REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعـــليم والبحـــث العـــلمـــي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

6/84

1ex

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : Genie Mecanique.

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE D'UN AMORTISSEUR DYNAMIQUE POUR LABORATOIRE DYNAMIQUE DES MACHINES

Proposé par : M. KSIAZEK

Etudié par : M. AZINE

Dirigé par : M. KSIAZEK

PROMOTION : JANVIER 1984

بسم الله الرحمن الرحيم

رَبِّ اشْرَحْ لِي صَدْرِي وَيَسِّرْ

لِي أَمْرِي وَاحْلُلْ عُقْدَةً مِنْ لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي

صدق الله العظيم

DEDICACES

A ma mère

A mon père

A mes frères et soeurs

A tous les miens

A tous mes amis

REMERCIEMENTS

En presentant ce travail , je tiens à remercier tous ceux qui y ont contribué de prés ou de loin , même de la façon la plus modeste.
Je remercie en particulier M^{r} M. KSIAZEK pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour le devouement dont il a fait preuve pendant toute la durée du projet.

Je tiens aussi à remercier tous les professeurs pour tout ce que m'ont apprit et tout ce que je n'ai pas pu retenir.

Mes remerciements vont à tous mes amis (es) et en particulier N.AIT MESSAOUDENE, A.AOUABED, W.NACEUR, R.DRAI, A.ZAHAF, R.BEN-CHARIF, M.DIB et tous les autres.

TABLE DE MATIERES

Pages

BUT DE TRAVAIL

Le but du travail consiste à faire l'etude d'un absorbeur de vibration dynamique d'un systeme vibratoir.

Pour cela nous allons proposer un appareillage pour 'TP' (voir planches). A l'aide d'un appareillage electrique, on peut mesurer des amplitudes de vibrations en fonction des frequences d'excitation et de determiner certainsparamètres definis sant l'absorbeur de vibration pour pouvoir les comparer avec ceux que nous allons etablir théoriquement .

CHAPITRE-I-

I. INTRODUCTION

La theorie des oscilations est une vaste branche de la physique, embrassant unetrés large sphere de question de mecanique, d'electrotecnnique, de radio, d'electricité, d'optique, etc....

Une place particuliere revient à la theorie des oscilations en vue des applications, notament aux question de resistance des machines et des constructions. On connai des cas où une construction calculée avec un grand coeffic de securité pour une charge statique s'esttrompue sous l'effort des forces periodiques relativement petites. Souvent une construction rigide et trés resistante est inadequate en presence de force variable, alors qu'une construction identique plus legere et àpremière vue moins resistante, supporte facilement ces efforts

C'est pourquoi les questions d'oscilations est, en generale, le comportement des systemes elastiques sous l'action de charges variables, exigent du constructeur une attention particuliere. Car tout systeme qui oscille peut atteindre sa frequence de resonance.

Le phénomeme de resonance est d'une importance primordia dans les calcules de resistance dynamique. Le fait est que dans la plupart des cas les lois de variations des forces perturbatrices ont un caractere periodique.

./..

Ainsi, les parties mobiles mal equilibrées (balourd) d'un moteur créent des forces variables periodiques.
Un train se mouvant à vitesse constante reçoit des chocs periodiques à la jonction des rails. Les pieces des appareils instalées sur des bases vibrantes (dans un avion, une voiture) reçoit des chocs à la frequence de base vibrante. On pourait multiplier ces exemples.

Dans ces cas, la question se pose du degrés de danger des forces perturbatrices pour le fonctionnement du systeme elastique, donc il importe de savoir si les vibra-tions ne sont pas trop excessives, car elles provoquent la destruction prematurés des appareils.

2-GENERALITES

2.1. Notions sur les vibrations

2.11 Definition

Un corps (machine) est soumisé à une vibration lorsqu'il subit des oscilations periodiques alternées se traduisant lorsque le corps est suspendu elastiquement, par des oscilations plus ou moins importantes.

2.1.2. Vibrations propres ou naturelles

Ce sont des vibrations qui affectent naturel-lement la machine lorsque, aprés avoir été ecartée de sa position d'equilibre, elle est abondonnée à elle même.

2.1.3. Vibrations forcées ou entretenues

Ce sont des vibrations imposées à la machine soit par son fonctionnement interne, soit par des oscilations de son entourage.

2.1.4. Degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté est au nombre de parametres independants qui fixes la position de la machine à un instant donné. Il y en a au maximum six(6) pour un corp rigide par exemple les trois(3) coordonnées du centre de gravité et les angles de rotations autour des troid(3) axes.

2.1.5. Notion d'excitation

Des excitations qui agissent sur un systeme peuvent se presenter sous differentes formes, de même les reponses du systeme peuvent être de même nature ou de nature differentes que celle de l'excitation.

3- PROCEDURE D'ANALYSE DES VIBRATIONS DANS LES MACHINES

On suppose qu'une machine presentant une source de vibration (excitateur etc...) est installée dans un milieu delicat qui necessite la limitation des vibrations à une certaine condition(condition physiologiqu confort ou prend gare àla deterioration de la machine). Pour cela on doit proceder comme suit:

- Construction d'un modele dynamique de la machine
- Evaluation des masse et regidité des defferentes parties mobiles ou fixes constituant la machine.

../..

- Determination des equations differentielles de mouvement de la machine.
- Resolution de ces equations differentielles.
-conclusion ; dimensionnement de certaines pieces de la machine et choix de l'amortisseur ou l'absorbeur de vibrations.

CHAPITRE -II-

1. ANALYSE DYNAMIQUE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE AVEC UN DEGRES DE LIBERTE

Soit un systeme dynamique à un degré de liberté representé schematiquement sur la figure-1- qui comporte:

Une masse M qui est relier à des assises regides fixe A par une suspension elastique S, pouvant être assimilée, àun ensemble comportant en parallele un ressort pur(non amorti) de regidité K et un amortisseur purement visqueux de viscance α .

La masse M ne pouvant se deplacer que parallelement à

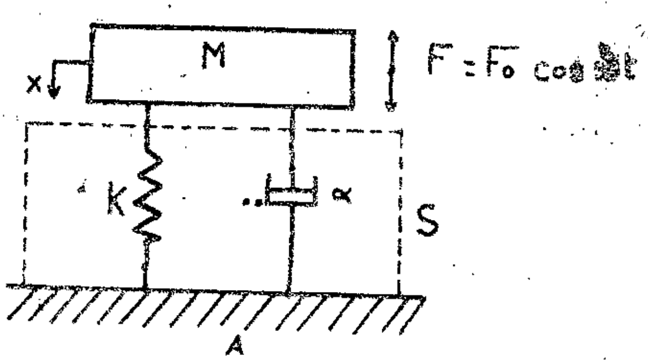


figure-1-

1.1. OSCILATION LIBRE

La masse M aprés avoir eté ecartée de sa position d'equilibre, elle est abondonnée à elle même, x etant le deplacement(c'est àdire egalement la deformée des support à l'instant t)

Soit:

Ec = L'energie cinetique

Ep = L'energie potentielle

D = L'energie de dissipation

L = Ec - Ep : Lagrangien

L'equation du mouvement est: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$ (1)

Avec:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{X}^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} K X^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{X}^2$$

Nous remplaçons les expressions L, D par leur valeur dans l'equation(1) nous obtenant l'equation(2)

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{M} \dot{X} + \frac{K}{M} X = 0 \quad (2)$$

Nous posons: $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

$\frac{\alpha}{m} = 2 \xi \omega_0$ avec ξ taux d'amortissement

L'equation(2) devient:

$$\ddot{X} + 2 \xi \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2')$$

L'integration de cette equation(2') nous donne la solution:

$$X = x_0 \, e^{-\xi \omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$$

Ils'agit d'un mouvement vibratoir amorti de pulsation propre:

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

avec $0 < \xi < 1$

1.2. OSCILATION FORCEE

Nous supposons maintenant que la masse M, independament de son oscilation libre qui peut se poursuivre, est sollicité par un effort periodique toujours dirigé suivant x'x, que nous supposons de la forme : $F = F_0 \cos \nu t$

../..

L'equation differentielle qui regit le mouvement du systeme est:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + F \qquad (3)$$

et nous adoptons les mème notations que pour l'oscillatio libre, nous obtenons l'equation(4)

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M}\cos\vartheta t \qquad (4)$$

On sait que la solution generale d'une telleéquation s'obtient en ajoutant une solution particuliere àlla solution geneeale de l'equation sans second membre.

La solution particuliere est de la forme:

$$X_p = A_0\, e^{j\vartheta t}$$

Nous determinons facilement la valeur de A_0

La s olution generale est:

$$x = X_0\, e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t\right) + \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\vartheta^2)^2+(2\xi\omega_0\vartheta)^2}}\sin(\vartheta t+\varphi)$$

avec φ le dephasage

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{2\xi\omega_0\vartheta}{\omega_0^2-\vartheta^2}.$$

L'amplitude est la somme de l'amplitude "naturelle" qui, du fait de la presence du terme exponentiel($e^{-\xi\omega_0 t}$),tend rapidement vers zero, et de l'amplitude de la vibration forcée

Donc la solution est:

$$x = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2-\vartheta^2)^2+(2\xi\omega_0\vartheta)^2}}\sin(\vartheta t+\varphi) \qquad (5)$$

../..

Cette solution sera etudiee specialement dans les paragraphes qui suivent, suivant la forme d'excitation F(t)

La consideration de la seule vibration forcée suppose un regime permanent continu, il ne faut perdre de vue que tout choc, tout changement de regime met en route quelque instant l'oscillation naturelle avec, au depart , des amplitudes qui peuvent etre plus grand que celles de l'oscil-lation forcée.
Par exemple dans le cas bien connu de la suspension elastique d'un moteur de vehecule automobible, chaque fois que la voiture passe sur une inegalité de la route, ou chaque fois que les conducteur donne un coup d'acceleration, l'oscillation naturelle est excitée.

2. ETUDE DES AMPLITUDES DE REPONSE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE A UN DEGRE DE LIBERTE EN REGIME FORCE

Pour cette etude nous analysons trois formes d'excitation qui seront appliquées à l'etude faite precedament Les trois formes d'excitations harmoniques sont:

-Excitation de forme $F = F_0 \cos \nu t$ avec $F_0 = m_e e \nu^2$

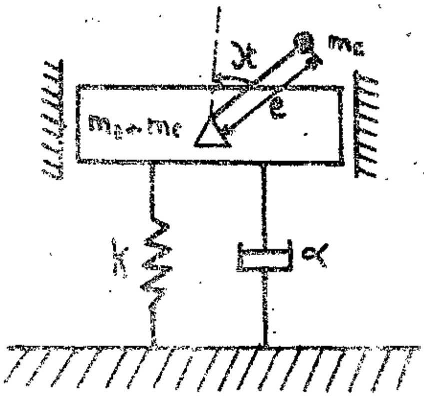
-Excitation de forme $F = F_0 \cos \nu t$ avec $F_0 = c^{te}$

-Excitation cinematique $Z = Z_0 \cos \nu t$

La deuxieme et troisieme forme d'excitation ne seront pas etudier specialement mais à titre de comparaison.

2.1. Excitation du à une force centrifuge

L'amplitude de reponse du systeme dynamique qui été decrite precedament est:



$$|A_0| = \frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \vartheta^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\vartheta^2}} \qquad (6)$$

Figure-2-

avec $F = m_e e \vartheta^2$

d'ou
$$|A_0| = \frac{\frac{m_e e \vartheta^2}{m_t}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \vartheta^2)^2 + 4\xi^2\omega_0^2\vartheta^2}} \qquad (7)$$

nous posons : $\frac{m_e e}{m_t} = \mu$, $\frac{\vartheta}{\omega_0} = \eta$

Aprés ce changement de variable nous obtenons

$$a = |A_0| = \frac{\mu\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}}$$

2.2. Tracer de la courbe de resonance $a = f(\eta)$

Si $\xi = 0$ c'est dire pas d'amortisseur on aura:

$$a = \left| \frac{\mu\eta^2}{1-\eta^2} \right| \qquad (8)$$

Dans ce casl'amplitude croit indefiniment

Pour $\eta = 1 \Rightarrow \omega_0 = \vartheta$ on aura une amplitude infini donc pas d'amortissement ; on a resonance.

Pour $\eta \to \infty$ c'est à dire ϑ est trés grand devant ω_0 dans ce cas l'amplitude de vi[illegible] finie./..

ce cas l'amplitude de vibration aura une valeur finie qui tend vers la valeur $\mu = \frac{m_e e}{m_t}$ (figure -3-)
Cela signifie que lorsque une force perturbatrice de trés grande frequence agissant sur un corps vibrant, il produit des vibrations de trés faibles amplitudes et dans certain cas on peut considerer le corps comme immobile dans l'espace.

Le cas ou $\xi \neq 0$ il existe un amortisseur visqeux on a:

$$a = \left| \frac{\mu \eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\xi\eta)^2}} \right|$$

Dans ce cas on a deux (2) cas limite
-Pour une pulsation trés faible de la force perturbatrice devant celle de la vibration naturelle, l'amplitude tend vers la valeur o $\begin{cases} \eta \longrightarrow 0 \\ a \longrightarrow 0 \end{cases}$ $(\nu \ll \omega_0)$

-Le deuxieme cas limite c'est lorsque ν est trés grand en comparaison devant ω_0 (pulsation naturelle) $\nu \gg \omega_0$ l'amplitude tend vers une valeur limite finie qui est μ.
Cela signifie que dans ces deux cas leffet del'amortisement n'a aucune importance pratique pour le calcul des vibrations forcées.
La courbe a $=f(\eta)$ passe par un maximum qui a pour valeur

$$a_{max} = \frac{\mu}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

pour une pulsation de la force perturbatrice

$$\eta = \frac{\nu}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1}{1-2\xi^2}}$$

il faut que $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

../..

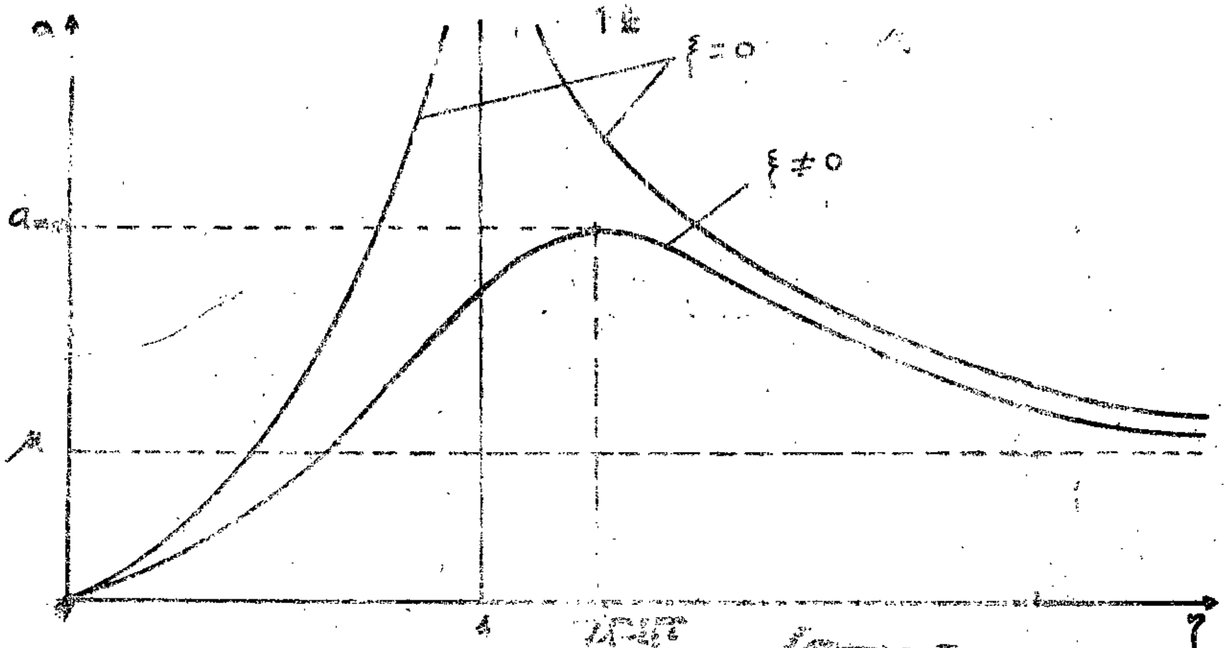


figure-3-

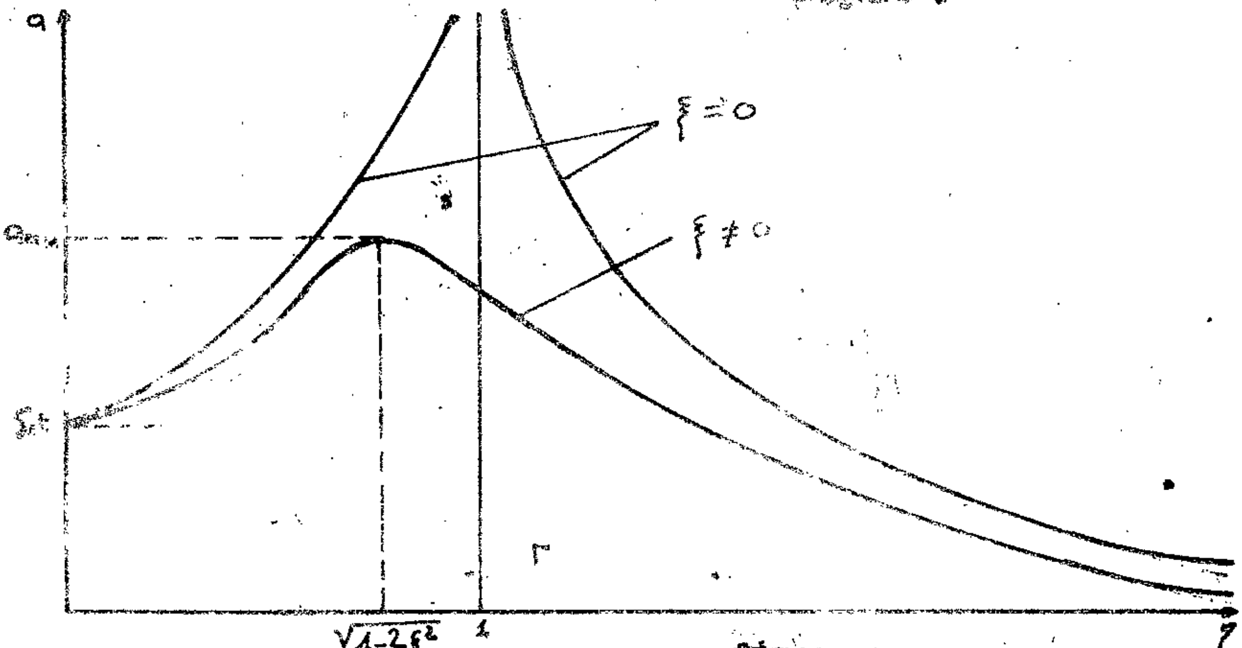


figure-4-

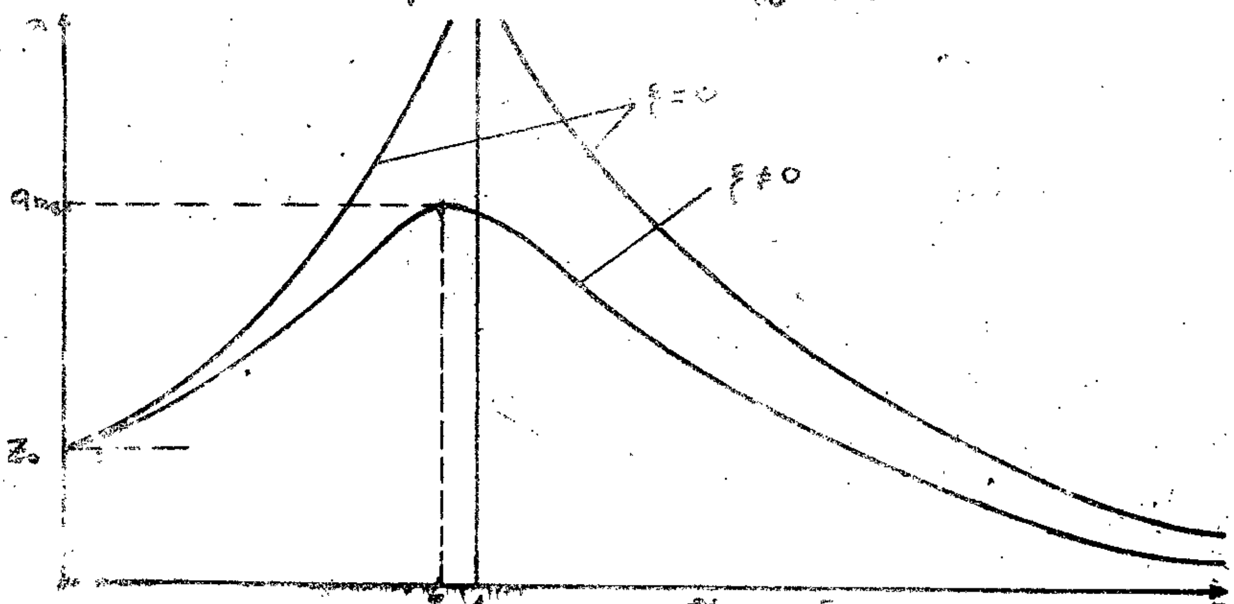


figure-5-

La figure (4) et (5) c'est pour les deux excitations qu'on a mensioner precedament.

3. REMARQUE IMPORTANTE

Dans la pratique, on n'a pas necessairement affaire à une seule valeur de ν bien determinées, car les machines peuvent avoir des regimes de marche variables.
Par ailleurs toutes les machines sont bien obligées de demarrer et de s'arreter, par consequent partant de o pour arriver à ν, on est bien obligé de passer par ω_0, donc de traverser le regime critique. Il importe en premier lieu que le passage soit aussi bref que possible, néanmoins il existe des machines qui travaillent dans la region critique.

Il faut remarquer enfin que l'etude theorique qui précede, se rapporte à un cas trés schematique, celui du mouvement à un seul degré de liberté, avec une seule vibration d'excitation.
Dans la realitée, les choses sont evidement moins simples, la machine suspendue peut se mouvoir suivant divers degres de liberté.

4.ETUDE D'UN SYSTEME MECANIQUE à DEUX DEGRES DE LIBERTE

Soit le systeme mecanique vibratoir representé schematiquement par la figure (6) comportant:

-Deux masses m_1 et m_2

-Deux ressorts purs de regidité k_1 et k_2

-Deux amortisseurs visqeux de visquance α_1 et α_2.

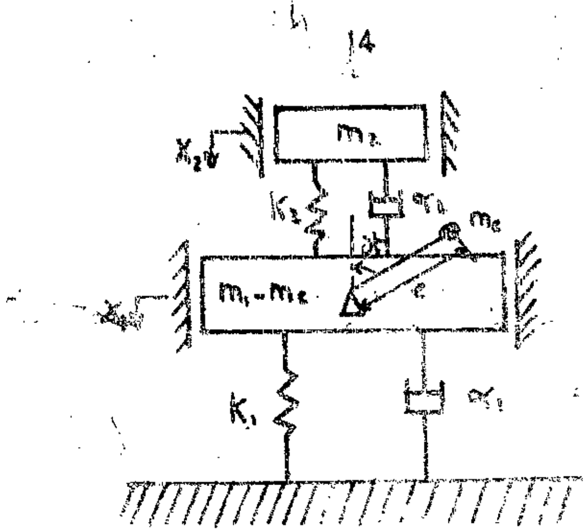


figure-6-

Nous adoptons comme coordonnée du système, les deplacements verticaux x_1 et x_2 des masses m_1 et m_2 à partir de leur position d'equilibre statique, et considerons comme sens positifs de ces deplacements la direction verticale de haut en bas.

Les expressions des energies sont:

$$-E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{X}_2^2$$

$$-E_p = \frac{1}{2} K_1 X^2 + \frac{1}{2} K_2 (X_2 - X_1)^2$$

$$-D = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2$$

Les equations differentielles du systeme sont:

$$m_1 \ddot{X}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{X}_1 + (K_2 + K_1)X_1 - \alpha_2 \dot{X}_2 - K_2 X_2 = m_e e \nu^2 \cos\nu t$$

$$m_2 \ddot{X}_2 + \alpha_2 \dot{X}_2 + K_2 X_2 - \alpha_2 \dot{X}_1 - K_2 X_1 = 0 \qquad (9)$$

Les solutions de ce systeme d'equations sont de la forme:

$$X_1 = A_1 \cos\nu t + B_1 \sin\nu t \qquad (10)$$

$$X_2 = A_2 \cos\nu t + B_2 \sin\nu t$$

En introduisant les equations (10) dans le systeme d'equations (9) nous obtenons 4 inconnues d'où on peut determiner les constantes A_1, B_1, A_2, B_2, facilement.

Les amplitudes de vibration pour les deplacements X_1 et X_2 sont données par:

$$\lambda_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \qquad ; \lambda_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2}$$

d'ou on obtient:

$$(11) \quad \lambda_1^2 = \frac{(m_2 e \nu^2)^2 \left[(K_2 - m_2 \nu^2)^2 + \alpha_2^2 \nu^2 \right]}{\left[m_1 m_2 \nu^4 - \nu^2 K_2 (m_1 + m_2) - m_2 K_1 \nu^2 - \alpha_1 \alpha_2 \nu^2 + K_1 K_2 \right]^2 + \left[K_1 \alpha_2 \nu + K_2 \alpha_1 \nu - m_1 \alpha_2 \nu^3 - m_2 \alpha_1 \nu^3 + m_2 \alpha_2 \nu^3 \right]^2}$$

et

$$(12) \quad \lambda_2^2 = \frac{(m_2 e \nu^2)^2 (K_2^2 + \alpha_2^2 \nu^2)}{\left[m_1 m_2 \nu^4 - \nu^2 K_2 (m_1 + m_2) - m_2 K_1 \nu^2 - \alpha_1 \alpha_2 \nu^2 + K_1 K_2 \right]^2 + \left[\nu (K_1 \alpha_2 + K_2 \alpha_1) - \nu^3 (m_1 \alpha_2 + m_2 \alpha_1 - m_2 \alpha_2) \right]^2}$$

Dans notre etude ,ce qui nous interesse c'est l'amplitude de vibration forcée de la masse m_1.

Faisant un changement de variable, nous posons:

$$\beta = \frac{m_2}{m_1} \quad , \quad \gamma = \frac{\nu}{\omega_1} \quad , \quad \delta = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad , \quad \xi_2 = \frac{\alpha_2}{2 m_2 \omega_1} \quad , \quad \xi_1 = \frac{\alpha_1}{2 m_1 \omega_1}$$

Remplaçant ces coefficients sans dimenssion dans l'equation (11) nous obtenons une expression de l'amplitude (13)

$$\lambda_1^2 = \frac{\gamma^4 \left[4 \xi_2^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2 \right] \left(\frac{m_2 e}{m_1} \right)^2}{4 \gamma^2 \xi_2^2 \left[(\gamma^2 - 1 + \beta \gamma^2) + \frac{\gamma \xi_1}{\xi_2} \right]^2 + \left[\beta \gamma^2 \delta^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2) - \gamma^2 \xi_1 \xi_2 \right]^2}$$

(13)

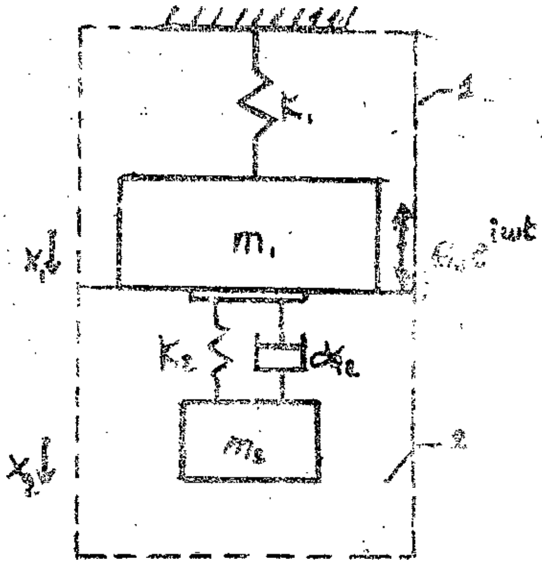
CHAPITRE -III-

1. PRINCIPE D'AMORTISSEUR DYNAMIQUE OU ABSORBEUR DE VIBRATION DYNAMIQUE

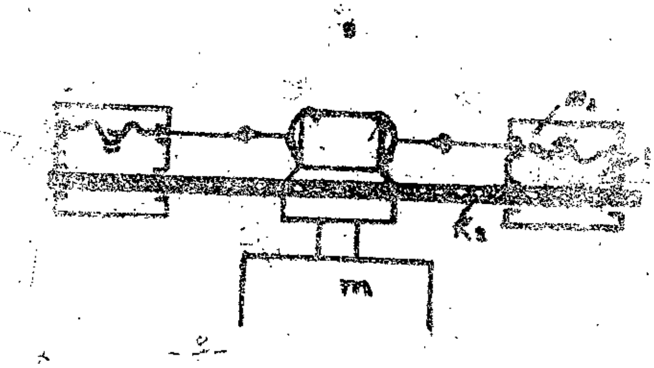
Il y a evidement un moyen simple à premiere vue, le suprimer ou tout simplement d'attenuer les vibrations, c'est de faire naitre des vibrations antagonismes qui donnent lieu à des efforts d'inertie sensiblement égaux de sens contraire à ceux de la vibration à éliminer, c'est le principe de l'equilibrage et des (absorbeurs) dynamiques.

2. EXEMPLES D'AMORTISSEURS DE VIBRATIONS DYNAMIQUES

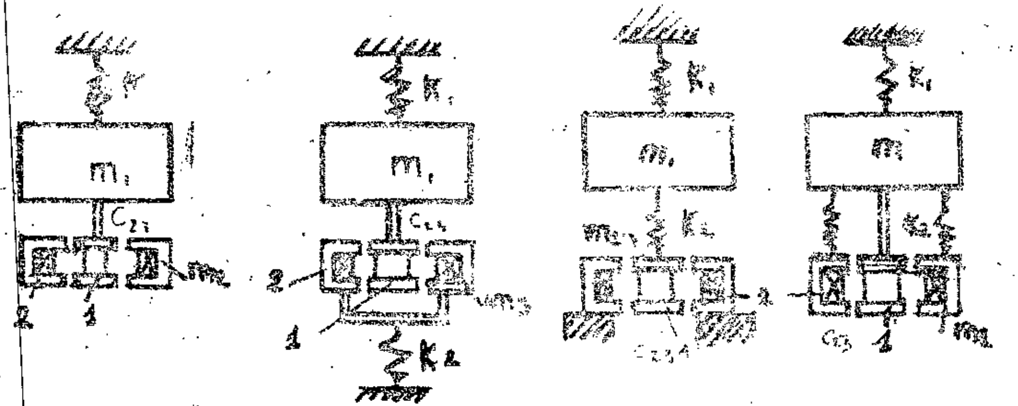
Tout machine présentant une source de vibration est à installer dans un milieu delicat necessite la limita-tion des vibrations (transversales, de torsions, de chocs) donc pour cela on installe des amortisseurs (absorbeurs) de vibrations qui doivent éliminer ou attenuer ces vibrations. Il exciste plusieur types d'amortisseurs de vibrations. qui sont utilisés suivant les conditions de fonctionnements et suivant les vibrations à éliminer. On trouve des élimina-teurs de vibrations transversales, de torsions, de chocs.



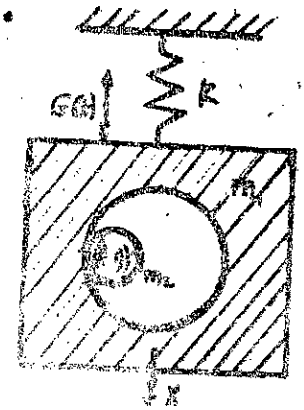
Schema d'amortisseur dynamique pour vibration verticale



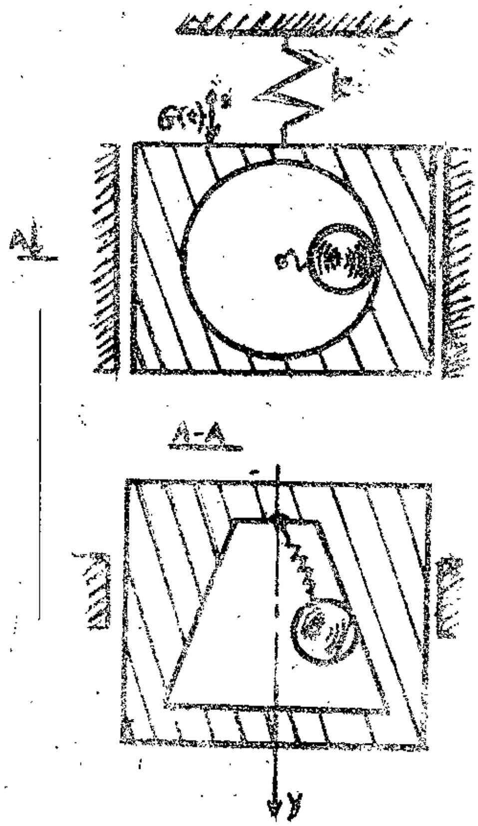
Schema d'amortisseur de vibration de mouvement par deplacement de la masse de l'amortisseur



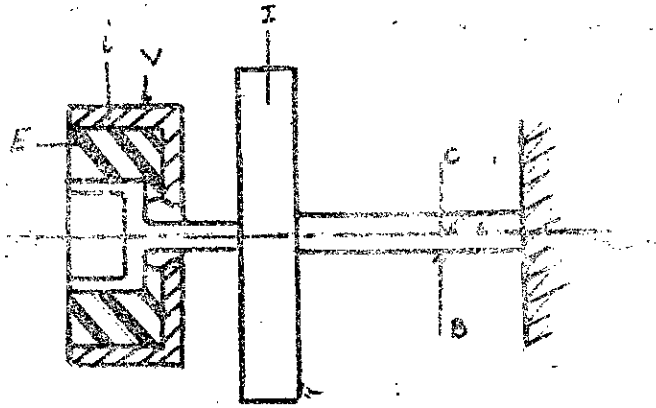
Schema d'utilisation d'un electro-aimant pour la regula--tion de la rigidité de la suspention d'un amortisseur pour vibration transversale



Schema d'amortisseur de vibration de translation par chocs



Schema d'un amortisseur pour la compensation des vibrations qui sont excitées par le mouvement le la masse non equilibré avec excentrique variable

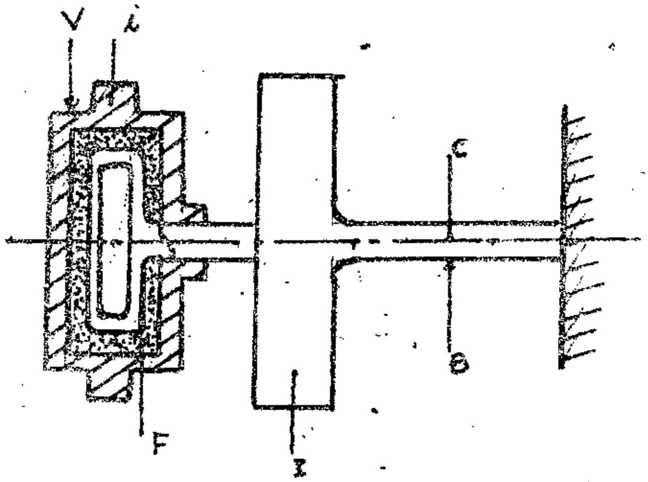


B :barreau equivalent de rigidité de torsion C et de moment d'inertie I

E :élastomère

V :volant de moment d'inertie i

Amortisseur viscoélastique de vilebrequin



B :barreau équivalent de rigidité C et de moment d'inertie I

F :fluide visqueux

V :volant de moment d'inertie i

Amortisseur visqeux de vilebrequin

3. ETUDE D'UN ABSORBEUR DE VIBRATIONS DYNAMIQUE TRANSVERSALES

Dans cette étude nous supposons deux cas,

-Absorbeur de vibrations sans amortisseur

-Absorbeur de vibrations avec amortisseur

et deux formes de perturbations, mais la deuxieme forme fera l'objet de comparaison avec la premiere.

3.1. Absorbeur de vibrations dynamiques sans amortisseur

3.1.1. Perturbation due à une force centrifuge

Soit le systeme representer schématiquement sur la figure -7-

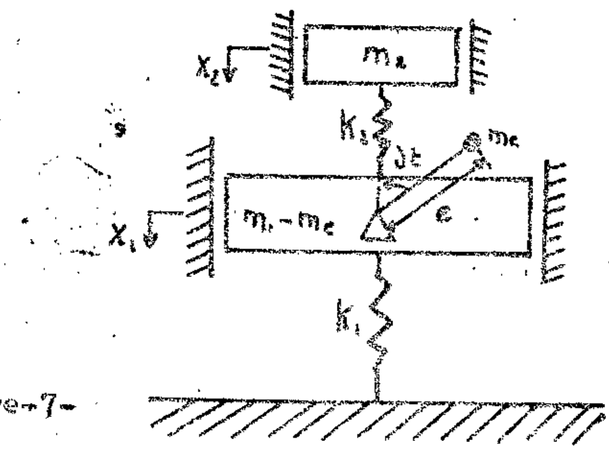


figure-7-

Dans ce cas l'expression (13) de l'amplitude ( ) devient : (avec $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$)

$$\lambda_1 = \frac{\frac{m_c e}{m_1} \gamma^2 (\gamma^2 - \delta^2)}{\beta \gamma^2 \delta^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)} \quad (14)$$

On voit que d'apres la relation (14) que le mouvement de la masse cesse d'exister pour une valeur de γ (ν) qui est egal à δ

$$\gamma_{at} = \delta = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \Rightarrow \quad \nu_{at} = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

C'est à dire dans ce cas l'amplitude de vibration de la masse m_2 sera egal à :

$$\lambda_2 = - \frac{m_c e}{m_2 K_2} \qquad (13)$$

Donc les vibrations des deux masses m_1 et m_2 seront données par les équations :

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = - \frac{m_c e}{m_2 K_2} \cos \nu t$$

Pour toute fréquence ($\nu^2 \neq \frac{K_2}{m_2}$) on a d'autres valeurs critiques de ν (γ) correspendant aux deux conditions de résonance. Ces valeurs critiques s'obtiennent en égalant à zero le dénominateurs de l'expression (14)

d'ou : $\beta \gamma^2 \delta^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2) = 0$

donc on obtient γ_1 et γ_2

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{1 + \delta^2(1+\beta) - \sqrt{\Delta}}{2}}$$

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{1 + \delta^2(1+\beta) + \sqrt{\Delta}}{2}} \qquad (15)$$

avec

$$\Delta = [1 + \delta^2(1+\beta)]^2 - 4\beta\delta^2$$

3.1.2. Tracer de la courbe $\lambda_1 = f(\gamma)$

Pour une frequence ν (γ), de la force perturbatrice, trés petites (c'est à dire pas de perturbation) l'amplitude de vibration tend vers zero.

Pour une frequence ν (γ) trés grande, l'amplitude de vibration λ_1 tend vers une valeur finie qui est $\mu = \frac{m_c e}{m_1}$ figure -8 -

./..

3.1.3. Perturbation du à une force d'amplitude constante

Pour cette forme d'excitation nous avons les mèmes équations que précedament pour les deplacements et pour les amplitudes de vibrations forcées. Sauf au lieu du terme $m_o e_o \nu^2$ nous aurons F_o

$$\lambda_1 = \frac{F_o}{K_1} \quad \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)} \; (\;) \qquad (16)$$

Pour les conditions critiques seront les mèmes que celles des cas precedant, le mouvement de la masse m_1 cesse d'exister pour $\nu^2 = \frac{K_2}{m_2}$ $(\gamma = \delta)$

Pour les pulsations de resonancees sont aussi les mèmes, le seul changement se situe au niveau des courbes de resonance c'est àdire pour $\nu \ll \omega_1$ $(\gamma \to 0)$ l'amplitude de vibration tend vers une valeur finie qui est $\frac{F_o}{K_1}$ et pour $\nu \gg \omega_1$ l'amplitude λ_1 tend vers zero contrairement au cas precedant - figure -9 -

3.1.4. Conclusion

En construisant un absorbeur , il faut s'astreindre à satisfaire les conditions :

- $\nu^2 = \frac{K_2}{m_2}$

- $\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = - \frac{m_o e}{m_2 K_2} \cos \nu t \end{cases}$

Et les plus petites valeurs acceptables pour K_2 et m_2 dependant de la valeur maximale de la force perturbatrice et des deplacements que l'on peut permettre à la masse m_2

On voit donc que l'application de l'absorbeur sans amortisseur est limité aux machines à vitesses constantes, telle par exemple les moteurs électriques synchrones ou les machines d'inductions.

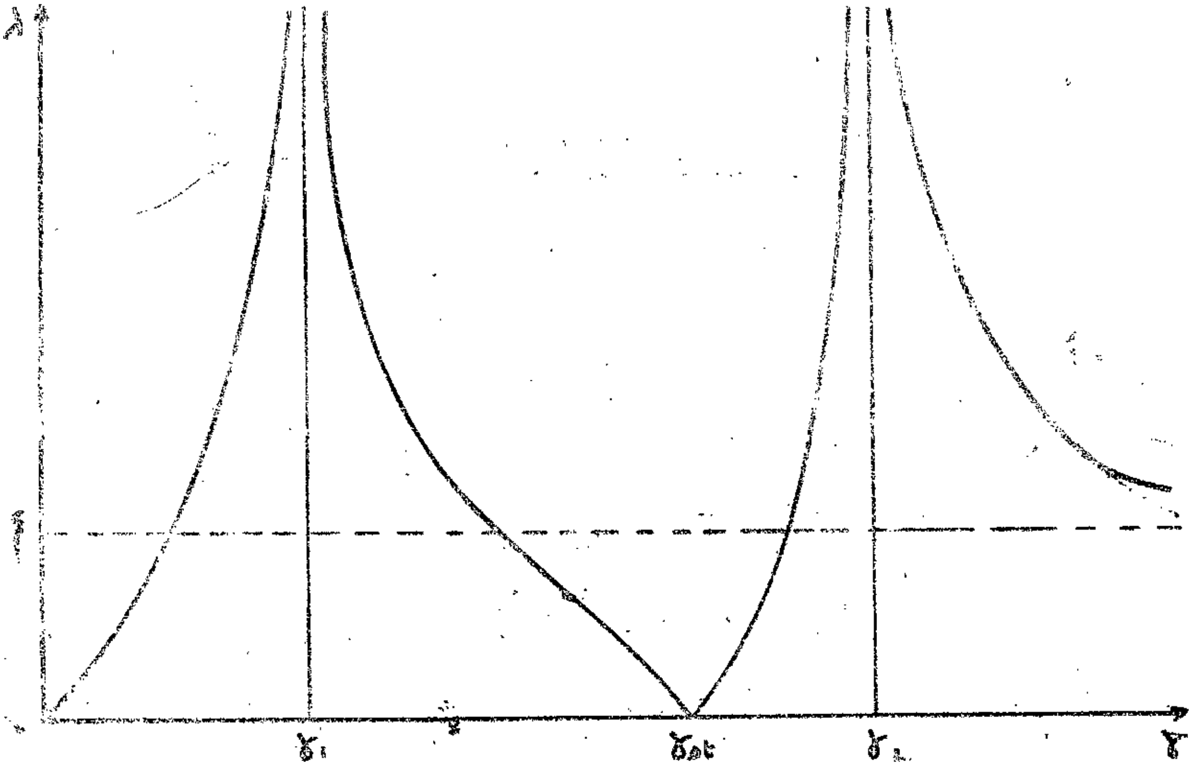


fig - 8.

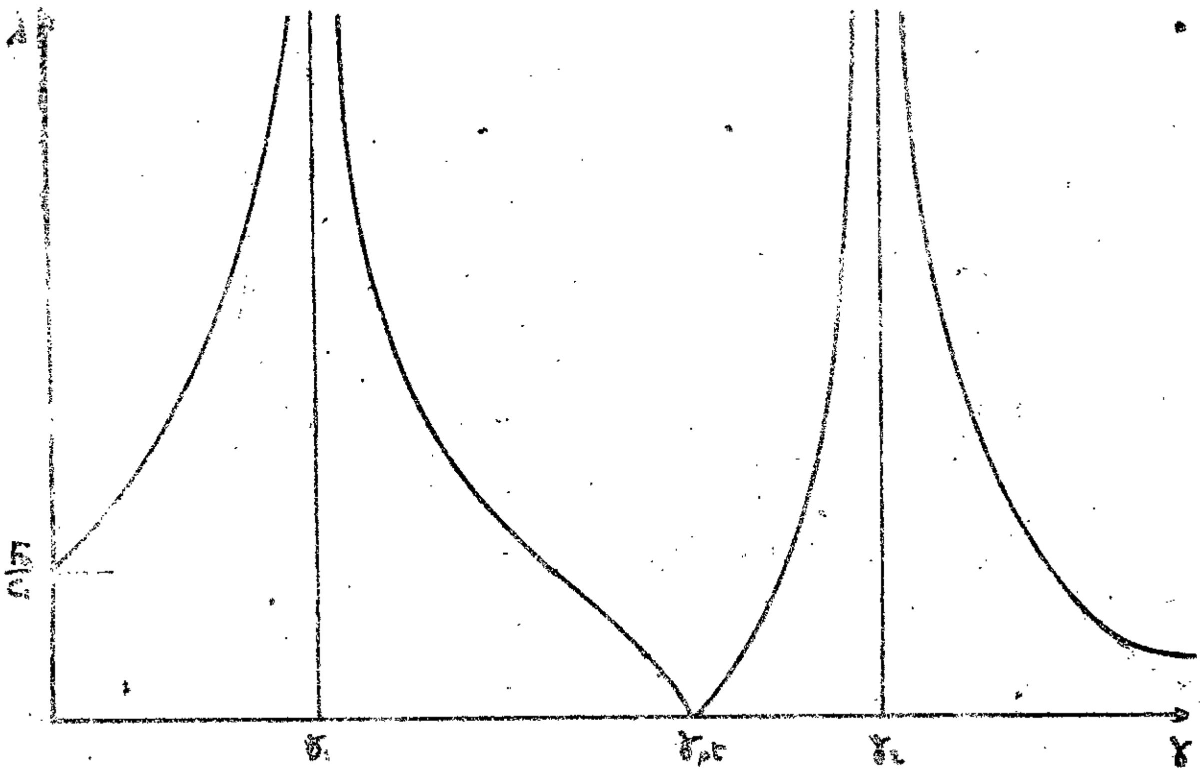


fig - 9.

../..

3.2. Absorbeur de virations dynamiques avec amortisseur

Soit le schema de principe d'un absorbeur de vibration dynamiques representer sur la figure-10-

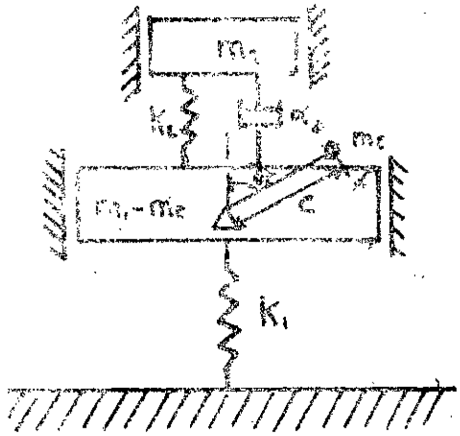


figure - 10 -

Dans le but de rendre un amortiseur (absorbeur) utilisable, il est necessaire d'introduire un amortisseur dans le systeme vibratoire (decrit precedament) .
Soit un amortisseur intercalé entre les masses m_1 et m_2

3.2.1. Exitation par une force centrifuge

Equation (13) devient

avec $\xi_1 = 0$

$$\lambda_1^2 = \frac{\gamma^4 \left[4\xi_2^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2 \right] \left(\frac{m_e e}{m_1} \right)^2}{4\xi_2^2 \gamma^2 (\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2)^2 + \left[\beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2) \right]^2} \qquad (17)$$

D'aprés cette expression (17) on peut calculer l'amplitude de la vibration forcé de la masse m_1 pour toute valeur de $\gamma = \frac{\nu}{\omega_1}$ .Si l'on connait la quantité δ et β definissant la frequence et le poids de l'absorbeur et la quantite ξ_2

3.2.2. Tracer de courbe $\lambda_1 = f(\gamma)$.

La representation graphique de $\lambda_1 = f(\gamma)$, nous avons plusieurs cas à etudier car l'expression de λ depend de plusieurs paramètres qu'il faudra prendre en consideration : figure -11-.

Pour $\xi_1 = 0$ l'expression de λ_1 (17) devient la même expression que celle d'un absorbeur sans amortisseur qui a été déja vue au paragraphe precedant.

Pour $\xi_1 = \infty$ c'est à dire l'amortissement à une valeur trés considerable il n'y a pas de mouvement relatif entre m_1 et m_2. Dans ce cas on obtient un systeme à un degré de libreté, nous determinons l'amplitude de vibration forcé pour ce cas, l'amplitude λ_1 est donnée par:

$$\lambda_1^2 = \left(\frac{m_0 e}{m_1}\right)^2 \frac{\gamma^4}{(\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2)^2} \qquad (18)$$

On a une frequence critique pour ce systeme, pour la determiner on annule le demominateur de l'expression (18) d'ou:

$$\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2 = 0 \Rightarrow \gamma_{cr} = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}} \qquad (19)$$

Pour les cas limites on a:

-Lorsque γ tend vers zero c'est à dire l'amplitude de vibration tend vers zero.

-Lorsque γ est trés grande, l'amplitude tend vers une limite finie qui est : $\lambda_1 = \frac{m_0 e}{m_1} \cdot \frac{1}{1+\beta}$

Pour tout autre valeur de $(\xi_1 \neq 0,\ \xi_2 \neq \infty)$ par exemple on prend deux valeurs de ξ_2 ($\xi_2 = 0.1$), ~~$\xi = 0.3$~~

et on prend pour $\beta = \frac{1}{5}$, $\delta = 1$

Ce choix n'est pas necessairement favorable mais juste à titre d'exemple pour le tracer des courbes de resonances

N.B: Le choix de ces parametre sera fait ulterieurement

Il est interessant de remarquer que tous les courbes pour les differentes valeurs de ξ_1, elles passent par les mèmes points S et T.

Cela signifie que pour les deux valeurs de $\gamma = \frac{\nu}{\omega_1}$ les amplitudes des vibrations forcées de la masse m, sont independantes de la valeur l'amortissement ξ_2.

Pour determiner les valeurs de γ correspendantes aux points S et T pour lesquelles l'expression $\lambda_1 = f(\gamma)$ ne depend pas de ξ_2.

Puisque cette expression (18) à la forme:

$$\lambda_1^2 = \frac{M\xi_2^2 + N}{P\xi_2^2 + Q}$$

Elle sera donc independante de ξ_2 si $\frac{M}{P} = \frac{N}{Q}$

d'ou :

$$\frac{\gamma^2 - \delta^2}{\beta\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)} = \frac{1}{\gamma^2 - 1 + \beta\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma^4 - 2\gamma^2\,\frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta} + \frac{2\delta^2}{2+\beta} = 0 \qquad (20)$$

Determinant γ_S^2 et γ_T^2

$$\gamma_S^2 = \frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta} - \sqrt{\Delta'}$$

$$\gamma_T^2 = \frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta} + \sqrt{\Delta'} \qquad (21)$$

$$\Delta' = \left(\frac{1+\delta^2+\beta\delta^2}{2+\beta}\right)^2 - \frac{2\delta^2}{2+\beta}$$

Nous remplaçons γ_S et γ_T dans l'expression de λ_1 et nous trouvons les cordonnées de S et T qui sont :

$$\lambda_S = -\frac{m_e e}{m_1}\,\frac{\gamma_S^2}{\gamma_S^2 - 1+\beta\gamma_S^2} \;,\quad \lambda_T = \frac{m_e e}{m_1}\,\frac{\gamma_T^2}{\gamma_T^2 - 1+\beta\gamma_T^2} \qquad (22)$$

La valeur de ces ordonnées dépend des quantités β et δ (γ est en fonction de β et δ) definissant la masse et la regidité de l'absorbeur. En choisissant convenablement ces caracteristiques, on peut ameliorer l'efficacité de l'appareil.

Il parait interessant de faire en sorte que les points S et T aient la même ordonnée pour obtenir les conditions les plus favorables, cela exige que

$$\lambda_T = \lambda_S$$

d'ou

$$-\frac{\gamma_S^2}{\gamma_S^2 - 1+\beta\gamma_S^2} = \frac{\gamma_T^2}{\gamma_T^2 - 1+\beta\gamma_T^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma_S^2\,\gamma_T^2}{\gamma_S^2+\gamma_T^2} = \frac{1}{2(1+\beta)} \qquad (23)$$

../..

Nous connaissons les expressions de γ_S^2 et γ_T^2 en fonction de β et δ trouver precedement (21), en les remplaçant dans l'expression (23) et comme $\lambda_T = \lambda_S$ nous obtenons:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}} \qquad (24)$$

Cette équation trés simple donne un moyen aisé pour determiner d'une façon prècise l'absorbeur..

Nous remplaçons cette valeur trouver dans l'équation (20) pour calculer les deux frequences correspendantes aux points S et T pour que $\lambda_T = \lambda_S$

L'equation (20) devient :

$$\gamma^4 - \frac{4\gamma^2}{2+\beta} + \frac{2}{(1+\beta)(2+\beta)} = 0 \qquad (25)$$

d'ou l'on tire

$$\gamma_S^2 = \frac{1}{2+\beta}\left(2 - \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}\right)$$

$$\gamma_T^2 = \frac{1}{2+\beta}\left(2 + \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}\right) \qquad (26)$$

Donc l'amplitude de vibration forcée $\lambda_T = \lambda_S$ sera donnée par l'equation (27)

$$\lambda_{S,T} = \frac{m_e e}{m_1} \frac{\left(2 + \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}\right)}{\beta\left(1+\sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}\right) + \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}} \qquad (27)$$

../..

Jusqu'ici le facteur ξ_1 definissant l'amortissement n'est pas intervenu dans la discussion puisque la position des points S et T ne depend pas de ξ_1, mais l'amplitude de vibration depend de ξ_1. Donc ilfaut choisir ξ_1 de telle façon que les courbes de resonances aient une tangente horizontale en S et T pour obtenir les meilleurs conditions favorables ,figure -13-

Donc pour choisir ξ convenablement, nous avons l'expression (17) de l'amplitude de vibration forcée qui est de la forme :

$$\lambda_1^2 = \frac{M\xi_1^2 + N}{P\xi_1^2 + Q}$$

ou (M ,N , P , Q) depend de (γ, δ, β)
on resoud cette équation par rapport à ξ_1, on obtient

$$\xi_1^2 = \frac{N - Q\lambda_s^2}{P\lambda_s^2 - M} \qquad (28)$$

Des que l'on connait $\beta = \frac{m_2}{m_1}$,de l'equation (24), on calcule la valeur de δ, de même pour λ_s^2 par l'equation (27) qui correspend à l'ordonnée de S et T, nous remplaçons toutces valeur dansl'equation (28) nous obtenons la valeur de ξ_1^2 .

3.2.3. Excitation par une force harmonique à amplitude constante

Pour le cas F_0 = cte l'etude de l'amplitude de vibration forcée λ_1 est analogue au cas precedant.

l'expression de l'amplitude est :

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_{st}^2} = \frac{4\xi_a^2\gamma^2 + (\gamma^2-\delta^2)^2}{4\xi_a^2\gamma^2(\gamma^2-1+\beta\gamma^2)^2 + [\beta\delta^2\gamma^2-(\gamma^2-1)(\gamma^2-\delta^2)]^2}$$

avec $\lambda_{st} = \frac{F_0}{C_1}$

Mais l'etude ne sera pas faite car ce n'est pas notre but de travail neanmoins on donne quelques caracteristiques du choix de l'absorbeur et les courbes de resonances- figure -12- à titre de comparaison avec les resultats deja établit precedament.

-Pour $\xi = \infty$ la frequence critique est : $\delta_{cr} = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}}$

-L'amplitude de vibration pour les points S et T sont :

$$\lambda_S = -\frac{\lambda_{st}}{\gamma_T^2-1+\beta\gamma_S^2} \quad ; \quad \lambda_T^2 = \frac{\lambda_{st}}{\gamma_T^2-1+\beta\gamma_S^2}$$

-Expresion de δ : $\delta = \frac{1}{1+\beta}$

-Amplitude de vibration pour que S et T aient la même ordonnée: $\frac{\lambda_{S,T}}{\lambda_{st}} = \sqrt{\frac{2+\beta}{\beta}}$

Tracer des coubres voir figure -12-

Tout ces expressions et ces parametres definissant le choix de l'absorbeur convenable pour le systeme mecanique.

../..

4. CONCLUSION

L'étude theórique faite precedament , nous renseigne sur le comportement des machines en vibrations et elle nous permet le choix de l'absorbeur de vibration dynamique utilisée à patir de certains relations établit dans cette étude .

Pour determiner un absorbeur de vibration dynamique on procede comme suite:

-Pour une masse m_1 et de pulsation propre ω_1 donnée de la machine , on choisi une masse m_2 pour l'absorbeur . (β sera determiner)

-On determine la constante elastique K_2 de l'absorbeur par l'equation (24)

-La valeur de ξ de l'amortissement resulte de l'equation (28)

-L'amplitude de vibration forcée sera donnée par l'equation (17)

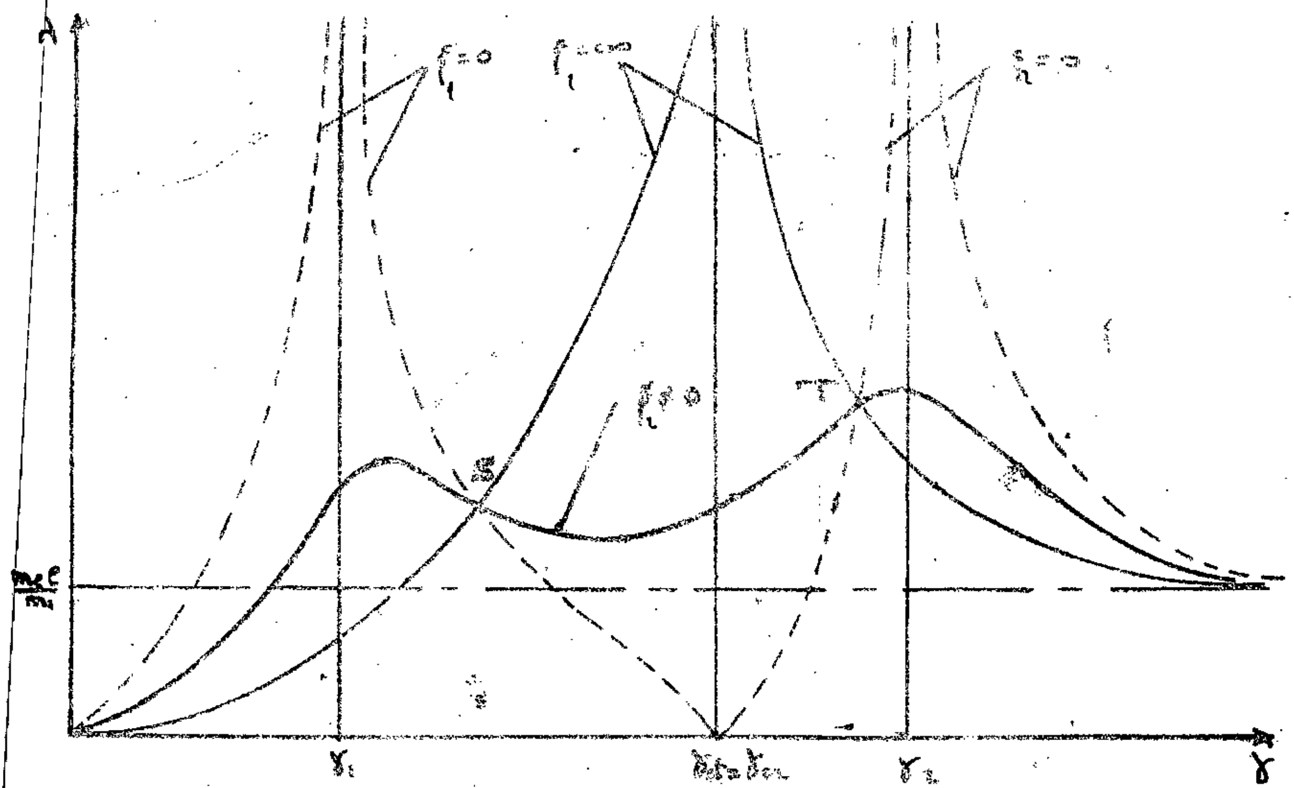


figure-11-

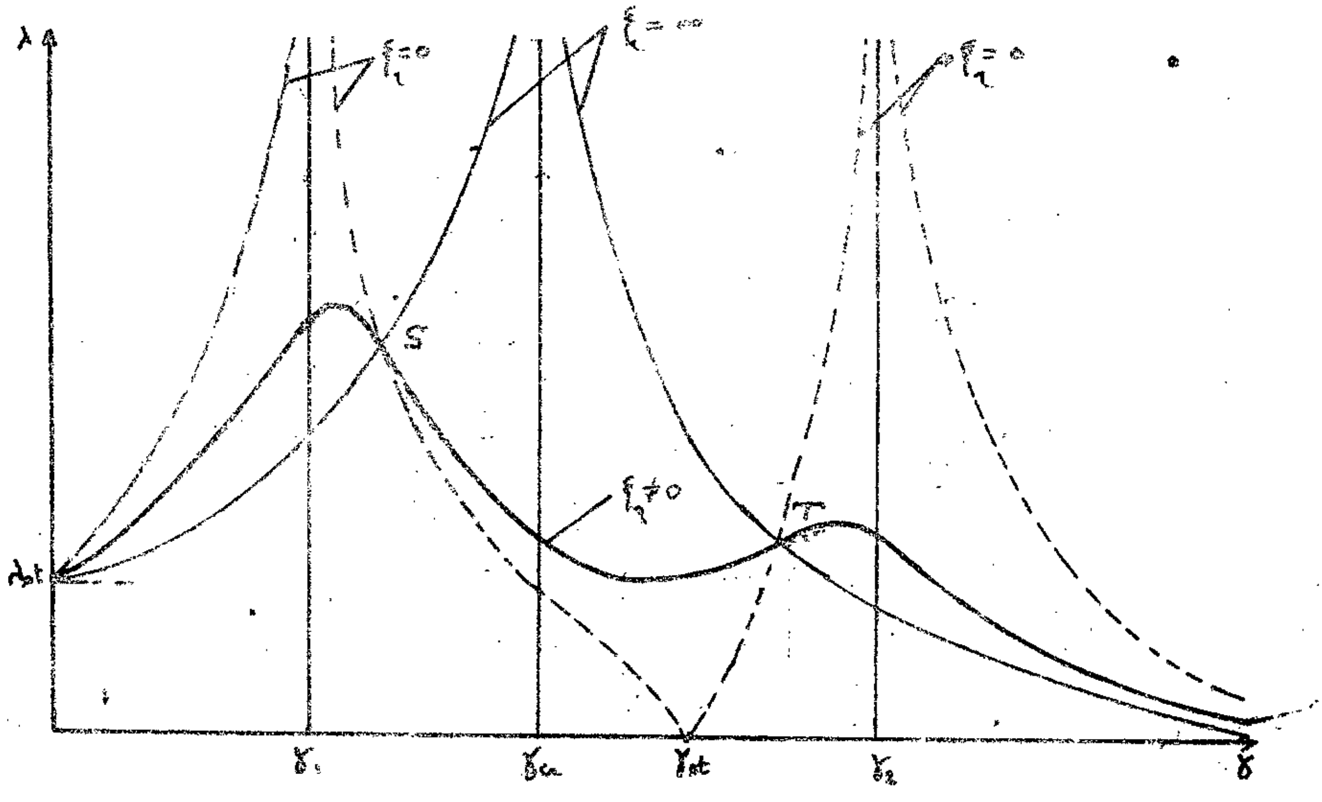
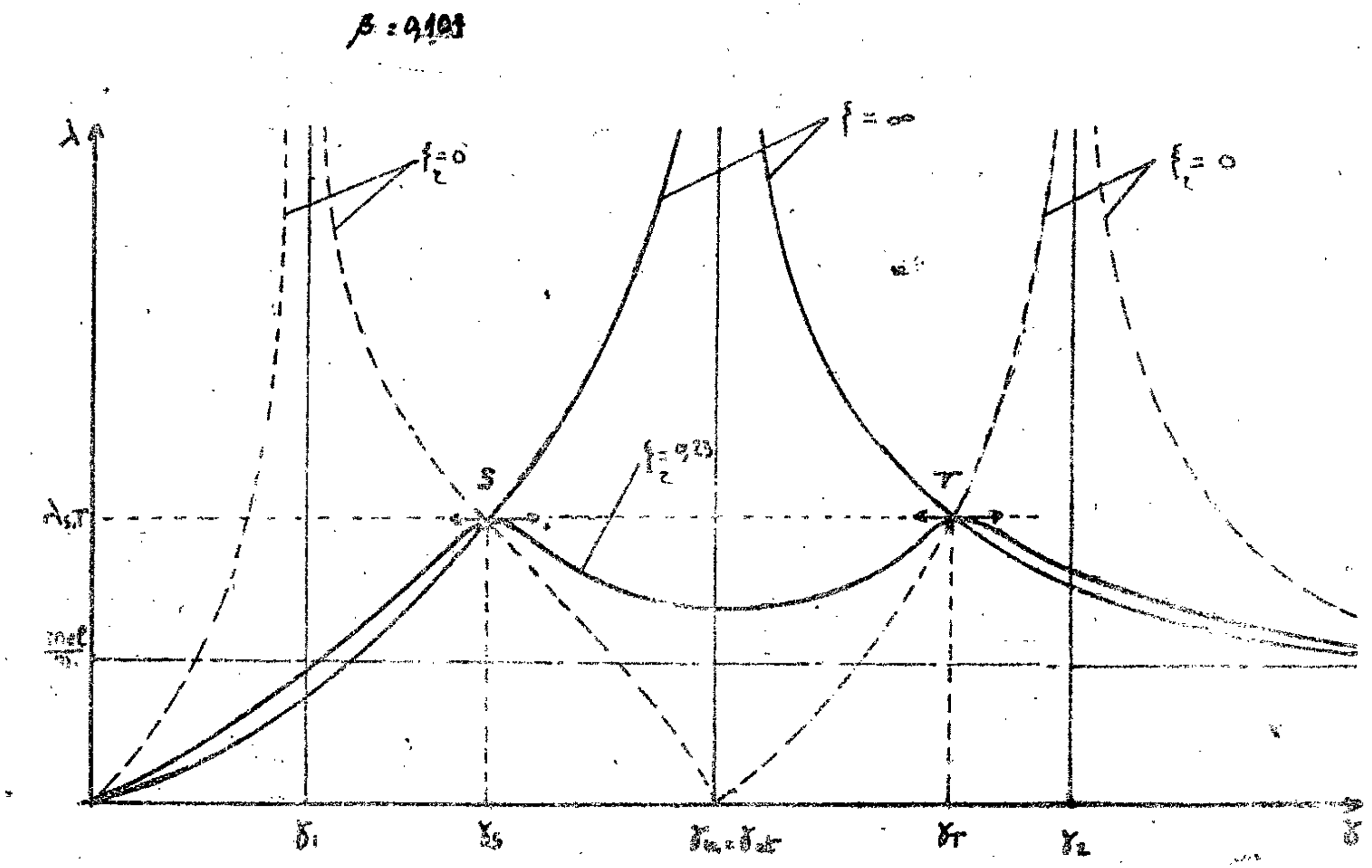


figure-12-



$\beta = 0{,}103$
λ
$f_2 = 0$
$f = \infty$
$f_2 = 0$
S
T
$\lambda_{S,T}$
γ_1
γ_S
γ_T
γ_2
γ

Figure.13.

CHAPITRE-IV-

1. INTRODUCTION

Aprés avoir fait l'etude théorique de notre systeme nous avons établit certaines relations qui ont permis de consevoir notre absorbeur de vibration dynamique .

Ces relations dependant de certains parametres dimensionnels tel que l'excentricité e, les masses m_1, m_2 et les raideurs K_1, K_2 .

2. CALCUL DE L'EXCENTRICITE e

Soit l'excentrique décrit sur la figure -14- nous allons determiner la valeur e . S etant le centre de gravité de notre excentrique ; nous avons les données suivantes α, d , r_2, r_ω

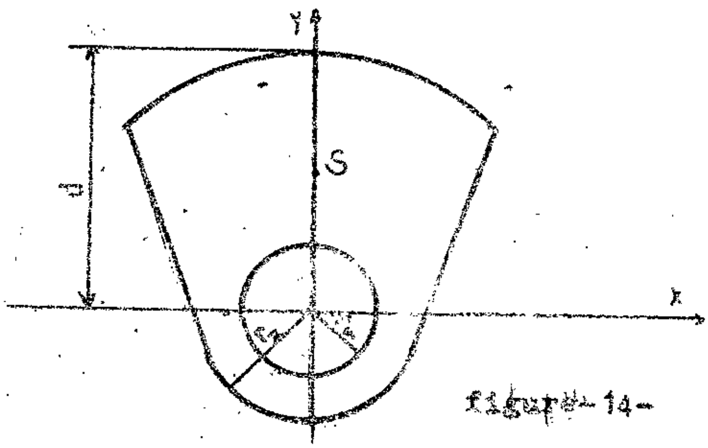


figure-14-

Pour determiner e nous appliquons la methode du calcul de centre de gravité d'un systeme qui est :

$$y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i}$$

Nous decomposons notre surface en plusieurs surfaces, de maniere suivante (figure -15-)

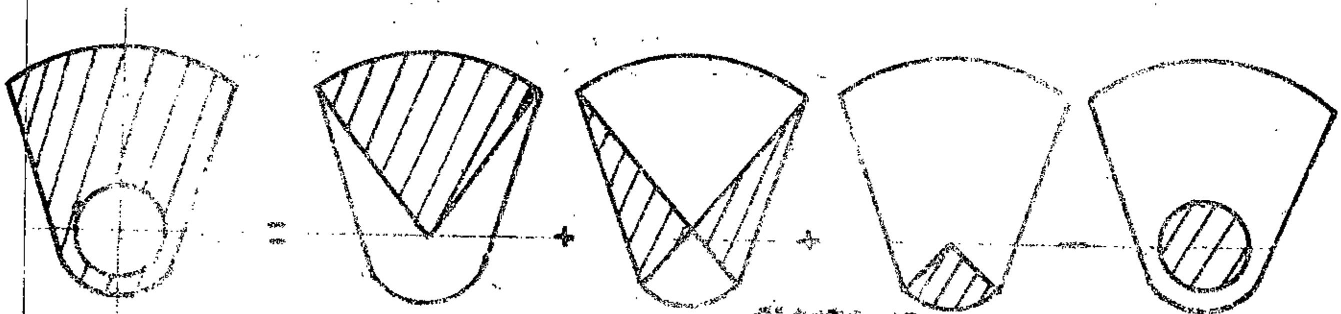


figure -15-

Donc e est donné par la formule precedante

$$y_G = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3 - y_4 s_4}{s_1 + s_2 + s_3 - s_4}$$

2.1/ Determination de y_1 et s_1

pour déterminer y_1 nous appliquons la même méthode que pour y_G. Soit à determiner le centre de gravité de la figure -16-

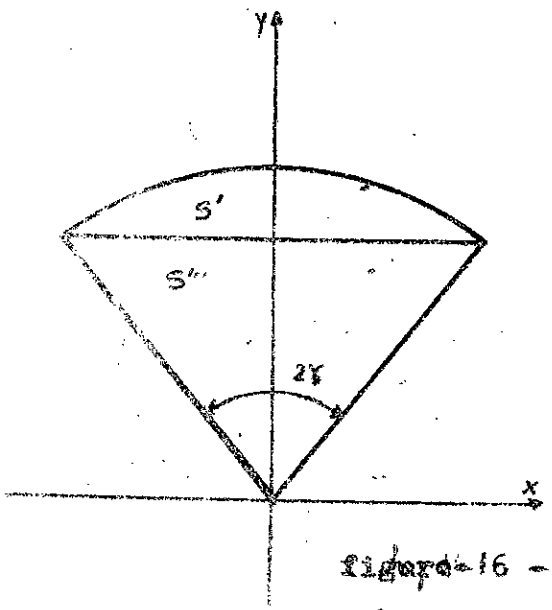


figure -16 -

$$y_{1G} = \frac{y' s' + y'' s''}{s' + s''}$$

$$y' = \frac{\iint y \, dx \, dy}{\iint dx \, dy}$$

ou: $\iint dx \, dy = \iint ds = s'$

$s' = s_1 - s''$

$s' = d^2(\gamma - \cos\gamma \sin\gamma)$

$y'' = \frac{2}{3} d \cos\gamma$

$s'' = d^2 \cos\gamma \sin\gamma$

aprés integration nous obtenons:

$$y' = \frac{2}{3} d \frac{\sin^3\gamma}{\gamma - \sin\gamma\cos\gamma}$$

d'ou

$$y_{1G} = \frac{2}{3} d \frac{\sin\gamma}{\gamma}$$

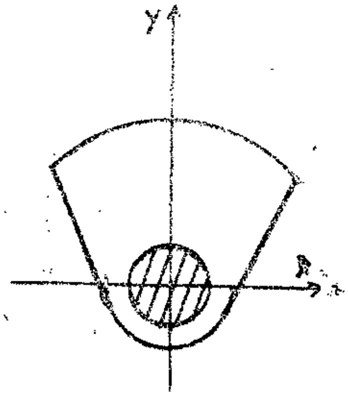
../..

2.2. Determination de y_3 et s_3

Pour determiner y_3 nous appliquons la mème methode que pour la determination de y_1 d'où nous obtenons:

$$y_3 = \frac{2}{3} r \frac{\sin \psi}{\psi}$$

$$S_3 = r_t^2 \psi$$

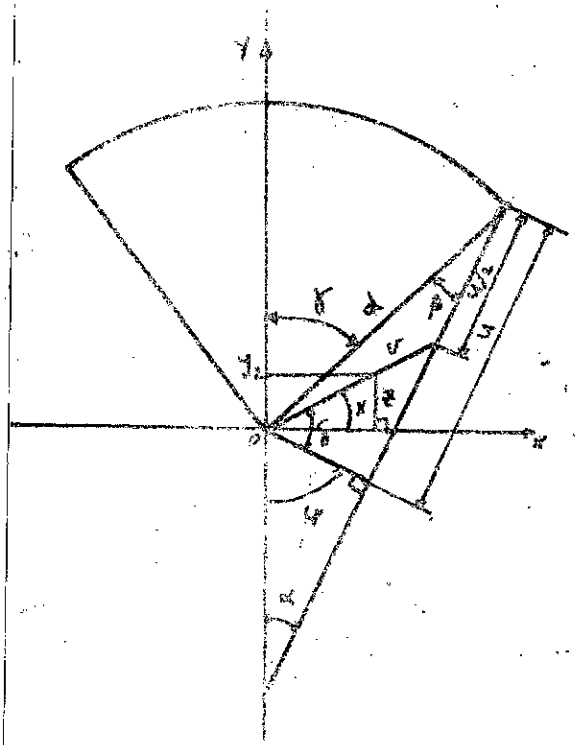


2.3. Determination de y_4 et S_4

$$S = \pi r_w^2$$

$$y = 0$$

2.4. Determination de y_2 et S_2



$S_2 = U . r_t$

avec: $U = d \cos\beta$

et $\sin\beta = \frac{r_t}{d}$

d'ou $\beta = \arc \sin\frac{r_t}{d}$

$y_2 = \frac{2}{3} V \sin X$

determinant V et X

$V^2 = r_t^2 - \frac{U^2}{4} \Rightarrow V = \sqrt{r_t^2 - \frac{U^2}{4}}$

$X = \delta - \alpha$

on a aussi: $\operatorname{tg} \delta = \frac{U}{2r_t}$

d'ou $\delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{U}{2r}$

$\Rightarrow y_2 = \frac{2}{3} \sqrt{r_t^2 + \frac{U^2}{4}} \sin(\delta - \alpha)$

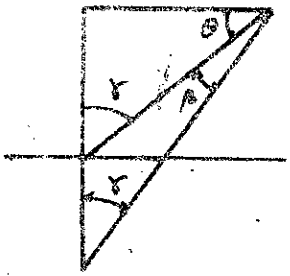
$S_2 = r_t d \cos\beta$

Finalement y sera

$$y_c = e = \frac{\frac{2}{3} d \frac{\ }{\ } \sin\gamma + r_t U y_2 - \frac{2}{3} r_t \sin\psi}{d^2\gamma + r_t U + r_t^2\psi - \pi r_w^2}$$

Exprimant les parametres ψ, u, γ, θ, β en fonction de α, d, r_t, r_w qui sont donnés

on a



$$\left.\begin{array}{l}\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \ ; \\ \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = \alpha + \beta$$

$$\beta = \arcsin \frac{r_t}{d}$$

de même pour ψ:

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Aplication numérique

nous choisisons les données suivantes:

- $d = 44$ mm
- $\alpha = 25°$
- $r_t = 17$ mm
- $r_w = 7$ mm

d'ou nous trouvans

- $e = 18$ mm

La masse $m_e = s.h.\rho$

s: surface de excentrique

h: epaisseur de l'excentrique

ρ: masse volumique $= 7,85.10^3$ kg/m^3

$s = 2299,33$ mm

$h = 9$ mm

$m_e = 0,162$ kg

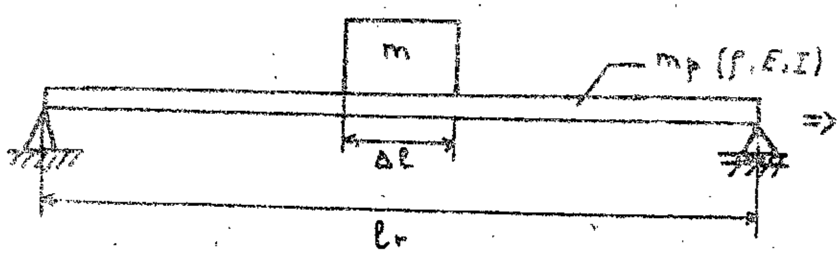
comme on a 4 excentriques d'ou

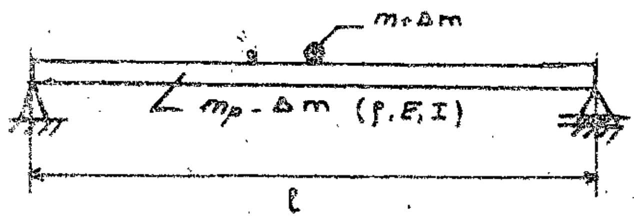
$m_{ct} = 4.m_e = 0,6495$ kg

3. CALCUL DE MASSE REDUITE m_t PAR LA METHODE DE REYLEIGH

Avant de calculer la masse reduite m_t on doit determiner la fleche dûe aux poids de la poutre et de la masse de l'excitateur car on a besoin pour le calcul de la masse reduite par la methode de Reyleigh

3.1. Calcul de la flèche tótale par la methode de superposition





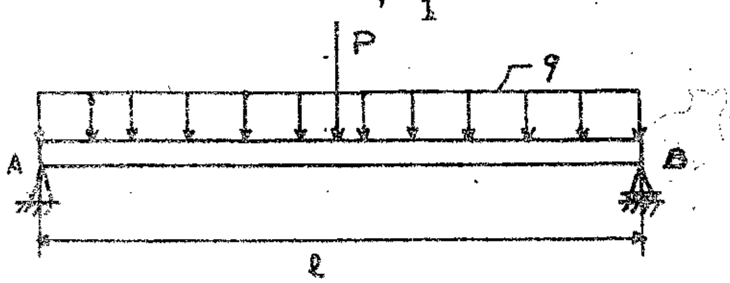
- m = masse de l'excitateur
- m_p = masse de la poutre
- l_r = longueur reelle
- l = longueur reduite $\quad l = l_r - \Delta l$
- Δm = élement de masse

$\Delta m = \Delta l \cdot F \cdot \rho$ $\qquad$ F: section de la poutre

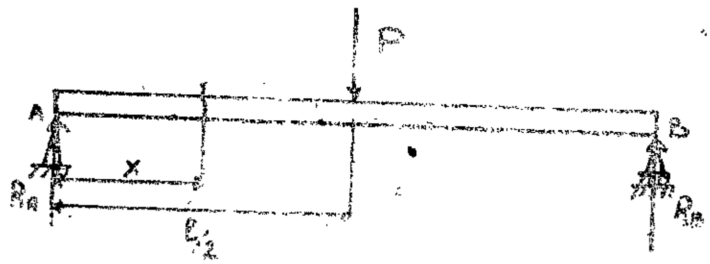
ρ: densite de la poutre

posons : $\quad P = (m + \Delta m)g$

$$q = \frac{(m_p - \Delta m)g}{l}$$



a. Effet de P



Pour $0 < x < \frac{l}{2}$

on a $R_A = R_B = \frac{P}{2}$.

La fleche $y(x)$ est donnée par l'équation différentielle de la deformée :

$$E\,I\,y''(x) = -M(x)$$

determinons $M(x)$

$$M(x) = R_A \cdot x = \frac{Px}{2} \implies E\,I\,y''(x) = -M(x) = -\frac{Px}{2}$$

$$\implies y_1(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{Px^3}{12} + \frac{Pl^2x}{16}\right) = \frac{Px}{48\,EI}(3l^2 - 4x^2)$$

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{48\,EI}$$

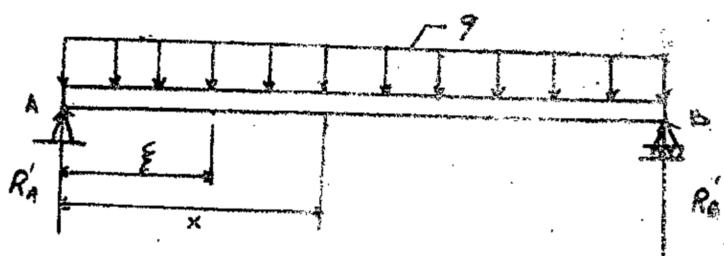
Nous savons que la fleche statique $\delta st = \frac{P}{K_1}$

or dans ce cas $y_1(\frac{l}{2}) = \delta st$

donc $K_1 = \frac{48\,EI}{l^3}$

avec $I = \frac{bh^3}{12}$

b. Effet de q



$R'_A = R'_B = \frac{ql}{2}$

$$M(x) = R_A' x - \int_0^x q(\xi)(x-\xi)\, d\xi = -\left(\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2} \right)$$

$$EIy_{II}''(x) = -M(x) = -\frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2}$$

d'ou:

$$EI.y_{II}(x) = -\frac{qlx^3}{2} + \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

Nous determinons les constantes C_1 et C_2 par les conditions initiales:

$x = 0$; $y(0) = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

$x = 1$; $y(1) = 0 \Longrightarrow C_1 = \frac{ql^3}{24}$

La fleche y(x) est:

$$y_{II}(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{2^2} + \frac{ql^3x}{24} \right)$$

Donc la fleche totale est:

$$y_T = y_I + y_{II}$$

$$y_T(x) = \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2) + \frac{qx}{24EI}(x^3 - 12x^2 l + l^3)$$

L'angle de rotation est:

$$\theta_T = \theta_I + \theta_{II}$$

$$\theta_I = \frac{dy_I}{dx} = \frac{p(l^2 - 4x^2)}{16EI}$$

$$\theta_{II} = \frac{dy_{II}}{dx} = \frac{q(4x^3 - 36x^2 l + l^3)}{24\ EI}$$

3.2. Calcul de la masse reduite par la methode de Rayleigh

La methode de Rayleigh se base sur la conservation de l'energie totale

$$E_t = cte$$

donc $E_{cmax} = E_{pmax}$

E_c = l'energie cinetique

E_p = l'energie potentielle

../..

a. Calcul de l'energie cinetique

$$E_c = E_{c_1} + E_{c_2}$$

Ec_1 = l'energie cinetique pour la poutre

E_{c_2} = l'energie cinetique pour la masse $(m + \Delta m)$

- Calcul de l'energie cinetique de la poutre

$$E_c = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \rho F \, dx \, (\dot{y})^2$$

y est fonction de x et du temps

$$y(x,t) = y(x) \cdot \tau(t)$$

nous prenons $\tau(t) = \cos \omega t$

d'ou $y(x,t) = y(x) \cos \omega t$

donc $\dot{y}(x,t) = y(x) \cdot \dot{\tau}(t) = -y(x) \cdot \omega \sin \omega t$

de même $\rho F = \frac{m_p - \Delta m}{l}$

d'ou

$$E_{c_1} = (m_p - \Delta m) \, \omega^2 \frac{P^2 l^6}{(48EI)^2} \cdot \frac{17}{70} \sin^2 \omega t$$

$$E_{c_1 \max} = \frac{17}{70} \, \omega^2 (m_p - \Delta m) \frac{P^2 l^6}{(48 \, EI)^2}$$

- Calcul de l'energie cinetique de la masse

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} (m + \Delta m) V^2$$

$$V = \dot{y}(\tfrac{l}{2}, t) \Longrightarrow V = y(\tfrac{l}{2}) \cdot \dot{\tau}(t) = -y(\tfrac{l}{2}) \, \omega \sin \omega t$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} (m + \Delta m) \left[y(\tfrac{l}{2})\right]^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2} (m + \Delta m) \frac{P^2 l^6}{(48EI)^2} \omega^2 \sin^2 \omega t$$

d'ou $E_{c_2 \max} = \frac{1}{2} (m + \Delta m) \frac{P^2 l^6}{(48EI)^2} \omega^2$

Donc finalement l'energie cinetique du systeme est:

$$E_{c\ max} \frac{P^2 l^6 \omega^2}{2(48\ EI)^2}\left((m + \Delta m) + \frac{17}{35}(m_p - \Delta m)\right)$$

b. Calcul de l'energie potentielle maximal

$$E_{p\ max} = \frac{1}{2} K\, y^2(\tfrac{l}{2}, t)$$

$$E_{p\ max} = \frac{1}{2} K\left(\frac{P^2 l^3}{48\ EI}\right)^2$$

Calculant à partir de l'energie cinetique et potentielle:

$$E_{c\ max} = E_{p\ max}$$

d'ou

$$\omega^2 = \frac{K}{(m + \Delta m) + \frac{17}{35}(m_p - \Delta m)}$$

D'autre part nous avons , avec la masse reduite :

$$E_{c\ max} = \frac{1}{2} m_{r} V^2 \qquad V = - y\,\omega \sin \omega t$$

$$E_{p\ max} = \frac{1}{2} K\, y^2$$

d'ou

$$\omega^2 = \frac{K}{m_{r}}$$

Puisque nous avons la même pulsation donc

$$\frac{k}{m_{r}} = \frac{K}{(m + \Delta m) + \frac{17}{35}(m_p - \Delta m)}$$

La valeur de la masse reduite est:

$$m_{r} = (m + \Delta m) + \frac{17}{35}(m_p - \Delta m)$$

3.3. Calcul numerique de la masse m_{z}

Nous avons un excitateur de masse m qui est 2 kg

- une poutre de dimension

$L_r = 700$ mm

$h = 8$ mm

$b = 32$ mm

$\rho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m³

masse de la poutre

$m_p = 1{,}407$ kg

$\Delta m = 0{,}1005$ kg

d'où la masse reduite est :

$m_z = 2{,}7349$ kg

4.CALCUL DE LA REGIDITE D'UNE POUTRE EN CASTRE ET CALCUL DE SA MASSE REDUITE

Introduction

Le calcul de la regiditée de la poutre encastrée est necessaire pour le calcul de sa frequence propre, ainsi que les dimensions de cette poutre, car la regiditée depend des caracteristiques dimenssonnelles.

4.1.Calcul de la regiditée

Soit une poutre encastrée de masse m_p ,de moment quadratique I ,comportant à son extrémité à une distance l une masse m de moment d'inertie J. (voir figure -a -)

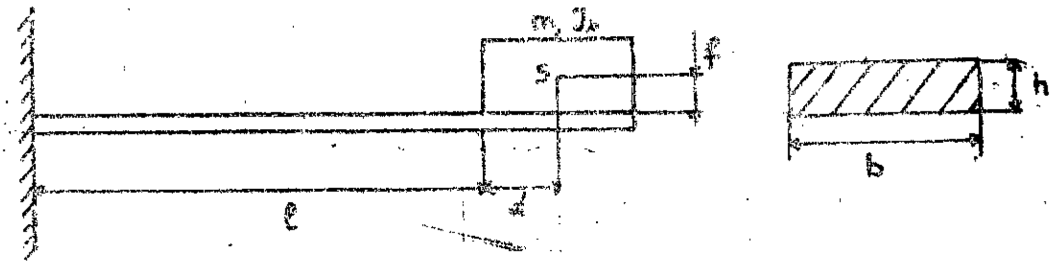
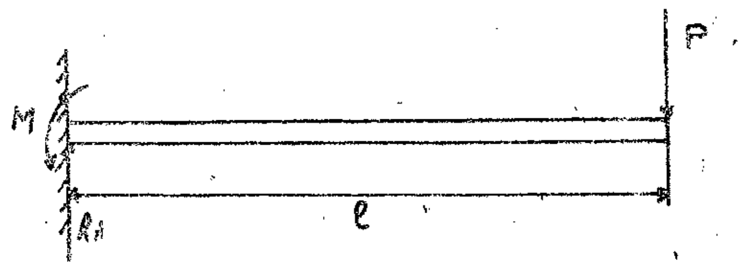


Fig. a –

Calcul de la deformée dû au poids $P = mg$



M = moment d'encastrement

$M = R_A l$ et $R_A = -P$

d'ou $M = -Pl$

Calcul du moment $M(x)$

$M(x) = R_A x + M = Px - Pl$

$M(x) = P(x - l)$

La deformée est donnée par la relation:

$EIy''(x) = -M(x)$

d'ou nous avons :

$y(x) = -\frac{P x^3}{6} + \frac{P l x^2}{2} + C_1 x + C_2$

Les constantes C_1 et C_2 sont determinées grâce aux conditions au limite

$x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow C_2 = 0$

$x = 0$ $\theta = 0 \Longrightarrow C_1 = 0$

$\theta(x) = -\frac{Px^2}{2} + Plx + C_1$

d'ou $y(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3l - x)$

La fleche statique δst au point $x = l$ est;

$$\delta st = y(l) = \frac{Pl^3}{3EI}$$

or nous avons que $\delta st = \frac{P}{K_1}$, donc la constante de regiditée est :

$$K_1 = \frac{3EI}{l^3}$$

L'angle de rotation $\theta(l)$ au point l est :

$$\theta(l) = \frac{Pl^2}{2EI}$$

4.2. Calcul de la masse reduite par la methode de Rayleigh

Cette methode a eté decrite precedament ; donc nous calculons l'energie cinetique et potentielles totale

a. Pour le systeme equivalent

$$E_{c\ max} = \frac{1}{2} m_e V^2 = \frac{1}{2} m_e\ y(l)\,\omega^2$$

car $V = \dot{y}(l,t) = y(l).\dot{z}(t) = -\ y(l)\,\omega^2 \sin \omega t$

$$E_{p\ max} = \frac{1}{2} K\ y^2(l)$$

puisque

$$E_{c\ max} = E_{p\ max}$$

d'où nous obtenons

$$\omega^2 = \frac{K_1}{m_{e_1}}$$

b. Pour le systeme initiale

-Energie cinetique est:-

$$E_{c_T\ max} = E_{c_1\ max} + E_{c_2\ max} + E_{c_3\ max}$$

$-E_{c_1\ max}$ = l'energie cinetique de la poutre en translation

$-E_{c_2\ max}$ = l'energie cinetique de la masse en translation

./..

$-E_{c_5 max}$ = l'energie cinetique de la masse en rotation autour de l'axe

-Calcul de $E_{c_1 max}$

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho F\,dx\,(\dot{y})^2$$

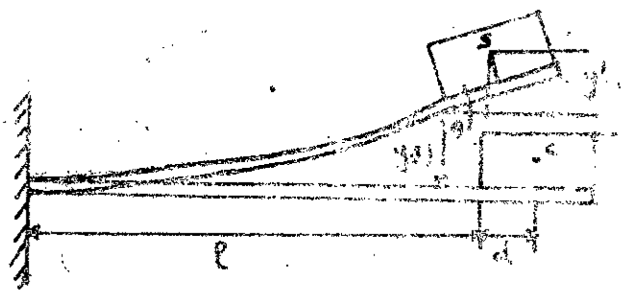
$y(x,t) = y(x)\,\tau(t)$ avec $\tau(t) = \cos\omega t$

d'ou $E_{c_1} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A\, y^2(x)\,dx\,\omega^2 \sin^2\omega t$

nous savons que $\rho A = \frac{m_p}{l}$

d'ou : $E_{c_1 max} = \frac{1}{2}\;\frac{\omega^2 P^2 l^6 m_p}{(6EI)^2}\cdot\;\frac{33}{335}$

-Calcul de $E_{c_2 max}$ et $E_{c_3 max}$



$E_{c_2 max} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m\, y_s^2\,\omega^2 \sin^2\omega t$

determinant y_s

$y_s = y(l) + y'$ avec $y' = d\,\theta(l)$

ou $\theta(l)$ est l'angle de rotation au point $x = l$

d'ou $y_s = \frac{P\,l^3}{3EI} + \frac{dP\,l^2}{2\,EI} \quad \frac{P\,l^3}{(2.3EI)}(2 + 3\frac{d}{l})$

$$y_s^2 = \frac{P^2 l^6}{4.(3EI)^2}\left(1 + \frac{3d}{l} + \frac{9}{4}\frac{d^2}{l^2}\right)$$

Finalement $E_{c_2 max}$ est

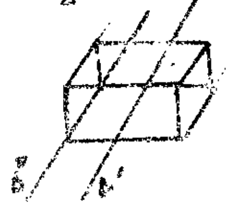
$$E_{c_2 max} = \frac{1}{2}\,\frac{P^2 l^6 m}{(3EI)^2}\,\omega^2\left(1 + \frac{3d}{l} + \frac{9}{4}\frac{d^2}{l^2}\right)$$

../..

-Calcul de $E_{c_3 max}$

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

ou J_Δ c'est le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ



D'aprés le theoreme d'Huygenes

$$J_\Delta = J_{\Delta'} + m\,a^2$$

$J_{\Delta'}$ c'est le moment d'inertie du corp par rapport à l'axe Δ passant par son centre de gravité

$$J_{\Delta'} = \iiint_V \gamma_0 (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$J_{\Delta'} = \gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2}\int_{-d}^{d}\int_{-f}^{f} (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz \quad \text{ou } \gamma_0 \text{ c'est la densité}$$

$$J_{\Delta'} = \frac{1}{3}\ 2d\ 2f\ b\ (f^2 + d^2)$$

avec $V = 2d\ 2f\ b$ c'est le volume de notre corps

et $m = \gamma_0 V$

d'ou $J_{\Delta'} = \frac{1}{3} m (f^2 + d^2)$.

Pour 'a' c'est la distance entre les deux axes

$$a = f$$

d'ou $J_\Delta = J_{\Delta'} + m\,a^2 = \frac{1}{3} m (f^2 + d^2) + m f^2$

$$-\ \dot{\theta}(x,t) = \theta(x)\,\dot{\mathcal{T}}(t) = -\theta(x)\,\omega \sin \omega t$$

Finalement l'energie cinetique $E_{c_3 max}$ **sera:**

$$E_{c_3 max} = \frac{1}{2} m \left(\frac{4}{3}(f^2 + d^2) - d^2\right) \frac{P^2 l^4}{4(EI)^2}\,\omega^2$$

Donc nous deduisons l'energie cinetique totale du systèmeaprés simplification nous aurons:

$$E_{c\ max} = \frac{1}{2}\frac{P^2 l^6 \omega^2}{(3EI)^2}\left[m(1 + \frac{3d}{l} + 3\frac{f^2 + d^2}{l^2}) + \frac{33}{140} m_p\right]$$

-Calcul de lénergie potentielle $E_{p\ max}$

$$E_{p\ max} = \frac{1}{2} K\, y^2(l,t) = \frac{1}{2}\frac{P^2 l^6}{(3EI)}.K$$

Puisque nous avons,conservation de l'energie totale

$E_{c\ max} = E_{c\ max}$

d'ou

$$\frac{1}{2}\frac{P^2 L^6 \omega^2}{(3\ EI)^2}\left[m(1 + 3\frac{d}{l} + 3\frac{f^2 + d^2}{l^2}) + \frac{33}{140} m_p\right] = \frac{P^2 l^6 K_2}{2.(3EI)^2}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m(1 + 3\frac{d}{l} + 3\frac{f^2 + d^2}{l^2}) + \frac{33}{140} m_p}$$

Mais d'autre par nous avons sha mème pulsation pour les systemes équivalents et initialé,nous obtenons l'expression de la masse reduite :

$$m_{e_2} = m(1 + 3\frac{d}{l} + 3\frac{f^2 + d^2}{L^2}) + \frac{33}{140} m_p$$

5.... SIONNEMENT DE L'ABSORBEUR

.... Calcul de la masse m_2

Nous choisissons le coefficient de rapport de masse

$\mu = \frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{6}$

Et comme $m_1 = m_{e_1} = 2{,}7349$ kg

d'ou $m_2 = \mu m_1 \Longrightarrow m_2 = 0{,}4558$ kg

et comme $m_2 = 2\ m_{e_2}$ donc $m_{e_2} = 0{,}227$ kg

5.2. Calcul de la frequence propre de la poutre seul

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m_{t_1}}}$$

$m_{t_1} = 2,7371$ kg

$K_1 = \frac{48\ EI}{l^3}$ avec I moment quadratique

$I = \frac{b\ h^3}{12}$

$E = 2{,}109 \cdot 10^6$ kg / cm^2 module de Young

$g = 980{,}66$ cm/ s^2

d'ou $\omega_1 = 164{,}90$ rad/s

5.3. Determination de la pulsation propre de l'absorbeur

D'aprés la formule (14) nous avons

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}}$$

et comme $\delta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ d'ou $\omega_2 = \delta\,\omega_1 = \omega_1\sqrt{\frac{1}{1+\beta}}$

$\omega_2 = 152{,}89$ rad/s

5.4. Determination de la raideur K de l'absorbeur

D'aprés la formule ( )

$$\omega_2^2 = \frac{k_2}{m_{t_2}}$$

d'ou on tire la valeur de K_2

$K_2 = 4{,}09$ N/m

5.5. Determination de la largeur de la lame de l'absorbeur

La formule ( ) nous donne

$$K_2 = \frac{3\ EI}{l^3}$$

avec $I = \frac{b\ h^3}{12}$

d'où l'on tire

$$b = \frac{4K_2\,l^3}{E\ h^3}$$

Nous choisissons une longueur de $l = 120$ mm,

une hauteur de $h = 2$ mm

avec $E = 2{,}109 \cdot 10^6\ kg/cm^2$

d'ou $b = 16{,}7$ mm

Donc la masse de lame de l'absorbeur m'_p est

$m'_p = 0{,}0146$ kg

Nous recalculons la masse m_{t_2} d'aprés la formule :

$$m_{t_2} = m\left(1 + 3\frac{d}{l} + 3\frac{f^2 + d^2}{l^2}\right) + \frac{33}{140} m'_p$$

m masse accrochée à l'extremité de la lame qui est egale:

$m = V\rho \qquad \rho = 7{,}85 \cdot 10^3\ kg/m^3$

La masse m a la forme d'unparallipipede de dimension

(2d , 2f , b')

$d = 15$ mm

$f = 12$ mm

$b' = 30$ mm

d'ou $m_s = 0{,}169$ kg

Nous obtenons pour m_{t_2} :

$m_{t_2} = 0{,}2765$ kg $\Longrightarrow$ $m_2 = 0{,}553$ kg

Nous recalculons β :

$\beta = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}101$

de même $\delta = \sqrt{\frac{1}{1+\beta}} = 0{,}953$

Dans ce cas la pulsation propre de l'absorbeur sera:

$\omega_2 = \delta\omega_1 \Rightarrow \omega_2 = 138{,}17$ rad/s

5.6. Calcul des frequences correspendantes aux points S et T

$$\gamma_S^2 = \frac{1}{2+\beta} \left(2 - \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \right)$$

$$\beta = 0{,}101$$

d'où

$$\gamma_S^2 = 0{,}748$$

$$\gamma_T^2 = \frac{1}{2+\beta} \left(2 + \sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}} \right)$$

$$\gamma_T^2 = 1{,}155$$

5.7. Calcul de l'amplitude de vibration au points S et T

$$\lambda_S = \lambda_T = \frac{m_2 e}{m_1} \cdot \frac{2+\sqrt{\frac{2}{1+\beta}}}{\beta\left(1+\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\right)+\sqrt{\frac{2\beta}{1+\beta}}}$$

$$\lambda_S = \lambda_T = 25{,}55 \text{ mm}$$

5.8. Determination du facteur d'amortissement ξ_2

Nous avons l'expression de l'amplitude de vibration qui de la forme :

$$\lambda_1^2 = \frac{M\xi_2^2 + N}{P\xi_2^2 + Q}$$

d'ou $$\xi_2^2 = \frac{N - \lambda^2 Q}{\lambda^2 P - M}$$

avec M, N, P, Q sont des parametres qui dépendent de (γ, δ, β). Puisque les courbes de resonances passent toutes par les mêmes points S et T, donc elles ne dependent pas de ξ_2. Si nous prenons la valeur de λ_1^2 au point S et γ_S, nous aurons une indètermination qui est logique avec les suppositions faites precedament dans les chapitre precedant.

../..

D'ou nous prenons une valeur de ξ legerement superieur ou inferieur, cela ne change rien à la valeur de l'amplitude λ ,car nous avons une tangente horizontale .

Nous prenons :

$$\lambda = 15,55 \text{ mm}$$

$$\gamma = 0,89$$

nous trouvons :

$$\xi_1 = 0,23$$

puisque ;

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{2m_2\omega_1} \qquad \text{d'ou} \qquad \alpha_1 = 4,01 \text{ kgs/m}$$

CHAPITRE -V-

1. CALCUL DE LA FREQUENCE PROPRE (NATURELLE) D'UNE POUTRE PAR LA METHODE DES ADMETTANCES ET COMPARAISON AVEC LES RESULTATS OBTENUS PAR LA METHODE CLASSIQUE

1.1. Introduction

L'utilisation de la methode des admettances pour le calcul des frequences propres est plus complete, elle nous permet de calculer toutes les frequences propres plus exactement .

Par compte la methode classique , elle nous permet le calcul de la premiere frequence propre seulement et avec une valeur approchée.

L'utilisation de la methode d'impedance (admettance) donne la possibité de decomposer un systeme trés complexe en subsystemes où l'analyse est dejà plus simple , puis le reconstituer de nouveau pour trouver les reponses aux points prévus pour l'analyse .

1.2. Notions d'impedance

On definit l' impedance mecanique Z_m comme le rapport de la valeur maximale de la force harmonique F appliquée en un point à la valeur maximale de la reponse R en ce même point

$$Z_m = \frac{F}{R}$$

L'admettance Y_m est l'inverse de l'impedance

$$Y_m = \frac{1}{Z_m}$$

../..

La reponse peut etre :

-Un deplacement

-Une vitesse

-Une acceleration

CALCUL DE LA FREQUENCE PROPRE A LA BASE DE LA METHODE DES IMPEDANCES

2.1 Definition

Tout corps soumis à des sollicitations exterieurs est susceptible de se deformér, dans cet etat apparaissent entre les particules des forces intérieures qui tendent à faire revenir les particules du corps dans la position initiale avant la deformation. On distingue les deformations elastiques , plastiques. Les principales deformations sont tractions , compres--sions , cisaillements , torsions et flexions.

Dans notre analyse nous nous interessons qu'aux deformations elstiques, de flexions.
La flexion consite en un gauchissement de l'axe de la poutre dont le deplacement (des sections transversales) est decrit par une expression mathematique de la ligne elastique .

La flexion s'accompagne en même temps d'une rotation des sections transversales autour des axes se trouvant dans le plan. des sections .

Pour l'etude des vibrations des poutres , nous supposons que celle ci sont homogenes , isotropes

../..

et travaillant dans le domain elastique.

.2. Expression de deplacement

Soit une poutre appuyée arbitrairement comme l'indique la figure -17-

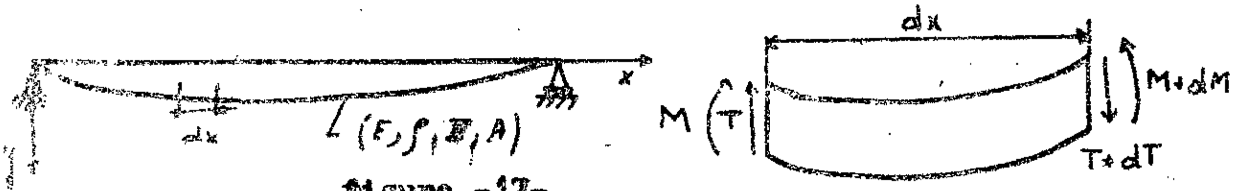


figure -17-

L'equation differentielle de deplacement s'obtient sur la base de l'analyse de l'equilibre dynamique d'un element dx pris arbitrairement de la poutre en flexion.

$$M = - E\ I\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$ M: moment flechissant

y: deplacement

$$T = \frac{\partial M}{\partial x} = - E\ I\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$ T: effort tranchant

L'equilibre dynamique de dx est exprimé par

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} - T = F_i$$ F_i: force d'inertie

$$F_i = dm\ \frac{d^2 y}{d\ t^2} = \rho A\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ dx$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = F_i = \rho A\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\ dx$$

on a

$$\frac{\partial T}{\partial x}\ dx = - EI\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\ dx$$

d'ou

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho\ A\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

L'equation differentielle de deplacement est :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \qquad (29)$$

avec :

$$a^2 = \frac{\rho A}{E I}$$

E: module de Young

I: moment quadratique de la poutre

Le deplacement y est de la forme

$$y(x,t) = y(x)\,\tau(t)$$

ou $y(x)$ amplitude de vibration de la poutre

$$\tau(t) = e^{j\omega t}$$

nous remplaçons $y(x,t)$ dans l'equation (30) nous obtenons:

$$y^{(4)}(x) - q^4 y(x) = 0 \qquad (31) \qquad\qquad q^4 = a^2\omega^2 = \frac{\rho A}{E I}\omega^2$$

$$\ddot{\tau}(t) + \omega^2 \tau(t) = 0 \qquad (32)$$

La solution de ces equations (31) et (32) est

$$y(x) = B_1 \sin qx + B_2 \cos qx + B_3 \,\mathrm{sh}\, qx + B_4 \,\mathrm{ch}\, qx$$

Pour determiner les constantes B_1, B_2, B_3, B_4, on se réfère aux conditions au limite, puisque on a une poutre à longueur finie donc quatre (4) conditions aux limites permettant de les determiner

3. METHODE D'ADMETTANCE DEPLACEMENT

L'admettance deplacement etant definit comme le rapport de la valeur maximale de la reponse en un point à la valeur maximale de l'excitation en ce mème point .

La reponse peut prendre la forme d'un deplacement harmonique y ou une rotation harmonique θ .
L'excitation peut prendre la forme d'une force harmonique F ou la forme d'un moment harmonique M .

On designe l'admettance deplacement par Y^{D}_{ij}
i : designe la position où la reponse est mesurée
j: designe la localisation de l'excitation exterieure.

Dans le cas ou l'excitation est un moment et la reponse une rotation les indices i et j sont munis d'un prime

D'aprés la regle de reciprocité on a l'egalité

$$Y^{D}_{ij} = Y^{D}_{ji}$$

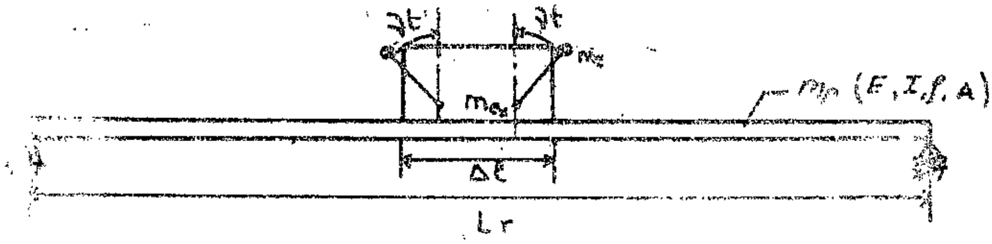
On applique cette methode pour le systeme décrit dans le paragraphe suivant , pour la determination de la fréquence naturelle.

4.DISCREPTION DU SYSTEME MECANIQUE A ETUDIER

Soit une barre uniforme à section rectangulaire b×h et de longueur L_r , est montée sur deux supports fixes , l'un deux permet un deplacement laterale, permettant la vibration transversale de la poutre.

La barre porte en son milieu une charge M(excitateur) de dimension Δl . Cet excitateur c'est l'origine des excitations harmoniques .

Le systeme est schematisé par le schema suivant



Decomposant notre systeme en trois subsystemes figure 18 -

- Le subsysteme -a- poutre en appuis , articulé-libre, dont l'extremité libre est sollicitée par l'effort interne F_a est le moment fléchissant M_a
- Le subsysteme -b- est identique sauf on a F_b et M_b
- Le subsysteme -c- une masse M guidée verticalement de façon quelle effectue un mouvement rectiligne , elle est sollicitée par F_M et $F(t)$

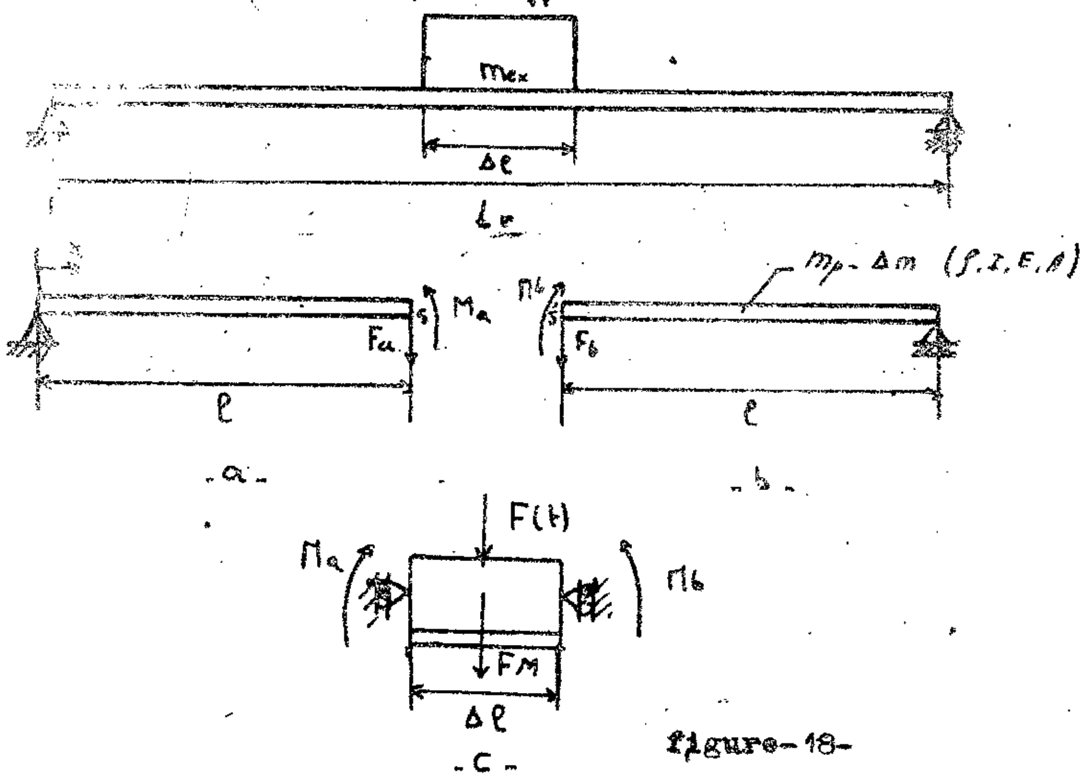


figure-18-

5. DETERMINATION DE L'ADMETTANCE GLOBAL Y_s

m_{ex} = masse de l'excitateur

m_p = masse de poutre (barre)

Δm = masse de la partie de la poutre qui n'est pas deformée

$M = m + \Delta m$: masse en mouvement rectiligne

$l = \frac{L_r - \Delta l}{2}$

Les equations des admettances deplacement sont:

$$y_{as} = F_a Y^D_{as_1} + M_a Y^D_{as_2} \qquad (33)$$

$$y_{bs'} = F_b Y^D_{bs'_1} + M_b Y^D_{bs'_2} \qquad (34)$$

$$y_{Ms} = (F + F_M) Y^D_{Ms} \qquad (35)$$

$$\theta_{as} = F_a Y^D_{as_3} + M_a Y^D_{as_4} \qquad (36)$$

$$\theta_{bs'} = F_b Y^D_{bs'_3} + M_b Y^D_{bs'_4} \qquad (37)$$

$$F_a + F_b + F_M = 0 \qquad (38)$$

$$\theta_{as} = \theta_{bs'} = 0 \qquad (39)$$

$$y_{as} = y_{bs'} = y_{Ms} = y_s \qquad (40)$$

$$M_a + M_b = 0 \qquad (41)$$

$$Y^D_{asi} = Y^D_{bs'i} \quad i = 1,2,3,4 \ldots \qquad (42)$$

Les equations de (33) à (42) forment un systeme d'equations linéaires d'inconnus : y_{as}, $y_{bs'}$, θ_{as}, $\theta_{bs'}$, F_a, F_b, F_M, M_a, M_b :

On s'interesse à la determination des frequences naturelles ce qui revient au mème à determiner l'impedance du systeme global.

Aprés resolution de ce systeme d'equations on trouve:

$$y_s = \frac{F\, Y^D_{Ms} \left(Y^D_{as_1} Y^D_{as_4} - Y^D_{as_2} Y^D_{as_3} \right)}{Y^D_{as_1} Y^D_{as_4} - Y^D_{as_2} Y^D_{as_3} - 2Y^D_{Ms} Y^D_{as_4}}$$

D'aprés la definition de l'admettance

$$y^D_s = \frac{y_s}{F} = \frac{Y^D_{Ms} \left(Y^D_{as_1} Y^D_{as_4} - Y^D_{as_2} Y^D_{as_3} \right)}{Y^D_{as_1} Y^D_{as_4} - Y^D_{as_2} Y^D_{as_3} - 2Y^D_{Ms} Y^D_{as_4}} \qquad (43)$$

5.1. Determination des admettances Y^D_{asi} , Y^D_{Ms}

- L'élèment M est en mouvement rectiligne son admettance est donné par :

$$Y^D_{Ms} = - \frac{1}{M \omega^2}$$

- Pour l'admettance $Y^D_{as_1} = Y^D_{oo}$ dûe à la force F_a c'est à dire la reponse est en $x = 0$ et l'excitation en $x = 0$

Pour subsysteme -a- on a deux extremités : libre , articulée

- libre en $x = 0$ $- y'' = 0$

$$- y''' = \frac{F_a}{E\, I}$$

- articulée en $x = 1$ $- y = 0$

$$- y'' = 0$$

or $y(x) = B_1 \sin qx + B_2 \cos qx + B_3 \,\mathrm{sh}\, qx + B_4 \,\mathrm{ch}\, qx$

Avec cês conditions aux limites on determine B_1, B_2, B_3, B_4 donc on obtient le deplacement où la reponse est mesurée à la position x et l'excitation au point $x = 0$.

../..

$$y(x)=\frac{F_a\left[\sin ql\, sh ql(\cos qx + ch qx)+sh ql \cos ql \sin qx + \sin ql\, ch ql\, sh qx\right]}{EIq^3(\cos ql\, sh ql - \sin ql\, ch ql)} \quad (44)$$

$$Y^D_{xo}=\frac{y(x)}{F_a}=\frac{\sin ql\, sh ql(\cos qx + ch qx)+sh ql \cos ql \sin qx + \sin ql\, ch ql\, sh qx}{EI\, q^3\, (\cos ql\, sh ql - \sin ql\, ch ql)}$$

d'ou
$$Y^D_{as_1}=Y^D_{oo}=\frac{2\sin ql\, sh ql}{EI\, q^3(\cos ql\, sh ql - \sin ql\, ch ql)} \quad (45)$$

-Pour les admettances $Y^D_{as_2}$, $Y^D_{as_3}$

Nous avons $Y^D_{as_2}=Y^D_{as_3}=Y^D_{o'o}=Y^D_{oo'}$

ces admettances sont dûs aux moments harmoniques M_a et M_b. Puisque $M_a = M_b$ donc nous avons les mème admettances.

Pour le subsysteme -a- nous avons :

extremité libre en $x = 0$ $\quad - y'' = -\dfrac{M_a}{EI}$

$\qquad - y''' = 0$

extrémité articulé en $x = l$ $\quad - y = 0$

$\qquad - y'' = 0$

d'ou nous obtenons le deplacement $y(x)$:

$$y(x)=\frac{M_a\left[ch ql \cos ql \sin qx + \cos qx\, ch ql\, sh ql + sh qx\, ch ql \cos ql - ch qx\,(2\, ch ql \sin ql - \cos ql\, sh ql)\right]}{EI\, q^2(\cos ql\, sh ql - \sin ql\, ch ql)}$$

Donc l'admettance deplacement est:

$$Y^D_{o'o}=Y^D_{oo'}=\frac{-(\cos ql\, sh ql + \sin ql\, ch ql)}{EI\, q^2(\cos ql\, sh ql - \sin ql\, ch ql)} \quad (46)$$

-Pour l'admettance $Y^{D}_{as_4}$

Dans ce cas la reponse a la forme d'une rotation harmonique du au moment harmonique M_a.

$$Y^{D}_{as_4} = Y^{D}_{o'o'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{M_a}$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial x} = \frac{M_a\left[chqlcosqlcosqx - sinqxchqlsinql + chqxchqlcosql - shqx(2\, chqlsinql + cosqlshql)\right]}{EIq\,(cosql\; shql - sinql\; chql)}$$

$$Y^{D}_{o'o'} = \frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{M_a} = \frac{2\; chql\; cosql}{EIq\;(cosql\; shql - sinql\; chql)} \qquad (47)$$

Remplaçant l'expressions (45),(46),(47) dans l'expression(43) nous obtenons l'admettance global:

$$Y^{D}_{S} = \frac{m}{2q^4\left[Mql(cosqlshql - sinqlchql) + 2m\; cosqlchql\right]}$$

avec , $q = \left(\frac{\rho\; A}{E\; I}\,\omega^2\right)^{1/4}$

Les frequences naturelles correspendent à $Y^{D}_{S} = \infty$ donc

$$2q^4\left[Mql(cosql\; shql - sinql\; chql) + 2m\; cosql\; chql\right] = 0$$

et Les premieres frequences naturelles correspondent à $M = 0$

c'est à dire pas excitation d'ou :

$$cosql\; chql = 0$$

Comme $chql \neq 0$ donc $cosql = 0$

$$\Longrightarrow \quad ql = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$q\; l = q\,\frac{L}{2} = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$q = \frac{(2k + 1)\,\pi}{L}$$

et $q = \left(\frac{\rho A}{EI}\,\omega^2\right)^{1/4} \Longrightarrow \omega^2 \frac{\rho A}{EI} = \frac{(2k+1)^4\,\pi^4}{L^4}$.

$$\Longrightarrow \omega = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{L^2}\cdot\sqrt{\frac{E.I}{\rho A}}$$

$$\omega = \frac{(2k+1)^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{gEIL}{m}}$$

La premiere frequence naturelle correspend à $k = 0$

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{gEIL}{m}}$$

Calcul numerâque de cettefrequence

$g = 980{,}66\ cm/s^2$.

$I = \frac{b.h}{12} = 0{,}1365\ cm^4$

$L = 65\ cm$

$E = 2{,}109\ .10\ kg/cm^2$

$m = m_p + m_{ex} = 3{,}407\ kg$

$$\omega_1 = 171{,}07\ rad/s$$

La frequence calculée par la methode classique et celle calculée par la methode des admettances, ont des valeurs trés proches . Mais la deuxieme methode est plus exacte, plus complete , car suivant la valeur de k nous avons plusieurs frequences propres , et elle permet la prevision du comportement dynamique et la determination des proprietés des systemes . Tandis que la methode classique est repartie en plusieur étapes , chacune des etapes etant destiner à la determination de certainscaracteristiques avec des déffficultées de resolution.

DESCRIPTION DES APPAREILLAGE ETULISE POUR L'ETUDE DES VIBRATIONS

Une barre uniforme à section transversale rectangulaire $b \times h$ et de longueur L . Porte à chacune de ses extremités un tourillon , l'un des tourillon pivote sur deux roulements à billes montés dans un support fixe , l'autre tourillon porte deux roulements à billes, libre transversalement dans un support fixe , permetant la vibration trabsversale de la poutre. Les deux supports sontboullonnés sur deux montants opposé d'un portique fixe au sol (table) (voir planche)

La barre en son milieu porte un excitateur , comportant quatre excentriques origine de l'excitation (decrit precedament), alimenté par un moteur electrique à courant continu , et vitesse variable .

La variation de vitesse est commandée(la determination de cette vitesse est donnée dans la partie suivante).
Ainsi on peut avoir une large gamme de vibration forcée de la poutre et de tirer les conclusions qui confirme les resultats établis theoriquement.

MESURE AMPLITUDES DE VIBRATION ET FREQUENCES D'EXCITATION

La technique des vibrations forcées permet à l'ingenieur d'apprendre beaucoup plus de choses sur le comportement des materiaux et des assemblages construits en usine .

Des caracteristiques comme la resistance à la fatigue, l'impedance ponctuelle , la transmission des forces ,la reponse aux chocs et la forme du mode naturel peuvent être facilement determiner en mesurant la reponse aux vibrations forcées.

Pour la determination des amplitudes de vibrations correspendant auxfrequences d'excitation , nous proposons un appareillage electrique comportant:

-Lampe stroboscopique alimenté par un generateur de frequence pour la determination des frequences d'excitation

-Un accéleromètre de mesure placé sous la poutre detectant les deplacement de celleci.

Accelerometre de mesure est un transducteur electromecanique produit un signal electrique de sortie proportielle à l'acceleration à la quelle est soumis .

-Pre-amplificateur qui permet de regler la sesibilité des informations reçue par l'accelerometre à une valeur choisie Comportant un integrateur pour la mesure de vibration et de deplacement(type 2635 B & K)

../..

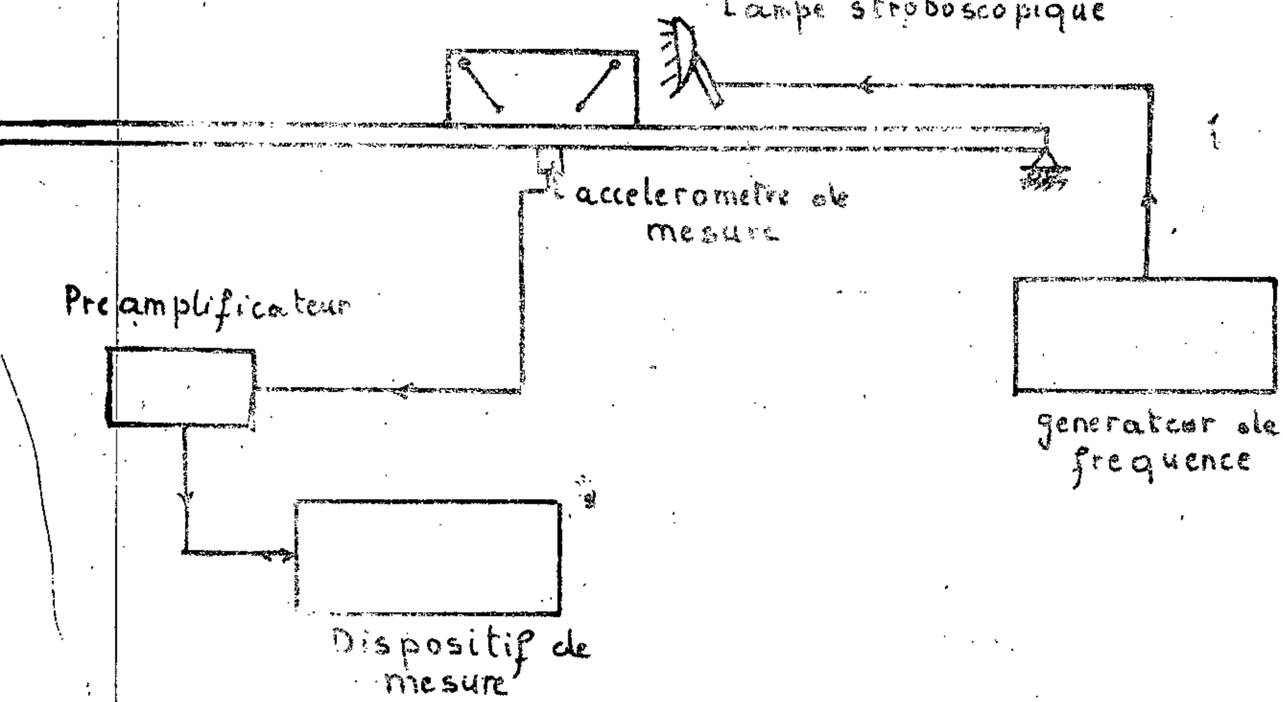
-Dispositifs de mesure et d'analyse, il peut être soit :

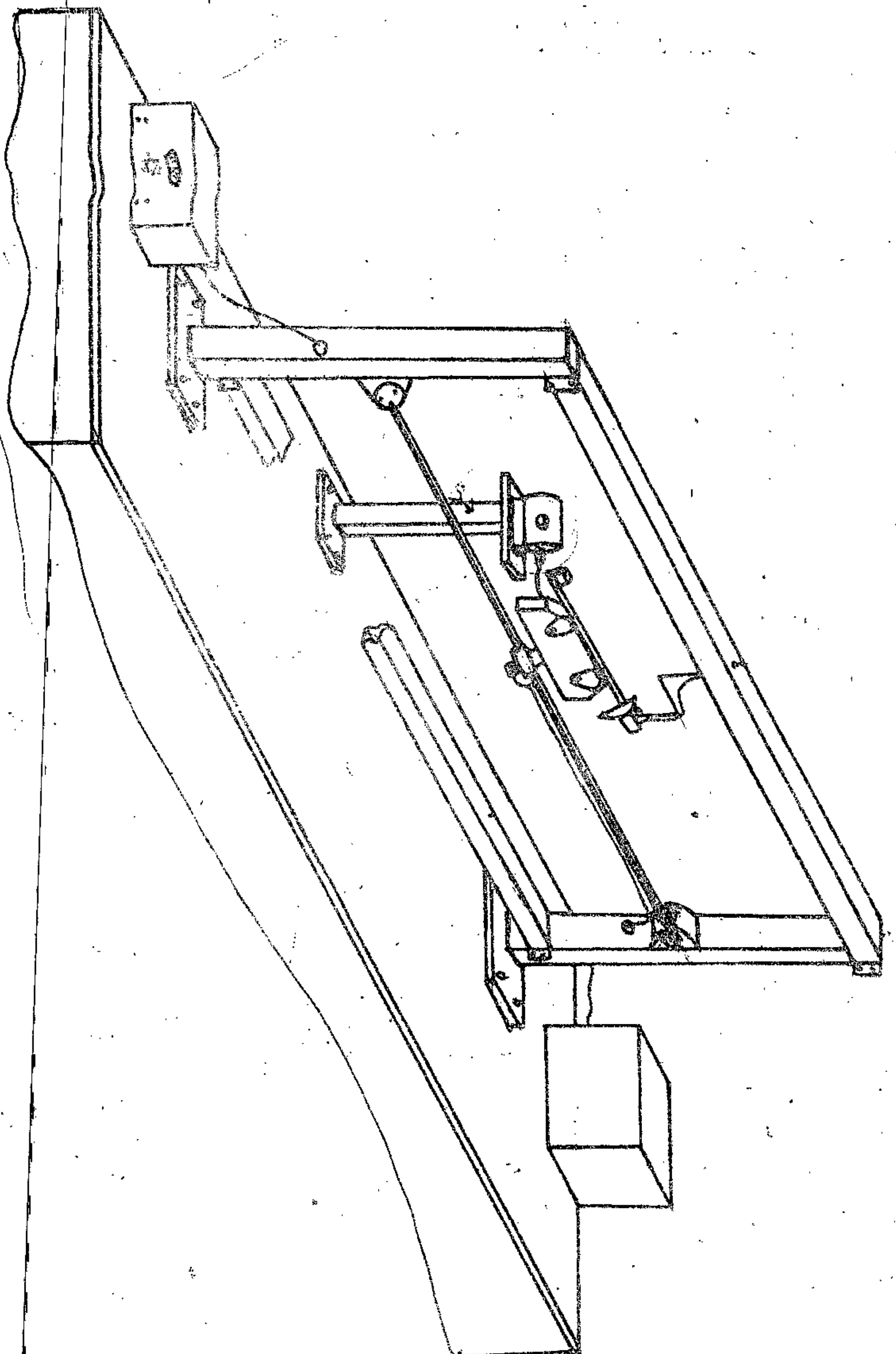
-Un enregistreur de niveau (type 2307 B & K)

-Mesureur de vibration pouvant mesurer les parametres :acceleration, vitesse, déplacement, sur des gammes dynamiques et de frequences. (type 2511 B & K)

-Oscilloscope

Le schema synoptique d'un montage pour la mesure des amplitudes de vibrations et frequences d'excitations est donnée sur la figure suivante.


Lampe stroboscopique
accelerometre de
mesure
Preamplificateur
generateur de
frequence
Dispositif de
mesure



CONCLUSION

La théorie des vibrations, est une large branche dans le domain de la construction mecanique . Nous avons toucher qu'une partie de cette théorie des vibrations , qui consiste à eliminer ou attenuer les vibrations nuisibles.
Nous avons fait l'etude théorique d'un absorbeur dynamique de vibration et nous avons etabi certaines relations qui qui nous ont permit à dimensionner l'absorbeur de vibration et de faire le choix compte à son utilisation.

En terminant ce travail , et en mesurant le chemin parcouru depuis la premiere prise en main de ce sujet, nous pouvons dire qu'une grande etape à été franchie vers la realisation d'un banc d'essai, puisque nous somme arrivés à proposer un dispositif pratique (banc d'essai) pour determiner certains paramètres definissant l'absorbeur qui confirme les resultats obtenu theoriquement.

Nous souhaiterions la continuation de ce travail pour la realisation du banc d'essai .

BIBLIOGRAPHIE

-DOCUMENTATION POUR TRODE LABORATOIRE DE VIBRATION

Ecole Polytechnique - CRACOVIE POLOGNE
1977

-S.A.TIMOSHENKO Théorie des vibrations
deuxième édition 1951

-HALLIA Schaum's outline of théory and probleme of
machine design

-TECHNIQUE DE L'INGENIEUR
Isolation antivibratoire et antichocs
par Jean morlon - article B 595

-A.H.CHURCH Mechanical vibration
John and Sons, Inc . New York
New York .Toronto . London 1961

-TECQUIPMENT Experiments in vibration
incorporating the Universal Vibration
Apparatus ,TM 16
TECHNICAL MANUAL October 1975

-BRUEL & KJAER
Cathalogue resumé - Instruments de mesure
pour l'analyse du bruit , des vibrations
et du signal DANEMARK 1980

-WIBRACJI W . TECHNIKIE
Jdz . MOSKWA 1891