

P0003/05A

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME D'INGENIEUR EN ELECTRONIQUE

Thème :

**ETUDE DU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE  
DANS LA FIBRE OPTIQUE A L'AIDE  
DES EQUATIONS DE MAXWELL**

Dirigé par :

Mr. M. MEHENNI

Etudié par :

AMMIALI Rabah

juin 2005

## **Dédicaces**



*Je dédie ce mémoire à mes parents, qui, durant toutes ces années d'études ont su me soutenir par leurs dévouements et leurs sacrifices. A mes frères : Mustapha, Tarik, et Lamine, et à mes sœurs : Saïda, Nabila, Nassiba et Fatma Zohra.*

*A ma fiancée Meriem, qui a beaucoup donné pour l'accomplissement de ce travail, et dont le soutien a été indispensable, et à ses parents Mr. et Mme. KECHAR.*

*A tous mes neveux et nièces : Meriem, Sabrina, Wassim, Ismaïl, Isahak, Yanis, Ayoub à mes belles sœurs Fatiha et Nassima.*

*A mes amis Amine, Aziz, Aïssa, Billel, Djillali, Farid, Nassim, Reda, Yanis et les autres.*

**Rabah**



## **Remerciements**

*Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire des fibres optiques et capteurs de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger sous la direction de Mr M. MEHENNI, Professeur à l'ENP.*

*Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude en sa qualité de promoteur, pour son dévouement au travail et pour la confiance qu'il m'a témoignée.*

*Je tiens à remercier Mr M. TRABELSI, Maître de Conférences à l'ENP, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury, ainsi que Melle A. MOUSSAOUI, Chargée de Cours à l'ENP en tant que membre du jury.*

*Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail, Mme BAZI pour ses précieux conseils, ses deux étudiantes BENNACEUR M. ZEBICHE A. et pour leur aide, ainsi que toute la promotion d'électronique 2004/2005.*

ان هدف هذا العمل هو دراسة الحقول الكهرومغناطيسية داخل الاليف البصرية و تحديد نماذج الانتشار الموجودة فيها. توجد هناك طريقتان لدراسة هذه الحقول الطريقة الاولى طريقة البصرية الهندسية و الطريقة الثانية هي جبرية التي تستعمل قوائين ماكسوال. بما ان الاليف البصرية ذات شكل اسطواني. سنستعمل المعلم الاسطواني لحل معادلات ماكسوال. سنستعمل كذلك شرط الانتشار الضعيف. اذا نماذج الانتشار مستقيمة الاستقطاب. سنلتقي بمعادلات اشتقاقية , حولها ذات شكل دوال بيسال. للتخطيط سيتم باستعمال ماتلاب.

### Résumé :

Le but de ce travail est l'étude des champs dans la fibre optique et la détermination des modes qui s'y propagent. Pour cela, deux approches sont possibles : la première est l'approximation de l'optique géométrique et la seconde est la méthode analytique qui utilise les équations de Maxwell. Etant donné que la fibre est circulaire, ces équations vont être écrites dans le repère cylindrique. Nous utiliserons la condition du guidage faible  $n_1 \approx n_2$ , d'où la notion de modes **LP**. Nous rencontrerons des équations différentielles dont les solutions sont les fonctions de *Bessel*. La simulation des modes se fera à l'aide de MATLAB.

**Mots clé :** fibre optique, modes de propagation, modes **LP**, équations de Maxwell, fonctions de Bessel, optique géométrique.

### Abstract :

This work's objective is the study of electromagnetic field in optical fibers and the determination of modes which are propagated there. The first method is the geometrical optics description and the second method is the wave propagation method that uses Maxwell's equations. As the fiber has a cylindrical shape, we'll use cylindrical coordinates to express Maxwell's equations. We will use the weakly guidance condition  $n_1 \approx n_2$ , that allows the use of **LP** modes (Linearly polarized modes). We will meet differential equations that have for a solution Bessel functions. The simulation of modes will be done using MATLAB.

**Key words:** optical fiber, propagation modes, **LP** modes, Maxwell equation, Bessel functions, geometrical optics description.





## Sommaire :

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre I : Introduction à la fibre optique.....</b>	<b>3</b>
I.1) Introduction :.....	3
I.2) Historique :.....	4
I.2.1) Besoin pour des communications sur fibre optique.....	4
I.2.2) Evolution des systèmes d'ondes optiques.....	7
I.3) Notions générales sur la fibre optique :.....	10
I.4) Avantages et inconvénients de la fibre optique :.....	11
I.5) Pertes de la fibre :.....	12
I.6) Conclusion :.....	15
<b>Chapitre II: Méthode d'analyse géométrique de la fibre optique</b>	<b>16</b>
II.1) Introduction :.....	16
II.2) Description de l'optique géométrique :.....	16
II.2.1) Fibre à saut d'indice.....	17
II.2.1.1) Modes dans les fibres à saut d'indice :.....	19
II.2.1.2) Fibres multimodes à saut d'indices :.....	20
II.2.1.3) Fibres monomodes à saut d'indice :.....	22
II.2.2) Fibres à gradient d'indice :.....	22
II.2.2.1) Nombre de modes dans une fibre à gradient d'indice :.....	24
II.2.2.2) Ouverture numérique :.....	24
II.2.2.3) Fibres monomodes à gradient d'indice :.....	25
II.3) Etude en optique géométrique des fibres multimodes :.....	26
II.3.1) équations des rayons :.....	26
II.3.2) Définitions des modes :.....	27
II.3.3) Calcul des modes :.....	28
II.3.4) calcul général des trajectoires des rayons :.....	30
II.3.5) Modes de propagations :.....	33
II.4) Conclusion :.....	34

<b>Chapitre III: Méthode d'analyse de la fibre optique à l'aide des équations de Maxwell.....</b>	<b>36</b>
III.1) Introduction :.....	36
III.2) Equations de Maxwell :.....	36
III.3) Equation d'onde :.....	37
III.3.1) Champ électrique :.....	38
III.3.2) Champ magnétique :.....	39
III.4) Application pour la fibre optique :.....	41
III.4.1) Calcul des champs :.....	41
III.4.2) Calcul exact des modes :.....	45
III.4.3) Fréquence de coupure :.....	47
III.4.4) Modes dans une fibre faiblement multimode.....	49
III.4.4.1) Régime monomode :.....	49
III.4.4.2) Pseudo modes <i>LP</i> .....	50
III.4.4.3) Allure du mode fondamental.....	51
III.5) Fibres optiques monomodes :.....	52
III.5.1) Modèle gaussien de la fibre monomode :.....	52
III.5.1.1) Expression du champ.....	52
III.5.1.2) Rappels sur les faisceaux gaussiens.....	52
III.5) Conclusion.....	53
<b>Chapitre IV: Simulation à l'aide de MATLAB.....</b>	<b>55</b>
IV.1) Introduction :.....	55
IV.1) Organigramme :.....	56
IV.3) Programme utilisé en langage MATLAB :.....	57
IV.4) Résultats obtenus :.....	60
IV.5) Conclusion :.....	67
<b>Conclusion générale.....</b>	<b>68</b>
<b>Bibliographie</b>	
<b>Annexe A</b>	
<b>Annexe B</b>	





# **Introduction générale :**



Cette thèse a été préparée au Laboratoire *des fibres optiques et capteurs* du Département d'Electronique de l'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER.

L'objectif de ce travail est de suivre l'évolution de l'onde lumineuse dans une fibre optique. Cela consiste à déterminer les différents modes qui se propagent dans la fibre et à voir l'allure du champ électromagnétique. Nous verrons que, pour chaque mode de propagation, correspond une allure bien précise du champ électrique ou magnétique.

L'étude des modes se fera selon deux méthodes : *l'approximation de l'optique géométrique* et *l'analyse à l'aide des équations de Maxwell*.

Nous ferons aussi une simulation à l'aide de MATLAB pour illustrer l'allure du champ électrique (*ou magnétique*) de quelques modes dans la fibre optique.

Ce mémoire comportera quatre chapitres.

**Dans le chapitre1**, nous ferons une introduction à la fibre optique dans laquelle on définira la fibre optique, et on présentera une vue d'ensemble sur ce support en parlant de ses avantages et inconvénients, ainsi que de ses principales caractéristiques.

**Dans le chapitre2**, on parlera de la méthode *de l'approximation de l'optique géométrique*, c'est des applications classiques dans lesquelles on utilisera principalement les lois de **Snell - Descartes**.

**Dans le Chapitre3**, on parlera de la méthode *d'analyse à l'aide des équations de Maxwell*. Nous verrons aussi, en détail, les différents modes

qui se propagent dans la fibre et nous donnerons des notions sur les *modes LP* et les *fréquences de coupure*.

**Dans le chapitre4**, nous ferons une simulation à l'aide de MATLAB pour illustrer l'allure des champs.

**Et en dernier point, conclusion.**



## ***Chapitre 1 :***

### ***Introduction à la fibre optique***

## **Introduction à la fibre optique**

### **I.1) Introduction :**

Un système de communication transmet des informations d'un endroit à un autre, que ce soit à quelques kilomètres ou bien à une distance transocéanique. L'information est transportée par une onde porteuse électromagnétique dont la fréquence varie de quelques mégahertz (*MHz*) à plusieurs centaines de térahertz (*THz*). Les systèmes de communication optiques utilisent des fréquences porteuses élevées (*~100 THz*) dans la région visible ou infrarouge du spectre électromagnétique. Ils sont appelés parfois les systèmes optiques pour les distinguer des systèmes micro-ondes dont la fréquence est à peu près plus petite de cinq ordres de grandeur (*~1 GHz*). Les systèmes de communication à fibre optique sont des systèmes optiques qui emploient des fibres optiques comme support de transmission d'informations. De tels systèmes ont été déployés dans le monde entier depuis *1980* et ont révolutionné le monde des télécommunications. En effet, le progrès technologique des fibres optiques, avec l'aide de la microélectronique, est un facteur majeur dans l'avènement de « *l'âge de l'information* ».

Dans ce chapitre, nous ferons une brève introduction à la fibre optique. Nous parlerons de ce support qui, pendant ces 50 dernières années, n'a cessé de progresser et de séduire, de part ses performances technologiques et avantages économiques, au point où la fibre optique est entrain, peu à peu, de remplacer les supports en cuivre. Avec sa très large bande passante et sa faible atténuation, la fibre optique trouve ses principales utilisations dans les autoroutes de l'information (*Ex : Internet*) et les réseaux de télécommunication, qui utilisent des débits de transfert très élevés. Aussi, nous verrons les différents paramètres qui caractérisent ce support, ainsi que ses principaux avantages et inconvénients.



## **I.2) Historique :**

L'utilisation de la lumière comme moyen de communication date de l'antiquité si on considère les communications optiques au sens général. La plupart des civilisations ont utilisé miroirs, feux, ou signaux de fumée pour transmettre une certaine information (*victoire dans une bataille par exemple*). C'est le même concept pratiquement qu'on utilisait à la fin du *XVIII<sup>e</sup>* siècle avec les lampes de signalisation, indicateurs, et autres dispositifs sémaphores. L'idée fut développée ultérieurement grâce aux suggestions de *Claude Chappe* en *1792*, pour transmettre mécaniquement des messages codés à travers de longues distances (*~100km*) en utilisant des stations relais intermédiaires. Le premier télégraphe fut mis en service en *juillet 1794* entre Paris et Lille (*séparées de 200 km*).

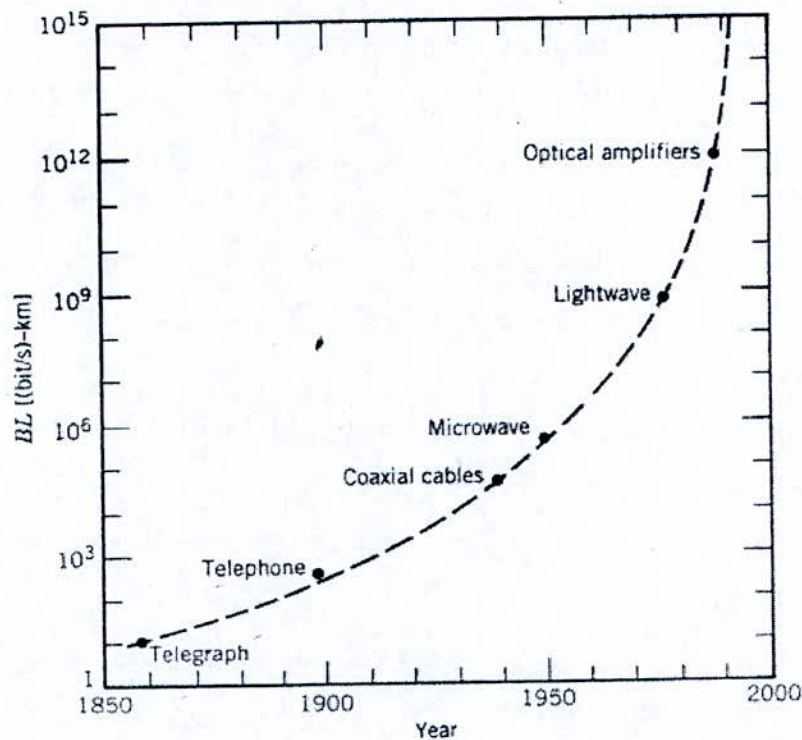
En *1830*, le réseau s'est répandu à travers l'Europe toute entière. Le rôle de la lumière dans de tels systèmes se limitait à rendre visible les signaux codés pour qu'ils puissent être interceptés par les stations relais. Les systèmes de communication *opto-mécaniques* du *XIX<sup>e</sup>* siècle étaient fondamentalement lents. Dans la terminologie des temps modernes, le débit de transfert de ces systèmes est inférieur à *1 bit/s*. [1]

### **I.2.1) Besoin pour des communications sur fibre optique**

L'invention de la télégraphie en *1830* a remplacé l'utilisation de la lumière par l'électricité et, dès lors, a commencé l'ère des communications électriques. Le débit de transfert pouvait atteindre *10 bits/s* en utilisant de nouvelles techniques de codage, tel que *le Morse*. L'emploi des stations relais intermédiaires a permis d'établir des communications à travers de longues distances (*~1000km*). En effet, le premier télégraphe transatlantique a vu le jour en *1866*. La télégraphie utilisait essentiellement un plan (*schéma*) digital avec deux pulsations électriques de durée différente. L'invention du téléphone en *1876* a apporté un changement majeur dans la mesure où des signaux électriques étaient transmis sous forme analogique de courant électrique qui varie de façon continue. Des techniques électriques analogues avaient dominé les systèmes de communication pour un siècle ou plus.

Le développement du réseau téléphonique mondial durant le *XX<sup>e</sup>* siècle a conduit à plusieurs avancées dans la conception des systèmes électriques de communication.

L'utilisation des câbles coaxiaux à la place des paires de fil a considérablement augmenté la capacité des systèmes. Le premier système avec des câbles coaxiaux, mis en service en **1940**, fonctionnait à **3 MHz** capable de transmettre **300** canaux vocaux ou un seul canal de télévision. La bande passante d'un tel système est limitée par les pertes du câble qui dépendent de la fréquence, et qui augmentent rapidement dès que la fréquence dépasse **10 MHz**. Cette limitation a entraîné le développement des systèmes de communications micro-onde dans lesquels une onde porteuse électromagnétique de fréquence de l'ordre de **1-10GHz** est utilisée pour transmettre le signal en employant des techniques de modulations adéquates.



**Figure I.1 : Emergence de nouvelles technologies et augmentation du facteur de qualité BL durant la période 1850-2000**

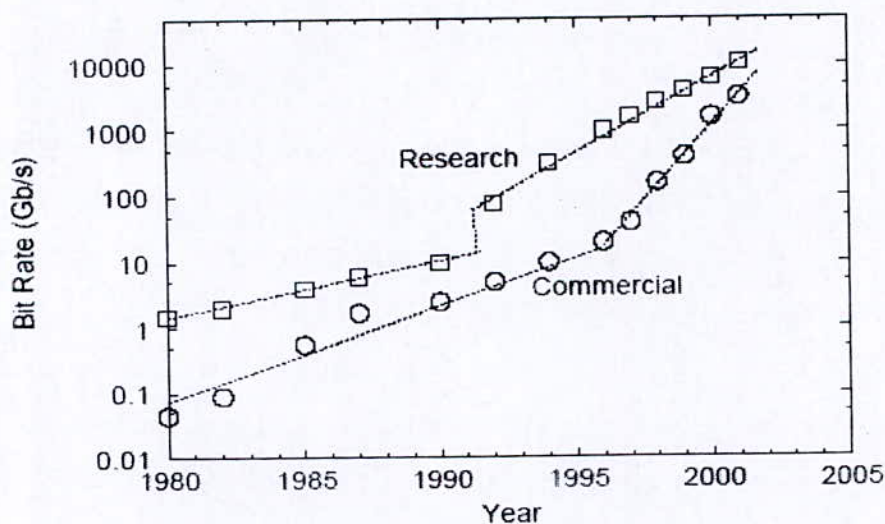
Le premier système micro-onde fonctionnant à la fréquence porteuse de **4GHz** a été mis en service en **1948**. Depuis, les systèmes micro-ondes et les systèmes à câbles coaxiaux ont considérablement évolué et étaient capables de fournir des débits avoisinants les **100 Mb/s**. Le système à câble coaxial le plus évolué fut mis en service en **1975** et fournissait un débit de **274Mb/s**. Le défaut majeur de ces systèmes à câbles coaxiaux à haut débit est leur petit « répéteurs » (*repeater spacing*) **~1km**, qui rend ces systèmes



relativement chers. Les systèmes de communication micro-ondes tiennent compte généralement d'un plus grand *répéteur*, mais leur débit par contre est limité par la fréquence porteuse de ces ondes. Une grandeur est utilisée généralement pour déterminer la qualité d'un système de communication, c'est le *facteur de qualité BL* (*produit Bande passante - Longueur pour les systèmes analogiques, et débit- longueur pour les systèmes numériques*). La *fig. I.1* montre comment le facteur de qualité *BL* a évolué à travers les progrès technologiques durant les dernières *150* années. Les systèmes de communication avec des facteurs de qualité *BL ~100 (Mb/s)-km* étaient disponibles dès *1970* et étaient limités à de telles valeurs.

Durant la seconde moitié du *XX<sup>e</sup>* siècle, on a réalisé que l'on pouvait augmenter le facteur de qualité *BL* de plusieurs ordres de grandeur si on utilisait des ondes porteuses optiques. Cependant, il n'existait pas de sources optiques cohérentes ni de supports de transmission adéquats durant les années *1950*. L'invention du laser en *1960* a résolu le premier problème. L'attention était portée donc sur la question suivante : *comment utiliser la lumière du laser pour les communications optiques ?* Plusieurs suggestions et idées ont été avancées durant les années soixante, mais l'idée la plus frappante était de confiner la lumière en utilisant des verres.

En *1966*, on a suggéré que les fibres optiques pourraient être le meilleur choix, car elles étaient capables de guider la lumière d'une manière similaire au guidage des électrons dans les fils en cuivre. Le problème majeur était leur forte atténuation qui dépassait *1000 dB/km*.



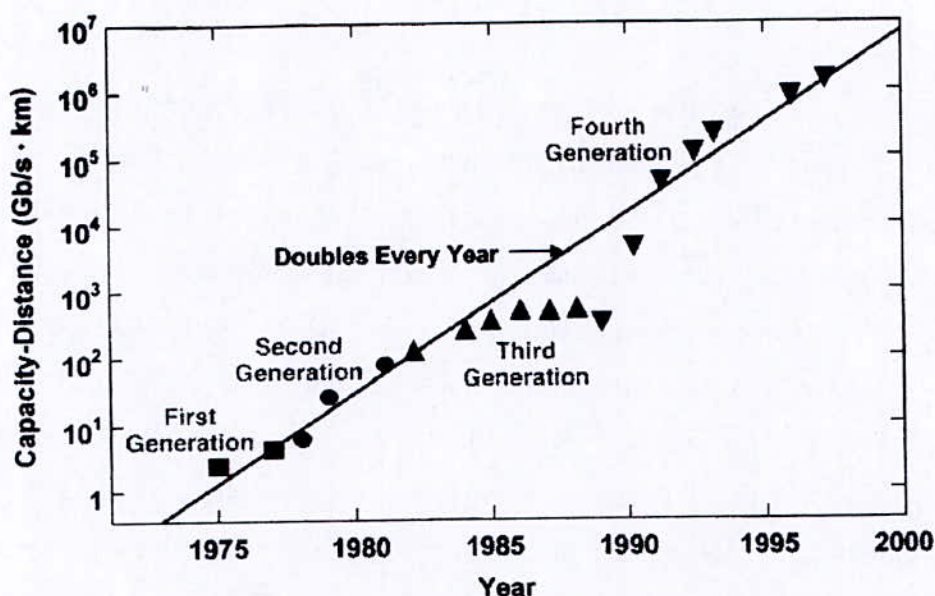
**Figure I.2 : Progression de la capacité des systèmes optiques après 1980**

Un progrès incroyable s'est produit en 1970, quand les pertes de la fibre ont été réduites en dessous de  $20\text{dB/km}$  dans la région spectrale avoisinant  $1\mu\text{m}$ . En même temps pratiquement, des lasers à semi-conducteurs *GaAs*, fonctionnant de façon continue à une température ambiante, ont été inventés. La disponibilité simultanée de sources optiques compactes et de fibres optiques à faibles pertes a entraîné des efforts du monde entier pour développer les systèmes de communication sur fibre optique. La *fig. I.2* montre le progrès des systèmes optiques réalisés après 1980. Comme c'est illustré, le déploiement commercial des systèmes optiques a suivi de près la phase de recherche et de développement. Le progrès a en effet été rapide puisque le débit de transfert a été multiplié par un facteur de 100 000 en moins de 25 ans. La distance de transmission a, elle aussi, été améliorée passant de 10 à 10 000km durant la même période. Par conséquent, le facteur de qualité *BL* des systèmes optiques modernes est plus de  $10^7$  fois plus important comparé avec les premières générations des systèmes optiques. [1], [2]

### **1.2.2) Evolution des systèmes d'ondes optiques**

La phase de recherche des systèmes de communication à fibre optique a commencé aux alentours de 1975. Le progrès énorme réalisé durant la période allant de 1975 à 2000 peut être groupé en plusieurs générations distinctes. La *fig. I.3* montre l'évolution du facteur de qualité *BL* durant cette période, constatée par différents laboratoires de recherche. La ligne droite correspond à une évolution du facteur de qualité *BL* qui double chaque année.





**Figure 1.3 : Développement du facteur de qualité  $BL$  durant la période 1975-1980 à travers plusieurs générations de systèmes optiques**

Dans chaque génération, le facteur de qualité  $BL$  augmente initialement mais commence à se saturer avec le développement technologique. Chaque nouvelle génération apporte un changement fondamental qui contribue à l'amélioration des performances des systèmes.

La première génération des systèmes optiques fonctionnait aux alentours de  $0.8\mu\text{m}$  et utilisait des lasers à semi-conducteurs  $GaAs$ . Après plusieurs essais durant la période 1977 – 1979, ces systèmes furent commercialisés en 1980. Ils fournissaient des débits de  $45\text{Mb/s}$  et des répéteurs de plus de  $10\text{ km}$ . C'est ce répéteur, plus important que celui des systèmes à câbles coaxiaux ( $1\text{km}$ ), qui a réellement motivé les designers parce qu'il diminuait considérablement le coût de l'installation et de maintenance de chaque répéteur.

Il était clair durant les années 1970 que le répéteur pouvait être considérablement augmenté en faisant fonctionner les systèmes d'onde optiques à des longueurs d'onde avoisinant  $1.3\mu\text{m}$ , où les pertes causées par la fibre étaient  $< 1\text{ dB/km}$ .

Cette réalisation poussa les chercheurs du monde entier à fournir davantage d'efforts pour le développement de lasers à semi-conducteurs  $InGaAsP$  et de détecteurs fonctionnant à  $1.3\mu\text{m}$ . La seconde génération des systèmes de communication à fibres



optiques était disponible au début des années **1980**. Cependant, le débit de transfert de ces derniers systèmes atteignait difficilement **100Mb/s** à cause de la dispersion dans les fibres multimodes. Cette limitation a été compensée et surmontée par la venue des fibres monomodes. Une expérience a montré, en **1981**, la possibilité de transmettre à **2Gb/s** sur **44km** de fibre monomode. Il s'en est vite suivi l'introduction des systèmes commerciaux .

En **1987**, des systèmes optiques seconde génération, fonctionnant à plus de **1.7Gb/s** avec un répéteur de **50 km**, étaient commercialisés.

Le répéteur des systèmes optiques deuxième génération était limité par les pertes de la fibre à la longueur d'onde de travail de **1.3 $\mu\text{m}$**  (typiquement **0.5 dB/km**). Les pertes des fibres en silice devenaient minimums au voisinage de **1.55  $\mu\text{m}$** . En effet, une atténuation de **0.2dB/km** était réalisée en **1979** dans cette région spectrale.

Cependant, l'introduction de la troisième génération des systèmes optiques fonctionnant à **1.55  $\mu\text{m}$**  a été sérieusement retardée par une grande dispersion de la fibre au voisinage de **1.55 $\mu\text{m}$** . Les lasers à semi-conducteurs **InGaAsP** conventionnels ne pouvaient pas être utilisés à cause de la propagation des impulsions due aux oscillations simultanées de plusieurs modes longitudinaux. Le problème de dispersion pouvait être résolu soit en utilisant des fibres à dispersion réglable, conçues pour avoir une atténuation minimum au voisinage de **1.55 $\mu\text{m}$** , ou en limitant le spectre du laser à un seul mode longitudinal.

Les deux approches furent testées durant les années **1980**. En **1985**, des expériences d'un laboratoire ont prouvé la possibilité de transmettre des informations à un débit dépassant les **4 Gb/s** et sur des distances supérieures à **100 km**. Les systèmes de communication troisième génération fonctionnant à **2.5 Gb/s** avaient été commercialisés en **1990**. De tels systèmes sont capables de fonctionner à plus de **10Gb/s**. La meilleure performance a été accomplie en utilisant des fibres à dispersion réglable en combinaison avec des lasers oscillant sur un seul mode longitudinale.

Un des inconvénients des systèmes optiques troisième génération à **1.55  $\mu\text{m}$**  est que le signal est régénéré périodiquement en employant des répéteurs électroniques à un intervalle de **60 - 70km**. Le répéteur peut être amélioré en utilisant un système de détection homodyne ou hétérodyne, parce que son utilisation améliore la sensibilité des récepteurs. Ces systèmes sont connus sous le nom de *systèmes optiques cohérents*. Les systèmes cohérents étaient sous développés à l'échelle mondiale durant les années **1980** et leurs profits (*avantages*) potentiels ont été démontrés lors de quelques expériences.



Cependant, l'introduction dans le commerce de ces systèmes a été remise à plus tard, avec la venue des amplificateurs de fibres en 1989.

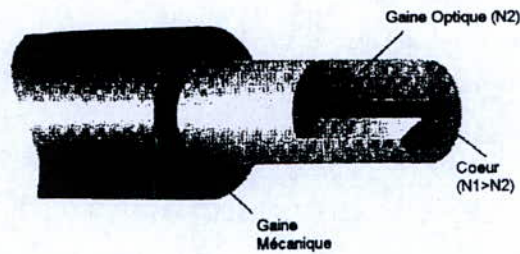
La quatrième génération des systèmes optiques a fait usage de l'*amplification optique* pour augmenter les répéteurs, et de *WDM (Wavelength-Division Multiplexing)* pour augmenter le débit de transfert. Il est évident, en observant les différentes pentes de la *fig. I.2*, avant et après 1992, le progrès de la technique *WDM* a entraîné une révolution qui a abouti à une multiplication par deux de la capacité des systèmes chaque six mois et à un fonctionnement des systèmes optiques à un débit de *10Tb/s* en 2001. Dans la plupart des systèmes *WDM*, les pertes de la fibre sont compensées périodiquement en utilisant des amplificateurs de fibre dopés en erbium espacés de *60 – 80 km*. Ces amplificateurs furent développés après 1985 et furent commercialisés en 1990. En 1991, une expérience a montré la possibilité de transmettre des informations sur *21000km* à *2.5Gb/s*, et sur *14300km* à *5Gb/s* en utilisant une configuration en boucle. [1]

### **I.3) Notions générales sur la fibre optique :**

La fibre optique est un guide diélectrique cylindrique de lumière. Elle est constituée d'un cœur (*core*) dans sa partie centrale, d'indice  $n_1$ , dans lequel se propage l'onde lumineuse en se réfléchissant sur la gaine optique (*cladding*), d'indice de réfraction  $n_2$ , (*légèrement plus faible que  $n_1$* ), et entourant le cœur. C'est grâce à cette différence d'indices qu'il y a propagation. La fibre optique est protégée par un revêtement extérieur.

Pour caractériser une fibre optique, il faut connaître plusieurs paramètres dont :

- ✓ Le profil d'indice
- ✓ L'ouverture numérique
- ✓ Le diamètre
- ✓ La bande passante associée à l'élargissement des impulsions et à la dispersion fréquentielle
- ✓ Les pertes
- ✓ La dispersion modale
- ✓ L'atténuation spectrale



**Figure I.4 : Schéma de la fibre optique**

Pour chacun de ces paramètres plusieurs méthodes ont été développées et permettent de les mesurer d'une manière plus ou moins précise. Ces paramètres sont indispensables dans le calcul des liaisons à fibre optique. [4]

#### **I.4) Avantages et inconvénients de la fibre optique :**

Ses avantages sont nombreux et justifient l'introduction des fibres optiques dans des applications de plus en plus variées. On peut les classer en :

- **Performances de transmission :**

- ✓ très faible atténuation ; ceci permet une transmission sur de plus grandes distances ou des espacements plus grands entre répéteurs, et donc entraîne une diminution du coût par rapport aux supports en cuivre,
- ✓ très grande bande passante : la bande passante d'un support de transmission dépend essentiellement de sa fréquence porteuse. Celles du domaine optique sont supérieures aux autres telles que les micro-ondes grâce à leurs fréquences élevées. La fibre optique offre une bande passante de plusieurs **THz**. Ceci permet une transmission simultanée d'une plus grande quantité d'informations, et donc la possibilité d'un multiplexage de plusieurs signaux (*fibre multimodes*), d'où des systèmes de transmission de portée et de capacité bien supérieures à celles des supports en cuivre.



- **Avantages de mise en œuvre :**
  - ✓ très petite taille,
  - ✓ grande souplesse,
  - ✓ faible poids,
  - ✓ appréciables aussi bien en télécommunications que pour le câblage en informatique, aéronautique, applications industrielles.
- **Sécurité électrique et électromagnétique**
  - ✓ isolation totale entre terminaux,
  - ✓ Utilisation possible en milieu explosif ou sous forte tension,
  - ✓ la fibre optique n'est pas sensible aux parasites et n'en crée pas elle-même,
  - ✓ une inviolabilité presque totale.
- **Avantage économique :**
  - ✓ contrairement à l'idée encore répandue, le coût global d'un système sur fibre optique est souvent de plus en plus inférieur à celui d'un système sur cuivre.
- **Inconvénient :**
  - ✓ L'inconvénient majeur qu'on peut reprocher à la fibre optique est que les interfaces d'émission et de réception ne peuvent pas être réversibles ; c'est-à-dire qu'une liaison en émission ne peut pas être utilisée en réception et vice versa. [4], [6]

### **I.5) Pertes de la fibre :**

La puissance d'un signal optique dans une fibre optique décroît exponentiellement avec la distance suivant la relation :

$$P(z) = P(0)e^{-\alpha_p z}$$

Où :

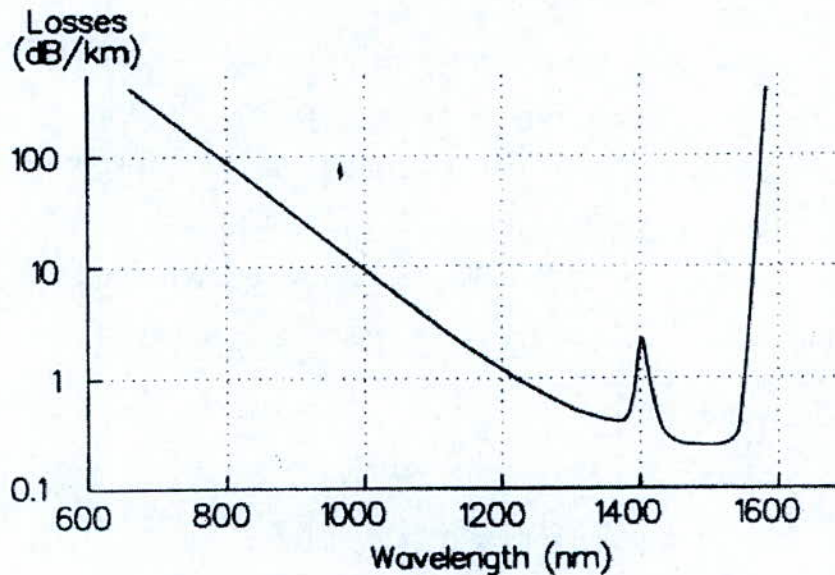
$$\alpha_p = -\left(\frac{1}{z}\right) \ln\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right),$$

où  $P(z)$  est la puissance à la position  $z$ ,  $P(0)$  est la puissance injectée dans la fibre à l'origine ( $z=0$ ), et  $\alpha_p$  est le coefficient d'atténuation de la fibre exprimé en  $km^{-1}$  qui dépend à son tour de plusieurs autres paramètres.

Pour éviter d'avoir à calculer sans cesse des exponentiels, les pertes optiques de la fibre sont données par un coefficient d'atténuation  $\alpha$  [dB/km].  $\alpha$  est donné par l'expression :

$$\alpha = -\frac{10}{z[\text{km}]} \log\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right)$$

Pour une fibre donnée, ces pertes dépendent de la longueur d'onde, et on peut soit donner la distribution spectrale, soit spécifier les pertes à la longueur d'onde de travail. La valeur du facteur d'atténuation dépend essentiellement du matériau de la fibre et du procédé de fabrication, mais une forme générale du spectre est donnée.



**Figure I.5 : Distribution spectrale des pertes pour une fibre multimode en silice**

Les pertes de la fibre sont dues à plusieurs paramètres, parmi les plus importants sont :

- Absorption du matériau,
- Absorption due aux impuretés (*particulièrement les ions métalliques*),
- Effets de dispersion,
- Inhomogénéité de l'interface (*imperfections géométriques*),
- Radiations par les courbures et les pliements.



Nous allons décrire certains de ces paramètres en considérant les autres paramètres absents. La perte totale n'est autre que la somme (*en dB*) des pertes de chaque paramètre.

➤ Absorption du matériau

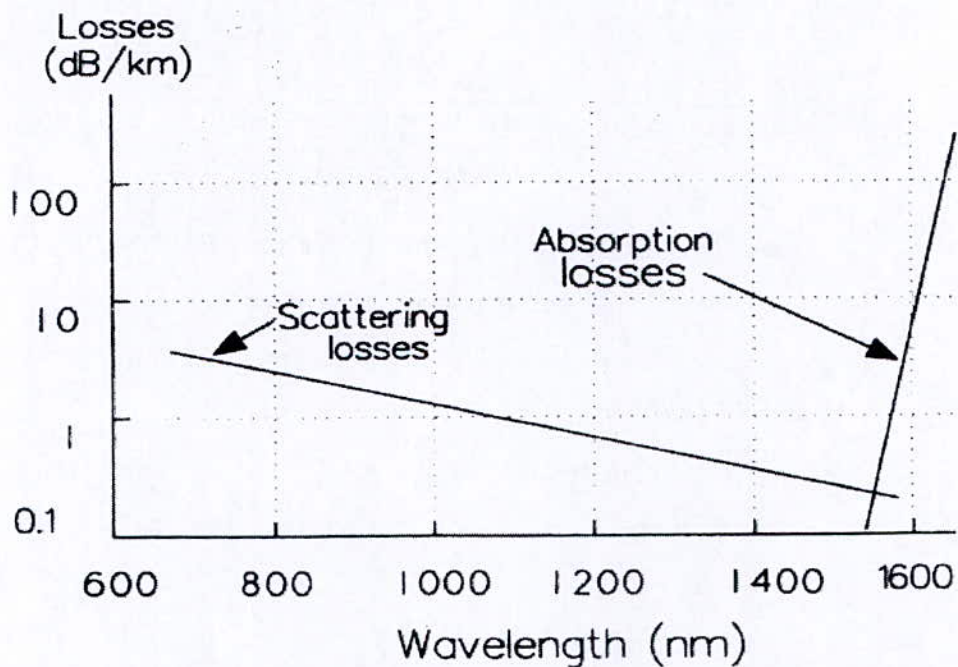
Les absorptions du matériau sont celles dues aux molécules du matériau de base de la fibre, que ce soit le verre ou le plastique. Ces pertes peuvent être corrigées seulement en changeant le matériau de la fibre. En effet, la recherche continue pour des matériaux avec des pertes ultra faibles.

Les ions métalliques (*fer, cobalt, cuivre, chrome*) et l'ion  $\text{OH}^-$  (*provenant de l'eau*) sont la principale source d'impuretés du matériau dans une fibre en verre.

Ensuite suivent les effets d'*Hydrogène*. D'importantes pertes peuvent se produire si la fibre est exposée au gaz d'hydrogène (*qui peut provenir de la corrosion des câbles en cuivre ou de certaines bactéries*).

➤ Pertes de dispersion :

Les pertes de dispersion se produisent lorsqu'une onde rencontre des particules et que ces dernières transfèrent une partie de l'énergie dans une direction autre que la direction de propagation. On peut trouver des dispersions linéaires (*elles sont caractérisées par l'inchangement de fréquence de l'onde, et la puissance transférée totale est proportionnelle à la puissance de l'onde*), et des dispersions non linéaires (*entraînées par de grandes valeurs du champ électrique à l'intérieur de la fibre*).



**Figure I.6 : Région d'atténuation (absorption et dispersion) dans les fibres en silice**

➤ Inhomogénéité de l'interface (imperfections géométriques)

Elles ont la propriété de convertir les modes d'ordre élevé en des modes perdus envoyés dans la gaine où ils sont éliminés dans le revêtement mécanique extérieur. Ces inhomogénéités peuvent être dues à des impuretés piégées dans l'interface cœur – gaine, ou bien à un changement de la forme et/ou la taille du cœur et/ou la gaine du à des défauts de fabrication. [6]

**I.6) Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons introduit des notions sur la fibre optique et certains de ses paramètres utilisés pour décrire ses performances. La fibre optique de base est constituée d'un cœur et d'une gaine ; une conception plus avancée peut ajouter d'autres couches de gaines. On a vu aussi l'évolution à travers le temps et le progrès énorme réalisé par ce guide qui, malgré ses performances technologiques réalisées en peu de temps et ses avantages économiques et de mise en oeuvre, nous promet pleins d'autres progrès et devient déjà incontournable dans le domaine de transmission de l'information ou comme élément sensible (capteurs).



**Chapitre 2 :**

***Méthode d'analyse géométrique***

***de la fibre optique***

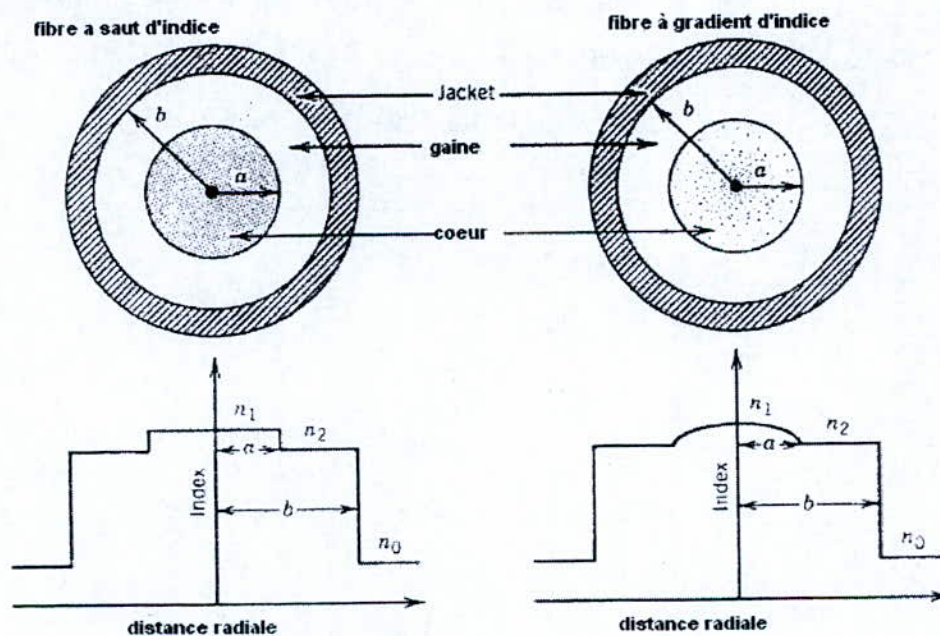
## Méthode d'analyse géométrique de la fibre optique

### II.1) Introduction :

Dans ce chapitre, nous allons montrer que l'étude de la propagation peut se faire de façon très simplifiée, mais correcte, et cela grâce aux lois classiques de l'optique géométrique, qui consiste à suivre l'évolution des rayons lumineux dans la fibre optique et à calculer les trajectoires des rayons.

### II.2) Description de l'optique géométrique :

Sous sa forme la plus simple, une fibre optique se compose d'un cœur cylindrique de verre en silice d'indice de réfraction  $n_1$  entouré d'un revêtement appelé gaine (*cladding*), dont l'indice de réfraction  $n_2$ , est légèrement inférieur à celui du cœur. En raison d'un changement brusque de la valeur de l'indice à l'interface cœur - gaine, ces fibres sont appelées *fibres à saut d'indice*. Dans un autre type de fibre, connues sous le nom de *fibres à gradient d'indice*, l'indice de réfraction diminue graduellement à l'intérieur du cœur. La *fig. 2.1* illustre le profil d'indice ainsi qu'une coupe de section pour les deux types de fibres.



**Figure II.1 : Profil d'indice et section des fibres à saut d'indice et à gradient d'indice**



Bien qu'approximative, la description de *l'optique géométrique* reste valable pour des fibres dont le rayon du cœur  $a$  est plus grand que la longueur d'onde  $\lambda$ . Quand les deux grandeurs sont comparables (*proches*), on doit utiliser alors la théorie de *la propagation d'onde* (équations de Maxwell).

### II.2.1) Fibre à saut d'indice

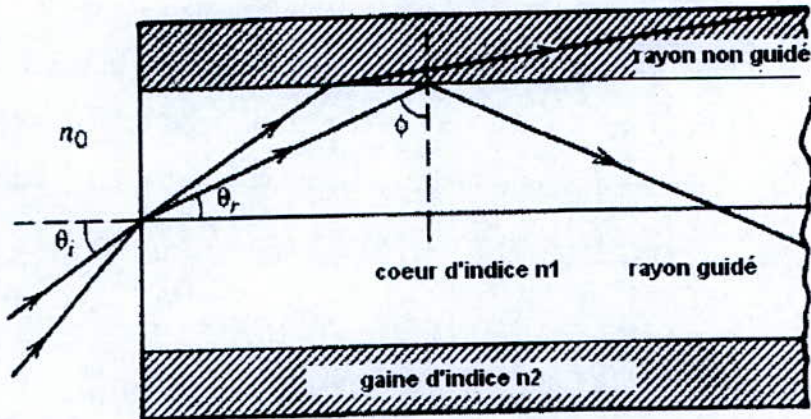
Prenons la *fig. 2.2* où un rayon incident fait un angle  $\theta_i$  avec l'axe de la fibre. En raison de l'interface *air - fibre*, le rayon se réfracte. L'angle du rayon réfracté est donné par :

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r \quad (2.1)$$

Le rayon réfracté rencontre l'interface *cœur - gaine* et est réfléchi encore une fois de plus. Cependant, la réflexion n'est possible que pour des angles d'incidence  $\phi$  vérifiant la condition :  $\sin \phi < \frac{n_2}{n_1}$ . Pour des angles supérieurs à un angle critique  $\phi_c$ , défini par :

$$\sin \phi_c = \frac{n_2}{n_1}, \quad (2.2)$$

Le rayon subira une réflexion interne totale à l'interface *cœur - gaine*. Puisque de telles réflexions ont lieu tout au long de la fibre, tous les rayons satisfaisant la condition  $\phi > \phi_c$  restent confinés (*emprisonnés*) dans le cœur de la fibre. C'est le mécanisme de base responsable du confinement de la lumière à l'intérieur de la fibre optique, grâce aux valeurs de  $n_1$  et  $n_2$ .



**Figure II.2 : Guidage de la lumière à l'intérieur d'une fibre à saut d'indice**

A partir des *Eqs. (2.1)* et *(2.2)*, on peut déduire l'angle maximum que peut faire le rayon incident à l'entrée de la fibre pour rester confiné dans le cœur. A noter que

$\theta_r = \frac{\pi}{2} - \phi_c$ , en remplaçant ce résultat dans *(2.1)* nous obtenons :

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \cos \phi_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (2.3)$$

Par analogie aux lentilles (*verres*),  $n_0 \sin \theta_i$  est connu sous le nom d'*ouverture numérique (ON)* de la fibre. Elle représente la capacité d'une fibre à récolter (*rassembler*) de la lumière. Parce que  $n_1 \approx n_2$ , *ON* peut se mettre sous la forme :

$$ON = n_1 \sqrt{(2\Delta)}, \quad \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (2.4)$$

où  $\Delta$  est la *différence relative d'indice* à l'interface cœur - gaine. Plus précisément,  $\Delta$  devrait être aussi grand que possible pour permettre de coupler un maximum de lumière dans la fibre. Cependant, de telles fibres ne sont pas pratiques dans le domaine des communications optiques à cause du phénomène de la *dispersion modale*.

Cette dispersion peut être expliquée en se référant à la *fig.2.2*, où différents rayons traversent la fibre suivant des chemins (*trajectoires*) de longueur différente. Par conséquent, même si à l'entrée de la fibre ils ont débuté en même temps et à la même vitesse, ces rayons seront décalés dans le temps à la sortie. Dans ce cas, une impulsion



brève s'élargirait considérablement en raison des temps de propagation différents. On peut estimer l'ampleur de l'élargissement de l'impulsion simplement en considérant les trajectoires des rayons le plus court et le plus long. Le chemin le plus court correspond à  $\theta_i=0$  et est de longueur  $L$ . Le chemin le plus long correspond à  $\theta_i$  donné par l'Eq.(2.3) et est de longueur  $L/\sin\phi_c$ . En prenant la vitesse de propagation  $v = \frac{c}{n_1}$ , la différence de temps  $\Delta T$  est donnée par :

$$\Delta T = \frac{n_1}{c} \left( \frac{L}{\sin\phi_c} - L \right) = \frac{L n_1^2}{c n_2} \Delta \quad (2.5)$$

Le retard entre le rayon prenant le chemin le plus court et celui prenant le chemin le plus long peut être trouvé en mesurant l'élargissement obtenu à la sortie de la fibre après avoir injecté à l'entrée de celle-ci une impulsion d'une longueur donnée.

On peut relier  $\Delta T$  à la capacité de la fibre à transmettre des informations à un certain débit  $B$ . Puisque une relation précise entre  $\Delta T$  et  $B$  dépend de plusieurs paramètres, tels que la forme de l'impulsion, il est clair que  $\Delta T$  devrait être inférieure à  $T_B=1/B$ . Donc, on peut obtenir un ordre de grandeur du débit de transfert à partir de la condition  $B\Delta T < 1$ . En utilisant Eq.2.5, on obtient :

$$BL < \frac{n_2 c}{n_1^2 \Delta} \quad (2.6)$$

Cette condition donne une estimation approximative d'une limitation fondamentale d'une fibre à saut d'indice. Si on considère, par exemple, une fibre en verre nue, c'est-à-dire sans gaine, avec  $n_1=1.5$  et  $n_2=1$ . Le produit  $BL$  de cette fibre sera limité à de très petites valeurs  $BL < 0.4$  (Mb/s)-km. Des progrès considérables ont été réalisés concernant les fibres revêtues (avec gaine) avec une légère différence d'indices. La plupart des fibres pour des applications de communication sont conçues avec un  $\Delta < 0.01$ . Par exemple,  $BL < 100$  (Mb/s)-km lorsque  $\Delta = 0.002$ . Ces fibres peuvent communiquer à des débits de 10 Mb/s et à des distances dépassant 10 km et peuvent être donc adéquates pour des réseaux locaux. [1]

### II.2.1.1) Modes dans les fibres à saut d'indice :

Les fibres décrites ci-dessus sont appelées *fibres à saut d'indice* à cause du changement brusque de l'indice de réfraction à l'interface cœur - gaine. Le champ électromagnétique qui se propage dans de tels guides diélectriques cylindriques et



symétriques peut être résolu et la solution implique l'utilisation des fonctions de *Bessel* que nous verrons plus tard.

Ces guides présentent certaines conditions aux limites pour le champ électromagnétique qui doivent être satisfaites à l'interface entre les deux régions (*cœur et gaine*). Par conséquent, seulement certaines combinaisons d'ondes (*appelées Modes*) vont satisfaire ces conditions et pourront se propager. Toutes les autres combinaisons ne satisfaisant pas ces conditions ne vont pas être supportées et ne pourront donc pas se propager convenablement. Comme d'autres guides, on trouve dans la fibre des modes électromagnétiques caractéristiques qui peuvent se propager. Les modes les plus simples sont ceux avec un champ électrique transverse (*à la direction de propagation*) appelés *modes TE (Transverse Electrique)*, ou avec un champ magnétique transverse (*à la direction de propagation*), appelés *modes TM (Transverse Magnétique)*. Ces modes existent aussi dans les guides métalliques. On trouve dans la fibre, en plus de ces modes, des *modes hybrides (i.e. combinaison des modes TE et TM)* appelés *modes HE<sub>mn</sub>* et *modes EH<sub>mn</sub>*. Certains modes sont polarisés linéairement et sont appelés *modes LP (Linearly Polarized)*.

Chaque mode a non seulement sa propre géométrie du champ électrique ou magnétique, mais aussi sa propre constante de propagation  $\beta$ . La plupart des analyses électromagnétiques de la fibre optiques sont une description de ces modes et de leurs coefficients de propagation. Un autre paramètre clé qui décrit la structure d'un mode est la fréquence réduite  $V$  définie par :

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \frac{2\pi a}{\lambda} n_1 \sqrt{2\Delta} \quad (2.7)$$

Le paramètre  $V$  est important parce qu'il détermine le nombre de modes électromagnétiques dans une fibre.

### II.2.1.2) Fibres multimodes à saut d'indices :

- *Nombres de modes*

Pour le profil à saut d'indice, nous observons que pour des valeurs de  $V > 2.405$ , il existe plus d'un mode. Pour de grandes valeurs de  $V$ , plusieurs modes peuvent être supportés par la structure de la fibre. Une estimation du nombre total  $N$  de modes supportés à n'importe quelle valeur de  $V (>> 2.405)$  est donnée par :



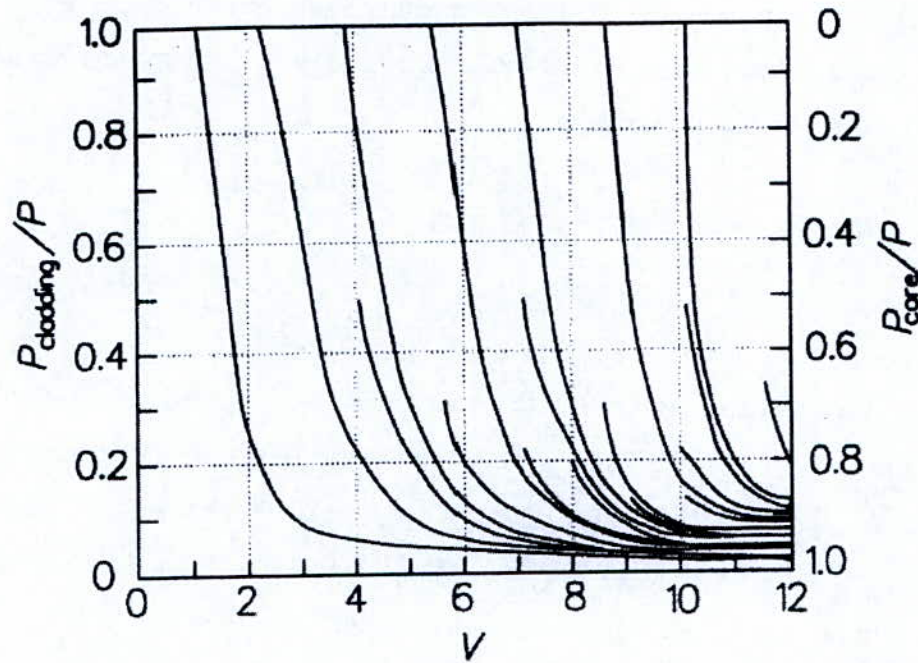
$$\begin{aligned}
 N &\approx \frac{V^2}{2} \quad (\text{Pour } V \gg 2.405) \\
 &\approx (kan_1)^2 \Delta = \left( \frac{2\pi an_1}{\lambda} \right)^2 \Delta \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

- *Distribution d'énergie entre le cœur et la gaine :*

Le champ électromagnétique doit satisfaire les conditions aux limites à l'interface *cœur – gaine* dans la fibre. Contrairement aux problèmes rencontrés dans les guides métalliques, où les champs sont nuls aux parois du guide, le champ dans la gaine de la fibre n'est pas nul. Les champs existent aussi bien dans le cœur que dans la gaine. Par conséquent, une partie de l'énergie se trouve dans le cœur et l'autre partie pourrait se trouver dans la gaine. Il est très intéressant de connaître la distribution de l'énergie dans le cœur et dans la gaine pour différents modes dans une fibre multimode à saut d'indice. La **Fig. 2.3** illustre cette distribution [2]. A noter que quand  $V$  s'approche de la fréquence de coupure pour n'importe quel mode, alors la grande partie de l'énergie se trouve dans la gaine. Pendant la coupure, toute l'énergie est transférée dans la gaine, et le mode devient radiatif et cesse d'être propagé. Pour de grandes valeurs de  $V$ , les modes qui sont proches de la coupure peuvent être négligés, comparés aux modes qui se propagent, et le rapport de l'énergie totale dans la gaine peut être approximée à :

$$\frac{P_{\text{gaine}}}{P_{\text{cœur}}} \approx \frac{4}{3\sqrt{N}}, \quad [5] \quad (2.9)$$

Où  $N$  est le nombre de modes dans la fibre.



**Figure II.3 : Distribution de puissance dans la gaine et dans le cœur en fonction de la fréquence réduite  $V$**

Des efforts importants sont fournis pour réduire le nombre de modes en réduisant  $V$ , car l'énergie se trouvant dans la gaine peut être sujette (*exposée*) à des effets extérieurs, ce qui peut engendrer de grandes pertes qui sont bien entendu indésirables.

### II.2.1.3) Fibres monomodes à saut d'indice :

Les fibres monomodes sont caractérisées par le fait d'avoir un seul mode de propagation. Ces fibres offrent des performances supérieures à celles des fibres multimodes lorsqu'il s'agit de transporter des informations à haut débit. [5]

### II.2.2) Fibres à gradient d'indice :

On a vu la forme du profil d'indice des fibres à saut d'indice. Maintenant on va voir un second type de profil d'indice qui n'a pas de changement brusque de profil d'indice et qui n'utilise pas le phénomène de réflexion totale interne à l'interface cœur – gaine pour guider des ondes. C'est le profil à gradient d'indice. Dans une fibre à gradient d'indice, l'indice de réfraction n'est pas constant mais varie graduellement, il décroît du cœur, où il est maximum et vaut  $n_1$ , à l'interface cœur – gaine, où il est minimum et vaut  $n_2$ . Le phénomène de confinement est la conséquence de la solution du problème de propagation électromagnétique dans les supports diélectriques avec de pareils profils

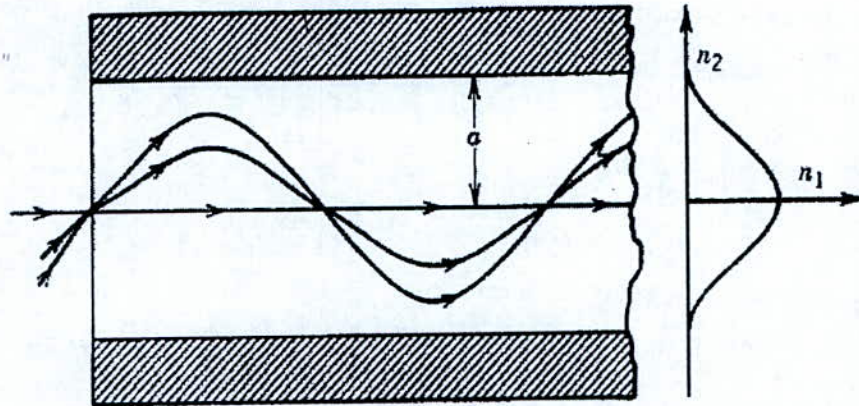


d'indices. Ces trajectoires ont une allure sinusoïdale. La trajectoire de la lumière ondule d'un coté à un autre sans aucune réflexion à l'interface. Le modèle mathématique d'un profil d'indice radial est donné par:

$$n(r) = \begin{cases} n_1 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha} & \text{pour } r < a \\ n_1 \sqrt{1 - 2\Delta} \approx n_1(1 - \Delta) = n_2 & \text{pour } r > a \end{cases} \quad (2.10)$$

Le paramètre de profil  $\alpha$ , connu aussi sous le nom de *gradient* de la fibre, varie selon le profil d'indice utilisé, sa valeur pour un profil parabolique par exemple est  $\alpha = 2$ , ou pour un profil triangulaire  $\alpha = 1$ , et  $\alpha = \infty$  pour un profil à saut d'indice. Dans ce genre de fibres, la gaine joue le rôle d'un support mécanique et d'un isolateur du milieu extérieur, elle ne joue aucun rôle dans le guidage de la lumière. Celui-ci est assuré par la valeur de l'indice de réfraction du cœur  $n(r) \geq n_2$ . Donc la lumière est renvoyée vers le milieu d'indice le plus élevé. Malgré le fait que le gradient parabolique est très proche du profil idéal, d'autres profils ont été analysés et évalués dans différents laboratoires, y compris le profil triangulaire. [5] ;

Il est facile de comprendre qualitativement pourquoi la dispersion modale ou intermodale est réduite fortement dans les fibres à gradient d'indice. Ceci est illustré par la **fig. 2.4**. Comme dans le cas d'une fibre à saut d'indice, plus le rayon est oblique, et plus le chemin emprunté est long. Cependant, la vitesse du rayon varie tout au long de la trajectoire à cause de la variation d'indice de réfraction. Plus précisément, le rayon qui se propage le long de l'axe de la fibre prend le chemin le plus court mais se déplace à la vitesse la plus basse car à cet endroit, l'indice est le plus élevé. Les rayons obliques ont un chemin dont la plus grande partie se trouve au milieu du cœur, d'indice de réfraction plus faible que celui sur l'axe de la fibre optique, et donc se déplacent plus rapidement. Par conséquent, il est possible que tous les rayons arrivent ensemble à la sortie de la fibre à condition de choisir le bon profil d'indice.



**Figure II.4 : Trajectoires des rayons dans une fibre à gradient d'indice**

L'approximation précédente ( $n(r)$ ) dérive de la définition de  $\Delta$  pour les fibres à gradient d'indice qui est:

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 - n_2)}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}, \quad (2.11)$$

C'est la même expression que pour les fibres à saut d'indice.

Une fibre multimode à gradient d'indice typique possède un diamètre extérieure  $b=125$  ou  $140\mu\text{m}$  avec une différence d'indice allant de 1 à 2% provoquée par la différence de niveau de dopage des impuretés radialement dans les deux milieux.

### II.2.2.1) Nombre de modes dans une fibre à gradient d'indice :

La fréquence réduite d'une fibre à gradient d'indice (pour de petites valeurs de  $\Delta$ ) est définie de la même manière que dans une fibre à saut d'indice, c'est à dire :

$$V = n_1 k a \sqrt{2\Delta} = \frac{2\pi a n_1 \sqrt{2\Delta}}{\lambda} \quad (2.12)$$

Le nombre de modes  $N$  dans une fibre multimodes à gradient d'indice peut être approximé par :

$$N \approx \left( \frac{\alpha}{\alpha + 2} \right) \left( \frac{4a^2 \pi^2 n_1^2 \Delta}{\lambda^2} \right) \approx \left( \frac{\alpha}{\alpha + 2} \right) \left( \frac{V^2}{2} \right) \quad (2.13)$$

### II.2.2.2) Ouverture numérique :

L'ouverture numérique  $ON$  est plus difficile à définir dans une fibre à gradient d'indice que dans une fibre à saut d'indice. Contrairement aux fibres à saut d'indice,



l'angle d'acceptance maximum  $\theta_{max}$  des fibres à gradient d'indice est fonction de la position radiale du rayon. L' $ON$  peut être définie comme :

$$ON(r) = \begin{cases} ON(0) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^\alpha} & \text{pour } r < a \\ 0 & \text{pour } r > a \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $ON(0)$  est l'ouverture numérique au centre du cœur de la fibre (comme dans le cas de la fibre à saut d'indice). Cette équation prévoit la décroissance de l' $ON$  du centre de la fibre à l'interface cœur - gaine.

### II.2.2.3) Fibres monomodes à gradient d'indice :

Il est possible de réaliser une fibre monomode à gradient d'indice. La fréquence de coupure pour un fonctionnement monomode pour de telles fibres, comme nous allons le voir, est différente de 2.405. Pour un profil parabolique ( $\alpha = 2$ ), la valeur de coupure de  $V$  est 3.53 ; pour un profil triangulaire ( $\alpha = 1$ ), elle est de 4.38. Une approximation de la valeur de coupure de  $V$  pour une propagation monomode dans une fibre à gradient d'indice est donnée par :

$$V_{co} = 2.405 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)} \quad (2.15)$$

Si les autres paramètres sont identiques, le diamètre du cœur de la fibre monomode à gradient d'indice devrait être  $\sqrt{1 + \left(\frac{2}{\alpha}\right)}$  fois celui de la fibre à saut d'indice équivalente.

Ceci fournit une grande facilité pour coupler la lumière, une grande facilité de raccordement, et une réduction des pertes dues aux courbures de la fibre. Une fibre à indice parabolique ( $\alpha = 2$ ) fournit une amélioration par un facteur de  $\sqrt{2}$  ; la fibre à indice triangulaire ( $\alpha = 1$ ) fournit une amélioration par un facteur de  $\sqrt{3}$ . [5]

La première génération de systèmes optiques utilisait des fibres à gradient d'indice, mais on pouvait réaliser des améliorations seulement en utilisant des fibres à saut d'indice dont le diamètre du cœur est comparable à la longueur d'onde. L'approximation de l'optique géométrique ne peut donc pas être utilisée pour ces fibres.

Bien que les fibres à gradient d'indice soient rarement utilisées pour des liaisons longues distances, l'utilisation des fibres en plastique à gradient d'indice pour des applications des liaisons de données a attiré une attention considérable durant les années 1990. Ces fibres ont un diamètre du cœur relativement grand, résultant une grande

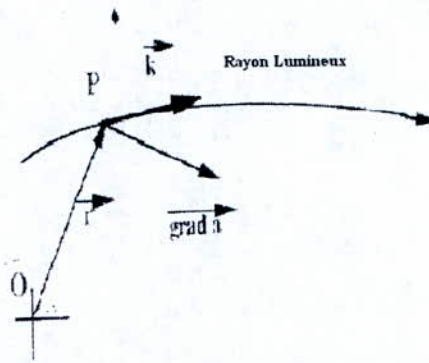
ouverture numérique et une grande capacité de couplage mais elles présentent des pertes considérables (*dépassant 50 dB/km*). Cependant, le produit *BL* d'une fibre en plastique dépasse *2 (Gb/s)-km* grâce au profil à gradient d'indice. Par conséquent, elles peuvent être utilisées pour transmettre des données à des débits dépassant *1 Gb/s* mais à des distances n'atteignant pas *1 km*. Ces fibres sont donc idéales pour des applications Ethernet ou le transfert de données entre PC. Les fibres optiques en plastique sont souvent utilisées comme éléments sensibles, c'est-à-dire capteurs. [5]

### II.3) Etude en optique géométrique des fibres multimodes :

#### II.3.1) équations des rayons :

Une onde harmonique se propageant dans un milieu quelconque se met sous la forme générale :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - k_0 S(\vec{r})), \text{ avec } \vec{r} = \overline{OP}. \quad (2.16)$$



**Figure II.5 : Trajectoire d'un rayon lumineux**

La quantité  $S(\vec{r})$ , homogène à une longueur est appelée *eikonal*.

Les surfaces de phase correspondent à  $S(\vec{r}) = \text{constante}$ .

Le vecteur d'onde vaut alors  $\vec{k} = k_0 \overline{\text{grad}}(S)$ .

Cette onde harmonique peut être assimilée à une onde plane si  $\vec{E}_0(\vec{r})$  est constant, du moins si sa variation est très petite sur une distance d'une longueur d'onde ; ce qui peut s'écrire :

$$\frac{\Delta E}{E} \ll \frac{\Delta x}{\lambda}, \quad (2.17)$$



expression appelée traditionnellement hypothèse de l'optique géométrique où  $\Delta E$  est la variation du champ électrique sur la distance  $\Delta x$ .

Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on peut assimiler l'onde à un *rayon lumineux* de trajectoire orthogonale aux surfaces de phase. En milieu homogène, cette trajectoire est bien entendu une droite. En milieu non homogène mais vérifiant la condition  $\frac{\Delta n}{n} \ll \frac{\Delta x}{\lambda}$ , cette trajectoire peut donc être calculée à l'aide de l'équation des rayons :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( n \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) = \overline{\text{grad}}(n) \tag{2.18}$$

$s$  : est l'abscisse curviligne

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$  : vecteur unitaire tangent à la trajectoire

Cette *équation des rayons* permet de calculer leur trajectoire. On remarque que les rayons se courbent vers les indices les plus élevés.

**II.3.2) Définitions des modes :**

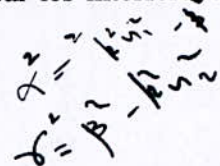
L'allure du champ suivant l'axe  $Ox$  dépend des conditions aux limites. En effet, pour qu'elle soit celle d'une onde stationnaire, ce qu'on appelle *mode*, il faut que l'onde se retrouve en phase après un aller-retour entre les deux interfaces, distantes de  $2a$ , d'où :

$$4a \cdot \alpha + 2\phi = m \cdot 2\pi, \tag{2.19}$$

$m$  étant un entier.

Cette condition définit le mode d'ordre  $m$ , il est sélectionné par les interférences entre les réflexions successives.

Le déphasage lors de la réflexion totale vaut  $\phi = -2 \arctan\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)$



La différence avec un guide d'onde métallique, où  $\phi = \pi$ , vient de ce retard de phase qui est équivalent à un trajet plus long, donc à une réflexion sur un plan métallique fictif situé au-delà de l'interface, à une distance  $x_0$  donnée par :

$$\phi = 2\alpha x_0 + \pi \text{ d'où : } x_0 = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{\alpha}{\gamma}$$

C'est l'effet *Goos-Hanchen*.

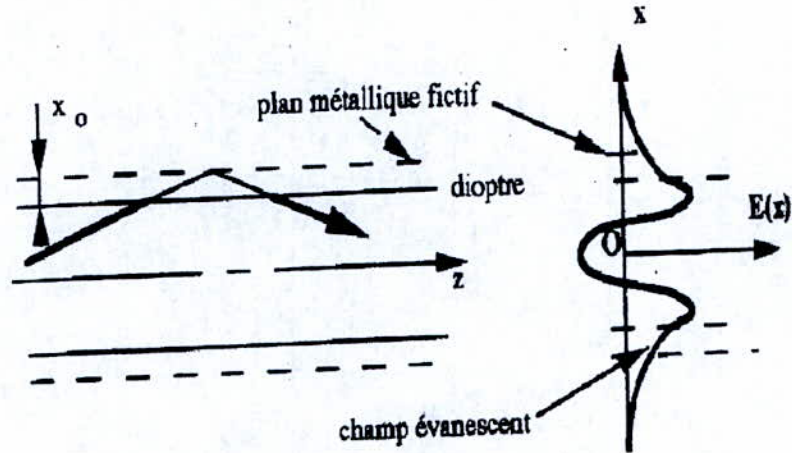


Figure II.6 : Effet Goss-Hanchen et allure du champ

**II.3.3) Calcul des modes :**

L'équation  $a.\alpha + \frac{\phi}{2} = m.\frac{\pi}{2}$  peut être résolu graphiquement avec  $\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{\gamma}{\alpha}$ , d'où

$$\gamma = \alpha \cdot \tan\left(a\alpha - m.\frac{\pi}{2}\right)$$

D'autre part, en éliminant  $\beta$  :

$$\alpha^2 + \gamma^2 = k_0^2(n_1^2 - n_2^2)$$

on doit résoudre graphiquement  $\begin{cases} v = u \cdot \tan\left(u - m.\frac{\pi}{2}\right) \\ V^2 = u^2 + v^2 \end{cases}$

avec  $u = a.\alpha$ ,  $v = a.\gamma$  et  $V = a.k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$



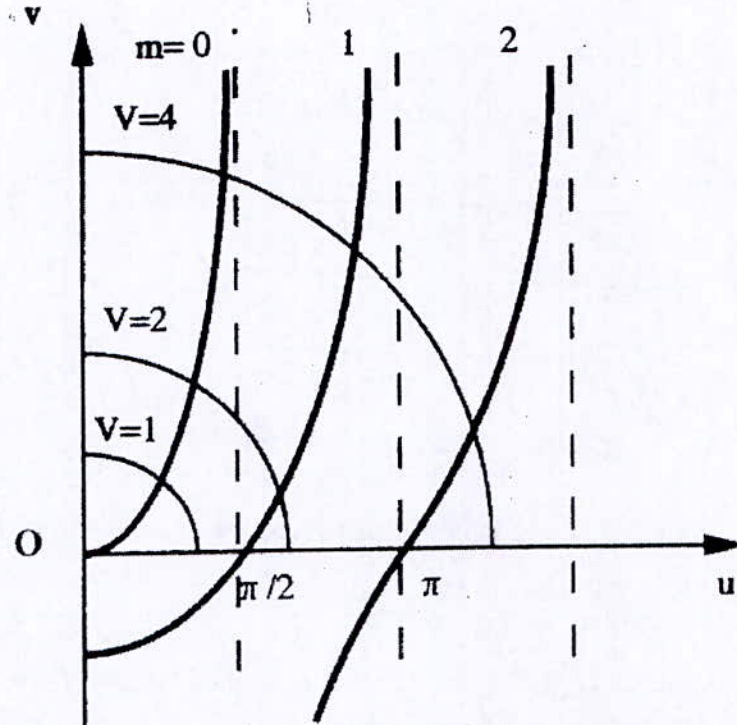


Figure II.7 : Détermination graphique des modes

Le terme de la fréquence réduite  $V$ , qui est sans dimension et proportionnel à  $\omega$ , est un paramètre essentiel du guide diélectrique. Le nombre de modes ne dépend que de lui.

Ainsi, pour que le mode d'ordre  $m$  existe, il faut que :  $V > m \cdot \frac{\pi}{2}$

Sa fréquence de coupure correspond à  $V = m \cdot \frac{\pi}{2}$ , soit à la longueur d'onde

$$\lambda_c(m) = \frac{\lambda_c}{m} \text{ avec } \lambda_c = 4a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

Rappelons que l'approximation géométrique n'est valable que si  $V \gg 1$ . Ces résultats ne sont donc pas rigoureux pour les modes d'ordre faible.

Le mode d'ordre  $m$  est guidé si  $\lambda < \lambda_c(m)$ . Il y a d'autant plus de modes guidés que  $a$  est grand par rapport à  $\lambda$ . A la coupure qui correspond à la réfraction limite, on a  $V = a \cdot \alpha$  et  $\gamma = 0$  : le champ s'étend à l'infini à l'extérieur du guide.

$\alpha$  et  $\gamma$  ayant été déterminés graphiquement pour chaque mode, on en déduit :

✓ La constante de propagation longitudinale  $\beta$  par

$$\beta^2 = k_0^2 n_1^2 - \alpha^2 = k_0^2 n_2^2 - \gamma^2$$

- ✓ La répartition transversale du champ  $E(x)$ , qui est stationnaire. Physiquement, le champ  $E_m(x)$  du mode d'ordre  $m$  possède  $m$  zéros suivant  $Ox$ .

Les modes sont orthogonaux, c'est-à-dire que deux modes  $i$  et  $j$  ( $i \neq j$ ) sont liés par la relation :

$$\iint E_i \cdot E_j^* dx \cdot dy = 0 \text{ sur une section perpendiculaire à } Oz.$$

Ils constituent ainsi une base de décomposition au sens des espaces vectoriels : toute onde pénétrant dans le guide, même avec une inclinaison  $\theta$  ne correspondant pas à une valeur de  $\beta$ , va se décomposer de façon unique sur l'ensemble des modes. [4]

### II.3.4) calcul général des trajectoires des rayons :

Les schémas étudiés en 2-D ne considèrent que les rayons contenus dans un même plan que l'axe de la fibre, qu'on appelle *rayons méridiens*. Pour l'ensemble des trajectoires il faut effectuer un calcul en 3-D. La fibre optique étant circulaire, nous nous plaçons en *coordonnées cylindriques* :

$(r, \psi, z)$  sont les coordonnées du point  $P$  (*point courant de la trajectoire*)

$(\vec{u}_r, \vec{u}_\psi, \vec{u}_z)$  trièdre local



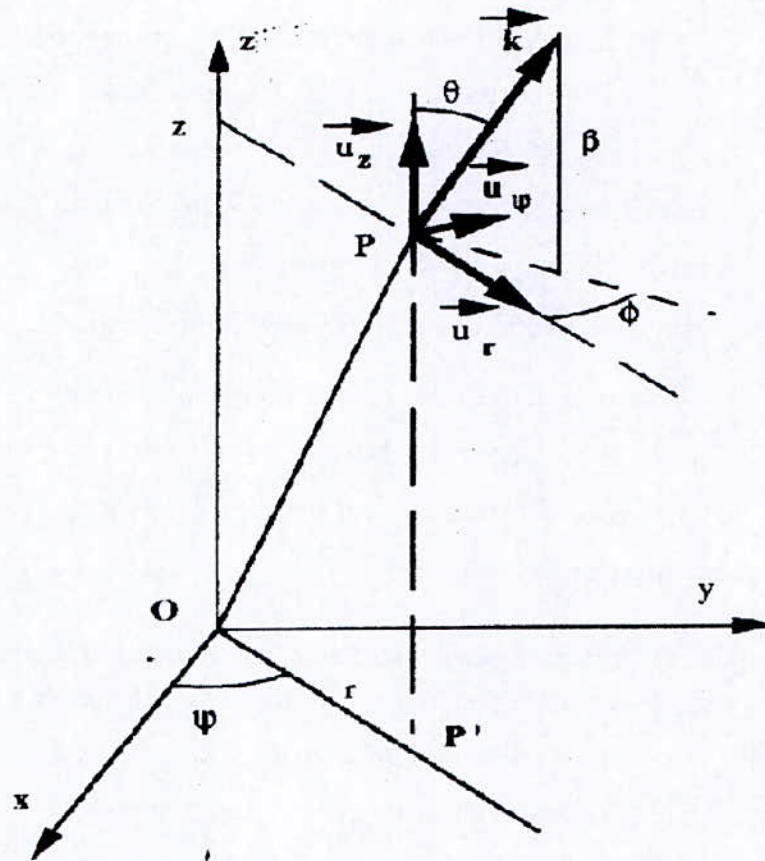


Figure II.8 : Détermination géométrique des trajectoires

Nous devons résoudre l'équation des rayons :  $\frac{d}{ds} \left( n \cdot \frac{d\vec{OP}}{ds} \right) = \overrightarrow{\text{grad}}(n)$ . Le vecteur

$\frac{d\vec{OP}}{ds}$ , qui est unitaire et tangent à la trajectoire, a pour composantes :

✓ Sur  $\vec{u}_r$  :  $\frac{dr}{ds} = \sin\theta \cdot \cos\phi$

✓ Sur  $\vec{u}_\psi$  :  $\frac{d\psi}{ds} = \sin\theta \cdot \sin\phi$

✓ Sur  $\vec{u}_z$  :  $\frac{dz}{ds} = \cos\theta$

Le vecteur d'onde  $\vec{k}$  vaut :  $\vec{k} = k_0 \cdot n(P) \cdot \frac{d\vec{OP}}{ds}$

• **Résolution :**

L'indice  $n$  ne dépendant que de  $r$ , distance radiale de  $P$  à l'axe  $Oz$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}}(n)$  est donc colinéaire à  $\vec{u}_r$ . La résolution de l'équation sur  $\vec{u}_\psi$  et  $\vec{u}_z$  est alors possible. On obtient d'après des calculs (donnés en Annexe), on obtient :

$$\begin{cases} \text{sur } \bar{u}_z: n(r) \cdot \frac{dz}{ds} = C^{te}, \text{ qu'on notera } \frac{\beta}{k_0} \\ \text{sur } \bar{u}_\psi: n(r) \cdot r^2 \cdot \frac{d\psi}{ds} = C^{te} \text{ qu'on notera } \frac{\nu}{k_0} \end{cases} \quad (2.20)$$

On peut donc écrire le vecteur d'onde  $\vec{k}$  comme suit :

$$\vec{k} = f(r) \cdot \bar{u}_r + \frac{\nu}{r} \cdot \bar{u}_\psi + \beta \cdot \bar{u}_z$$

$\beta$  est la constante de propagation longitudinale,  $\nu$  est un terme sans dimension qui est nul pour les rayons méridiens.

La composante  $f(r)$  se déduit du module de  $\vec{k}$  :

$$f(r)^2 = k_0^2 \cdot n^2(r) - \frac{\nu^2}{r^2} - \beta^2,$$

et nous voyons apparaître deux cas :

- ✓ Si  $f(r)^2 > 0$ ,  $\vec{k}$  est réel, l'onde est donc progressive
- ✓ Si  $f(r)^2 < 0$ ,  $\vec{k}$  a une composante imaginaire en  $\bar{u}_r$ , on aura donc une onde *évanescence* à profil exponentiel décroissant dans cette direction. [5]

**Cas des rayons méridiens :**

Ils sont définis par  $\nu=0$ .

Ils se propagent là où  $\beta > k_0 n_2$ .

**Cas des rayons non méridiens :**

C'est le cas où  $\nu \neq 0$ , le comportement des rayons dépend du signe de  $f(r)^2$ , qu'on peut déterminer graphiquement à l'aide de la figure qui va suivre. Trois cas peuvent se présenter :

- ✓ Le rayon est **guidé** si  $f(r)^2$  est positif dans une partie du cœur et négatif dans toute la gaine. C'est le cas où :  $\beta > k_0 n_2$ .

Les trajectoires dans le cœur sont alors en zigzag (*fibres à saut d'indice*) ou suivant des hélices elliptiques (*fibres à gradient d'indice*) et sont contenues dans le tube où est vérifiée l'inégalité :

$$k_0^2 \cdot n^2(r) - \beta^2 > \frac{\nu^2}{r^2} \text{ (zone hachurée).}$$

- ✓ Le rayon est **réfracté** si  $f^2(r)$  est positif dans toute la gaine, soit :

$$\beta^2 < k_0^2 n_2^2 - \frac{\nu^2}{a^2}$$



✓ Le rayon est guidé à fuite si  $f^2(r)$  est, négatif juste à l'interface et redevient positif plus loin, ce qui n'est possible que si :

$$v \neq 0 \quad \text{et} \quad k_0^2 n_2^2 > \beta^2 > k_0^2 n_1^2 \frac{v^2}{a^2}$$

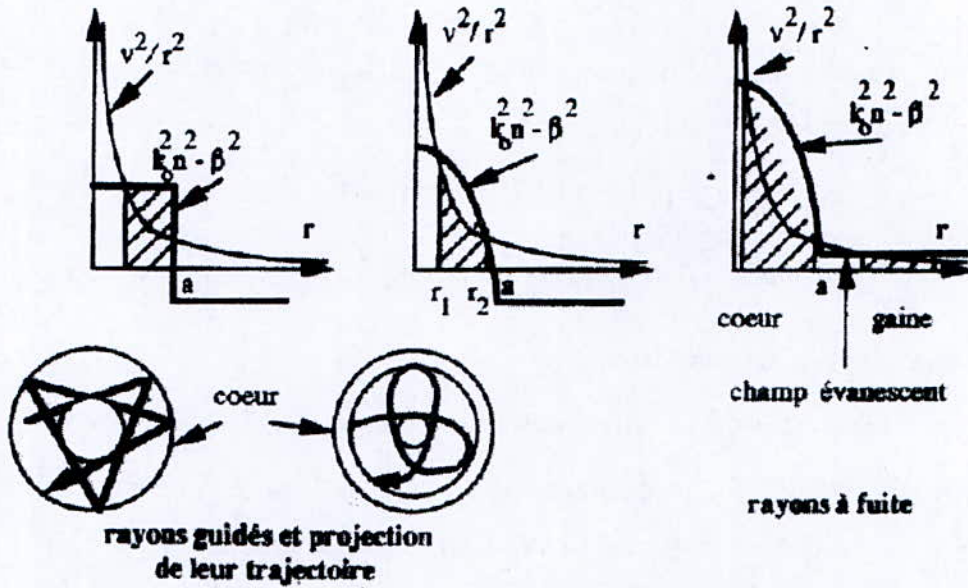


Figure II.9 : Rayons non méridiens dans une fibre optique multimode

Alors que l'optique géométrique prévoit que ce type de rayon reste guidé dans le cœur, son énergie fuit progressivement vers un rayon qui se propage dans la gaine par l'intermédiaire du champ évanescent.

Les rayons à fuite perturbent la transmission et les mesures sur des distances de plusieurs de plusieurs dizaines de mètres. Ils peuvent réapparaître localement sous l'effet de courbures.

### II.3.5) Modes de propagations :

Compte tenue de l'expression de  $k$  établie précédemment, l'allure du champ est en :

$$\exp\{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OP})\} = \exp\{j(-r \cdot f(r) \pm v \cdot \psi + \omega t - \beta z)\}.$$

Comme dans un guide plan, un ensemble de rayons forme un mode s'il constitue une onde stationnaire sur une section droite. Il faut donc une double périodicité de  $k$  :

✓ Sur  $\vec{u}_\psi$  : le déphasage vaut  $\int_0^{2\pi} \frac{v}{r} \cdot r \cdot d\psi = 2\pi v$ .

Il doit être multiple entier de  $2\pi$ ;  $\nu$  doit être entier (c'est le nombre de périodes du champ sur une circonférence).

- ✓ **Sur  $\bar{u}_r$**  : la projection de la trajectoire fait apparaître deux points de rebroussement distants de  $r_1$  et  $r_2$  de l'axe (voire figure). L'enveloppe de ces points définit de chaque côté une surface cylindrique appelée *caustique* qui, séparant l'onde progressive et l'onde évanescente, se comporte comme un dioptre diélectrique ; on y observe un déphasage  $\phi(r)$ . Le déphasage sur un aller-retour entre deux caustiques doit être multiple entier de  $2\pi$  :

$$2 \int_{r_1}^{r_2} f(r) \cdot dr + \phi(r_1) + \phi(r_2) = 2m\pi$$

Si  $m$  est grand, on peut négliger le déphasage aux caustiques devant  $2m\pi$  et écrire d'après l'expression de  $f(r)$  :

$$m = \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left( k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} dr$$

On a ainsi défini un mode d'ordre  $(\nu, m)$ . [4]

#### **II.4) Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons traité la méthode d'analyse géométrique. Nous avons vu à travers cette méthode que le profil d'indice de réfraction est en général fait de telle manière à être discontinue (*profil à étape ou plus précisément à saut d'indice*) ou bien continue (*gradient d'indice*). Dans la fibre à gradient d'indice, le profil d'indice peut avoir plusieurs formes. Nous avons vu qu'une fibre pouvait être conçue pour être soit monomode ou bien multimode. Dans une fibre multimode, le paramètre  $V$  (*fréquence réduite*), le diamètre  $2a$ , et l'ouverture numérique  $ON$  sont les trois principaux paramètres de la fibre. Dans une fibre monomode, c'est la longueur d'onde de coupure qui décrit ses caractéristiques.

Les fibres multimodes (*spécialement à gradient d'indice*) sont utilisées dans des applications où la distance ou le débit sont modérés. Leur taille rend le couplage de lumière relativement facile. Le principal inconvénient est leur bande passante étroite (*comparée à celle des fibres monomodes*). Aussi, à cause des effets de multiplexage, il est difficile de contrôler et de prédire les pertes dans la fibre ainsi que dans les connections et les courbures.



Les fibres monomodes sont actuellement les fibres de référence pour les applications combinant longue distance et haut débit. Leurs avantages dans la capacité à fournir de hauts débits et de faibles atténuations ont fait oublier leurs inconvénients dont la difficulté de fabrication et de couplage avec la source. Actuellement, les fibres monomodes sont plus compétitives que les fibres multimodes en ce qui concerne le coût (*prix*). Les fibres monomodes sont sujettes aux pertes dues aux courbures de la fibre et aux pertes provoquées par les fluctuations du diamètre du cœur à cause du bobinage et de leur manipulation.

Actuellement, les deux types de fibres, multimode et monomode, sont disponibles dans le commerce, et le choix dépendra du type d'application ou système à utiliser.

## **Chapitre 3 :**

### ***Méthode d'analyse de la fibre optique à l'aide des équations de Maxwell***



## **Méthode d'analyse d la fibre optique à l'aide des équations de Maxwell**

### **III.1) Introduction :**

La fibre optique est un guide d'onde circulaire, ces propriétés sont voisines du guide rectangulaire ; on y retrouve les modes  $TE_{vm}$  et  $TM_{vm}$  qui présentent des caractéristiques de propagation et des fréquences de coupure similaires. En revanche, on ne trouve pas les modes  $TEM$ .

Contrairement au *Chapitre II*, nous allons utiliser dans ce chapitre la méthode analytique (*et non pas géométrique*) pour analyser la fibre optique. Pour cela nous ferons appel aux *équations de Maxwell*, et étant donné que la fibre à une forme cylindrique, nous utiliserons les *coordonnées cylindriques*  $r$ ,  $\psi$  et  $z$ . Cette méthode est plus précise que l'approximation de l'optique géométrique mais plus fastidieuse, elle reste quand même abordable si on la compare avec des méthodes numériques (*Ex. la méthode des éléments finis ou la méthode des différences finies, etc.*) qui sont très précises mais où les temps de calcul sont élevés.

Dans la première partie de ce chapitre, nous donnerons un résumé des *équations de Maxwell* et nous les détaillerons selon la forme désirée. Dans la seconde partie, nous donnerons les différentes équations d'onde des champs électrique et magnétique. Dans la troisième partie, nous appliquerons cette méthode à une fibre optique à saut d'indice. Nous verrons les différents modes qui s'y propagent, les modes  $LP$  qui sont utilisés dans le cas d'un guidage faible, ainsi que les fréquences de coupures des différents modes.

### **III.2) Equations de Maxwell :**

Comme tous les phénomènes électromagnétiques, la propagation des champs optiques obéit aux *équations de Maxwell*.

Le champ magnétique  $\mathbf{H}[\text{A/m}]$ , la densité du flux électrique  $\mathbf{D}[\text{C/m}^2]$  et la densité du flux magnétique  $\mathbf{B}[\text{A/m}^2]$  sont reliés les uns aux autres par les équations suivantes :

$$D = \varepsilon E \quad (3.1)$$

$$B = \mu H \quad (3.2)$$

Où la permittivité  $\varepsilon$  et la perméabilité  $\mu$  sont définies comme :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \quad (3.3)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (3.4)$$

Dans ce cas,  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide, et  $\epsilon_r$  et  $\mu_r$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité relatives (du matériau). Sachant que  $\mu_r = 1$  pour les matériaux autres que les matériaux magnétiques, on suppose dans ce qui suit qu'elle est égale à 1.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c_0 \mu_0} \approx 8.854188 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad (3.5)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad (3.6)$$

La densité de courant  $\mathbf{J}$  d'un conducteur est donné par :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3.7)$$

Le champ électromagnétique obéit aux équations très connues dites de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (3.9)$$

Sachant que  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ , on peut déduire de (3.8) et (3.9) ceci :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.11)$$

La densité de courant  $\mathbf{J}$  est donc reliée à la densité de charge  $\rho$  [ $\text{C/m}^2$ ] par la relation :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.12)$$

### III.3) Equation d'onde :

On suppose que le champ électromagnétique oscille avec une seule fréquence angulaire  $\omega$  [radian/s]. Le vecteur  $\mathbf{A}$  qui désigne le champ électromagnétique se met sous la forme :

$$\mathbf{A}(r, t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{A}}(r) \exp(j\omega t)\} \quad (3.13)$$

En utilisant cette représentation vectorielle, les expressions du champ électrique  $\mathbf{E}$ , du champ magnétique  $\mathbf{H}$ , de la densité du flux électrique  $\mathbf{D}$  et la densité du flux magnétique  $\mathbf{B}$  peuvent s'écrire sous formes :



$$E(r,t) = \text{Re}\{\bar{E}(r)\exp(j\omega t)\} \quad (3.14)$$

$$H(r,t) = \text{Re}\{\bar{H}(r)\exp(j\omega t)\} \quad (3.15)$$

$$D(r,t) = \text{Re}\{\bar{D}(r)\exp(j\omega t)\} \quad (3.16)$$

$$B(r,t) = \text{Re}\{\bar{B}(r)\exp(j\omega t)\} \quad (3.17)$$

Dans ce qui va suivre, et pour plus de simplicité, on remplacera  $\bar{E}$ ,  $\bar{H}$ ,  $\bar{D}$  et  $\bar{B}$  par  $E$ ,  $H$ ,  $D$  et  $B$ . En utilisant ces expressions, on peut réécrire (3.8) et (3.11) sous la forme :

$$\nabla \times E = -j\omega B = -j\omega\mu_0 H \quad (3.18)$$

$$\nabla \times H = j\omega D = j\omega\epsilon E \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot H = 0 \quad (3.20)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r E) = 0 \quad (3.21)$$

avec les suppositions  $\mu_r = 1$  et  $\rho = 0$ .

### III.3.1) Champ électrique :

En appliquant l'opérateur vectoriel  $\nabla \times$  (rot) à l'équation (3.18) on obtient :

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -j\omega\mu_0 \nabla \times H \quad (3.22)$$

En utilisant la formule vectorielle

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A, \quad (3.23)$$

on peut réécrire le premier membre de l'équation (3.22) comme suit :

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E. \quad (3.24)$$

Le symbole  $\nabla^2$  représente le Laplacien défini par :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.25)$$

Donc l'équation (3.21) peut être réécrite sous la forme  $\nabla(\epsilon_r E) \nabla \epsilon_r \cdot E + \nabla E \cdot \epsilon_r = 0$ , on obtient ainsi :

$$\nabla \cdot E = -\frac{\nabla \epsilon_r \cdot E}{\epsilon_r} \quad (3.26)$$

Ainsi, le premier terme de l'équation (3.22) devient :

$$-\nabla\left(\frac{\nabla \epsilon_r \cdot E}{\epsilon_r}\right) - \nabla^2 E \quad (3.27)$$

D'autre part, en utilisant l'équation (3.19), le second membre de l'équation (3.22) devient :

$$k_0^2 \epsilon_r E, \quad (3.28)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde dans le vide et est donné par :

$$k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c_0} \quad (3.29)$$

Ainsi, pour un milieu de permittivité relative  $\varepsilon_r$ , l'équation vectorielle d'onde pour un champ électrique  $\mathbf{E}$  est donné par :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left( \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \mathbf{E} \right) + k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0, \quad (3.30)$$

sachant que :

$$k = k_0 n = k_0 \sqrt{\varepsilon_r} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0}, \quad (3.31)$$

on abouti finalement à :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left( \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \cdot \mathbf{E} \right) + k^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = 0. \quad (3.32)$$

Dans le cas où la permittivité relative  $\varepsilon_r$  est constante dans le milieu, cette équation vectorielle d'onde peut se réduire à l'équation de *Helmholtz*

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.33)$$

ou

$$\Delta \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.34)$$

### III.3.2) Champ magnétique :

En appliquant l'opérateur vectoriel  $\nabla \times$  à l'équation (3.19), nous obtenons :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = j\omega \varepsilon_0 \nabla \times (\varepsilon_r \mathbf{E})$$

Donc,

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} &= j\omega \varepsilon_0 (\nabla \varepsilon_r \times \mathbf{E} + \varepsilon_r \times \nabla \mathbf{E}) \\ &= j\omega \varepsilon_0 (\nabla \varepsilon_r \times \mathbf{E}) + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r (-j\omega \mu_0 \mathbf{H}) \\ &= j\omega \varepsilon_0 (\nabla \varepsilon_r \times \mathbf{E}) + k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{H} \end{aligned}$$

En appliquant la formule :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}, \quad (3.35)$$

obtenue de (3.19) et (3.20), on abouti, à partir de (3.30), à l'équation d'onde vectorielle du champ magnétique  $\mathbf{H}$ :



$$\nabla^2 H + \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla \times H) + k_0^2 \varepsilon_r H = 0, \quad (3.36)$$

En utilisant (3.31), on peut mettre (3.36) sous la forme :

$$\nabla^2 H + \frac{\nabla \varepsilon_r}{\varepsilon_r} \times (\nabla \times H) + k^2 H = 0 \quad (3.37)$$

Lorsque la permittivité relative  $\varepsilon_r$  est constante dans le milieu, cette équation d'onde peut se réduire à l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 H + k^2 H = 0 \quad (3.38)$$

ou

$$\Delta \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (3.39)$$

A présent, nous allons examiner un guide d'onde qui a une structure uniforme suivant la direction  $z$ . La dérivée d'un champ électromagnétique par rapport à  $z$  est constante tel que :

$$\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta, \quad (3.40)$$

où  $\beta$  est la constante de propagation et est la composante suivant  $z$  du nombre d'onde  $k$ . Le rapport de la constante de propagation,  $\beta$ , sur le nombre d'onde dans le vide,  $k_0$ , est appelé *indice effectif* :

$$n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0} \quad (3.41)$$

Si  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide, alors :

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{\lambda_0 / n_{\text{eff}}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{eff}}}, \quad (3.42)$$

où  $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_0 / n_{\text{eff}}$  est la composante suivant  $z$  de la longueur d'onde dans le milieu. La signification physique de la constante de propagation  $\beta$  est la rotation de phase par unité de distance de propagation. Ainsi, on peut interpréter l'indice effectif  $n_{\text{eff}}$  comme étant le rapport de la longueur d'onde dans le milieu sur la longueur d'onde dans le vide, ou comme le rapport de la rotation de phase dans le milieu sur la rotation de phase dans le vide. [3]

### **III.4) Application pour la fibre optique :**

Dans cette partie, nous étudierons une fibre à saut d'indice. Une fibre optique se compose d'un cœur et d'une gaine. Puisque l'indice de réfraction du cœur est très peu différent de celui de la gaine, le champ optique est largement confiné dans le cœur. Une fibre monomode, qui possède un seul mode guidé, a un rôle clé dans les systèmes de télécommunication.

#### **III.4.1) Calcul des champs :**

Le cœur, de rayon  $a$ , possède un indice de réfraction constant  $n_1$ , légèrement supérieur à celui de la gaine  $n_2$ . Donc les permittivités relatives du cœur et de la gaine sont respectivement  $\epsilon_{r1}=n_1^2$  et  $\epsilon_{r2}=n_2^2$ . Les équations d'onde vectorielles exactes du champ électrique et du champ magnétique sont données par les équations (3.30) et (3.36). Sachant que la structure de la fibre optique est uniforme dans le sens de propagation, on peut remplacer les dérivées des champs électrique et magnétique par rapport à  $z$  par  $-j\beta$ , ou :  $\frac{\partial}{\partial z} = -j\beta$ .

Nous cherchons une solution pour les Eq. (3.33) et (3.38) dans un guide circulaire (qui est la fibre optique) correspondant à une onde harmonique, progressive selon  $Oz$  et stationnaire sur une section droite (pour avoir un mode).

D'après le chapitre précédent, nous savons qu'elle doit être de la forme (en coordonnées cylindriques) :

$$E_z = E_1(r) \cdot \exp[j(\nu\psi + \omega t - \beta z)] \quad (3.43)$$

$\nu$  étant entier, il s'agit de déterminer les valeurs de  $\beta$  et les fonctions  $E_1(r)$  correspondant aux modes de propagation.  $E_z$  est la composante longitudinale de  $\vec{E}$ .  $H_z$  se met sous la même forme, c'est-à-dire :

$$H_z = H_1(r) \cdot \exp[j(\nu\psi + \omega t - \beta z)] \quad (3.44)$$

Et les composantes suivant  $r$  et  $\psi$  s'en déduiront par les équations de Maxwell.

On va d'abord résoudre l'équation suivant  $z$  car c'est la moins lourde et la plus facile à résoudre. [3]

En coordonnées cylindriques, le Laplacien se met sous la forme :



$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}\end{aligned}\quad (3.45)$$

Si on met  $E_z$  (ou  $H_z$ ) sous la forme :

$$E_z = E_1(r) \cdot \Psi(\psi) \cdot \exp[j(\omega t - \beta z)], \quad (3.46)$$

alors, l'équation de propagation de  $E_z$  s'écrit :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}, \quad (3.47)$$

Son développement pour la forme recherchée abouti à :

$$\frac{r^2}{E_1} \left( \frac{d^2 E_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_1}{dr} \right) + r^2 (k_0^2 n(r)^2 - \beta^2) = \nu^2 \quad (3.48)$$

et

$$\frac{1}{\Psi(\psi)} \cdot \frac{d^2 \Psi(\psi)}{d\psi^2} = -\nu^2 \quad (3.49)$$

Il est important de réaliser que l'Eq. (3.49) possède deux familles de solutions; l'une en sinus et l'autre en cosinus. Ces deux familles conduisent à des solutions identiques. Afin de simplifier le reste du développement, il convient de ne considérer qu'une seule famille d'équations. Nous choisirons la suivante :

$$\Psi(\psi) = \sin(\nu \psi) \quad (3.50)$$

Pour une fibre à saut d'indice, on aura  $n(r) = n_1$  dans le cœur ( $r < a$ ) et  $n(r) = n_2$  dans la gaine ( $r > a$ ). Le coefficient  $k_0^2 n(r)^2 - \beta^2$  doit être négatif dans la gaine et positif dans le cœur pour que le mode soit guidé, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} k_0^2 n_1^2 - \beta^2 > 0 \\ k_0^2 n_2^2 - \beta^2 < 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

d'où la condition sur  $\beta$  et  $n_{eff}$

$$k_0 n_2 < \beta < k_0 n_1$$

et donc :

$$n_2 < n_{eff} < n_1 \quad (3.52)$$

Comme le coefficient  $k_0^2 n(r)^2 - \beta^2$  est constant dans chaque milieu, l'équation (3.48) est l'équation différentielle de Bessel. [4]

Elle a pour solutions :

$$E_1 = \begin{cases} A_1 J_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) + A_2 N_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) & \text{pour } (r \leq a) \\ C_1 K_\nu\left(\frac{wr}{a}\right) + C_2 I_\nu\left(\frac{wr}{a}\right) & \text{pour } (r \geq a) \end{cases} \quad (3.53)$$

et par conséquent :

$$H_1 = \begin{cases} B_1 J_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) + B_2 N_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) & \text{pour } (r \leq a) \\ D_1 K_\nu\left(\frac{wr}{a}\right) + D_2 I_\nu\left(\frac{wr}{a}\right) & \text{pour } (r \geq a) \end{cases} \quad (3.54)$$

avec  $J_\nu$ : fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  de première espèce

$N_\nu$ : fonction de Bessel d'ordre  $\nu$  de seconde espèce

$K_\nu$ : fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$  de première espèce

$I_\nu$ : fonction de Bessel modifiée d'ordre  $\nu$  de seconde espèce

$u$  et  $w$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} u^2 = a^2(k_0^2 n_1^2 - \beta^2) = k_0^2 a^2(\epsilon_{r1} - n_{eff}^2) \\ w^2 = a^2(\beta^2 - k_0^2 n_2^2) = k_0^2 a^2(n_{eff}^2 - \epsilon_{r2}) \end{cases} \quad (3.55)$$

et

$$u^2 + w^2 = a^2 k_0^2 (n_1^2 - n_2^2) = V^2, \quad (3.56)$$

$V$  étant la fréquence réduite, ou *fréquence normalisée*. Les paramètres  $u$  et  $w$  sont respectivement appelés *constante de propagation latérale normalisée dans le cœur*, et *constante de perte latérale normalisée dans la gaine*. [3]

Sachant que la fonction  $N_\nu\left(\frac{ur}{a}\right)$  diverge en  $r=0$  et  $I_\nu\left(\frac{wr}{a}\right)$  diverge en  $r=\infty$ , et connaissant les conditions aux limites  $E(r)=0$  quand  $r \rightarrow \infty$ , on en déduit donc que les coefficients  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ , et  $D_2$  sont nuls.

On aura finalement :

$$E_1 = \begin{cases} A J_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) & \text{pour } (r \leq a) \\ C K_\nu\left(\frac{wr}{a}\right) & \text{pour } (r \geq a) \end{cases} \quad (3.57)$$



et

$$H_1 = \begin{cases} BJ_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) & \text{pour}(r \leq a) \\ DK_\nu\left(\frac{wr}{a}\right) & \text{pour}(r \geq a) \end{cases} \quad (3.58)$$

Les composantes transversales en coordonnées cylindriques se déduisent de  $E_z$  et  $H_z$  grâce aux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} E_r = -j \frac{a^2}{u^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} \right) \\ H_r = -j \frac{a^2}{u^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \psi} \right) \\ E_\psi = -j \frac{a^2}{u^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \psi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \\ H_\psi = -j \frac{a^2}{u^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} + \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.59)$$

Après développement, on obtient les résultats suivants :

➤ dans le cœur :

$$\begin{cases} E_r = \left[ -A \frac{j\beta}{u/a} \left( \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{u.r}{a}\right) - J_{\nu+1}\left(\frac{u.r}{a}\right)}{2} \right) + B \frac{j\omega\mu_0}{(u/a)^2} \frac{\nu}{r} J_\nu\left(\frac{u.r}{a}\right) \right] \sin(\nu\psi) \\ E_\psi = \left[ -A \frac{j\beta}{(u/a)^2} \frac{\nu}{r} J_\nu\left(\frac{u.r}{a}\right) + B \frac{j\omega\mu_0}{u/a} \left( \frac{J_{\nu-1}\left(\frac{u.r}{a}\right) - J_{\nu+1}\left(\frac{u.r}{a}\right)}{2} \right) \right] \cos(\nu\psi) \\ E_z = AJ_\nu\left(\frac{ur}{a}\right) \sin(\nu\psi) \end{cases} \quad (3.60)$$

➤ dans la gaine :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_r = \left[ C \frac{j\beta}{w/a} \left( -K_{\nu-1} \left( \frac{wr}{a} \right) - \frac{\nu}{\left( \frac{wr}{a} \right)} K_{\nu} \left( \frac{wr}{a} \right) \right) - D \frac{j\omega\mu_0 \nu}{(w/a)^2 r} K_{\nu} \left( \frac{wr}{a} \right) \right] \sin(\nu\psi) \\ E_{\psi} = \left[ C \frac{j\beta}{(w/a)^2 r} \nu K_{\nu} \left( \frac{wr}{a} \right) - D \frac{j\omega\mu_0}{w/a} \left( -K_{\nu-1} \left( \frac{wr}{a} \right) - \frac{\nu}{\left( \frac{wr}{a} \right)} K_{\nu} \left( \frac{wr}{a} \right) \right) \right] \cos(\nu\psi) \\ E_z = CK_{\nu} \left( \frac{wr}{a} \right) \sin(\nu\psi) \end{array} \right. \quad (3.61)$$

sachant que

$$J_{\nu}'(x) = \frac{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)}{2} \text{ et } K_{\nu}'(x) = -K_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} K_{\nu}(x) \quad [3]$$

### III.4.2) Calcul exact des modes :

Les composantes tangentielles des champs  $E$  et  $H$  doivent être continues à l'interface cœur - gaine ( $r=a$ ). On aura donc les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z(a-0) = E_z(a+0) \\ E_{\psi}(a-0) = E_{\psi}(a+0) \\ H_z(a-0) = H_z(a+0) \\ H_{\psi}(a-0) = H_{\psi}(a+0) \end{array} \right. \quad (3.62)$$

Ces équations de continuité nous fournissent un système de quatre équations homogènes en  $A, B, C$  et  $D$ .

$$\begin{pmatrix} J_{\nu} & 0 & -K_{\nu} & 0 \\ -j \frac{\beta}{(u/a)^2} \frac{\nu}{a} J_{\nu} & j \frac{\omega\mu_0}{u/a} J_{\nu}' & -j \frac{\beta}{(w/a)^2} \frac{\nu}{a} K_{\nu} & j \frac{\omega\mu_0}{w/a} K_{\nu}' \\ 0 & J_{\nu} & 0 & -K_{\nu} \\ -j \frac{\omega\varepsilon_1}{u/a} J_{\nu}' & j \frac{\beta}{(u/a)^2} \frac{\nu}{a} J_{\nu} & -j \frac{\omega\varepsilon_2}{w/a} K_{\nu}' & j \frac{\beta}{(w/a)^2} \frac{\nu}{a} K_{\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0 \quad (3.63)$$

Pour ne pas avoir une solution identiquement nulle, ce système doit avoir un déterminant nul, [3] soit, tous calculs faits :

$$\left( \frac{J_{\nu}'}{u J_{\nu}} + \frac{K_{\nu}'}{w K_{\nu}} \right) \left( \frac{\varepsilon_1 J_{\nu}'}{\varepsilon_2 u J_{\nu}} + \frac{K_{\nu}'}{w K_{\nu}} \right) = U^2 \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (3.64)$$



Il s'agit d'une équation en  $\beta$ . Pour chaque valeur de  $\nu$ , elle a un nombre fini de solutions, correspondant à un ensemble discret de modes.

On aura un système homogène de quatre équations à quatre inconnues. On doit alors écrire chacune des variables  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction de  $A$ . Cette dernière est évaluée seulement lorsqu'on précise la puissance du mode.

On peut classer les modes obtenus comme suit :

- **Pour  $\nu=0$**  : nous aurons des **modes transverses** à symétrie de révolution, correspondant aux rayons méridiens :

➤ **modes  $TE_{0m}$**  :

$E_z=0$  et  $\beta$  est donné par la  $m^{\text{ième}}$  racine de :

$$\frac{J_1(u)}{u \cdot J_0(u)} + \frac{K_1(w)}{w \cdot K_0(w)} = 0 \quad (3.65)$$

Dans ce cas  $A$  et  $C$  sont nuls.

➤ **modes  $TM_{0m}$**  :

$H_z=0$  et  $\beta$  est donné par la  $m^{\text{ième}}$  racine de :

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} \cdot \frac{J_1(u)}{u \cdot J_0(u)} + \frac{K_1(w)}{w \cdot K_0(w)} = 0 \quad (3.66)$$

Dans ce cas  $B$  et  $D$  sont nuls.

Ces deux familles de modes correspondent aux deux cas d'annulation du premier membre de l'équation (3.64) en utilisant les relations :

$$J_0'(u) = -J_1(u) \quad \text{et} \quad K_0'(w) = -K_1(w)$$

- **Pour  $\nu \neq 0$**  : Nous aurons des **modes hybrides  $EH_{\nu m}$  et  $HE_{\nu m}$**  dont le calcul est un peu plus lourd, mais qui peuvent être déduits d'une équation approchée lorsque  $n_1^2 - n_2^2 \ll n_1^2$  (*hypothèse du guidage faible*), on remplace  $\beta \approx k_{0m} \approx k_{zm}$ , et on prend la racine carré de (3.64). On obtient donc :

$$\frac{J_\nu'(u)}{u \cdot J_\nu(u)} + \frac{K_\nu'(w)}{w \cdot K_\nu(w)} = \pm \nu \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \quad (3.67)$$

et dans ce cas  $E_z$  et  $H_z$  sont non nuls.

En utilisant les propriétés des équations de Bessel, notamment :

$$\frac{J'_\nu(u)}{u J_\nu(u)} = \frac{J_{\nu-1}(u)}{u J_\nu(u)} - \frac{\nu}{u^2} = \frac{J_{\nu+1}(u)}{u J_\nu(u)} + \frac{\nu}{u^2} \quad (3.68)$$

et

$$\frac{K'_\nu(w)}{u K_\nu(w)} = \frac{K_{\nu-1}(w)}{u K_\nu(w)} - \frac{\nu}{w^2} = \frac{K_{\nu+1}(w)}{w K_\nu(w)} + \frac{\nu}{w^2}, \quad (3.69)$$

on obtient, suivant qu'on a un signe + ou -, les solutions suivantes :

- **modes  $EH_{vm}$**  : avec un signe +,  $\beta$  est donné par la  $m^{\text{ième}}$  racine de :

$$\frac{J_{\nu+1}(u)}{u J_\nu(u)} = \frac{K_{\nu+1}(w)}{w K_\nu(w)} \quad (3.70)$$

- **modes  $HE_{vm}$**  : avec un signe -,  $\beta$  est donné par la  $m^{\text{ième}}$  racine de :

$$\frac{J_{\nu-1}(u)}{u J_\nu(u)} = \frac{K_{\nu-1}(w)}{w K_\nu(w)} \quad (3.71)$$

### III.4.3) Fréquences de coupure :

Dans un guide diélectrique, lorsqu'un mode tend vers sa coupure, il tend vers une onde plane infinie dans le milieu extérieur. Au delà, on a réflexion. En s'approchant de la coupure, on obtient :

$$\beta \rightarrow k_0 n_2, \text{ d'où } w \rightarrow 0 \text{ et } u \rightarrow V, E_z \rightarrow 0 \text{ d'où } J_\nu(u) \rightarrow 0. \quad [4]$$

Or, lorsque  $w \rightarrow 0$ , on a les équivalences suivantes pour les fonctions de Bessel modifiées :

$$K_0(w) \rightarrow -\log w ; K_1(w) \rightarrow \frac{1}{w} ; K_\nu(w) \rightarrow \frac{(2^{\nu-1})}{w^\nu} (\nu - 1)! \text{ pour } \nu > 1.$$

D'où les limites des rapports intervenant dans les équations déterminant les modes :

- **pour les modes TE et TM**

$$\frac{K_1(w)}{w K_0(w)} \rightarrow \infty. \text{ Il faudra donc avoir } \frac{u J_0(u)}{J_1(u)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } u \rightarrow V.$$

- **pour les modes  $HE_{1m}$**



$$\frac{K_0(w)}{w.K_1(w)} \rightarrow \infty. \text{ Il faudra avoir } \frac{u.J_1(u)}{J_0(u)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } u \rightarrow V.$$

➤ pour les modes  $EH_{vm}$

$$\frac{K_{\nu+1}(w)}{w.K_\nu(w)} \rightarrow \infty. \text{ Il faudra avoir } \frac{u.J_\nu(u)}{J_{\nu+1}(u)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } u \rightarrow V.$$

➤ pour les modes  $HE_{vm} (\nu > 1)$

$$\frac{K_{\nu-1}(w)}{w.K_\nu(w)} \rightarrow \frac{2}{2(\nu-1)}. \text{ Il faudra avoir } \frac{J_{\nu-1}(u)}{u.J_\nu(u)} \rightarrow \frac{1}{2(\nu-1)} \text{ lorsque } u \rightarrow V.$$

Sachant qu'on a la relation :  $2(\nu-1) \cdot \frac{J_{\nu-1}(u)}{u.J_\nu(u)} = 1 + \frac{J_{\nu-2}(u)}{J_\nu(u)}$ , on aura finalement :

$$\frac{J_{\nu-2}(u)}{J_\nu(u)} \rightarrow 0 \text{ lorsque } u \rightarrow V.$$

Les fréquences de coupures sont donc données par les valeurs de la fréquence réduite  $V$  annulant les expressions ci-dessus. Soit  $j_{\nu,m}$  la  $m^{\text{ième}}$  racine de la fonction de Bessel d'ordre  $\nu$ , c'est-à-dire  $J_\nu(j_{\nu,m})=0$ . On trouve alors pour les modes :

- ✓  $TE_{0m}$  et  $TM_{0m}$  la fréquence de coupure est la  $m^{\text{ième}}$  racine de  $J_0(V)$  et elle est égale à  $j_{0,m}$
- ✓  $HE_{1,m}$ , la fréquence de coupure est la  $m^{\text{ième}}$  racine de  $J_1(V)$  et elle est égale à  $j_{1,m}$
- ✓  $HE_{\nu,m}$ , la fréquence de coupure est la  $m^{\text{ième}}$  racine de  $J_{\nu-2}(V)$  et elle est égale à  $j_{\nu-2,m}$
- ✓  $EH_{\nu,m}$ , la fréquence de coupure est la  $m^{\text{ième}}$  racine de  $J_\nu(V)$  et elle est égale à  $j_{\nu,m}$

Comme exemple, on donne le tableau suivant contenant les valeurs précises des quatre premières racines  $j_{\nu,m}$  ( $m=1,2,3,4$ ) de  $J_\nu$  ( $\nu=0,1,2,3$ )

$m$	1	2	3	4
$j_{0,m}$	2.405	5.520	8.654	11.792
$j_{1,m}$	3.832	7.016	10.173	13.324
$j_{2,m}$	5.136	8.417	11.620	14.796
$j_{3,m}$	6.380	9.761	13.015	16.223

**Tableau III.1 : Exemple de valeurs de racines des fonctions de Bessel**

#### III.4.4) Modes dans une fibre faiblement multimode :

##### III.4.4.1) Régime monomode :

Les résultats ci-dessus montrent que le mode  $HE_{11}$  est toujours guidé, puisque sa fréquence de coupure (première racine de  $J_1(V)$ ) est nulle. Le premier zéro non nul est celui de  $J_0(V)$ , soit  $V=2.405$  et correspond à la coupure des modes  $TE_{01}$ ,  $TM_{01}$  et approximativement  $HE_{21}$ .

D'où la condition du régime monomode pour une fibre à saut d'indice :

$$V < 2.405.$$

Il faudra par conséquent que  $\lambda > \lambda_c$ ,  $\lambda_c$  étant la longueur d'onde de coupure donnée par :

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{2.405} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}. \quad (3.72)$$

La **fig. III.1** (diagramme de dispersion) donne, en fonction de la fréquence réduite  $V$ , la valeur de l'indice effectif  $n_{eff}$ . Comme on le sait, il vaut  $n_2$  à la coupure du mode, et tend vers  $n_1$  quand  $V$  tend vers l'infini.



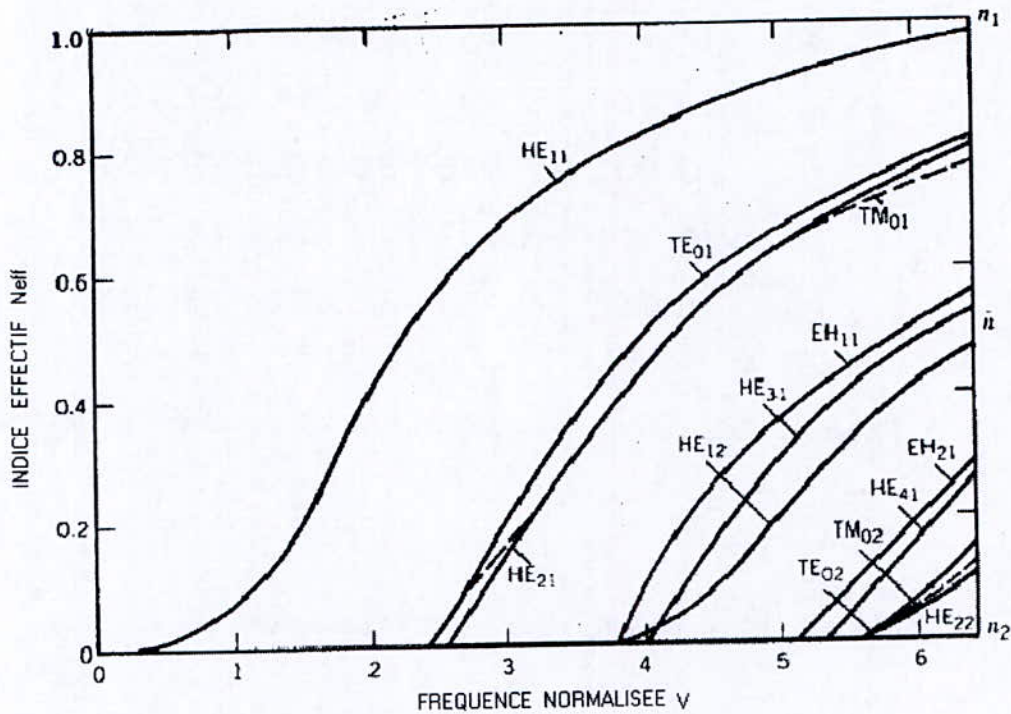


Figure III.1 : Diagramme de dispersion

#### III.4.4.2) Pseudo modes LP (Linearly Polarized Modes)

Une autre notation est parfois utilisée dans les fibres à guidage faible et qui est la notation **LP** (*Linearly Polarized modes*), pour laquelle chacun de  $\mathbf{E}_z$  et  $\mathbf{H}_z$  sont quasiment nuls d'où leur notations, qui veut dire modes polarisés linéairement. Un mode **LP** est déterminé uniquement par sa constante de propagation  $\beta$ . Il est plus pratique dans ce cas là d'utiliser  $n_{eff}$  au lieu de  $\beta$ .

Sur le diagramme de dispersion donné dans la *fig. III.1*, on remarque que certains modes s'associent en groupes de fréquence de coupure et de constante de propagation  $\beta(V)$  très voisines. Le champ résultant de la superposition de ces modes, qui restent en phase entre eux, est quasiment à polarisation linéaire.

- mode  $LP_{0m} = HE_{1m}$  (en particulier, le mode fondamental appelé  $LP_{01}$ )
- mode  $LP_{1m} = \{TE_{0m} + TM_{0m} + HE_{2m}\}$  (dont le mode  $LP_{11}$  est le suivant et apparaît pour  $V > 2.405$ )
- modes  $LP_{vm} = \{HE_{v+1,m} + EH_{v-1,m}\}$

La polarisation du mode dépend de la polarisation de la lumière injectée à l'entrée [4]. Pour chaque mode (*sauf les modes transverses*), deux polarisations orthogonales (*en x ou en y*), et toutes leurs combinaisons linéaires sont possibles ; ces deux polarisations sont dégénérées si la fibre optique est parfaitement isotrope.

Physiquement,  $\nu$  (*ordre azimutal*) correspond au nombre de maxima d'intensité du mode sur une demi-circonférence, et  $m$  (*ordre radial*) correspond au nombre de maxima sur un rayon. L'intensité des modes  $LP_{0m}$  est à symétrie de révolution, avec un maximum sur l'axe.

Le champ peut se calculer à partir des *Eqs. (3.59)* qui permettent de calculer, en fonction de  $E_z$ ,  $E_r$  et  $E_\psi$  donc  $E_x$  et  $E_y$ .

Toujours dans le guidage faible, on trouve, pour le mode  $LP_{\nu,m}$  (*polarisé en y*) :

➤ **dans le cœur :**

$$E_x = 0, E_y = E_0 \cdot J_\nu \left( \frac{u \cdot r}{a} \right) \cdot \cos(\nu \psi) \quad (3.73)$$

➤ **dans la gaine :**

$$E_x = 0, E_y = E_0 \cdot J_\nu(u) \cdot \frac{K_\nu \left( \frac{w \cdot r}{a} \right)}{K_\nu(w)} \cdot \cos(\nu \psi) \quad (3.74)$$

### III.4.4.3) Allure du mode fondamental :

L'amplitude du champ du mode  $LP_{01}$  ne dépend que de  $r$  et a pour expression :

➤ **dans le cœur :**  $E_x = E_0 \cdot J_0 \left( \frac{u \cdot r}{a} \right)$  (*ou  $E_y$  pour la polarisation orthogonale*)

Si la fibre est monomode, il n'y a pas de zéro puisque :

$$J_0 \left( \frac{u \cdot r}{a} \right) > J_0(u) > J_0(V) > 0 \text{ si } V < 2.405$$

$$E_z = -j \frac{E_0}{k_0 a n_2} \cdot u \cdot J_1 \left( \frac{u \cdot r}{a} \right) \quad (3.75)$$



➤ dans la gaine :

$$E_x = E_0 \cdot \frac{J_0(u)}{K_0(w)} \cdot K_0\left(\frac{w \cdot r}{a}\right) \quad (3.76)$$

On rappelle que  $E(r, \psi, z, t) = E(r) \cdot \exp[j(\omega t - \beta z)]$ . Le tracé de  $E(r)$  ressemble à une gaussienne. C'est cette approximation que nous allons utiliser dans l'étude des fibres monomodes.

### III.5) Fibres optiques monomodes :

Ne subissant pas de dispersion intermodale, elles ont pris une importance considérable dans les transmissions à longue distance. On les trouve également dans les systèmes où la cohérence de la lumière doit être conservée.

#### **III.5.1) Modèle gaussien de la fibre monomode :**

##### **III.5.1.1) Expression du champ :**

La fibre monomode classique est à saut d'indice, avec la condition sur la fréquence réduite  $V < 2.405$ .

Le diamètre du cœur,  $2a$ , et la différence relative d'indice,  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$ , doivent donc être petits, ce qui justifie l'hypothèse du guidage faible ( $\Delta \ll 1$ ).

L'expression approchée du champ gaussien est donnée par [4] :

$$E(r) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{d_0^2}\right), \quad (3.77)$$

où  $2d_0$  est le diamètre du mode (ou diamètre du champ de mode).

La validité de l'approximation gaussienne s'apprécie par le rendement de couplage d'un faisceau gaussien de diamètre  $2d_0$  dans la fibre monomode : il est très proche de 100%, surtout au voisinage de la coupure.

##### **III.5.1.2) Rappels sur les faisceaux gaussiens :**

L'expression de leur champ, à la distance  $z$  de la source, est :

$$E(r, z, t) = E_0 \frac{d_0}{d} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{d^2} - j\frac{kr^2}{2R} + j\phi\right) \cdot \exp(\omega t - \beta z). \quad (3.78)$$

Le terme  $\exp(\omega t - \beta z)$  exprime la propagation dans direction  $Oz$ . Le terme en  $\exp\left(-\frac{r^2}{d^2}\right)$  exprime la répartition gaussienne du champ dans le plan perpendiculaire à  $Oz$ ;  $2d$ , diamètre à  $1/e$  du faisceau à la distance  $z$ , étant donné [4] :

$$\left(\frac{d}{d_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 \text{ avec } z_0 = \frac{\pi d_0^2}{\lambda}$$

Le terme en  $\exp\left(-j\frac{kr^2}{2R}\right)$  exprime la courbure des surfaces de phase, caractérisée par le rayon de courbure à la distance  $z$  :

$$R = z \left[ 1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] \quad (3.79)$$

Il y a enfin un déphasage supplémentaire  $\phi = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right)$

On observe deux comportements asymptotiques :

- si  $z \ll z_0$ , on est en zone de **champ proche** :  $d \approx d_0$ ,  $R \approx z$ ,  $\phi \approx 0$ , et on a quasiment une onde plane d'axe  $Oz$  ;
- si  $z \gg z_0$ , on est en zone de **champ lointain** :  $d \approx \frac{\lambda z}{\pi d_0}$ ,  $R \approx z$ ,  $\phi \approx \frac{\pi}{2}$ , et on a quasiment une onde sphérique centrée en  $O$ , d'angle de divergence à  $1/e$  :

$$\Theta_0 = \frac{\lambda}{\pi d_0}$$

Cette formule suppose  $\Theta_0$  petit.

La divergence est d'autant plus forte que  $d_0$  est petit, c'est-à-dire que le mode est concentré en  $O$ . C'est l'effet bien connu de la diffraction.  $O$  peut être la source (*laser ou extrémité d'une fibre optique*), ou le foyer si on a focalisé le faisceau.

### III.5) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la fibre optique par la méthode analytique à l'aide des *équations de Maxwell*. On a vu que cette méthode est un peu plus compliquée que la méthode de l'approximation de l'optique géométrique à cause des calculs lourds qu'elle contient mais reste beaucoup plus efficace et précise. Nous avons vu à travers cette



étude les équations de *Maxwell* sous la forme adéquate, ainsi que les différentes équations d'onde en coordonnées cylindriques, les *pseudo-modes LP* et les fréquences de coupure.

Dans le guidage faible, on utilise exclusivement les modes *LP*. C'est l'approximation des modes hybrides en guidage faible. On a remarqué que certains modes ont quasiment la même constante de propagation  $\beta$  et aussi la même fréquence de coupure. Donc on les a groupés en modes *LP*.

L'expression des champs, est la même pour tous les modes. Seules la constante de propagation  $\beta$  et les constantes *A*, *B*, *C* et *D* diffèrent pour chaque mode. Donc pour connaître un mode, il faut connaître *A*, *B*, *C* et *D* ainsi que  $\beta_{v,m}$ . En fixant ces paramètres, on aura définie un mode, et un seul.

## ***Chapitre IV :***

### ***Simulation à l'aide de MATLAB***



## **Simulation à l'aide de MATLAB**

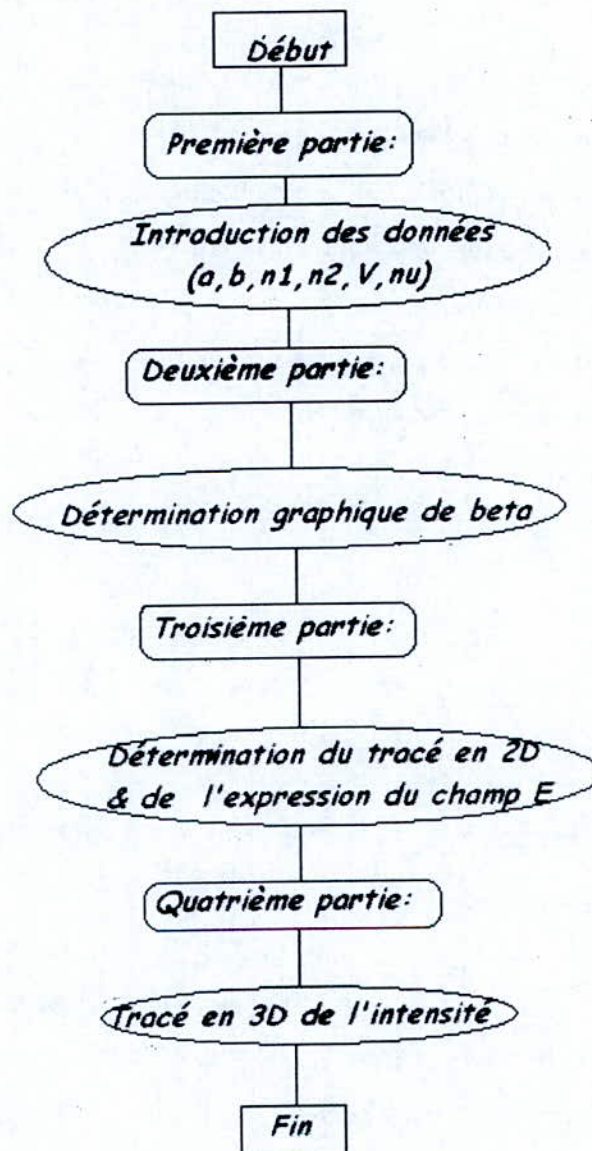
### **IV.1) Introduction :**

Dans ce chapitre, nous allons faire une application des résultats théoriques obtenus dans le **Chapitre III**, c'est-à-dire des expressions du champ obtenues à l'aide des équations de *Maxwell*. Nous allons simuler l'allure de différents modes *LP* du champ électrique se propageant dans une fibre optique à saut d'indice.

Nous allons structurer notre programme comme suit :

En premier lieu, nous allons introduire les différentes valeurs de données nécessaires à l'exécution du programme (*partie1*). En second lieu, nous nous pencherons sur la détermination graphique de  $\beta$ . Ensuite arriva la représentation graphique : dans la troisième partie, on représentera en deux dimensions (**2D**), la courbe de  $E(r)$  et on la comparera avec une gaussienne pour différentes valeurs de la fréquence réduite  $V$ . Dans la quatrième partie, on représentera, en trois dimensions (**3D**), les intensités du champ électrique de différents modes *LP*, pour les comparer ensuite.

Pour ce faire, nous allons utiliser le langage de programmation **MATLAB**. Notre choix pour ce langage de programmation se justifie par sa disponibilité d'abord, mais aussi par sa simplicité et ses performances à résoudre des problèmes mathématiques, car MATLAB est un puissant outil de calcul et de traçage de graphes, que ce soit en 2D ou en 3D.

**IV.1) Organigramme :****Figure IV.1 : Organigramme du programme utilisé**

Cet organigramme décrit de manière générale la structure du programme utilisé. Quand on l'exécute, un message de bienvenue s'affiche à l'écran. Ensuite, dans l'étape 1 décrite dans l'organigramme, nous devons introduire les données une à une tel que spécifié à l'écran. On commence par le rayon du cœur de la fibre  $a$ , puis celui de la gaine  $b$ , les indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ , la fréquence réduite  $V$  et enfin l'ordre azimutal  $\nu$ . Les valeurs des rayons et des longueurs d'onde doivent être données en mètres. Une fois ces valeurs introduites, un message s'affiche nous demandant de choisir le mode qu'on veut visualiser (étape 2), puis d'introduire la valeur de  $\nu$ . Lorsque  $\nu$  est introduit, on voit



s'afficher une fenêtre sur laquelle sont tracées deux courbes, l'une en vert et l'autre en bleu. Les points d'intersection de ces deux courbes sont les  $\beta$  recherchées. S'il n'existe pas de points d'intersections, alors cela veut dire qu'il n'y a pas de mode se propageant dans ces conditions, résultantes des données introduites. Le nombre de points d'intersection correspond au nombre de modes.

Ensuite, le programme nous donne la main pour agrandir les régions où se trouvent les points d'intersection pour une meilleure précision. En appuyant sur la touche « **ENTRER** », on voit s'afficher un curseur, qu'on orientera vers le point d'intersection recherché. C'est ce point qui représentera par la suite  $n_{eff}$ , et par conséquent,  $\beta$ . En choisissant ce point, on aura choisi le mode à représenter. Dans un premier temps, on voit s'afficher la courbe de  $E$  en 2D. La courbe en pointillés bleus représente la gaussienne, celle en vert représente le champ dans le cœur de la fibre et celle en rouge représente le champ dans la gaine.

En appuyant sur « **ENTRER** » une seconde fois, on obtient le graphe en 3D représentant l'intensité du champ électrique. On verra par la suite les différents graphes pour différents modes  $LP$  et pour différentes valeurs de  $V$ .

### **IV.3) Programme utilisé en langage MATLAB :**

Voici le programme utilisé :

```
fprintf('Bienvenue dans le programme de calcul des champs\n')
% PREMIERE PARTIE: INTRODUCTION DES DONNEES
fprintf('PREMIERE PARTIE: INTRODUCTION DES DONNEES')
% introduction du rayon du coeur a de la fibre optique
a=input('Veuillez donner le rayon du coeur de la fibre en metres a=');
% introduction du rayon b de la gaine
b=input('Veuillez donner le rayon de la gaine b=');
% introduction des indices de refraction du coeur et de la gaine
% respectivement
n1=input('Donner l indice de refraction du coeur n1=');
n2=input('Donner l indice de refraction de la gaine n2=');
delta=(n1-n2)/n1; % delta est la différence relative d'indice
% introduction de la fréquence normalisée
V=input('Veuillez introduire la fréquence normalisée V=');
lamda=a*2*pi/V*n1*sqrt(2*delta);% lamda est la longueur d'onde
```

```

w0=a*(0.65+1.619*V^(-1.5)+2.879*V^(-6)); %wo est le diamètre du mode
donné par l'approximation de Marcuse
k=2*pi/lamda; % Nombre d'onde
neff=n2:1e-4:n1; % Variation de l'indice effectif entre n2 et n1
beta=k*neff; % Relation reliant beta à neff
u=sqrt(a^2*(k^2*n1^2-beta.^2)); %constante de propagation latérale
normalisée dans le cœur
v=sqrt(a^2*(beta.^2-k^2*n2^2)); %constante de perte latérale normalisée
dans la gaine
omega=2*pi*3*10e8/lamda;
mu=4*pi*10e-7;
nu=input(' Veuillez introduire la valeur de nu=')
% DEUXIEME PARTIE : DETERMINATION GRAPHIQUE DE BETA
fprintf('DEUXIEME PARTIE : DETERMINATION GRAPHIQUE DE BETA')
if nu==0 % c'est la famille de LP(0,m) et elle correspond à la famille HE(1,m)
    nu=1
    y1=(besselj(nu-1,u)/(besselj(nu,u)));
    y2=(u.*besselk(nu-1,v)/(v.*besselk(nu,v)));
    % Equation caractéristique du mode
    plot(neff,y1,neff,y2);
    grid;
    axis([n2 n1 -20 20]);
    title('Determination graphique de beta');
    xlabel('neff');
    pause
    [neff,o]=ginput(1);
    beta=k*neff;
else if nu==1% c'est la famille de LP(0,m) et elle correspond aux familles
TE(0,m)+TM(0,m)+HE(2,m)
    nu=2
    y1=(besselj(nu-1,u)/(besselj(nu,u)));
    y2=(u.*besselk(nu-1,v)/(v.*besselk(nu,v)));
    % Equation caractéristique du mode
    plot(neff,y1,neff,y2);
    grid;
    axis([n2 n1 -20 20]);

```



```

title('Determination graphique de beta');
xlabel('neff');
pause
[neff,o]=ginput(1);
beta=k*neff;
else if nu>1
    nu=nu+1
    y1=(besselj(nu-1,u)/(besselj(nu,u)));
    y2=(u.*besselk(nu-1,v)/(v.*besselk(nu,v)));
    % Equation caractéristique du mode
    plot(neff,y1,neff,y2);
    grid;
    axis([n2 n1 -20 20]);
    title('Determination graphique de beta');
    xlabel('neff');
    pause
    [neff,o]=ginput(1);
    beta=k*neff;
end
end
end
% à ce stade beta est déterminée, il ne reste plus qu'à le remplacer par sa
% valeur et de tracer la courbe de E pour la comparer avec une gaussienne
% TROISIEME PARTIE : TRACE EN 2D DU CHAMP ELECTRIQUE E
fprintf('TROISIEME PARTIE : TRACE EN 2D DU CHAMP ELECTRIQUE E')
nu=nu-1;
u=sqrt(a^2*(k^2*n1^2-beta.^2));
v=sqrt(a^2*(beta.^2-k^2*n2^2));
% le champ dan le coeur, représenté en vert dans le graphe
r1=0:(1e-6)/a:1;
E1=besselj(nu,u.*r1);
% le champ dans la gaine, représenté en rouge dans le graphe
r2=1:(1e-6)/a:b/a;
E2=besselj(nu,u)*besselk(nu,v.*r2)/besselk(nu,v);
% la gaussienne
r3=0:(1e-6)/a:b/a;

```

```

E3=exp(-a.*r3.^2./w0)
plot(r1,E1,'-g',r2,E2,'-r',r3,E3,'-b')
grid
xlabel('r/a')
ylabel('Valeur normalisée du champ électrique E/E0')
title('Comparaison de l'allure du mode LP(nu,m) avec la gaussienne')
axis([0 b/a 0,1.1])
pause
% QUATRIEME PARTIE : TRACE EN 3D DE L'INTENSITE DU CHAMP
ELECTRIQUE
fprintf('QUATRIEME PARTIE : TRACE EN 3D DE L'INTENSITE DU CHAMP
ELECTRIQUE')
x=-b:b/80:b;
y=x;
[X,Y]=meshgrid(x,y)
% Calcul de l'intensité
I=abs(((besselj(nu,u.*sqrt(X.^2+Y.^2)/a)).^2.*(cos(nu.*atan(Y./X))).^2));
% On fait un changement de variable, on passe de (r,theta,z) à (x,y,z)
title('INTENSITE DU CHAMP E')
meshc(X,Y,I)
title('Représentation en 3D de l'intensité du champ électrique des modes
LP')
xlabel('Intensité normalisée (I/I0)')

```

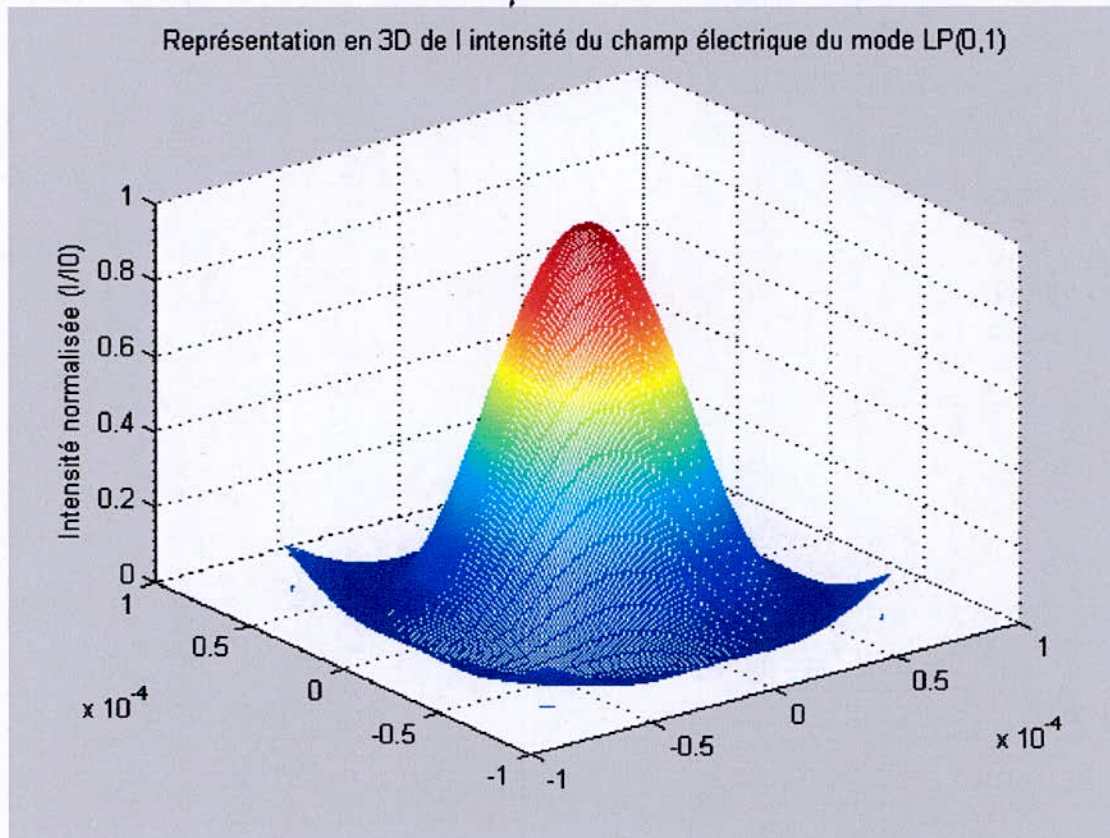
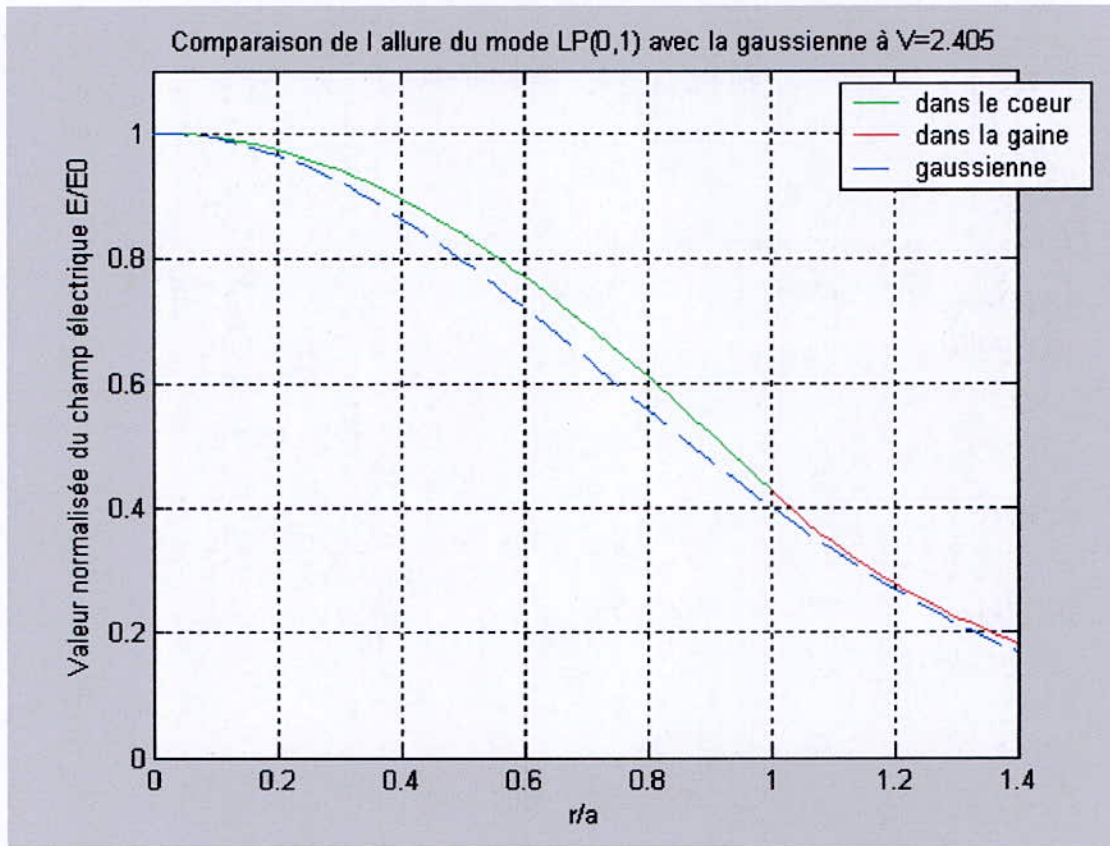
Les différentes étapes de ce programme sont expliquées dans le paragraphe précédent.

#### **IV.4) Résultats obtenus :**

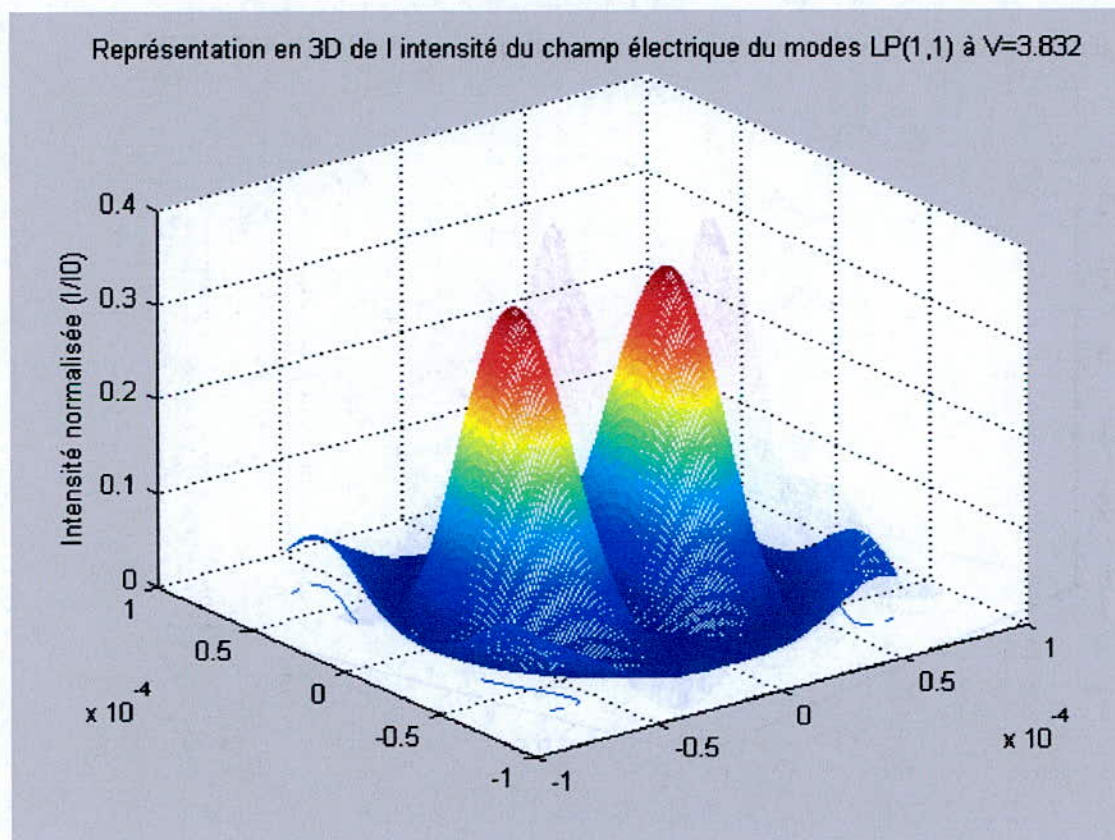
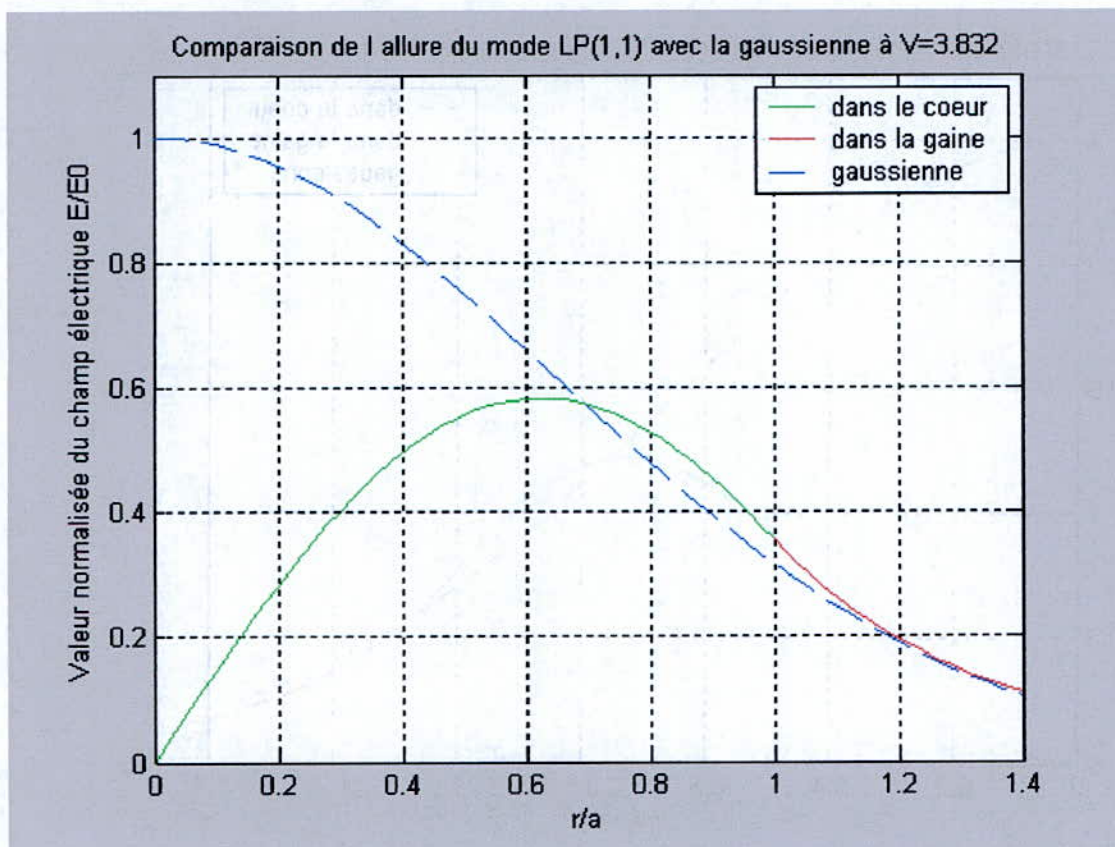
A présent, nous allons l'exécuter en prenant comme données :

- le rayon du cœur  $a=50\mu\text{m}$
- le rayon de la gaine  $b=70\mu\text{m}$
- l'indice de réfraction du cœur  $n_1=1.4487016$
- l'indice de réfraction de la gaine  $n_2=1.44402362$



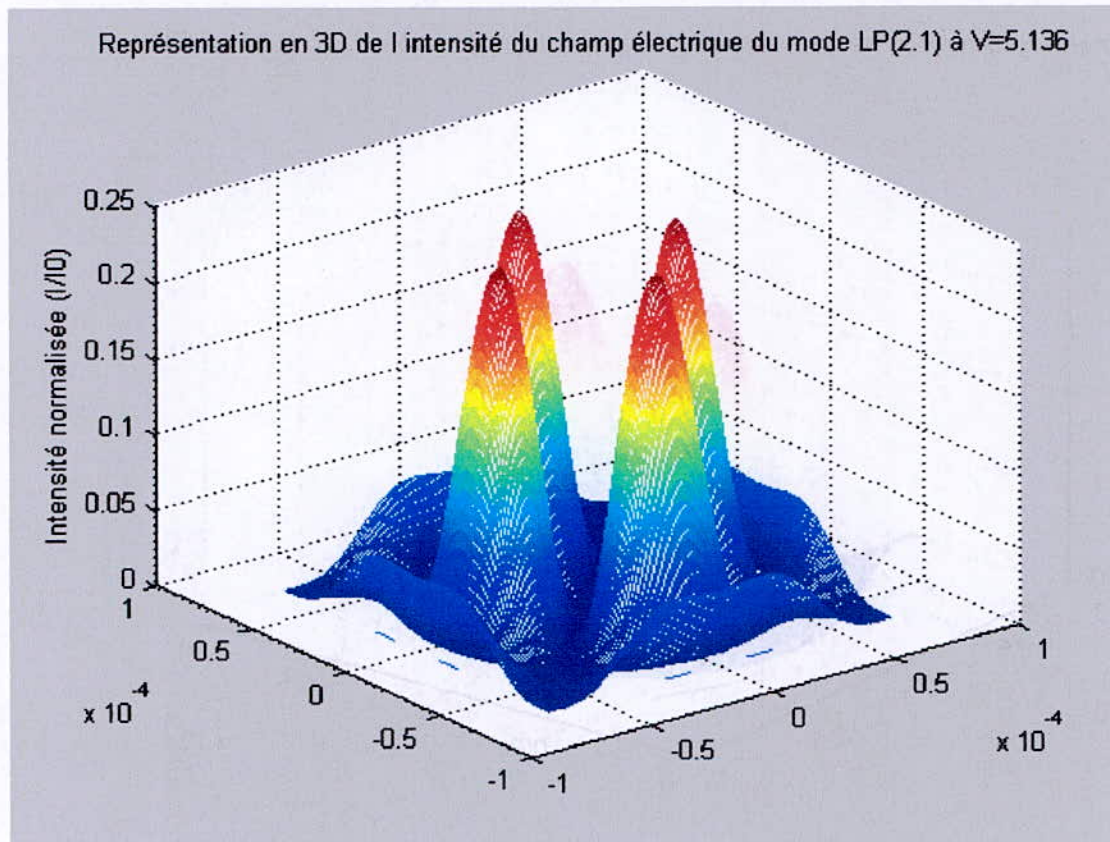
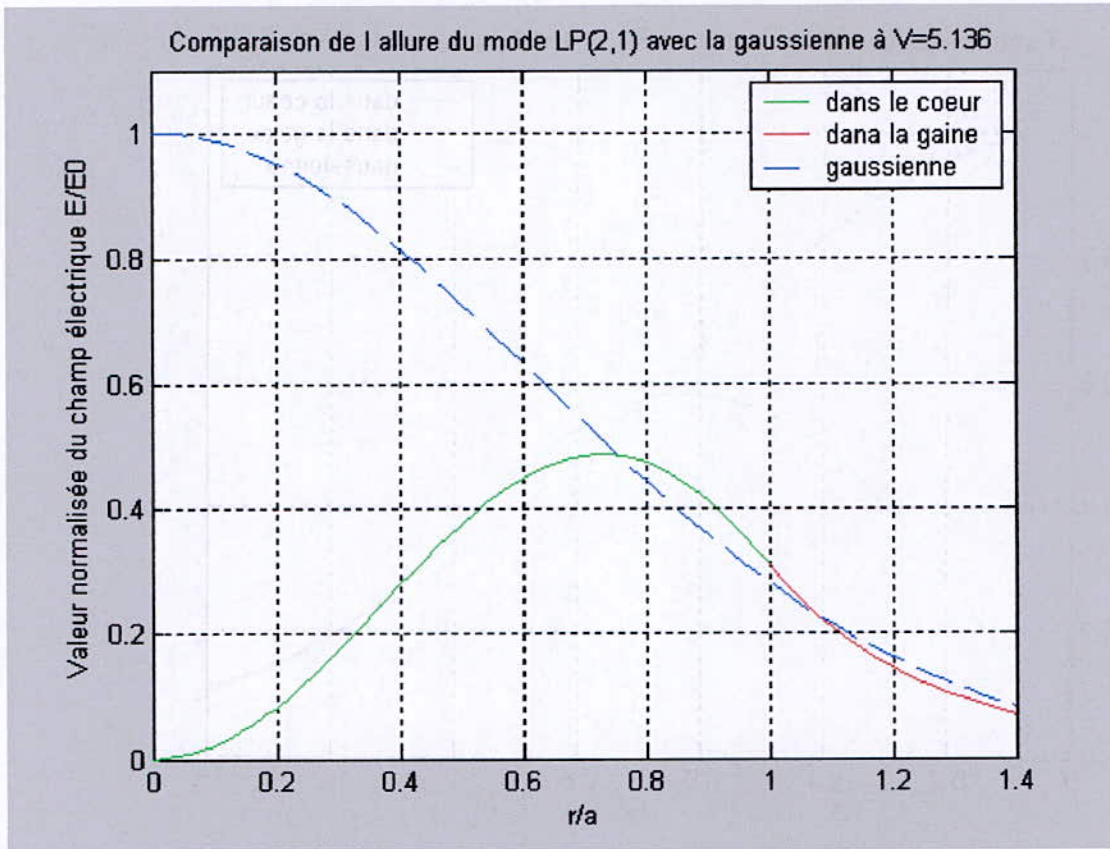


-a-

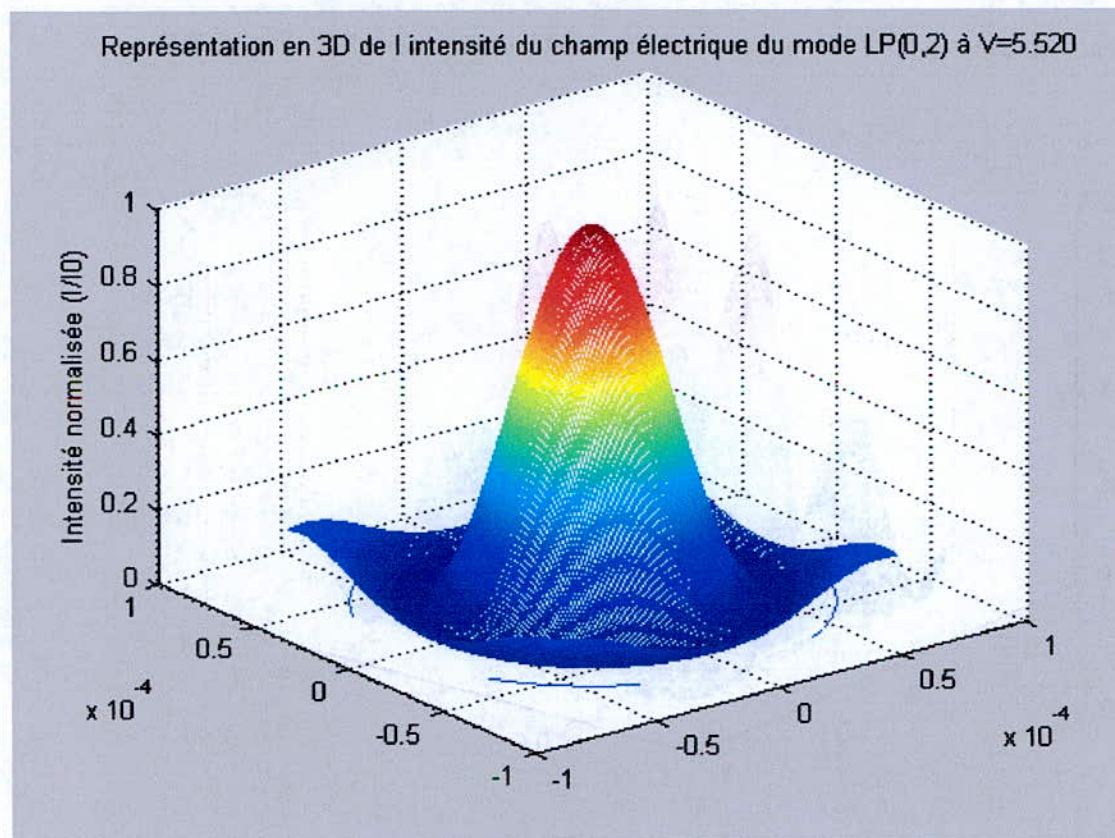
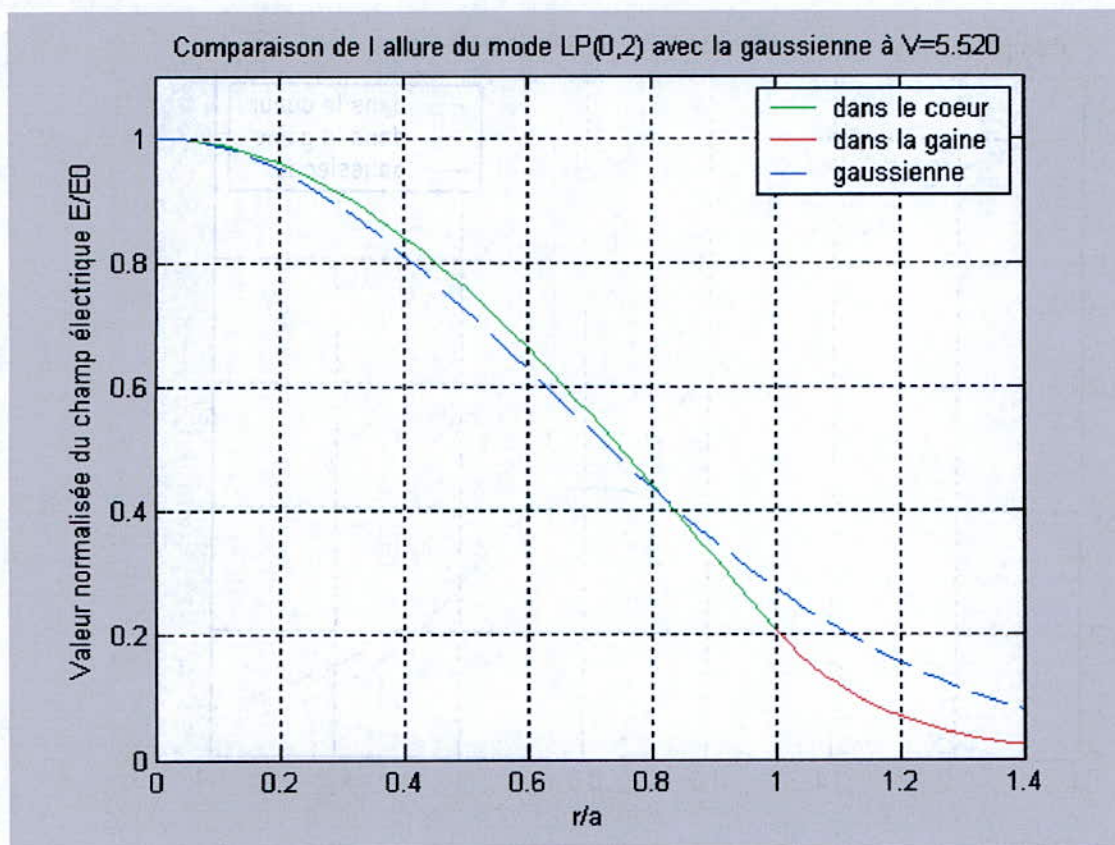


**-b-**



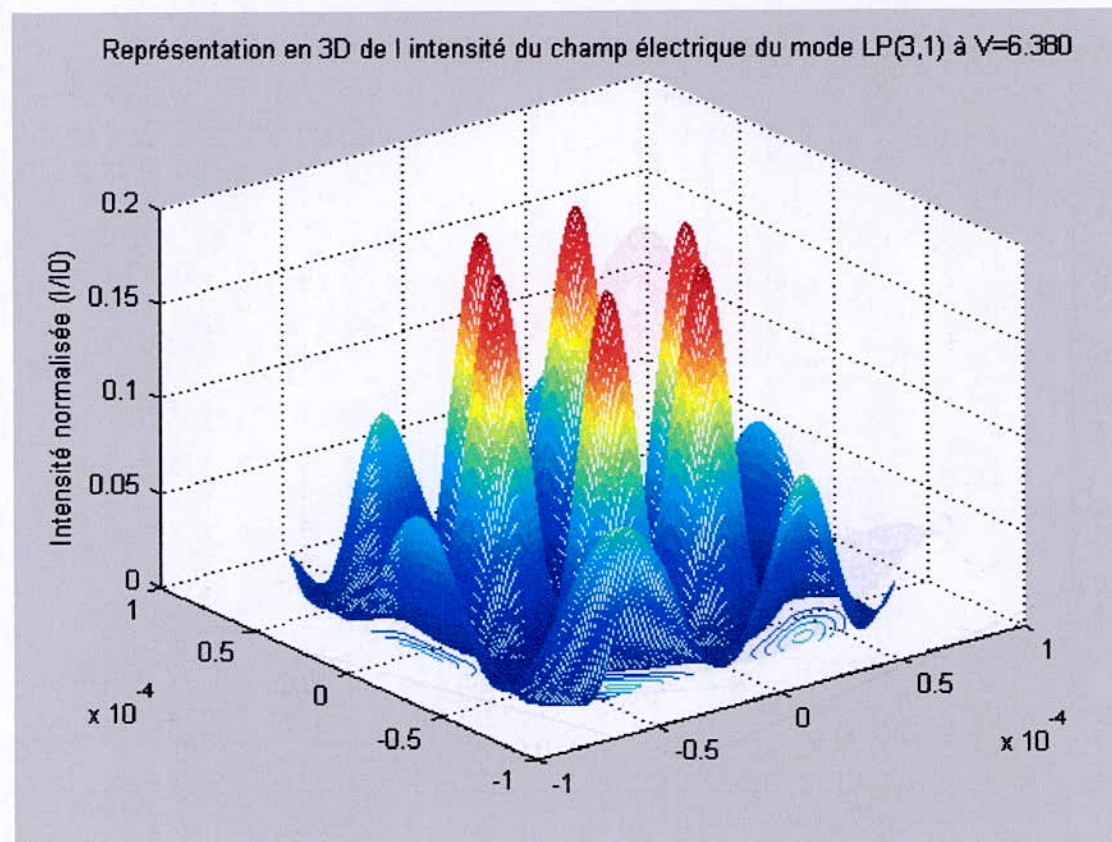
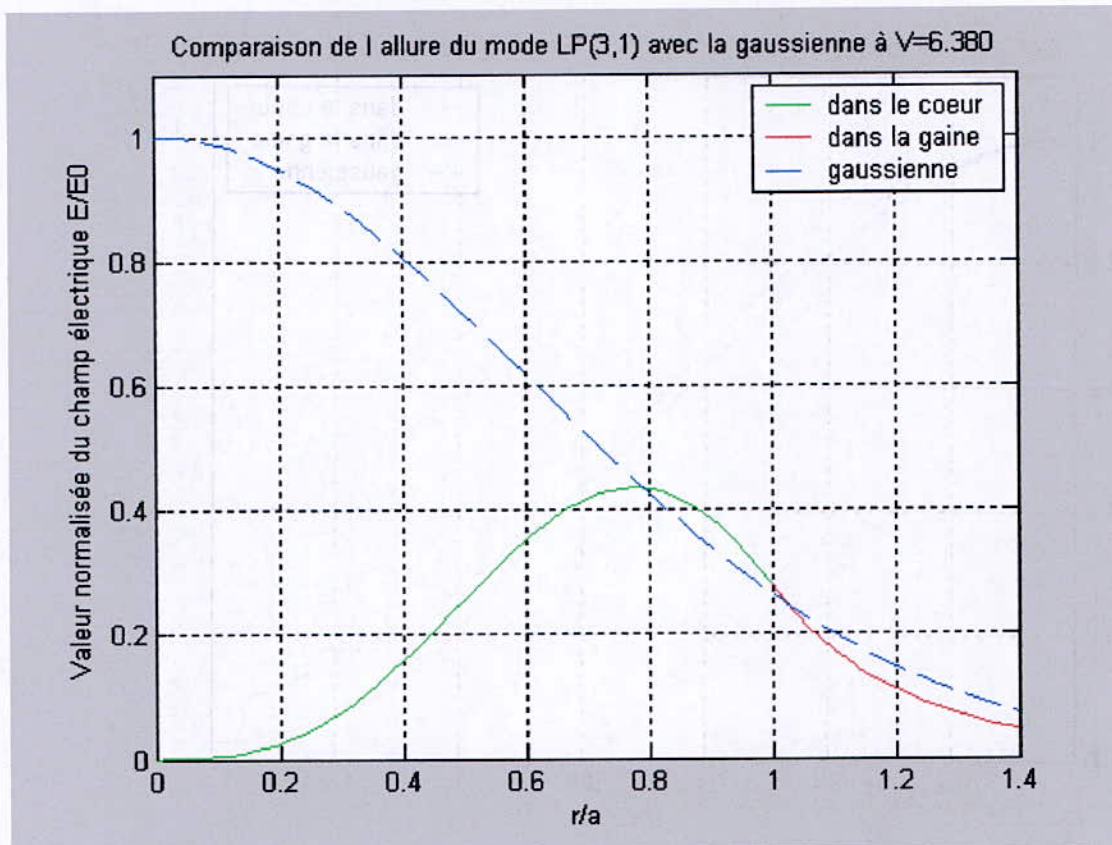


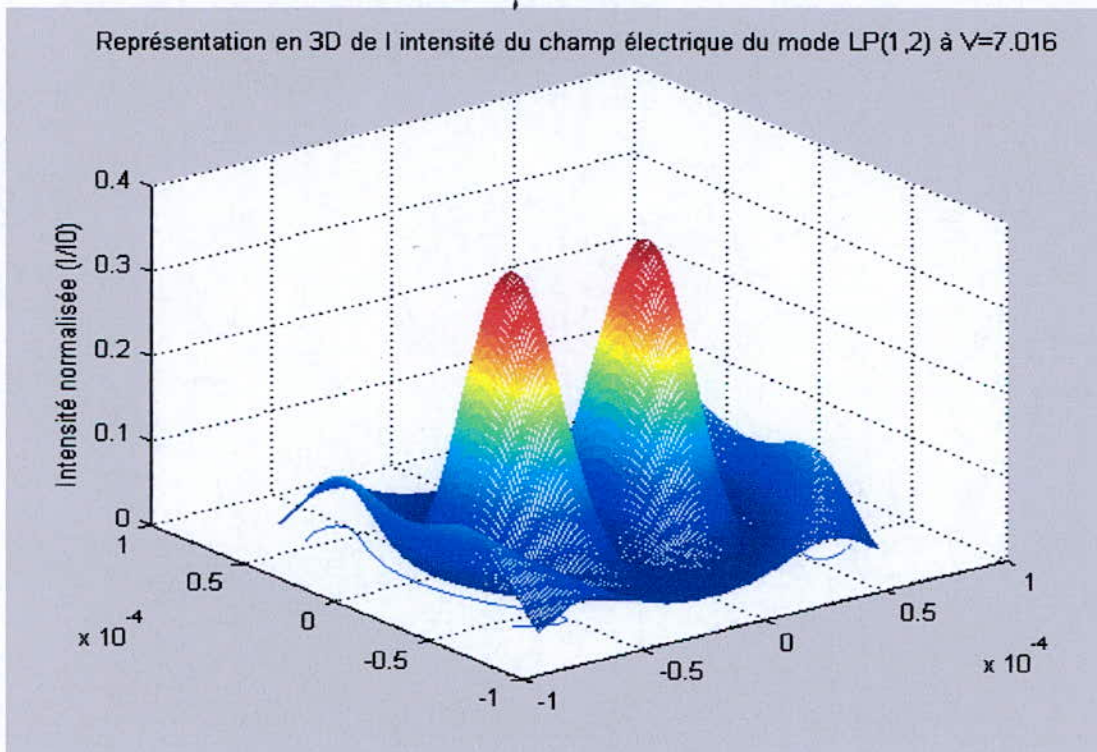
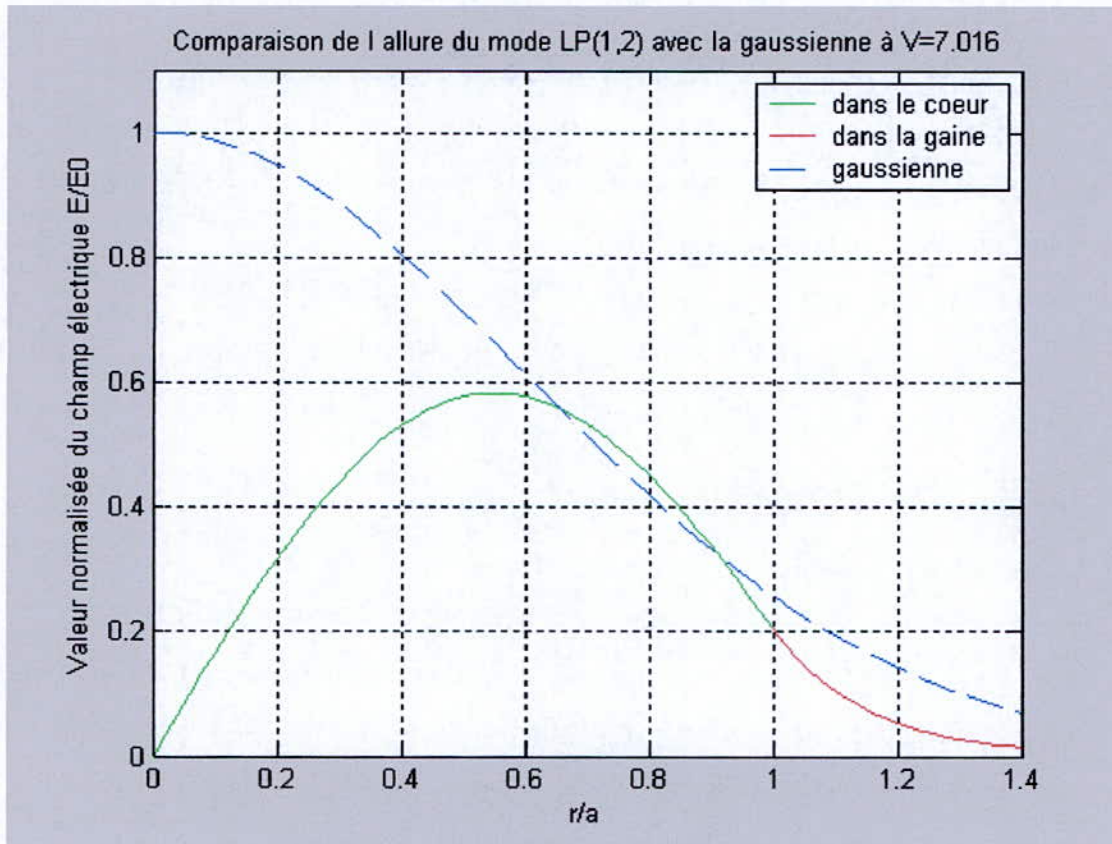
-c-



-d-







-f-

**Figure IV.1 : Graphes obtenus après l'exécution du programme**  
 -a- LP<sub>01</sub>,  $V=2.405$ , -b- LP<sub>11</sub>,  $V=3.832$ , -c- LP<sub>21</sub>,  $V=5.136$ , -d- LP<sub>02</sub>,  $V=5.520$ ,  
 -e- LP<sub>31</sub>,  $V=6.380$ , -f- LP<sub>12</sub>,  $V=7.016$



Ces graphes confirment les résultats théoriques obtenus dans les chapitres 2 et 3. Nous remarquons qu'une fois  $\nu$  fixé, c'est  $\beta$  qui détermine l'allure du graphe. Si on compare les modes  $LP_{01}$  et  $LP_{02}$ , par exemple,  $\nu=0$  dans ce cas, mais les deux graphes représentant ces deux modes sont totalement différents.

Nous remarquons en plus que, plus  $V$  augmente, et plus le nombre de modes augmente, ce qui confirme une fois de plus les résultats théoriques obtenus.

#### **IV.5) Conclusion :**

Les résultats obtenus après exécution du programme nous laissent penser que les deux méthodes utilisées dans les chapitres 2 et 2 sont justes, elles ont été vérifiées par les graphes obtenus. La différence est que la méthode de l'optique géométrique est quantitative, ses résultats donne une description générale sur la forme du champ qu'on va avoir. La méthode analytique (à l'aide des équations de Maxwell) est qualitative, elle donne une description précise et détaillée sur la valeur du champ qu'on doit obtenir.

De meilleurs résultats seront obtenus si l'on combine entre les deux méthodes.

## **Conclusion générale :**

L'évolution des rayons lumineux dans une fibre optique est mise en évidence par la détermination des différents modes de propagation et l'allure du champ électromagnétique.

Pour cela, nous avons utilisé deux méthodes ; l'approche de l'optique géométrique qui est approximative et qui donne un résultat quantitatif, et la méthode analytique à l'aide des équations de *Maxwell* qui donne un résultat qualitatif.

Nous avons vu à travers la méthode analytique que seule la constante de propagation longitudinale  $\beta$  pouvait caractériser de façon précise un mode. On a vu aussi que pour des indices de réfraction du cœur ( $n_1$ ) et de la gaine ( $n_2$ ) proches (*condition de guidage faible*), on pouvait grouper certains modes ayant  $\beta$  quasiment identique et présentant des caractéristiques similaires. Ces modes sont appelés **Pseudo-modes** ou **modes LP** (*Linearly Polarized modes*).

Ces modes **LP** sont beaucoup plus faciles à étudier que les modes hybrides ou transverses, et donnent des résultats similaires.

Quand la condition du guidage faible n'est pas vérifiée, les modes **LP** ne peuvent pas être utilisés, et nous devons revenir aux modes transverses et hybrides, qui sont plus gourmands en temps de calculs.

Grâce aux graphes obtenus à l'aide de la simulation, on a montré que suivant la valeur de la fréquence réduite  $V$ , l'intensité présente des répartitions propres pour chaque mode. La meilleure répartition est obtenue dans le mode **LP<sub>01</sub>** (mode fondamental) ; c'est-à-dire la plus importante intensité est confinée dans le cœur et par conséquent, quasiment pas de pertes dans la gaine.



## ***Bibliographie :***

- [1] **AGRAWAL GOVIND P.**, (2002), « Fiber Optic Communications Systems, Third Edition », John Wiley & Sons, Inc., ISBN: 0-471-21571-6 (Hardback); 0-471-22114-7 (Electronic), pp 1-58.
- [2] **GLOGE D.**, (1971), « Applied Optics », vol.10, pp. 2252-2258.
- [3] **KAWANO K., KITO T.**, (2001), « Introduction To Optical Waveguide Analysis : Solving Maxwell's Equations and the Schrödinger Equation », John Wiley & Sons, Inc., ISBN : 0-471-40634-1 (Hardback); 0-471-22160-0 (Electronic), pp 1-57.
- [4] **LECOY P.**, (1992), « Télécommunications optiques », Hermès, ISBN : 2-86601-305-0, pp. 21-70.
- [5] **MOKHTARI M., MESBAH A.**, (1997), « Apprendre et Maîtriser MATLAB », Springer, ISBN : 3-540-62773-1.
- [6] **POWERS J.**, « AN INTRODUCTION TO FIBER OPTIC SYSTEMS, Second Edition », Mc GRAW-HILL International Editions, ISBN : 0-07-116679-3, pp. 4-40.
- [7] **UNGAR S.**, (1989), « Fibres Optiques », Dunod, pp. 2-20.
- [8] **WATSON G. N.**, (1922), « Theory of Bessel Functions », CAMBRIDGE University press.

[9] **The MatWorks, Inc., (2004) « Using MATLAB Graphics », The MatWorks, Inc.**



## Annexe A

**Résolution de l'équation des rayons en coordonnées cylindriques :**

On écrit d'abord : 
$$\frac{d\overline{OP}}{ds} = \frac{dz}{ds} \vec{u}_z + r \frac{d\psi}{ds} \vec{u}_\psi + \frac{dr}{ds} \vec{u}_r.$$

On dérive  $n \cdot \frac{d\overline{OP}}{ds}$  en le décomposant :

➤ Le long de  $\mathbf{Oz}$ ,  $\vec{u}_z$  étant fixe : la composante vaut :  $\frac{d}{ds} \left[ n \cdot \frac{dz}{ds} \right]$ ,

elle est nulle si  $n$  ne dépend pas de  $\mathbf{z}$ , d'où :

$$n \cdot \frac{dz}{ds} = n \cdot \cos \theta = C^{te}.$$

➤ Dans le plan parallèle à  $\mathbf{xOy}$  : cette composante vaut :

$$\frac{d}{ds} \left[ n \cdot r \cdot \frac{d\psi}{ds} \right] \vec{u}_\psi + n \cdot r \cdot \frac{d\psi}{ds} \cdot \frac{d\vec{u}_\psi}{ds} + \frac{d}{ds} \left[ n \cdot \frac{dr}{ds} \right] \vec{u}_r + n \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\vec{u}_r}{ds}.$$

Or,  $\frac{d\vec{u}_r}{ds} = \frac{d\psi}{ds} \vec{u}_\psi$  et  $\frac{d\vec{u}_\psi}{ds} = -\frac{d\psi}{ds} \vec{u}_r$ .

La composante selon  $\vec{u}_\psi$  vaut :

$$\frac{d}{ds} \left[ n \cdot r \cdot \frac{d\psi}{ds} \right] + n \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\psi}{ds}, \text{ elle est nulle si } n \text{ ne dépend pas de } \psi.$$

Soit : 
$$2n \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\psi}{ds} + r \cdot \frac{dn}{ds} \cdot \frac{d\psi}{ds} + n \cdot r \cdot \frac{d^2\psi}{ds^2} = 0$$

Si on multiplie le premier membre de cette équation par  $r$ , on aura :

$$2nr \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{d\psi}{ds} + r^2 \frac{dn}{ds} \cdot \frac{d\psi}{ds} + nr^2 \cdot \frac{d^2\psi}{ds^2}, \text{ et ceci vaut :}$$

$$\frac{d}{ds} \left[ nr^2 \cdot \frac{d\psi}{ds} \right]$$

Cette dérivée étant nulle, on en déduit :

$$nr^2 \cdot \frac{d\psi}{ds} = nr \cdot \sin\theta \sin\varphi = C^{te}$$

Les expressions de **(2.20)** sont ainsi démontrées.



## Annexe B

### Calcul des constantes **A**, **B**, **C** et **D** :

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{pmatrix} J_\nu & 0 & -K_\nu & 0 \\ -j\frac{\beta}{(ua)^2}\frac{\nu}{a}J_\nu & j\frac{\omega\mu_0}{ua}J'_\nu & -j\frac{\beta}{(wa)^2}\frac{\nu}{a}K_\nu & j\frac{\omega\mu_0}{wa}K'_\nu \\ 0 & J_\nu & 0 & -K_\nu \\ -j\frac{\omega\varepsilon_1}{u/a}J'_\nu & j\frac{\beta}{(ua)^2}\frac{\nu}{a}J_\nu & -j\frac{\omega\varepsilon_2}{w/a}K'_\nu & j\frac{\beta}{(wa)^2}\frac{\nu}{a}K_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0,$$

c'est un système homogène. Pour qu'il n'ait pas des solutions identiquement nulle, il faut que son déterminant soit nul.

Une fois cette condition vérifiée, les solutions **B**, **C** et **D** seront en fonction de **A**.

Si on prend la première ligne, on aura :

$$C = \frac{J_\nu(u)}{K_\nu(w)} A$$

La troisième ligne nous donne :

$$D = \frac{J_\nu(u)}{K_\nu(w)} B$$

En remplaçant ces résultats dans la seconde ligne, on abouti a :

$$B = -\frac{\beta\nu\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)}{\omega\mu_0\left(\frac{J'_\nu(u)}{uJ_\nu(u)} + \frac{K'_\nu(w)}{wK_\nu(w)}\right)} A$$

Dans le cas particulier des modes **TE** et **TM** ( $\nu=0$ ), on aura respectivement: