

PROJET DE FIN D'ETUDES 31/83

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

»O«

الدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

22X

Département de Génie Mécanique

»O«

SUJET

**FILTRES MECANIKUES
ET LEURS PROPRIETES**

Etudié par :
Mourad HAZI

Proposé par :
Marek KSIAZEK

Juin 1983

PROJET DE FIN D'ETUDES

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

»O«

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Mécanique

»O«

SUJET

**FILTRES MECANIKUES
ET LEURS PROPRIETES**

Etudié par :

Mourad HAZI

Proposé par :

Marek KSIAZEK

Juin 1983

Je tiens à remercier M^E KSIĄZEK pour son suivi lors de la préparation de ce travail, ainsi que l'ensemble des professeurs ayant contribué à ma formation.

Je dédie ce modeste ouvrage à mes parents, mes frères, mes sœurs, qui m'ont toujours aidé de leurs conseils et soutenu tout au long de mes années d'études.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
I - Introduction à la notion de filtre mécanique	1
II - Généralités	3
II.1 - Notion d'impédance électrique	3
II.2 - Généralisation de la notion d'impédance - Analogies electromécaniques	5
III - Notion d'impédance appliquée aux systèmes comportant des leviers	10
III.1 - Systèmes non articulés	10
III.2 - Systèmes articulés	12
IV - Théorie physique des filtres mécaniques	15
IV.1 - Modes d'une corde plombée	16
IV.2 - Deux pendules couplés forment un filtre mécanique	18
IV.3 - Définitions de base relatives aux filtres	21
V - Détermination de la bande de passage des filtres mécaniques à l'aide de la mécanique classique	24
V.1 - Filtre passe bas	24
V.2 - Filtre passe bande	27
V.3 - Influence des pertes sur la bande passante	30
VI - Dipôles et quadripôles en régime sinusoïdal	32
VI.1 - Dipôles : définition et réduction à une impédance unique	32

VI.2. Quadripoles passifs.	33
VI.3. Equations fondamentales - paramètre du quadripole.	34
VI.4. Définitions d'impédances.	36
VI.5. Couplages généraux des quadripoles.	40
VII. Théorie d'onde des quadripoles.	42
VIII. Application de la théorie d'onde des quadripoles à la détermination de la bande de passage.	47
VIII.1. Décomposition d'une chaîne homogène en quadripoles élémentaires.	49
VIII.2. Condition de filtrage et détermination de la bande passante à l'aide de la théorie d'onde.	53
VIII.3. Filtre à une cellule.	61
IX. Méthode d'obtention des filtres mécaniques et de leurs schémas équivalents.	64
X. Méthode de synthèse des filtres passe bas, passe haut, passe bande et bouchon.	72

I-Introduction à la notion de filtre mécanique :

La nécessité de protéger les constructions contre les vibrations possibles dans un certain domaine de fréquences, nous oblige à rechercher les caractéristiques de ces vibrations et à construire des dispositifs qui permettent de les réduire dans le domaine désiré.

Il arrive souvent que le signal appliqué à l'entrée possède des composantes de fréquences différentes. Il est possible que seules certaines de ces composantes doivent être transmises. Il faut alors que le circuit de transmission soit capable de laisser passer les composantes utiles sans déformation et de rejeter les composantes indésirables.

Cela peut se faire si la transmittance du circuit a un module nul pour les fréquences correspondant aux composantes indésirables et un module égal à l'unité pour les autres. Un tel système constitue un "filtre idéal".

Pratiquement, il n'existe que des filtres avec des éléments d'atténuation et c'est pour cela qu'un filtre idéal ne peut être réalisé qu'avec un nombre infini d'éléments. En général un filtre est composé d'un nombre fini d'éléments identiques juxtaposés.

On ne restreindra pas la généralité de l'étude en se limitant à des forces d'excitation oscillant harmoniquement car une classe importante de fonctions peut s'écrire en un dévelop-

-vement de Fourier et appliquer le principe de superposition. Par filtre, nous entendrons un quadripôle passif : élément de transmission qui possède une entrée et une sortie avec lesquelles se font exclusivement les échanges avec l'extérieur, et qui présente dans la bande de fréquence choisie (bande passante) un affaiblissement du signal aussi faible que possible, tandis que dans la bande d'arrêt l'affaiblissement est aussi fort que possible. L'exposé de cet ouvrage sur les filtres et leurs propriétés sera traité sur la base de la théorie des ondes. L'influence de l'amortissement pouvant être estimée par un calcul approximatif, on se limitera donc à des chaînes mécaniques sans pertes.

La théorie des filtres en électricité étant la plus ancienne et la plus développée, l'étude des filtres mécaniques a été menée à partir de là, sur la base des analogies électro-mécaniques qui ont permis de faire un parallèle sur les propriétés électriques et mécaniques de ces filtres.

II - Généralités :

II-1 Notion d'impédance électrique :

Si $\bar{V} = V e^{-j\delta}$ et $\bar{I} = I e^{-j(\delta+\psi)}$ désignent les amplitudes complexes de la tension appliquée à un circuit, et du courant qui le traverse alors, l'impédance complexe de ce circuit est par définition :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} e^{j\psi} = Z e^{j\psi}$$

Cette grandeur donne par son module $Z = \frac{V}{I}$ le rapport des modules de la tension et du courant, et par son argument le retard de phase du courant sur la tension.

Lois de Kirchhoff et de composition des impédances :

* loi des courants ou loi des nœuds : la somme algébrique des courants qui arrivent ou qui partent d'un nœud est nulle : $\sum \bar{I}_k = 0$

* loi des tensions ou loi des mailles : la somme algébrique des tensions le long d'une maille est nulle : $\sum \bar{V}_k = 0$

De ces lois on peut déduire la loi de composition des impédances :

de la loi des nœuds : $\sum I_k = 0$ on tire $\sum \frac{V}{Z_k} = 0$

$$\text{d'où } V \sum \frac{1}{Z_k} = V \frac{1}{Z} = 0$$

Ce qui donne pour des impédances en parallèle : $\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_k}$

Applications :

Éléments de base : Résistance R - Inductance L -
Capacité C .

Le courant \bar{I} qui traverse la résistance R sous la tension \bar{V} est en phase avec celui-ci, son impédance est :

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{V}{I} = R$$

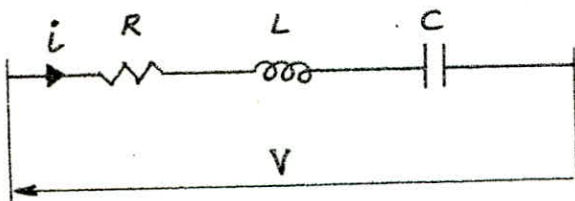
Le courant \bar{I} qui traverse l'inductance L sous la tension \bar{V} est en quadrature retard sur celui-ci, son impédance est :

$$\bar{Z} = \frac{V}{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = jL\omega$$

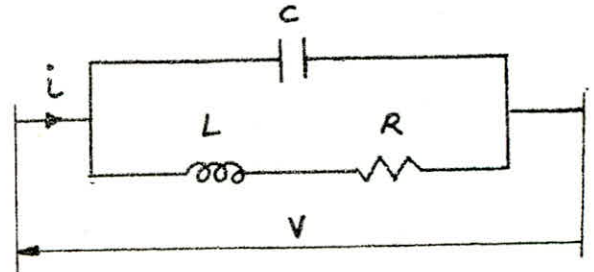
Le courant \bar{I} qui traverse la capacité sous la tension \bar{V} est en quadrature avancée sur celui-ci, son impédance est :

$$\bar{Z} = \frac{V}{I} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Exemples de circuits électriques : circuits R-L-C.



(a)



(b)

Ce qui donne pour l'impédance du circuit :

a/. $Z = Z_R + Z_L + Z_C$

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)$$

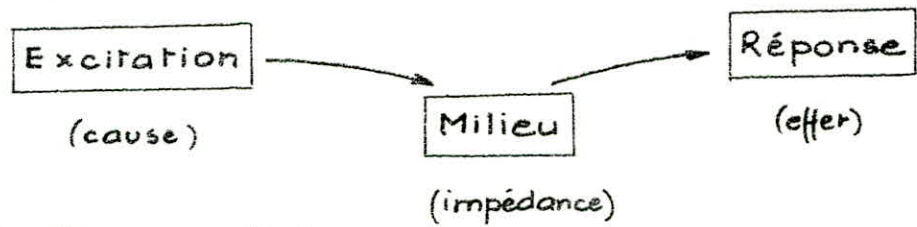
b/. $Z_1 = Z_L + Z_R$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L + Z_R}$$

$$\text{d'où } Z = \frac{R + j[L\omega(1 - L\omega^2) - R^2\omega]}{(1 - L\omega^2)^2 + R^2\omega^2}$$

II.2. Généralisation de la notion d'impédance - Analogies électromécaniques :

L'impédance d'une manière générale est le rapport d'une tension électrique qui peut être considérée comme une cause au courant qui en est l'effet :



$$\text{Cause} = \text{Impédance} \times \text{Effet.}$$

La similitude entre la tension et le courant d'une part et la force et la vitesse d'autre part, conduit à définir l'impédance mécanique comme le rapport de la force à la vitesse (analogie de Maxwell) - Cette représentation n'est pas la seule possible, l'analogie proposée par Darrieus est souvent préférée car elle donne des schémas mécaniques évocateurs.

Ce parallélisme permet de représenter analogiquement le comportement d'un système mécanique par celui du système équivalent.

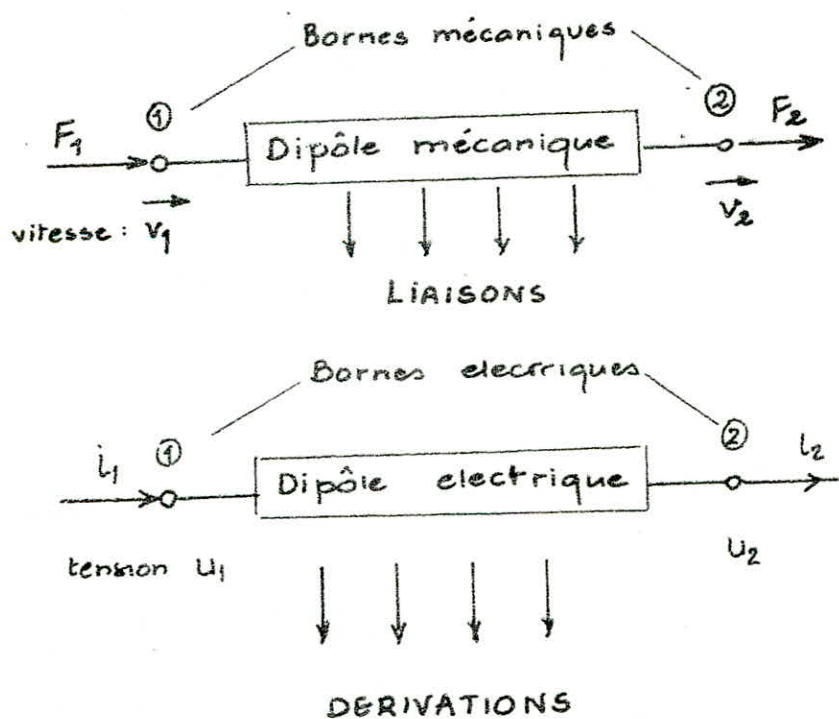
Les considérations précédentes nous permettent d'établir une correspondance claire entre les dipôles mécaniques et les dipôles électriques analogues :

- A un noeud mécanique correspond un noeud électrique.
- Au système de référence mécanique de vitesse nulle correspond le sol au potentiel zéro.

À la vitesse d'un noeud quelconque du système mécanique correspond le potentiel du noeud électrique analogue.

Pour un système électrique, les éléments sont disposés en série si le courant se conserve d'un élément à l'autre et les tensions s'ajoutent et inversement pour la disposition en parallèle. De même nous dirons que les éléments d'un système mécanique sont en série si la force s'y conserve et les vitesses s'ajoutent, et en parallèle si la vitesse se conserve et les forces s'ajoutent. Cette convention revient à adopter l'analogie de Darrieus (force - courant) avec laquelle nous travaillerons dans la suite du travail.

On aboutit à la correspondance de la figure entre le dipôle mécanique et électrique:



Exemples :

Montages serie-parallèle ; représentation à l'aide de l'analogie de Darrieus.

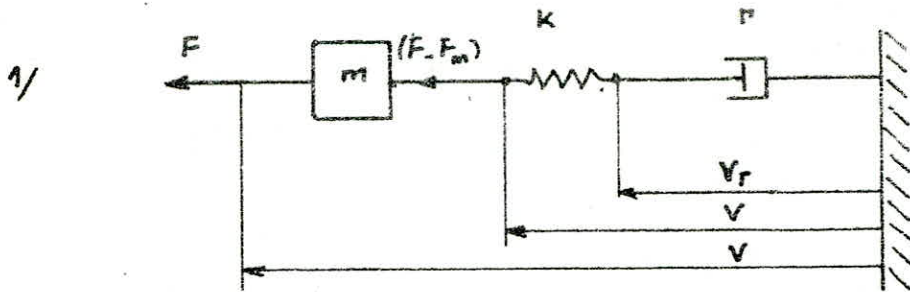


Schéma mécanique :

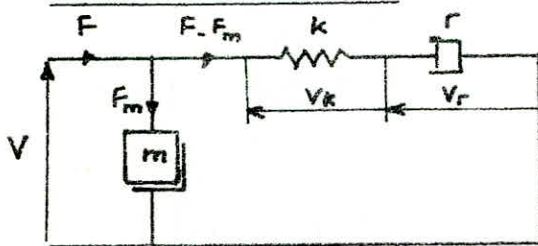


Schéma électrique :

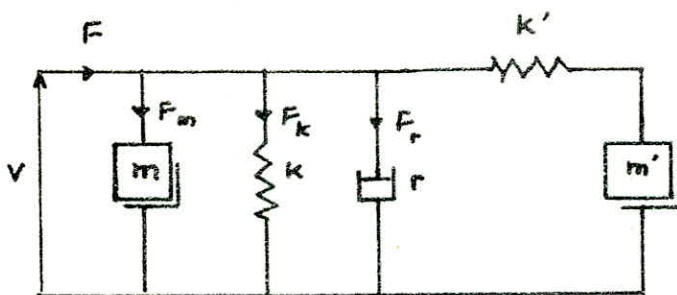
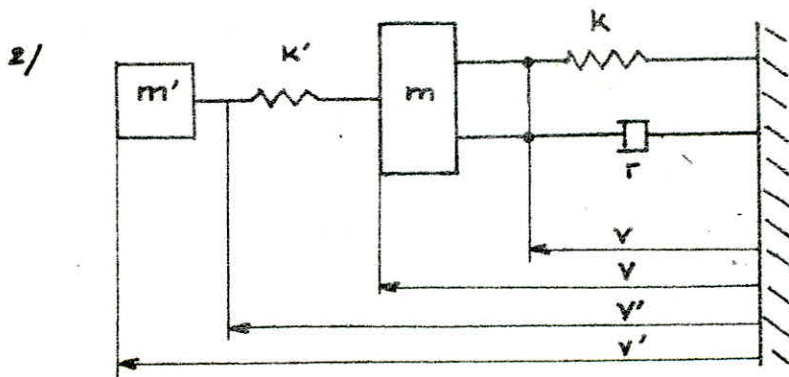
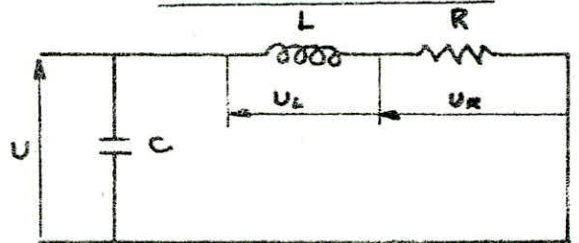


Schéma mécanique

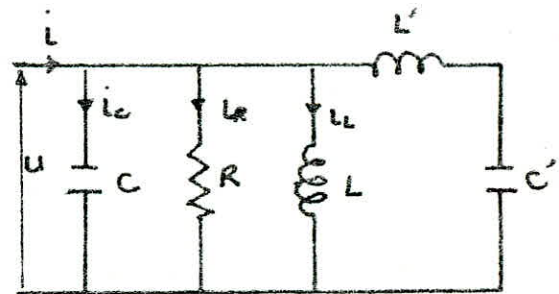


Schéma électrique

Récapitulation des analogies :

Grandeurs Mécaniques	Grandeurs électriques	
	Analogie F-V (Maxwell)	Analogie F-i (Darrieus)
Force	Tension	Courant
Vitesse	Courant	Tension
Coefficient de frottement	Resistance	Conductance
Souplesse	Capacité	Inductance
Masse	Inductance	Capacité

Les éléments ou dipôles mécaniques élémentaires utilisés sont : masse - ressort - amortisseur, dont les impédances sont les suivantes :

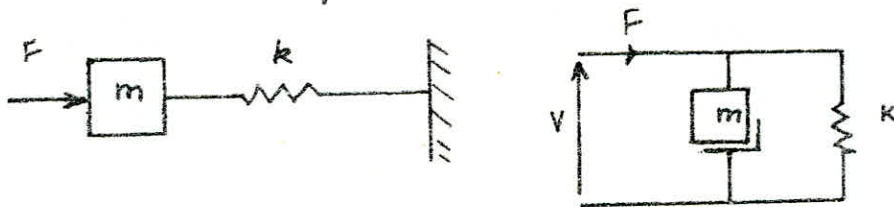
masse m : $Z_m = j\omega m$

ressort k : $Z_k = -j \frac{\omega}{k}$

Amortisseur r : $Z_r = r$

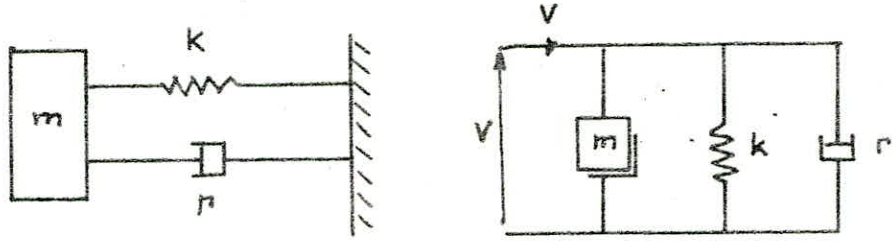
Exemples :

y Resonateur mécanique :



son impédance $Z = \frac{F}{V} = j\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)$

2/ Circuit résonnant avec amortissement visqueux :



l'impédance : $Z = \frac{F}{v} = r + j\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)$

REMARQUE :

Nous avons défini l'impédance comme étant la cause sur un effet, ce qui donne pour l'impédance mécanique, le rapport d'une force à une vitesse, et qui conduit à des lois de composition différentes selon que l'on travaille en analogie de Maxwell ou de Darrieus, car le rapport $Z = \frac{\text{Force}}{\text{vitesse}}$ correspond dans la première analogie à une impédance électrique, tandis que dans la seconde à une admittance.

Puisque dans la suite nous travaillerons en analogie de Darrieus (F-i), nous adopterons donc la loi de composition d'impédance suivante :

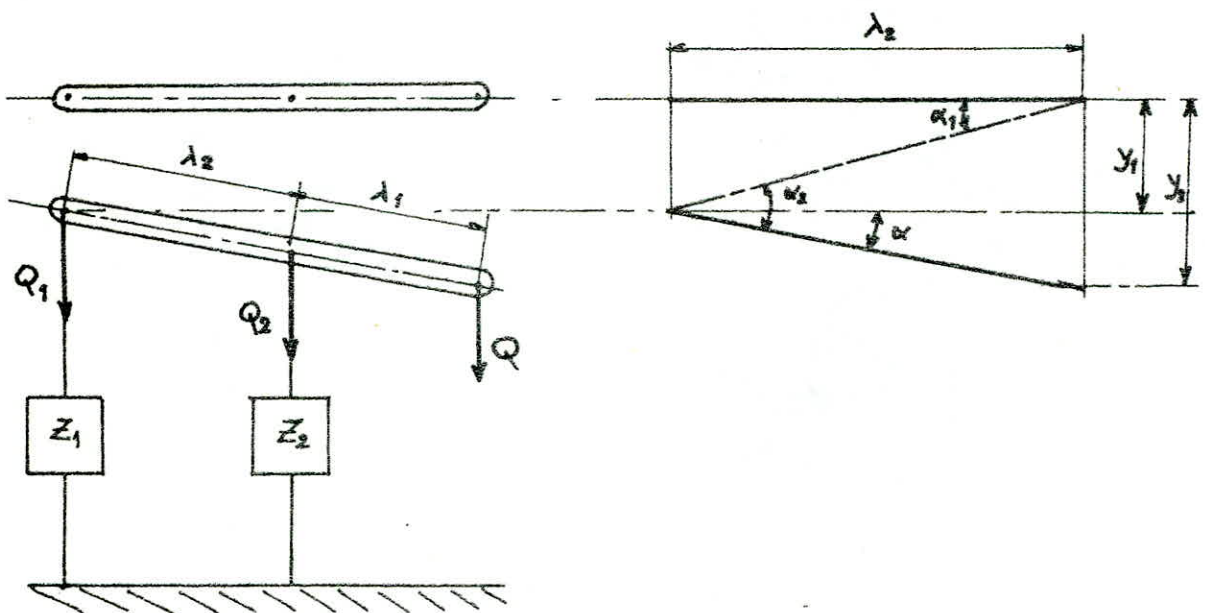
• Association en série : $\frac{1}{Z} = \sum \frac{1}{Z_i}$

• Association en parallèle : $Z = \sum Z_i$

III - Notion d'impédance appliquée aux systèmes comportant des leviers :

Les leviers étudiés seront considérés comme des organes de liaison entre les différents éléments mécaniques, ils seront considérés comme étant sans masse.

III-1. Systèmes à leviers non articulés :



Il s'agit de réduire les forces Q_1 et Q_2 à la force Q ou de trouver l'impédance équivalente sur laquelle agit la force Q .

$$Q_1 = Z_1 v_1 = Z_1 y_1 p \quad (v = y p)$$

$$Q_2 = Z_2 v_2 = Z_2 y_2 p$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = Z_1 y_1 p + Z_2 y_2 p$$

$$= Z_1 y_1 p + Z_2 (y_1 + \alpha \lambda_2) p$$

$$Q = (Z_1 + Z_2) y_1 p + Z_2 \lambda_2 \alpha p = Z_1 y_1 p + Z_2 y_2 p$$

$$\begin{aligned}
 Q(\lambda_1 + \lambda_2) &= Q_2 \lambda_2 \\
 &= z_2 y_2 p \lambda_2 \\
 &= z_2 \lambda_2 \lambda_2 p \alpha_2 \quad (y_2 = \lambda_2 \alpha_2) \\
 &= z_2 \lambda_2^2 p \alpha_2 \\
 \text{d'où } \alpha_2 &= \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)}{z_2 \lambda_2^2 p}
 \end{aligned}$$

$$Q = z_1 p y_1 + z_2 p y_2$$

$$\begin{cases}
 y_1 = \lambda_2 \alpha_1 \\
 y_2 = \lambda_2 \alpha_2
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= z_1 \lambda_2 p \alpha_1 + z_2 \lambda_2 p \alpha_2 \\
 &= z_1 \lambda_2 p \alpha_1 + z_2 \lambda_2 p \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)}{z_2 \lambda_2^2 p} \\
 &= z_1 \lambda_2 p \alpha_1 + \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_2}
 \end{aligned}$$

$$Q \lambda_2 = z_1 \lambda_2^2 p \alpha_1 + Q \lambda_1 + Q \lambda_2 \quad \text{d'où } \alpha_1 = -\frac{\lambda_1 Q}{\lambda_2^2 z_1 p}$$

$$\alpha = \frac{y - y_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{y_2 - y_1}{\lambda_2}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[y - \left(-\frac{\lambda_1 Q}{\lambda_2 p z_1} \right) \right] = \frac{1}{\lambda_2} \left[\frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_2 p z_2} + \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_2 p z_1} \right]$$

$$\lambda_2 y + \frac{\lambda_1 Q}{p z_1} = \frac{Q(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_2 p z_2} + \frac{\lambda_1 Q}{\lambda_2 p z_1} (\lambda_1 + \lambda_2)$$

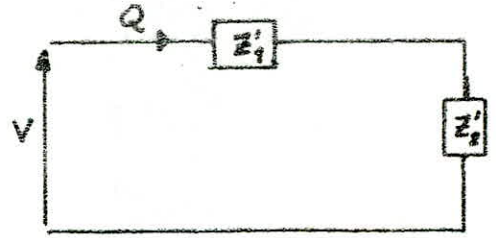
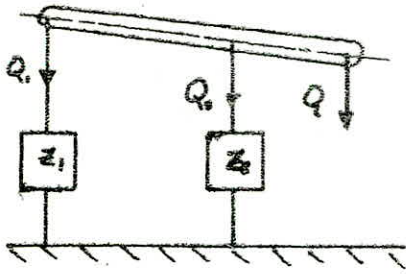
$$y = \left[\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} \right)^2 \frac{1}{p z_2} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \frac{1}{p z_1} \right] Q$$

$$\frac{p y}{Q} = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} \right)^2 \frac{1}{z_2} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z}$$

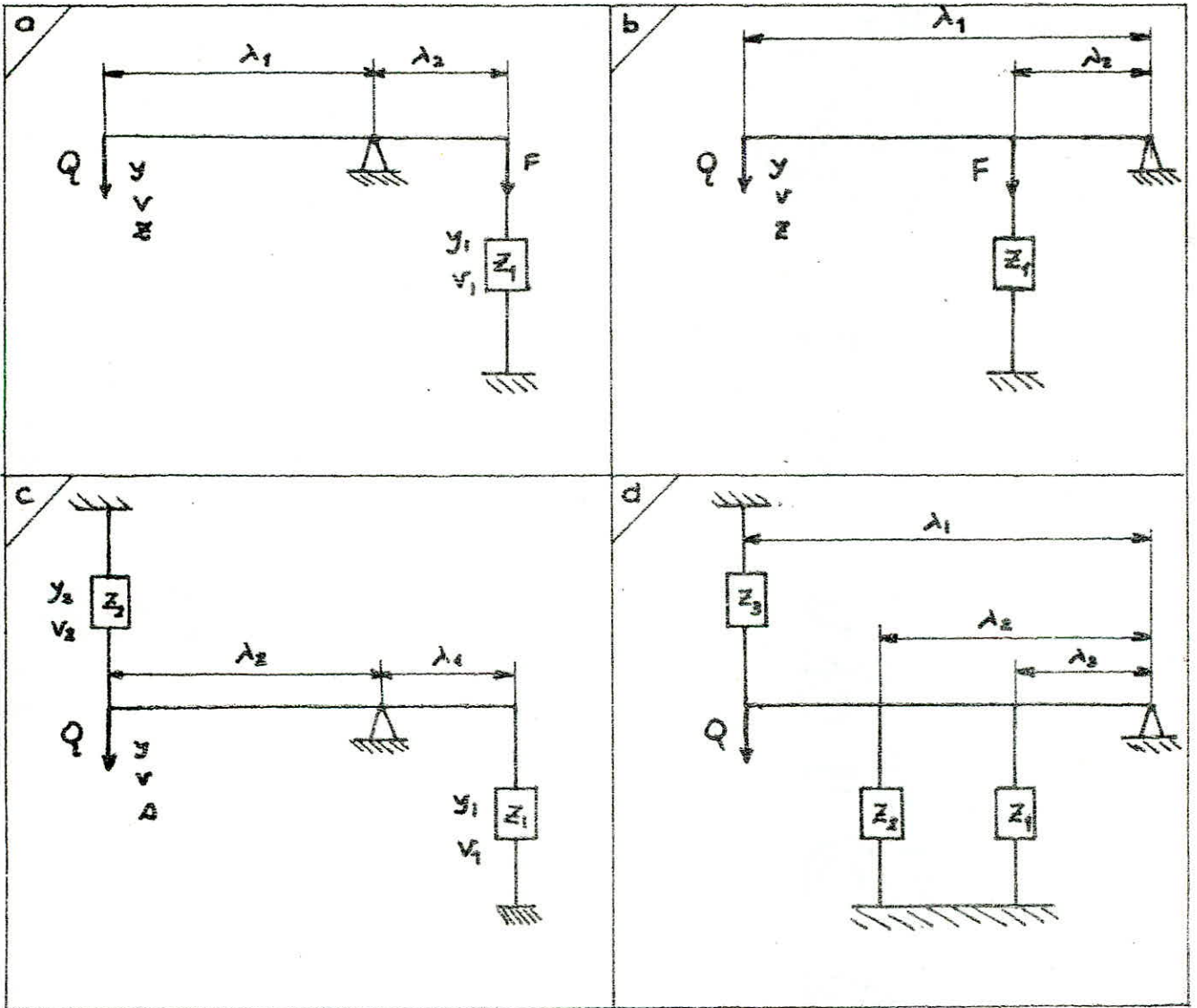
$$\text{d'où } \frac{1}{z} = \frac{1}{z'_1} + \frac{1}{z'_2}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} z'_1 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 z_1 \\ z'_2 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^2 z_2 \end{cases}$$

On obtient donc le schéma mécanique équivalent suivant pour le système avec levier non articulé.



III.2. Systèmes à leviers articulés :



De même que pour les leviers non articulés, la réduction se fait à la force Q :

a/ et b/

$$\left. \begin{array}{l} Q \lambda_1 = F \lambda_2 \\ F = Z_1 v_1 \end{array} \right\} \Rightarrow Q \lambda_1 = Z_1 v_1 \lambda_2$$

$$\frac{y}{y_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{y}_1} = \frac{v}{v_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

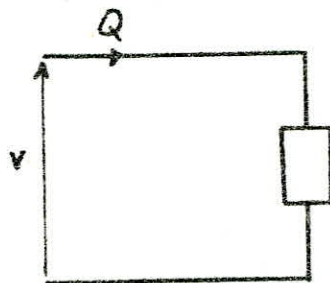
$$\text{d'où } v_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$$

$$Q \lambda_1 = Z_1 \lambda_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v$$

$$= Z_1 \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} v \Rightarrow \frac{Q}{v} = Z = Z_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2$$

on obtient donc le schéma équivalent suivant :

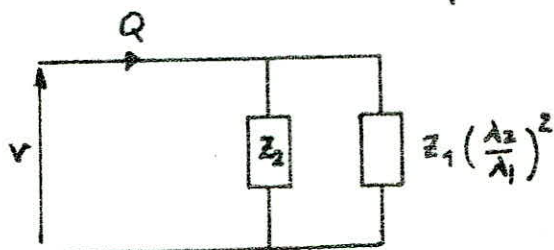
$$\text{avec } Z = Z_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2$$



c/ on applique la même démonstration que précédemment seulement on y ajoute l'impédance Z_2 , car en ce point du levier les vitesses sont identiques donc les éléments considérés sont en parallèle :

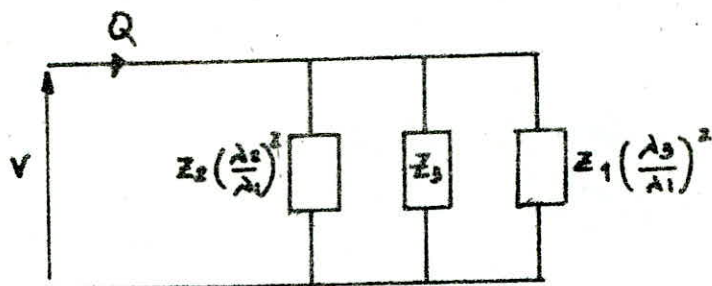
$$\text{d'où } Z = Z_2 + Z_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2$$

on obtient alors le schéma équivalent suivant :

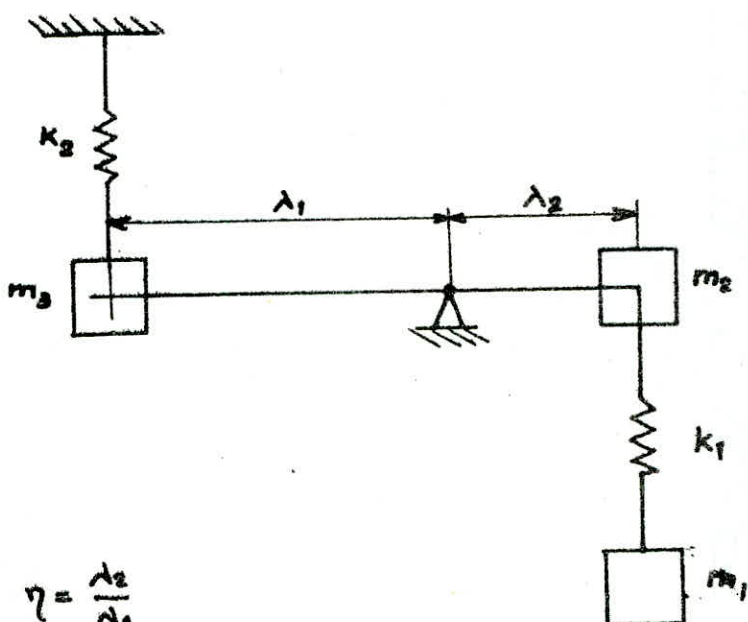


d/ De même que précédemment :

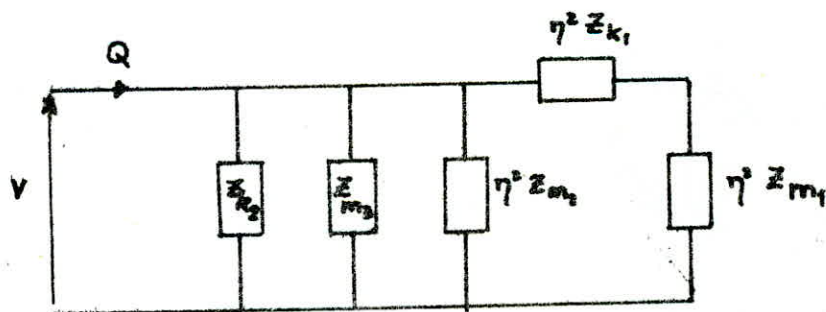
$$Z = Z_3 + Z_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 + Z_1 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2$$



Exemple :



soit $\eta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$



IV Théorie physique des filtres mécaniques :

Le mouvement complet d'un système à deux degrés de liberté peut présenter un aspect très complexe ; aucune de ces parties ne se déplace en un mouvement harmonique simple. Dans le cas de mouvements d'équation linéaire, le mouvement le plus général est la superposition de deux mouvements harmoniques simples appelés modes. En fixant convenablement les conditions initiales, nous pouvons obtenir un système qui oscille dans un mode ou dans un autre. En présence d'un seul mode, chaque partie mobile est en mouvement harmonique simple. Toutes les parties oscillent à la même fréquence.

Chaque mode présente sa propre fréquence caractéristique et le système présente une configuration caractéristique donnée par le rapport des amplitudes.

• Mode 1: $\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$$\psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\psi_b(t) = \frac{B_1}{A_1} \psi_a(t)$$

• Mode 2: $\psi_a(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

$$\psi_b(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b(t) = \frac{B_2}{A_2} \psi_a(t)$$

Le mouvement le plus général du système est une superposition des modes :

$$\Psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\Psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Dans un système à N degrés de liberté, il y a toujours exactement N modes. Chaque mode présentant sa propre fréquence ω et sa propre allure caractérisée par les rapports d'amplitudes.















IV-1 Exemple : Modes d'une corde plombée :

La figure montre une série de systèmes de cordes plombées. Le premier a $N=1$ degré de liberté, le second en a deux etc... Dans chaque cas la figure montre la configuration des modes normaux.

L'ordre dans lequel elles se présentent correspond aux fréquences croissantes des modes successifs.

Si on appelle noeud l'endroit où la corde coupe l'axe d'équilibre (à l'exception des extrémités), le premier mode ne présente aucun noeud, le second en présente un, etc... Le mode le plus élevé présente toujours le nombre de noeuds le plus élevé à savoir $(N-1)$, obtenu par l'aspect en zigzag, où l'on coupe l'axe d'équilibre à chaque fois que l'on passe d'une masse à la suivante.

La figure montre l'aspect de la corde en fonction du mode avec un nombre croissant de degrés de liberté.

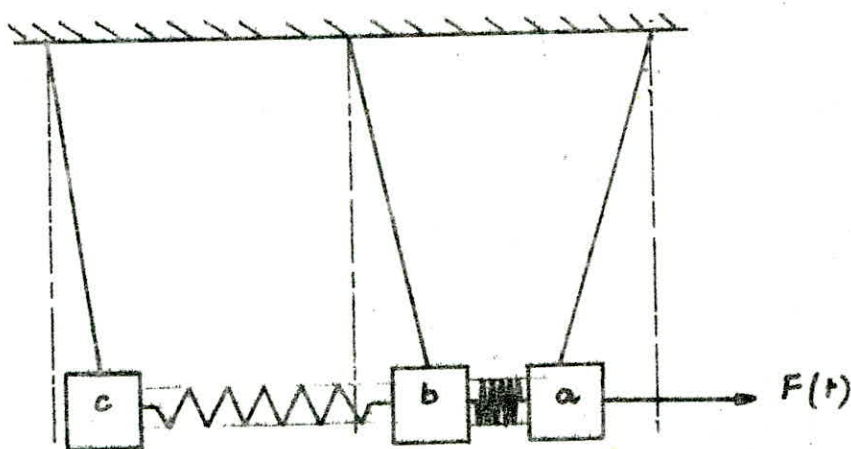
Mode N	1	2	3	4	N
1					
2					
3					
...					
N					

Quand nous excitions un système à une certaine fréquence ω , le mouvement en régime permanent de chaque partie mobile est la superposition de contributions dues à toutes les résonnances. Supposons que ω se trouve quelque part entre la plus petite et la plus grande des fréquences de mode mais qu'elle diffère d'une résonnance quelconque. Des modes différents contribuent avec des signes différents selon la partie mobile que nous considérons. Lorsque nous augmentons ω nous croisons la résonnance, le signe de la contribution élastique due à ce mode change. Lorsque la fréquence continue à augmenter, les différentes parties mobiles voient leur amplitude augmenter ou décroître d'une façon plus ou moins compliquée en croisant les modes successifs

Pour finir, croisons la fréquence du mode le plus élevé. Ceci fait qu'il n'y a plus de changements de signe dans les contributions; donc les parties mobiles gardent plus ou moins la forme correspondant au mode le plus élevé.

Si les éléments du système sont alignés et si nous l'excitons par l'une de ses extrémités à une fréquence supérieure à la fréquence du mode le plus élevé, la partie mobile voisine de cette extrémité présente l'amplitude la plus importante, sa voisine une amplitude plus petite etc... L'amplitude est atténuée lorsque la distance à l'extrémité d'entrée du système augmente. Le système est alors appelé un filtre.

IV-2. Deux pendules couplés forment un filtre mécanique passe bande:



Supposons que nous excitons l'extrémité d'entrée (a) à une fréquence supérieure à la fréquence de mode ω_2 . Le pendule (a) est directement couplé à la force d'excitation.

En régime permanent la force de rappel sur le pendule (a) est en partie due à la force d'excitation. Ce qui n'est pas le cas du pendule (b), sa force de rappel n'étant due qu'au ressort et à la gravité; la force de rappel la plus importante correspondant au mode le plus élevé ou les masses se déplacent de façon opposées. Mais cette force ne suffit pas pour la valeur de ω_0 si la configuration est précisément celle du mode le plus élevé ou la grandeur $|B|$ de l'oscillation du pendule (b) est la même que la grandeur $|A|$ de l'oscillation du pendule (a). La seule façon pour le pendule (b) de posséder la même force de rappel par unité de masse que le pendule (a) est d'osciller avec une amplitude plus faible $|B| < |A|$: le déplacement de (b) doit être atténué par rapport à celui de (a).

Montrons que pour le filtre mécanique passe bande, le rapport de l'amplitude de sortie à l'amplitude d'entrée est donné par :

$$\frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}$$

$$\text{avec : } \omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{c}{M}$$

Les équations du mouvement des 2 pendules sont :

$$\begin{cases} M \ddot{\psi}_a = -\frac{Mg}{l} \psi_a - c(\psi_a - \psi_b) + F_0 \cos \omega t \\ M \ddot{\psi}_b = -\frac{Mg}{l} \psi_b + c(\psi_a - \psi_b) \end{cases}$$

$$\text{Mode 1 : } \psi_a = \psi_b \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \psi_1 = \frac{1}{2} (\psi_a + \psi_b)$$

$$\text{Mode 2 : } \psi_a = -\psi_b \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2c}{M} \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (\psi_a - \psi_b)$$

En faisant la combinaison linéaire des équations précédentes

on obtient :

$$\begin{cases} M\ddot{\psi}_1 = -\frac{Mg}{l} \psi_1 + \frac{1}{2} F_0 \cos \omega t \\ M\ddot{\psi}_2 = -\left(\frac{Mg}{l} + \frac{2c}{M}\right) \psi_2 + \frac{1}{2} F_0 \cos \omega t \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} -\omega^2 \psi_1 = -\omega_1^2 \psi_1 + \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \\ -\omega^2 \psi_2 = -\omega_2^2 \psi_2 + \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left(\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} \right) \\ \psi_2 = \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left(\frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right) \end{cases}$$

$$\text{comme } \begin{cases} \psi_a = \psi_1 + \psi_2 \\ \psi_b = \psi_1 - \psi_2 \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} \psi_a = \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \\ \psi_b = \frac{F_0}{2M} \cos \omega t \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \omega^2} \right] \end{cases}$$

$$\text{d'où } \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\omega^2}$$

Lorsque ω est égal à l'une ou l'autre des valeurs de résonance ω_1 ou ω_2 , le rapport des amplitudes serait respectivement $+1$ et -1 .

Lorsque $\omega < \omega_1$, le rapport décroît de 1 à $\frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}$; donc des oscillations correspondant à des fréquences d'excitation au dessous de la fréquence de coupure inférieure sont atténuées.

Lorsque $\omega > \omega_2$ le rapport reste négatif, il décroît en valeur absolue lorsque ω augmente.

Le système précédent de pendules couplés représente donc un filtre mécanique passe-bande, puisqu'il atténue les excitations de fréquences inférieures à celle de coupure la plus faible ainsi que celles supérieures à la fréquence de coupure la plus élevée.

V.3 Définitions de base relatives aux filtres:

Coupeure haute fréquence:

La fréquence du mode le plus élevé est appelée fréquence haute de coupure pour les oscillations forcées. Une force d'excitation appliquée à une extrémité à une fréquence supérieure à la fréquence de coupure crée un mouvement d'amplitude qui ne passe pas au travers du filtre, il est coupé. Nous disons que le système est excité au-dessus de sa fréquence de coupure.

Coupeure basse fréquence:

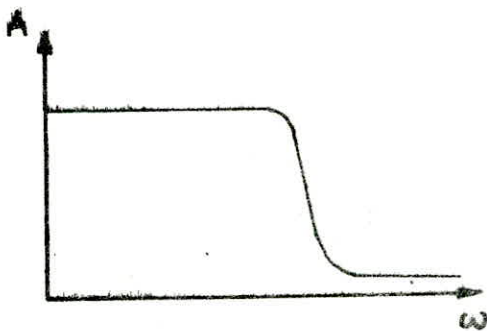
Si la fréquence d'excitation est bien inférieure à la fréquence naturelle la plus basse, l'amplitude de sortie sera bien inférieure à l'amplitude d'entrée. La fréquence du mode le plus bas est aussi une fréquence de coupure.

La bande de fréquences comprises entre les fréquences de coupure inférieure et supérieure est appelée bande passante du filtre. Pour des fréquences d'excitation se trouvant dans cette bande passante, l'amplitude de sortie est inférieure à l'amplitude d'entrée.

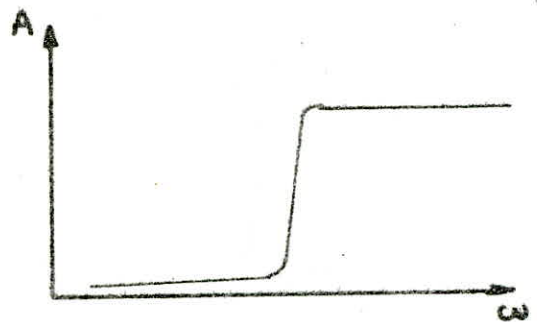
Différentes sortes de filtres :

Les courbes représentent les amplitudes de sortie en fonction de la fréquence.

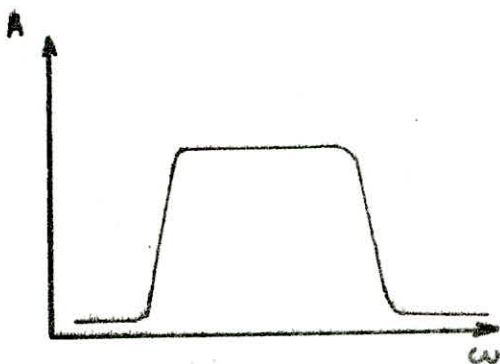
Filtre passe bas :



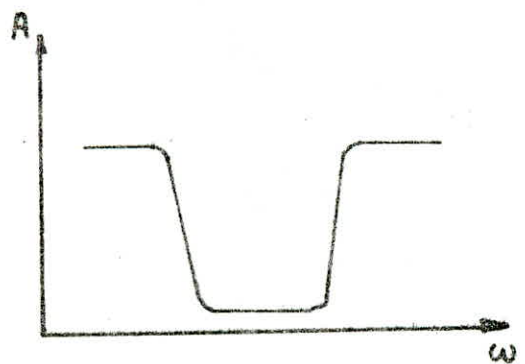
Filtre passe haut :



Filtre passe bande



Filtre coupe bande.



Les filtres réels sont des quadripôles (2 bornes d'entrée et 2 bornes de sortie) qui dans la bande passante présentent un

affaiblissement aussi faible que possible, alors que dans la bande d'arrêt l'affaiblissement est aussi fort que possible. La fréquence de coupure sépare les bandes passante et d'arrêt.

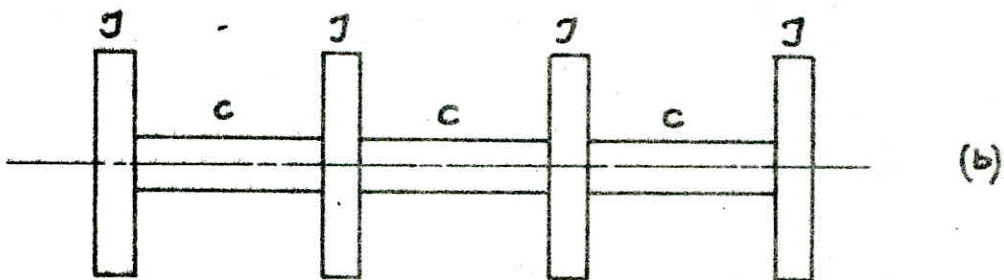
- Les filtres passe bas (FPB) laissent passer les fréquences comprises entre la fréquence zéro et une fréquence déterminée.
- Les filtres passe haut (FPH), laissent passer les fréquences comprises entre une fréquence déterminée et l'infini.
- Les filtres passe bande (FB), laissent passer les fréquences comprises entre 2 fréquences déterminées.
- Les filtres à bande d'arrêt (FAB), arrêtent une bande de fréquences comprises entre 2 fréquences déterminées.
- Les filtres à plusieurs bandes : qui ont plusieurs bandes passantes.

V. Détermination de la bande de passage des filtres mécaniques à l'aide de la mécanique classique:

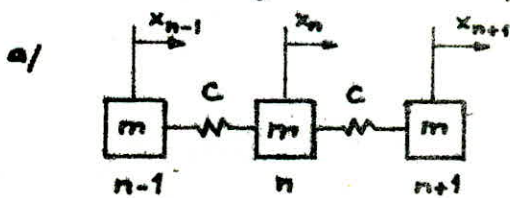
V-1. Filtre passe bas:

a) Système de N masses identiques reliées par des ressorts de rigidité c .

b) Filtre d'oscillations de torsion schématisé par un arbre long muni de disques.



Nous allons utiliser le théorème de Lagrange. Pour cela isolons le système comprenant la nième cellule.

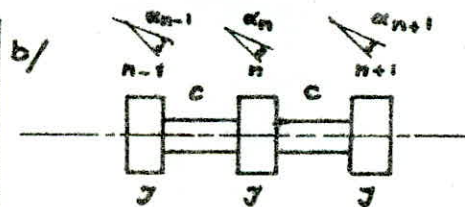


Energie cinétique:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2$$

Energie potentielle:

$$\Pi = \frac{1}{2} c \left\{ (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_{n+1})^2 \right\}$$



$$T = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}_n^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c \left\{ (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2 + (\alpha_n - \alpha_{n+1})^2 \right\}$$

D'où le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - \frac{1}{2} c \left\{ (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_{n+1})^2 \right\} \quad \Bigg| \quad L = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}_n^2 - \frac{1}{2} c \left\{ (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2 + (\alpha_n - \alpha_{n+1})^2 \right\}$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

$$m \ddot{x}_n - c x_{n-1} + 2c x_n - c x_{n+1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_n} - \frac{\partial L}{\partial \alpha_n} = 0$$

$$J \ddot{\alpha}_n - c \alpha_{n-1} + 2c \alpha_n - c \alpha_{n+1} = 0$$

On a donc les mêmes équations du mouvement.

En réalité le système est à N équations. Des considérations physiques poussent à admettre que les oscillations naturelles doivent être des ondes stationnaires, ce qui nous amène à poser :

$x_0 = a_0 e^{j\omega t}$: la première masse étant animée d'un mouvement imposé

$x_n = a_n e^{j\omega t}$: le mouvement de toutes les autres masses sera de ce type.

Les coefficients a_n étant des amplitudes complexes.

on a donc : $\ddot{x}_n = -\omega^2 x_n$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$: tous les maillons de la chaîne étant semblables les uns aux autres, le rapport est indépendant de l'indice n .

on pose $\rho = e^{-p}$ avec $p = \alpha + j\beta$.

$$\frac{x_n}{x_0} = \rho^n = e^{-np} \Rightarrow x_n = a_0 e^{-n\alpha} e^{j(\omega t - n\beta)}$$

en remplaçant dans l'équation du mouvement :

$$-m\omega^2 x_n - c e^p x_n - c e^{-p} x_n + 2c x_n = 0$$

$$-m\omega^2 x_n - ce^p x_n - ce^{-p} x_n + 2c x_n = 0$$

$$\left[-m\omega^2 + 2c \left(1 - \frac{e^p + e^{-p}}{2} \right) \right] x_n = 0$$

$$-m\omega^2 + 2c(1 - \cos 2\theta) = 0 \quad \text{avec } \theta = \frac{p}{2j} = \frac{\beta}{2} - j\frac{\alpha}{2}$$

$$-m\omega^2 + 4c \sin^2 \theta = 0$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{m}{c}}$$

il y aura donc une solution que si: $0 \leq \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{m}{c}} \leq 1$

d'où

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Lorsque l'équation est satisfaite θ est un nombre réel alors,

$$\alpha = 0 \text{ et } \beta = 2\theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_0 + k\pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_0 = \text{Arcsin} \left(\pm \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{m}{c}} \right) \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{on a alors: } x_n = a_0 e^{j(\omega t - 2n\theta)}$$

Ce circuit constitue un filtre passe bas.

Il a la propriété de transmettre sans affaiblissement toutes les fréquences comprises entre $\omega=0$ et $\omega=\omega_c$

La condition $\omega \leq \omega_c$ est la condition pour laquelle il existe une valeur réelle de θ , on a alors $\alpha = 0$

$$\text{d'où } \frac{x_{n+1}}{x_n} = e^{-2j\theta} \quad \rightarrow \quad \left\| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\| = 1$$

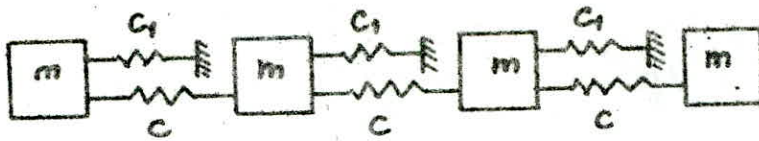
Pour $\omega > \omega_c$ on a $\alpha \neq 0$, et d'après la formule suivante

$$x_n = a_0 e^{-n\alpha} e^{j(\omega t - n\beta)}$$

la vibration mécanique sera atténuée en passant d'une cellule à l'autre

V.2. Filtre mécanique passe bande :

a/.



$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_1 x_n^2 + \frac{1}{2} c \{ (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_{n+1})^2 \}$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_n^2 - \frac{1}{2} c_1 x_n^2 - \frac{1}{2} c \{ (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_{n+1})^2 \}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0$$

$$m \ddot{x}_n + c_1 x_n - c(x_{n-1} - x_n) + c(x_n - x_{n+1}) = 0$$

$$m \ddot{x}_n - c x_{n-1} + (2c + c_1) x_n - c x_{n+1} = 0$$

Comme précédemment, on obtient :

$$-m\omega^2 x_n - c e^{\rho} x_n - c e^{-\rho} x_n + (2c + c_1) x_n = 0$$

$$\left[-m\omega^2 - 2c \left(1 - \frac{e^{\rho} + e^{-\rho}}{2} \right) + c_1 \right] x_n = 0$$

L'équation est satisfaite si :

$$-m\omega^2 + 2c(1 - \cos 2\theta) + c_1 = 0$$

$$-m\omega^2 + 4c \sin^2 \theta + c_1 = 0$$

$$\sin^2 \theta = \frac{-c_1 + m\omega^2}{4c}$$

$$0 \leq \sin^2 \theta < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{m\omega^2 - c_1}{4c} < 1$$

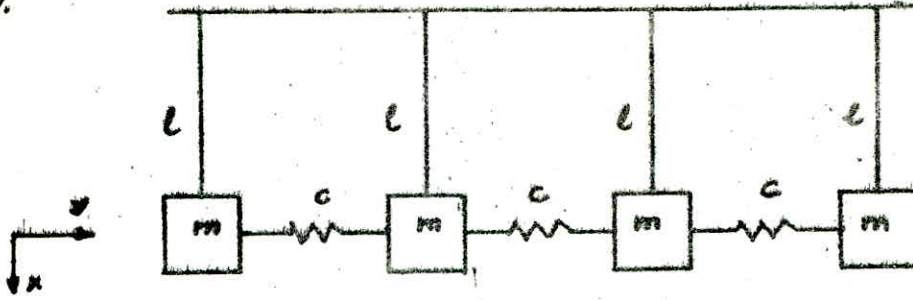
$$0 \leq m\omega^2 - c_1 < 4c$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{4c + c_1}{m}} = \omega_2$$

La bande passante est définie par l'inégalité précédente.

C'est un filtre passe bande qui a la propriété de transmettre seulement les fréquences comprises entre ω_1 et ω_2

b/.



coordonnées de la masse :

$$\begin{cases} x = l \sin \varphi \\ y = l \cos \varphi \end{cases}$$

vitesse

$$\begin{cases} \dot{x} = l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{y} = -l \sin \varphi \dot{\varphi} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_n^2$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k (x_{n+1} - x_n)^2 + \frac{1}{2} k (x_n - x_{n-1})^2 + mgl(1 - \cos \varphi_n)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} k l^2 (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2 + \frac{1}{2} k l^2 (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 + mgl \frac{\varphi_n^2}{2}$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}_n^2 - \frac{1}{2} k l^2 \{ (\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2 + (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2 \} - mgl \frac{\varphi_n^2}{2}$$

$$m \ddot{\varphi}_n + k (-\varphi_{n-1} + 2\varphi_n - \varphi_{n+1}) + \frac{mg}{l} \varphi_n = 0$$

comme précédemment :

$$-m\omega^2 \varphi_n + k (-e^{-P} \varphi_n + 2\varphi_n - e^{-P} \varphi_n) + \frac{mg}{l} = 0$$

$$\left\{ -m\omega^2 + 2k \left(1 - \frac{e^{-P} + e^P}{2} \right) + \frac{mg}{l} \right\} \varphi_n = 0$$

$$\frac{mg}{l} - m\omega^2 + 4c \sin^2 \theta = 0$$

$$\sin^2 \theta = \frac{m\omega^2 - \frac{mg}{l}}{4c}$$

$$0 < \frac{m\omega^2 - \frac{mg}{l}}{4c} < 1$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}} < \omega \leq \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{4c}{m}}$$

La bande passante est définie par l'inégalité précédente.

Nous avons dit précédemment que la zone de passage regroupait les fréquences de résonance. Les valeurs extrêmes étant les fréquences de coupure.

Dans l'exemple du filtre mécanique passe bande, nous ne retrouvons pas les mêmes fréquences de coupure.

Pour la fréquence inférieure de coupure, nous retrouvons la même valeur soit $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$. On pouvait s'y attendre car à la fréquence du mode le plus bas tous les pendules oscillent en phase, la force de rappel étant due uniquement à la gravité; les ressorts ne sont ni tendus ni comprimés.

Quant à la fréquence supérieure de coupure elle est différente. La valeur $\omega^2 = \frac{g}{L} + 2 \frac{c}{M}$ étant la fréquence de coupure pour un système à 2 degrés de liberté et la fréquence $\omega_N^2 = \frac{g}{L} + 4 \frac{c}{M}$ serait la fréquence de coupure pour un système à N degrés avec N suffisamment grand. Cette fréquence représenterait une limite à la fréquence de coupure supérieure pour les systèmes de pendules couplés. Toutes les fréquences de résonance étant comprises dans la plage ω_0, ω_N .

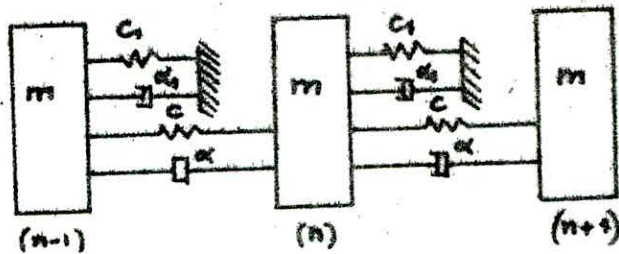
Si l'indice en chiffres romains correspondait au degré de liberté, on aurait la disposition suivante des fréquences de résonance.



V-3. Influence des pertes sur la bande passante :

Cas du filtre passe bande :

Les ressorts n'étant pas parfaits, en plus de la constante de raideur il faut tenir compte des dissipations inévitables.



Soit D la fonction dissipation :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \{ (\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n)^2 + (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1})^2 \} + \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{x}_n^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n} = -\alpha \dot{x}_{n-1} + (2\alpha + \alpha_1) \dot{x}_n - \alpha \dot{x}_{n+1}$$

dans ce cas l'équation de Lagrange est :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_n} - \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_n}$$

soit :

$$m \ddot{x}_n - c x_{n-1} + (2c + c_1) x_n - c x_{n+1} = -\alpha \dot{x}_{n-1} + (2\alpha + \alpha_1) \dot{x}_n - \alpha \dot{x}_{n+1}$$

$$(m \ddot{x}_n - (2\alpha + c_1) \dot{x}_n + 2c x_n) - (c x_{n-1} + \alpha \dot{x}_{n-1}) - (c x_{n+1} + \alpha \dot{x}_{n+1}) + c_1 x_n = 0$$

$$(-m\omega^2 - 4\alpha\omega - 2\alpha_1\omega) x_n + \left\{ 2(c + \alpha\omega) - 2(c + \alpha\omega) \frac{e^{-p} + e^p}{2} \right\} x_n + c_1 x_n = 0$$

$$-m\omega^2 - 2(2\alpha + \alpha_1)\omega + 2(c + \alpha\omega) \left[1 - \frac{e^{-p} + e^p}{2} \right] + c_1 = 0$$

$$-m\omega^2 - 2(2\alpha + \alpha_1)\omega + 4(c + \alpha\omega) \sin^2 \theta + c_1 = 0$$

$$\sin^2 \theta = \frac{m\omega^2 + 2(2\alpha + \alpha_1)\omega - c_1}{4(c + \alpha\omega)}$$

$$0 < \sin^2 \theta \leq 1 \quad \text{d'où} \quad 0 < \frac{m\omega^2 + 2(2\alpha + \alpha_1)\omega - c_1}{4(c + \alpha\omega)} \leq 1$$

$$\bullet \frac{m\omega^2 + 2(2\alpha + \alpha_1)\omega - c_1}{4(c + \alpha\omega)} \geq 0$$

$$m\omega^2 + 2(2\alpha + \alpha_1)\omega - c_1 \geq 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-(2\alpha + \alpha_1) \pm \sqrt{(2\alpha + \alpha_1)^2 + c_1 m}}{m}$$

$$\text{d'où } \omega \geq \frac{\sqrt{(2\alpha + \alpha_1)^2 + c_1 m} - (2\alpha + \alpha_1)}{m}$$

$$\bullet \frac{m\omega^2 + 2(2\alpha + \alpha_1)\omega - c_1}{4(c + \alpha\omega)} \leq 1$$

$$m\omega^2 + 2(2\alpha + \alpha_1)\omega - c_1 \leq 4(c + \alpha\omega)$$

$$m\omega^2 + 2\alpha_1\omega - (4c + c_1) < 0$$

$$\omega_{3,4} = \frac{-\alpha_1 \pm \sqrt{m(4c + c_1) + \alpha_1^2}}{m}$$

$$\text{d'où } \omega \leq \frac{\sqrt{m(4c + c_1) + \alpha_1^2} - \alpha_1}{m}$$

La bande passante devient donc :

$$\sqrt{\frac{c_1}{m} + \left(\frac{2\alpha + \alpha_1}{m}\right)^2} - \left(\frac{2\alpha + \alpha_1}{m}\right) \leq \omega \leq \sqrt{\frac{c_1 + 4c}{m} + \left(\frac{\alpha_1}{m}\right)^2} - \left(\frac{\alpha_1}{m}\right)$$

L'allure de la bande passante est gardée. Il y a seulement un déplacement de celle-ci vers la gauche de l'axe des fréquences.

Le type de filtre ne dépend pas d'éléments dissipatifs.

C'est pour cela que l'étude théorique poursuivie ne dépend que d'éléments réactants soit : masses et ressorts.

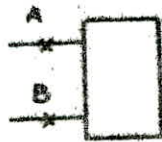
VI. Dipôles et quadripôles mécaniques en régime

sinusoidal :

VI.1. Dipôles : définition et réduction à une impédance unique

un dipôle élémentaire établit une correspondance entre les valeurs instantanées de variables d'entrée et de sortie indépendantes.

Un dipôle ne communique avec l'extérieur que par deux bornes A et B.



Un dipôle est passif lorsque les échanges d'énergie avec l'extérieur, mis à part la chaleur dégagée par frottements, se fait par A et B exclusivement.

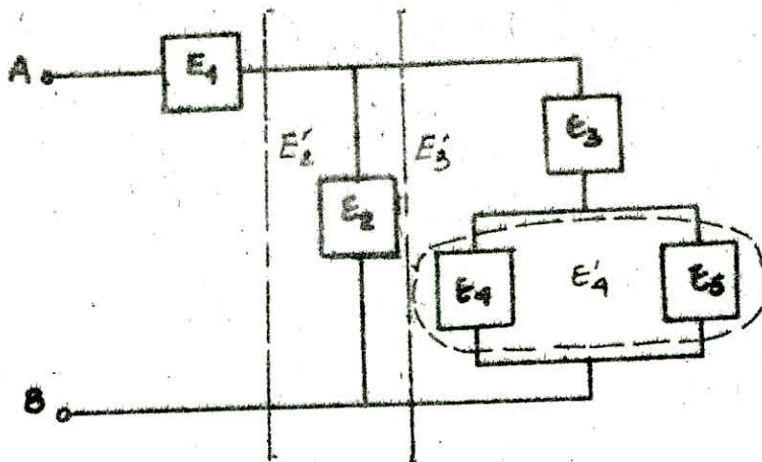
Les éléments passifs ne peuvent que modifier les signaux qui leur sont appliqués sans en engendrer.

Réduction à une impédance unique :

En électricité l'application des lois de Kirchhoff permet d'énoncer les règles suivantes : l'impédance d'un ensemble d'éléments passifs mis en série est égale à la somme des impédances des différents éléments. L'admittance d'un ensemble d'éléments passifs placés en parallèle est égale à la somme des admittances des différents éléments.

On pourra appliquer les mêmes lois en mécanique, mis à part l'inversion admittance - impédance due à l'analogie force - courant

Exemple : calcul de l'impédance de l'élément A.B :



Élément équivalent à

4 et 5	$Z_4' = Z_4 + Z_5$
3 et 4'	$Y_3' = Y_3 + Y_4'$
2 et 3'	$Z_2' = Z_2 + Z_3'$
	$Y_{AB} = Y_1 + Y_2'$
	$Y_{AB} = Y_1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{Y_3 + \frac{1}{Z_4 + Z_5}}}$

VI-2. Quadripôles passifs :

Un quadripôle est une partie de réseau qui communique avec l'extérieur seulement par deux paires de bornes.



On peut distinguer l'entrée du quadripôle de sa sortie :

l'entrée étant la paire de bornes à laquelle sont appliqués les signaux.

Le quadripôle est passif, lorsque les échanges d'énergie avec l'extérieur ne se font que par les quatre bornes.

VI.3. Equations fondamentales - Paramètres du quadripôle :



Les quatre grandeurs Q_1, V_1, Q_2, V_2 sont liées par des relations linéaires. Chaque grandeur peut être exprimée en fonction de deux des trois autres grandeurs.

a). Paramètres de chaîne :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [a] \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$[a]$ étant la matrice de chaîne directe du quadripôle.

de même qu'on définit les paramètres de chaîne inverse, en exprimant les grandeurs de sortie en fonction des grandeurs d'entrée.

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = [a_i] \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

b). Paramètres impédance :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} & -Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Les paramètres sont tous homogènes à une impédance.

$[z]$ est la matrice d'impédance du quadripôle.

c/ Paramètres admittance :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ Y_{21} & -Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Les paramètres sont tous homogènes à une admittance.

$[Y]$ est la matrice d'admittance du quadripôle

d/ Paramètres hybrides :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} Q_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$[h]$ et $[g]$ sont des matrices hybrides

e/ Méthode de détermination des paramètres :

$$A = \frac{V_1}{V_2} \Big|_{Q_2=0}$$

$$B = \frac{V_2}{Q_2} \Big|_{V_2=0}$$

$$C = \frac{Q_1}{V_2} \Big|_{Q_2=0}$$

$$D = \frac{Q_2}{Q_2} \Big|_{V_2=0}$$

$$A_i = \frac{V_2}{V_1} \Big|_{Q_1=0}$$

$$B_i = \frac{V_2}{Q_1} \Big|_{V_1=0}$$

$$C_i = \frac{Q_2}{V_1} \Big|_{Q_1=0}$$

$$D_i = \frac{Q_2}{Q_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$Z_{11} = \frac{V_1}{Q_1} \Big|_{Q_2=0}$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{Q_1} \Big|_{Q_2=0}$$

$$Z_{12} = \frac{V_1}{Q_2} \Big|_{Q_1=0}$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{Q_2} \Big|_{Q_1=0}$$

$$Y_{11} = \frac{Q_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$Y_{21} = \frac{Q_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$$

$$Y_{12} = \frac{Q_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

$$Y_{22} = \frac{Q_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$$

Dans le cas de quadripôles passifs, on peut ajouter aux équations de définition des paramètres, celle qui résulte du théorème de réciprocité, ce qui conduit à la relation suivante :

$$AD - BC = 1$$

VI-4. Définitions d'impédances :

a/. Impédance d'entrée :

Lorsqu'une impédance Z_r est branchée du côté (2) :

$V_2 = Z_r Q_2$, on a $\frac{V_1}{Q_1} = \frac{AZ_r + B}{CZ_r + D}$ qui est l'impédance sous laquelle l'ensemble est vu du côté (1).

b/. Impédance en court-circuit et impédance à vide :

Si l'on court-circuite les bornes de sortie du quadripôle, l'impédance d'entrée prendra la valeur : $Z_{1cc} = \frac{B}{D}$

Si les bornes du quadripôle sont en circuit ouvert, l'impédance d'entrée prendra la valeur $Z_{1o} = \frac{A}{C}$

De la même manière si Z_g est l'impédance branchée du côté (1)

$V_1 = -Z_g Q_1$, d'où l'impédance à la sortie : $\frac{V_2}{-Q_2} = \frac{DZ_g + B}{CZ_g + A}$

à vide : $Z_{2o} = \frac{D}{C}$

en court circuit : $Z_{2cc} = \frac{B}{A}$

c/. Inversion du quadripôle - Quadripôle symétrique :

Pour un quadripôle passif symétrique, il existe une relation supplémentaire obtenue en écrivant que les coefficients ne changent pas quand on permute les grandeurs d'entrées et de sortie

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & B \\ C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

d'où $A = D$

Le quadripole est alors défini par 2 paramètres seulement et on a la relation : $A^2 - BC = 1$.

d) Impédance itérative et caractéristique :

Lorsque l'impédance : $\frac{V_1}{Q_1}$ du côté (1) à l'entrée est égale à l'impédance $\frac{V_2}{Q_2}$ à la sortie, cette dernière est l'impédance itérative Z_{C1} à l'entrée définie par :

$$Z_{C1} = \frac{V_2}{Q_2} = \frac{V_1}{Q_1}$$

d'où

$$Z_{C1} = \frac{A Z_{C1} + B}{C Z_{C1} + D}$$

$$C Z_{C1}^2 + (D - A) Z_{C1} - B = 0$$

Tout se passe comme si l'impédance Z_{C1} était branchée directement sans l'intermédiaire du quadripole.

De la même manière, l'impédance itérative à la sortie est donnée par : $C Z_{C2}^2 = (A - D) Z_{C2} - B = 0$

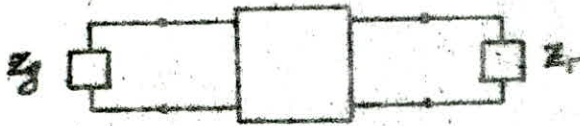
Pour le quadripole symétrique $A = D$, les impédances itératives sont égales ; leur valeur est l'impédance caractéristique

$$Z_{C1} = Z_{C2} = \sqrt{\frac{B}{C}} = Z_C$$

$$Z_C^2 = \frac{B}{C} = \frac{V_1}{Q_1} \Big|_{V_2=0} \times \frac{V_2}{Q_2} \Big|_{Q_1=0} = Z_{C0} \cdot Z_0$$

$$Z_C = \sqrt{Z_0 \cdot Z_{C0}}$$

e/ Impédance image:



Les impédances Z_r et Z_g branchées des côtés (2) et (1), sont ramenées en (1) et en (2) suivant :

$$\frac{A Z_r + B}{C Z_r + D} \quad \text{et} \quad \frac{D Z_g + B}{C Z_g + A}$$

Dans le cas où ces impédances ramenées sont simultanément égales à Z_g et Z_r respectivement, les valeurs particulières correspondantes de Z_g et Z_r sont les impédances images Z_{i1} et Z_{i2} du quadrupole.

Lorsque les impédances sont réelles il y a en amont adaptation d'un générateur d'impédance Z_g , à sa charge constituée par le quadrupole fermé sur un récepteur d'impédance Z_r , et en aval, adaptation du récepteur Z_r au système qui l'alimente constitué par le générateur et le quadrupole.

Ces impédances satisfont aux équations simultanées :

$$Z_{i1} = \frac{A Z_{i2} + B}{C Z_{i2} + D} \quad \text{et} \quad Z_{i2} = \frac{D Z_{i1} + B}{C Z_{i1} + A}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} C Z_{i1} Z_{i2} + D Z_{i1} - A Z_{i2} - B = 0 \\ C Z_{i1} Z_{i2} - D Z_{i1} + A Z_{i2} - B = 0 \end{cases}$$

soit $Z_{i1} Z_{i2} = \frac{B}{C}$ et $\frac{Z_{i1}}{Z_{i2}} = \frac{A}{D}$

on en déduit :

$$Z_{i1} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \quad \text{et} \quad Z_{i2} = \sqrt{\frac{BD}{AC}}$$

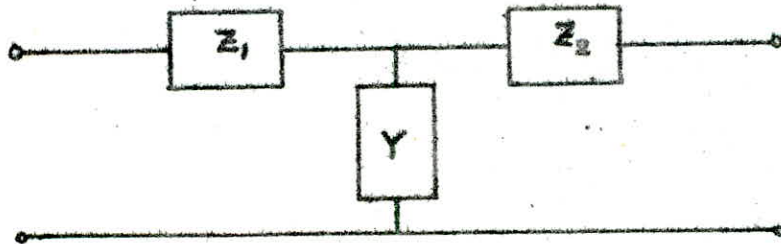
Dans le cas du quadripôle symétrique :

$$Z_{i1} = Z_{i2} = Z_i = \sqrt{\frac{B}{C}} = Z_c$$

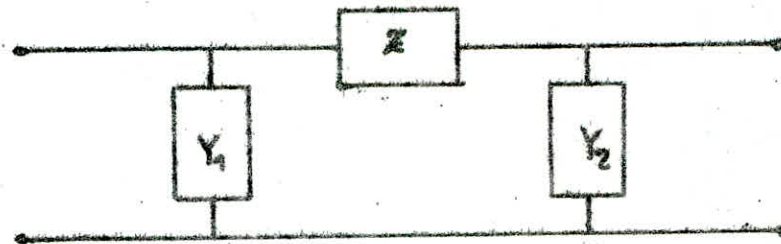
4) Quadripôles équivalents en T et en Π :

Un quadripôle quelconque caractérisé par 3 coefficients indépendants, peut toujours être ramené à un quadripôle constitué par l'admittance Y encadrée par les impédances Z_1 et Z_2 ou un quadripôle formé par l'impédance Z encadrée par les admittances Y_1 et Y_2 , désignés respectivement par les symboles T et Π .

en T



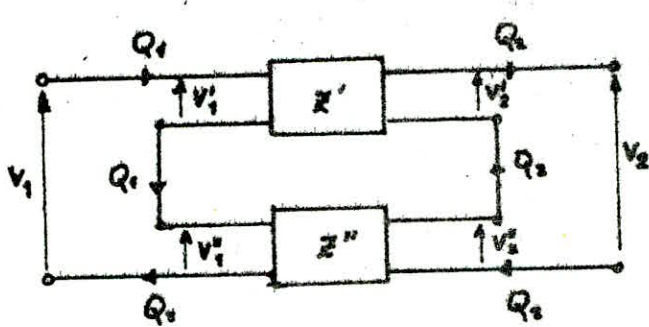
en Π



5.5. Couplage généraux des quadripôles :

On réalise une association de quadripôles en construisant un quadripôle unique à l'aide de deux quadripôles.

a/ En série : elle consiste à placer en série les entrées des quadripôles d'une part et leurs sorties d'autre part.



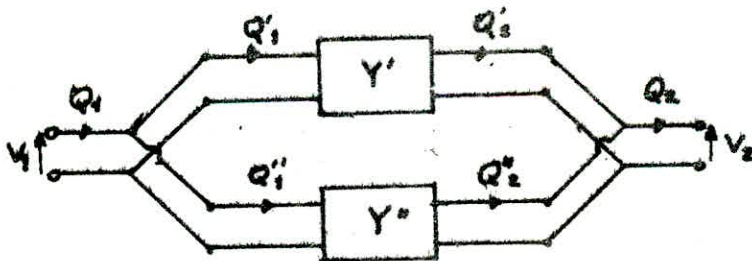
$$\begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} = [Z'] \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix} = [Z''] \begin{bmatrix} Q''_1 \\ Q''_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'_1 \\ V'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V''_1 \\ V''_2 \end{bmatrix} = \{ [Z'] + [Z''] \} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

La matrice d'impédance résultante est donc : $[Z] = [Z'] + [Z'']$

b/ En parallèle : elle consiste à placer en parallèle les entrées des quadripôles d'une part et les sorties d'autre part.



$$\begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{bmatrix} = [Y'] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q''_1 \\ Q''_2 \end{bmatrix} = [Y''] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q''_1 \\ Q''_2 \end{bmatrix} = \{ [Y'] + [Y''] \} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

La matrice d'admittance est donc $[Y] = [Y'] + [Y'']$

c/ En cascade : elle consiste à placer le quadripôle A'' à la sortie du quadripôle A'.



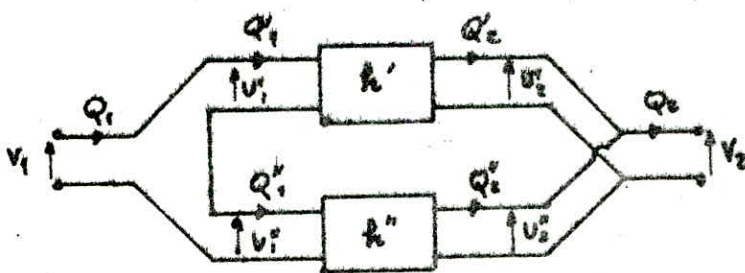
$$\begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [A'] \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} = [A''] \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ Q_3 \end{bmatrix} = [A'] \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} = [A'] [A''] \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

La matrice résultante est donc : $[A] = [A'] [A'']$

d/ En série parallèle : elle consiste à placer les entrées en série et les sorties en parallèle :



$$\begin{bmatrix} U_1' \\ Q_2' \end{bmatrix} = [h'] \begin{bmatrix} Q_1' \\ V_1' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1'' \\ Q_2'' \end{bmatrix} = [h''] \begin{bmatrix} Q_1'' \\ V_1'' \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = Q_1' + Q_1''$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1' \\ Q_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1'' \\ Q_2'' \end{bmatrix} = \{ [h'] + [h''] \} \begin{bmatrix} Q_1 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

La matrice hybride résultante est donc $[h] = [h'] + [h'']$

e/ En parallèle série : elle consiste à placer les entrées en parallèle et les sorties en série. ($Q_1 = Q_1' = Q_1''$)

$$\begin{bmatrix} Q_1' \\ V_2' \end{bmatrix} = [g'] \begin{bmatrix} V_1' \\ Q_1' \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} Q_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = [g''] \begin{bmatrix} V_1'' \\ Q_1'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1' \\ V_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1'' \\ V_2'' \end{bmatrix} = \{ [g'] + [g''] \} \begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix}$$

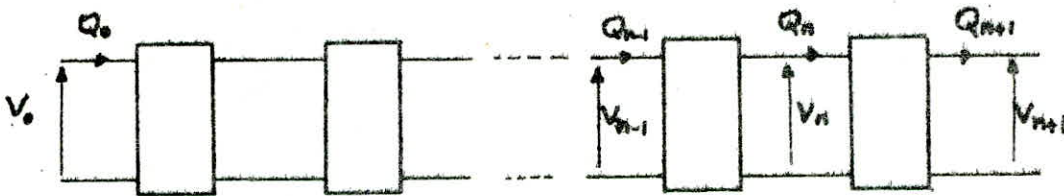
La matrice hybride résultante est donc : $[g] = [g'] + [g'']$

VII - Théorie d'ondes des quadripôles :

La théorie d'ondes des quadripôles est une conception particulièrement adaptée aux filtres de fréquences. Elle est fondée sur l'assimilation du quadripôle à un milieu transmissif, caractérisé par l'impédance caractéristique et à des conditions d'adaptation de la charge.

Chaîne homogène de quadripôles :

Considérons un ensemble de quadripôles identiques branchés en cascade définis par leurs coefficients A, B, C, D (avec $AD - BC = 1$).



En désignant par V_0 et Q_0 les grandeurs à l'entrée de cette chaîne, on aura pour le $(n+1)$ ème quadripôle :

$$\begin{cases} V_n = A V_{n+1} + B Q_{n+1} \\ Q_n = C V_{n+1} + D Q_{n+1} \end{cases}$$

C'est un système d'équations de récurrence qui se résout en posant :

$$\begin{cases} V_n = a e^{ng} \\ Q_n = b e^{ng} \end{cases}$$

avec $g = \alpha + j\beta$.

on obtient

$$\begin{cases} a = a A e^g + b B e^g \\ b = a C e^g + b D e^g \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{a}{b} (1 - A e^g) = B e^g & (*) \\ \frac{a}{b} C e^g = 1 - D e^g \end{cases}$$

En éliminant $\frac{a}{b}$:

$$(1 - A e^g)(1 - D e^g) = B C e^{2g}$$

$$1 - (A + D) e^g = e^{-2g} \quad (\text{avec } AD - BC = 1)$$

$$\frac{A+D}{2} = \frac{e^{-g} + e^g}{2} = \operatorname{ch} g.$$

on a donc $\operatorname{ch} g = \frac{A+D}{2}$ d'où $g = \operatorname{argch} \left(\frac{A+D}{2} \right)$

En développant l'expression de $\operatorname{ch} g$:

$$\operatorname{ch} \alpha \cos \beta + j \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = \frac{A+D}{2}$$

comme A et D sont réels :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} \alpha \cos \beta = \frac{A+D}{2} \\ \operatorname{sh} \alpha \sin \beta = 0 \end{cases}$$

: trois possibilités peuvent alors se présenter : $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ ou $\beta = \pi$.

1/ $\alpha = 0$, $\cos \beta = \frac{A+D}{2}$ valable si $\left| \frac{A+D}{2} \right| \leq 1$, la fréquence est alors dans le domaine de la bande passante.

2/ et 3/ $\beta = 0$ $\alpha \neq 0$: $\frac{A+D}{2} > 1$

$\beta = \pi$ $\alpha \neq 0$: $\frac{A+D}{2} < -1$

alors $\operatorname{ch} \alpha = \frac{A+D}{2}$, on est dans le domaine affaibli.

La grandeur $g = \alpha + j\beta = \pm \operatorname{argch} \frac{A+D}{2}$ qui décrit la propagation est l'exposant de transfert.

Sa partie imaginaire β , déphasage par maillon, donne la vitesse de phase, est l'exposant de déphasage.

Sa partie réelle α , qui décrit l'affaiblissement de l'amplitude est l'exposant d'atténuation.

Cas des quadripôles symétriques :

dans ce cas $A = D$

on a alors $\operatorname{ch} g = A$

la condition de filtrage ou la bande passante sera déterminée par la grandeur A .

L'équation (*) devient alors :

$$\frac{a}{b} \left[1 - \frac{1}{2} (e^{2g} + 1) \right] = B e^g$$

$$\frac{a}{b} [e^{-g} + e^g] = 2B$$

$$\text{soit } \frac{a}{b} = -\frac{B}{\operatorname{sh} g}$$

on a 2 solutions correspondant à $+g$ et à $-g$.

$$\frac{a}{b} = \mp \frac{B}{\operatorname{sh} g} = \mp \frac{B}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 g - 1}} = -\frac{B}{\sqrt{A^2 - 1}} = \mp \sqrt{\frac{B}{C}} = \mp Z_0.$$

Les solutions pour $\frac{a}{b}$ sont donc :

$$\frac{a_1}{b_1} = -Z_0 \quad \text{avec } g = \operatorname{argch} A$$

$$\text{et } \frac{a_2}{b_2} = Z_0 \quad \text{avec } g = -\operatorname{argch} A$$

Les constantes a_1 et a_2 sont déterminées par les conditions d'entrée :

pour $n=0$ on a $V_0 = a_1 + a_2$

$$Q_0 = -\frac{a_1}{Z_c} + \frac{a_2}{Z_c}$$

d'où $a_1 = \frac{V_0 - Z_c Q_0}{2}$

et $a_2 = \frac{V_0 + Z_c Q_0}{2}$

on en déduit :

$$\begin{cases} V_n = \frac{V_0 + Z_c Q_0}{2} e^{-ng} + \frac{V_0 - Z_c Q_0}{2} e^{ng} \\ Q_n = \frac{Q_0 + \frac{V_0}{Z_c}}{2} e^{-ng} + \frac{Q_0 - \frac{V_0}{Z_c}}{2} e^{ng} \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} V_n = V_0 \operatorname{ch} ng - Z_c Q_0 \operatorname{sh} ng \\ Q_n = -\frac{V_0}{Z_c} \operatorname{sh} ng + Q_0 \operatorname{ch} ng \end{cases}$$

dont le système réciproque s'écrit :

$$\begin{cases} V_0 = V_n \operatorname{ch} ng + Z_c Q_n \operatorname{sh} ng \\ Q_0 = \frac{V_n}{Z_c} \operatorname{sh} ng + Q_n \operatorname{ch} ng \end{cases}$$

Ces équations sont celles du quadripôle équivalent aux n premiers maillons. Elles décrivent quel que soit n , le régime de la chaîne qui est entièrement déterminé par l'impédance $Z_r = \frac{V_n}{Q_n}$ sur laquelle elle est fermée après le n ème maillon

alors :
$$\frac{V_0}{Q_0} = \frac{Z_r \operatorname{ch} ng + Z_c \operatorname{sh} ng}{\frac{Z_r}{Z_c} \operatorname{sh} ng + \operatorname{ch} ng}$$

Dans le cas particulier où cette impédance est l'impédance caractéristique : $Z_r = Z_c$

et on a : $V_0 = Z_c Q_0$

Le système précédent nous donne alors :

$$\begin{cases} V_n = V_0 e^{-ng} \\ Q_n = Q_0 e^{-ng} \end{cases} \quad \text{donc } V_n = Z_c Q_n$$

Le rapport de la vitesse à la force en chaque point et en particulier à l'entrée, est alors égal à l'impédance caractéristique

Lorsque la chaîne est infiniment longue, elle est au régime caractéristique, sous peine d'avoir pour n élevé des composantes

$$\frac{V_0 - Z_c Q_0}{2} e^{ng} \text{ et } \frac{Q_0 - \frac{V_0}{Z_c}}{2} e^{ng} \text{ infiniment grandes. Ce qui}$$

n'a pas de sens

VIII - Application de la théorie des quadripôles à la détermination de la bande de passage des filtres:

Dans les cas que nous considérons, les filtres sont formés d'une chaîne de quadripôles symétriques identiques caractérisés par leurs paramètres de chaîne.

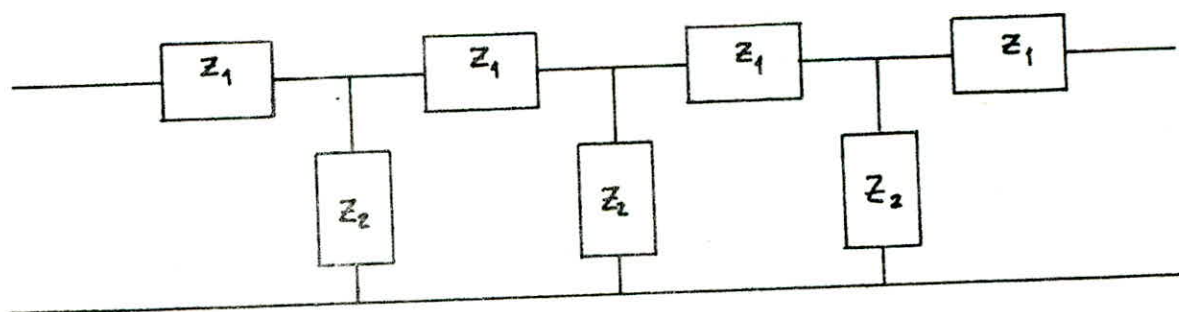
On les considérera formés d'une chaîne infinie d'éléments ou fermés sur leur impédance caractéristique.

A cause de l'analogie force courant, on raisonnera dans ce qui suit à l'aide des paramètres admittance et l'on parlera "d'admittance caractéristique".

Puisque les filtres sont formés d'une ou plusieurs cellules identiques, nous décomposerons notre chaîne d'éléments en quadripôles élémentaires particuliers, ce qui facilitera leur étude.

VIII.1 - Décomposition d'une chaîne homogène en quadripôles élémentaires:

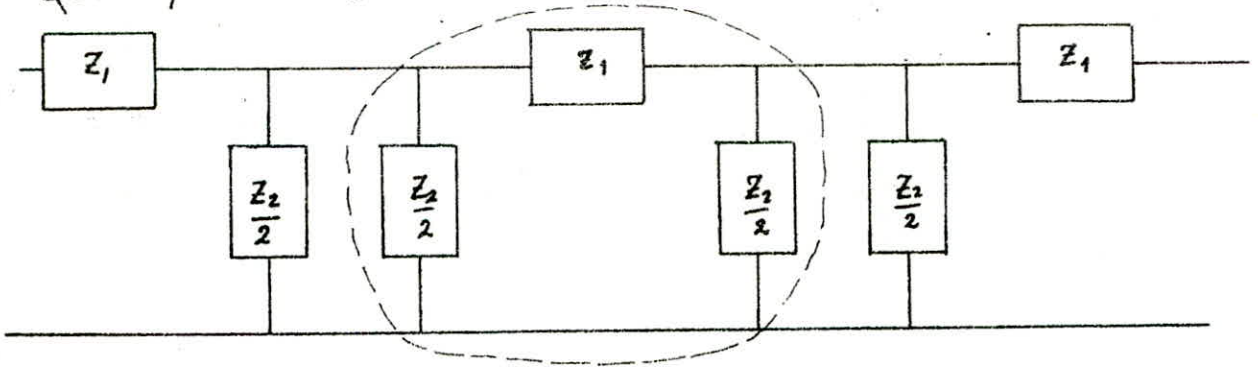
Soit une chaîne infinie d'éléments disposés en cascade:



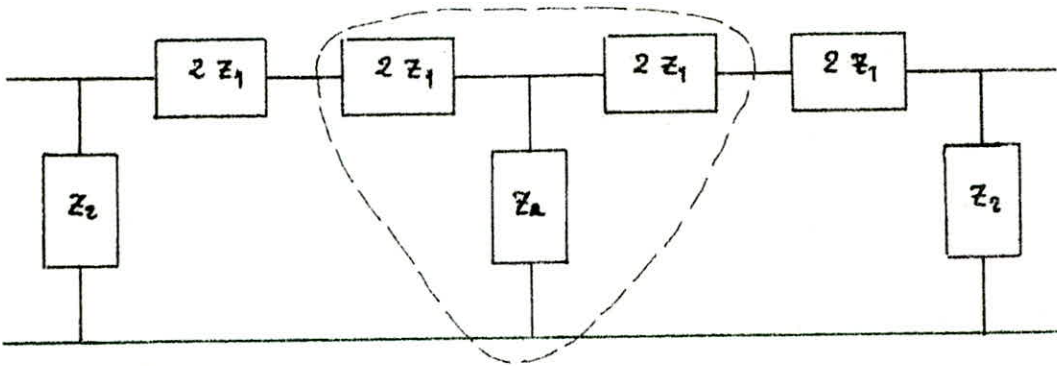
La décomposition en quadripôles symétriques identiques peut se faire soit en T soit en Π .

On obtient la cellule élémentaire suivante :

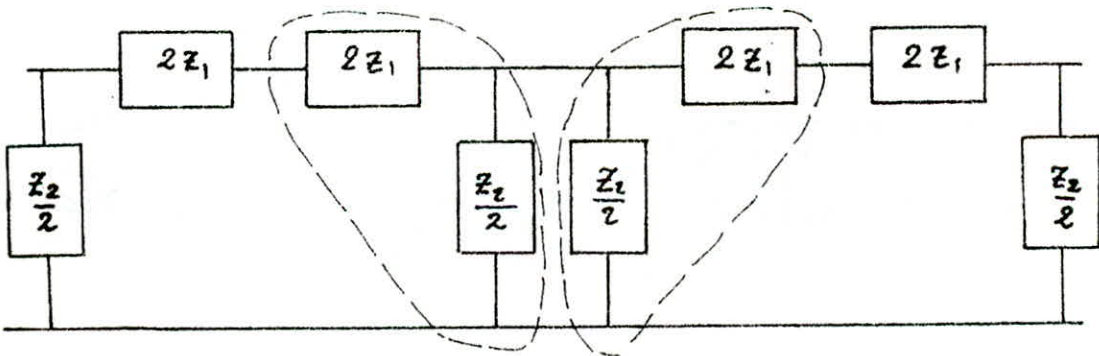
Quadripole en Π :



Quadripole en T :



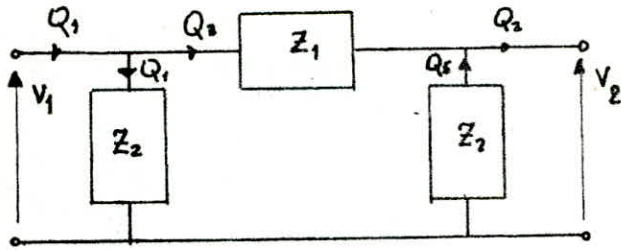
Quadripole Γ et γ :



Détermination des paramètres de chaîne et des admittances caractéristiques pour les quadripôles en Π , T, Γ et γ :

Quadripôle en Π :

détermination des paramètres de chaîne : il s'agit d'exprimer les grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sortie.



Appliquons les lois de Kirchhoff :

$$\begin{cases} Y_1 Q_3 = Y_2 (Q_4 + Q_5) \\ Q_1 = Q_3 + Q_4 \\ Q_2 = Q_3 + Q_5 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} Q_3 + Q_4 = Q_1 \\ Q_3 - Q_5 = Q_2 \\ \frac{Y_1}{Y_2} Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0 \end{cases}$$

dont la résolution donne :

$$\begin{cases} Q_3 = \frac{Y_2}{Y_1 + 2Y_2} (Q_1 + Q_2) \\ Q_4 = \frac{Y_2}{Y_1 + 2Y_2} \left\{ \left(1 + \frac{Y_1}{Y_2}\right) Q_1 - Q_2 \right\} \\ Q_5 = \frac{Y_2}{Y_1 + 2Y_2} \left\{ -Q_1 + \left(1 + \frac{Y_1}{Y_2}\right) Q_2 \right\} \end{cases}$$

aux bornes de Z_2 on a :

$$\begin{cases} V_1 = -Y_2 Q_4 \\ V_2 = Y_2 Q_5 \end{cases}$$

En remplaçant :

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{Y_2^2}{Y_1 + 2Y_2} \left\{ \left(1 + \frac{Y_1}{Y_2}\right) Q_1 - Q_2 \right\} \\ V_2 = \frac{Y_2^2}{Y_1 + 2Y_2} \left\{ -Q_1 + \left(1 + \frac{Y_1}{Y_2}\right) Q_2 \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = -\frac{(Y_1 + Y_2)Y_2}{Y_1 + 2Y_2} Q_1 + \frac{Y_2^2}{Y_1 + 2Y_2} Q_2 \\ V_2 = -\frac{Y_2^2}{Y_1 + 2Y_2} Q_1 + \frac{(Y_1 + Y_2)Y_2}{Y_1 + 2Y_2} Q_2 \end{cases}$$

$$Q_1 = -\frac{Y_1 + 2Y_2}{Y_2^2} V_2 + \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} Q_2$$

$$V_1 = - \frac{(Y_1 + Y_2) Y_2}{Y_1 + 2Y_2} \left\{ - \frac{Y_1 + 2Y_2}{Y_2} V_2 + \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} Q_1 \right\} + \frac{Y_2^2}{Y_1 + 2Y_2} Q_2$$

$$V_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} V_2 - Y_1 Q_2$$

d'où les paramètres de chaîne pour un quadripôle en Π :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} & -Y_1 \\ -\frac{Y_1 + 2Y_2}{Y_2} & \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

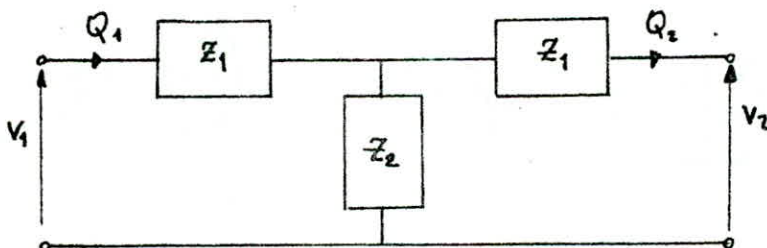
Admittance caractéristique :

Dans le cas d'un quadripôle symétrique :

$$Y_c = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

$$Y_c = Y_2 \sqrt{\frac{Y_1}{Y_1 + 2Y_2}}$$

Quadripôle en T :



$$\begin{cases} -V_1 = Y_1 Q_1 + Y_2 (Q_1 - Q_2) \\ V_2 = Y_1 Q_2 + Y_1 (Q_2 - Q_1) \end{cases}$$

$$V_2 = (Y_1 + Y_2) Q_2 - Y_2 Q_1$$

$$\text{d'où } Q_1 = -\frac{1}{Y_2} V_2 + \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} Q_2$$

$$V_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{Y_2} V_2 - \frac{Y_1 (Y_1 + 2Y_2)}{Y_2} Q_2$$

d'où les paramètres de chaîne pour un quadripôle en T :

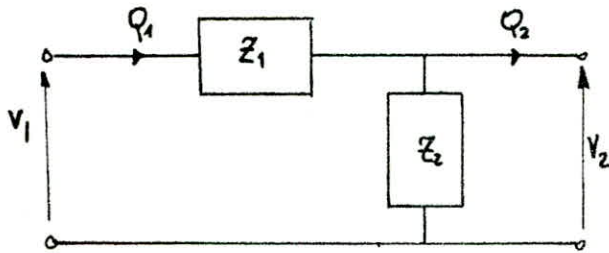
$$\begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 + y_2}{y_2} & -\frac{y_1(y_1 + 2y_2)}{y_2} \\ -\frac{1}{y_2} & \frac{y_1 + y_2}{y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Admittance caractéristique :

$$y_c = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

$$y_c = \sqrt{y_1(y_1 + 2y_2)}$$

Quadripôle T :



$$-V_1 = y_1 Q_1 + y_2 (Q_1 - Q_2)$$

$$\begin{cases} -V_1 = (y_1 + y_2) Q_1 - y_2 Q_2 \\ V_2 = y_2 (Q_2 - Q_1) \end{cases}$$

$$\text{d'où } Q_1 = -\frac{V_2}{y_2} + Q_2$$

$$\begin{aligned} V_1 &= y_2 Q_2 - (y_1 + y_2) \left[-\frac{V_2}{y_2} + Q_2 \right] \\ &= y_2 Q_2 + \frac{y_1 + y_2}{y_2} V_2 - (y_1 + y_2) Q_2 \end{aligned}$$

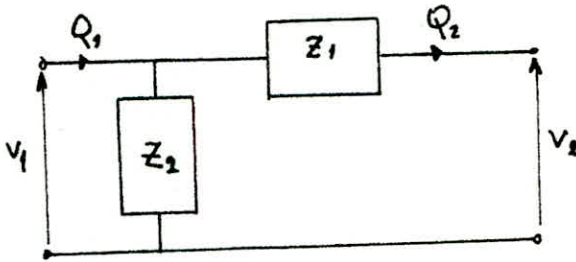
$$\begin{cases} V_1 = \frac{y_1 + y_2}{y_2} V_2 - y_1 Q_2 \\ Q_1 = -\frac{V_2}{y_2} + Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 + y_2}{y_2} & -y_1 \\ -\frac{1}{y_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Admittance caractéristique:

$$y_c = \sqrt{y_1 y_2}$$

Quadripole Γ :



$$\begin{cases} V_1 = -y_2 Q_1 \\ V_2 = y_2 (Q_2 - Q_1) + y_2 Q_2 \\ V_2 = -y_2 Q_1 + (y_1 + y_2) Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = -\frac{1}{y_2} V_2 + \frac{y_1 + y_2}{y_2} Q_2 \\ V_1 = V_2 - (y_1 + y_2) Q_2 \end{cases}$$

d'où les paramètres de chaîne pour un quadripole Γ :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -(y_1 + y_2) \\ -\frac{1}{y_2} & \frac{y_1 + y_2}{y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

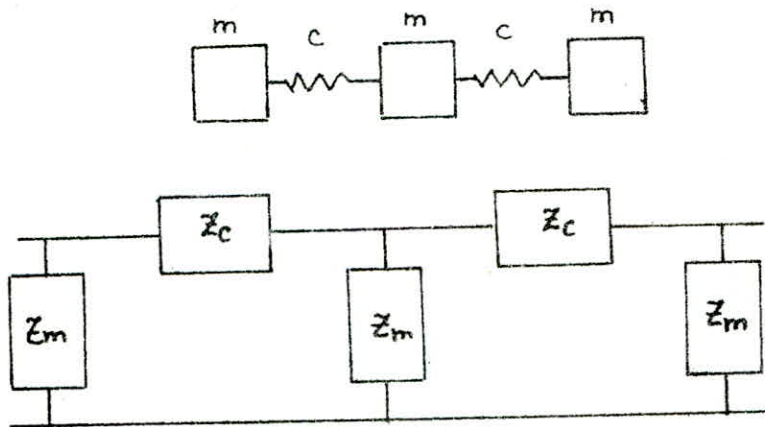
Admittance caractéristique:

$$y_c = \sqrt{y_2 (y_1 + y_2)}$$

VIII.2. Condition de filtrage et détermination de la bande passante à l'aide de la théorie d'onde:

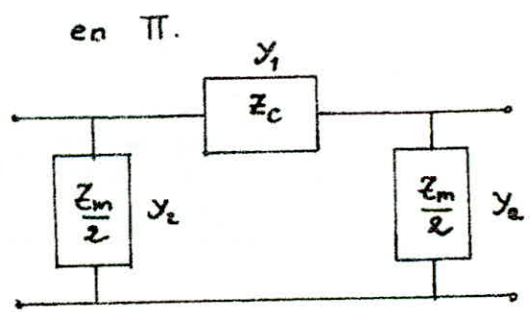
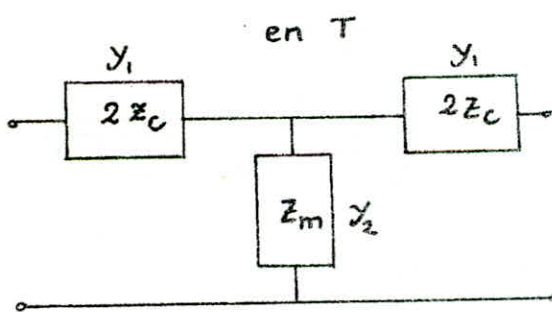
Nous avons vu précédemment que l'exposant de transfert était exprimé en fonction de A , et que la bande passante correspondait aux valeurs telles que $|A| \leq 1$ où le coefficient d'atténuation α était nul.

a/. Filtre passe bas:



avec $Z_m = jm\omega$
 $Z_c = \frac{c}{j\omega}$

Décomposition :



la bande passante est définie pour $|A| \leq 1$

$$A = 1 + \frac{y_1}{y_2} = 1 + \frac{Z_m}{2Z_c}$$

$$A = 1 + \frac{jm\omega}{-j\frac{c}{\omega}} = 1 - \frac{m\omega^2}{2c}$$

pour $A = 1 \Rightarrow \omega_1 = 0$ et pour $A = -1 \Rightarrow \omega_2 = 2\sqrt{\frac{c}{m}}$

La bande passante est donc définie par :

$$0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{c}{m}} \quad : \text{ filtre passe bas}$$

Retrouvons ce résultat à l'aide de l'admittance caractéristique : elle doit être réelle dans la bande passante.

Decomposition en Π : $Y_c = Y_2 \sqrt{\frac{Y_1}{Y_1 + 2Y_2}}$

$$\text{d'où } \frac{Y_1}{Y_1 + 2Y_2} = \frac{\frac{1}{Z_c}}{\frac{1}{Z_c} + \frac{4}{Z_m}} = \frac{j\frac{\omega}{c}}{j\frac{\omega}{c} + \frac{4}{jm\omega}} = \frac{\frac{3j\omega}{c}}{\frac{3j\omega}{c} - \frac{4}{m\omega}} \geq 0$$

$$\text{d'où } 0 \leq \omega \leq 2\sqrt{\frac{c}{m}}$$

Decomposition en T :

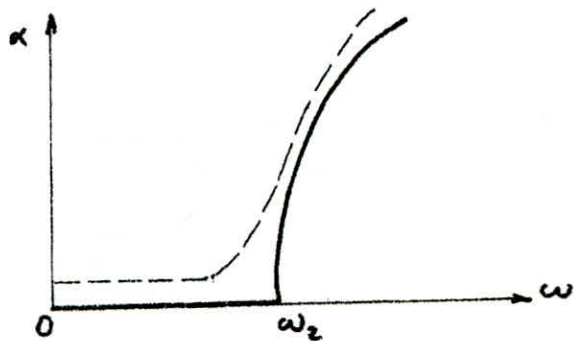
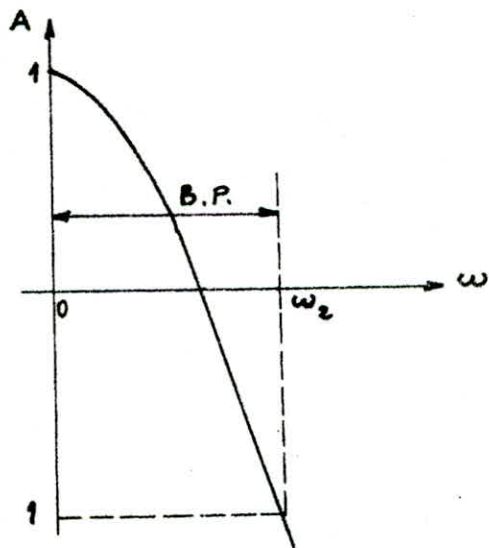
$$Y_c = \sqrt{Y_1(Y_1 + 2Y_2)}$$

$Y_1(Y_1 + 2Y_2) \geq 0$, on retrouve donc le même domaine .

Nous allons représenter graphiquement , l'allure de A ainsi que α en fonction de ω .

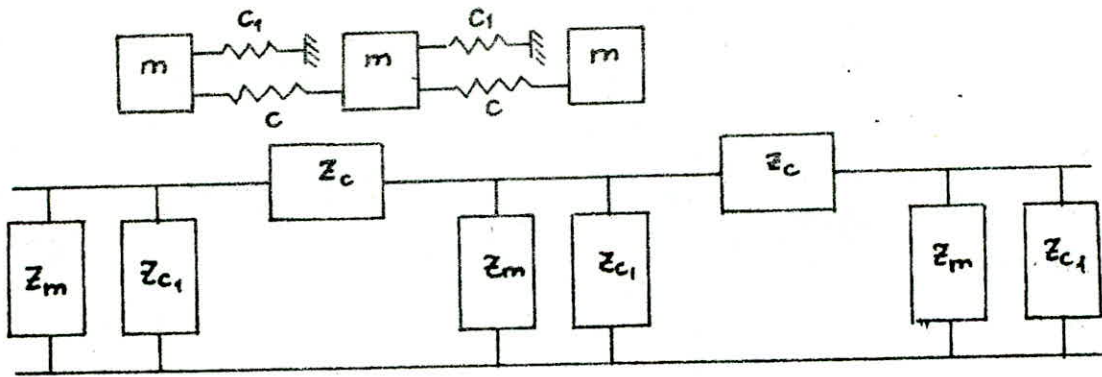
$$A = 1 - \frac{m\omega^2}{2c}$$

$$\text{et } \alpha = \arg \operatorname{ch} \left| 1 - \frac{m\omega^2}{2c} \right|$$

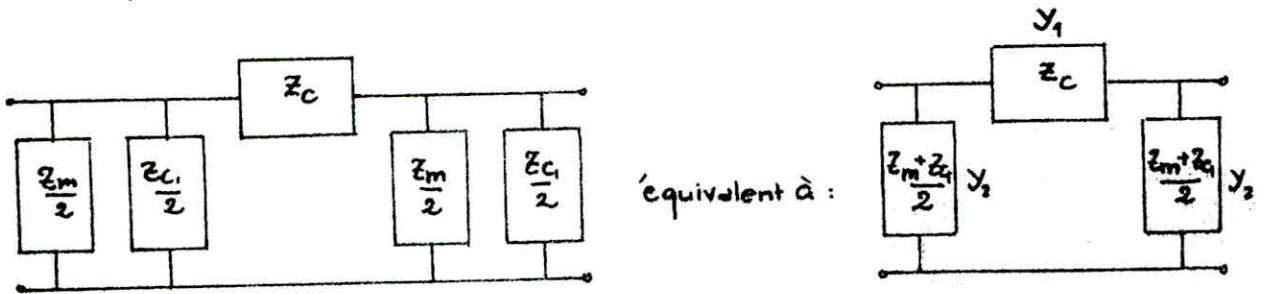


En réalité , les dissipations inévitables augmentent l'atténuation réelle dont la variation est donnée par la courbe en pointillé.

b/ Filtre passe bande :



Décomposition en Π :



$$A = 1 + \frac{Y_1}{Y_2} = 1 + \frac{Z_m + Z_{c1}}{2Z_c}$$

$$= 1 + \frac{-j \frac{c_1}{\omega} + j m \omega}{-2j \frac{c}{\omega}} = 1 - \frac{m\omega - \frac{c}{\omega}}{2 \frac{c}{\omega}}$$

$$A = 1 - \frac{m\omega^2 - c_1}{2c}$$

pour $A = 1$ $\frac{m\omega - \frac{c}{\omega}}{2 \frac{c}{\omega}} = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}$

pour $A = -1$ $\frac{m\omega - \frac{c}{\omega}}{2 \frac{c}{\omega}} = 2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{4c + c_1}{m}}$

la bande passante est définie pour $|A| < 1$

$$\text{d'où } \sqrt{\frac{c_1}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{4c + c_1}{m}}$$

Retrouvons le résultat à l'aide de l'admittance caractéristique

$$Y_c^2 = Y_2^2 \frac{Y_1}{Y_1 + 2Y_2}$$

$$= \frac{4}{(Z_{c1} + Z_m)^2} \frac{1}{Z_c} \frac{1}{\frac{1}{Z_c} + \frac{4}{Z_{c1} + Z_m}}$$

$$Y_C^z = \frac{4}{\left(jm\omega + \frac{c_1}{j\omega}\right)^2} \cdot \frac{1}{\frac{c}{j\omega}} \cdot \frac{1}{j\frac{\omega}{c} + \frac{4}{j\frac{c_1}{\omega} + jm\omega}}$$

$$= \frac{4}{\left(m\omega - \frac{c_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{j\frac{\omega}{c}}{j\frac{\omega}{c} + \frac{4}{\frac{c_1}{j\omega} + jm\omega}}$$

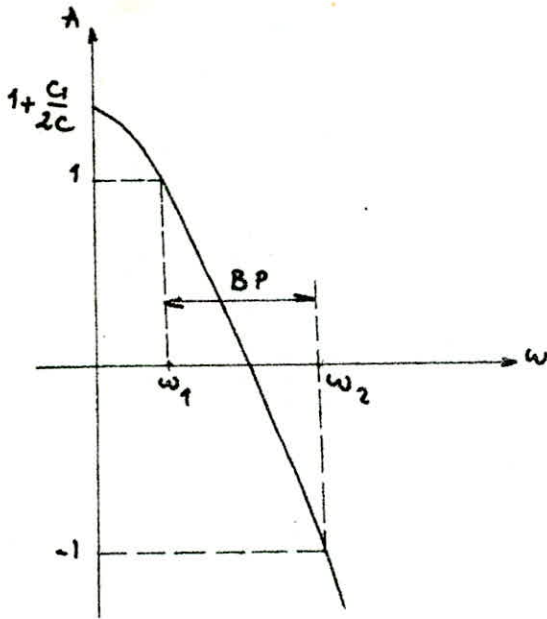
$$Y_C^z = -\frac{4}{\left(m\omega - \frac{c_1}{\omega}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{\frac{c_1}{c} - \frac{m}{c}\omega^2}}$$

Y_C^z réel d'où

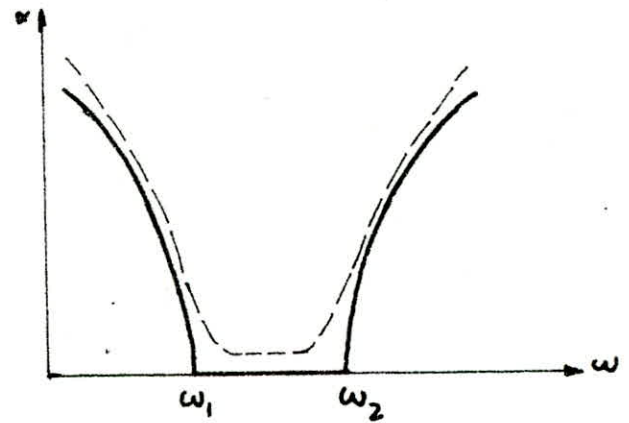
$$1 + \frac{4}{\frac{c_1}{c} - \frac{m}{c}\omega^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{\frac{c_1}{c} - \frac{m}{c}\omega^2 + 4}{\frac{c_1}{c} - \frac{m}{c}\omega^2} \leq 0$$

$$\text{d'où } \sqrt{\frac{c_1}{m}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{4c + c_1}{m}}$$

$$A = 1 - \frac{m\omega^2 - c_1}{2c}$$

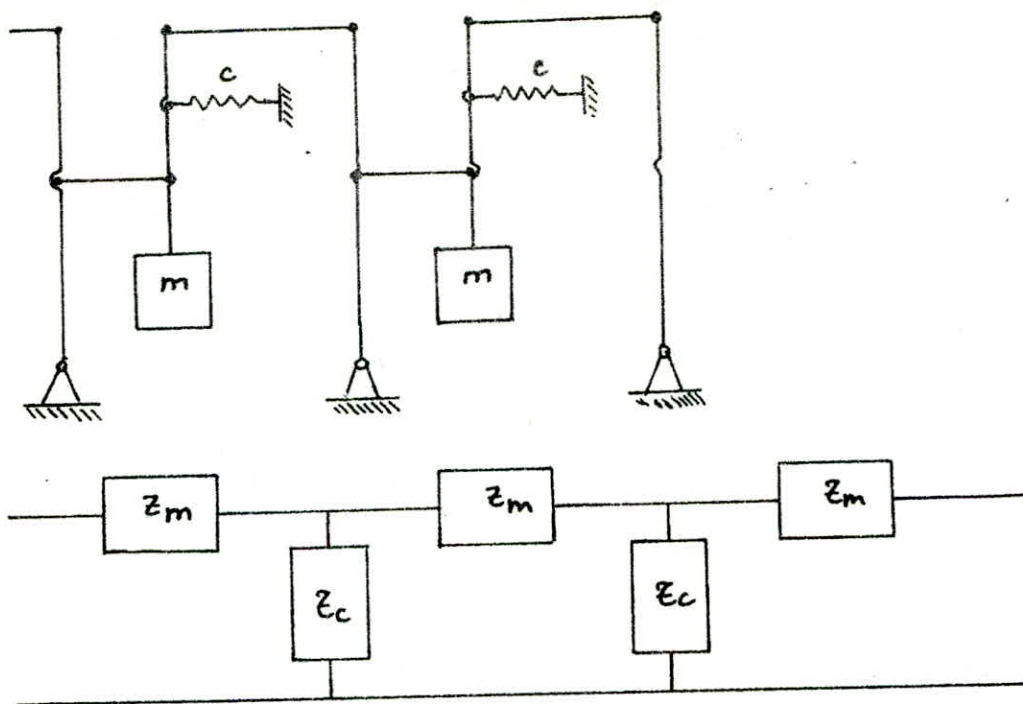


$$\alpha = \arg \operatorname{ch} \left| 1 - \frac{m\omega^2 - c_1}{2c} \right|$$

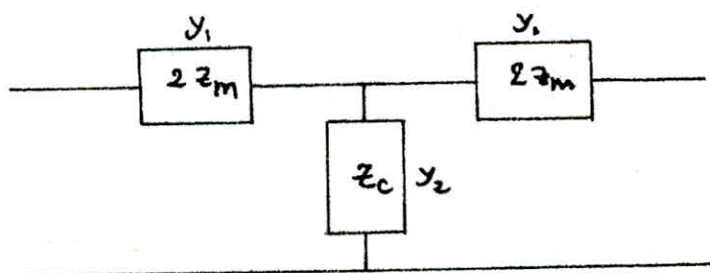


c/. Filtre passe haut :

Nous verrons dans la suite le schéma mécanique équivalent avec les impédances Z_m et Z_c définies par $Z_m = jk_1 m\omega$ et $Z_c = \frac{k_2 c}{j\omega}$, k_1 et k_2 étant des rapports de levier



Décomposition en T:



$$A = 1 + \frac{y_1}{y_2} = 1 + \frac{z_c}{2z_m} = 1 + \frac{-j \frac{c}{\omega}}{2j m \omega}$$

$$A = 1 - \frac{c}{2m\omega^2}$$

pour $A = 1 \Rightarrow \frac{c}{2m\omega^2} = 0 \Rightarrow \omega \rightarrow \infty$

pour $A = -1 \Rightarrow \frac{c}{2m\omega^2} = 2 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}$

Verifions le resultat par l'admittance caracteristique:

$$y_c = \sqrt{y_1(y_1 + 2y_2)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2z_m} \left(\frac{1}{2z_m} + \frac{2}{z_c} \right)}$$

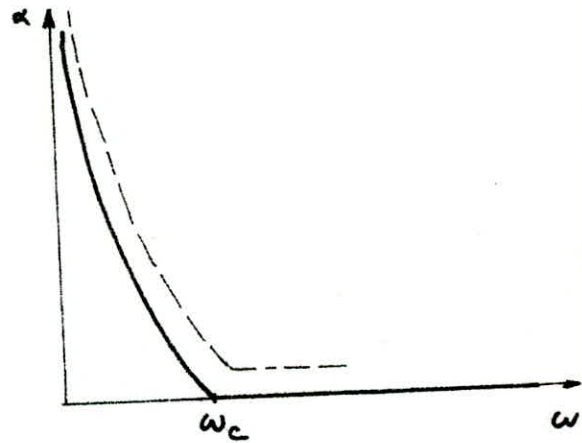
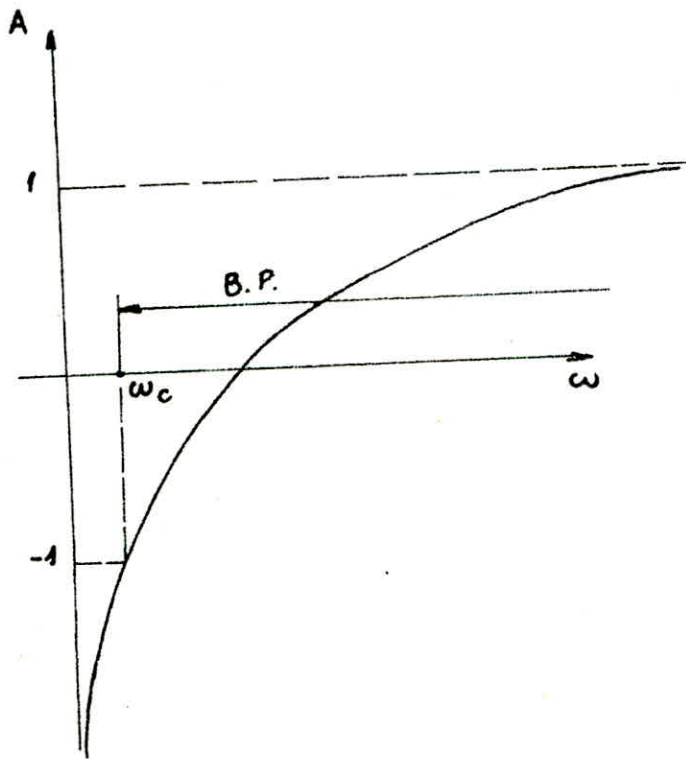
$$y_c = \sqrt{\frac{1}{4(jm\omega)^2} + \frac{1}{jm\omega \frac{c}{\omega}}} = \sqrt{-\frac{1}{4m^2\omega^2} + \frac{1}{mc}}$$

$$y_c \text{ réel : d'où } -\frac{1}{4m^2\omega^2} + \frac{1}{mc} \geq 0$$

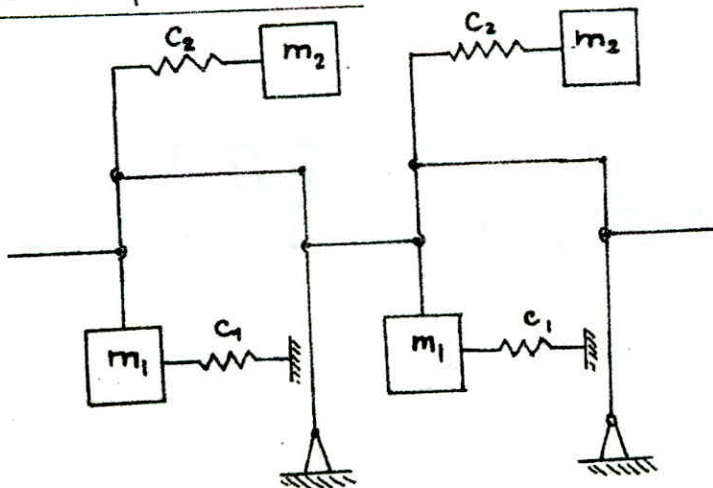
$$\omega > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$A = 1 - \frac{c}{2m\omega^2}$$

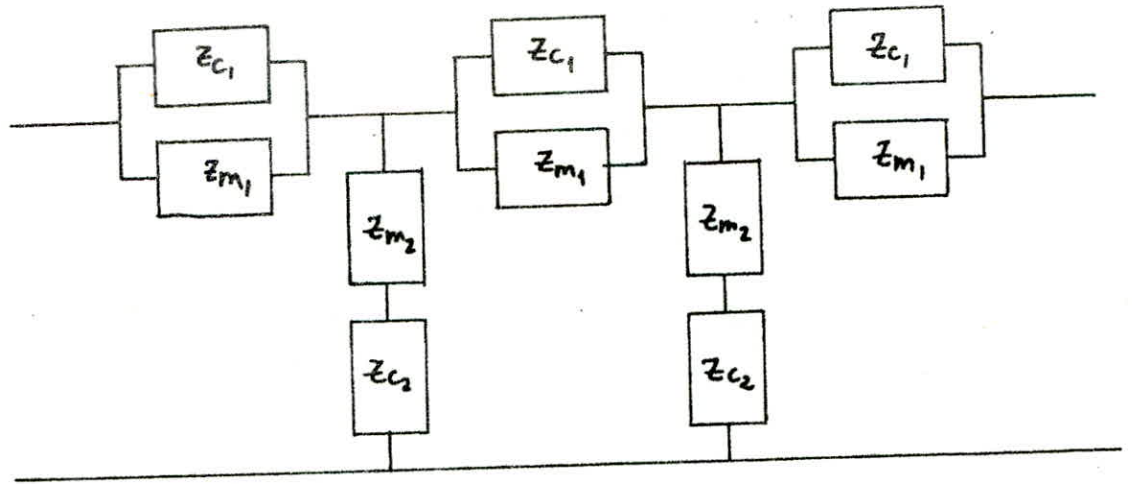
$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| 1 - \frac{c}{2m\omega^2} \right|$$



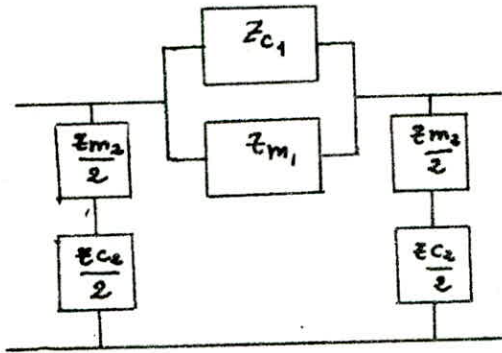
d/ Filtre coupe bande :



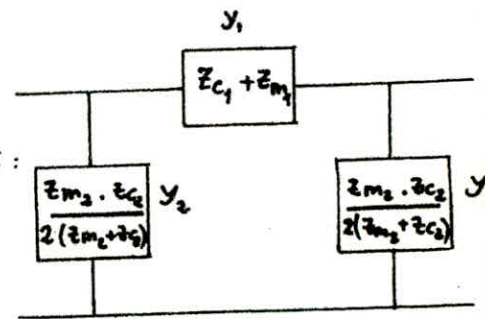
Comme pour le filtre passe haut nous verrons que le schéma équivalent est le suivant :



Décomposition en Π :



équivalent à :



$$A = 1 + \frac{y_1}{y_2} = 1 + \frac{2(z_{m2} + z_{c2})}{(z_{c1} + z_{m1}) z_{m2} z_{c2}}$$

$$= 1 + \frac{2(jm_2\omega - j\frac{c_2}{\omega})}{(jm_1\omega - j\frac{c_1}{\omega}) jm_2\omega j\frac{c_2}{\omega}}$$

$$= 1 - \frac{2(m_2\omega - \frac{c_2}{\omega})}{(m_1\omega - \frac{c_1}{\omega}) m_2 c_2}$$

$$A = 1 - \frac{2}{m_2 c_2} \frac{m_2\omega - \frac{c_2}{\omega}}{m_1\omega - \frac{c_1}{\omega}}$$

pour $A = 1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$

pour $A = -1 \Rightarrow m_2\omega - \frac{c_2}{\omega} = m_2 c_2 (m_1\omega - \frac{c_1}{\omega})$

$$(m_1 m_2 c_2 - m_2) \omega = \frac{c_2 - m_1 m_2 c_2}{\omega}$$

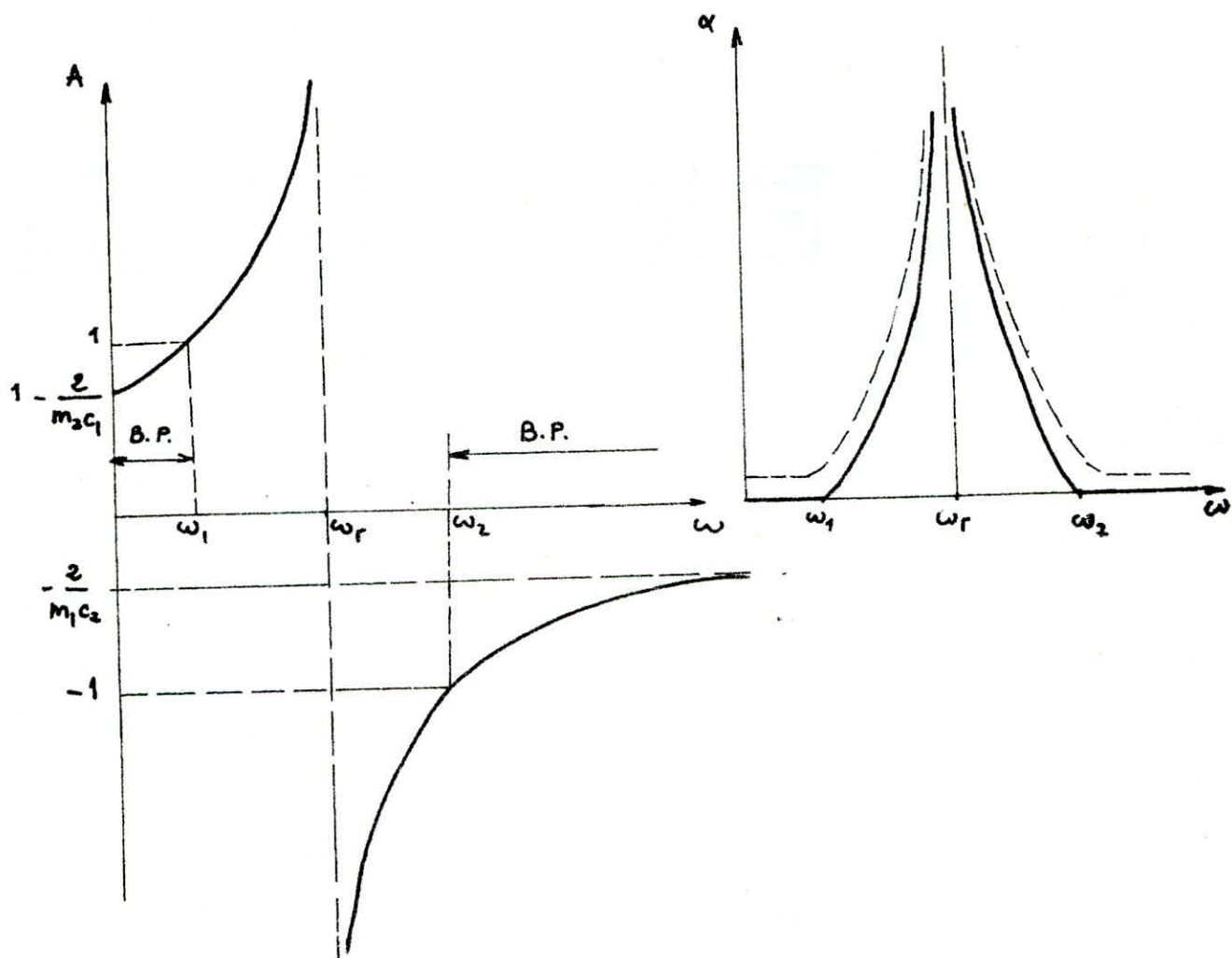
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2 - m_1 c_1 c_2}{m_1 m_2 c_2 - m_2}} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \sqrt{\frac{1 - m_1 c_1}{m_1 c_2 - 1}}$$

de plus il faut que : $(1 - m_1 c_1)(m_1 c_2 - 1) > 0$

La bande passante est donc définie pour $\omega < \omega_1$ et $\omega > \omega_2$

$$A = 1 - \frac{2}{m_2 c_2} \frac{m_2 \omega^2 - c_2}{m_1 \omega^2 - c_1}$$

$$\text{or } \alpha = \arg \text{ch} \left| 1 - \frac{2}{m_2 c_2} \frac{m_2 \omega^2 - c_2}{m_1 \omega^2 - c_1} \right|$$

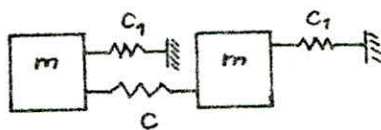


VIII.3. Filtre à une cellule :

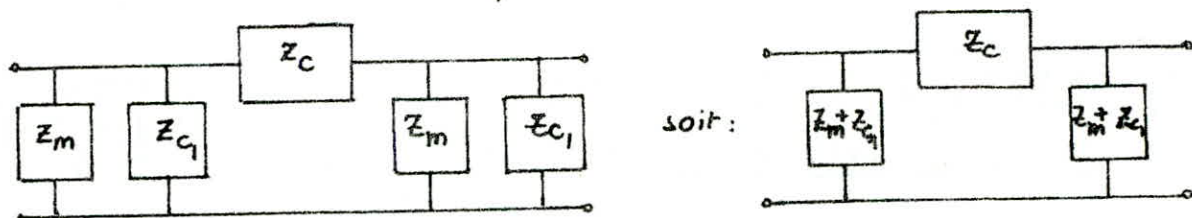
Nous avons vu que 2 pendules couplés formaient un filtre.

Retrouvons ce resultat avec la theorie des quadripoles.

On le fera pour le passe-bande étudié, l'action de la pesanteur g/e étant remplacée par l'action du ressort C_1/m .



on obtient le schéma équivalent suivant :



$$A = 1 - \frac{m\omega - \frac{C_1}{\omega}}{\frac{C}{\omega}}$$

$$\text{pour } A = 1 \Rightarrow 1 - \frac{m\omega - \frac{C_1}{\omega}}{\frac{C}{\omega}} = 1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{C_1}{m}}$$

$$\text{pour } A = -1 \Rightarrow 1 - \frac{m\omega - \frac{C_1}{\omega}}{\frac{C}{\omega}} = -1 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{2C + C_1}{m}}$$

le domaine de la bande passante est donc :

$$\sqrt{\frac{C_1}{m}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{2C + C_1}{m}}$$

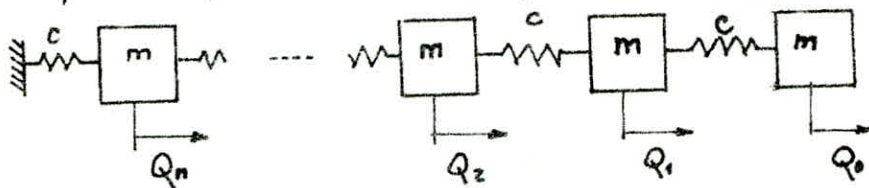
Pour chaque système nous pouvons définir une bande de passage et une bande d'arrêt, en étudiant la transmittance, ou encore le gain des forces ou des vitesses (rapport des grandeurs de sortie à celles d'entrée) lorsque les grandeurs mises en cause sont de même nature. On pourra dire qu'il a alors bande passante lorsque le gain est supérieur

ou égal à un et c'est ce qui a été fait précédemment.

Dans notre étude nous tenons compte des systèmes à une ou plusieurs cellules en y appliquant la théorie d'onde des quadripôles, la bande passante ainsi définie sera au moins égale à celle trouvée pour l'étude du gain.

Cette notion d'onde des quadripôles sera intéressante lors de la synthèse des filtres puisque l'atténuation dépend du nombre de cellules mises en jeu. Ceci apparaîtra clairement dans l'exemple suivant.

Exemple du filtre mécanique passe bas :



Nous savons que :

$$\frac{Q_0}{Q_n} = e^{ng} \quad \text{avec} \quad g = \operatorname{argch} |A|$$

$$\text{ici } A = 1 - \frac{m\omega^2}{2c}$$

on a donc

$$Q_n = Q_0 e^{-n \operatorname{argch} \left| 1 - \frac{\omega^2}{2c} \right|}$$

et

$$n = \frac{1}{\operatorname{argch} \left| 1 - \frac{\omega^2}{2c} \right|} \ln \frac{Q_0}{Q_n}$$

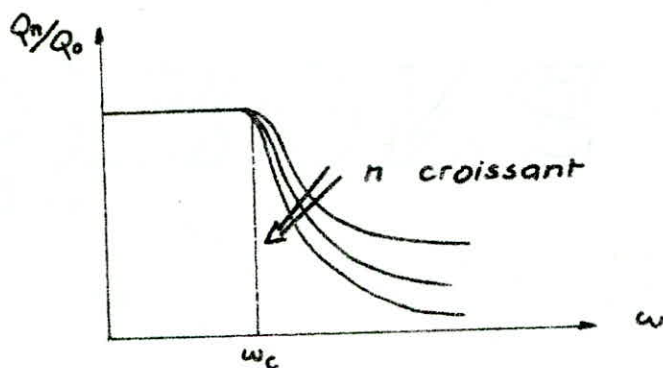
application numérique : $m = 2 \text{ kg}$; $c = 1000 \text{ N/m}$;

$$\omega_c = 2\sqrt{\frac{c}{m}} = 2\sqrt{500} = 44,72 \text{ rd/s}$$

l'entrée de la force se faisant en zéro, étudions par exemple la sortie à la troisième et à la cinquième cellule

ω (rad/s)	Q_3/Q_0	Q_5/Q_0
$\omega_c = 44,72$	1	1
50	$55 \cdot 10^{-3}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$
60	$8 \cdot 10^{-3}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$
75	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-6}$
100	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-7}$

on peut ainsi représenter l'allure de la courbe donnant le gain en fonction de la fréquence.



Ainsi l'affaiblissement désiré sera obtenu avec un nombre voulu de cellules.

En général on représente le gain en décibels :

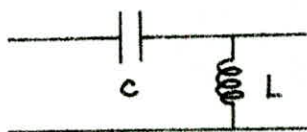
$$G = 20 \log \frac{Q_n}{Q_0} \text{ (db)}$$

cela permet d'avoir des chiffres plus commodes à manipuler et des courbes plus évidentes.

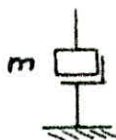
IX - Méthode d'obtention de filtres mécaniques et de leurs schémas équivalents :

La principale difficulté pour appliquer la théorie des quadripôles d'électricité à des systèmes mécaniques est l'obtention des schémas mécaniques équivalents.

Par exemple, il est facile de concevoir en électricité un filtre passe haut à l'aide d'une capacité dans un bras série et d'une inductance dans un bras shunt ; soit le schéma électrique suivant :



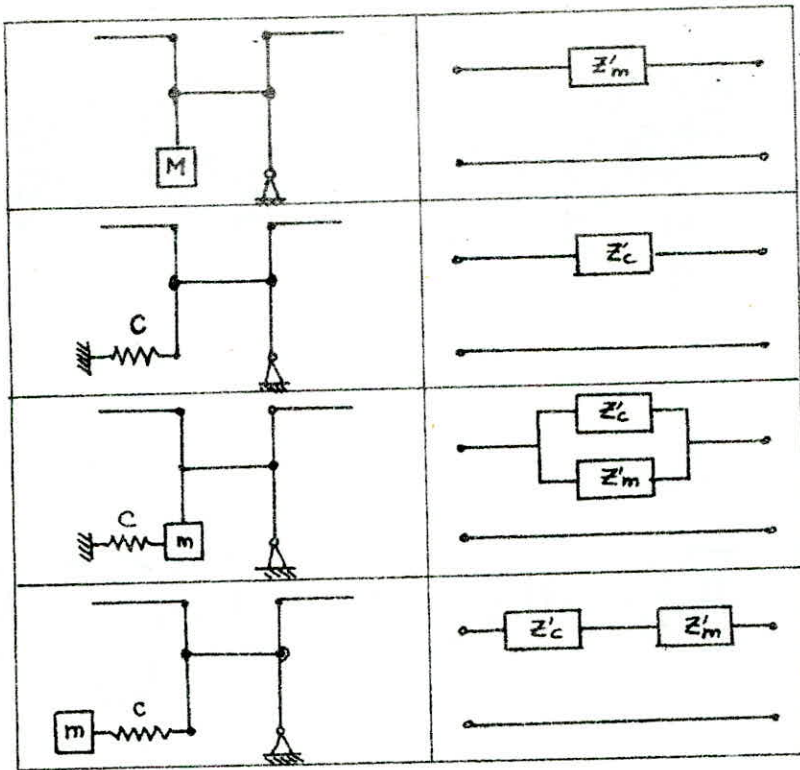
Par contre en mécanique le schéma équivalent est plus difficile à trouver car l'équivalent de la capacité étant la masse qui dans les schémas d'analogie est toujours reliée à la terre ce qui explique la représentation conventionnelle pour la masse :



C'est pour cela que l'on a fait l'étude suivante à l'aide de bras de leviers afin de pouvoir obtenir les différentes sortes de filtres avec différentes combinaisons. Ce qui permettra aussi une sorte de synthèse des filtres.

On étudiera 2 sortes de leviers : les leviers non articulés qui permettent d'obtenir des éléments d'impédance dans les bras série, et les leviers articulés pour obtenir les bras shunt

Leviers non articulés :



Leviers articulés :

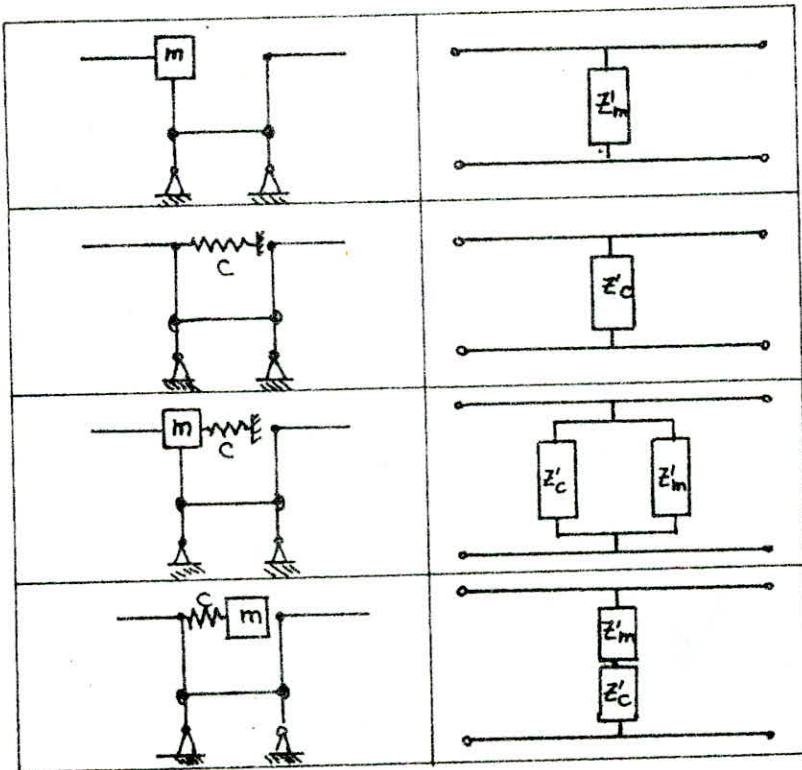
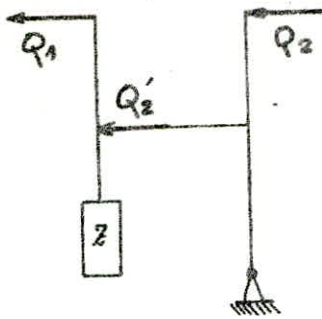


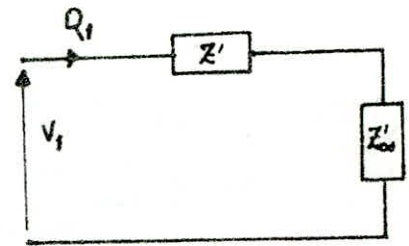
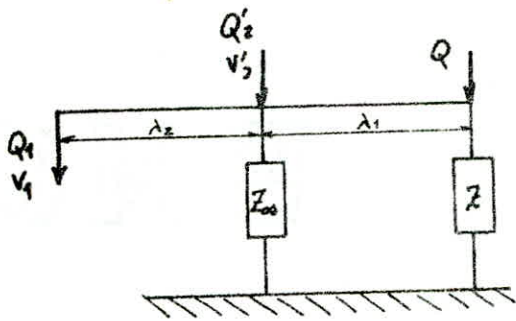
Schéma équivalent pour les systèmes non articulés :



Nous allons appliquer la théorie des impédances au levier de gauche.

Soit Q_1 la force d'entrée

Q'_2 la force de sortie qui se transforme en $Q_2 = \eta Q'_2$ par le levier de droite.



En utilisant les résultats établis au paravant, on a le schéma équivalent après réduction au point 1, avec

$$\begin{cases} Z'_{\infty} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 Z_{\infty} \\ Z' = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2}\right)^2 Z. \end{cases}$$

Le point 2' étant un point de liaison. En réalité en ce point il n'existe pas d'impédance, ou que l'on peut considérer comme infinie d'où l'ouverture du circuit aux bornes de cette dernière et le schéma équivalent suivant :

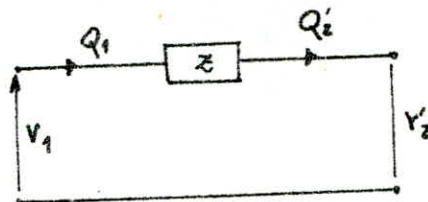
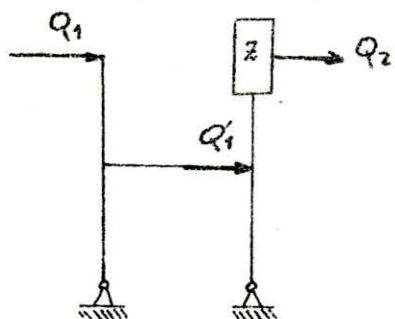
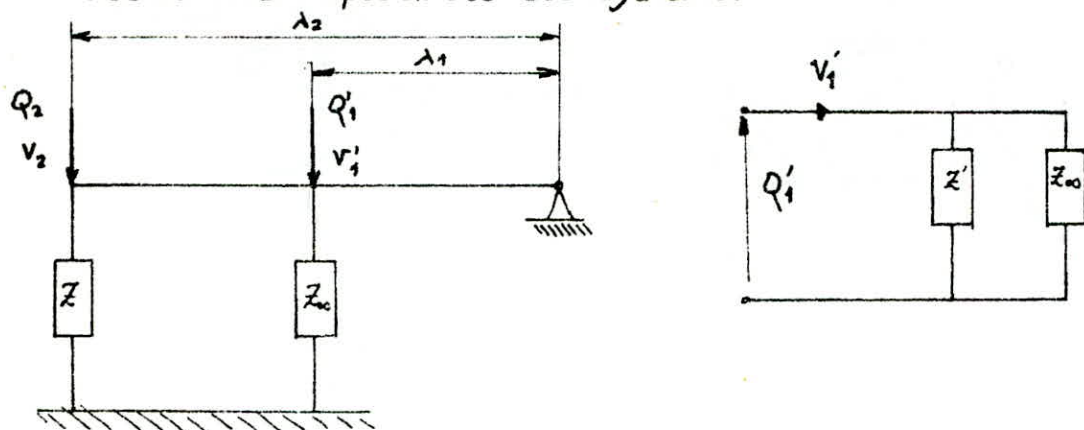


Schéma équivalent pour les systèmes articulés :



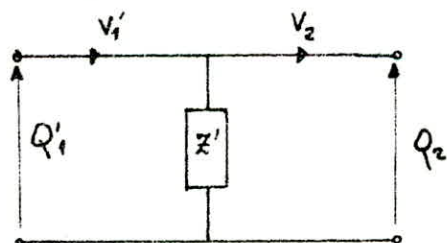
soit Q_1 la force d'entrée et Q_2 celle de sortie, appliquons la théorie des impédances des systèmes articulés.



Après réduction au point 1' on obtient le schéma ci-dessus

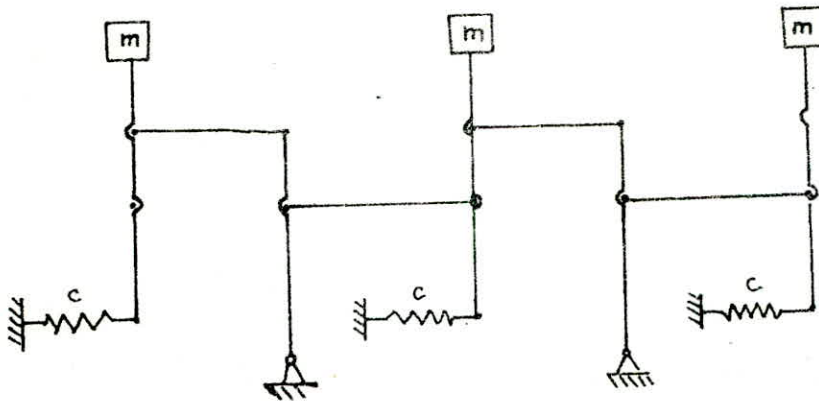
avec :
$$Z' = Z \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2$$

De même que précédemment 1' étant un point de liaison, l'impédance y est infinie, et nous avons alors le schéma suivant :

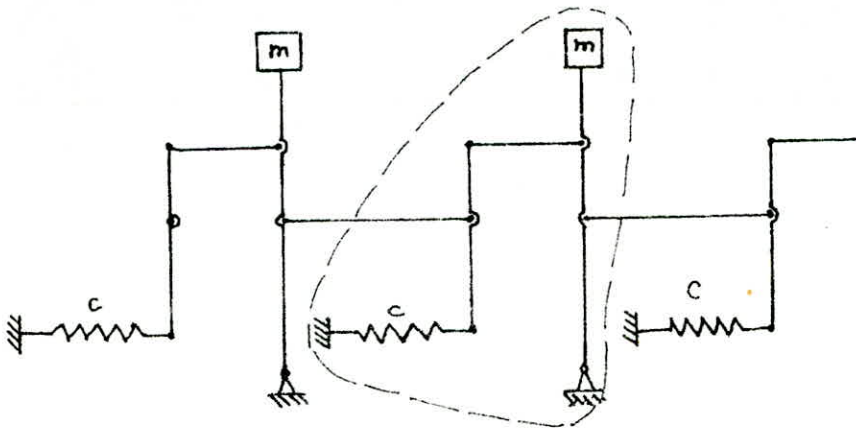


L'association de plusieurs éléments simples permettra de résoudre par la théorie des quadripôles des systèmes plus complexes.

Filtre passe bas :



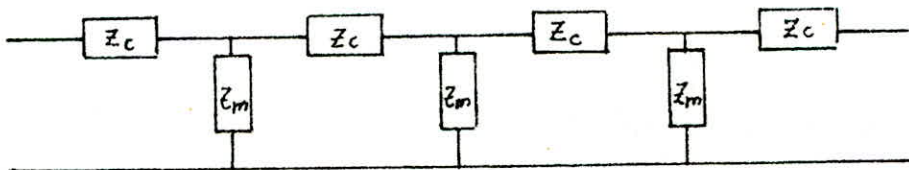
ou en décomposant sur chaque levier :



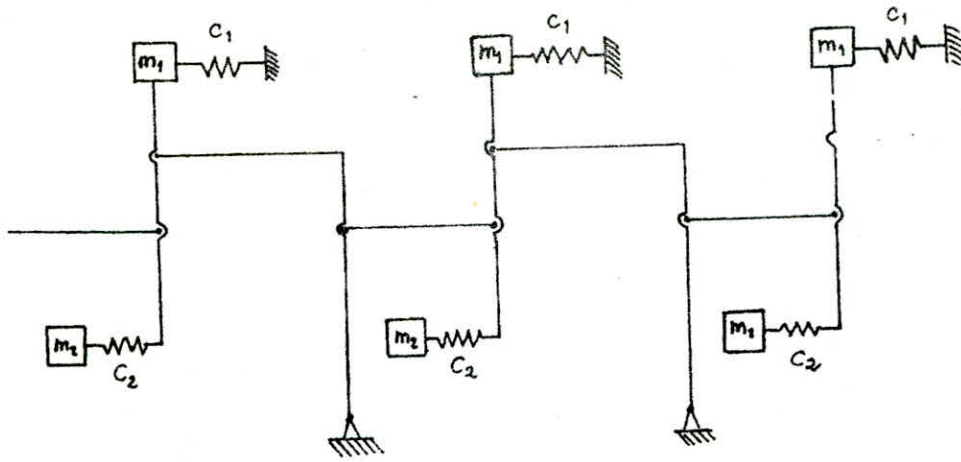
Le schéma mécanique équivalent sera formé par la mise en cascade des quadripôles simples suivants :



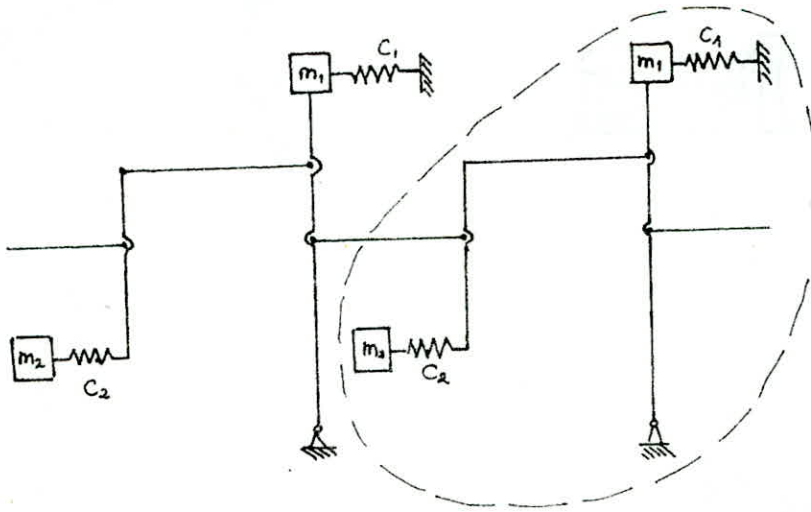
Ce qui donne le schéma suivant :



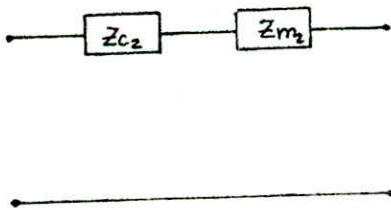
Filtre passe bande :



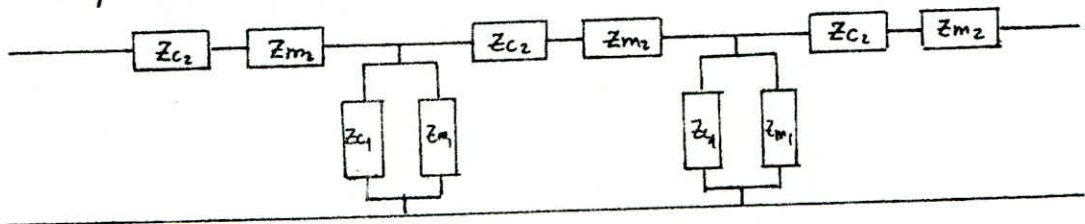
ou en décomposant sur chaque levier :



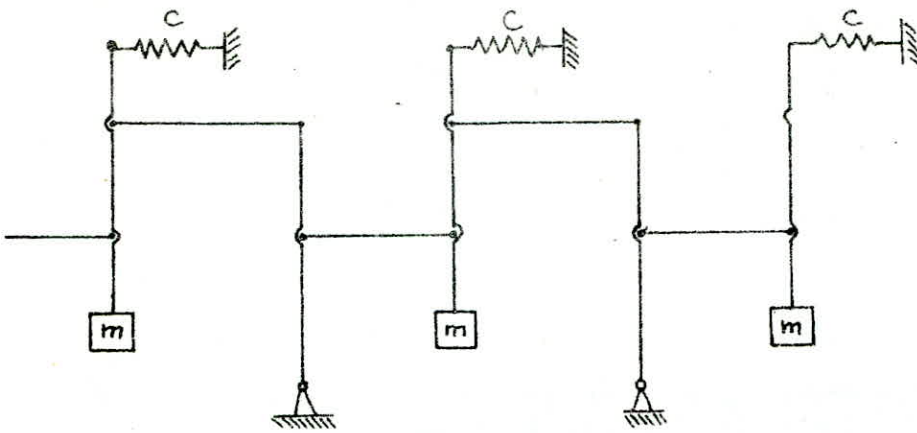
Le schéma mécanique équivalent sera formé par la mise en cascade des quadripôles simples suivants :



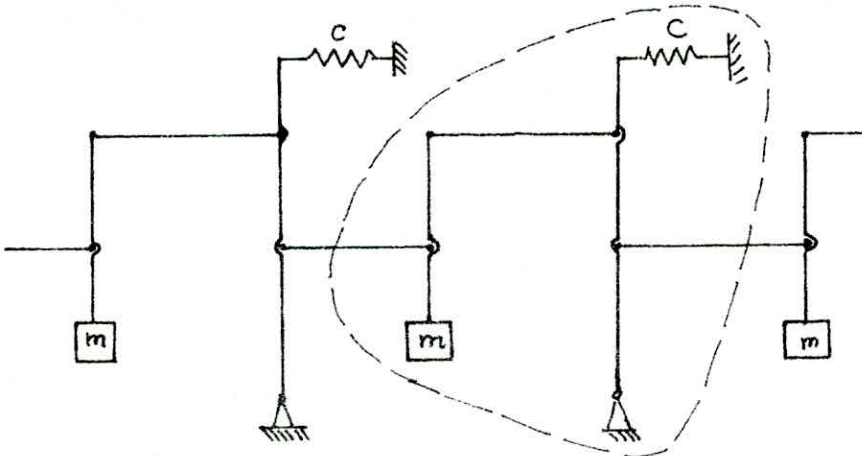
ce qui donne le schéma suivant :



Exemple du filtre passe haut :



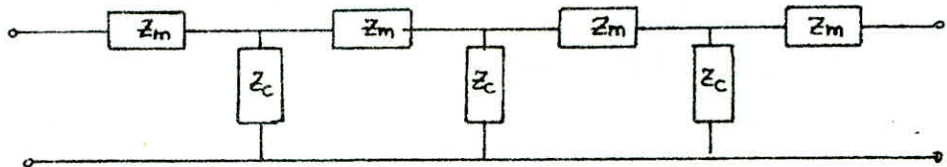
ou en décomposant les impédances sur chaque levier :



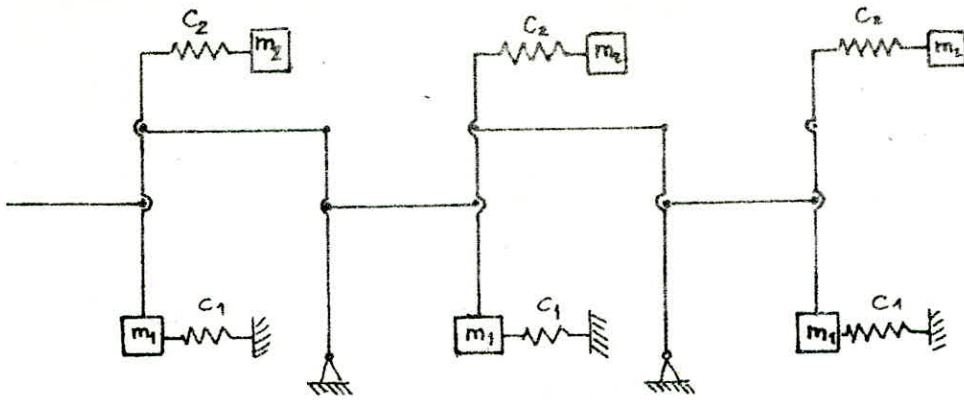
Le schéma mécanique équivalent sera formé par la mise en cascade des quadripôles simples suivants :



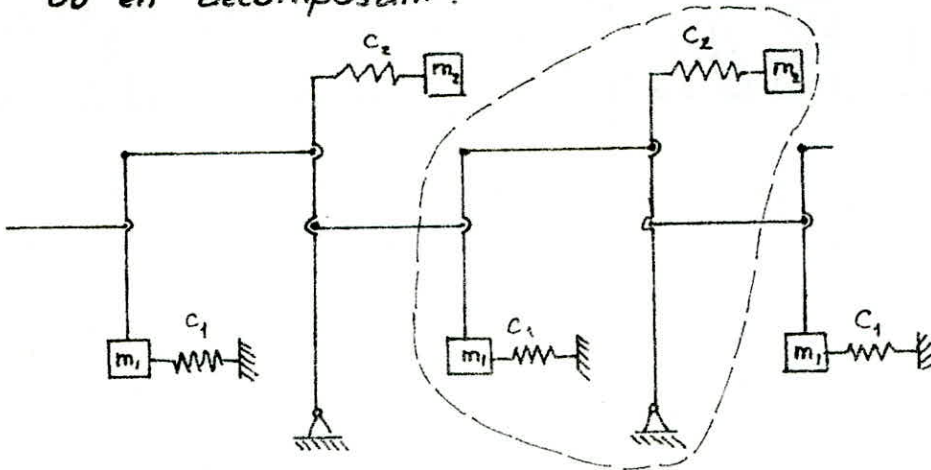
Ce qui donne le schéma suivant :



Filtere bouchon:



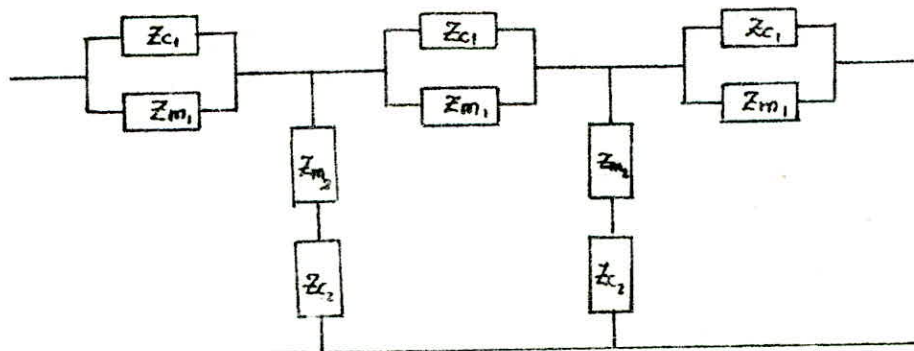
ou en décomposant:



il sera composé des éléments simples suivants:



D'où le schéma mécanique équivalent:

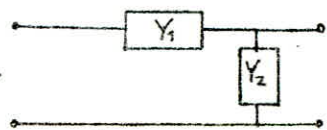


X - Méthode de synthèse des filtres passe bas, passe haut, passe bande et bouchon:

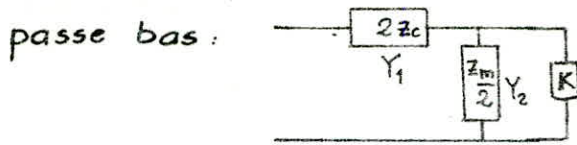
Jusqu'à maintenant nous n'avons fait que l'analyse des filtres. Il faudrait, connaissant le système à vibroisoler et la source d'excitation, synthétiser le filtre à y intercaler. Le problème de filtrage est posé par la donnée d'un gabarit d'affaiblissement et des impédances de charge soit les terminaisons entre lesquelles le filtre doit être inséré. Les données seront donc pour les filtres passe bas et passe haut : l'impédance de charge et la pulsation de coupure et pour les filtres passe bande et bouchon: l'impédance de charge et les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 . Ceci donne une largeur de bande $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ et permettra de définir une pulsation centrale: $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$.

Nous avons vu que dans le domaine de la bande passante l'admittance caractéristique doit être réelle, et c'est à partir de cette admittance qui sera connue et qu'on appellera "admittance nominale" que se fera la détermination des paramètres du filtre.

Le travail se fera avec des cellules Γ , dont l'admittance caractéristique sera prise égale à l'admittance nominale: $K^2 = Y_1 Y_2$, et que dans le domaine de la bande passante $Y_1 + Y_2 = 0$



Filtre passe bas et passe haut :



$$Y_1 = \frac{1}{2Z_c} = \frac{j\omega}{2c}$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_m} = \frac{2}{jm\omega}$$

a/ $\omega = 0 \Rightarrow Y_1 = \frac{1}{2Z_c} = 0$

b/ $K^2 = Y_1 Y_2 = \frac{j\omega}{2c} \frac{2}{jm\omega} = \frac{1}{mc}$

$$K^2 = \frac{1}{mc}$$

c/ $\omega = \omega_0 \quad Y_1(\omega_0) + Y_2(\omega_0) = 0$

$$\frac{Y_1(\omega_0)}{Y_2(\omega_0)} = -1$$

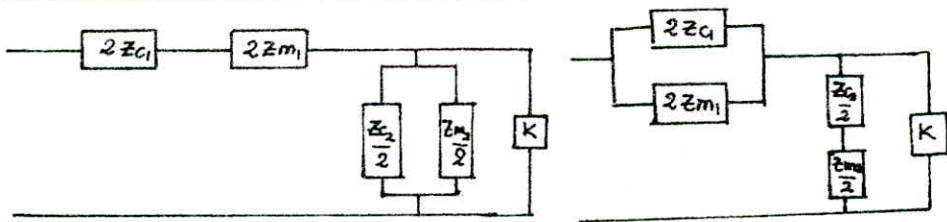
$$\frac{-4c}{m\omega_0^2} = -1 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{4c}{m}$$

on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^2 = \frac{1}{mc} \\ \omega_0^2 = \frac{4c}{m} \end{array} \right. \text{ d'où } \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{2}{K\omega_0} \\ c = \frac{\omega_0}{2K} \end{array} \right.$$

Mêmes résultats pour le passe haut.

Filtre passe bande et bouchon :



$$Y_1 = \frac{j\omega}{2c_1} + \frac{1}{2jm_1\omega} = j\frac{\omega}{2c_1} \left(1 - \frac{c_1}{m_1\omega^2}\right) = \frac{1}{2jm_1\omega} \left(1 - \frac{m_1\omega^2}{c_1}\right)$$

$$Z_2 = \frac{c_2}{2j\omega} + j\frac{m_2\omega}{2} = j\frac{m_2\omega}{2} \left(1 - \frac{c_2}{m_2\omega^2}\right) = \frac{c_2}{2j\omega} \left(1 - \frac{m_2\omega^2}{c_2}\right)$$

a/ $\omega = \omega_0 \Rightarrow Z = Y = 0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

$$Y_1 = j \frac{\omega}{2c_1} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{1}{2jm_1\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$Z_2 = j \frac{m_2\omega}{2} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{c_2}{2j\omega} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$b/ \quad K^2 = Y_1 Y_2 = \frac{Y_1}{Z_2} = \frac{1}{c_1 m_2} = \frac{1}{c_2 m_1}$$

$$d'o\grave{u} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{K^2 m_2} \\ c_2 = \frac{1}{K^2 m_1} \end{cases}$$

$$c/ \quad Y_1(\omega_1) + \frac{1}{Z_2(\omega_1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_1(\omega_1) Z_2(\omega_1) = -1$$

$$\begin{aligned} Y_1(\omega) Z_2(\omega) &= -\frac{m_2}{4c_1} \omega^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 = -\frac{c_2}{4\omega^2 m_1} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 \\ &= -\frac{m_2}{4c_1} \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 = -\frac{c_2}{4m_1} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$Y_1(\omega) Z_2(\omega) = -1$$

$$et \quad \begin{cases} \frac{m_2}{4c_1} \left(\omega_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_1}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_2}{4c_1} (\omega_1 - \omega_2)^2 = 1 \\ \frac{c_2}{4m_1} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0^2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{4m_1} \left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$d'o\grave{u} \quad \begin{cases} 4c_1 = m_2 (\omega_1 - \omega_2)^2 \\ \frac{c_2}{4} = \frac{m_1}{\left(\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}\right)^2} \end{cases}$$

$$comme \quad c_1 = \frac{1}{K^2 m_2} \quad et \quad c_2 = \frac{1}{K^2 m_1}$$

$$alors : \quad c_1 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2K} \quad ; \quad m_2 = \frac{2}{K(\omega_1 - \omega_2)}$$

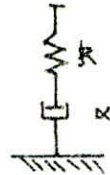
$$c_2 = \frac{2}{K\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right)} \quad ; \quad m_1 = \frac{\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}}{2K}$$

Pour le bouchon nous retrouvons les mêmes résultats à part qu'il faille inverser les indices 1 et 2

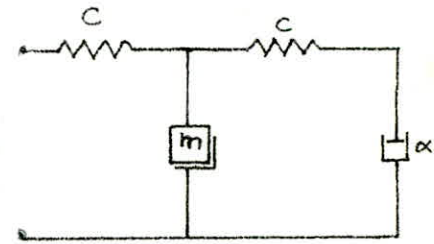
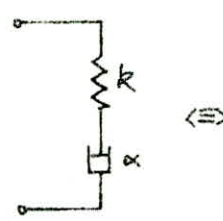
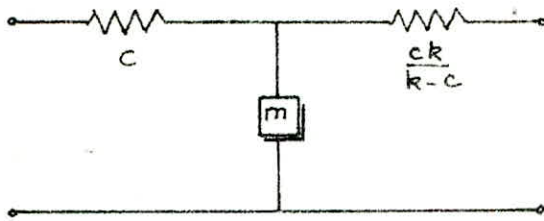
Exemples de synthèse de filtre à partir d'éléments à vibro-isoler :

Le filtre mécanique doit être fermé sur un élément résistant.
 Les systèmes mécaniques comprenant en général masse, ressort et amortisseur ; il s'agit donc d'intégrer les 2 premiers éléments au sein des éléments constituant le filtre et l'admittance nominale sera alors égale à l'admittance de l'amortisseur, et l'on pourra ainsi déterminer les paramètres du filtre.

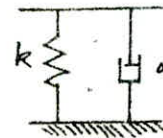
Exemple 1 : soit le système du filtre passe-bas.



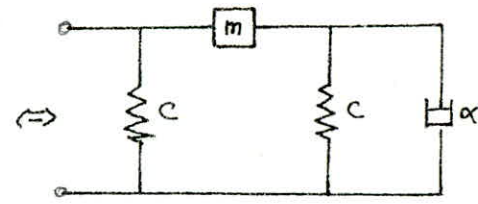
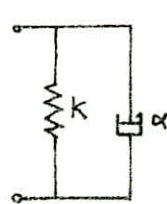
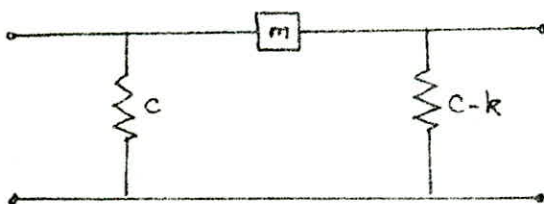
à vibro-isoler à l'aide



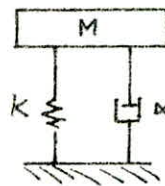
Exemple 2 : soit le système du filtre passe haut.



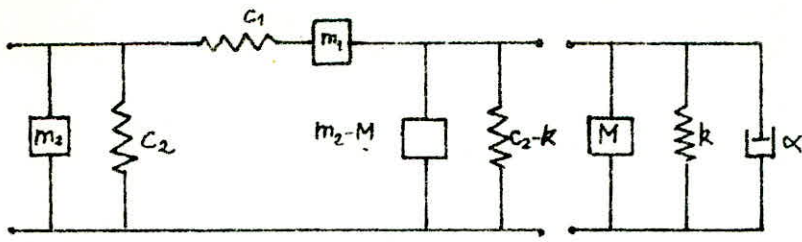
à vibro-isoler à l'aide



Exemple 3 : soit le système à l'aide du filtre passe-bande



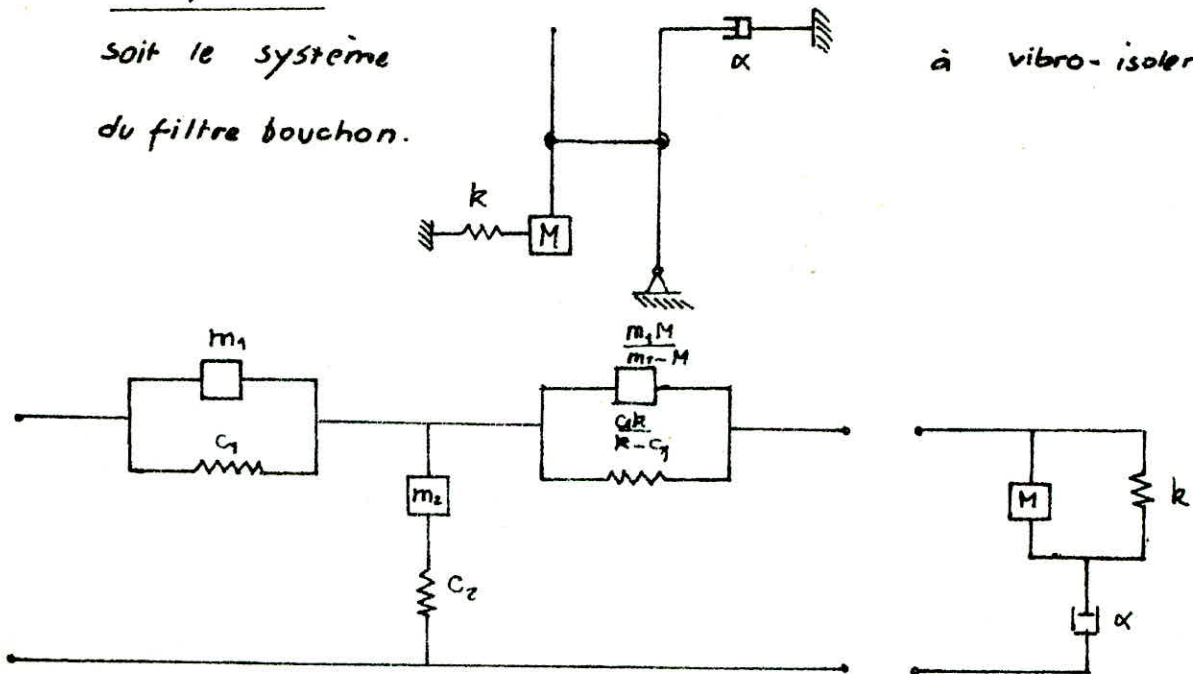
à vibro-isoler à



Exemple 4 :

soit le système
du filtre bouchon.

à vibro-isoler à l'aide



XI Conclusion:

En utilisant la théorie des filtres électriques, la principale difficulté ayant apparue lors de l'établissement des schémas mécaniques analogues à ceux d'électricité, a été la conception des systèmes mécaniques correspondant à ces schémas. L'introduction des systèmes à bras de levier a permis de résoudre ce problème tout en apparaissant comme une généralisation des analogies.

Lors de la synthèse des filtres on est amené à tenir compte des conditions externes dans lesquelles le filtre doit évoluer. Cela correspond à l'étude des conditions aux limites des équations différentielles de la mécanique ; ce qui se traduit dans notre cas par l'étude de l'impédance caractéristique du filtre qui doit correspondre dans une certaine mesure à l'impédance du milieu extérieur et ce afin de ne pas influencer ou perturber le comportement du filtre.

Le problème de la synthèse des filtres est très complexe et peut faire l'objet d'une étude très détaillée. Il se pose de la manière suivante : ayant les conditions externes d'utilisation, la caractéristique du filtre est donnée sous forme de gabarit qu'il faut arriver à satisfaire avec un choix judicieux des éléments du filtre. Cela conduit en général à des problèmes d'approximation dont les méthodes de résolution sont très complexes.

La méthode de synthèse étudiée apparaît assez limitée car elle

ne permet de synthétiser les quatre sortes de filtres que pour certains éléments. Néanmoins cette méthode pourra être développée en utilisant des combinaisons plus complexes d'éléments de filtres car les modèles de filtres établis ne sont pas seuls représentatifs. La résolution pourra alors se faire par le couplage des quadripoles

BIBLIODGRAPHIE

- J. A. Droujinsky "Mécanicheskîé - tépsi"
(Chaines mécaniques).
Léningrad 1977
- A. Fröling. "Cours d'électricité 1"
Dunod 1966
- J. Ortusi. "Analyse des circuits 1"
Masson 1966
- Berkley. "Cours de physique : ondes 3"
Paris 1972
- G. Ney "Analogies et Modèles électriques"
cours de l'E.S.E 1978.
- I. Mechtcherski "Recueil de problèmes de Mécanique
rationnelle"
Editions MIR 1973

