i\|^{2k} \right. \\
& \left. - \sigma \|\bar{\phi}_i\|^2 + \sigma \|\bar{\mathcal{G}}_i^*\|^2 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \right\}
\end{aligned} \tag{B.37}$$

avec :

$$\Delta_1 = \sum_{k=1, \text{paire}}^p \frac{\delta_i^{-1} k^2 d_1^2 \lambda_{\max}^{2(p-1)}(P_i)}{2k\rho_{i \max} \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i) - d_2 \lambda_{\max}^{(k-1)}(P_i)}. \tag{B.38}$$

$$\Delta_2 = \sum_{k=1, \text{impaire}}^p \frac{\delta_i^{-1} k d_1^2 \left(\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_i)} \right)^{2(k-1)}}{2\rho_{i \max}} \|\bar{e}_i\|^{2(k-1)} \tag{B.39}$$

$$\Delta_3 = \sum_{k=1+\lceil p/2 \rceil}^p \|\bar{b}_m^T P_i \bar{e}_i\|^2 \|\bar{e}_i\|^{4(k-1)} \left[-2(2k-p)\rho_i \lambda_{\min}^{(2k-p-1)}(P_i) + \delta_i^* d_2 \lambda_{\max}^{2(k-1)}(P_i) \right] \leq 0 \tag{B.40}$$

Si on choisit $\rho_i = \rho_{i \max} \sum_{j=1}^N \delta_j$ et $\rho_{i \max} > \max\{\rho_{i1}, \rho_{i2}\}$ tels que :

$$\rho_{i1} = \max_{k \in [1+p/2, p]} \left(\frac{d_2 \lambda_{\max}^{2(k-1)}(P_i)}{2(2k-p) \lambda_{\min}^{(2k-p-1)}(P_i)} \right)$$

$$\rho_{i2} = \max_{k \in [1, p-1], \text{paire}} \left(\frac{d_2 \lambda_{\max}^{(k-1)}(P_i)}{2k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i)} \right)$$

L'équation (B.37) devient :

$$\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ \eta_i - \sum_{k=1}^p \zeta_{ik} \|\bar{e}_i\|^{2k} \right\} \tag{B.41}$$

avec :

$$\begin{aligned} \zeta_{ik} &= k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i) - \delta_i^{-1} [N \zeta_{\max} c_{\max} + c_{ik}] \\ \eta_i &= \delta_i^{-1} c_{i0} + \sigma \|\bar{g}_i^*\|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

et

$$c_{ik} = \begin{cases} \frac{(k+1)^2 d_1^2 \lambda_{\max}^{2k}(P_i)}{2(k+1) \rho_{i\max} \lambda_{\min}^k(P_i) - d_2 \lambda_{\max}^k(P_i)} & k = 0, 2, 4, \dots, < p \\ \frac{(k+1) d_1^2}{2 \rho_{i\max}} \left(\frac{\lambda_{\max}^2(P)}{\lambda_{\min}(P)} \right) & k = 1, 3, 5, \dots, < p \\ 0 & k = p \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

Si le paramètre δ_i vérifie l'inégalité suivante:

$$\delta_i \geq \max_{k \in [1, p]} \left\{ \frac{N \zeta_{\max} c_{\max} + c_{ik}}{k_{0i}^* \lambda_{\min}(Q_i) k \lambda_{\min}^{(k-1)}(P_i)} \right\} \quad (\text{B.44})$$

on obtient $\zeta_{ik} > 0$. Finalement, (B.41) peut se mettre sous la forme compacte suivante :

$$\dot{V}(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\mu_i V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) + \eta_i \right\} \leq -\mu V(\bar{e}, \bar{\phi}) + \eta \quad (\text{B.45})$$

avec : $\mu_i = \min \left\{ \lambda_{\max}^{-p}(P_i) \zeta_{ip}, \dots, \lambda_{\max}^{-1}(P_i) \zeta_{i1}, \lambda_{\max}(\Gamma_i) \sigma \right\}$,

$\mu = \min_{i \in N} \{ \mu_i \}$ et $\eta = \sum_{i=1}^N \eta_i$.

En utilisant la seconde méthode de Lyapunov, on conclue que les solutions de l'équation (5.30) données par $(\bar{e}, \bar{\phi})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0)$ sont globalement asymptotiquement stables.

Démonstration du théorème 5 (§3.3):

Pour la démonstration du théorème 5 (§3.3), on suit les étapes des démonstrations du théorème 3 et 4.

COMMANDE ADAPTATIVE DECENTRALISEE VIA LES STRUCTURES VARIABLES DES ROBOTS MANIPULATEURS

¹ R. Bachir Bouyadjra, ² M.S. Boucherit, ³ D. Boukhetalla

1 Centre de développement des Systèmes Energétiques
Département Instrumentation et Contrôle
C.D.S.E B.P. 180, Aïn Oussara 17200

2, 3 Ecole Nationale Polytechnique
DER Génie électrique et Informatique
10, avenue Pasteur, el-Harrach 16200, alger

Résumé

Dans cet article une commande adaptative décentralisée avec modèle de référence utilisant la théorie des systèmes à structures variables est présentée. Le schéma de commande comporte une composante proportionnelle et une composante discontinue utilisée pour contrecarrer les effets des interconnexions et garantir la stabilité du système globale. Cette commande est appliquée par simulation au robot manipulateur Portos à 3 degrés de liberté pour résoudre le problème de poursuite de trajectoires. Chaque articulation est considérée comme un sous-système interconnecté aux autres sous-systèmes. Les différentes simulations faites montre les performances du système de commande et sa robustesse vis à vis des variations paramétriques que peut subir le robot manipulateur

Mots clés

commande adaptative, commande décentralisée, stabilité, systèmes à structure variable.

1 Introduction

Les incertitudes de modélisation dus essentiellement à l'existence des interconnexions dans les grands systèmes ont fait que l'application d'une commande classique et centralisée ne résolut pas le problème de stabilité. Pour contrecarrer

ces incertitudes plusieurs chercheurs ont essayé de mettre au point une commande décentralisée (par placement de pôles, optimale, etc..) [1], par laquelle chaque sous système est commandé indépendamment en se basant sur son critère de performance et sur les informations disponibles localement (aucun échange d'information entre

les sous systèmes n'est permis). Ces types de commande décentralisée peuvent être mal adaptés dans le cas où les interconnexions sont inconnues et / ou variables dans le temps. D'où la nécessité d'une commande adaptative décentralisée.

Ce n'est que vers les années 70, qu'apparaît le premier travail portant sur les techniques d'adaptation en vue de la synthèse d'une commande décentralisée, c'était celle de SUNDARSHAN où est développée la commande adaptative décentralisée par modèle de référence MRDAC.

Le travail présenté dans cet article est inspiré de celles de GAVEL and SILJAK [2] et JUNG and FIANG [3], où la technique de stabilisation utilisant la méthode de «M- matrix » est remplacé par des conditions structurelles sur les interconnexions. Cette commande utilise la théorie des structure variable pour forcer le système à suivre un modèle de référence.

Notre objective principale est de montrer qu'une telle commande peut être appliqué à un robot manipulateur, où les liaisons sont considérées comme des sous systèmes interconnectés. Cette application n'est possible que si on arrive à factorisé les interconnexions en un vecteur de commande et un nouveau vecteur d'interconnexions.

2 Formulation du Problème

Considérant un système complexe décomposé en N sous systèmes suivants :

$$S_i : \dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i + B_i z_i(t, x) \quad (1)$$

où $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ et $u(t) \in \mathbb{R}$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de commande de S_i à l'instant t , $A_i \in \mathbb{R}^{n_i} \times \mathbb{R}^{n_i}$ et $B_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ sont supposés inconnus, $z_i(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est la

fonction inconnue qui représente les interconnexions entre les sous systèmes, où $n = \sum_{i=1}^N n_i$ est l'ordre du système globale.

Remarque 1 :

Les conditions structurelles précédentes restreint la structure des interconnexions et donc la classe des systèmes complexes à être concernés par cette commande. Cependant, plusieurs systèmes mécaniques entre dans cette classe [2][3].

Le système globale S peut être représenté par l'équation suivante :

$$S : \dot{x} = Ax + Bu + Bz(t, x) \quad (2)$$

où x, u, A, B, z ont les dimensions appropriées. Comme dans [2][3], on pose les hypothèses suivantes :

1. Le couple (A_i, B_i) pour tout $i \in N$ est commandable, cette supposition garantie le choix d'une représentation sous forme canonique de commande.

2. Les interconnexions sont bornées par un polynôme d'état d'ordre p : c.a.d il existe des constantes positives et inconnues c_{ij} tel que :

$$\|z_i(t, x)\| \leq \sum_{j=1}^N c_{ij} w_j \quad (3)$$

$$\text{où } w_j = 1 + \|x_j\| + \|x_j\|^2 + \dots + \|x_j\|^p$$

L'objectif de la commande est la régulation des états $x(t)$ du système globale S à zéro ou assurer la poursuite d'un modèle de référence. Dans le développement qui suit, seul la poursuite d'un modèle de référence est considérée.

Les trajectoires de références sont générées par un ensemble de modèles de références :

$$M_i : \dot{x}_{mi} = A_{mi} x_{mi} + B_{mi} r_i \quad i \in N \quad (4)$$

qui ont les mêmes dimensions que S_i et les caractéristiques de stabilité souhaités. A_{mi} doit être une matrice constante et stable, donc pour n'importe quelle matrice symétrique définie positive Q_i il existe une matrice unique constante, symétrique et définie positive P_i solution de l'équation matricielle de Lyapunov suivante :

$$A_{mi}^T P_i + P_i A_{mi} = -Q_i \quad (5)$$

Pour chaque modèle de référence locale les coordonnées sont choisies de telle manière que les

couples (A_{mi}, B_{mi}) sont mises sous forme canonique de commande. Pour ce choix de coordonnées on peut vérifier facilement qu'il existe des vecteurs constants k_i^* et k_{0i}^* telle que : [2][3][8]

$$\begin{aligned} A_{mi} &= A_i + B_i k_i^{*T} \\ B_{mi} &= B_i k_{0i}^* \end{aligned} \quad (6)$$

Cependant ces vecteurs ne sont pas connus puisque les dynamiques des sous systèmes sont inconnues, néanmoins on suppose que le signe de B_i est connu et $k_{0i}^* > 0$ pour tout $i \in N$.

3 Commande à structure variable

Définissant l'erreur de poursuite $e_i(t)$ pour chaque sous système par :

$$e_i(t) = x_i(t) - x_{mi}(t) \quad i \in N \quad (7)$$

La loi de commande adaptative décentralisée est donnée par :

$$u_i = u_{pi} + u_{si} \quad (8)$$

où :

$$u_{pi} = -\beta_i B_{mi}^T P_i e_i \quad \beta_i > 0 \quad (9)$$

est la partie proportionnelle de la commande. u_{si} est un contrôleur à structure variable.

Remarque 2 :

Il est clair que la composante proportionnelle n'est pas suffisante pour garantir la stabilité du système, son introduction va améliorer les performances de la commande globale.

L'équation dynamique de l'erreur de poursuite est donnée par :

$$\dot{e}_i = A_{mi} e_i + B_i (u_i + z_i - k_i^{*T} x_i - k_{0i}^* r_i) \quad (10)$$

En remarquant que r_i, k_i^*, k_{0i}^* sont bornées, le terme $(z_i - k_i^{*T} x_i - k_{0i}^* r_i)$ dans (10) est borné sous la forme suivante :

$$\|z_i - k_i^{*T} x_i - k_{0i}^* r_i\| \leq \sum_{j=1}^N d_{ij} v_j \quad (11)$$

$$\text{où } v_j = 1 + \|e_j\| + \|e_j\|^2 + \dots + \|e_j\|^p$$

avec les constantes d_{ij} choisies convenablement.

Deux cas vont être traités séparément. Dans le premier d_{ij} vont être supposés connus et dans le second cas d_{ij} vont être supposés inconnus.

3.1 d_{ij} connues

La commande discontinue $u_{si}(t)$ est basé sur la théorie des systèmes à structures variables et est donnée par :

$$u_{si} = -\frac{1}{2} g v_i \frac{\text{sign}(B_{mi}^T P_i e_i)}{\|B_{mi}^T P_i\|} \quad (12)$$

où :

$$g = 2N \max_i (\|B_{mi}^T P_i\|) \max_{ij} (d_{ij}) \quad (13)$$

avec cette loi décentralisés et semi-adaptative, on peut établir les résultats de stabilité globale suivantes :

Théorème 1

Sous les hypothèses 1 et 2 et pour des d_{ij} connues, le système de commande décentralisée est globalement stable dans le sens où tous les signaux du système en boucle fermée sont bornés. Et en plus l'erreur de poursuite e_i tend vers 0 quant t tend vers l'infini.

La démonstration se fait en se basant sur la fonction de Lyapunov suivante:

$$V = \sum_{i=1}^N (k_{0i}^* e_i^T P_i e_i) \quad (14)$$

sa dérivé en utilisant (10) est bornée par l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -k_{0i}^* e_i^T Q_i e_i - 2\beta_i \|B_{mi}^T P_i e_i\|^2 \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left\{ -\left(k_{0i}^* \lambda_i + 2\beta_i \|B_{mi}^T P_i\|^2 \right) \|e_i\|^2 \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

où $\lambda_i = \min(\text{eig}(Q_i))$.

En se basant sur la seconde méthode de Lyapunov on conclut que l'erreur de poursuite $e_i(t)$ est bornée et $e_i(t)$ tend vers 0 quant t tend vers l'infini pour tout i .

3.2 d_{ij} inconnus

Dans ce cas g est aussi inconnu et la loi de commande (12) ne peut être implémentée, néanmoins on peut remplacer g par son estimée \hat{g}_i . La loi de commande (12) devient donc :

$$u_{si} = -\frac{1}{2} \hat{g}_i v_i \frac{\text{sign}(B_{mi}^T P_i e_i)}{\|B_{mi}^T P_i\|} \quad (16)$$

\hat{g}_i est calculé en utilisant la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\hat{g}}_i = \frac{1}{2} \gamma_i \|e_i\| v_i \quad \hat{g}_i(0) = 0 \quad (17)$$

Théorème 2:

Sous les hypothèses 1 et 2 et pour d_{ij} bornées mais inconnues, le système de commande adaptative décentralisée est globalement stable dans le sens où l'erreur de poursuite est bornée et tend vers 0 quant t tend vers l'infini.

La démonstration de ce théorème est similaire au cas précédent. La fonction de Lyapunov utilisée est la suivante:

$$V = \sum_{i=1}^N \left(k_{0i}^* e_i^T P_i e_i + \frac{1}{\gamma_i} \tilde{g}_i^2 \right) \quad (18)$$

où $\tilde{g}_i = \hat{g}_i - g$ est l'erreur d'adaptation paramétrique.

La dérivé de la fonction de Lyapunov est bornée par la même inégalité (15).

Remarque 3

Les lois de commande définies dans (12) et (16) sont discontinues et peuvent provoquer le phénomène de « claquement » au niveau de l'organe de commande. Ce problème peut être éliminé en utilisant l'approche de la couche limite « boundary layer » proposé par SLOTINE [6]. La fonction $\text{sign}(x)$ est remplacée par $\frac{x}{(|x| + \delta)}$ avec

δ est un paramètre choisi très petit.

4 Application à la commande des robots manipulateurs

4.1 description du robot

La commande adaptative décentralisée développée dans la section 3, va être maintenant appliquée au robot manipulateur PORTOS de classe 4. Ce manipulateur est caractérisé par une articulation rotationnelle q_2 et deux articulations translationnelles q_1 et q_3 (voir figure 1)

Les trajectoires de référence sont choisies de telle façon à vérifier le profil suivant:

$$q_r(t) = \begin{cases} q_r(0) + \frac{\Delta}{2\pi} (\omega t - \sin \omega t) & t \leq t_f \\ 0 & t > t_f \end{cases} \quad (20)$$

$$\Delta = q_r(t_f) - q_r(0) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{t_f}$$

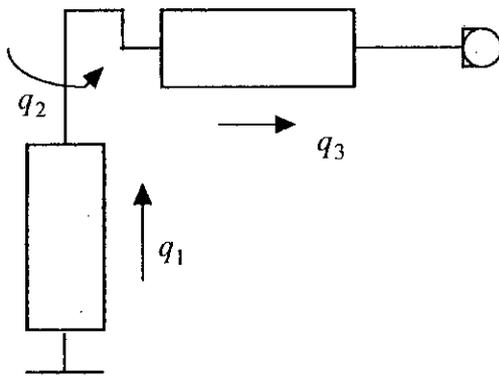


Fig.1 présentation du robot

Les résultats de simulations sont consignés sur la figure (2) avec : $t_r=3$ s, $\beta_i=300$, $\gamma_i=800$, $B_{mi}^T P_i=[1 \ 0.25]$ pour $i=1,2,3$, $p=2$, $m=5$ kg. Les sorties du système suivent parfaitement les trajectoires de références et le système de commande est robuste par rapport à un changement brusque de la charge (à $t=1.5$ s la charge est nulle). Pour palier au phénomène de « broutement » -en anglais chattering-, nous appliquant une correction de la commande avec $\delta=0.005$, les résultats de simulation sont consignés sur la figure (3).

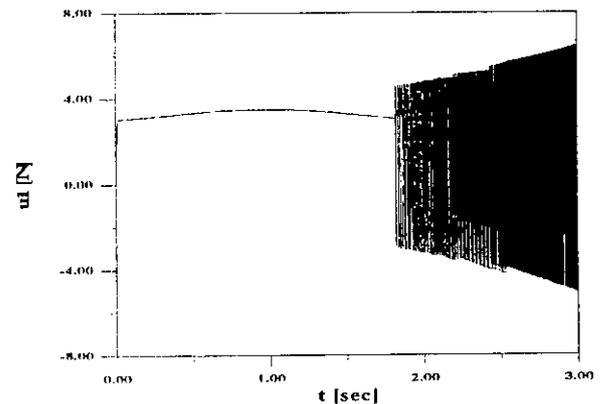
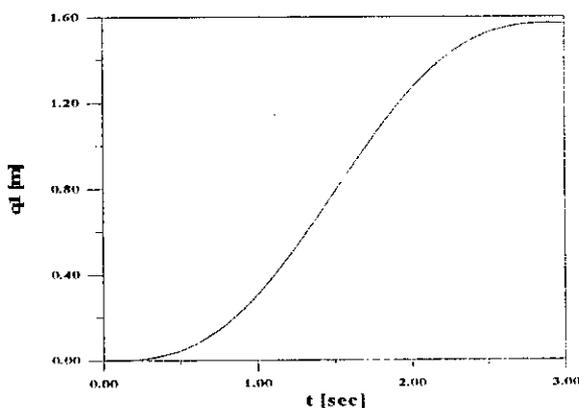
5 Conclusion

Dans ce papier, une nouvelle technique de commande adaptative décentralisée à structure variable a été présentée. La stabilité du système globale a été démontrée en utilisant la seconde méthode de Lyapunov en se basant sur les fonctions de Lyapunov bien choisies. La faisabilité et les performances du schéma de commande ont été démontrés en appliquant la

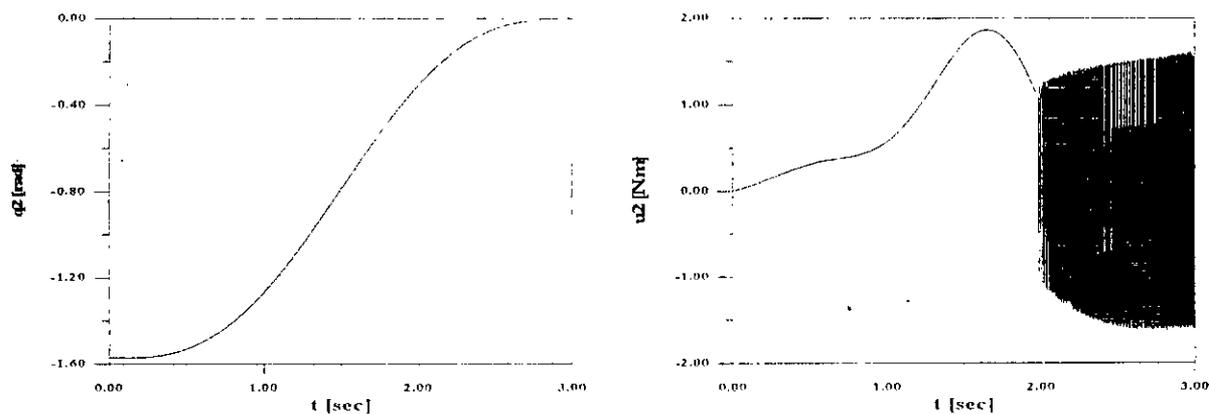
commande à structure variable à un robot manipulateur à 3 D.D.L. avec des trajectoires de références rapides, les simulations faites démontrent la robustesse de l'algorithme présenté.

6 Références

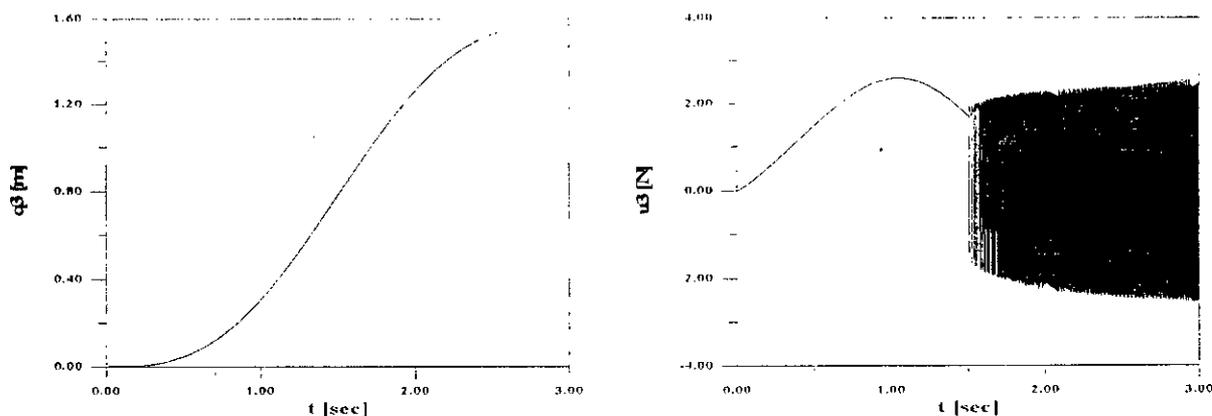
- [1] MADAN G. SINGH, « Decentralised Control », North-Holland Systems and Control Series, Vol. 01, 1981.
- [2] D. Gavel & D. Siljak, « Decentralized Adaptive Control: Structural Conditions for Stability », IEEE, Trans. on Autom. Contr. Vol. 34 N° 4, April 1989.
- [3] G. Feng & Y.A. Jiang, « Variable structure based decentralised adaptive control », IEE Proc. Control Theory Appl., Vol.142, N° 5, September 1995.
- [4] L. Shi & S.K. Singh, « On Lyapunov Function Based Decentralized Adaptive Controllers », Proc. of the 29th Conference on decision and control, Honolulu, Hawaii, december 1990.
- [5] P. Ioannou, « Decentralized Adaptive Control of Interconnected Systems », IEEE, Trans. on Autom. Contr. Vol. AC 31, N° 4, April 1986.
- [6] J. Slotine, « Applied Nonlinear Control ».
- [7] L. Gunenfaf, « Etudes des différentes stratégies de commande adaptative : Application aux robots manipulateurs », Thèse de magister, Ecole Nationale Polytechnique, 1995.
- [8] Y. Landau, « Adaptive Control: the model reference approach », Marcel Dekker, INC. 1979.



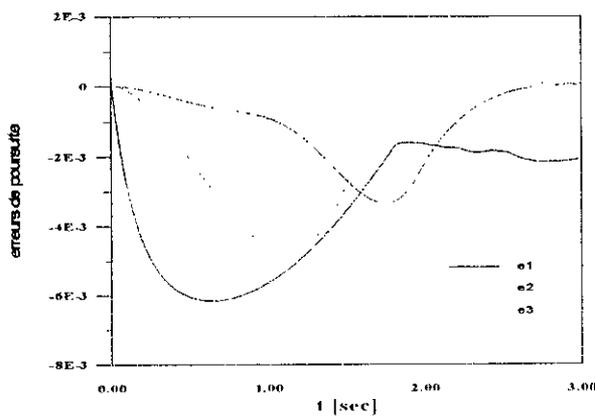
a- Position et couple de l'articulation 1



b- Position et couple de l'articulation 2



c- Position et couple de l'articulation 3



d- erreurs de poursuite en position

Fig.2 Réponse du système chargé à des trajectoires sigmoïdes $\delta=0$ (positions généralisées, erreurs de poursuite et commandes)

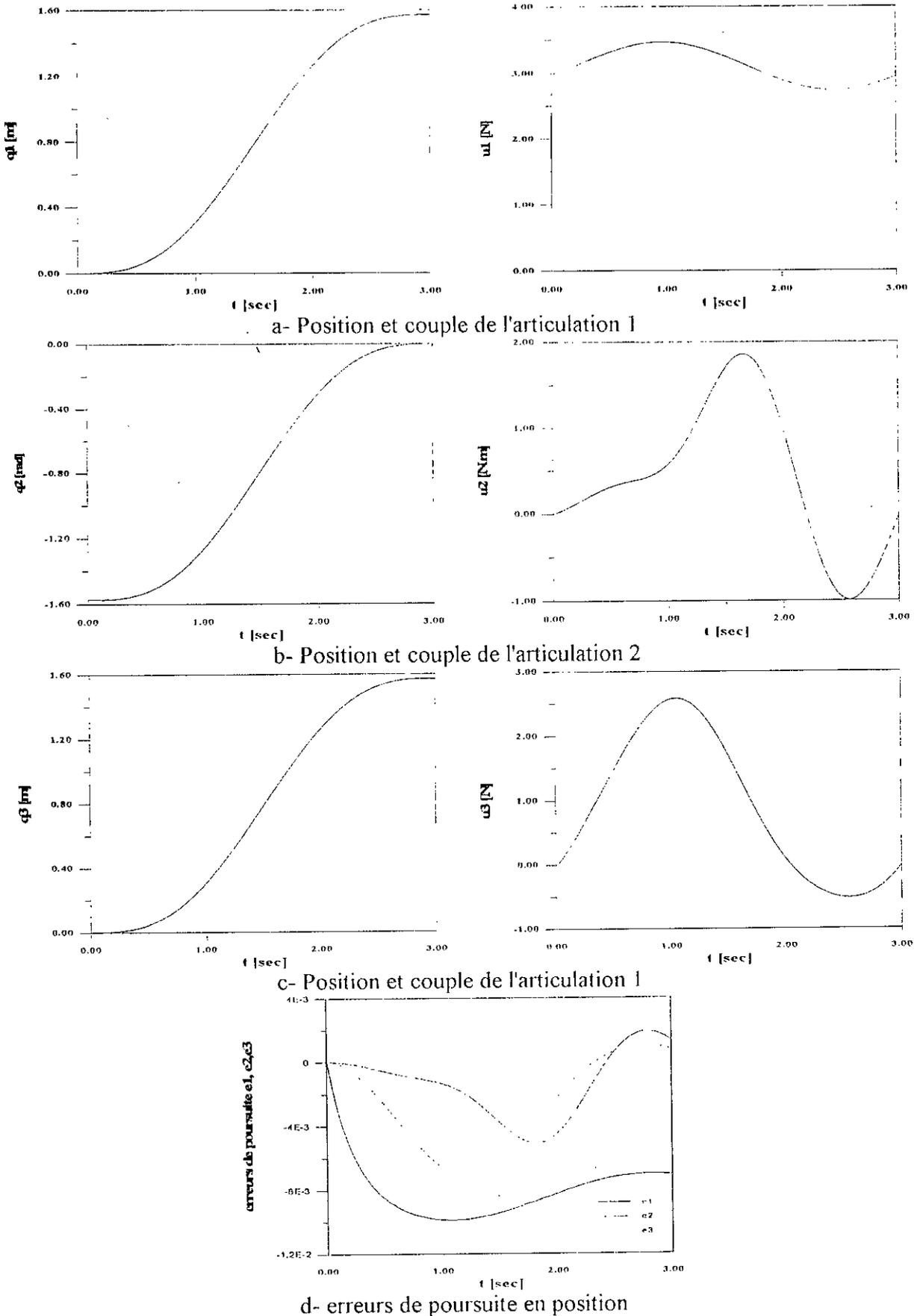


Fig.3 Réponse du système chargé à des trajectoires sigmoïdes $\delta=0.005$
 (positions généralisées, erreurs de poursuite et commandes)

Commande Adaptative Décentralisée des Systèmes Fortement Interconnectés

R. Bachir Bouyadjra¹, M.S. Boucherit², D. Boukhetala²

1- Laboratoire d'Automatique, Département Instrumentation et Contrôle
Centre de Développement des Systèmes Energétiques B.P. 180, 17200 Aïn Oussara.

2- Département de Génie Electrique Ecole Nationale Polytechnique
10, Avenue Pasteur El Harrach Alger - Algérie.

Résumé

L'objet de l'étude présentée dans cet article est le problème de synthèse d'une commande adaptative décentralisée pour les systèmes non linéaires multi-variables caractérisés par des fortes interconnexions. La loi de commande se compose d'un contrôleur adaptatif à structure décentralisée, et d'un signal auxiliaire utilisé pour améliorer les performances du système en boucle fermée et compenser l'effet des interconnexions. L'application de cette loi de commande au modèle non linéaire du robot manipulateur PUMA à 2 d.d.l, montre l'efficacité de cette dernière à compenser l'effet du couplage entre les différentes liaisons du système.

Mots Clés

Systèmes interconnectés, Commande adaptative, Commande décentralisée, Robots manipulateurs.

Abstract

The aim of this work is to analyze the problem of decentralized adaptive control of nonlinear, interconnected systems with higher order interconnections. The control law is comprised of two distinct components. The first is a decentralized controller, while the second is a compensator used to compensate for higher order interconnections, and to improve the performance of the closed loop system. An application to a robot manipulator with two degrees of freedom have been carried out. Simulation results are presented to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

Key Words

Interconnected systems, Adaptive control, Decentralized control, Robots manipulators.

ملخص

الهدف من هذا البحث هو دراسة التحكم المكيف اللامركزي لأجل الأنظمة غير الخطية متعددة المتغيرات و المميزة بقوة الترابط. إن قانون التحكم ينقسم إلى مركبتين، الأولى عبارة عن تحكم مكيف ذو بنية لامركزية و الثانية عبارة عن معوض يستعمل لتحسين مردود الجملة المغلقة و التعويض عن مفعول الروابط المعقدة. لدراسة مميزات و مدى صلاحية التحكم المكيف اللامركزي، قمنا بتطبيقه على نموذج روبوت بدرجتين للحرية.

1. Introduction.

Durant ces dernières décennies, un important travail de recherche a été mené dans le domaine de la commande adaptative des systèmes linéaires et notamment les mono-variables. Les méthodes les plus connues de synthèse des systèmes adaptatifs sont basées sur l'un des deux approches : « self-tuning », et « modèle de référence » [1].

L'extension de la commande adaptative au cas multi-variable a conduit à des algorithmes complexes et centralisés. Ces algorithmes nécessitent en générale un volume de calcul relativement important. Pour palier à cet inconvénient, des investigations se sont orientées vers des solutions basées sur la décomposition du système étudié, en un certain nombre de sous-systèmes pouvant être traités de façon autonome. Les différentes « sous-solutions » obtenues sont combinées d'une certaine

manière afin de résoudre le problème globale. La structure d'un système interconnecté est forcément multi-variable. Il est constitué par un ensemble d'unités appelées sous-systèmes. Ces derniers interagissent mutuellement par l'intermédiaire de liaisons appelées interconnexions.

Il existe plusieurs travaux qui concernent la commande adaptative décentralisée des systèmes interconnectés dans la littérature [2],[3],[4]. Nous avons remarqué que la plupart d'entre eux posent des conditions sur la structure et l'ordre des interconnexions. Les schémas de commande qui en découlent ne sont valable que dans le cas où ces conditions sont vérifiées. Ces dernières sont regroupées dans les hypothèses suivantes :

1. Les interconnexions vérifient certaines conditions de structure. Ces conditions restreignent le domaine d'application de la commande, néanmoins un grand

nombre de systèmes - en particulier les systèmes mécaniques - les vérifient.

2. Les interconnexions sont soit bornées par un polynôme d'état constant ou du premier ordre soit de dynamique nulle.

Des interconnexions d'ordre élevé peuvent déstabiliser le système globale si l'algorithme de calcul de commande n'a pas tenu explicitement compte de cette situation. Cette instabilité peut aussi être la conséquence de la poursuite de trajectoires rapides des robots manipulateurs [4].

2. Modélisation des Systèmes Interconnectés

Plusieurs modèles mathématiques ont été proposés pour représenter les systèmes interconnectés. Le terme d'interaction est modélisé sous forme d'une fonction statique ou dynamique dépendant soit des états, soit des sorties des sous-systèmes en interaction.

Nous considérons, dans ce travail, un système complexe S composé par N sous-systèmes interconnectés S_i , chaque sous-système S_i avec $i \in N$ est représenté sous la forme suivante :

$$S_i: \dot{\bar{x}}_i = A_i \bar{x}_i + \bar{b}_i u_i + \bar{b}_i z_i(t, \bar{x}) \quad (1)$$

où $\bar{x}_i(t) \in \mathcal{R}^{n_i}$ est le vecteur d'état, $u_i(t) \in \mathcal{R}$ est la commande, $A_i \in \mathcal{R}^{n_i} \times \mathcal{R}^{n_i}$ est une matrice constante inconnue et $\bar{b}_i \in \mathcal{R}^{n_i}$ est un vecteur constant inconnu. La fonction $z_i(t, \bar{x}): \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} : n = \sum_{i=1}^N n_i$ représente les interconnexions du sous-système S_i avec les autres sous-systèmes.

Le système globale S peut être représenté sous la forme compacte suivante:

$$S: \dot{\bar{x}} = A \bar{x} + B \bar{u} + B \bar{z}(t, \bar{x}) \quad (2)$$

où $\bar{x}(t) \in \mathcal{R}^n$, $\bar{u}(t) \in \mathcal{R}^N$ et $\bar{z}(t, \bar{x}): \mathcal{R} \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^N$, avec

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_N), \quad B = \text{diag}(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_N) \quad (3)$$

Les hypothèses suivantes doivent être vérifiées pour chaque sous-système S_i , $i \in N$.

HP1: Le pair (A_i, \bar{b}_i) est commandable. Cette supposition garantie le choix d'un système de coordonnées sous lequel les matrices d'état et de commande peuvent être mises sous la forme compacte de commande suivante

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in_i} \end{bmatrix}, \quad \bar{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

HP2: Les interconnexions sont bornées par un polynôme d'état d'ordre p . c.a.d. il existe des coefficients constants connus ou inconnus ξ_{ij}^k tels que:

$$\|z_i(t, \bar{x})\| \leq \sum_{k=0}^p \sum_{j=1}^N \xi_{ij}^k \|\bar{x}_j\|^k \quad (5)$$

3. Commande Adaptative Décentralisée

Le problème de la stabilisation décentralisée des systèmes fortement interconnectés se pose de la manière suivante: étant donné un système interconnecté représenté par un modèle déterministe donné par (1) et (5), concevoir une loi de commande décentralisée (composée de N commandes locales) qui stabilise le système globale tout en compensant l'effet des interconnexions. Ces dernières souvent fortement non linéaires doivent être compensées de façon décentralisée soit par l'addition des termes non linéaires dans la loi de commande sans modifier sa structure, soit par modification de la loi d'adaptation. C'est dans cette voie, que Shi & Singh [5] et Feng & Jiang [7] ont porté leurs contributions.

Dans un premier lieu, nous allons étudier le cas de la commande qui comporte une composante décentralisée et un compensateur (signal auxiliaire) centralisé, puis la décentralisation de ce dernier dans les deux cas suivants: interconnexions du second ordre et interconnexions d'ordre quelconque.

3.1 Commande avec Compensateur Partiellement Centralisé

L'idée d'utiliser cette stratégie de progression dans la décentralisation des commandes n'est pas tout à fait nouvelle. En effet, Ossman [6] a proposé une commande adaptative indirecte décentralisée mais qui utilise pour l'estimation des paramètres un algorithme d'adaptation paramétrique centralisé.

On considère dans cette étude la poursuite d'un modèle de référence donné par :

$$\dot{\bar{x}}_{m_i} = A_{m_i} \bar{x}_{m_i} + \bar{b}_{m_i} r_i \quad (6)$$

$\bar{e}_i(t) = \bar{x}_i(t) - \bar{x}_{m_i}(t)$ est l'erreur de poursuite.

La commande adaptative décentralisée proposé est donnée par :

$$u_i(t) = \bar{\mathcal{G}}_i^T \bar{v}_i + f_i(t) \quad (7)$$

où $\bar{v}_i(t) = (\bar{e}_i^T(t), r_i)$ est le vecteur de régression et $\bar{\mathcal{G}}_i^T = (\bar{k}_i^T, k_{g_i})$ est le vecteur gain d'adaptation.

La loi de commande (7) se compose de deux termes : $\bar{\mathcal{G}}_i^T \bar{v}_i$ est un contrôleur adaptatif décentralisé, $f_i(t)$ est un compensateur (signal auxiliaire) à structure centralisée. Cette stratégie se veut être une tentative de passer d'une commande complètement centralisée à une commande partiellement centralisée

La loi d'adaptation des paramètres utilisée est la suivante :

$$\dot{\bar{\Theta}}_i = -\Gamma_i(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) \bar{v}_i - \Gamma_i \sigma \bar{\Theta}_i \quad (8)$$

où P_i est la matrice $n_i \times n_i$, symétrique et définie positive, et qui est la solution de l'équation de Lyapunov donnée par :

$$A_{m_i}^T P_i + P_i A_{m_i} = -Q_i \quad (9)$$

Q_i est une matrice définie positive, et σ est le paramètre de la méthode dite « σ -modification » utilisée pour améliorer la robustesse du système globale. Γ_i est une matrice définie positive de dimension convenable.

Le compensateur centralisé proposé est décrit par :

$$f_i(t) = -\rho(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) \sum_{k=0}^p \|\bar{e}\|^{2k} \quad (10)$$

avec $\bar{e} = (\bar{e}_1^T, \dots, \bar{e}_N^T)^T$ et ρ est un paramètre choisi strictement positif.

Le système en boucle fermée s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i &= A_{m_i} \bar{e}_i + \bar{b}_i \left[\bar{\phi}_i^T \bar{v}_i - \rho(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) \sum_{k=0}^p \|\bar{e}\|^{2k} + z_i(t, \bar{x}) - \bar{k}_i^* \bar{x}_{m_i} \right] \\ \dot{\bar{\phi}} &= -\Gamma_i(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) \bar{v}_i - \Gamma_i \sigma (\bar{\phi}_i + \bar{\Theta}_i^*) \end{aligned} \quad (11)$$

où $\bar{\phi}_i = \bar{\Theta}_i - \bar{\Theta}_i^*$, $\bar{\Theta}_i^* = (\bar{k}_i^{*T}, k_{0i}^*)^T$ désignent pour chaque sous-système l'erreur paramétrique et le vecteur gain de la commande linéaire à poursuite parfaite [1].

D'après HP1 et HP2, avec ξ_{ij}^k considérés inconnus, les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0)$ des équations (11) convergent globalement vers un ensemble résiduel donné par :

$$\Omega_r = \left\{ (\bar{e}, \bar{\phi}) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^L : V_r(\bar{e}, \bar{\phi}) \leq V_f \right\} \quad (12)$$

avec

$$\bar{\phi} = (\bar{\phi}_1^T, \dots, \bar{\phi}_N^T)^T, n = \sum_{i=1}^N n_i, L = \sum_{i=1}^N (n_i + 1)$$

$$V_f = \mu^{-1} \eta \text{ et}$$

$$\mu = \min \left\{ \lambda_{\max}^{-1}(P) \lambda_{\min}(Q), \sigma \lambda_{\max}(\Gamma) \right\}$$

$$\eta = \sigma \|\bar{\Theta}^*\|^2 + 0.5 \rho^{-1} N \left[(N c_{\max} c_{\max} + \|\bar{k}^{*T} \bar{x}_{m_i}\|)^2 + P(N c_{\max} c_{\max})^2 \right]$$

ζ_{\max} et c_{\max} sont des paramètres positifs [5].

En plus, nous avons:

$$P = \text{diag}\{P_1 \dots P_N\}, Q = \text{diag}\{k_{01}^* Q_1 \dots k_{0N}^* Q_N\}$$

$$\Gamma = \text{diag}\{\Gamma_1 \dots \Gamma_N\}.$$

La stabilité de cet algorithme est démontrée, en utilisant la seconde méthode de Lyapunov. La fonction scalaire de Lyapunov associée à chaque sous-système en boucle fermée est donnée par [5] :

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i \right\} \quad (13)$$

3.2 Commande avec Compensateur Décentralisé : Interconnexions d'Ordre 2

Dans le cas où la supposition HP2 est utilisée pour caractériser la nature des interconnexions, nous avons remarqué qu'une commande décentralisée avec un compensateur centralisé peut être utilisé pour avoir un système globalement borné. La question qui se pose à ce niveau est : peut-on garantir la stabilité en choisissant un compensateur à structure décentralisée ?

Nous allons illustrés cette possibilité, dans cette section, pour des interconnexions d'ordre deux ($p=2$).

3.2.1 Commande Décentralisée Semi-Adaptative :

On suppose que ξ_{ij}^k définis dans (5) sont connus (ou peuvent être estimés) a priori. Cette condition va être violée dans le cas du schéma complètement adaptative étudié en 3.2.2.

On propose d'utiliser le compensateur décentralisé suivant :

$$f_i(t) = -\rho_i(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) (1 + \|\bar{e}_i\|^2) \quad (14)$$

et la loi d'adaptation suivante :

$$\dot{\bar{\Theta}}_i = -\Gamma_i(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) \bar{v}_i \sum_{k=1}^2 k(\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^{k-1} - \Gamma_i \sigma \bar{\Theta}_i \quad (15)$$

avec P_i définie en (9), $\sigma > 0$ et Γ_i est une matrice $n_i \times n_i$ DP. Dans le cas où ξ_{ij}^k sont connus, le gain ρ_i est constant. C'est le cas de la commande décentralisée semi-adaptative, le gain ρ_i n'est pas adapté à chaque instant d'échantillonnage.

Le système en boucle fermé devient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i &= A_{m_i} \bar{e}_i + \bar{b}_i \left[\bar{\phi}_i^T \bar{v}_i + f_i + z_i(t, \bar{x}) - \bar{k}_i^* \bar{x}_{m_i} \right] \\ \dot{\bar{\phi}} &= -\Gamma_i(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i) \bar{v}_i \sum_{k=1}^2 k(\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^{k-1} - \Gamma_i \sigma (\bar{\phi}_i + \bar{\Theta}_i^*) \end{aligned} \quad (16)$$

D'après HP1 et HP2 avec $p=2$ et pour ξ_{ij}^k connus, les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0)$ des équations (16) convergent globalement vers un ensemble résiduel donné par (12). La stabilité de cet algorithme est démontrée, en utilisant la fonction de Lyapunov suivante [5]:

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i + k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^2 \right\} \quad (17)$$

La méthode décrite précédemment possède l'inconvénient suivant: pour avoir un ensemble résiduel aussi restreint que possible, nous sommes obligés d'attribuer une grande valeur pour ρ_i , ce qui va influencer

directement sur les signaux de commande. Un mauvais choix de ρ_i peut déstabiliser le système globale, donc une estimation adaptative de ce paramètre est indispensable dans cette situation.

3.2.2 Commande Décentralisée Complètement Adaptative:

Dans le cas où les paramètres ξ_{ij}^k donnés dans HP2 sont inconnus, ρ_i l'est aussi, et la commande décentralisée semi-adaptative développée dans la section précédente n'est plus applicable. On introduit donc la loi d'adaptation suivante de ρ_i :

$$\dot{\rho}_i = \gamma_i \|\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i\|^2 \left(1 + \|\bar{e}_i\|^2\right) \sum_{k=1}^2 k \left(\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i\right)^{k-1} - \gamma_i \sigma_i \rho_i \quad (18)$$

avec γ_i et σ_i sont des scalaires positifs. Le système en boucle fermé est donc représenté par les équations (16) et (18).

D'après HP1 et HP2 avec $p=2$ et ξ_{ij}^k inconnus, les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0, \bar{\rho}_0)$ des équations (16) et (18) sont globalement asymptotiquement stables. Pour démontrer la stabilité de cet algorithme, on utilise la fonction de Lyapunov suivante [5] :

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i, \rho_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ k_{0i}^* \bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i + k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^2 + \gamma_i^{-1} (\rho_i - \rho_i^*) \right\} \quad (19)$$

où ρ_i^* est un paramètre positif.

3.3 Commande Adaptative Décentralisée : Interconnexions d'Ordre Elevé

Dans le cas général où les interconnexions satisfont l'hypothèse HP2, avec $p>2$ et dans le cas où ξ_{ij}^k sont constants et bornés à la fois, on propose d'utiliser le compensateur suivant :

$$f_i(t) = -\rho_i \left(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \right) \left(1 + \|\bar{e}_i\|^{2(p-1)} \right) \quad (20)$$

et la loi d'adaptation locale suivante :

$$\dot{\bar{\vartheta}}_i = -\Gamma_i \left(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \right) \bar{v}_i \sum_{k=1}^p k \left(\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i \right)^{k-1} - \Gamma_i \sigma \bar{\vartheta}_i \quad (21)$$

Le système en boucle fermé devient :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_i &= A_{m_i} \bar{e}_i + \bar{b}_i \left[\bar{\phi}_i^T \bar{v}_i + f_i + z_i(t, \bar{x}) - \bar{k}_i^{*T} \bar{x}_{m_i} \right] \\ \dot{\bar{\phi}} &= -\Gamma_i \left(\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i \right) \bar{v}_i \sum_{k=1}^p k \left(\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i \right)^{k-1} - \Gamma_i \sigma (\bar{\phi}_i + \bar{\vartheta}_i^*) \end{aligned} \quad (22)$$

Le gain ρ_i est fixé ou estimé a priori (cas semi adaptative) ou estimé adaptativement.

Les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0)$ des équations (22), avec $p>2$ et ξ_{ij}^k connus sont globalement asymptotiquement stables.

La fonction de Lyapunov candidate pour la démonstration de la stabilité de cet algorithme est la suivante [5] :

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^k + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i \right\} \quad (23)$$

Dans le cas où ξ_{ij}^k sont inconnus, on peut toujours utiliser des compensateurs à gains estimés adaptativement, on aura ainsi un schéma complètement adaptative (fully adaptive scheme).

La loi d'adaptation pour ces paramètres ρ_i est :

$$\dot{\rho}_i = \gamma_i \|\bar{b}_{m_i}^T P_i \bar{e}_i\|^2 \left(1 + \|\bar{e}_i\|^{2(p-1)} \right) \sum_{k=1}^p k \left(\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i \right)^{k-1} - \gamma_i \sigma_i \rho_i \quad (24)$$

où γ_i et σ_i sont des paramètres choisis strictement positives.

D'après HP1 et HP2 avec $p>2$ et pour ξ_{ij}^k inconnus, les solutions $(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho})(t; t_0, \bar{e}_0, \bar{\phi}_0, \bar{\rho}_0)$ des équations (22) et (24) sont globalement asymptotiquement stables.

La fonction de Lyapunov utilisée pour la démonstration de cet algorithme complètement adaptatif est donnée par [5] :

$$V(\bar{e}, \bar{\phi}, \bar{\rho}) = \sum_{i=1}^N V_i(\bar{e}_i, \bar{\phi}_i, \rho_i) = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^p k_{0i}^* (\bar{e}_i^T P_i \bar{e}_i)^k + \bar{\phi}_i^T \Gamma_i^{-1} \bar{\phi}_i + \gamma_i^{-1} (\rho_i - \rho_i^*)^2 \right\} \quad (25)$$

4. Application et Résultats de Simulations.

Pour la simulation des différents algorithmes de commande étudiés, nous avons appliqué ces méthodes sur le modèle dynamique du robot manipulateur PUMA à 2 degrés de liberté (figure 4.1).

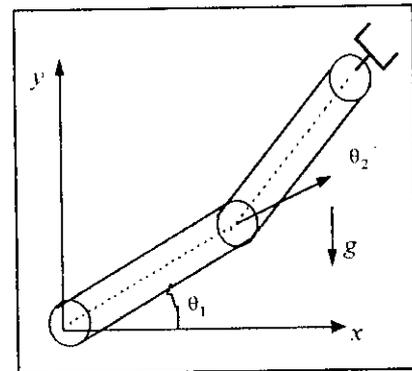


Fig. 4.1: Robot Manipulateur Plan à 2 d.d.l.

Le modèle dynamique est obtenu en utilisant l'approche de Euler-Lagrange et est donné par l'équation

différentielle vectorielle non linéaire du second ordre suivante :

$$T(t) = D(\theta) \cdot \ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) + c(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} T_1(\theta) \\ T_2(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2l^2 + m_2l^2c_2 & \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2c_2 \\ \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2c_2 & \frac{1}{3}m_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2l^2s_2\dot{\theta}_2^2 - m_2l^2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + V_1\dot{\theta}_1 \\ \frac{1}{2}m_2l^2s_2\dot{\theta}_1^2 + V_2\dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m_1glc_1 + m_2gl(\frac{1}{2}c_{12} + c_1) \\ \frac{1}{2}m_2glc_{12} \end{bmatrix} \quad (26)$$

avec $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$ et $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$. Les paramètres du robot sont donnés par [4] :

$$m_1 = 15.91 \text{ kg}, m_2 = 11.36 \text{ kg}, l = 0.432 \text{ m}$$

$$V_1 = V_2 = 1 \text{ N.m / rad.s}^{-1}$$

Les trajectoires de référence choisies sont de type cycloïde données par [4] :

$$\theta_{r_i}(t) = \begin{cases} \theta_{r_i}(t_0) + \frac{\Delta_i}{2\pi}(\omega t - \sin(\omega t)) & \text{pour } t < t_f \\ \theta_{r_i}(t_f) & \text{pour } t \geq t_f \end{cases} \quad (27)$$

avec $\Delta_i = \theta_{r_i}(t_f) - \theta_{r_i}(t_0)$ et $\omega = \frac{2\pi}{t_f}$.

Les modèles de références pour la simulation des différents algorithmes de commande sont choisies de la manière suivante [5],[7] :

$$A_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \bar{b}_{m_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

pour $Q_i = 4I_2$, avec I_2 est la matrice d'identité de dimension 2×2 , l'équation de Lyapunov est résolue pour donner :

$$P_i = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \bar{b}_{m_i}^T P_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Pour permettre une étude comparative entre les différentes lois de commande, les paramètres sont maintenus constants pour les différents schémas, et sont donnés par

$\Gamma_i = 700 \times I_3$, $\rho_i = 20$, $\sigma_i = 0.05$, $i = 1, 2$ dans le cas de la commande avec compensateur centralisé et la commande avec compensateur décentralisé semi-adaptatif.

$\Gamma_i = 700 \times I_3$, $\gamma_i = 10$, $\sigma_i = 0.05$, $i = 1, 2$ dans le cas de la commande avec compensateur décentralisé adaptatif.

Les réponses obtenues, dans le cas d'une variation brusque de la charge que porte l'élément terminal sont représentés sur la figure 4.2. Nous remarquons qu'une poursuite parfaite a été obtenue dans le cas de la commande adaptative avec compensateur

centralisé (C.C), commande décentralisée semi-adaptative (C.D.S.A), et commande décentralisée adaptative (C.D.A).

5. Conclusion.

Nous avons étudiés et testés plusieurs algorithmes de commande adaptative décentralisée dans le cas des interconnexions d'ordre élevé. Les résultats de simulations de ces derniers sur un PUMA à 2 d.d.l. montrent l'effet du signal auxiliaire à compenser les interactions qui existent entre les différentes liaison du manipulateur. La poursuite est robuste vis à vis de la variation de charge que peut subir l'effecteur.

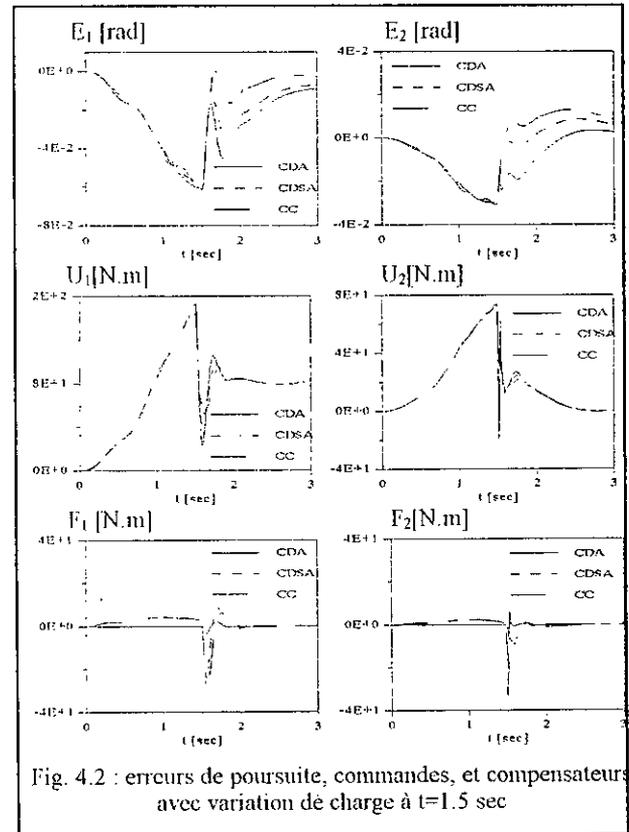


Fig. 4.2 : erreurs de poursuite, commandes, et compensateurs avec variation de charge à $t=1.5$ sec

6. Références.

- [1] Y. Landau, "Adaptive Control : the model reference approach", Marcel Dekker, INC.
- [2] L. Shi, S.K. Singh, "On Lyapunov function based decentralized adaptive controllers", in Proc. 1990 IEEE Int. Conf. Decision Contr., 1990, 299-304.
- [3] D. T. Gavel, D. D. Siljak, "Decentralized adaptive control : Structural conditions for stability", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, No. 4, April, 1989, 413 - 426.
- [4] H. Seraji, "Decentralized Adaptive Control of manipulators : Theory, simulation, and experimentation" IEEE Trans. Robot. Automat., vol.5 no. 2, 1989, 183-201.
- [5] L. Shi, S.K. Singh, "Decentralized Adaptive Controller Design for Large-Scale Systems with Higher Order Interconnections", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 37, No. 8, August, 1992, 1106-1118.
- [6] K. A. Ossman, "Indirect adaptive control for interconnected systems", IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 34, No. 8, August, 1989, 908-911.
- [7] G. Feng, Y. A. Jiang, "Variable structure based decentralised adaptive control", IEE Proc. Control Theory Appl., vol. 142, no.5, September 1995, 439 - 443.

BIBLIOGRAPHIE

[AL-ABBASS 85]

F. AL-ABBASS and U. OZGUNER, 'Decentralized Model Reference Adaptive System using a Variable Structure Control', Proc. 24th Conf. Decision and Control, December 1985, 1473-1478.

[ARMSTRONG 86]

B. ARMSTRONG, O. KHATIB, and J. BURDICK, 'The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 500 Arm', In Proc. of the IEEE Conference, 1986, 510-518.

[ASTRÖM 89]

K.J. ASTRÖM and B. WITTERNMARK, 'Adaptive Control', Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[BENALI 91]

A. BENALI, 'Contribution à la commande adaptative des robots manipulateurs dans l'espace opérationnel', Rapport de stage de DEA de Robotique, Université Paris VI, 1991.

[BENCHOUBANE 92]

H. BENCHOUBANE, 'The Derivation of a Robust Adaptive Control Algorithm', Proc. de la Conférence sur l'électronique, l'électrotechnique et l'automatique, Blida 1992, 231-245.

[BENCHOUBANE 92]

H. BENCHOUBANE, 'The Derivation of a Decentralized Adaptive Control Algorithm for Large scale Systems', Proc. de la Conférence sur l'électronique, l'électrotechnique et l'automatique, Blida 1992, 566-581.

[BENHAMMOU 88]

A. BENHAMMOU, 'Contribution à l'étude de la commande adaptative décentralisée des systèmes interconnectés', Thèse de doctorat d'état, université Paul Sabatier de Toulouse, 1988.

[BERNUSSOU 82]

J. BERNUSSOU, A. TITLI, 'Interconnected dynamical systems: Stability, Decomposition and Decentralisation', NORTH-HOLLAND SYSTEMS AND CONTROL SERIES, Vol. 05, NORTH-HOLLAND, 1982.

[BOISSONNAT 88]

J.D. BOISSONNAT, B. FAVEERJON et J.P. MERLET, 'Technique de la robotique: Tome 1 architectures et commandes', Hermes, 1988.

[BOUKHETALA 96]

D. BOUKHETALA, O. BOUHALI et F. BOUDJEMA, 'Commande Adaptative à Structure Décentralisée par réseaux de Neurones Statiques d'un Robot Manipulateur', In Proc. of the COMAEI'96, Tlemcen 1996, 165-170.

[BOUYADJRA 97]

R. B. BOUYADJRA, M.S. BOUCHERIT et D. BOUKHETALA, 'Commande Adaptative Décentralisée Via les Structures Variables des Robots Manipulateurs', in Proc. of the CMSES'97, Saïda 1997, 15-21.

[BOUYADJRA 97]

R. B. BOUYADJRA, M.S. BOUCHERIT et D. BOUKHETALA, 'Commande Adaptative Décentralisée des Systèmes Fortement Interconnectés', in Proc. of the IEEA'97, Batna 1997, (à apparaitre).

[CHOI 88]

Y.K. CHOI and Z. Bien, 'Decentralized adaptive control of a multi-arm-type robot', INT. J. Control, Vol.48, No.4, 1988, 1715-1722.

[DION 86]

J.M. DION et L. DUGARD, 'Commande adaptative multivariable: quelques résultats théoriques et pratiques', R.A.I.R.O. APII, Vol. 20, No.4, 337-358.

[DJEBARA 92]

K. DJEBARA, 'Commande Adaptative Monovaraible d'un Four de Recuit Rapide', Thèse de Magister, Centre de Développement des Systèmes Energetiques, 1992.

[FENG 95]

G. FENG and Y.A. JIANG, 'Variable structure based decentralised adaptive control', IEE, Proc. Control Theory Appl., Vol.142, No.5, September 1995,439-443.

[FU 87]

K.S. FU, R.C. GONZALES and C.S.G.LEE, 'Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence', McGraw-Hill Book Company, 1987

[FU 92]

L.C. FU, 'Robust Adaptive Decentralized Control of Robot Manipulators', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol.37, No.1, January 1992,106-110.

[GAVEL 85]

D.T. GAVEL and D.D. SILJAK, 'Adaptive Control of Decentralized Systems: Know Subsystems, Unknwon Interconnections', In Proc. of the 24th Conference on Decision and Control, December 1985, 1857-1861.

[GAVEL 89]

D.T. GAVEL and D.D. SILJAK, 'Decentralized Adaptive Control: Structural Conditions for Stability', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol.34, No.4, April 1989, 413-426.

[GEGOV 95]

A. E. GEGOV and P.M. FRANK, 'Decentralized fuzzy control of multivariable system by active decomposition of control laws', Int. J. Control, Vol.62, No4, 1995, 781-798.

[IOANNOU 84]

P.A. IOANNOU and P.V. KOKOTOVIC, 'Robust Redesign of Adaptive Control', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol. AC.29, No.3, March 1984, 202-211.

- [IOANNOU 85]
P.A. IOANNOU and P.V. KOKOTOVIC, 'Decentralized Adaptive Control of Interconnected Systems with Reduced-order Models', *Automatica*, Vol.21, No.4, 1985, 401-412.
- [IOANNOU 86]
P.A. IOANNOU, 'Decentralized Adaptive Control of Interconnected Systems', *IEEE, Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC.31, No.4, April 1986, 291-298.
- [KAMOUN 89]
M. KAMOUN and A. TITLI, 'Implicit self-tuning control for a class of large-scale systems', *INT. J. Control*, Vol.49, No.2, 1989, 713-722.
- [KARAKASOGLU 93]
A. KARAKASOGLU and S. I. SUDHARSANAN, 'Identification and Decentralized Adaptive Control Using Dynamical Neural Networks with Application to Robotic Manipulators', *IEEE, Trans. Neural Networks*, Vol. 4, No.6, November 1993, 919-930.
- [LANDAU 79]
Y.D. LANDAU, 'Adaptive Control: The Model Reference Approach', Marcel Dekker, INC, 1979.
- [LEAHY 90]
M.B. LEAHY, 'Model-Based Auxiliary Input Control: Development and Experimental Analysis', In Proc. of the 29th Conference on Decision and Control, December 1990, 3340-3345.
- [LYOU 95]
J. LYOU, 'Note on Decentralized Adaptive Controller Design', *IEEE, Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, No.1, January 1995, 89-91.
- [MSIRIDI 92]
N.K. MSIRIDI, 'Panorama sur la commande dynamique de robots rapides rigides', Notes de cours, Université Paris VI, 1992.
- [NARENDRA 78]
K. S. NARENDRA and L.S. VALAVANI, 'Stable Adaptive Design- Direct Control', *IEEE, Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC. 23, No.4, August 1978, 570-583.
- [OSSMAN 89]
K.A. OSSMAN, 'Indirect Adaptive Control for Interconnected Systems', *IEEE, Trans. Automat. Contr.*, Vol. 34, No.8, August 1989, 908-911.
- [PAUL 86]
R.P. PAUL, 'Robots Manipulators: Mathematics, Programming, and Control', The MIT Press, 1986.
- [PRALY 92]
L. PRALY, 'Introduction à la théorie de la commande adaptative des systèmes linéaires', Cours à l'Ecole Supérieure des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes, Février 1992.

- [SANDELL 78]
N. R. SANDELL, P. VARAIYA, M. ATHANS, and M. G. SAFANOV, 'Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale systems', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol. AC.37, No.2, April 1978,108-125.
- [SERAJI 87]
H. SERAJI, 'A New Approach to Adaptive Control of Manipulators', Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control, Vol.109, September 1987, 193-200.
- [SERAJI 87]
H. SERAJI, 'An Approach to Multivariable Control of Manipulators', Journal of Dynamic Systems, Measurement, and control, Vol.109, June 1987, 147-154.
- [SERAJI 89]
H. SERAJI, 'Decentralized Adaptive Control of Manipulators: Theory, Simulation, and Experimentation', IEEE, Trans. Robotics and Automation, Vol.5, No.2, April 1989, 183-201.
- [SHI 90]
L. SHI and S.K. SINGH, 'On Lyapunov Function Based Decentralized Adaptive Controllers', Proc. 29th Conf. Decision and Control, December 1990, 299-303.
- [SHI 92]
L. SHI and S.K. SINGH, 'Decentralized Adaptive Controller Design for Large-Scale Systems with Higher Order Interconnections', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol. 37, No.8, August 1992, 11061118.
- [SLOTINE 91]
J.J.E. SLOTINE and W. LI, 'Applied Nonlinear Control', Prentice Hall, 1991.
- [SINGH 81]
MADAN G. SINGH, 'Decentralised Control', NORTH-HOLLAND SYSTEMS AND CONTROL SERIES, Vol. 01, NORTH-HOLLAND, 1981.
- [SPOONER 96]
J.T. SPOONER and K. M. PASSINO, 'Adaptive Control of Decentralized Nonlinear Systems', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol.41, No.2, February 1996,280-284.
- [VIBET 87]
C. VIBET, 'Robots Principes et Contrôle', Ellipses Eds., 1987.
- [WEN 94]
C. WEN, 'Decentralized Adaptive Regulation', IEEE, Trans. Automat. Contr., Vol. 39, No.10, October 1994,2163-2166.