

3 ex

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

DEPARTEMENT : MECANIQUE

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**SUJET**

Vibro Isolation Optimum d'une Structure  
Mecanique Soumise à des Excitations  
Stochastiques à l'aide d'un Dispositif  
de Localisation.

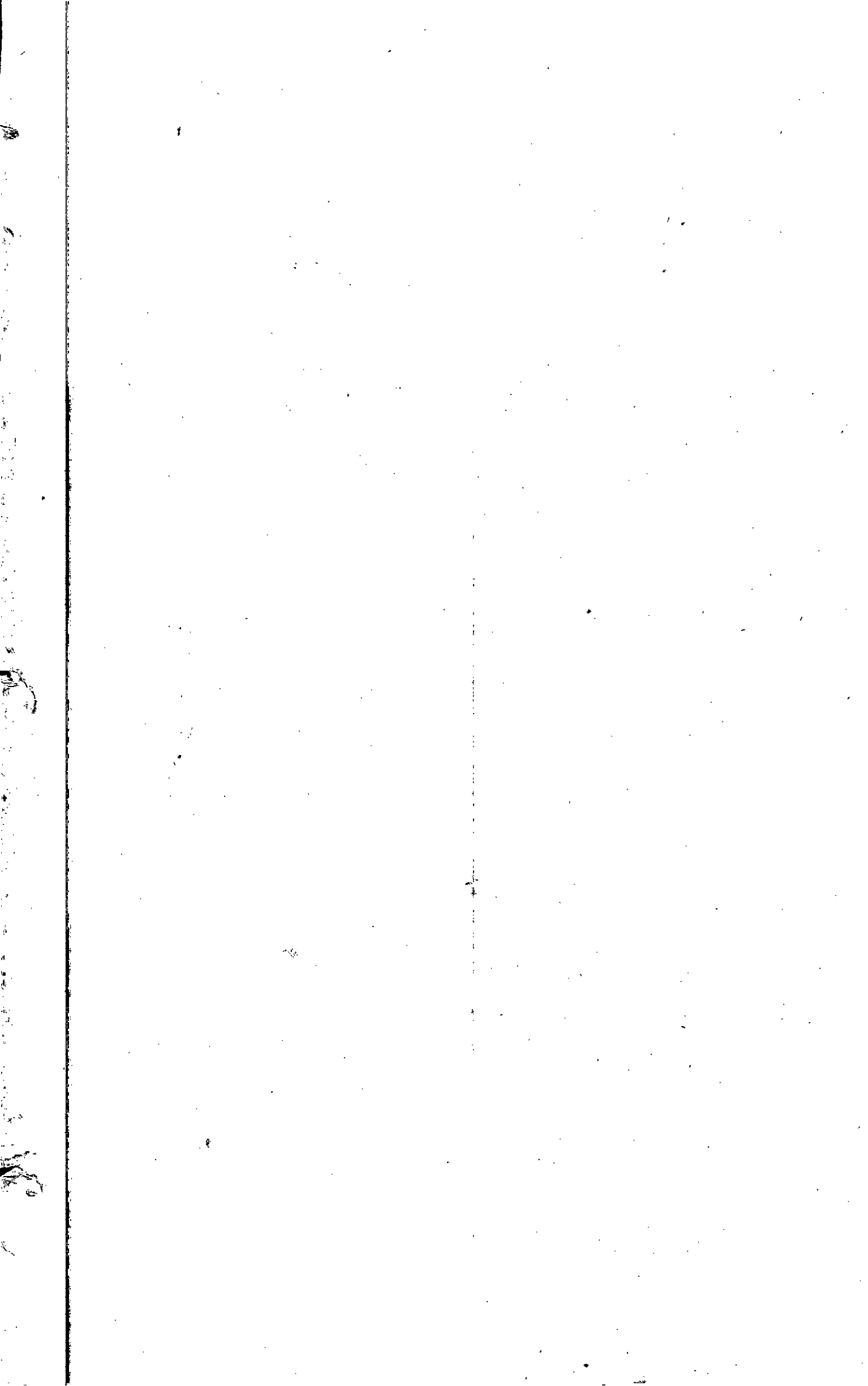
Proposé par :  
M KSIAZEK

Etudié par :  
Z BOUTAGHOU

Dirigé par :  
M KSIAZEK



PROMOTION: Juin 84



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
—»O«—

Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique  
—»O«—

**ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE D'ALGER**  
—»O«—

**DEPARTEMENT DE GENIE - MECANIQUE**  
—»O«—

**PROJET DE FIN D'ETUDES**

**THEME**

Vibro-Isolation Optimum d'une Structure  
Mecanique Soumise à des Excitations  
Stochastiques au Voisinage d'un  
Dispositif de Localisation.

Proposé par :

**M Marek KSIAZEK**

Dirigé par :

**Zineeddine BOUTAGHOU**

Promotion Juin 1984

Etudiant : BOUTAGHOU Zine-Eddine

Dept : Mécanique

Promoteur : M<sup>r</sup> Marek Ksiasek.

## RESUME

L'étude des systèmes de vibroisolation optimum a été établit dans le cas d'excitations discrètes avec dispositif de localisation. Les excitations ont été considérées comme stationnaire et stochastique. La méthode de résolution est basée sur l'équation de Wiener-Hopf. L'expression des fonctions de transferts optimum de vibroisolation ont été calculées. Les dispersions d'écarts de déplacements ( $\sigma_{x-x_0}^2$ ) et d'accélération ( $\sigma_{\ddot{x}}^2$ ) ont été comparées avec les dispersions correspondantes a un système de vibroisolation optimum sans dispositif de localisation.

sujet : Vibroisolation optimum d'une structure mécanique soumise à des excitations stochastiques à l'aide d'un dispositif de localisation.

## SUMMARY

The problem of the vibroisolation of a dynamic discret system with a device of prediction is considered. Excitations were taken as stationary stochastic process. The method based on Wiener-Hopf's equation was employed to solve the problem. General expressions for the optimum transfer functions of the vibroisolation system have been calculated. The dispersion of the relative displacements ( $\sigma_{x-x_0}^2$ ) and accelerations ( $\sigma_{\ddot{x}}^2$ ) were compared with the corresponding dispersions of the optimum vibroisolation system without a device of prediction.

subject : optimum vibroisolation of a mechanic structur at stochastical excitations with a device of prediction.

## ملخص

إن دراسة عملية العزل الإهتزازي للتأثيرات الاحتمالية التي تكون ثابتة وتابعة للزمن بواسطة جهاز توجيه. إن طريقة تحليل قد أسست عن معادلات "فينار هيف" . وعبارة معادلات تحويل لمنهومة منح الاهتزازات قد وجدته . وتشتيت خلاف الإزجال والتعجيل قد قرنت مع مثلها أي التشتيتات لمنهومة منح الاهتزازات بدون جهاز توجيه .

الموضوع : عملية عزل الاهتزازي لهيكل ميكانيكي مخلوع  
إهتزازات ثابتة بجهاز توجيه

## DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- Mon pays l'Algerie
- Mes grand-parents
- Mes parents
- Mes frères et soeurs
- Mes sincères et fideles amis

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur Marek Ksiasek pour son aide et son suivi durant cette étude ainsi que tous les professeurs qui ont contribué à ma formation.

# SOMMAIRE

Page

INTRODUCTION .....	1
Chap I GENERALITES	
1.1: Excitations harmoniques .....	3
1.2: Excitations polyharmoniques .....	4
1.3: Fonctions aléatoires .....	5
1.3.1: Notions de bases et classifications des processus stochastiques ..	6
1.3.2: Excitations stationnaires .....	9
1.3.3: Excitations non stationnaires .....	9
1.4: Relations supplémentaires .....	10
Chap II PROBLEMES DE CRITERES DE VIBRO-ISOLATION.	
2.1: Formes de critères et leurs dépendance d'exigence de normalisation et de structures d'objets .....	12
2.2: Modèles dynamiques utilisés dans ces sujets et critères de vibro. isolations appliqués .....	13
Chap III CONSTRUCTION ANALYTIQUE DES SYSTEMES DE VIBRO-ISOLATIONS AVEC DISPOSITIF DE LOCALISATION	
3.1: Hypothèses .....	16
3.1.1: Systeme physiquement réalisable .....	16
3.1.2: Stationnarité et linéarité du système .....	16
3.2: Formalisation mathématique du Pb .....	17
3.3: Solution générale du Pb par l'équation de Wiener-Hopf .....	22
Chap IV SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION POUR VIBRO-ISOLER UN CORPS RIGIDE AVEC LE DISPOSITIF DE LOCALISATION	
4.1: Excitation par un bruit blanc .....	26

4.2: Excitation par un processus  $S_{x_0}(s) = -\frac{N^2}{s^4}$  . . . . . 33

4.3: Excitation par un processus  $S_{x_0}(s) = \frac{N^2}{-s^2 + \alpha^2}$  . . . . . 38

4.4 : Forme analytique des systèmes optimums s'ils travaillent  
parallèlement avec des structures passives . . . . . 45

Chap V SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION POUR ISOLER UN SYSTEME  
DYNAMIQUE AVEC LE DISPOSITIF DE LOCALISATION .

5.1: Fonction de transfert du SV optimum en fonction de  
l'impédance de déplacement . Expression Générale . . . . . 47

5.2 : Fonction de transfert du SV optimum pour deux  
formes de  $S_{x_0}(s)$  :

5.2.1: par un bruit blanc . . . . . 51

5.2.2 : par un bruit  $S_{x_0}(s) = 2\alpha N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha s^2}$  . . . . . 64

5.3 : Comparaison des résultats avec les systèmes de  
vibro-isolation sans dispositif de localisation . . . . . 70

Chap VI CONCLUSION . . . . . 76

BIBLIOGRAPHIE . . . . . 79



# INTRODUCTION.

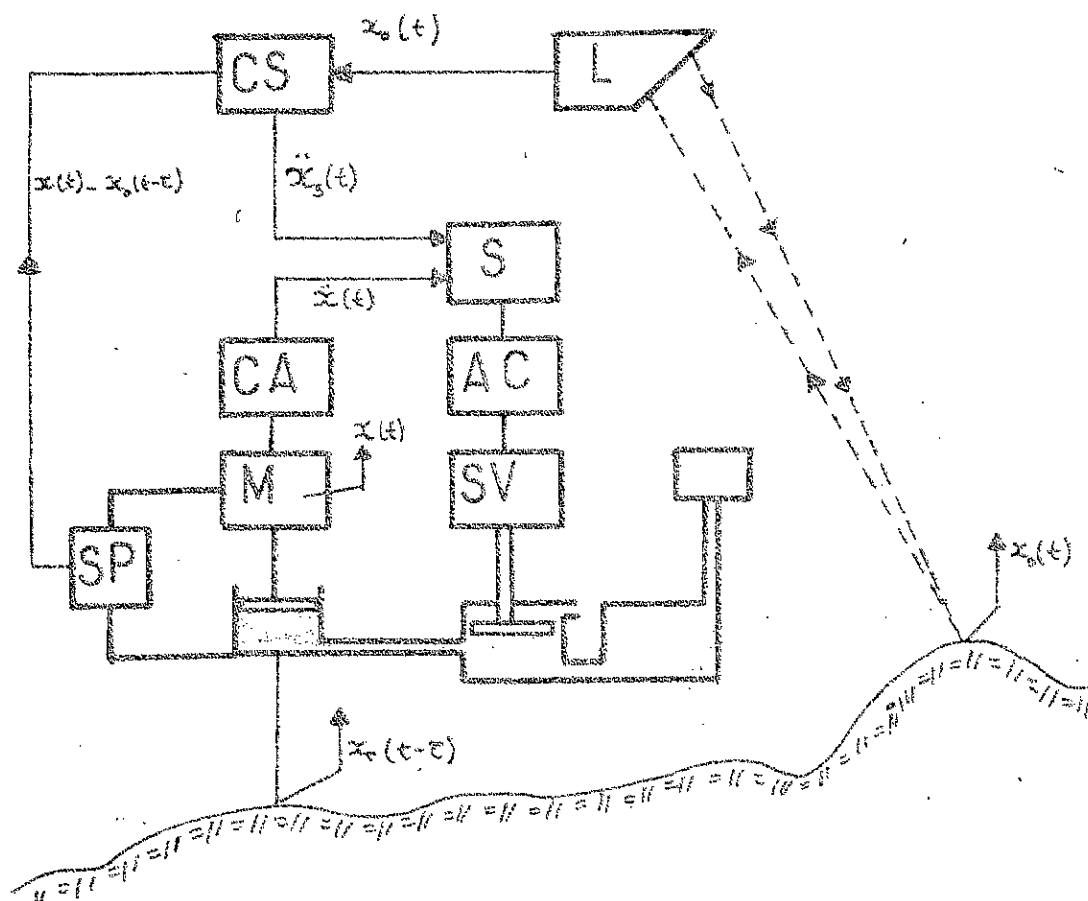
Le praticien se trouve le plus souvent confronté à des problèmes d'isolation de structures soumises à des excitations de nature aléatoire et où il doit répondre à une bonne isolation tout en respectant certaines exigences de normalisation, ainsi il se retrouve à la recherche d'une méthode efficace lui permettant de répondre à ces exigences.

Ces exigences qui nous contraignent à développer ou même dans certains cas à changer complètement les systèmes de vibro-isolation existant, ces exigences que les systèmes de vibro-isolation usuels existant n'arrivent plus à satisfaire.

Parmi les systèmes de vibro-isolation existant il est utile de distinguer les systèmes passifs qui accomplissent leur fonction par simple action de ressort et d'amortisseurs, les systèmes actifs qui agissent par l'action de servomécanismes et enfin la combinaison des deux systèmes actifs et passifs.

Le système de vibro-isolation que nous allons nous proposer d'étudier est un système qui nous permet de préparer notre système à isoler à une excitation, cette préparation obtenue à l'aide d'un système additif appelé dispositif de localisation, revient à exciter notre système de vibro-isolation par une excitation prédictive obtenue par le dispositif de localisation pour permettre au système à isoler de réagir à une excitation à laquelle est soumis l'ensemble.

Donnons à titre d'exemple un système de vibro-isolation possédant une partie mécanique et une partie électronique.



L : dispositif de localisation.

CS : Calculateur

S : Sommateur

AC : Amplificateur et Correcteur

SV : Servo-Valves

SP : système passif.

M : système à vibro-isoler constitué par une masse

CA : Capteur d'accélération.

$\ddot{x}_s(t)$  : accélération souhaitée délivrée par le Calculateur

# I-GENERALITES

## 11. Excitations harmoniques

Parmi les différentes formes de fonctions excitatrices applicable à l'entrée d'un système linéaire, l'une présente un intérêt particulier pour la compréhension du système ; il s'agit de l'excitation sinusoïdale que l'on peut pratiquer en faisant varier la fréquence tout en maintenant l'amplitude constante.

Cette excitation sinusoïdale présente de multiples intérêts, parmi ces intérêts on peut citer :

- possibilité de faire varier la fréquence à amplitude constante et d'examiner le comportement sous ce balayage.
- la facilité d'obtention de l'excitation sinusoïdale que ce soit électriquement pneumatiquement ou mécaniquement.
- la sinusoïde se prête à un traitement mathématique fructueux.

Etant donné un système comportant une entrée  $E$  et une sortie  $S$ , on voulant représenter les grandeurs  $E$  et  $S$  graphiquement en fonction de la fréquence nous choisissons le diagramme de Bode qui comprend deux parties

- une partie donnant l'amplitude de sortie en fonction du Log Néperien de la pulsation, ou plus exactement d'un rapport de pulsation.
- une deuxième partie montrant l'angle de déphasage en coordonnées linéaires en ordonnées et Log Néperien de la pulsation en abscisse.

Alors que le "Bode" est un diagramme d'analyse harmonique exprimé en coordonnées rectangulaire logarithmique, le diagramme de Nyquist figure les résultats de cette même analyse en coordonnées polaire.

## 1.2. Excitations polyharmoniques

Comme on le sait, une fonction périodique  $f(t)$  peut être développée en une série de Fourier, soit :

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \sin \frac{2\pi \cdot k t}{T} + B_k \cos \frac{2\pi \cdot k t}{T} \right)$$

où  $a_0$  désigne la valeur moyenne de  $f(t)$  sur une période  $T$  de la fonction. Les coefficients de la série  $f(t)$  sont définis par les relations :

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi k t}{T} dt$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi k t}{T} dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

La série de Fourier peut aussi se présenter sous la forme complexe suivante :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{j 2\pi k \frac{t}{T}} \quad \text{tel que } j^2 = -1.$$

$$c_k = \frac{1}{2} (A_k - j B_k), \quad \text{avec } \omega_k = \frac{2\pi k}{T}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j 2\pi k \frac{t}{T}} dt$$

L'ensemble des fréquences  $\omega_k$  est appelé spectre de fréquences de la fonction  $f(t)$ , dans le cas envisagé le spectre est discret, une série de Fourier représente le développement d'une fonction périodique à l'aide de fonctions trigonométriques. ce développement peut s'étendre au cas d'une fonction non périodique.

Une méthode approchée de développement d'une fonction non périodique en une série de Fourier, consiste à effectuer le passage à la limite  $T \rightarrow \infty$ , en effet, une fonction non périodique peut être considérée comme une fonction périodique dont la période serait non bornée supérieurement.

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{i 2\pi k \frac{t}{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i 2\pi k \frac{t}{T}}$$

lorsque  $T \rightarrow \infty$   $\Delta \omega = \frac{2\pi(k+1)}{T} - \frac{2\pi k}{T} = d\omega$  et  $\left| \frac{2\pi k}{T} \right| \rightarrow \omega$

$$\text{alors } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

La fonction  $f(t)$  définie sous cette dernière forme possède un spectre continu tandis que la série de Fourier permet de représenter une fonction périodique sous la forme d'une somme d'un nombre infini de sinusoides ayant des fréquences égales à des valeurs discrètes, une intégration de Fourier permet de représenter une fonction non périodique sous la forme de sinusoides ayant une suite continue de fréquences.

$S(\omega)d\omega$  représente l'amplitude dans l'intervalle de fréquence  $(\omega, \omega+d\omega)$  cela signifie qu'on peut considérer  $S(\omega)$  comme la densité d'amplitude répartie sur l'intervalle de fréquence  $(\omega, \omega+d\omega)$  c'est pourquoi la fonction  $S(\omega)$  est appelée densité spectrale.

### 1.3 Fonctions aléatoires

Dans les problèmes appliqués on rencontre des grandeurs aléatoires dont les valeurs varient au cours du processus expérimental, l'indétermination du déroulement futur de la réalisation d'un processus c a d le fait qu'on ne puisse jamais prédire le caractère du processus pour le futur, même si le caractère est le même que pour le passé, constitue la

propriété fondamentale des processus aléatoires.

Pour cela on appelle fonction aléatoire une fonction pour laquelle à chaque valeur donnée de l'argument il correspond une variable aléatoire.

### 1.3.1 Notions de bases et classification des processus stochastiques

Pour décrire les propriétés fondamentales d'un processus aléatoire on utilise cinq fonctions non aléatoires caractérisant ce processus :

- L'espérance mathématique de la fonction aléatoire

Considérons l'ensemble des valeurs de la fonction aléatoire  $X(t)$  à un instant arbitraire fixé. En cet instant nous avons une variable aléatoire  $X(t)$  pour laquelle l'espérance mathématique :

$$\overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x, t) dx, \text{ ou } w(x, t) \text{ est la densité de}$$

probabilité du 1<sup>er</sup> ordre.

- Moyenne quadratique.

$$\overline{X^2(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x, t) dx$$

- Fonction d'auto-correlation

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 w(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

- Fonction de corrélation mutuelle

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy w(x, y, t_1, t_2) dx dy$$

- Variance

$$D_X(t) = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2} = \overline{X^2(t)} - [\overline{X(t)}]^2$$

$$D_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x, t) dx - \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x w(x, t) dx \right]^2$$

On classe généralement les processus aléatoire en trois grandes parties.

a: Processus aléatoire pur:

Un processus aléatoire est dit pur, lorsque les valeurs successives de  $X$  ne dépendent absolument pas les une des autres :

Pour ce processus, la densité de probabilité s'écrit :

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n w_1(x_k, t_k)$$

b: Processus de Markov:

On admet dans la théorie des processus de Markov que la loi de répartition de l'ordonnée du processus à l'instant futur quelconque  $t_k$  dépend de la valeur de l'ordonnée à l'instant présent  $t_{k-1}$  et non des valeurs de la fonction dans le passé c.à.d que la connaissance supplémentaire des valeurs de la fonction aléatoire pour  $t < t_{k-1}$  ne modifie pas le caractère de répartition des ordonnées de la fonction  $t > t_k$ .

Conformément à la formule générale des lois de répartition conditionnelles.

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = w_1(x_1, t_1) \cdot \prod_{k=2}^n w_k(x_k, t_k / x_{k-1}, t_{k-1}).$$

c: Processus Ergodiques :

Pour obtenir les caractéristiques d'une fonction aléatoire stationnaire il faut en connaître un certain nombre de réalisations, grâce aux enregistrements de ces réalisations on peut trouver les valeurs moyenne de la valeur moyenne, et de fonction de corrélation de la fonction aléatoire une question se pose : peut-on obtenir ces caractéristiques à partir d'une seule réalisation de la fonction aléatoire  $X(t)$ ? étant donné que le processus aléatoire est stationnaire et se déroule de façon homogène dans le temps il est naturel d'admettre qu'une réalisation unique du processus est suffisante pour déterminer les caractéristiques de la fonction aléatoire.

Cette possibilité d'obtenir les caractéristiques probabilistes d'une fonction aléatoire stationnaire à l'aide de l'une de ces réalisations présente un grand intérêt pratique car cela permet de réduire le volume des études expérimentales et par là même de réduire les coûts matériels.

Les fonctions aléatoires stationnaires, pour lesquelles on peut déduire les caractéristiques probabilistes à partir d'une seule réalisation sont appelées fonctions aléatoires stationnaires ergodiques.

La propriété d'ergodicité consiste en ce que chaque réalisation particulière de la fonction aléatoire permet d'estimer les propriétés statistiques de l'ensemble entier des réalisations particulières.

Ainsi pour les processus stationnaires ergodiques on a les relations :

• Valeur moyenne :

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt.$$

• Moyenne quadratique.

$$\overline{X^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt$$

• Fonction d'auto-corrélation

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X(t+\tau) dt$$

• Fonction de corrélation mutuelle.

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) Y(t+\tau) dt$$

• Variance

$$D_x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [X(t) - \overline{X(t)}]^2 dt.$$



### 1.3.2 Excitations stationnaires.

Un processus aléatoire, exprimé par un ensemble de variable  $X(t)$  est dit stationnaire lorsque les lois de probabilité des deux groupes de ces variables :

$$[X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)]$$

et

$$[X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_n+\tau)]$$

sont identiques, le nombre  $n$ , les instants  $t_1, t_2, \dots, t_n$  et l'intervalle de temps  $\tau$  pouvant être choisi d'une manière totalement arbitraire.

Ainsi donc un processus stationnaire trouve les propriétés de ces fonctions de probabilités simplifiées, donc un processus aléatoire stationnaire est entièrement défini par la suite des probabilités élémentaires

-  $w_1(x) dx$ , qui est la probabilité pour  $x$  de se trouver dans l'intervalle  $(x, x+dx)$ .

### 1.3.3 Excitations non stationnaires

Les processus aléatoires sont divisés en processus non stationnaire et en processus stationnaires, les caractéristiques d'un processus non stationnaire se présentent dans la grande majorité des cas comme des fonctions du temps qu'on ne peut déterminer qu'en calculant les moyennes des valeurs obtenues pour un même instant des différentes réalisations qui définissent ce processus ainsi les processus non stationnaires sont des processus pour lesquels les propriétés statistiques varient en fonction du temps.

## 1-5 Relations supplémentaires

• Densité Spectrale :

La densité spectrale  $S(\omega)$  se définit comme la transformée de Fourier de fonction de corrélation  $R(\tau)$  soit :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

considérons la fonction

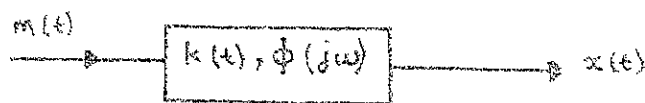
$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{j\omega t} dt \int_{-T}^T x(t+\tau) e^{-j\omega(t+\tau)} d\tau$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X(j\omega) X(-j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X(j\omega)|^2$$

Considérons un système de fonction de transfert  $\Phi(j\omega)$  auquel on applique un signal  $m(t)$  de densité spectrale  $S_m(\omega)$ , on désire avoir la densité spectrale du signal de sortie.



$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t+\tau) dt$$

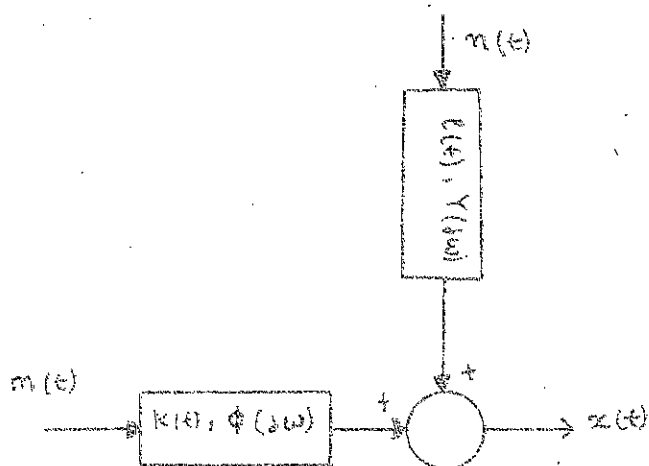
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\lambda) k(\lambda) d\lambda$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k(\eta) k(\lambda) R_m(\tau + \lambda - \eta) d\eta.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = |\Phi(j\omega)|^2 \cdot S_m(\omega)$$

donc 
$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 \cdot S_m(\omega).$$

Considérons un autre système caractérisé par deux entrées.



deux systèmes de réponse impulsionnelle  $l(t)$  et  $k(t)$ . La sortie est reliée aux entrées par :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\lambda) k(\lambda) d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} n(t-\eta) l(\eta) d\eta$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} m(t+\tau-\eta) k(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\lambda) k(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} m(t+\tau-\eta) l(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} n(t-\lambda) l(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} m(t+\tau-\eta) k(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} n(t-\lambda) l(\lambda) d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} m(t-\lambda) k(\lambda) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} n(t+\tau-\eta) l(\eta) d\eta \right\}.$$

$$S_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (k(\lambda) R_m(\tau+\lambda-\eta) k(\eta) + l(\lambda) R_n(\tau+\lambda-\eta) l(\eta) + \\ + l(\lambda) R_{mn}(\tau+\lambda-\eta) k(\eta) + k(\lambda) R_{nm}(\tau+\lambda-\eta) l(\eta)) d\eta$$

$$S_x(\omega) = |\phi(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega) + \phi(-j\omega) S_{mn}(\omega) Y(j\omega) + \\ + \phi(j\omega) S_{nm}(\omega) Y(-j\omega).$$

Si  $S_{mn}(\omega) = S_{nm}(\omega) = 0$  : pas de corrélation entre  $m(t)$  et  $n(t)$ .

$$S_x(\omega) = |\phi(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega).$$

## II PROBLEME DE CRITERES DE VIBRO-ISOLATION

### 2-1 Forme des critères et leurs dépendance d'exigence de normalisation

#### • Critères statistiques

Les critères usuels ne concernent que la réponse à des entrées particulières alors que les systèmes asservis sont soumis à des entrées aléatoires. La nécessité d'utiliser des méthodes statistiques, si on veut étudier le problème de façon rationnelle, implique donc l'emploi des critères statistiques; dans un système, on désire que la sortie  $s(t)$  du système soit aussi voisine que possible de l'entrée  $e(t)$  c.à.d. l'erreur  $\delta(t) = e(t) - s(t)$  soit minimale pour ce: on le caractérise par sa

valeur quadratique moyenne 
$$\bar{\delta}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta^2(t) dt$$

Ce critère est le plus couramment utilisé des critères statistiques, de plus ce critère peut être utilisé de deux manières différentes au projet des systèmes de commande linéaire donc: les entrées sont caractérisées par des spectres de fréquence,

- Si les organes du système ont été choisis, quelques valeurs de paramètres de réglage restant disponibles, on évalue l'écart quadratique moyen pour différentes valeurs et on choisit celles qui donnent le réglage optimal, c'est la méthode la plus courante et la plus réaliste (méthode Philips)

- On peut aussi être plus ambitieux et essayer de déterminer la forme des fonctions de transfert qui minimisent l'écart quadratique moyen, une telle méthode fondée sur les idées de N. Wiener, constitue une véritable synthèse du système linéaire optimal.

ce critère est utilisé en vibro isolation pour limiter les déplacements relatifs.

• Critère d'accélération minimale

En vibro-isolation, pour répondre aux normes hygiéniques de confort et de sécurité en emploi le critère d'accélération minimale ce qui suppose au système d'être souple, on désire que l'accélération du système  $\ddot{x}(t)$  soit minimale pour cela on la caractérise par sa

valeur quadratique moyenne  $\langle \ddot{x}^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{x}^2(t) dt$

• Critère de Jerk.

Lors de grande variations d'accélération il est conseillé d'utiliser le critère de Jerk (introduit dans la médecine de travail) qui minimise la variation d'accélération  $\frac{d}{dt}(\ddot{x}(t)) = \ddot{\ddot{x}}(t)$  en introduisant la

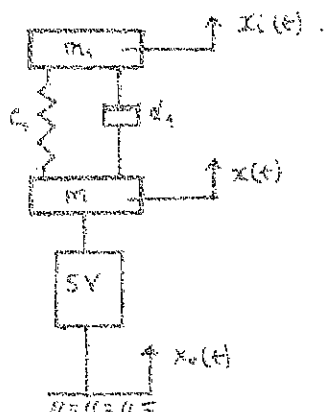
valeur quadratique moyenne  $\langle \ddot{\ddot{x}}^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{\ddot{x}}^2(t) dt$

• La fonctionnelle C s'écrit pour ces trois critères

$$C = \langle \dot{x}^2(t) \rangle + \lambda_1 \langle \ddot{x}^2(t) \rangle + \lambda_2 \langle \ddot{\ddot{x}}^2(t) \rangle$$

## 2-2 Modèles dynamiques utilisés dans ces sujets et critères de vibro-isolation appliqués.

• Vibrations verticale :



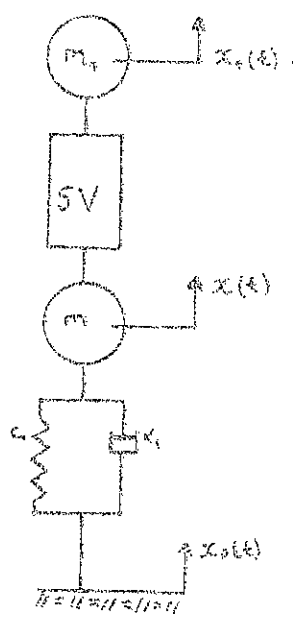
Les critères généralement appliqués dans ce cas d'excitation sont :

critère statistique  $\langle \delta^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - x_0(t))^2 dt$ .

critère d'accélération minimale  $\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{x}_i^2(t) dt$ .

La fonctionnelle C s'écrit :  $C = \langle \delta^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle$

• Vibrations verticales avec branche active et passive en série.



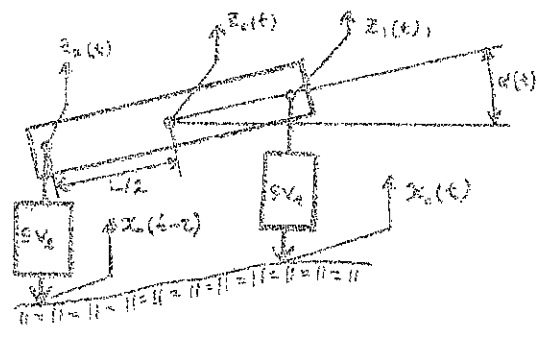
critères statistiques :  $\langle \delta^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - x_0(t))^2 dt$

$\langle \delta_p^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x_p(t) - x(t))^2 dt$

critère d'accélération minimale :  $\langle \ddot{x}_p^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{x}_p^2(t) dt$ .

la fonctionnelle C s'écrit :  $C = \langle \delta^2(t) \rangle + \lambda_1 \langle \delta_p^2(t) \rangle + \lambda_2 \langle \ddot{x}_p^2(t) \rangle$

• Vibrations verticales et pivotements dans un plan parallèle à la direction du mouvement



critères statistiques :  $\langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (z(t) - x_0(t))^2 dt$

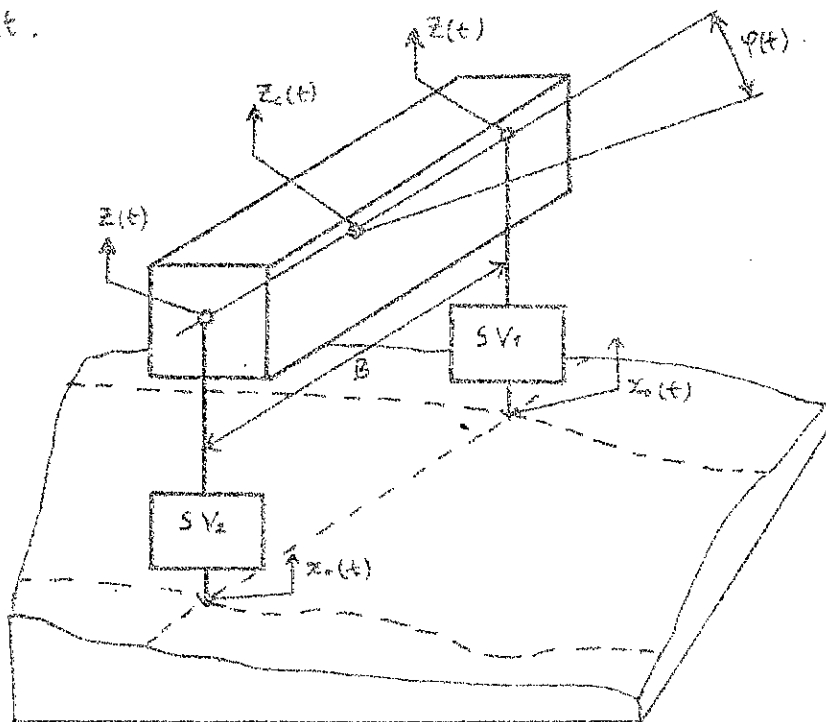
$$\langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (z_0(t) - x_0(t-v))^2 dt.$$

critères d'accélération :  $\langle \ddot{z}_c^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{z}_c^2(t) dt$

$$\langle L^2 \ddot{\psi}^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T L^2 \ddot{\psi}^2(t) dt.$$

la fonctionnelle C s'écrit :  $C = \langle S^2(t) \rangle + \lambda_1 \langle S^2(t) \rangle + \lambda_2 \langle \ddot{z}_c^2(t) \rangle + \lambda_3 L^2 \langle \ddot{\psi}^2(t) \rangle$

• Vibrations verticales et pivotement dans le plan verticale à la direction du mouvement.



critères statistiques :  $\langle S^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (z(t) - x_0(t))^2 dt$

critères d'accélération minimales :  $\langle \ddot{z}_c^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \ddot{z}_c^2(t) dt.$

$$\langle B^2 \ddot{\psi}^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B^2 \ddot{\psi}^2(t) dt$$

la fonctionnelle C s'écrit :  $C = \langle S^2(t) \rangle + \lambda_1 \langle \ddot{z}_c^2(t) \rangle + \lambda_2 B^2 \langle \ddot{\psi}^2(t) \rangle.$





on dit que  $H$  est linéaire si :

$$\begin{cases} H\{x_1(t) + x_2(t)\} = x_1(t) + x_2(t) \\ \text{et} \\ H\{\lambda x_1(t)\} = \lambda H\{x_1(t)\} = \lambda x_1(t). \end{cases}$$

### 3.12 systèmes physiquement réalisables.

• un système est stable si à tout signal borné appliqué à son entrée donne un signal borné à sa sortie

• un système est dit réalisable si l'apparition d'un signal à sa sortie ne peut précéder l'application d'un signal à son entrée ; dans le domaine de temps cela signifie que la fonction de pondération  $h(t)$  est nulle pour  $t < 0$  et dans le domaine des fréquences la fonction de transfert  $H(p)$  a pour domaine de convergence le demi-plan définie par  $\text{Re}(p) > 0$

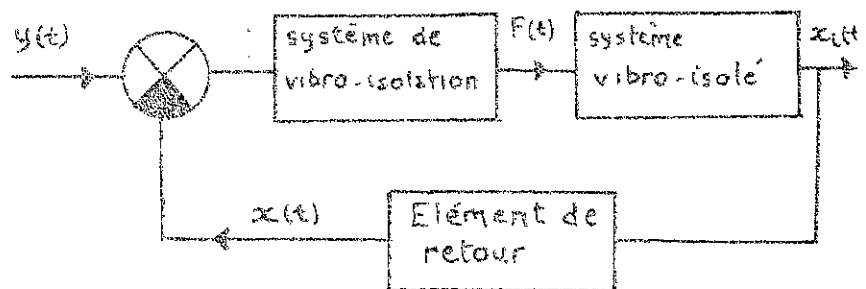
• si un système est à la fois stable et réalisable, il est dit physiquement réalisable.

## 3.2 Formalisation mathématique du problème

Notre système doit travailler aux excitations verticales  $x_0(t-\tau)$  et le déplacement relatif  $\delta(t)$  est :  $\delta(t) = x(t) - x_0(t-\tau)$

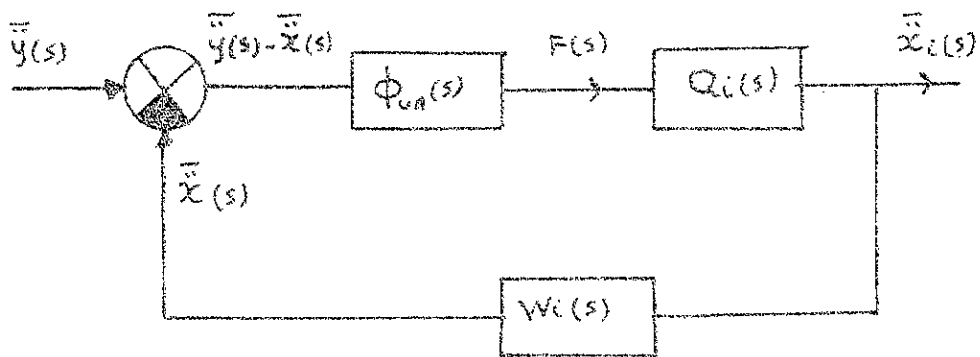
la fonctionnelle  $C$  s'écrit  $C = \langle \delta^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle$ .

La représentation en boucle ouverte de notre système est donné par

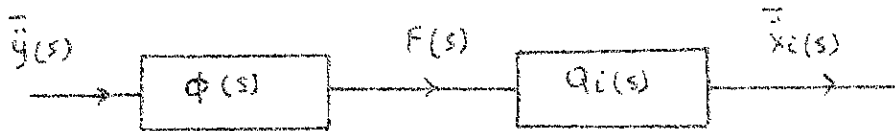


l'entrée de notre système est  $y(t) = x_0(t) + m(t)$ .

l'introduction des transformées de Laplace  $\bar{y}(s)$ ,  $\bar{x}_i(s)$  et  $\bar{x}(s)$ .



Et en boucle ouverte on a :



En boucle ouverte :

$$\frac{\bar{x}_i(s)}{\bar{y}(s)} = \phi(s) Q_i(s)$$

En boucle fermée :

$$\frac{\bar{x}_i(s)}{\bar{y}(s)} = \frac{\phi_{UR}(s) \cdot Q_i(s)}{1 + \phi_{UR}(s) Q_i(s) \cdot W_i(s)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrira alors :

$$\Phi(s) = \frac{\phi_{UR}(s)}{1 + \phi_{UR}(s) \cdot Q_i(s) \cdot W_i(s)}$$

Définissons les fonctions suivantes :

$$L_i(s) = \frac{x_i(s)}{x(s)}$$

$$L(s) = \frac{F(s)}{x(s)}$$

$$Q_i(s) = \frac{\bar{x}_i(s)}{F(s)} = \frac{\bar{x}_i(s)}{x(s)} \cdot \frac{x(s)}{F(s)} = s^p \cdot \frac{L_i(s)}{L(s)}$$

$$W_i(s) = \frac{1}{L_i(s)}$$

La fonctionnelle C est équivalente à :

$$C = \langle \delta^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle$$

en considérons que les moyennes des valeurs  $\delta(t)$  et  $\ddot{x}_i(t)$  sont nulles,

alors :  $\langle \delta^2(t) \rangle = \sigma_{\delta}^2$  , Dispersion de l'écart

$\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \sigma_{\ddot{x}_i}^2$  , Dispersion de l'accélération.

$$\text{donc : } \sigma_{\delta}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\delta}}(s) \right|^2 S_{\delta}(s) ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}_i}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_i}{\delta}}(s) \right|^2 S_{\delta}(s) ds$$

les fonctions de transfert sont égales à :

$$H_{\frac{x-x_0}{\delta}}(s) = \frac{\bar{x}(s) - \bar{x}_0(s)e^{-\tau s}}{\bar{y}(s)} = \frac{\frac{\bar{x}(s)}{F(s)} - \frac{\bar{x}_0(s)e^{-\tau s}}{F(s)}}{\frac{\bar{y}(s)}{F(s)}}$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\delta}}(s) = \frac{\frac{1}{L(s)} - \frac{\bar{x}_0(s)e^{-\tau s}}{F(s)}}{\frac{1}{\phi(s)}}$$

$$\text{avec } \bar{x}_0(s) = \bar{x}_0(s) + \bar{\eta}(s) - \bar{\eta}(s) = \bar{y}(s) - \bar{\eta}(s)$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\delta}}(s) = \frac{\frac{1}{L(s)} - \frac{\bar{y}(s)e^{-\tau s}}{F(s)} + \frac{\bar{\eta}(s)e^{-\tau s}}{F(s)}}{\frac{1}{\phi(s)}} = \frac{\frac{1}{L(s)} - \frac{e^{-\tau s}}{s^2 \phi(s)} + \frac{\bar{\eta}(s)e^{-\tau s}}{F(s)}}{\frac{1}{\phi(s)}}$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\delta}}(s) = \frac{\frac{s^2 \phi(s)}{L(s)} e^{\tau s} - 1 + \frac{\bar{\eta}(s)}{F(s)} \cdot s^2 e^{\tau s - \tau s}}{s^2 e^{\tau s}} = \frac{s^2 \phi(s) \left[ \frac{1}{L(s)} + \frac{\bar{\eta}(s)}{F(s)} e^{-\tau s} \right] - 1}{s^2 e^{\tau s}}$$

$$\text{donc } H_{\frac{x-x_0}{\delta}}(s) = \frac{s^2 \phi(s) \left[ \frac{e^{\tau s}}{L(s)} + \frac{\bar{\eta}(s)}{F(s)} \right] - 1}{s^2 e^{\tau s}}$$

donc il apparaît que la fonction de transfert est fonction de la perturbation  $\eta(t)$ .

de plus,

$$\mathbb{H} \frac{\ddot{x}_i}{\ddot{y}}(s) = \frac{\ddot{x}_i(s)}{\ddot{y}(s)} = \frac{\ddot{x}_i(s)}{\ddot{x}(s)} \cdot \frac{\ddot{x}(s)}{\ddot{y}(s)} = \frac{\ddot{x}_i(s)}{\ddot{x}(s)} \cdot \frac{s^2 \ddot{x}(s)}{s^2 \ddot{y}(s)} = \frac{s^2 L_i(s) \cdot \phi(s)}{L(s)}$$

la densité spectrale de l'accélération  $\ddot{y}(s)$  s'écrit :

$$S_{\ddot{y}}(s) = S_{\ddot{x}_0}(s) + S_{\ddot{\eta}}(s) + S_{\ddot{x}_0 \ddot{\eta}}(s) + S_{\ddot{\eta} \ddot{x}_0}(s)$$

puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de corrélation entre la perturbation introduite par le système de localisation et l'excitation  $x_0$  alors on peut écrire :

$$S_{\ddot{x}_0 \ddot{\eta}}(s) = S_{\ddot{\eta} \ddot{x}_0}(s) = 0$$

et 
$$S_{\ddot{y}}(s) = S_{\ddot{x}_0}(s) + S_{\ddot{\eta}}(s)$$

de plus  $S_{\ddot{x}_0}(s)$  est prise comme une fraction rationnelle de  $s^2$ , on supposera la même hypothèse pour  $S_{\ddot{\eta}}(s)$ .

donc on peut écrire que :

$$S_{\ddot{y}}(s) = S_0 \cdot s^4 \cdot \beta(s) \cdot \beta(-s) \quad \text{avec } S_0 = \text{constante}$$

la fonctionnelle  $C$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} C = & \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{s^2 \phi(s) \left[ \frac{e^{2s}}{L(s)} + \frac{\ddot{\eta}(s)}{F(s)} \right] - 1}{s^2 e^{2s}} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds + \\ & + \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{s^2 \phi(s) \left[ \frac{e^{2s}}{L(s)} + \frac{\ddot{\eta}(s)}{F(s)} \right] - 1}{s^2 e^{2s}} \right|^2 S_{\ddot{\eta}}(s) ds + \\ & + \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=1}^n \lambda_i \left| \frac{s^2 L_i(s) \phi(s)}{L(s)} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds + \\ & + \frac{1}{2\pi j} \sum_{i=1}^n \lambda_i \left| \frac{s^2 L_i(s) \phi(s)}{L(s)} \right|^2 S_{\ddot{\eta}}(s) ds \end{aligned}$$

$q(s)$  représente une fonction balance arbitraire.  
introduisant  $\phi_w(s)$  dans la fonctionnelle.

$$C^* = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ (\phi(s) + \epsilon q(s)) e^{zs} - 1 \right] \left[ (\phi(-s) + \epsilon q(-s)) e^{-zs} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^4 \left[ G(s) L_i(s) (\phi(s) + \epsilon q(s)) \right] \cdot \left[ G(-s) L_i(-s) (\phi(-s) + \epsilon q(-s)) \right] \right\} \times \\ S_0 \beta(s) \beta(-s) ds$$

l'erreur de l'écart entre  $C^*$  et  $C$  est notée  $\delta C^*$ .

$$\delta C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \phi(s) G(s) e^{zs} + \epsilon q(s) G(s) e^{zs} - 1 \right] \left[ \phi(-s) G(-s) e^{-zs} + \epsilon q(-s) G(-s) e^{-zs} - 1 \right] + \right. \\ \left. - \left[ \phi(s) G(s) e^{zs} - 1 \right] \left[ \phi(-s) G(-s) e^{-zs} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^4 \left[ G(s) L_i(s) \phi(s) + \epsilon q(s) L_i(s) G(s) \right] \left[ G(-s) L_i(-s) \phi(-s) + \epsilon q(-s) L_i(-s) G(-s) \right] + \right. \\ \left. - \left[ G(s) L_i(s) \phi(s) \right] \left[ G(-s) L_i(-s) \phi(-s) \right] \right\} S_0 \beta(s) \beta(-s) ds$$

$$\delta C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \epsilon q(s) G(s) \phi(-s) G(-s) - \epsilon q(s) G(s) e^{zs} + \epsilon^2 q(s) q(-s) G(s) G(-s) + \right. \right. \\ \left. \left. - \epsilon q(-s) G(-s) e^{-zs} + \epsilon q(-s) G(-s) \phi(s) G(s) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^4 \left[ G(s) L_i(s) \phi(s) G(-s) L_i(-s) \epsilon q(-s) + \right. \right. \\ \left. \left. + G(s) L_i(s) \epsilon q(s) G(-s) L_i(-s) \phi(-s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon^2 G(s) G(-s) L_i(s) L_i(-s) q(s) q(-s) \right] \right\} S_0 \beta(s) \beta(-s) ds$$

Identifier  $\phi(s)$  à  $\phi(w)$  revient à avoir l'écart  $\delta C$  minimum pour  $\epsilon=0$ , ce qui est équivalent à écrire .

ou encore :

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left\{ \left[ s^2 \phi(s) \left[ \frac{e^{2s}}{L(s)} + \frac{\bar{\eta}(s)}{F(s)} \right] - 1 \right]^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^{2i} \left[ \frac{s^i L_i(s) \phi(s)}{L(s)} \right]^2 \right\} s_0 \beta(s) \beta(-s) ds$$

Finalement :

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left\{ \left[ s^2 \phi(s) \left( \frac{e^{2s}}{L(s)} + \frac{\bar{\eta}(s)}{F(s)} \right) - 1 \right] \left[ s^2 \phi(-s) \left( \frac{e^{-2s}}{L(-s)} + \frac{\bar{\eta}(-s)}{F(-s)} \right) - 1 \right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^{2i} \left[ \frac{s^i L_i(s) \phi(s)}{L(s)} \right] \cdot \left[ \frac{s^i L_i(-s) \phi(-s)}{L(-s)} \right] \right\} s_0 \beta(s) \beta(-s) ds$$

En faisant la remarque suivante :

$$\frac{\bar{\eta}(s)}{F(s)} \rightarrow 0$$

dû au fait que l'effet de la perturbation est négligeable devant l'excitation.

on pose  $\frac{s^2}{L(s)} = G(s)$ .

$$C = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left\{ \left[ \phi(s) G(s) e^{2s} - 1 \right] \left[ \phi(-s) G(-s) e^{-2s} - 1 \right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^{2i} \left[ G(s) L_i(s) \phi(s) \right] \left[ G(-s) L_i(-s) \phi(-s) \right] \right\} s_0 \beta(s) \beta(-s)$$

### 3.3 Solution générale du problème par l'équation de Wiener-Hopf

Soit  $\phi_w(s) = \phi(s) + \varepsilon \cdot q(s)$ .

La procédure de minimization de l'erreur revient à un ajustement

convergent de  $\phi_w(s)$

$\varepsilon$  étant un paramètre constant.

$$\left. \frac{d(\xi c)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \text{ donc.}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \phi(s) G(s) G(-s) q(-s) + \phi(-s) G(-s) G(s) q(s) - G(-s) e^{-2s} q(-s) + \right. \right. \\ \left. \left. - q(s) G(s) e^{2s} \right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^q \left[ \phi(s) G(s) G(-s) Li(s) Li(-s) q(-s) + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi(-s) G(-s) G(s) Li(-s) Li(s) q(s) \right] \right\} S_0 \beta(s) \beta(-s) ds = 0$$

soit encore :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ \left( G(s) G(-s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^q Li(s) Li(-s) G(s) G(-s) \right) \phi(s) - G(-s) e^{-2s} \right] q(-s) + \right. \\ \left. + \left[ \left( G(s) G(-s) + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^q Li(s) Li(-s) G(s) G(-s) \right) \phi(-s) - G(s) e^{2s} \right] q(s) \right\} \times S_0 \beta(s) \beta(-s) ds =$$

$$\text{Posons } D(s) D(-s) = 1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i s^q Li(s) Li(-s).$$

On pourra écrire alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ D(s) D(-s) \beta(s) \beta(-s) \phi(s) - G(-s) e^{-2s} \beta(s) \beta(-s) \right] q(-s) + \right. \\ \left. + \left[ D(s) D(-s) \beta(s) \beta(-s) \phi(-s) - G(s) e^{2s} \beta(s) \beta(-s) \right] q(s) \right\} \times ds = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[ D(s) \beta(s) \phi(s) - \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)} \right] D(-s) \beta(-s) q(-s) + \left[ D(-s) \beta(-s) \phi(-s) - \frac{G(s) e^{2s} \beta(-s)}{D(s)} \right] D(s) \beta(s) q(s) \right\} \\ \times ds = 0$$

En décomposant cette équation on obtient :

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[ D(s) \beta(s) \phi(s) - \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)} \right] D(-s) \beta(-s) q(-s) ds +$$

$$+ \int_{+j\infty}^{-j\infty} \left[ D(-s) \beta(-s) \phi(-s) - \frac{G(s) e^{2s} \beta(-s)}{D(s)} \right] D(s) \beta(s) q(s) ds = 0$$

$D(s) \beta(s) \phi(s)$  a des pôles à gauche de l'axe imaginaire, par conséquent on prend de  $\frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)}$  que la partie ayant des pôles à gauche de l'axe imaginaire pour pouvoir effectuer la différence  $D(s) \beta(s) \phi(s) - \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)}$  et cela pour respecter les conditions de stabilité et de réalisation.

Dans la deuxième intégrale en effectuant un changement de variable  $s \rightarrow -s$  on aura :

$$- \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[ D(s) \beta(s) \phi(s) - \left\{ \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)} \right\}_+ \right] D(-s) \beta(-s) q(-s) ds \quad \text{soit donc}$$

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[ D(s) \beta(s) \phi(s) - \left\{ \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)} \right\}_+ \right] D(-s) \beta(-s) q(-s) ds \quad \text{qui est une}$$

intégrale identique à la première d'où l'équation intégrale se résume à :

$$s. \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left[ D(s) \beta(s) \phi(s) - \left\{ \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)} \right\}_+ \right] D(-s) \beta(-s) q(-s) ds.$$

En résumé on aura donc

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{1}{D(s) \beta(s)} \left\{ \frac{G(-s) e^{-2s} \beta(s)}{D(-s)} \right\}_+$$

qui représente la fonction de transfert optimum en boucle ouverte.



Si l'on pose

$$R(s)R(-s) = 1 + \sum \lambda_i s^{\nu_i} L_i(s)L_i(-s) \quad \text{c.a.d.}$$

$$D(s)D(-s) = R(s)R(-s)G(s)G(-s), \text{ donc } D(s) = R(s)G(s).$$

on aura donc 
$$\bar{\phi}(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\beta(s)} \left\{ \frac{\beta(s)e^{-2s}}{R(-s)} \right\}_+$$

La fonction de transfert optimum en boucle fermée  $\phi_{VA}(s)$  est donnée par :

$$\phi_{VA}(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)W(s) \cdot Q(s)} = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s) \frac{\beta^2}{L(s)}}$$

ou encore

$$\phi_{VA}(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)G(s)}.$$

Dispersion de l'accélération :

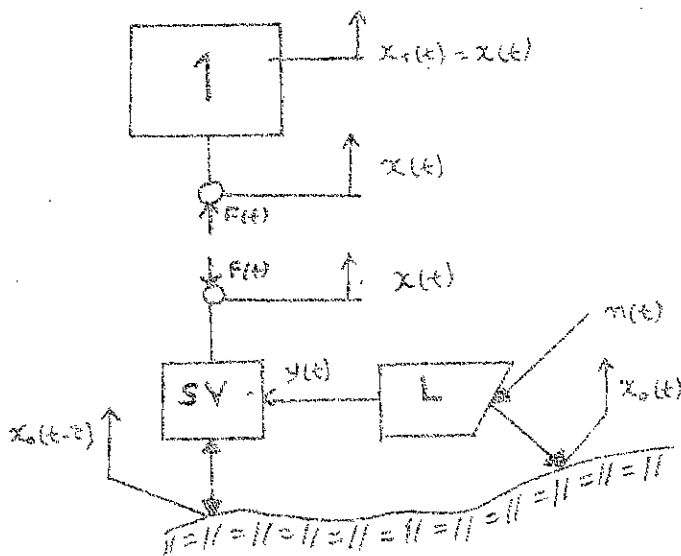
$$\sigma_{\ddot{x}_i}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| G(s)L(s)\phi(s) \right|^2 S_{\ddot{y}}(s) ds$$

Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_i}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| \frac{G(s)\phi(s)e^{2s} - 1}{s^2} \right|^2 S_{\ddot{y}}(s) ds$$

# IV S.V POUR VIBRO-ISOLER UN CORPS RIGIDE AVEC DISPOSITIF DE LOCALISATION

## 4.1 Excitation par un bruit blanc



1 : corps à vibro-isoler ; L : dispositif de localisation.

Dans notre cas, un corps rigide donc :

$$L_1(x) = \frac{x_1(s)}{x(s)} = 1 \quad \text{donc} \quad R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4$$

$$L(s) = \frac{F(s)}{x(s)} = m s^2 \quad \text{donc} \quad G(s) = \frac{s^2}{L(s)} = \frac{1}{m}$$

$$\phi(s) = \frac{1}{\beta(s) \cdot R(s) \cdot G(s)} \left\{ \frac{\beta(s) e^{-\tau s}}{R(-s)} \right\}_+$$

$$\phi(s) = \frac{m}{\beta(s) \cdot R(s)} \left\{ \frac{\beta(s) e^{-\tau s}}{R(-s)} \right\}_+$$

a) Excitation par un bruit blanc donc :  $S_{x_0}(s) = N^2$ .

le bruit introduit par le dispositif de localisation est de forme :  $S_{\eta}(s) = E^2$

$$S\ddot{y}(s) = S\ddot{x}_0(s) + S\dot{\eta}(s) = N^2 + E^2 s^4 \text{ donc}$$

$$S y(s) = \frac{N^2}{s^4} + E^2 = \frac{E^2}{s^4} \left( s^4 + \frac{N^2}{E^2} \right)$$

on va mettre  $S y(s)$  sous la forme  $S y(s) = S_0 \cdot \beta(s) \beta(-s)$

$$S y(s) = E^2 \left( \frac{s^2 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{N^2}{E^2}} s + \frac{N^2}{E^2}}{s^2} \right) \left( \frac{s^2 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{N^2}{E^2}} s + \frac{N^2}{E^2}}{s^2} \right)$$

donc il apparaît que  $\beta(s) = \frac{s^2 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{N^2}{E^2}} s + \frac{N^2}{E^2}}{s^2} \cdot E$

b)  $R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4$

$$R(s)R(-s) = \sqrt{\lambda} \left( s^2 + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \cdot \sqrt{\lambda} \left( s^2 - \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)$$

en posons  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

donc  $R(s) = \frac{1}{\omega_0^2} \left( s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2 \right)$

c).

donc  $\phi(s)$  s'écrit :

$$\phi(s) = \frac{m}{\left( \frac{s^2 + \sqrt{2} \sqrt{\frac{N^2}{E^2}} s + \frac{N^2}{E^2}}{s^2} \right) E \cdot \frac{1}{\omega_0^2} \left( s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2 \right)} \left\{ \frac{E \left( s^2 - \sqrt{2} \sqrt{\frac{N^2}{E^2}} s + \frac{N^2}{E^2} \right) \cdot \frac{1}{m} \cdot e^{-2s}}{s^2 + \frac{1}{m \omega_0^2} \left( s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2 \right)} \right\}_+$$

le bruit introduit par le dispositif de localisation est négligeable par rapport à l'excitation  $x_0(t)$  donc  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\phi(s) = \frac{m \omega_0^4 \cdot s^2}{s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} \left\{ \frac{e^{-2s}}{s^2 (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+$$

$$\frac{1 \cdot \omega_0^4}{(s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2) s^2} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs + D}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$A = 1$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{\omega_0}, \quad C = -\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$$

$$D = 1$$

$$\left\{ \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-2s}}{s^2 (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+ = \left\{ \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \cdot e^{-2s}}{s} + \frac{\frac{-\sqrt{2}}{\omega_0} s + 1}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-2s} \right\}_+ =$$

$$= \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \cdot e^{-2s}}{s} + \left\{ \frac{\frac{-\sqrt{2}}{\omega_0} s + 1}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-2s} \right\}_+$$

décomposons  $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s + 1}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2}$ , avec  $s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2 = (s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0) \times (s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0)$

$$\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s + 1}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{a + jb}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \frac{c + jd}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$$

par identification on trouve  $a = c = -\frac{\sqrt{0,5}}{\omega_0}$  et  $b = d = 0$

donc :  $\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s + 1}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} = -\frac{\sqrt{0,5}}{\omega_0} \cdot \frac{1}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} - \frac{\sqrt{0,5}}{\omega_0} \cdot \frac{1}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$

de plus :

$$\left\{ \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s + 1) e^{-2s}}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} \right\}_+ = \frac{e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \frac{e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$$

$$\frac{(e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 t})(s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0) + (e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 t})(s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0)}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

en développant :

$$N(s) = s \left[ (e^{-2s} + e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}) + (e^{-2s} + e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}) \right] + (e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}) \times$$

$$\times \left[ (j-1)\sqrt{0,5}\omega_0 \right] + \left[ (-1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 \right] (e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 t})$$

$$N(s) = s \cdot \left[ 2e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \cdot 2 \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t \right] - \sqrt{0,5}\omega_0 \left[ 2e^{-2s} + \right.$$

$$\left. - 2e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} (\sin \sqrt{0,5}\omega_0 t + \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right]$$

d'où l'expression de  $\left\{ \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-2s}}{s^2 (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+$

$$\left\{ \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-2s}}{s^2 (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\} = \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{\omega_0} \cdot e^{-2s}}{s} - \frac{\frac{\sqrt{0,5}}{\omega_0} \left[ s(2e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \cdot 2 \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right]}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} - \frac{\sqrt{0,5}\omega_0 \left[ 2e^{-2s} - 2e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} (\sin \sqrt{0,5}\omega_0 t + \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right]}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

en mettant au même dénominateur on obtient

$$D(s) = s^2 (s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2) \quad \text{et}$$

$$N(s) = e^{-2s} (s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2) + e^{-2s} \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s (s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2) + \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s^2 (e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t}) - s^2 \left( e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} (\sin \sqrt{0,5}\omega_0 t + \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right)$$

en simplifiant on obtient

$$N(s) = e^{-2s} (\omega_0^2 - 2s^2) + \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s^3 \cdot e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \cdot \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t + s^2 (\sin \sqrt{0,5}\omega_0 t + \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \cdot e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t}$$

$$N(s) = e^{-2s} (\omega_0^2 - 2s^2) + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \left[ \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s^3 \cdot \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t + s^2 (\sin \sqrt{0,5}\omega_0 t + \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right]$$

d'où l'expressions de la fonction de transfert  $\Phi(s)$

$$\Phi(s) = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot e^{-2s} \left[ e^{-2s} (\omega_0^2 - 2s^2) + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \left( \frac{\sqrt{2}}{\omega_0} s^3 \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t + s^2 (\sin \sqrt{0,5}\omega_0 t + \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right) \right]}{(s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2) (s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)}$$

Pour  $\bar{t}$  assez grand  $\phi(s)$  devient :

$$\phi(s) = \frac{m \omega_0^2 (-2s^2 + \omega_0^2) \cdot e^{-\lambda s}}{s^4 + \omega_0^4}$$

d) Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{m} \cdot 1 \cdot |\phi(s)|^2 s \ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{m \omega_0^2 (-2s^2 + \omega_0^2)}{m (s^4 + \omega_0^4)} \right|^2 N^2 ds$$

$$|s^4 + \omega_0^4|^2 = s^8 + 2s^4 \omega_0^4 + \omega_0^8$$

$$s^8 + 2s^4 \omega_0^4 + \omega_0^8 = d(s) \cdot d(-s)$$

$$d(s) = A s^4 + B s^3 + C s^2 + D s + E, \quad d(-s) = A s^4 - B s^3 + C s^2 - D s + E$$

on trouve après identification :

$$A = 1$$

$$B = 2\sqrt{2} \omega_0$$

$$C = 4\omega_0^2$$

$$D = 2\sqrt{2} \omega_0^3$$

$$E = \omega_0^4$$

$$\text{donc } d(s) = s^4 + 2\sqrt{2} \omega_0 s^3 + 4\omega_0^2 s^2 + 2\sqrt{2} \omega_0^3 s + \omega_0^4$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\omega_0^4 s^4 - 4\omega_0^4 s^2 + \omega_0^8}{|s^4 + 2\sqrt{2} \omega_0 s^3 + 4\omega_0^2 s^2 + 2\sqrt{2} \omega_0^3 s + \omega_0^4|^2} N^2 ds$$

après calcul avec les tables d'intégrales on trouve

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{11}{16} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda}} \cdot N^2$$

e) Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{G(s) \phi(s) e^{2s} - 1}{s^2} \right|^2 S \ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\frac{\phi(s) \cdot e^{2s} - 1}{m}}{s^2} \right|^2 S \ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\frac{\omega_0^2 (-2s^2 + \omega_0^2)}{s^4 + \omega_0^4} - 1}{s^2} \right|^2 \cdot S \ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{s^2 + 2\omega_0^2}{s^4 + \omega_0^4} \right|^2 S \ddot{x}_0(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{s^4 + 4\omega_0^2 s^2 + 4\omega_0^4}{|s^4 + \omega_0^4|^2} N^2 ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{(s^4 + 4\omega_0^2 s^2 + \omega_0^4) \cdot N^2}{|s^4 + 2\sqrt{2}\omega_0 s^3 + 4\omega_0^2 s^2 + 2\sqrt{2}\omega_0^3 s + \omega_0^4|^2} ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{9}{16} \sqrt{2} \cdot (\lambda)^{3/4} \cdot N^2$$

En résumé pour un bruit blanc on obtient :

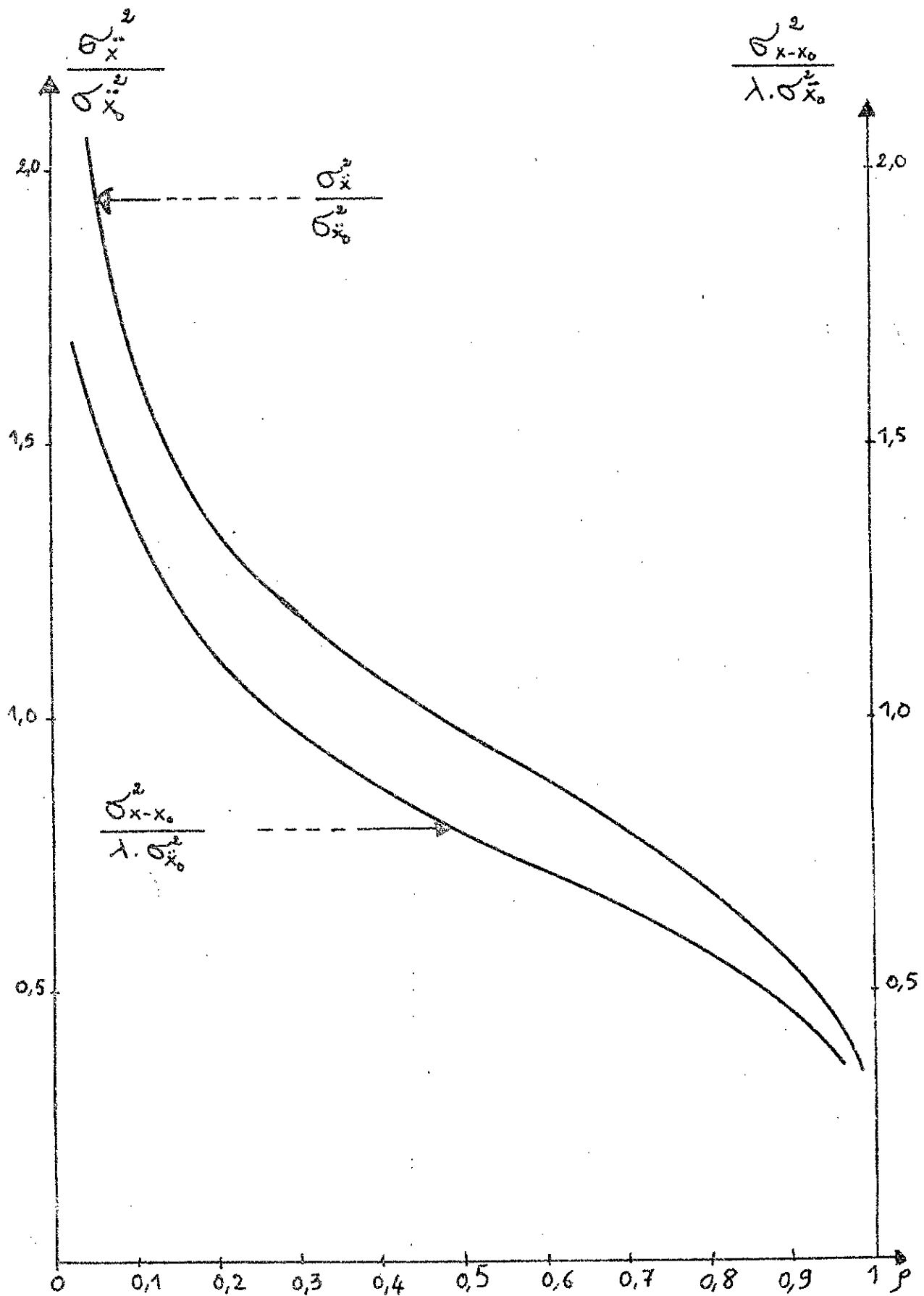
$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{11}{16} \sqrt{2} \cdot N^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{9}{16} \sqrt{2} N^2 (\lambda)^{3/4}$$

la figure suivante nous donne les variations de  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  et de  $\sigma_{x-x_0}^2$  en fonction

$$\text{de } \lambda = \lambda_0 \frac{p}{1-p} \quad \text{avec } \lambda_0 = 1 \text{ [Unité]}$$

la variation de  $\lambda$  de 0 à  $\infty$  équivaut à la variation de  $p$  de 0 à 1.





4.2 Excitation par un bruit  $S\ddot{x}(s) = -N^2 s^2$ 

a) Ce bruit est un bruit blanc vitesse du fait que  $S\dot{x}(s) = -N^2$

$$S y(s) = S x_0(s) + S n(s) \quad , \quad S n(s) = \epsilon^2$$

$$S x_0(s) + S n(s) = -\frac{N^2}{s^2} + \epsilon^2 = \frac{\epsilon^2 s^2 - N^2}{s^2} = \frac{(-\epsilon s + N)(\epsilon s + N)}{(-s) \cdot (s)}$$

$$\text{donc } S y(s) = \beta(s) \beta(-s) = \frac{(\epsilon s + N)}{s} \cdot \frac{(-\epsilon s + N)}{-s}$$

$$\text{donc } \beta(s) = \frac{\epsilon s + N}{s}$$

$$b) R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 \quad , \quad R(s) = \frac{1}{\omega_0^2} (s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)$$

$$c) \Phi(s) = \frac{m}{\beta(s)R(s)} \left\{ \frac{\beta(s)e^{-2s}}{R(-s)} \right\}_+$$

$$\Phi(s) = \frac{m \omega_0^4}{(s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2) \cdot \frac{\epsilon s + N}{s}} \cdot \left\{ \frac{\epsilon s + N}{s (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \cdot e^{-2s} \right\}_+$$

le bruit introduit par le dispositif de localisation est négligeable par rapport à l'excitation  $x_0(t)$ , donc:  $\epsilon \rightarrow 0$ .

$$\Phi(s) = \frac{m \cdot \omega_0^4 \cdot s}{s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2} \left\{ \frac{e^{-2s}}{s (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+$$

décomposons la fraction suivante:

$$\frac{\omega_0^2}{s (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2}$$

en mettons au même dénominateur et par identification on trouve

$$A = 1$$

$$B = -1$$

$$C = \sqrt{2} \omega_0.$$

$$\left\{ \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-2s}}{s(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+ = \left\{ \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-2s} \right\}_+$$

$$= \frac{e^{-2s}}{s} + \left\{ \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-2s} \right\}_+$$

sachant que :

$$s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2 = \left( s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 \right) \left( s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 \right)$$

$$\text{décomposons } \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{a+jb}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \frac{c+jd}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$$

en réduisant au même dénominateur on trouve :

$$a = c = -\frac{1}{2}, \quad b = -d = -\frac{j}{2}$$

d'où :

$$\frac{-s + \sqrt{2}\omega_0}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{1}{-1+j} \cdot \frac{1}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \frac{1}{-1-j} \cdot \frac{1}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$$

donc :

$$\left\{ \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-2s} \right\}_+ = \frac{1}{-1+j} \cdot \frac{e^{-2s} - e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \frac{1}{-1-j} \cdot \frac{e^{-2s} - e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 t}}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$$

la réduction au même dénominateur donne :

$$\left\{ \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-2s} \right\}_+ = \frac{-s \left[ e^{-2s} - e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} (\cos \sqrt{0,5}\omega_0 t + \sin \sqrt{0,5}\omega_0 t) \right] + \sqrt{0,5}\omega_0 (2e^{-2s} + 2e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t)}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$= \frac{e^{-2s} (s + \sqrt{2}\omega_0) + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 t} \left[ s (\cos \sqrt{0,5}\omega_0 t + \sin \sqrt{0,5}\omega_0 t) - \sqrt{2}\omega_0 \cos \sqrt{0,5}\omega_0 t \right]}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

l'expression générale suivante s'écrit :

$$\left\{ \frac{\omega_0^2 e^{-2s}}{s(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+$$

$$\left\{ \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-\tau s}}{s(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+ = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = s(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)$$

$$N(s) = e^{-\tau s} (s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2) - e^{-\tau s} (s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s) + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \left\{ s^2 (\cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau + \sin\sqrt{0,5}\omega_0 \tau) - \sqrt{2}\omega_0 s \cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau \right\}$$

$$N(s) = e^{-\tau s} \cdot \omega_0^2 + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \left\{ s^2 (\cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau + \sin\sqrt{0,5}\omega_0 \tau) - \sqrt{2}\omega_0 s \cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau \right\}$$

d'où l'expression de la fonction de transfert optimum  $\Phi(s)$ .

$$\Phi(s) = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot s \cdot \left\{ e^{-\tau s} \cdot \omega_0^2 + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \left( s^2 (\cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau + \sin\sqrt{0,5}\omega_0 \tau) - \sqrt{2}\omega_0 s \cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau \right) \right\}}{(s^2 + \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2) \cdot s}$$

après simplification. 
$$\Phi(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = s^4 + \omega_0^4$$

$$N(s) = m \omega_0^2 \left\{ e^{-\tau s} \omega_0^2 + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \left[ s (\cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau + \sin\sqrt{0,5}\omega_0 \tau) - \sqrt{2}\omega_0 \cos\sqrt{0,5}\omega_0 \tau \right] \right\}$$

pour  $\tau$  assez grand  $\Phi(s)$  devient

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{\omega_0^4 \cdot e^{-\tau s}}{s^4 + \omega_0^4}$$

d) Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\phi(s)}{m} \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\omega_0^4}{s^4 + \omega_0^4} \right|^2 (-s^2) N^2 ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\omega_0^8 s^2}{|s^4 + 2\sqrt{2}\omega_0 s^3 + 4\omega_0^2 s^2 + 2\sqrt{2}\omega_0^3 s + \omega_0^4|^2} N^2 ds$$

après calcul avec les tables d'intégrale on trouve :

$$\sigma_x^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/4} \cdot N^2$$

e) Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{G(s)\phi(s)e^{zs} - 1}{s^2} \right|^2 S\ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\phi(s)e^{zs} - 1}{s^2} \right|^2 S\ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\omega_0^4}{\omega_0^4 + s^4} - 1 \right|^2 (-s^2) \cdot N^2 ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{-s^6}{|\omega_0^4 + s^4|^2} N^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{-s^6 \cdot N^2 \cdot ds}{|s^4 + 2\sqrt{2}\omega_0 s^2 + 4\omega_0^2 s^2 + 2\sqrt{2}\omega_0^3 s + \omega_0^4|^2}$$

on trouve après calcul avec les tables d'intégrale :

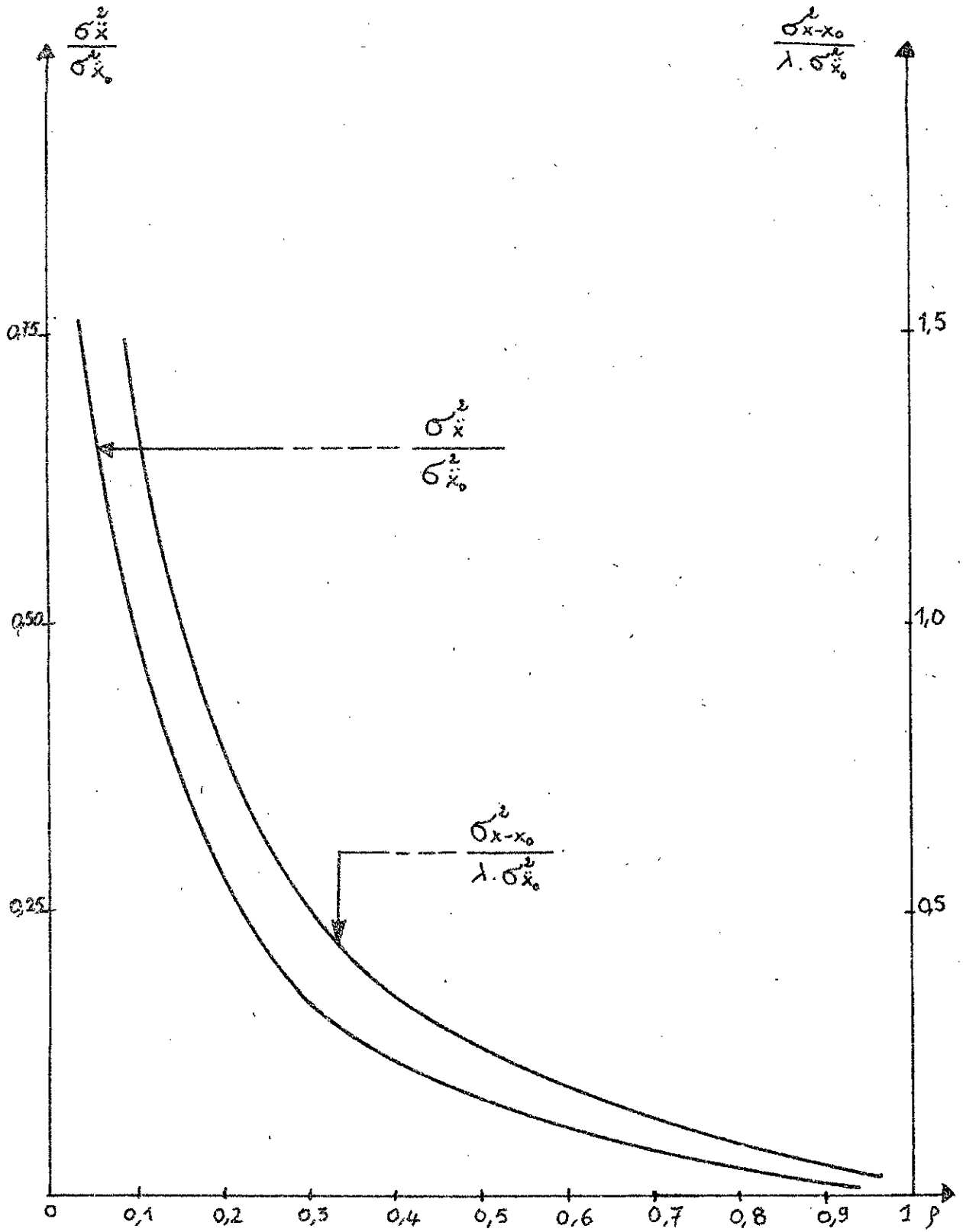
$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \sqrt[4]{\lambda} \cdot N^2$$

En résumé nous aurons donc :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/4} \cdot N^2$$

et 
$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \sqrt[4]{\lambda} \cdot N^2$$

la figure suivante représente les variations de  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  et  $\sigma_{x-x_0}^2$  en fonction de  $\lambda = \lambda_0 \frac{p}{1-p}$



### 4.3 Excitation par un bruit $S_x(s) = \frac{N^2}{-s^2 + \alpha^2}$

a) la densité spectrale ayant pour expression  $S_x(s) = \frac{N^2}{-s^2 + \alpha^2}$ , correspond à une excitation ayant pour fonction d'autocorrélation une sinusoïde de pulsation  $\alpha$ .

Le bruit introduit par le dispositif de localisation est de la forme

$$S_n(s) = \varepsilon^2 \text{ donc}$$

$$S_y(s) = S_x(s) + S_n(s) = \frac{N^2}{-s^2 + \alpha^2} + \varepsilon^2 = \frac{N^2 + \varepsilon^2 \alpha^2 - s^2 \cdot \varepsilon^2}{-s^2 + \alpha^2}$$

$$S_y(s) = \frac{(N^2 + \varepsilon^2 \alpha^2)^{1/2} + \varepsilon s}{\alpha + s} \cdot \frac{(N^2 + \varepsilon^2 \alpha^2)^{1/2} - \varepsilon s}{\alpha - s}$$

or  $S_y(s)$  se met sous la forme  $S_y(s) = \beta(s) \beta(-s)$  donc

$$\beta(s) = \frac{(N^2 + \varepsilon^2 \alpha^2)^{1/2} + \varepsilon s}{\alpha + s}$$

$$b) R(s) R(-s) = 1 + \lambda s^4$$

$$R(s) = \sqrt{\lambda} \left( s^2 + \sqrt{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} s + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$R(s) = \frac{1}{\omega_0^2} (s^2 + \sqrt{\lambda} \omega_0 s + \omega_0^2)$$

$$c) \Phi(s) = \frac{m}{\beta(s) R(s)} \left\{ \frac{\beta(s) \cdot e^{-2s}}{R(-s)} \right\}_+$$

$$\Phi(s) = \frac{m \omega_0^4 (\alpha + s)}{(s^2 + \sqrt{\lambda} \omega_0 s + \omega_0^2) [(N^2 + \varepsilon^2 \alpha^2)^{1/2} + \varepsilon s]} \left\{ \frac{(N^2 + \varepsilon^2 \alpha^2)^{1/2} - \varepsilon s}{(\alpha + s) (s^2 - \sqrt{\lambda} \omega_0 s + \omega_0^2)} \cdot e^{-2s} \right\}_+$$

le bruit introduit par le dispositif de localisation est négligeable par rapport à l'excitation  $x_0(t)$  donc  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

$$\Phi(s) = \frac{m \omega_0^4 (\alpha + s)}{s^2 + \sqrt{\lambda} \omega_0 s + \omega_0^2} \left\{ \frac{e^{-2s}}{(\alpha + s) (s^2 - \sqrt{\lambda} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+$$

$$\frac{\omega_0^2}{(d+s)(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{A}{s+d} + \frac{Bs+C}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$$

en réduisant au même dénominateur et par identification on trouve

$$A = \frac{\omega_0^2}{d^2 + \sqrt{2}\omega_0 d + \omega_0^2}$$

$$B = -\frac{\omega_0^2}{d^2 + \sqrt{2}\omega_0 d + \omega_0^2}$$

$$C = \omega_0^2 \frac{\sqrt{2}\omega_0 + d}{\omega_0^2 + \sqrt{2}\omega_0 d + d^2}$$

donc :

$$\left\{ \frac{e^{-\tau s}}{(d+s)(s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+ = \frac{\omega_0^2}{d^2 + \sqrt{2}\omega_0 d + \omega_0^2} \left\{ \frac{e^{-\tau s}}{s+d} + \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + d}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-\tau s} \right\}_+$$

$$= \frac{\omega_0^2}{d^2 + \sqrt{2}\omega_0 d + \omega_0^2} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s+d} +$$

$$+ \frac{\omega_0^2}{d^2 + \sqrt{2}\omega_0 d + \omega_0^2} \left\{ \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + d}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-\tau s} \right\}_+$$

décomposons  $\frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + d}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2}$  on aura donc :

$$\frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + d}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{a+jb}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \frac{c+jd}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0}$$

on trouve

$$a = c = -\frac{1}{2}$$

$$b = -d = -\frac{1}{2} - \frac{d}{\sqrt{2}\omega_0}$$

d'où

$$\frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + \alpha}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} = -\left[\frac{1}{2} + j\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right)\right] \frac{1}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} +$$

$$-\left[\frac{1}{2} - j\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right)\right] \frac{1}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\left\{ \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + \alpha}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-\tau s} \right\}_+ = \left\{ -\left[\frac{1}{2} + j\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right)\right] \frac{e^{-\tau s} - e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 \tau}}{s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0} + \right.$$

$$\left. -\left[\frac{1}{2} - j\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right)\right] \frac{e^{-\tau s} - e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 \tau}}{s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0} \right\}$$

la réduction au même dénominateur nous donne :

$$\left\{ \frac{-s + \sqrt{2}\omega_0 + \alpha}{s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot e^{-\tau s} \right\}_+ = \frac{N(s)}{D(s)}$$

avec  $D(s) = s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2$

$$N(s) = -\left[\frac{1}{2} + j\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right)\right] \left[ e^{-\tau s} - e^{-(1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \right] \cdot \left[ s - (1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 \right] +$$

$$-\left[\frac{1}{2} - j\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right)\right] \left[ e^{-\tau s} - e^{-(1-j)\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \right] \cdot \left[ s - (1+j)\sqrt{0,5}\omega_0 \right].$$

le développement de  $N(s)$  nous donne

$$N(s) = s \left\{ -e^{-\tau s} + e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} \left[ \cos \sqrt{0,5}\omega_0 \tau + \left(1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right) \sin \sqrt{0,5}\omega_0 \tau \right] \right\} +$$

$$-\left[ \left(2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right) \cos \sqrt{0,5}\omega_0 \tau + \frac{2\alpha}{\sqrt{2}\omega_0} \sin \sqrt{0,5}\omega_0 \tau \right] \sqrt{0,5}\omega_0 e^{-\sqrt{0,5}\omega_0 \tau} +$$

$$+ \left(2 + \frac{2\alpha}{\sqrt{2}\omega_0}\right) e^{-\tau s} \sqrt{0,5}\omega_0$$

et  $D(s) = s^2 - \sqrt{2}\omega_0 s + \omega_0^2$ .



donc on peut écrire que

$$\left\{ \frac{\omega_0^2 \cdot e^{-\alpha t}}{(\alpha + s)(s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)} \right\}_+ = \frac{\omega_0^2}{\alpha^2 + \sqrt{2} \omega_0 \alpha + \omega_0^2} \left\{ \frac{e^{-\alpha t}}{s + \alpha} + \frac{N(s)}{D(s)} \right\}$$

posons  $\frac{e^{-\alpha t}}{s + \alpha} + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$

avec

$$D_1(s) = (s + \alpha)(s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2) \quad \text{et}$$

$$N_1(s) = e^{-\alpha t} \left[ -s + \sqrt{0,5} \omega_0 \left( 2 + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \right) \right] (s + \alpha) + e^{-\sqrt{0,5} \omega_0 t} \cdot (s + \alpha) \cdot \left\{ s \left[ \cos \sqrt{0,5} \omega_0 t + \left( 1 + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \right) \sin \sqrt{0,5} \omega_0 t \right] - \sqrt{0,5} \omega_0 \left[ \left( 2 + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \right) \times \cos \sqrt{0,5} \omega_0 t + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \sin \sqrt{0,5} \omega_0 t \right] \right\} + e^{-\alpha t} (s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)$$

d'où l'expression générale de  $\bar{\Phi}(s)$  :

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{m \cdot \omega_0^4}{\alpha^2 + \sqrt{2} \omega_0 \alpha + \omega_0^2} \cdot \frac{N_1(s)}{(s^2 + \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2)(s^2 - \sqrt{2} \omega_0 s + \omega_0^2) \cdot (\alpha + s)}$$

$N_1(s)$  peut s'écrire plus simplement sous la forme :

$$N_1(s) = e^{-\alpha t} (\alpha^2 + \sqrt{2} \omega_0 \alpha + \omega_0^2) + e^{-\sqrt{0,5} \omega_0 t} \cdot (s + \alpha) \cdot \left\{ s \left[ \cos \sqrt{0,5} \omega_0 t + \left( 1 + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \right) \sin \sqrt{0,5} \omega_0 t \right] - \sqrt{0,5} \omega_0 \left[ \left( 2 + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \right) \times \cos \sqrt{0,5} \omega_0 t + \frac{\sqrt{2} \alpha}{\omega_0} \sin \sqrt{0,5} \omega_0 t \right] \right\}$$

s'e

$\bar{\Phi}(s)$  s'écrit aussi comme suit :

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{m \omega_0^4 (\alpha + s)}{\alpha^2 + \sqrt{2} \omega_0 \alpha + \omega_0^2} \cdot \frac{N_1(s)}{(s^2 + \omega_0^2)(s + \alpha)}$$

Pour  $\alpha$  assez grand l'expression de  $\Phi(s)$  serait :

$$\Phi(s) = \frac{m \cdot \omega_0^4 \cdot e^{-\alpha s}}{(s^4 + \omega_0^4)(s + \alpha)}$$

$$\Phi(s) \approx \frac{m \cdot \omega_0^4}{s^4 + \omega_0^4} \cdot e^{-\alpha s}$$

on remarque que  $\Phi(s)$  ne dépend pas de  $\alpha$ , ce qui est prévisible du fait que  $\phi(s)$  est invariable lors d'un changement d'origine

d) Dispersion de l'écart :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(s) \right|^2 S \ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\frac{\phi(s) e^{\alpha s}}{m} - 1}{s^2} \right|^2 S \ddot{x}_0(s) ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\frac{\omega_0^4}{s^4 + \omega_0^4} - 1}{s^2} \right|^2 \frac{s^4 \cdot N^2}{(s + \alpha)(-s + \alpha)} ds$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{s^8 \cdot N^2}{|(s^4 + \omega_0^4)(s + \alpha)|^2} ds$$

$$|s^4 + \omega_0^4|^2 = \left| s^4 + 2\sqrt{2}\omega_0 s^3 + 4\omega_0^2 s^2 + 2\sqrt{2}\omega_0^3 s + \omega_0^4 \right|^2$$

donc :

$$\left| (s^4 + \omega_0^4)(s + \alpha) \right|^2 = \left| s^5 + s^4(2\sqrt{2}\omega_0 + \alpha) + s^3(4\omega_0^2 + 2\sqrt{2}\alpha\omega_0) + s^2(2\sqrt{2}\omega_0^3 + 4\alpha\omega_0^2) + s(\omega_0^4 + 2\sqrt{2}\alpha\omega_0^3) + \alpha\omega_0^4 \right|^2$$

après calcul avec les tables d'intégrales on trouve :

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{6\sqrt{2}\omega_0^3 + 24\omega_0^2\alpha + 22\sqrt{2}\omega_0\alpha^2 + 16\alpha^3}{2(16\omega_0^4 + 40\sqrt{2}\omega_0^3\alpha + 36\omega_0^2\alpha^2 + 24\sqrt{2}\omega_0\alpha^3 + 16\alpha^4)} \cdot N^2$$

e) Dispersion de l'accélération :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{x_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0} ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\Phi(s)}{m} \right|^2 \frac{s^4 \cdot N^2}{(s+\alpha)(-s+\alpha)} ds$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\omega_0^8 \cdot s^4 \cdot N^2 ds}{\left| s^2 + s^2(2\sqrt{2}\omega_0 + \alpha) + s^2(4\omega_0^2 + 2\sqrt{2}\omega_0) + s^2(2\sqrt{2}\omega_0^3 + 4\omega_0^2) + s(\omega_0^4 + 2\sqrt{2}\omega_0^3\alpha) + \alpha\omega_0^4 \right|^2}$$

$\sigma_{\ddot{x}}^2$  étant égal après calcul sur tables d'intégrales.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\omega_0^5 (2\sqrt{2}\omega_0^2 + 8\omega_0\alpha + 2\sqrt{2}\alpha^2) \cdot N^2}{2(16\omega_0^4 + 40\sqrt{2}\omega_0^3\alpha + 36\omega_0^2\alpha^2 + 24\sqrt{2}\omega_0^3 + 16\alpha^4)}$$

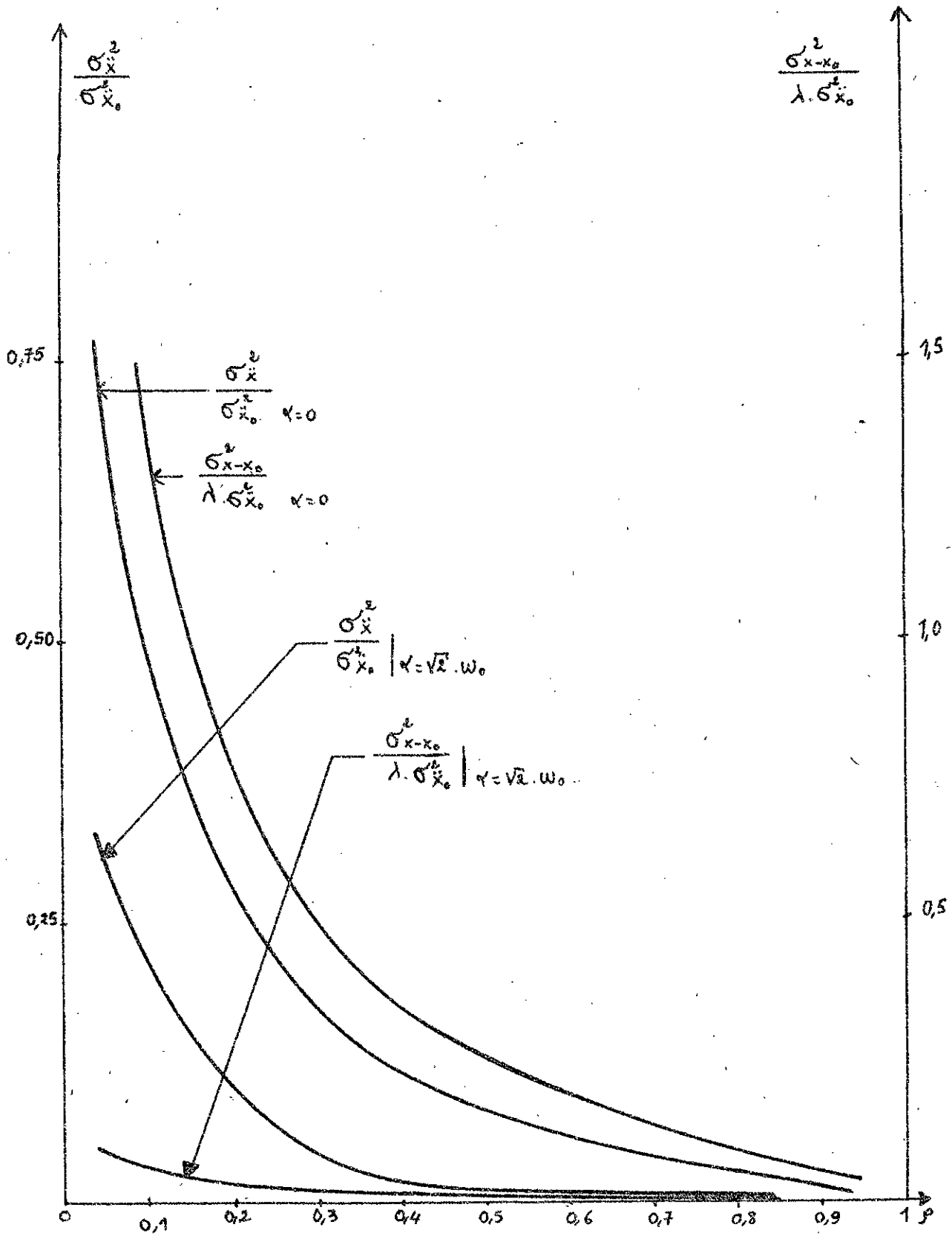
f) pour une excitation particulière on trouve avec  $\alpha = \sqrt{2} \cdot \omega_0$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{64} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{3/4} \cdot N^2 \text{ et}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{\sqrt{2}}{112} \left( \frac{1}{\lambda} \right)^{1/4} \cdot N^2.$$

la figure suivante nous donne la variation de  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  et de  $\sigma_{x-x_0}^2$  en fonction de  $\lambda = \lambda_0 \frac{\rho}{1-\rho}$  avec  $\lambda_0 = 1$ ,  $\rho \in [0,1[$ .

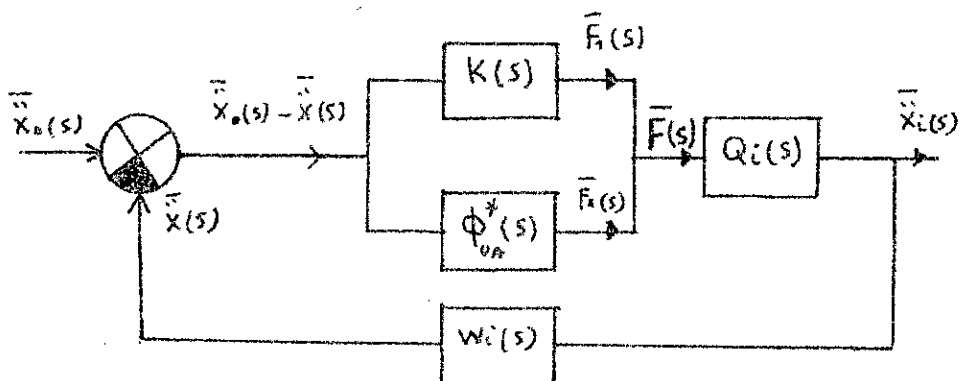
g) En remarquera que plus  $\alpha$  est grand plus on a une meilleure isolation du fait que  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  et  $\sigma_{x-x_0}^2$  tendent vers zéro.



## 44 Forme analytique des systèmes optimum s'ils travaillent parallèlement à des structures passives

On a déjà représenté le système de notre étude en boucle fermée, décomposons  $\phi_{VA}(s)$  qui est la fonction de transfert optimum en boucle fermée en deux fonctions de transferts, où  $K(s)$  est la fonction de transfert du système passif et  $\phi_{VA}^*(s)$  une fonction de transfert d'un système actif.

la représentation en boucle fermée est la suivante.



$$\overline{F}(s) = \overline{F}_1(s) + \overline{F}_2(s)$$

$$\phi(s) = \frac{\phi_{VA}^*(s)}{1 + \phi_{VA}^*(s) \cdot Q_i(s) W_i(s)} \quad \text{d'où}$$

$$\phi_{VA}^*(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s) W_i(s) Q_i(s)} = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s) G(s)}$$

de plus

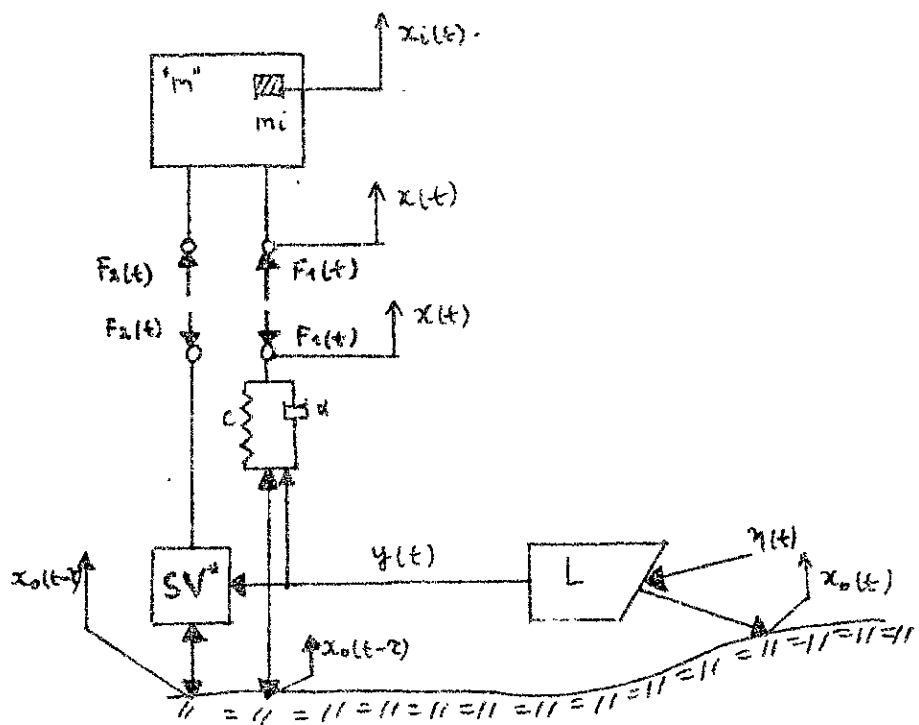
$$K(s) = \frac{\overline{F}_1(s)}{\overline{X}_o(s) - \overline{X}(s)} \quad \text{et}$$

$$\phi_{VA}^*(s) = \frac{\overline{F}_2(s)}{\overline{X}_o(s) - \overline{X}(s)}$$

donc la fonction de transfert du système actif serait :

$$\phi_{va}^*(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)G(s)} - k(s).$$

prenons un système actif très utilisé représenté par la figure suivante :



on peut écrire la relation suivante :

$$0 = F_1 + c_1 (x - x_0) + d_1 (\dot{x} - \dot{x}_0)$$

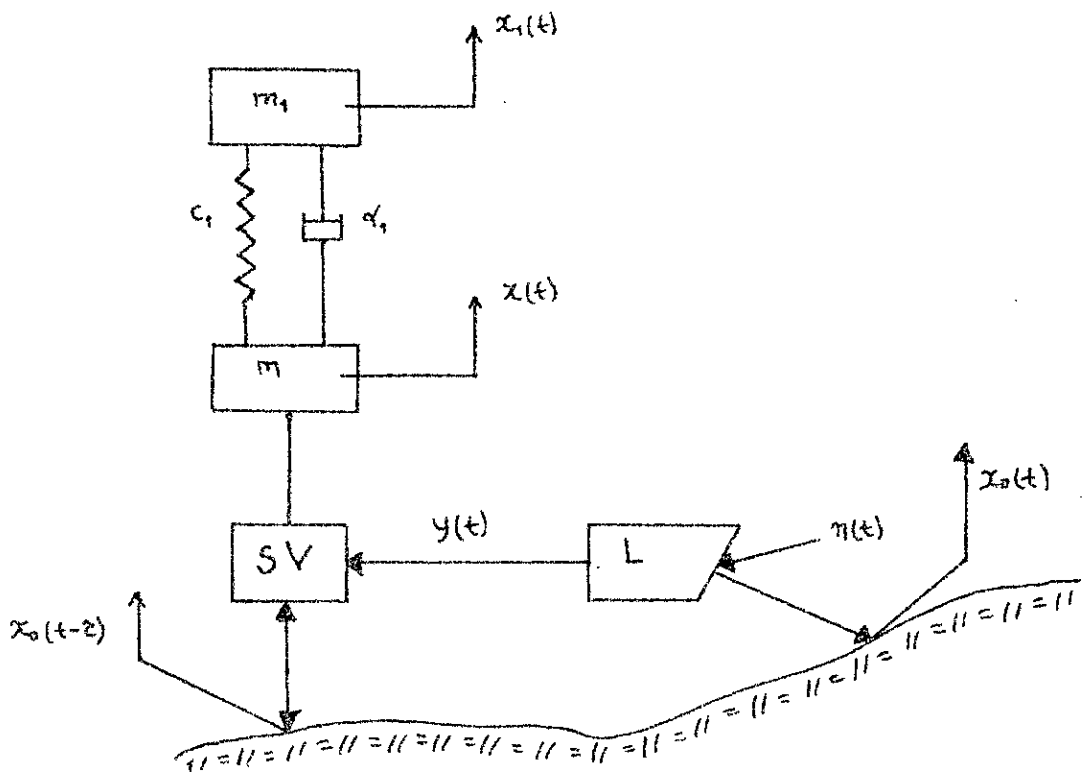
$$\bar{F}_1(s) = \frac{c_1}{s^2} (\bar{x}_0(s) - \bar{x}(s)) + \frac{d_1}{s} (\bar{x}_0(s) - \bar{x}(s))$$

$$\text{donc } k(s) = \frac{\bar{F}_1(s)}{\bar{x}_0(s) - \bar{x}(s)} = \frac{c_1 + d_1 s}{s^2}$$

$$\text{donc } \phi_{va}^*(s) = \frac{\phi(s)}{1 - \phi(s)G(s)} - \frac{c_1 + d_1 s}{s^2}$$

# V SYSTEME DE VIBRO-ISOLATION POUR ISOLER UN SYSTEME DYNAMIQUE AVEC DISPOSITIF DE LOCALISATION

51 Fonction de transfert du SV en fonction de l'impédance de déplacement



la fonction de transfert optimum du système de vibro isolation est donnée par :

$$\Phi(s) = \frac{1}{R(s)G(s)\beta(s)} \left\{ \frac{\beta(s)e^{-2s}}{R(-s)} \right\}_+$$

la connaissance de l'expression générale de la fonction de transfert nécessite la connaissance de chaque terme la composant .

$$2) R(s)R(-s) = 1 + \sum \lambda_i s^4 L_i(s) L_i(-s)$$

avec  $i=1$ .

$$\text{donc } R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s) L_1(-s)$$

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{-\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

$$R(s)R(-s) = \frac{-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$$

$$\text{posons } R(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Ds + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

en effectuons le produit  $R(s)R(-s)$  on trouve par identification

$$\begin{cases} A = \alpha_1 \sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2\alpha_1 \sqrt{\lambda} D = m_1^2 + \lambda c_1^2 \\ 2Bc_1 - D^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ E = c_1 \end{cases}$$

la résolution de ce système non linéaire en  $B$  et  $D$  nous permettra de calculer la forme de  $R(s)$  soit donc :

$$R(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Ds + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

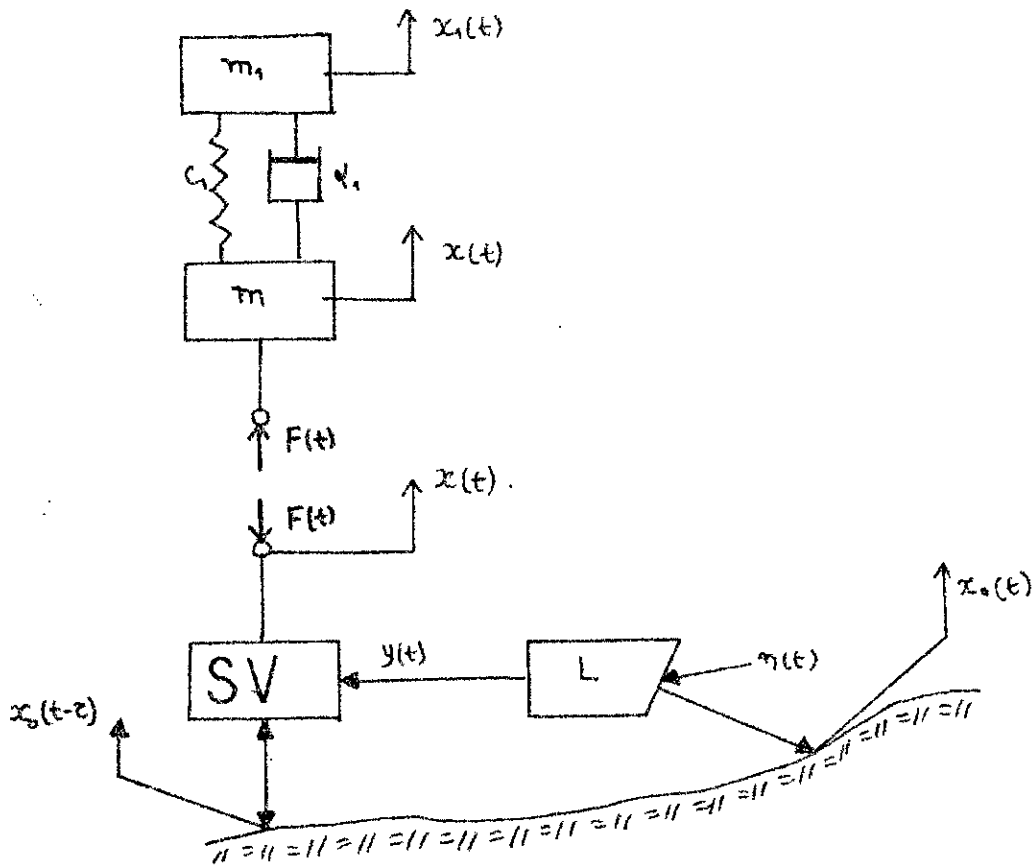
$$\text{b) posons } L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}(s)}$$

posons  $L(s) = Z(s)$ , l'impédance de déplacement du système.

$$\text{donc } Z(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}(s)}$$



On a le schéma suivant :



on peut écrire la relation suivante

$$m \ddot{x}(t) = F(t) + c_1(x_1(t) - x(t)) + d_1(\dot{x}_1(t) - \dot{x}(t))$$

$$m \ddot{\bar{x}}(s) = \bar{F}(s) + c_1(\bar{x}_1(s) - \bar{x}(s)) + d_1(\dot{\bar{x}}_1(s) - \dot{\bar{x}}(s))$$

$$m s^2 \bar{x}(s) = \bar{F}(s) + c_1(\bar{x}_1(s) - \bar{x}(s)) + d_1 s (\bar{x}_1(s) - \bar{x}(s))$$

$$m s^2 \bar{x}(s) = \bar{F}(s) + (c_1 + d_1 s)(\bar{x}_1(s) - \bar{x}(s))$$

$$m s^2 + d_1 s + c_1 \bar{x}(s) = \bar{F}(s) + \bar{x}_1(s)(d_1 s + c_1)$$

$$\text{or } \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{d_1 s + c_1}{m_1 s^2 + d_1 s + c_1}$$

$$\text{done } \left[ m s^2 + d_1 s + c_1 - \frac{d_1 s + c_1}{m_1 s^2 + d_1 s + c_1} \right] \bar{x}(s) = \bar{F}(s)$$

$$\text{done } \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{m m_1 s^4 + (m + m_1) d_1 s^3 + (m + m_1) c_1 s^2}{m_1 s^2 + d_1 s + c_1}$$

$$c) H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x_1}{x}}(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + C_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}_0(s)} = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)}$$

$$\frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}_0(s)} = \Phi(s) \quad \text{donc} \quad \Phi(s) = \frac{\bar{F}(s) \cdot \bar{x}(s)}{\bar{x}_0(s)}$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 \cdot \bar{x}_0(s)} \cdot \bar{x}(s) \cdot \frac{m_1 m s^4 + (m + m_1) \alpha_1 s^3 + (m + m_1) C_1 s^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{x}_0(s)} = \Phi(s) \cdot \frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}{m m_1 s^2 + (m + m_1) \alpha_1 s + (m + m_1) C_1}$$

ce qui nous donne

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \Phi(s) \cdot \frac{\alpha_1 s + C_1}{m m_1 s^2 + (m + m_1) \alpha_1 s + (m + m_1) C_1}$$

d)

$$S_y(s) = S_{x_0}(s) + S_n(s)$$

$$S_y(s) = \beta(s) \cdot \beta(-s) \cdot S_0$$

Pour la suite de notre étude on prendra  $S_n(s) = \varepsilon^2$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$  du fait que le bruit introduit par le dispositif de localisation est négligeable par rapport à l'excitation  $x_0(t)$ .

## 52 Fonction de transfert optimum du SV pour deux formes de $S_X(s)$ .

### 52.1 Excitation par un bruit blanc.

$$a) R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s)L_1(-s)$$

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

on a déjà fait un calcul et trouver que

$$R(s) = \frac{AS^3 + BS^2 + DS + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \alpha_1 \sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2\alpha_1 \sqrt{\lambda} D = m_1^2 + \lambda c_1^2 \\ 2Bc_1 - D^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ E = c_1 \end{cases}$$

$$b) S_y(s) = S_x(s) + S_m(s)$$

$$S_y(s) = \frac{N^2}{s^4} + E^2$$

avec  $E \rightarrow 0$ .

$$S_y(s) = \frac{N^2}{s^4} \quad S_0 = N^2$$

$$\beta(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$c) \bar{\Phi}(s) = \frac{1}{\beta(s)R(s)G(s)} \left\{ \frac{\beta(s)e^{-\tau s}}{R(-s)} \right\}_+$$

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{mm_1 s^2 + (m+m_1)s + (m+m_1)c}{AS^3 + BS^2 + DS + E} \cdot \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{e^{-\tau s}}{s^2} \cdot \frac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{-AS^3 + BS^2 - DS + E} \right\}_+$$

$$\frac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + C_1}{s^2 (-As^3 + Bs^2 - Ds + E)} = \frac{Fs + G}{s^2} + \frac{HS^2 + IS + J}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}$$

la réduction au même dénominateur et après identification on trouve le système suivant.

$$\begin{cases} -AF + H = 0 \\ BF - AG + I = 0 \\ -DF + BG + J = m_1 \\ EF - DG + J = -\alpha_1 \\ EG = C_1 \end{cases}$$

de plus :

$$\left\{ \frac{Fs + G}{s^2} \cdot e^{-\alpha_1 s} + \frac{HS^2 + IS + J}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \cdot e^{-ts} \right\} = \frac{Fs + G}{s^2} \cdot e^{-\alpha_1 s} + \left\{ \frac{(HS^2 + IS + J)e^{-ts}}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \right\}$$

posons :

$$-As^3 + Bs^2 - Ds + E = -A(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)$$

avec

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = \frac{B}{A} \\ s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = \frac{D}{A} \\ s_1 s_2 s_3 = \frac{E}{A} \end{cases}$$

les racines  $s_1, s_2$  et  $s_3$  sont soit :

- réelles positives

- une réelle et les deux autres conjuguées avec  $\text{Re}(s) > 0$ .

$$\text{alors écrivait } \frac{HS^2 + IS + J}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} = \frac{1}{-A} \left( \frac{M}{s-s_1} + \frac{N}{s-s_2} + \frac{P}{s-s_3} \right)$$

avec le système suivant.

$$\begin{cases} M + N + P = H \\ M(s_2 + s_3) + N(s_1 + s_3) + P(s_1 + s_2) = -I \\ Ms_2s_3 + Ns_1s_3 + Ps_1s_2 = J \end{cases}$$

donc

$$\left\{ M \frac{e^{-\tau s}}{s-s_1} + N \frac{e^{-\tau s}}{s-s_2} + P \frac{e^{-\tau s}}{s-s_3} \right\} = \left\{ M \frac{e^{-\tau s} - e^{-s_1\tau}}{s-s_1} + N \frac{e^{-\tau s} - e^{-s_2\tau}}{s-s_2} + P \frac{e^{-\tau s} - e^{-s_3\tau}}{s-s_3} \right\}$$

l'expression de  $\Phi(s)$ .

$$\Phi(s) = \frac{ms^2 + (m+n)s + (m+n)c_1}{As^3 + Bs^2 + Ds + E} \cdot \frac{1}{s^2} \left\{ \frac{Fs + G}{s^2} \cdot e^{-\tau s} + \frac{M(e^{-\tau s} - e^{-\tau s_1})}{-A(s-s_1)} + \frac{N(e^{-\tau s} - e^{-\tau s_2})}{-A(s-s_2)} + \frac{P(e^{-\tau s} - e^{-\tau s_3})}{-A(s-s_3)} \right\}$$

$$\frac{M(e^{-\tau s} - e^{-\tau s_1})}{-A(s-s_1)} + \frac{N(e^{-\tau s} - e^{-\tau s_2})}{-A(s-s_2)} + \frac{P(e^{-\tau s} - e^{-\tau s_3})}{-A(s-s_3)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$N(s) = e^{-\tau s} \left\{ s^2(M+N+P) - s \left[ M(s_2+s_3) + N(s_1+s_3) + P(s_1+s_2) \right] + Ms_2s_3 + Ns_1s_3 + Ps_1s_2 \right\} - M e^{-\tau s_1} (s-s_2)(s-s_3) + N e^{-\tau s_2} (s-s_1)(s-s_3) - P e^{-\tau s_3} (s-s_1)(s-s_2).$$

$N(s)$  peut encore s'écrire

$$N(s) = e^{-\tau s} (Hs^2 + Is + J) - M e^{-\tau s_1} (s-s_2)(s-s_3) - N e^{-\tau s_2} (s-s_1)(s-s_3) + P e^{-\tau s_3} (s-s_1)(s-s_2).$$

$$D(s) = -As^3 + Bs^2 - Ds + E.$$

$$\left\{ \frac{e^{-\tau s}}{s^2} \frac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \right\}_+ = \frac{Fs + G}{s^2} \cdot e^{-\tau s} + \frac{e^{-\tau s} (HS^2 + IS + J) - M \cdot e^{-\tau s_1} x}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}$$

$$\frac{x(s-s_2)(s-s_3) - Ne^{-\tau s_2}(s-s_1)(s-s_3) - Pe^{-\tau s_1}(s-s_1)(s-s_3)}{}$$

$$\left\{ \frac{e^{-\tau s}}{s^2} \frac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \right\}_+ = \frac{e^{-\tau s} \left[ (Fs + G)(-As^3 + Bs^2 - Ds + E) + s^2 (HS^2 + IS + J) \right] +}{s^2 (-As^3 + Bs^2 - Ds + E)}$$

$$\frac{-e^{-\tau s_1} \cdot s^2 \cdot (s-s_2)(s-s_3)M - e^{-\tau s_2} \cdot s^2 \cdot (s-s_1)(s-s_3)N +}{}$$

$$\frac{-e^{-\tau s_1} \cdot s^2 \cdot (s-s_1)(s-s_2) \cdot P}{}$$

la nouvelle expression de  $\Phi(s)$  serait :

$$\Phi(s) = \frac{\left[ mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1 \right] \left[ (m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1) e^{-\tau s} - s^2 \left[ e^{-\tau s_1} M x \right. \right.}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E) (-As^3 + Bs^2 - Ds + E)} \cdot$$

$$\left. \left. x(s-s_2)(s-s_3) + e^{-\tau s_2} \cdot N \cdot (s-s_1)(s-s_3) + e^{-\tau s_1} \cdot P \cdot (s-s_1)(s-s_2) \right] \right\}$$

avec :

$$(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(-As^3 + Bs^2 - Ds + E) = -\lambda \alpha_1^2 \cdot s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2 \cdot m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2$$

Pour  $\tau$  assez grand  $\Phi(s)$  serait :

$$\Phi(s) = \frac{\left[ mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1 \right] (m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{-\lambda \alpha_1^2 \cdot s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2 \cdot m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2} \cdot e^{-\tau s}$$

la fonction de transfert  $H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)$  serait alors

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1) \cdot e^{-\tau s}}{-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4(m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2(2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2}$$

d). calcul de la dispersion  $\sigma_{\ddot{x}_1}^2$ .

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(\alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4(m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2(2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2} \right|^2 \cdot S \ddot{x}_0(s) ds$$

sachant que :

$$\begin{aligned} \left| -\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4(m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2(2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2 \right|^2 &= \lambda^2 \alpha_1^4 s^{12} - 2\lambda \alpha_1^2 (m_1^2 + \lambda c_1^2) s^{10} \\ &+ \left[ (m_1^2 + \lambda c_1^2) - 2\lambda \alpha_1^2 (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) \right] s^8 + \\ &+ \left[ -2\lambda \alpha_1^2 + 2(2m_1 c_1 - \alpha_1^2)(m_1^2 + \lambda c_1^2) \right] s^6 + \\ &+ \left[ 2c_1^2(m_1^2 + \lambda c_1^2) + (2m_1 c_1 - \alpha_1^2)^2 \right] s^4 + \\ &+ 2c_1^2(2m_1 c_1 - \alpha_1^2) s^2 + c_1^4 \end{aligned}$$

écrivons  $-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4(m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2(2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2$  sous la forme

$$(Ks^6 + Ls^5 + Ms^4 + Ns^3 + Ps^2 + Qs + T)(Ks^6 - Ls^5 + Ms^4 - Ns^3 + Ps^2 - Qs + T)$$

avec le système :

$$\begin{cases} K^2 = \lambda^2 \alpha_1^4 \\ 2 \cdot K \cdot M - L^2 = -2\lambda \alpha_1^2 (m_1^2 + \lambda c_1^2) \\ 2 \cdot P \cdot K - 2 \cdot L \cdot N + M^2 = m_1^2 + \lambda c_1^2 - 2\lambda \alpha_1^2 (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) \\ 2 \cdot M \cdot T - 2 \cdot N \cdot Q + P^2 = 2c_1^2 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ 2 \cdot K \cdot T - 2 \cdot Q \cdot L + 2 \cdot P \cdot M - N^2 = -2\lambda \alpha_1^2 + 2 \cdot (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) (m_1^2 + \lambda c_1^2) \\ 2 \cdot P \cdot T - Q^2 = 2 \cdot c_1^2 \cdot (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) \\ T^2 = c_1^4 \end{cases}$$

la dispersion serait alors :

$$\sigma_{\ddot{x}_i}^2 = \frac{1}{2\pi f} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\alpha_1 m_1 s^3 + s^2 (m_1 c_1 + \alpha_1^2) + 2\alpha_1 c_1 s + c_1^2}{K s^6 + L s^5 + M s^4 + N s^3 + P s^2 + Q s + T} \right|^2 N^2 ds$$

la connaissance de la dispersion nécessite la résolution du système non linéaire en L, M, N, P, Q en fonction de  $\lambda$ , ceci nécessite un outil de calcul non disponible jusqu'à présent.

En remarquant que

$$\begin{aligned} |(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(-As^3 + Bs^2 - Ds + E)|^2 &= |(As^3 + Bs^2 + Ds + E)|^2 \\ &= \left| s^6 A^2 + s^5 (2AB) + s^4 (2AD + B^2) + s^3 (2AE + 2BD) + s^2 (2BE + D^2) + s (2ED) + E^2 \right|^2 \end{aligned}$$

avec

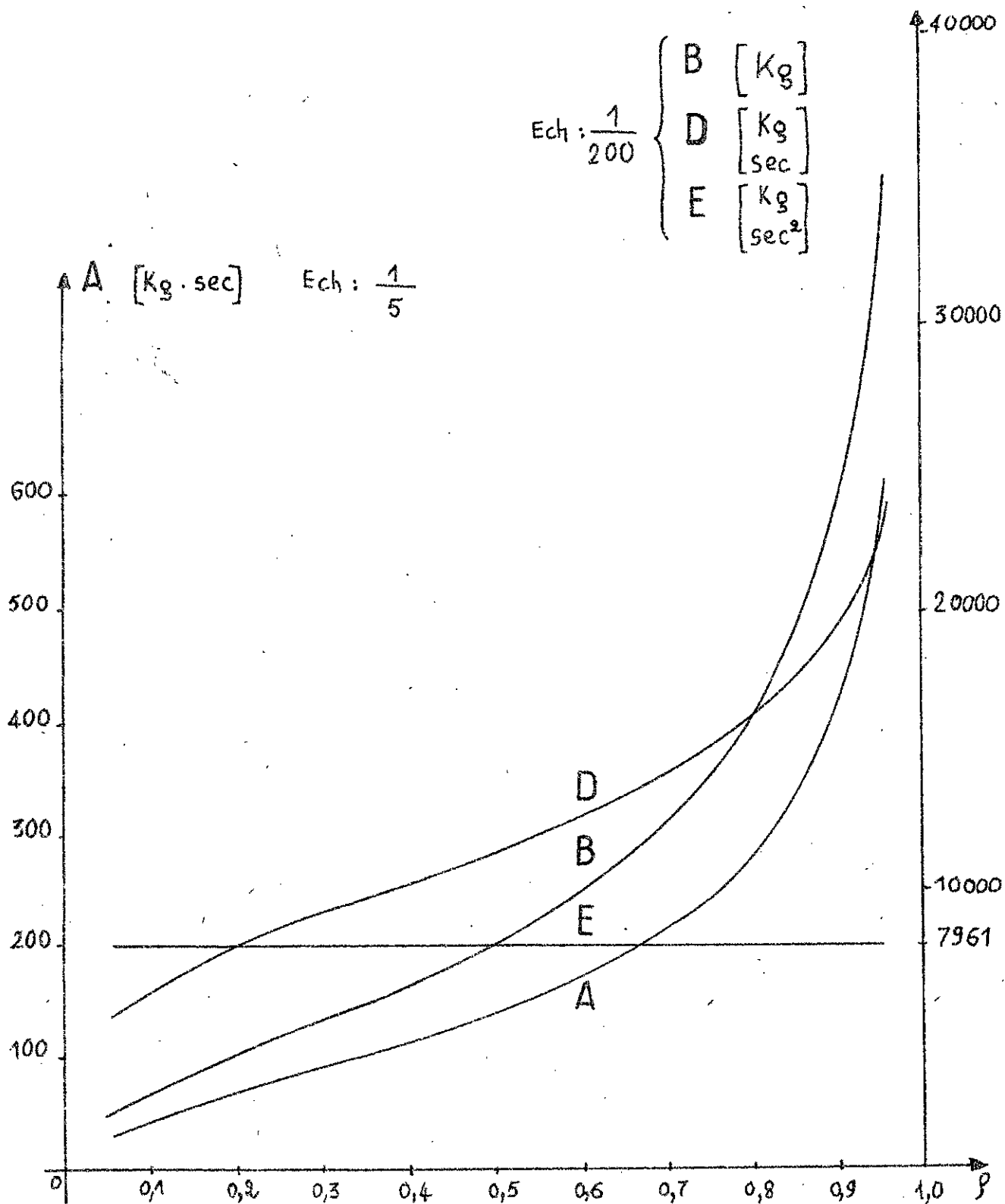
$$\begin{cases} A = \alpha_1 \sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2\alpha_1 \sqrt{\lambda} D = m_1^2 + A c_1^2 \\ 2B c_1 - D^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ E = c_1 \end{cases}$$

un programme a été déjà élaboré pour le calcul de A, B, D, E

$m_1 = 80,862 \text{ kg}$	: masse
$c_1 = 7961,05 \text{ kg/s}^2$	: ressort
$\alpha_1 = 141,688 \text{ kg/s}$	: amortisseur.

vibro-isoler un modèle dynamique d'un homme opérateur.



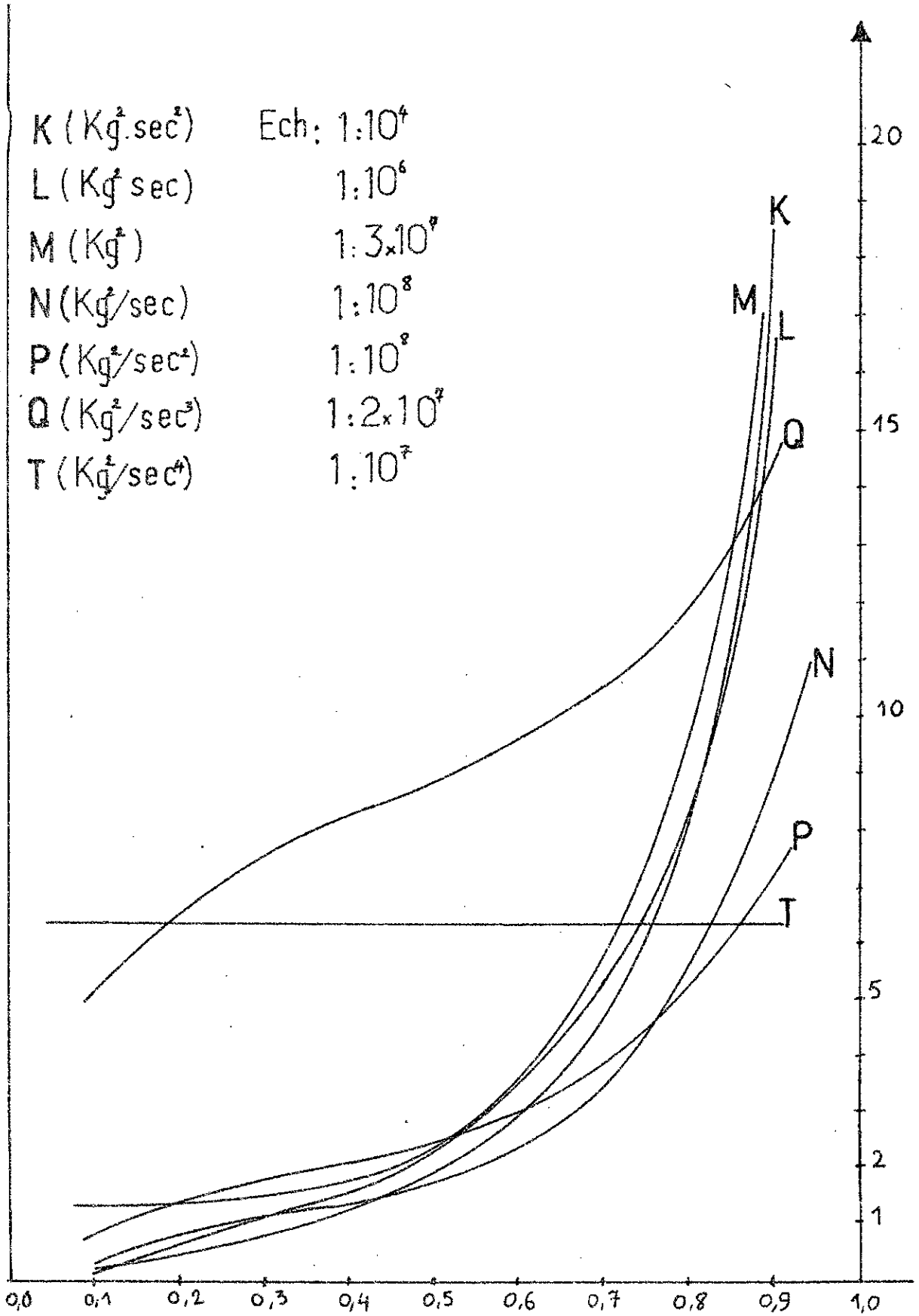


En faisant la remarque suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = A^2 . \\ L = 2AB . \\ M = 2AD + B^2 . \\ N = 2AE + 2BD . \\ P = 2BE + D^2 . \\ Q = 2ED . \\ T = E^2 . \end{array} \right.$$

donc étant donné  $A, B, D$  et  $E$  en fonction de  $\lambda = \lambda_0 \frac{\beta}{1-\beta}$   
avec  $\beta$  variant de  $0$  à  $1$  avec un pas de  $0,1$ , on pourra alors  
représenter  $K, L, M, N, P, Q$  et  $T$  en fonction de  $\beta$

Ces variations sont données par la figure suivante.



les différents paramètres de la dispersion étant déterminés on peut alors donner l'allure de  $\sigma_{\ddot{x}_1}^2$  en fonction de  $f$ .

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{11457s^3 + 663.831s^2 + 2.255970s + 63.378317}{Ks^6 + Ls^5 + Ms^4 + Ns^3 + Ps^2 + Qs + T} \right|^2 N^2 ds$$

ayant représenté  $\sigma_{\ddot{x}_1}^2$  en remarque que  $\sigma_{\ddot{x}_1}^2 \rightarrow 0$  quand  $\lambda \rightarrow \infty$  donc on obtient une bonne isolation pour  $\lambda$  assez grand.

e) calcul de la dispersion  $\sigma_{x-x_0}^2$ .

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds$$

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{1}{s^2} \left[ H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) \cdot e^{2s} - 1 \right]$$

avec

$$H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) = \phi(s) \frac{m_1 s^2 + k_1 s + c_1}{m m_1 s^2 + (m+m_1) k_1 s + (m+m_1) c_1}$$

ce qui nous donne .

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\lambda k_1^2 s^4 - \lambda c_1^2 s^2 + k_1^2}{-\lambda k_1^2 s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2m_1 c_1 - k_1^2) + c_1^2}$$

ce qui nous donne enfin de compte .

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) ds$$

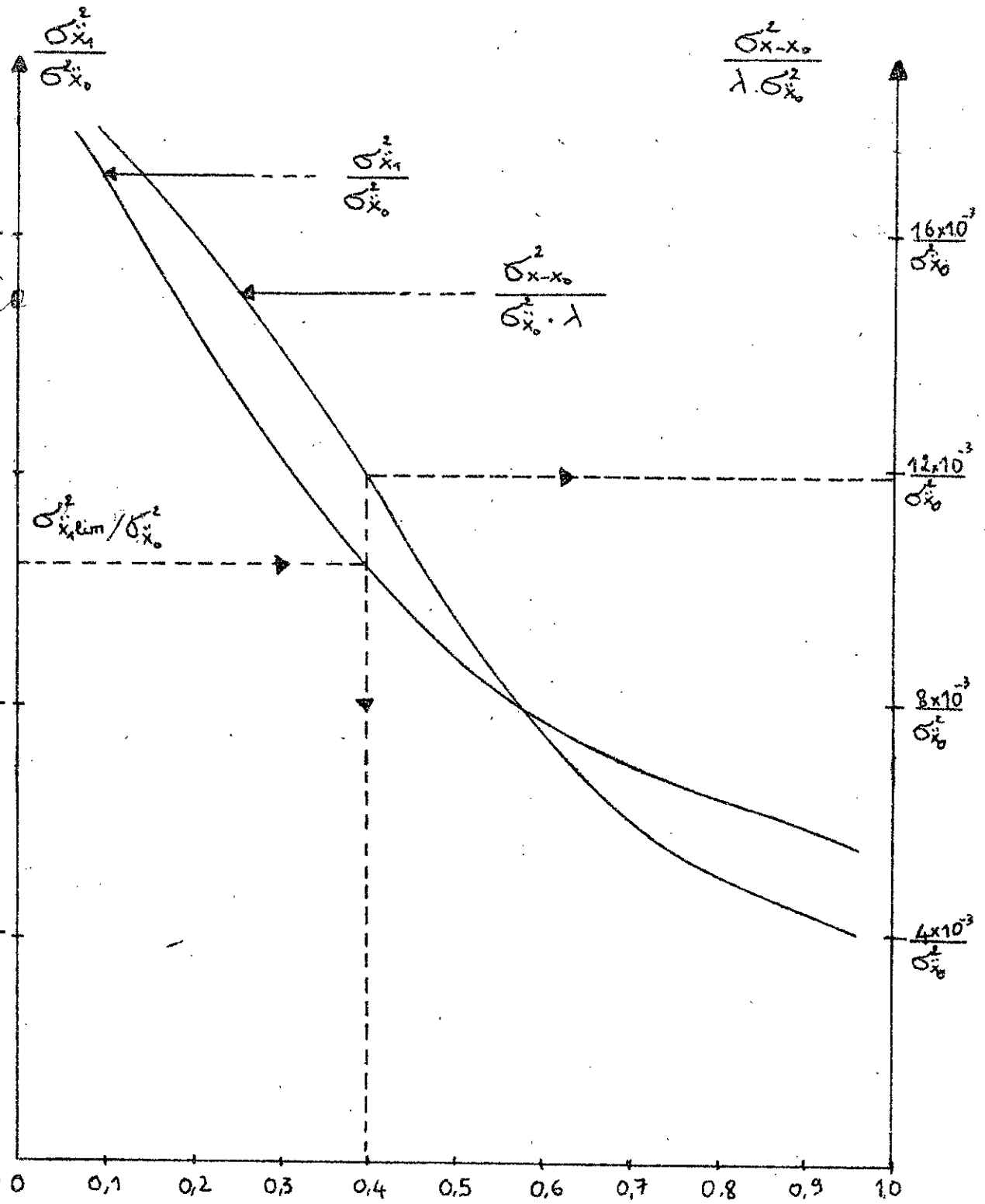
$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\lambda k_1^2 s^4 - \lambda c_1^2 s^2 + k_1^2}{-\lambda k_1^2 s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2m_1 c_1 - k_1^2) + c_1^2} \right|^2 N^2 ds$$

et en adoptons la même démarche que pour  $\sigma_{x_1}^2$  on trouve

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{\lambda N_1^2 s^4 - \lambda C_1^2 s^2 + \alpha_1^2}{Ks^6 + Ls^5 + Ms^4 + Ns^3 + Ps^2 + Qs + T} \right|^2 N^2 ds.$$

avec  $K, L, M, N, P, Q$  et  $T$  déjà définis.

On peut alors représenter  $\sigma_{x-x_0}^2$  en fonction de  $\lambda = \lambda_0 \frac{\rho}{1-\rho}$   
 en remarque que  $\sigma_{x-x_0}^2$  augmente avec  $\lambda$ .



f) interprétation des résultats ;

En limitant  $\sigma_{\dot{x}_1}$  à une valeur  $\sigma_{\dot{x}_1, \text{lim}}$ , on détermine la valeur de  $p$  correspondante (prenant pour des raisons que nous allons voir,  $p = 0,4$ ) et la valeur de  $\sigma_{x-x_0}$

Ayant la valeur de  $p$ , on détermine les coefficients  $K, L, M, N, P, Q$  et  $T$   
on obtient pour  $p = 0,4$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 13384,176 \text{ (Kg}^2 \cdot \text{sec}^2) \\ L = 154589,859 \text{ (Kg}^2 \cdot \text{sec)} \\ M = 47020712,32 \text{ (Kg}^2) \\ N = 139285743 \text{ (Kg}^2/\text{sec)} \\ P = 212467620 \text{ (Kg}^2/\text{sec}^2) \\ Q = 164011450 \text{ (Kg}^2/\text{sec}^3) \\ T = 63378317,10 \text{ (Kg}^2/\text{sec}^4) \end{array} \right.$$

la fonction de transfert du s.v. optimum est :

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)}{-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2}$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{m_1^2 s^4 + s^2 (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2}{-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2}$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{6538,7 s^4 + 1267417,4 s^2 + 63378317,1}{-8030,2 s^6 + 25357865,5 s^4 + 1267417,4 s^2 + 63378317,1}$$

## 5.2.2 Excitation par un bruit $S_x(s) = 2\alpha N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha^2 s^2}$

$$a) R(s)R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s) L_1(-s)$$

on trouve

$$R(s) = \frac{As^3 + Bs^2 + Ds + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$\begin{cases} A = \alpha_1 \sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2\alpha_1 \sqrt{\lambda} D = m_1^2 + \alpha_1^2 \\ 2Bc_1 - D^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ E = c_1 \end{cases}$$

$$b) S_y(s) = S_x(s) + S_n(s)$$

$$S_y(s) = 2\alpha N^2 \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha^2 s^2} \cdot \frac{1}{s^4} + e^{\varepsilon}$$

avec  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$S_y(s) = 2\alpha N^2 \frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{s^2 (s^2 - 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2)}$$

$$S_0 = 2\alpha_1 N^2$$

$$\beta(s) = \frac{\Omega + s}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2)}$$

$$c) \Phi(s) = \frac{1}{\beta(s) R(s) G(s)} \left\{ \frac{\beta(s) e^{-\varepsilon s}}{R(-s)} \right\}_+$$

$$\Phi(s) = \frac{m_1 m s^3 + (m + m_1) \alpha_1 s^2 + (m_1 m_1) c_1 s^2}{As^3 + Bs^2 + Ds + E} \cdot \frac{(\Omega + s) (m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1) \cdot e^{-\varepsilon s}}{s^2 (s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2) \cdot (-As^3 + Bs^2 - Ds + E)}$$

décomposons l'expression suivante :



$$\frac{(\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{(-As^3 + Bs^2 - Ds + E)(s^2 + 2\sqrt{K}s + \Omega^2) \cdot s^2} = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{K}s + \Omega^2)} + \frac{Js^2 + Ks + L}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}$$

en réduisant au même dénominateur et par identification on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} -AF + J = 0 \\ FB - AG + K + 2\sqrt{K}J = 0 \\ -FD + GB - AH + L + 2\sqrt{K}K + J\Omega^2 = 0 \\ FE - GD + HB - AI + 2\sqrt{K}L + K\Omega^2 = m_1 \\ HE - ID = -\alpha_1 \Omega + c_1 \\ IE = \Omega c_1 \\ GE - HD + BI + \Omega^2 L = m_1 \Omega - \alpha_1 \end{array} \right.$$

donc :

$$\left\{ \frac{(\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{(-As^3 + Bs^2 - Ds + E)(s^2 + 2\sqrt{K}s + \Omega^2) \cdot s^2} \cdot e^{-\tau s} \right\} = \frac{Fs^3 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{K}s + \Omega^2)} \cdot e^{-\tau s} + \left\{ \frac{(Js^2 + Ks + L) \cdot e^{-\tau s}}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \right\}$$

en remarquant que

$$-As^3 + Bs^2 - Ds + E = -A(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3),$$

on peut alors écrire :

$$\frac{Js^2 + Ks + L}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} = \frac{1}{-A} \left\{ \frac{M}{s - s_1} + \frac{N}{s - s_2} + \frac{P}{s - s_3} \right\}$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{l} s_1 + s_2 + s_3 = \frac{B}{A} \\ s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = \frac{D}{A} \\ s_1 s_2 s_3 = \frac{E}{A} \end{array} \right.$$

et le second système :

$$\frac{Fs^2 + Gs^2 + Hs + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2)} \cdot e^{-\tau s} + \frac{e^{-\tau s}(Hs^2 + Is + J) - Me^{-\tau s_1}(s-s_2)(s-s_3) +}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E}$$

$$\frac{-Ne^{-\tau s_2}(s-s_1)(s-s_3) - Pe^{-\tau s_3}(s-s_1)(s-s_2)}{D(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$D(s) = s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2)(-As^3 + Bs^2 - Ds + E)$$

$$N(s) = e^{-\tau s} \cdot (\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + C_1) - s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2) \left\{ M \cdot e^{-\tau s_1}(s-s_2)(s-s_3) + N \cdot e^{-\tau s_2}(s-s_1)(s-s_3) + P \cdot e^{-\tau s_3}(s-s_1)(s-s_2) \right\}$$

calculons l'expression generale de  $\Phi(s)$

$$\bar{\Phi}(s) = \frac{m_1 m s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s^3 + (m+m_1)C_1 \cdot s^2}{s^2 \cdot (As^3 + Bs^2 + Ds + E)} \cdot \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\frac{\Omega + s}{s^2 \cdot (s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2)}$$

$$\Phi(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

$$D_1(s) = (As^3 + Bs^2 + Ds + E) \cdot (-As^3 + Bs^2 - Ds + E) \cdot (\Omega + s)$$

$$N_1(s) = \left[ m_1 m s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)C_1 \right] \cdot \left\{ e^{-\tau s} \cdot (\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + C_1) + \right.$$

$$\left. - s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha} s + \Omega^2) \left[ M e^{-\tau s_1} \cdot (s-s_2)(s-s_3) + N e^{-\tau s_2} \cdot (s-s_1)(s-s_3) + P e^{-\tau s_3} \cdot (s-s_1)(s-s_2) \right] \right\}$$

Pour  $\tau$  assez grand :

$$\Phi(s) = \frac{(m_1 m s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)C_1) \cdot (m_1 s^2 - \alpha_1 s + C_1)}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)(-As^3 + Bs^2 - Ds + E)} \cdot e^{-\tau s}$$

$$\begin{cases} M + N + P = +J \\ M(s_1 + s_2) + N(s_1 + s_3) + P(s_1 + s_2) = -K \\ Ms_2s_3 + Ns_1s_3 + Ps_1s_2 = L \end{cases}$$

on peut alors écrire que

$$\left\{ \frac{Js^2 + Ks + L}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \cdot e^{-\tau s} \right\}_+ = -\frac{1}{A} \left\{ M \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_1} + N \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_2} + P \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_3} \right\}_+$$

de plus :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{M}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_1} + \frac{N}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_2} + \frac{P}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_3} \right\}_+ &= \frac{M}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s} - e^{-\tau s_1}}{s-s_1} + \frac{N}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s} - e^{-\tau s_2}}{s-s_2} \\ &+ \frac{P}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s} - e^{-\tau s_3}}{s-s_3} \end{aligned}$$

la réduction au même dénominateur de cette dernière expression nous donne

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{M}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_1} + \frac{N}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_2} + \frac{P}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_3} \right\}_+ &= \frac{e^{-\tau s} \left\{ s^2(M+N+P) - s \left[ M(s_2+s_3) + \right. \right. \\ &+ N(s_1+s_3) + P(s_1+s_2) \left. \right] + Ms_2s_3 + Ns_1s_3 + Ps_1s_2 \left. \right\} + \left\{ \right. \\ &\left. - Me^{-\tau s_1}(s-s_2)(s-s_3) - Ne^{-\tau s_2}(s-s_1)(s-s_3) - Pe^{-\tau s_3}(s-s_1)(s-s_2) \right\}}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \end{aligned}$$

cette expression s'écrit encore sous la forme :

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{M}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_1} + \frac{N}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_2} + \frac{P}{-A} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{s-s_3} \right\}_+ &= \frac{e^{-\tau s} (Hs^2 + Is + J) +}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \\ &\frac{-Me^{-\tau s_1} \cdot (s-s_2)(s-s_3) - Ne^{-\tau s_2} (s-s_1)(s-s_3) - Pe^{-\tau s_3} (s-s_1)(s-s_2)}{-As^3 + Bs^2 - Ds + E} \end{aligned}$$

calculons l'expression de  $\left\{ \frac{(\Omega + s)(m_1s^2 - \alpha_1s + C_1)}{(-As^3 + Bs^2 - Ds + E) \cdot (s^2 + 2\sqrt{\lambda} s + \lambda^2) \cdot s^2} \cdot e^{-\tau s} \right\}_+$

Remarque très importante :

on remarque que  $\Phi(s)$  est indépendante du paramètre d'excitation  $\Omega$ , donc le système de vibro isolation peut être construit indépendamment de  $\Omega$ .

Etudions la fonction de transfert globale  $H \frac{x_1}{x_0}(s)$ .

$$H \frac{x_1}{x_0}(s) = \Phi(s) \cdot \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + (m + m_1) \alpha_1 s + (m + m_1) c_1}$$

$$H \frac{x_1}{x_0}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1) \cdot (m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1) \cdot e^{-\tau s}}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(-A s^3 + B s^2 - D s + E)}$$

on remarque aussi que la fonction de transfert globale ne dépend pas du paramètre d'excitation  $\Omega$ .

calculons  $\left| H \frac{x_1}{x_0}(j\omega) \right|^2$ , avec  $H \frac{x_1}{x_0}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1) e^{-\tau s}}{|A s^3 + B s^2 + D s + E|^2}$ .

$$H \frac{x_1}{x_0}(j\omega) = H \frac{x_1}{x_0}(s) \cdot \left| H \frac{x_1}{x_0}(s) \right|^2 = H \frac{x_1}{x_0}(s) H \frac{x_1}{x_0}(-s)$$

$$\left| H \frac{x_1}{x_0}(s) \right|^2 = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1) e^{-\tau s} \cdot (-\alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1) e^{\tau s}}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(A s^3 + B s^2 - D s + E)(A s^3 + B s^2 + D s + E)(A s^3 + B s^2 - D s + E)}$$

ceci est la même chose que d'écrire.

$$\left| H \frac{x_1}{x_0}(s) \right|^2 = \left| \frac{(\alpha_1 s + c_1)(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)^2} \right|^2$$

$$\left| H \frac{x_1}{x_0}(s) \right|^2 = \left| \frac{s^3 m_1 c_1 + s^2 (m_1 c_1 + \alpha_1^2) + s (2\alpha_1 c_1) + c_1^2}{s^6 A^2 + s^5 (2AB) + s^4 (2AD + B^2) + s^3 (2AE + 2BD) + s^2 (2BE + D^2) + s (\lambda ED) + E^2} \right|^2$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) = \frac{-(m_1 c_1 + d_1^2) \omega^2 + c_1^2 + j(-m_1 c_1 \omega^3 + 2d_1 c_1 \omega)}{-\omega^6 A^2 + (2AD + B^2) \omega^4 - \omega^2 (2BE + D^2) + E^2 + j[2AB \omega^5 - (2AE + 2BD) \omega^3 + 2ED \omega]}$$

$$\left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 = \frac{(-(m_1 c_1 + d_1^2) \omega^2 + c_1^2)^2 + (-m_1 c_1 \omega^3 + 2d_1 c_1 \omega)^2}{[-\omega^6 A^2 + (2AD + B^2) \omega^4 - \omega^2 (2BE + D^2) + E^2]^2 + [2AB \omega^5 - (2AE + 2BD) \omega^3 + 2ED \omega]^2} = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

$$N(\omega) = \omega^6 d_1^2 m_1^2 + \omega^4 [(m_1 c_1 + d_1^2)^2 - 4d_1 c_1^2 m_1] + \omega^2 [-2c_1^2 (m_1 c_1 + d_1^2) + 4d_1^2 c_1^2] + c_1^4$$

$$D(\omega) = \omega^{12} A^4 + \omega^{10} [-2(2AD + B^2) A^2 + 4A^2 B^2] + \omega^8 [(2AD + B^2)^2 + 2A^2 (2BE + D^2) - 8AB(AE + BD)] + \omega^6 [-2A^2 E^2 - (2AD + B^2)(2BE + D^2) + 4(AE + BD)^2 + 8ABED] + \omega^4 [(2BE + D^2)^2 + 2(2AD + B^2) E^2 - 8(AE + BD)ED] + \omega^2 [-2E^2 (2BE + D^2) + 4E^2 D^2] + E^4$$

Pour  $\omega = 0$ ,  $\left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 = \frac{c_1^4}{E^4} = 1 \quad \forall \Omega.$

Pour  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \rightarrow 0 \quad \forall \lambda.$

la meilleure vibroisolation est obtenu quelquesoit  $\lambda$ .

## 5.3 Comparaison des résultats avec les SV sans dispositif de localisation.

### 5.3.1 Système dynamique

- Excitation par un bruit  $S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - \alpha^2 s^2} \cdot 2\alpha N^2$

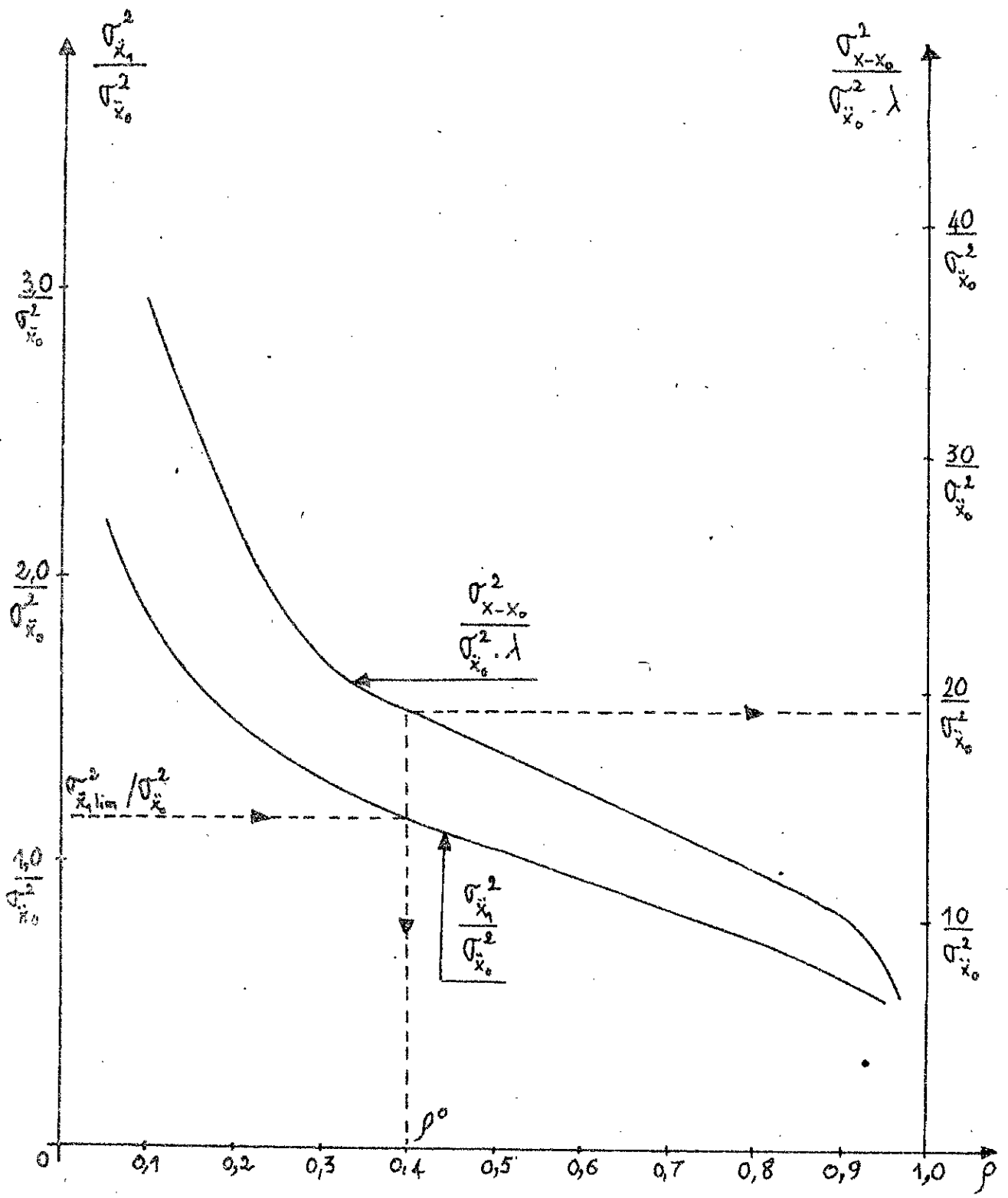
Pour  $\mathcal{E}$  assez grand, la fonction de transfert du SV optimum  $\Phi(s)$  et la fonction de transfert globale du S.V.  $H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)$  ne dépendent pas des paramètres d'excitation, de plus  $|H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)|^2$  tend vers zéro pour les hautes fréquences d'excitation indépendamment du multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  cela veut dire qu'on aura une bonne isolation.

Pour  $\mathcal{E}$  nul c'est à dire qu'on a un système de vibroisolation sans dispositif de localisation, pour ce système la fonction de transfert du SV optimum  $\Phi(s)$  dépend des paramètres d'excitation ainsi que la fonction de transfert globale du S.V.  $H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)$ , de plus  $|H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)|^2$  tend vers  $\frac{F^2}{\lambda}$  pour les très hautes fréquences d'excitation donc on n'aura une bonne isolation que pour  $\lambda$  très grand.

Donc on peut conclure qu'avec un dispositif de localisation permettant d'avoir des valeurs de  $\mathcal{E}$  assez élevées on obtient une construction très simplifiée des SV du fait de l'indépendance de leurs fonctions de transfert des paramètres d'excitation  $\alpha$  et  $\Omega$ .

- Excitation par un bruit blanc

L'étude comparative qu'on va faire va porter sur l'utilisation d'un résultat obtenu avec les données suivantes :  $m_1 = 80,862 \text{ Kg}$ ,  $c_1 = 7961,05 \text{ Kg/sec}$ ,  $k_1 = 141,688 \text{ Kg/s}$ , pour un SV sans et avec dispositif de localisation, les courbes suivantes sont pour un système sans dispositif de localisation.



De l'exemple pris pour un SV sans dispositif de localisation ou on a fixé la valeur de la dispersion à une valeur limite  $\sigma_{\ddot{x}_1}^2 / \sigma_{\ddot{x}_0}^2 = \frac{1,16}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2}$  la valeur correspondante de  $\beta = 0,4$  ou encore  $\lambda = 0,6667$  et  $\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2 \cdot \lambda} = 19$  donc  $\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2} = 12,66$

pour un système de Vibroisolation avec dispositif de localisation et pour la même valeur de  $\beta = 0,4$  on trouve :

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}_1}^2}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2} = \frac{0,255}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2} \quad \text{et}$$

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2 \cdot \lambda} = \frac{12 \times 10^{-3}}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\sigma_{x-x_0}^2}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2} = \frac{8 \times 10^{-3}}{\sigma_{\ddot{x}_0}^2}$$

si on fait les rapports suivants :

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}_1}^2 |_{t=0}}{\sigma_{\ddot{x}_1}^2 |_{t=\infty}} = 4,55 \quad \text{et}$$

$$\frac{\sigma_{x-x_0}^2 |_{t=0}}{\sigma_{x-x_0}^2 |_{t=\infty}} = 1583$$

d'où on voit l'amélioration considérable qu'entraîne un SV avec un dispositif de localisation permettant d'avoir un  $\tau$  assez élevé, surtout pour la dispersion de l'écart qui est de 1583 moins importante et aussi la dispersion de l'accélération qui est de 4,55 moins importante comparé avec un SV sans dispositif de localisation.

## 532 Système rigide

Excitation par un bruit  $S_{\dot{x}}(s) = -N^2$

Pour un SV avec un dispositif de localisation permettant d'avoir



un cassez grand, pour un bruit blanc de vitesse, on a déjà déterminé les dispersions d'accélération et d'écart.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot N^2 \cdot \omega_0^3 \quad \text{et}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \frac{N^2}{\omega_0}$$

En général dans les problèmes de vibro-isolation en fixe la dispersion de l'écart  $\sigma_{x-x_0}^2$  à une valeur limite et étant donné cette valeur en calcul la dispersion d'accélération donc posant:

$$\sigma_{x-x_0}^2 \leq \Psi$$

ce qui donne  $\frac{3\sqrt{2}}{16} \frac{N^2}{\omega_0} = \Psi$  pour le cas limite.

donc  $\omega_0 = \frac{3\sqrt{2}}{16} \frac{N^2}{\Psi}$ , en remplaçons cette valeur dans  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  on obtient.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{27}{2^{14}} (N^2)^4 \cdot \frac{1}{\Psi^3}$$

Pour un système de vibro-isolation sans dispositif de localisation les valeurs des dispersions sont données par.

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{N^2 \omega_0^3}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad \text{et}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{N^2}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega_0}$$

de la même façon que précédemment et en fixons  $\sigma_{x-x_0}^2$  à une valeur limite identique à celle donnée précédemment donc :

$$\sigma_{x-x_0}^2 \leq \Psi$$

$\frac{N^2}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \Psi$  donc  $\omega_0 = \frac{N^2 \cdot 3}{2 \sqrt{2} \Psi}$ , en reportant cette valeur dans  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  on obtient:

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{27 (N^2)^4}{64 \psi^3}$$

Ainsi donc pour une même valeur de la dispersion de l'écart voyons le rapport des deux dispersions d'accélération :

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2 | z=0}{\sigma_{\ddot{x}}^2 | z=\infty} = 256$$

De là on peut dire qu'on a obtenu à l'aide d'un dispositif de localisation une diminution de la dispersion d'accélération de 256 fois par rapport à un système sans dispositif de localisation.

Excitation par un bruit  $S_x(s) = \frac{N^2}{-s^2 + \alpha^2}$

Ce type d'excitation a été déjà étudié au chapitre IV, et on a obtenu l'expression des dispersions d'accélération et d'écart comme suit :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{\omega_0^5}{2} \frac{2\sqrt{2} \omega_0^2 + 8\omega_0 \alpha + 2\sqrt{2} \alpha^2}{16 \omega_0^4 + 40\sqrt{2} \omega_0^3 \alpha + 96 \omega_0^2 \alpha^2 + 24\sqrt{2} \omega_0 \alpha^3 + 16 \alpha^4} \cdot N^2$$

et

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{6\sqrt{2} \omega_0^3 + 24 \omega_0^2 \alpha + 22\sqrt{2} \omega_0 \alpha^2 + 16 \alpha^3}{2 \cdot (16 \omega_0^4 + 40\sqrt{2} \omega_0^3 \alpha + 96 \omega_0^2 \alpha^2 + 24\sqrt{2} \omega_0 \alpha^3 + 16 \alpha^4)} \cdot N^2$$

par la suite nous prendrons un type d'excitation bien précis avec  $\alpha = \sqrt{2} \omega_0$  on trouve alors :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = N^2 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{448} \omega_0^3 \quad \text{et}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = N^2 \frac{\sqrt{2}}{112} \frac{1}{\omega_0}$$

on posant :

$$\sigma_{x-x_0}^2 \leq \psi \quad \text{on trouve} \quad \omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{112} \cdot \frac{N^2}{\psi}$$

d'où  $\sigma_{\ddot{x}}^2$  s'écrit en fonction de  $\Psi$  :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2^{14} \cdot 7^3} \cdot \frac{(N^2)^3}{\Psi^3}$$

Pour un SV sans dispositif de localisation et pour  $\alpha = \sqrt{2} \omega_0$ .

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = N^2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{2} \cdot 5^2} \cdot \omega_0^3 \quad \text{et}$$

$$\sigma_{x-x_0}^2 = N^2 \cdot \frac{117}{2\sqrt{2} \cdot 5^3} \cdot \frac{1}{\omega_0}$$

$$\text{en posant } \sigma_{x-x_0}^2 \leq \Psi \quad \text{donc } \omega_0 = \frac{117}{2\sqrt{2} \cdot 5^3} \cdot \frac{N^2}{\Psi}$$

$$\text{d'où } \sigma_{\ddot{x}}^2 = (N^2)^3 \cdot \frac{3^7 \times 13^3}{5^{14} \times 2^6} \cdot \frac{1}{\Psi^3}$$

en faisant le rapport :

$$\frac{\sigma_{\ddot{x}}^2|_{t=0}}{\sigma_{\ddot{x}}^2|_{t=\infty}} = \frac{3^7 \cdot 13^3 \cdot 7^3 \cdot 2^{10}}{5^{14}} \approx 34562,3186$$

De là on peut dire qu'on a obtenu une diminution de la dispersion d'accélération de 34562 fois grâce au dispositif de localisation permettant d'avoir un  $\xi$  assez grand pour une telle densité spectrale

## VI CONCLUSION

1. La méthode de Wiener - Hopf est une méthode de synthèse globale qui tient compte du caractère aléatoire des entrées des systèmes asservis, mathématiquement, son application est soumise à un certain nombre de limitations et de difficultés se rattachant aux diverses propriétés de la méthode

les limitations — linéarité supposée par la méthode : en fait les systèmes asservis, les phénomènes non linéaires ont une grande importance qu'ils soient indésirables ou même introduits volontairement.

les difficultés — la méthode de Wiener - Hopf est une méthode statistique suppose des entrées caractérisées par des spectres de fréquences difficile à obtenir

— En second lieu la méthode donne des solutions par voie de synthèse mathématique ce qui peut poser de délicats problèmes d'interprétation ou de réalisation physique.

2. Cette théorie nous permet de trouver le système optimum de vibro-isolation à partir de la méthode de Wiener - Hopf et en tenant compte de la minimisation de la fonctionnelle  $C = \sigma_{x-x_0}^2 + \lambda \int \ddot{x}_1^2$  et en considérons comme connue les spectres de fréquences des excitations.

3. Dans le but de simplification des calculs et de possibilité d'interprétation des résultats et d'une éventuelle réalisation physique que nous avons déterminé notre système de vibro-isolation pour des valeurs de  $\tau$  assez élevées, dans le cas contraire c.-à-d pour des valeurs de  $\tau$  assez faibles nous aurions rencontré des difficultés de calcul et d'interprétation vu que certains résultats n'aurait pu être obtenue qu'à

l'aide d'un ordinateur, lequel n'est pas disponible au sein de notre école.

4. On notera que les résultats obtenus avec des valeurs de  $\xi$  assez élevé et cela pour les bruits étudiés sont fort intéressants vu l'amélioration relative qu'ils apportent comparé à un système ne possédant pas de dispositif de localisation, surtout le résultat obtenu dans le cas d'un système rigide pour une fonction d'auto-corrélation représentée par une sinusoïde pour laquelle on a obtenue une isolation parfaite.

5. Dans tous les cas d'excitations étudiées les paramètres du système de vibro-isolation décrit par  $\Phi(s)$  dépendent seulement de la structure de l'objet à vibro-isoler.

6. Dans tous les cas étudiés, la réalisation physique des systèmes de vibro-isolation ne peut être obtenue que par des systèmes actifs ou encore par simple question de sécurité elle pourra être obtenue par la combinaison de systèmes actifs et passifs, vu que les fonctions de transferts obtenues ne correspondent à aucune fonction de transfert connue pour des systèmes passifs donc il serait intéressant de poursuivre cette étude pour concevoir les différents éléments de ces systèmes de vibro-isolation.

7. Il serait intéressant de proposer une autre étude dans laquelle on développera des programmes sur ordinateur pour différentes valeurs de  $\xi$ , pour différentes excitations et pour deux types de systèmes (système rigide et système dynamique) afin d'obtenir les fonctions de transferts optimum, les dispersions d'accélération

et d'écart<sup>s</sup> ( $\sigma_{\dot{x}_1}^2$  et  $\sigma_{x-x_0}^2$ ) pour chaque valeur de  $\mathcal{E}$  et cela pour une excitation donnée, et un système (rigide ou dynamique) choisi, cela nous permettra d'établir des abaques donnant les dispersions d'écart<sup>s</sup> et d'accélération<sup>s</sup> en fonction de  $\mathcal{E}$ , de  $\lambda$  (paramètre de Lagrange), des paramètres d'excitation et de la structure de l'objet à vibro-isoler.

8. La théorie ainsi développée concerne en particulier la vibro-isolation de systèmes à paramètres discrets et pourra peut-être être complétée par la vibro-isolation de systèmes à paramètres continus.

## BIBLIOGRAPHIE

1. G.C. Newton, Jr., L.A. Gould, J.F. Kaiser  
"Analytical Design of Linear Feedback Controls"  
New York, John Wiley & Sons, Inc. London 1957
2. V.V. Solodovnikov  
"Dynamique Statistique des Systemes Lineaires de  
Commande Automatique".  
Dunod. Paris 1965
3. Jean Morlon  
"Isolation antivibratoire et antichocs"  
Technique de l'Ingenieur ... article B595
4. Marek KSIAZEK et C. AHRIKENCHEIMH.  
"Vibro-Isolation optimum Des Excitations Stochastiques"  
Promotion ENPA Juin 83.

