REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENNE »

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Génie - Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

VIBRO-ISOLATION OPTIMUM DES EXCITATIONS STOCHASTIQUES

Promoteur :
Mr Marek KSIAZEK

Etudiant :
Chérif AHRIKENCHEIKH

PROMOTION JUIN 1983

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENNE »

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département Génie - Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDES

»o«

THEME

VIBRO-ISOLATION OPTIMUM DES EXCITATIONS STOCHASTIQUES

Promoteur :
Mr Marek KSIAZEK

Etudiant :
Chérif AHRIKENCHEIKH

PROMOTION JUIN 1983

DEDICACES

A la memoire de ma Grand-mère dont le souvenir restera vivant en moi, elle qui souhaitait me voir finir avec succés cette étape d'études et n'eût pas le bonheur de vivre son éspoir.

I wigad yeţwarzen deg iles,
I wigad iţţwaqnen ɣef tideţ,
I tdukwam yeččuṛen ţ-ţifexsa,
I warrac g-gwassa, irgazen uzekka.

Chérif (Crif)

REMERCIEMENTS

je tiens ici à exprimer ma profonde gratitude à monsieur Marek Ksiazek, mon promoteur, pour son aide continue et efficace et pour avoir contribué à sa manière à la réalisation de ce modeste travail.

Que les professeurs et assistants ayant contribué de loin ou de près à ma formation daignent trouver, ici, ma sincère reconnaissance.

Il en est de même à tous (tes) les amis (es) qui m'ont porté leur sincère aide.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le probleme de vibrations est rencontré dans plusieurs domaines.

Parmis ces vibrations, celles à caractère aleatoire ne sont que plus nuisibles et constituent un domaine d'etude des plus serieux.

L'analogie electrique - mecanique ne fait qu'affirmer cette hypothèse; les bruits thermiques dans les circuits, les vibrations dûes aux problèmes de stabilité des oscillateurs locaux et des amplificateurs de puissance, constituent bien des vibrations nuisibles à les quelles il faut remedier.

Pour ce faire, dans l'un comme dans l'autre domaine, on cherche des methodes efficaces pour isoler ces vibrations.

Des methodes generales ont été exposées et trouvent leur application dans chacun des deux domaines, determinant ainsi des systemes de vibro-isolation appropriés.

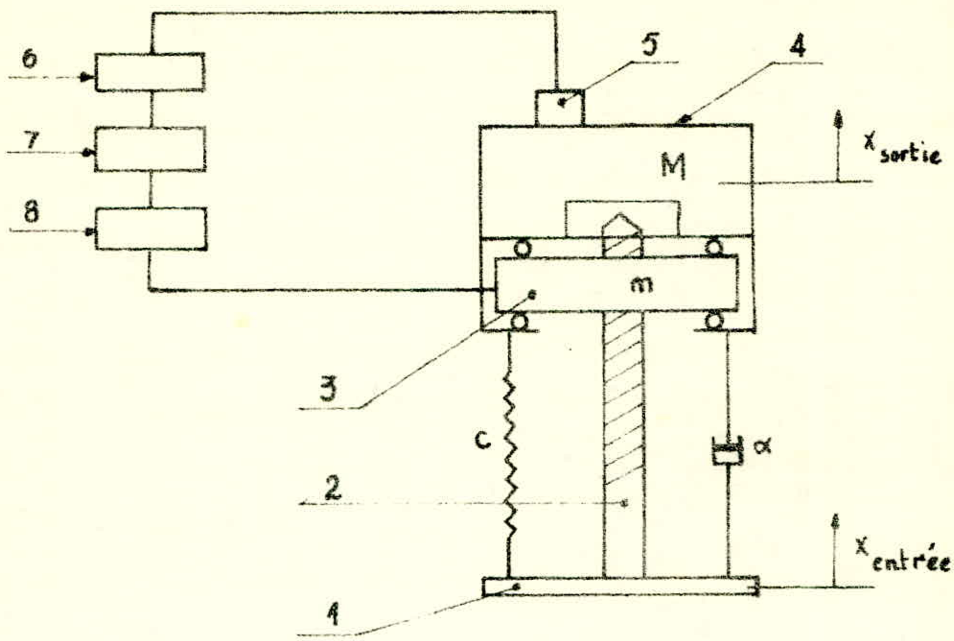
En mecanique, la vibro-isolation est assurée par trois types de systemes :

1. Les systemes passifs qui sont les plus simples. Il constituent la categorie des systemes de vibro-isolation qui accomplissent leur fonction par simple action de ressorts et d'amortisseurs bien appropriés.
2. Les systemes actifs qui agissent par l'action de servomecanismes, ces derniers jouissent de plusieurs propriétés dont :
   - Amplification de puissance depuis un signal basse puissance vers un signal de puissance plus elevée.
   - Independance vis à vis du milieu exterieur (c'est à dire, resistance aux perturbations apportées par le milieu exterieur).
   - Adjonction d'un retour.

   L'alimentation en energie est assurée par des sources extérieures independantes du systeme de vibration.

   On distingue des servo-mecanismes de type pneumatique avec retour, de type electro-hydraulique avec retour electrique, travaillant seul.
3. Combinaison des deux systemes actifs et passifs.

Exemple d'un systeme de vibro-isolation actif possedant un systeme passif, avec un dispositif de changement de la forme du mouvement :



1. Fondation souple (mouvement de translation)
2. Vis
3. Disque changeant le mouvement de translation en un mouvement de rotation de la masse reduite m.
4. Objet à vibro-isoler.
5. Capteur mesurant une grandeur mecanique
6. Amplificateur
7. Mecanisme executif
8. Dispositif changeant le signal (7) en un mouvement de rotation du disque (3)

L'objet de ce memoire est de citer une methode d'etude de la vibro-isolation, conçue pour resoudre les problemes les plus frequents des vibrations à caractère stochastique, categorie de problemes qui, on peut dire, enveloppe la quasi-totalité des cas rencontrables.

Pour ce faire, il est utile de rappeler des notions de statistiques qu'il est indispensable de connaitre avant d'aborder l'etude de systemes de vibro-isolation proprement dite.

Rappelons que dans cette categorie de problemes, il existe des cas dont l'etude necessite un appareil mathematique relativement simple. c'est surtout dans cette optique que l'on optera pour l'etude de systemes de vibro-isolation lineaires stationnaires, qui constituent une approximation d'une vaste classe de systemes utilisés dans les applications.

Ainsi, le plan de travail sera decoupé en trois parties :
- La première conserncra les notions de statistiques.
- La deuxieme conserncra les systemes de transmission de signaux et leur specification.
- La troisieme conserncra la vibro-isolation proprement dite.

Dans chacune des 3 parties, on utilisera des notions de mathematiques jugées connues et, dans le cas echeant, faciles à trouver dans les ouvrages.

PREMIERE PARTIE

1.4 : Densités de probabilité pour des processus stochastiques :

Pour caracteriser les proprietés statistiques des processus stochastiques, il nous faut introduire la notion de probabilité.

Considerons, N realisations d'un processus stochastiques, soient $\xi^{(1)}(t)$, $\xi^{(2)}(t)$, $\xi^{(3)}(t)$, ..., $\xi^{(N)}(t)$.

Supposons que "n_1" de ces realisations, à un instant donné $t = t_1$, aient des valeurs inferieures à x_1.

Le rapport n_1/N, quand N tend vers l'infini, est la Probabilité pour que la valeur de $\xi(t)$, à l'instant $t = t_1$, soit plus petite que x_1, et on note :

$$P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\}.$$

Generalement cette probabilité depend du temps t_1 aussi bien que de la valeur x_1 ; elle est donc une fonction de deux variables. On note cette fonction :

$$F_1(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1\},$$

et on l'appelle, Fonction de Repartition des probabilités du 1er ordre, ou Fonction de Repartition tout court.

Cette dernière sert à definir la densité de probabilité :

$$w_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1} \qquad (1^{er}\ \text{ordre})$$

De manière analogue, en passant à un grand nombre n de variables, on aura la fonction de repartition :

$$F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n ; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\{\xi(t_1) \leqslant x_1, \ldots, \xi(t_n) \leqslant x_n\}$$

et la densité de probabilité du nieme ordre :

$$W_n(x_1, x_2, \ldots, x_n ; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n ; t_1, t_2, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

Plus n est grand, plus la description du processus stochastique est complète.

1.5 : Moyennes statistiques et temporelles des processus stochastiques

Les processus stochastiques ne peuvent être connus en detail. Pour les caracteriser, on evalue leurs moyennes des differents ordres

1.5.1 : Moyennes statistiques (Moyennes d'ensemble) :

a) Valeur moyenne ou Esperance mathematique :
(Moment du 1er ordre)

$$\overline{\xi(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 W_1(x_1, t_1)\, dx_1 .$$

b) Moyenne quadratique (Moment initial du 2e ordre) :

$$\overline{\xi^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\, W_1(x_1, t_1)\, dx_1 .$$

c) Fonction d'auto-correlation (Moment initial mixte du 2e ordre) :

$$B_{\xi\xi}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, W_2(x_1, x_2 ; t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2$$

d) Fonction de correlation mutuelle (Moment initial mixte du 2e ordre) :

$$B_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \overline{\xi(t_1)\,\eta(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2\, W_2(x_1, y_2 ; t_1, t_2)\, dx_1\, dy_2$$

e) Variance ou Dispersion (Moment centré du 2e ordre) :

$$\sigma^2(t_1) = M_2\left\{\xi^2(t_1)\right\} = \overline{\left[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}\right]^2} = \overline{\xi(t_1)^2} - \left[\overline{\xi(t_1)}\right]^2$$

f) Fonction de covariance (Moment centré mixte du 2e ordre) :

* Fonction d'auto-covariance :

$$K_{\xi\xi}(t_1, t_2) = M_{12}\left\{\xi(t_1), \xi(t_2)\right\} = \overline{\left[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}\right]\left[\xi(t_2) - \overline{\xi(t_2)}\right]}$$

* Fonction de covariance mutuelle :

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M_{12}\left\{\xi(t_1), \eta(t_2)\right\} = \overline{\left[\xi(t_1) - \overline{\xi(t_1)}\right]\left[\eta(t_2) - \overline{\eta(t_2)}\right]}$$

1.5.2 : Moyennes temporelles :

Dans ce cas, parmi l'ensemble des réalisations de $\xi(t)$, on considère une réalisation particulière $\xi^{(k)}(t)$ et on fait sa moyenne dans le temps, contrairement au cas des moyennes d'ensemble où l'on fait la moyenne au sens des probabilités sur l'ensemble des réalisations possibles de $\xi(t)$ en des instants $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ choisis arbitrairement.

a) Valeur moyenne :

$$\widetilde{\xi(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\, dt .$$

La valeur moyenne représente la composante continue du processus.

b) Moyenne quadratique temporelle :

$$\widetilde{\left[\xi^{(k)}(t)\right]^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[\xi^{(k)}(t)\right]^2 dt .$$

La moyenne quadratique temporelle représente la puissance du processus sur une charge unité.

c) Fonction d'auto-corrélation temporelle :

$$R^{(k)}_{\xi\xi}(t_1 - t_2) = \widetilde{\xi^{(k)}(t_1 + t) \cdot \xi^{(k)}(t_2 + t)}$$

$$R^{(k)}_{\xi\xi}(t_1 - t_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t_1 + t) \cdot \xi^{(k)}(t_2 + t)\, dt$$

d) Fonction de corrélation mutuelle temporelle :

$$R^{(k)}_{\xi\eta}(t_1 - t_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t_1 + t) \cdot \eta^{(k)}(t_2 + t)\, dt .$$

2. Processus mixtes

Dans beaucoup d'applications pratiques, on ajoute à un processus certain $s(t)$ un processus aléatoire $\xi(t)$ (par exple, un bruit) :

$\eta(t_1) = \xi(t_1) + s(t_1)$,

$s(t_1)$ etant une constante, on peut avoir la relation entre les densités de probabilités $W(y,t_1)$ de $\eta(t_1)$ et $W(x,t_1)$ de $\xi(t_1)$;

$$\left.\begin{array}{l} W(y,t_1) = W(x,t_1) \\ \text{comme } y = x + s(t_1) \end{array}\right\} \Rightarrow W(y,t_1) = W\left(y - s(t_1)\, ;\, t_1\right)$$

3. Processus stationnaires

Les processus stationnaires sont des processus dont les proprietes statistiques sont invariantes par rapport à un changement arbitraire de l'origine du temps.

Ainsi, on a :

$$W_n(x_1,x_2,\ldots,x_n\,;\,t_1,t_2,\ldots,t_n) = W_n\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\,;\,(t_1+\tau),(t_2+\tau),\ldots,(t_n+\tau)\right)$$

Les processus qui ont cette propriété sont appelés processus stationnaires au sens strict ou etroit.

Ainsi, on remarque que la densite du 1er ordre W_1 ne depend pas du temps et que celle du 2e ordre ne depend que de l'intervalle de temps $\tau = t_2 - t_1$.

De meme :

* $\overline{\xi(t_1)} = m_1\{\xi(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 W_1(x_1)\, dx_1$ ne depend pas du temps.

* $\sigma^2 = M_2\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[x - \overline{\xi(t)}\right]^2 W_1(x)\, dx$ ne depend pas du temps.

* $\overline{\xi(t_1)\xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, W_2(x_1,x_2\,;\,t_2-t_1)\, dx_1\, dx_2$,

ne depend que de la difference $\tau = t_2 - t_1$.

Il en est de meme de la fonction de covariance.

On peut ainsi considerer comme processus stationnaires les processus qui satisfont aux faits que la moyenne et la variance ne dependent pas du temps et que les fonctions d'auto-correlation et de covariance ne dependent que de l'intervalle de temps $\tau = t_2 - t_1$.

On pourrait dire ceci vu que, dans beaucoup d'applications prati-ques, on a affaire qu'à des moments du 2e ordre.

Les processus qui satisfont à cette dernière définition sont dits stationnaires au sens large, ou stationnaires jusqu'au 2e ordre.

4. Classification des processus stochastiques

4.1 : Processus aleatoire pur :

Un processus aleatoire est dit pur, lorsque les valeurs successives ξ ne dependent absolument pas les unes des autres

Pour ces processus, on a :

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^{n} W_1(x_k, t_k)$$

Les processus continus purs constituent un cas limite qu'on ne rencontre jamais en realité. Dans les cas physiquement realisés, $\xi(t_1)$ et $\xi(t_2)$ sont toujours correlés si t_1 est trés voisin de t_2.

4.2 : Processus de Markov simples :

Les processus de Markov simples sont les processus pour lesquels la valeur x_n à l'instant t_n depend des valeurs precedentes $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ; t_1, t_2, \dots, t_{n-1})$ par l'intermediaire unique de la valeur prise (x_{n-1}, t_{n-1}), c'est à dire :

$$W_n(x_n ; t_n / x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = W_n(x_n ; t_n / x_{n-1} ; t_{n-1})$$

où $t_1 \leqslant t_2, \dots, \leqslant t_n$.

Ainsi :

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) = \omega_1(x_1, t_1) \cdot \prod_{k=2}^{n} \omega_2(x_k ; t_k / x_{k-1} ; t_{k-1})$$

avec la condition $n \geqslant 2$

On observe que si l'on en connait la densité de probabilité du 2e ordre, ce processus est completement decrit.

4.3 : Processus ergodiques :

Pour traiter un probleme de transmission d'un processus, dans beaucoup de cas, l'experience ne dispose pas de toutes les realisations possibles $\xi(t)$ du processus, mais seulement d'une realisation particulière $\xi^{(k)}(t)$ et on ne peut donc deduire que des moyennes temporelles, mais pas les moyennes statistiques.

Il est donc important d'etablir une relation entre les valeurs deduites theoriquement à priori, conformement aux methodes statistiques, et les valeurs correspondantes deduites par voie experimentale, c'est à dire à posteriori, en observant en fonction du temps une realisation particulière.

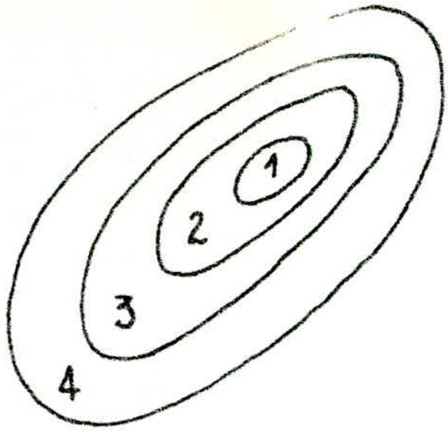
L'ensemble des processus pour lesquels les moyennes statistiques sont egales aux moyennes temporelles s'appelle Ensemble Ergodique.

La condition que doit respecter un processus $\{\xi^{(k)}(t)\}$ pour qu'il appartienne à cet ensemble Hypothèse Ergodique.

On etablit que pour qu'un processus stochastique soit ergodique, il faut que la condition de stationnarité au sens strict soit remplie car si elle ne l'etait pas, les moyennes statistiques, aux differents instants $t_1, t_2, \dots, t_n$, auraient generalement des valeurs differentes qui ne pourraient pas être rendues egales à la moyenne temporelle.

De meme, si $\xi(t)$ est un processus stationnaire ergodique et τ une variable aleatoire, le processus $\eta(t) = \xi(t) + \tau$ n'est ergodique que si τ est une constante.

En resumé, les processus stochastiques sont classés comme suit :



1. Ergodiques.
2. Stationnaires au sens strict.
3. Stationnaires au sens large.
4. Stochastiques.

Ainsi, pour les processus stationnaires ergodiques, on a les relations :

* Valeur moyenne :

$$\overline{\xi(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, W(x)\, dx = \tilde{\xi}(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi(t)\, dt$$

* Moyenne quadratique :

$$\overline{\xi^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, W(x)\, dx = \tilde{\xi}^2(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^2(t)\, dt$$

* Fonction d'auto-correlation :

$$R(\tau) = \overline{\xi(t_1)\, \xi(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2\, W_2(x_1, x_2\,;\, t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi(t)\, \xi(t+\tau)\, dt$$

avec $t_2 - t_1 = \tau$.

* Fonction de correlation mutuelle :

$$\overline{\xi(t_1)\, \eta(t_2)} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2\, W_2(x_1, y_2\,;\, t_1, t_2)\, dx_1\, dy_2 =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi(t)\, \eta(t+\tau)\, dt$$

* Variance (Dispersion) :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - \overline{\xi(t)} \right]^2 W(x)\, dx = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left[\xi(t) - \xi(t) \right]^2 dt$$

<u>Propriétés de la fonction d'auto-corrélation :</u>

Pour les processus stationnaires ergodiques, la fonction d'auto-corrélation temporelle est égale à la fonction d'auto-corrélation statistique

$$B(\tau) = R(\tau) = R(t_2 - t_1) = \overline{\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)} = \widetilde{\xi^{(k)}(t_1 + t) \cdot \xi^{(k)}(t_2 + t)}$$

a) Lorsque τ tend vers l'infini, la liaison entre les variables aléatoires $\xi(t_1)$ et $\xi(t_2)$ devient de plus en plus faible et, pour τ très grand, ces variables deviennent indépendantes. Alors :

$$\overline{\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)} = \overline{\xi(t_1)} \cdot \overline{\xi(t_2)} = a^2$$ où a est la valeur moyenne de $\xi(t)$.

Donc $\lim_{\tau \to \infty} R(\tau) = a^2$.

Quand τ tend vers l'infini, $R(\tau)$ tend asymptotiquement vers a^2, soit de manière monotone, soit avec des oscillations autour de la valeur a^2.

b) Pour $\tau = 0$, $R(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt$

La valeur de la fonction d'auto-corrélation à l'origine est égale à la puissance du processus.

La variance sera donc :

$$\sigma^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt - a^2 = R(0) - R(\infty)$$

c) La fonction d'auto-corrélation est paire : $R(\tau) = R(-\tau)$

d) $\forall \tau$, $R(0) \geq R(\tau)$.

4.4 : Processus normal ou Gaussien :

Un processus stochastique est dit normal ou Gaussien, si l'ensembles de valeurs $[x(t_1), \ldots, x(t_n)]$, pour n quelconque et pour $t_1, t_2, \ldots, t_n$ arbitrairement choisis dans le domaine du temps, constitue un vecteur aleatoire avec distribution normale.

Pour de tels processus, les proprietes statistiques sont determinées lorsqu'on connait leurs fonctions de correlation, puisque le densité de probabilité est :

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right],$$

où σ^2 et a^2 se determinent à partir de la fonction d'auto-correlation comme il a été vu dans les proprietés de la fonction d'auto-correlation.

5. Relations supplémentaires

5.1 : Definition de la densité spectrale energetique :

Soit $x(t)$ un processus aleatoire. Sa puissance moyenne est donnée par :

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)\, dt. \qquad (1)$$

La transformée de Fourier de $x(t)$ est :

$$X(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{j\omega t}\, dt \qquad \text{d'où} \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega.$$

(1) peut donc s'ecrire de la façon :

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-j\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega\right] dt$$ et en

interchangeant les deux integrations on aura :

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{1}{2\pi} X(-j\omega)\, d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{X(j\omega)} \quad , \text{ soit,}$$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega \qquad (2)$$

avec $S(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{|X(j\omega)|^2}{2T}$

La relation (2) montre que $S(\omega)$ a la dimension d'une en
Cette fonction est appelée DENSITE SPECTRALE ENERGETIQUE -
processus.

5.2. Relation entre la fonction d'auto-correlation et la densité spectrale :

On demontre que $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$, c'est à dire que la densité spectrale est egale à la transformée de Fourier de la fonction d'auto-correlation.

5.3 : Theoreme de Parseval - Densité spectrale mutuelle

Soient deux processus aleatoires $x(t)$, $y(t)$ et $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ leurs transformées de Fourier respectives.

Alors : $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega)\, Y(j\omega)\, d\omega .$$

On peut donc ecrire, d'aprés ce theorème :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, y(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X^*(j\omega)\, Y(j\omega)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{X^*(j\omega)\, Y(j\omega)}{2T}\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega)\, d\omega$$

La fonction $S_{xy}(\omega)$ est la densité spectrale mutuelle.

5.4 : Relations de WIENER - KHINCHIN :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau \, d\tau .$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega) \cos\omega\tau \, d\omega .$$

Ces deux relations montrent que la fonction d'auto-correlation et la densité spectrale se correspondent dans la transformée de Fourier à la manière de la reponse impulsionnelle et la fonction de Transfert, qu'on verra plus loin.

5.5 : Densité spectrale energetique et fonction d'auto-correlation des derivées d'un processus stochastique :

On demontre que :

* $S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$

* $S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega)$

* $R_{\dot{x}}(\tau) = -R''_x(\tau)$, la fonction d'auto-correlation de la derivée du processus $x(t)$ est egale, au signe près, à la derivée seconde de la fonction d'auto-correlation de $x(t)$.

* $R_{\ddot{x}}(\tau) = R^{(4)}_x(\tau)$, la fonction d'auto-correlation de la derivée seconde du processus $x(t)$ est egale à la 4e derivée de celle relative au processus $x(t)$.

Remarque :

La transformée de Fourier de $\dot{x}(t)$ est $j\omega X(j\omega)$.

DEUXIEME PARTIE

II. TRANSFORMATIONS LINEAIRES
(de processus stochastiques stationnaires)

1. Systemes lineaires stationnaires et leur specification

1.1 : Systemes lineaires stationnaires :

D'une façon generale, un systeme transforme un signal ou un processus stochastique $x(t)$, appliqué à son entrée, en un autre processus $y(t)$ qui apparait à sa sortie.

On peut associer à tout systeme un operateur Ψ fonctionnel qui transforme l'espace X de $x(t)$ d'entrée, dans l'espace Y du processus $y(t)$ de sortie.
Si l'operateur est lineaire, on dit que le systeme associé est lineaire.
Si l'operateur est parametrique ou non lineaire, on dit que le systeme associé est parametrique ou non lineaire.

$x(t)$ et $y(t)$ sont reliés par l'intermediaire de l'operateur Ψ de la façon :

$$\Psi\left\{x(t)\right\} = y(t) .$$

Ψ est dit lineaire, ainsi que le systeme associé, si :

$$\begin{cases} \Psi\left\{x_1(t) + x_2(t)\right\} = y_1(t) + y_2(t) & (1) \\ \text{et} & \\ \Psi\left\{\lambda x(t)\right\} = \lambda \Psi\left\{x(t)\right\} & (2) \end{cases}$$

(1) : La reponse du système, lorsqu'on applique à son entrée une somme de signaux, est égale à la somme des reponses qu'on aurait obtenues si chaque signal avait été appliqué separément.
(2) : Le signal de sortie devient λ fois plus grand si le signal d'entrée devient λ fois plus grand.

Le système linéaire est dit stationnaire ou invariant dans le temps, c'est à dire que Ψ est invariant dans le temps, si :

$$\Psi\left\{x(t+\tau)\right\} = y(t+\tau)$$, c'est à dire que la transformation est indépendante du temps.

Si l'on pose que le signal entrant est représenté à l'aide d'une somme finie de composantes :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k v_k(t) ,$$

où $v_k(t)$ forme un système de fonctions orthonormées, et que l'opérateur associé au système est connu et donné par la matrice

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \cdots & \Psi_{1n} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \cdots & \Psi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{n1} & \Psi_{n2} & \cdots & \Psi_{nn} \end{bmatrix} ,$$

le signal sortant du système peut être déterminé si l'on connaît les composantes b_k :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k v_k(t) .$$

Les composantes sont données par le système :

$$(1) \quad \begin{cases} \Psi_{11} a_1 + \Psi_{12} a_2 + , \ldots , + \Psi_{1n} a_n = b_1 \\ \Psi_{12} a_1 + \Psi_{22} a_2 + , \ldots , + \Psi_{2n} a_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_{n1} a_1 + \Psi_{n2} a_2 + , \ldots , + \Psi_{nn} a_n = b_n \end{cases}$$

Note : Cette méthode de calcul est générale et peut être appliquée aussi pour les systèmes paramétriques ou non linéaires à condition de connaître les composantes Ψ_{ki} de l'opérateur. Toutefois, dans le cas de systèmes linéaires, la situation est très simplifiée car la réponse de chaque composante du signal à l'entrée peut être calculée séparément, et la réponse totale obtenue par l'addition des réponses individuelles.

Les systemes lineaires stationnaires jouent un rôle tres important dans les problemes de transmission de signaux ou de processus stochastiques. La raison en est que ces systemes peuvent être etudiés à l'aide d'un appareil mathématique relativement simple, et que les systemes lineaires constituent une approximation d'une vaste classe de systemes utilisés dans l'application.

1.2 : Specification des systemes lineaires stationnaires :

A un systeme donné, on peut associer plusieurs operateurs, equivalen[ts] entre eux, qui peuvent le specifier.

On se propose dans cette etude à considerer deux cas :

- L'operateur est determiné dans le domaine de la frequence comple[xe] (la synthese du signal est faite à l'aide de fonctions exponentielles).
- L'operateur est determiné dans le domaine du temps. (la synthèse du signal est faite à l'aide de fonctions δ "DELTA").

1.2.1 : Specification de l'operateur Ψ dans le domaine des frequen[ces] via fonction de transfert.

Supposons les fonctions $v_k(t)$ de la forme : $v_k(t) = e^{k p_0 (t)}$

Puisque Ψ est lineaire, toutes les composantes Ψ_{ik} pour $i \neq k$ sont nulles ; soit :

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & 0, \dots, 0 \\ 0 & \Psi_{22}, \dots, 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0, \dots, \Psi_{nn} \end{bmatrix}$$

Le systeme d'equations (1) se resume donc à : $\Psi_{kk} \cdot a_k = b_k$, pour $k = 1, 2, \dots, n$, ce qui veut dire que l'amplitude d'un signal exponentiel de frequence complexe $k p_0$ est transformée en $\Psi_{kk}\, a_k$ après la traversée du système.

On nomme ainsi $\Psi_{kk} = \Psi_k = H(k p_0)$, coefficient de transfert.

La reponse sera donc :

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} H(kp_0)\, a_k\, e^{kp_0(t)} \qquad (2)$$

Si l'on passe aux transformées de Fourier, on sait que :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(p)\, e^{pt}\, dp \quad \text{et} \quad X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt$$

Dans ce cas par passage à la limite, si $k \to \infty$ et $kp_0 \to p$, la relation ( ) devient :

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) \quad \text{soit}, \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} H(p)\, X(p)\, e^{pt}\, dp}$$

Cette dernière relation donne la reponse du système si l'on connait le signal ou le processus appliqué à son entrée.

La fonction $H(p)$ est appelée Fonction de Transfert du Systeme.

1.2.2 : Specification de l'operateur Ψ dans le domaine du temps. Integrale de DUHAMEL.

Utilisant l'une des propriétés de la fonction δ, on peut ecrire l'entrée et la sortie de la façon :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \qquad (2)$$

Ecrivons la relation de transformation :

$$\Psi(\tau)\, x(\tau) = y(\tau),$$

soit $\Psi(\tau)\, \delta(t-\tau)\, x(\tau) = y(\tau)\, \delta(t-\tau)$

on pose $\Psi(\tau)\, \delta(t-\tau) = h(t-\tau)$ (3)

Donc $y(\tau)\, \delta(t-\tau) = h(t-\tau)\, x(\tau)$

Portons cette expression dans l'integrale (2) :

Donc, $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$, (4)

soit , après changement de variable :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \qquad \text{Integrale de DUHAMEL}$$

La fonction $h(t)$, definie par la relation (3) comme étant la transformée de la fonction δ, est appelée REPONSE IMPULSIVE ou FONCTION de PONDERATION parcequ'elle pondère les valeurs du signal entrant dans l'integrale de la relation (4).

1.2.3 : Relation entre H(p) et h(t) :

Puisque $H(p)$ et $h(t)$ specifient le meme systèmo, la connaissance de $H(p)$ (avec son domaine de definition) determine $h(t)$ de manière unique, et inversement.

Soit $D(p)$ le spectre complexe (transformée de Fourier) de la fonction δ.

$$D(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-pt}\, dt = 1$$

La reponse impulsive peut être determinée, par l'intermediaire de la fonction de transfert, de la façon :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} D(p)\, H(p)\, e^{pt}\, dp \text{ , comme } D(p) = 1 \text{, donc}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(p)\, e^{pt}\, dp \quad \text{et} \quad H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-pt}\, dt$$

c'est à dire que $H(p)$ est la transformée de Laplace de $h(t)$.

2. Systemes stables et realisables .

La stabilité et la possibilité de realiser des systèmes lineaires à parametres constants peuvent être definies dans le domaine du temps comme dans celui des frequences.

2.1 : Systemes stables :

Un systeme est dit stable si à tout signal borné appliqué à son entrée correspond à sa sortie un signal borné.

a) Dans le domaine du temps, la condition necessaire et suffisante pour qu'un systeme soit stable est que sa fonction de ponderation soit absolument integrable :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \qquad (1),$$

Ce qui implique que sa reponse à l'impulsion unité doit s'annuler quand t tend vers l'infini.

b) Dans le domaine des frequences, la condition de stabilité definie par la relation (1) requiert que le domaine de convergence de la fonction de transfert $H(p)$ contienne l'axe imaginaire $\sigma = 0$ $(p = j\omega)$;

$$|H(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,|e^{-pt}|\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt \quad \text{et pour } \sigma = 0,$$

$$|H(p)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt \leq +\infty$$

2.2 : Systemes realisables :

Un systeme est dit realisable si l'apparition d'un signal à sa sortie ne peut preceder l'application d'un signal à son entrée. (L'effet ne precede pas la cause).

a) Dans le domaine du temps, un systeme est realisable si :

$h(t) = 0$ pour $t < 0$

b) Dans le domaine des fréquences, la condition pour qu'un système soit réalisable est que la fonction de transfert $H(p)$ ait pour domaine de convergence le demi-plan défini par $Re\{p\} > \sigma_0$, où σ_0 est un nombre fini.

Dans ce cas, les singularités de $H(p)$ se trouvent à gauche de la droite $p = \sigma_0 + j\omega$, de telle sorte que :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} H(p)\, e^{pt}\, dp \quad \text{est nulle pour } t < 0$$

2.3 : Systèmes physiquement réalisables :

Si un système est à la fois stable et réalisable, il est dit physiquement réalisable.

Les conditions que doit remplir un tel système sont :

a) Dans le domaine du temps :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty \quad \text{et} \quad h(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

b) Dans le domaine des fréquences :

Critère de PALEY-WIENER :

Si l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\operatorname{Log}|H(j\omega)||\, d\omega}{1+\omega^2}$ est bornée, soit $I < +\infty$, alors $|H(j\omega)|$ est le module de la fonction de transfert d'un système physiquement réalisable.

Si $I < +\infty$, alors $|H(j\omega)|^2 = H^*(j\omega)\, H(j\omega)$ peut être mis en produit de facteurs et il est possible que $H(j\omega)$ soit choisi de telle sorte que $H(p)$ ne contienne pas de pôles dans la partie droite du plan complexe $Re\{p\} > 0$.

La fonction de transfert doit avoir pour domaine de convergence tout le demi-plan $Re\{p\} \geq 0$, c'est à dire qu'elle doit être analytique dans tout le demi-plan $Re\{p\} > 0$ et ne pas avoir de singularités sur l'axe imaginaire.

3- Specification d'une fonction de transfert
(par ses pôles et ses zeros)

Une vaste classe de systemes ont pour fonction de transfert une fraction rationnelle de p.

$$H(p) = A \frac{p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0} \qquad (1)$$

En faisant apparaitre les pôles et les zeros de la fonction de transfert, on peut ecrire :

$$H(p) = A \frac{(p-z_1)(p-z_2)\cdots(p-z_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)} \qquad (2)$$

Les coefficients a_k, b_k etant reels, par consequent, dans la relation (2), si les pôles et les zeros sont complexes, ils doivent s'associer en paires conjuguées.

On etablit les conclusions suivantes :

* Les pôles d'une fonction de transfert $H(p)$ d'un systeme stable doivent se trouver dans le demi-plan de gauche.
* Si la fonction de transfert $H(p)$ a des pôles sur l'axe imaginaire, ils doivent être simples.
* Le nombre de zeros de la fonction de transfert $H(p)$ d'un systeme stable doit etre inferieur, ou tout au plus egal, au nombre de pôles.

3.1 : Module et phase d'une fonction de transfert :

$$H(p) = A \frac{(p-z_1)(p-z_1^*)\cdots}{(p-p_1)(p-p_1^*)\cdots} \qquad (1)$$

Pour calculer cette fonction de transfert en regime permanent, on opère la substitution $p = j\omega$.

$$H(j\omega) = A \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_1^*)\dots}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_1^*)\dots}$$

Si l'on pose : $j\omega - z_1 = Z_1 e^{j\alpha_1}$; $j\omega - p_1 = P_1 e^{j\beta_1}$; ...
$j\omega - z_1^* = Z_1' e^{j\alpha_1'}$; $j\omega - p_1^* = P_1' e^{j\beta_1'}$; ...

on obtient : $$H(j\omega) = A \frac{Z_1 Z_1' \dots}{P_1 P_1' \dots} e^{j(\alpha_1 + \alpha_1' + \dots - \beta_1 - \beta_1' - \dots)} = |H(j\omega)| e^{j\phi}$$

où $|H(j\omega)|$ est le module de la fonction de transfert et ϕ sa phase.

Si les zeros sont situés dans le demi-plan de gauche, la phase de la fonction de transfert à la valeur minimale.

Si les zeros sont situes dans le demi-plan de droite, la fonction de transfert est à phase non minimale.

3.2 : Classification des fonctions de transfert selon l'emplacement de leurs pôles et de leurs zeros :

D'après la formule (1) du paragraphe 3.1, on voit que la fonction de transfert $H(p)$ est completement definie lorsqu'on connait la position de ses zeros et de ses pôles.

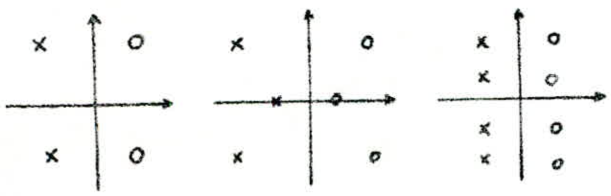
De même, la fonction de transfert peut être à phase minimale ou non minimale suivant la position des zeros, pour un même module.

Notons que dans le cas où la phase est minimale, il y a une relation biunivoque entre le module et la phase de la fonchon de transfert :

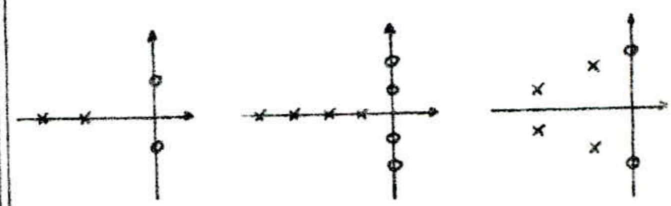
$$\ln |H(j\omega)| = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u)}{u - \omega} du .$$

Les fonctions de transfert du type "passe-tout" sont de phase non minimale et ont des zeros symetriques des pôles. Dans ce cas, le module est constant et la phase variable de sorte que ces fcts

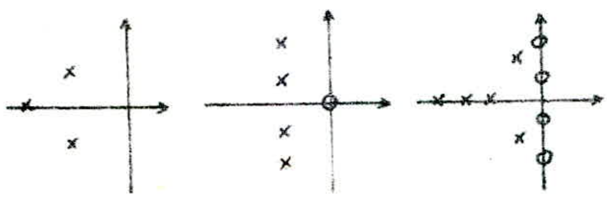
de transfert peuvent etre utilisées pour corriger les caracteristiques de phase.
Ainsi, suivant la position des pôles et des zeros, on distingue les fonctions de transfert suivantes :



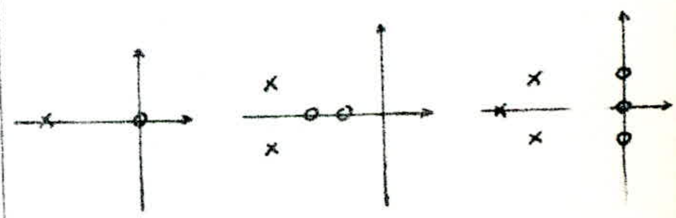
Fonctions de transfert " passe-tout "



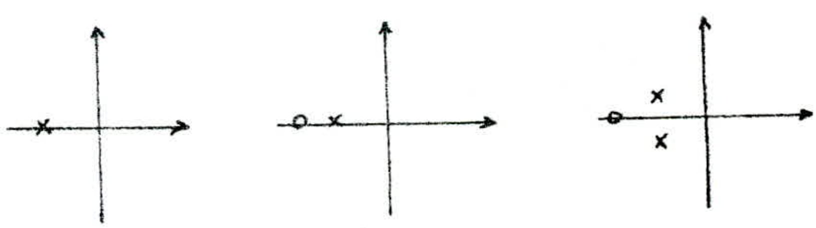
Fonctions de transfert " coupe bande "



Fonctions de transfert " passe-bande "



Fonctions de transfert " passe-haut "



Fonctions de transfert " passe-bas "

x : Pôles

o : zeros.

4. Relation entre $R_{entree}(\tau)$ et $R_{sortie}(\tau)$ et entre $S_{entree}(\omega)$ et $S_{sortie}(\omega)$.

Soit un systeme lineaire de reponse impulsionnelle $k(t)$ et de fonction de transfert $\Phi(j\omega)$.

A l'entrée de ce systeme est appliqué un signal aleatoire stationnaire $m(t)$, de fonction d'auto-correlation $R_m(\tau)$ et densité spectrale $S_m(\omega)$, et nous desirons calculer la fonction d'auto-correlation $R_x(\tau)$ et la densité spectrale $S_x(\omega)$ de son signal de sortie $x(t)$.

Nous avons : $$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)\,x(t)\,dt ,$$

On sait que le signal de sortie est relié à celui d'entrée par la relation :
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} m(t-\lambda)\,k(\lambda)\,d\lambda ,$$

Donc, en permutant l'ordre des integrations, on a :

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\int_{-T} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta\, k(\eta)\,k(\lambda)\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} m(t+\tau-\eta)\,m(t-\lambda)\,dt\right\}.$$

Nous remarquons que :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} m(t+\tau-\eta)\,m(t-\lambda)\,dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} m(t+\tau+\lambda-\eta)\,m(t)\,dt =$$
$$= R_m(\tau+\lambda-\eta)$$

On deduit la relation entre R_x et R_m :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(\eta)\,k(\lambda)\,R_m(\tau+\lambda-\eta)\,d\eta .$$

Determinons la relation entre les densités spectrales :

on sait que :

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \quad ,$$

en remplaçant $R_x(\tau)$ par sa valeur en fonction de $R_m(\tau)$, on obtient

$$\underline{S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2\, S_m(\omega)} .$$

5. Densité spectrale de l'erreur

Soit le cas le plus général d'un système linéaire soumis à deux entrées aléatoires stationnaires : le signal "utile" $m(t)$ et une perturbation $n(t)$ appliqués en des points différents du système.

La réponse sera donc :

$$x(t) = \int_0^{\infty} m(t-\lambda)\, k(\lambda)\, d\lambda + \int_0^{\infty} n(t-\lambda)\, l(\lambda)\, d\lambda \, , \quad (1)$$

La fonction de corrélation de la réponse est :

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau)\, x(t)\, dt \quad ,$$

et portant dans cette relation la valeur de $x(t)$ donnée par (1), on obtient :

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ k(\lambda)\, R_m(\tau+\lambda-\eta)\, k(\eta) + l(\lambda)\, R_n(\tau+\lambda-\eta)\, l(\eta) + $$
$$+ l(\lambda)\, R_{mn}(\tau+\lambda-\eta)\, k(\eta) + k(\lambda)\, R_{mn}(\tau+\lambda-\eta)\, l(\eta) \Big\}\, d\eta$$

De cette formule, on déduit la densité spectrale de la sortie :

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2\, S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2\, S_n(\omega) + \Phi^*(j\omega)\, S_{mn}(\omega)\, Y(j\omega) +$$
$$+ \Phi(j\omega)\, S_{nm}(\omega)\, Y^*(j\omega) \, ,$$ où $Y(j\omega)$ est la fonction de transfert relative à la perturbation.

Dans le cas particulier (mais fréquent) où $S_{mn}(\omega) = S_{nm}(\omega) = 0$ (le signal "utile" et la perturbation sont indépendants), on a :

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega)$$

On deduit l'expression de $S_\varepsilon(\omega)$, sachant que $\Phi_\varepsilon(j\omega) = 1 - \Phi(j\omega)$:

$$S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega) + \Phi_\varepsilon^*(j\omega) S_{mn}(\omega) Y(j\omega) + \Phi_\varepsilon(j\omega) S_{nm}(\omega) Y^*(j\omega)$$

et dans le cas particulier precedent :

$$\underline{S_\varepsilon(\omega) = |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_m(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega)} .$$

6- Expression de la dispersion de la grandeur de sortie.

Soit $x_o(t)$ la grandeur d'entrée d'un systeme lineaire et $x($ sa grandeur de sortie.

Supposons que l'esperance mathematique m_{ox} est nulle.

Dans ce cas, la dispersion de $x(t)$ sera :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)^2 \, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_x(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

avec $X_x(j\omega)$, la transformée de Fourier de $x(t)$.

On sait que $X_x(-j\omega) = H_{\frac{x}{x_o}}(-j\omega) X_{x_o}(-j\omega)$ où

$H_{\frac{x}{x_o}}(j\omega)$ est la fonction de transfert du systeme et

$X_{x_o}(j\omega)$ la transformée de Fourier de $x_o(t)$.

Donc : $$\sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{\frac{x}{x_o}}(-j\omega) X_{x_o}(-j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt .$$

En permutant les deux intégrations :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H_{\frac{x}{x_0}}(-j\omega)\, X_{x_0}(-j\omega) \cdot \frac{1}{2\pi}\, d\omega \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}_{X_x(j\omega) = H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \cdot X_{x_0}(j\omega).}$$

Donc :

$$\sigma_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \left| X_{x_0}(j\omega) \right|^2 d\omega \quad \text{soit ,}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 \cdot \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{|X_{x_0}(j\omega)|^2}{2T}}_{S_{x_0}(\omega)} d\omega$$

D'où

$$\underline{\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) \right|^2 S_{x_0}(\omega)\, d\omega .}$$

6.1 : <u>Cas particuliers</u> :

i) Dispersion de l'accélération de sortie $\ddot{x}(t)$:

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(j\omega) \right| S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega .$$

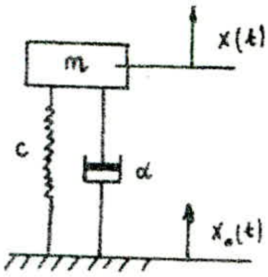
ii) Dispersion de l'écart $x(t) - x_0(t)$:

$$\sigma_{x-x_0}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(j\omega) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega$$

Avec $H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(j\omega) = -\frac{1}{\omega^2}\, H_{\frac{x-x_0}{x_0}}(j\omega)$

6.2 : <u>Exemples de détermination de la dispersion de l'accélération pour des systèmes soumis à un processus blanc</u> :

1er exemple : Systeme constitué d'une seule masse, un ressort de rigidité c un amortisseur caracterisé par la constante α.



La relation donnant la dispersion de l'acceleration est :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}(j\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(j\omega)\, d\omega \quad , \quad \text{Avec } S_{\ddot{x}_0} = \text{constante} = N^2 .$$

Determinons la fonction de transfert du systeme $H_{\frac{\ddot{x}}{\ddot{x}_0}}$.
La relation fondamentale de la dynamique donne :

$m\ddot{x} = -c(x - x_0) - \alpha(\dot{x} - \dot{x}_0)$, relation à laquelle on applique transformation de Fourier et qui devient :

$$m s^2 \bar{x}(s) = -c\left(\bar{x}(s) - \bar{x}_0(s)\right) - \alpha s\left(\bar{x}(s) - \bar{x}_0(s)\right) , \quad \text{soit}$$
$$m s^2 \bar{x}(s) = -\bar{x}(s)\left(c + \alpha s\right) + \bar{x}_0(s)\left(c + \alpha s\right), \quad \text{d'où}$$

$$(m s^2 + \alpha s + c)\,\bar{x}(s) = \bar{x}_0(s)\,(c + \alpha s) \quad \text{et} \quad H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{\bar{x}(s)}{\bar{x}_0(s)} = \frac{c + \alpha s}{m s^2 + \alpha s + c}$$

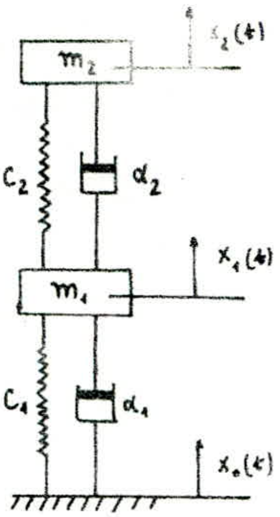
Pour $s = j\omega$, on deduit $H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega) = \dfrac{c + j\alpha\omega}{(c - m\omega^2) + j\alpha\omega}$, et,

$$\left|H_{\frac{x}{x_0}}(j\omega)\right|^2 = \frac{\alpha^2\omega^2 + c^2}{\left[(-m\omega^2 + c) + j\alpha\omega\right]\left[(-m\omega^2 + c) - j\alpha\omega\right]}$$

Portant cette expression et celle donnant $S_{\ddot{x}_0}$ dans la relation $\sigma_{\ddot{x}}^2$, on obtient

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = N^2\,\frac{\alpha^2 + mc}{2m\alpha}$$

2^e exemple : Système constitué de 2 masses m_1, m_2, 2 ressorts de rigidités c_1 et c_2 et de 2 amortisseurs de constantes caractéristiques α_1 et α_2



On a les relations suivantes :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x_2}{x_0}}(j\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega$$

Déterminons les fonctions de transfert $H_{\frac{x_1}{x_0}}$ et $H_{\frac{x_2}{x_0}}$.

La relation fondamentale de la dynamique donne le système :

$$\begin{cases} m_2 \ddot{x}_2 = -c_2(x_2 - x_1) - \alpha_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ m_1 \ddot{x}_1 = -c_1(x_1 - x_0) - \alpha_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + c_2(x_2 - x_1) + \alpha_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{cases}$$

Appliquons la transformation de Fourier :

$$\begin{cases} m_2 s^2 \bar{x}_2 = -c_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - \alpha_2 s(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \Rightarrow (m_2 s^2 + \alpha_2 s + c_2)\bar{x}_2 = \bar{x}_1(\alpha_2 s + c_2) \\ m_1 s^2 \bar{x}_1 = -c_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) - \alpha_1 s(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) + c_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \alpha_2 s(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \\ \qquad = -\bar{x}_1\left[(\alpha_1 s + c_1) + (\alpha_2 s + c_2)\right] + \bar{x}_2(\alpha_2 s + c_2) + \bar{x}_0(\alpha_1 s + c_1) \end{cases}$$

D'où, $$\bar{x}_1\left[m_1 s^2 + (\alpha_1 s + c_1) + (\alpha_2 s + c_2) - \frac{(\alpha_2 s + c_2)^2}{m_2 s^2 + \alpha_2 s + c_2}\right] = \bar{x}_0(\alpha_1 s + c$$

et $$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(m_2 s^2 + \alpha_2 s + c_2)}{m_1 m_2 s^4 + s^3(m_1\alpha_2 + \alpha_1 m_2 + \alpha_2 m_2) + s^2(m_1 c_2 + \alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2 + s(\alpha_1 c_2 + c_1\alpha_2) + c_1 c_2}$$

D'où $$H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) = \frac{(c_1 + j\alpha_1\omega)(-m_2\omega^2 + c_2 + j\alpha_2\omega)}{\left\{m_1 m_2\omega^4 - \omega^2\left[(\alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1) + c_2(m_1 + m_2)\right] + c_1 c_2\right\} + j\left\{\omega(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) - \omega^3\left[\alpha_2(m_1 + \right.\right.}$$
$m_2\alpha_1$

Soit finalement :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\left\{ c_1 c_2 - \omega^2(\alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1)\right\} + j\left\{\omega(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) - m_2\alpha_1\omega^3\right\}}{\left\{m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2\left[(\alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1) + c_2(m_1+m_2)\right] + c_1 c_2\right\} + j\left\{\omega(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) - \omega^3\left[\alpha_2(m_1+m_2) + m_2\alpha_1\right]\right\}} \right|^2 d\omega$$

ou :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_2^2\alpha_1^2\omega^6 + \omega^4(\alpha_1^2\alpha_2^2 + m_2^2 c_1^2 - 2m_2\alpha_1^2 c_2) + \omega^2(\alpha_1^2 c_2^2 + \alpha_2^2 c_1^2 - 2m_2 c_1^2 c_2) + c_1^2 c_2^2}{\left|\left\{m_1 m_2\omega^4 - \omega^2\left[(\alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1) + c_2(m_1+m_2)\right] + c_1 c_2\right\} + j\left\{\omega(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) - \omega^3\left[\alpha_2(m_1+m_2) + m_2\alpha_1\right]\right\}\right|^2} d\omega$$

La solution est donnée par la formule suivante :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \cdot \frac{b_0(-a_1 a_4 + a_2 a_3) - a_0 a_3 b_1 + a_0 a_1 b_2 + \frac{a_0 b_3}{a_4}(a_0 a_3 - a_1 a_2)}{2a_0(a_0 a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3)} , \quad (2)$$

avec : $a_0 = m_1 m_2$; $a_1 = \alpha_2(m_1+m_2) + m_2\alpha_1$; $a_2 = (\alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1) + c_2(m_1+m_2)$;
$a_3 = \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1$ et $a_4 = c_1 c_2$,

$b_0 = -m_2^2\alpha_1^2$; $b_1 = \alpha_1^2\alpha_2^2 + m_2^2 c_1^2 - 2m_2\alpha_1^2 c_2$;
$b_2 = 2m_2 c_1^2 c_2 - \alpha_1^2 c_2^2 - \alpha_2^2 c_1^2$; et $b_3 = c_1^2 c_2$, soit :

$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2 \cdot \frac{N_1}{D_1}$ avec N_1 et D_1 les polynomes suivants :

$$\begin{aligned} N_1 = {} & 2m_1^2 m_2^2\alpha_2 c_1^2 c_2 + m_1 m_2^2\alpha_1^2\alpha_2 c_1 c_2 + m_1 m_2^3\alpha_2 c_1^2 c_2 - m_2^2\alpha_1^4\alpha_2 c_2 - m_2^2\alpha_1^3\alpha_2^2 c_1 - m_2^3\alpha_1^2\alpha_2 c_1^2 + \\ & - m_2^3\alpha_1^3 c_2^2 - m_1 m_2\alpha_1^3\alpha_2^2 c_2 - m_1 m_2\alpha_1^2\alpha_2^3 c_1 - m_1 m_2^3\alpha_2 c_1^3 - m_1^2 m_2\alpha_1^2\alpha_2 c_2^2 - m_1^2 m_2\alpha_2^3 c_1^2 + \\ & - m_1 m_2^2\alpha_1\alpha_2^2 c_1^2 - m_1 m_2^2\alpha_1^2\alpha_2 c_2^2 - m_1 m_2^2\alpha_1\alpha_2^2 c_1 c_2 - m_1 m_2^3\alpha_2 c_1 c_2^2 - m_1 m_2^2\alpha_2^3 c_1^2 + \\ & - m_1^3 m_2\alpha_2 c_1 c_2^2 - m_1^2 m_2\alpha_1\alpha_2^2 c_1 c_2 - 2m_1^2 m_2^2\alpha_2 c_1 c_2^2 - m_1 m_2^3\alpha_1 c_1 c_2^2 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 = 2m_1 m_2 \big(& 2m_1 m_2\alpha_1\alpha_2 c_1 c_2 - m_1^2\alpha_1\alpha_2 c_2^2 - m_1\alpha_1^2\alpha_2^2 c_2 - 2m_1 m_2\alpha_1\alpha_2 c_2^2 - m_2\alpha_1^3\alpha_2 c_2 + \\ & - m_2^2\alpha_1^2 c_2^2 - m_2\alpha_1^2\alpha_2^2 c_2 - m_2^2\alpha_1\alpha_2 c_2^2 - m_1\alpha_1\alpha_2^3 c_1 - m_2\alpha_1^2\alpha_2^2 c_1 + \\ & - m_2^2\alpha_1\alpha_2 c_1^2 - m_2\alpha_1\alpha_2^3 c_1 - m_2^2\alpha_2^2 c_1^2 \big) \end{aligned}$$

D'après la relation (1) on a : $H_{\frac{x_2}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) \cdot \frac{\alpha_2 s + c_2}{m_2 s^2 + \alpha_2 s + c_2}$

TROISIEME PARTIE

De la meme façon que precedemment on obtient :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_2} = N_2^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2\,\omega^4 + \omega^2\left(\alpha_1^2 c_2^2 + \alpha_2^2 c_1^2\right) + c_1^2 c_2^2}{\left|\left\{m_1 m_2 \omega^4 - \omega^2\left[(\alpha_1\alpha_2 + m_2 c_1) + c_2(m_1+m_2)\right] + c_1 c_2\right\} + j\left\{\omega(\alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1) - \omega^3\left[\alpha_2(m_1+m_2) + m_2\alpha_1\right]\right\}\right|^2}\, d\omega,$$

integrale dont la solution est donnée par la relation (2) avec :

$*$ a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 mêmes valeurs que dans le cas precedent ,

$*$ $b_0 = 0$; $b_1 = \alpha_1^2\alpha_2$; $b_2 = -\left(\alpha_1^2 c_2^2 + \alpha_2^2 c_1^2\right)$; $b_3 = c_1^2 c_2^2$,

soit $\sigma^2_{\ddot{x}_2} = \dfrac{N_2}{D_1}$, D_1 polynome precedent et N_2 le polynome :

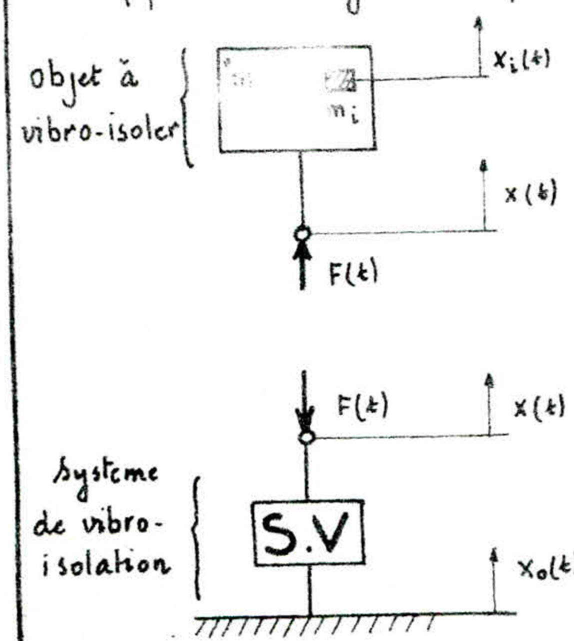
$$\begin{aligned} N_2 = & - m_1 m_2 \alpha_1^3\alpha_2^2 c_2 - m_1 m_2 \alpha_1^2\alpha_2^3 c_1 - m_1^2 m_2 \alpha_1^2 \alpha_2 c_2^2 - m_1^2 m_2 \alpha_2^3 c_1^2 - m_1 m_2^2 \alpha_1^3 c_2^2 - m_1 m_2^2 \alpha_1 \alpha_2^2 c_1^2 + \\ & - m_1 m_2^2 \alpha_1^2 \alpha_2 c_2^2 - m_1 m_2^2 \alpha_2^3 c_1^2 - m_1^3 m_2 \alpha_2 c_1 c_2^2 - m_1^2 m_2 \alpha_1 \alpha_2^2 c_1 c_2 - 2 m_1^2 m_2^2 \alpha_2 c_1 c_2^2 - m_1 m_2^2 \alpha_1^2 \alpha_2 c_1 c_2 + \\ & - m_1 m_2^3 \alpha_1 c_1 c_2^2 - m_1 m_2^3 \alpha_1 c_1^2 c_2 - m_1 m_2^2 \alpha_1 \alpha_2^2 c_1 c_2 - m_1 m_2^3 \alpha_2 c_1^2 c_2 - m_1 m_2^3 \alpha_2 c_1 c_2^2 . \end{aligned}$$

En comparant les deux exemples , on remarque facilement que, du 1er au 2e exemple , le calcul de la dispersion de l'acceleration devient de plus en plus compliqué et on s'arretera sur ce deuxieme, la methode de calcul etant identique à celle exposée , pour tous les cas .

III_CONSTRUCTION ANALYTIQUE des S.V

(pour un objet donné).

Soit la representation generale du probleme à etudier suivante :



1. Caracteristiques de l'objet vibro-isole

L'objet vibro-isolé est representé par un modèle à paramètres discrets.

2. Hypothèses

2.1 : Consernant le systeme de vibro-isolation :

Système linéaire à structure inconnue.

2.2 : Consernant l'etat des vibrations :

On suppose qu'il n'existe que des vibrations verticales.

2.3 : Consernant la nature de l'excitation $x_o(t)$:

$x_o(t)$ est un processus normal, stationnaire et ergodique. Sa densite spectrale est une fonction rationnelle de ω^2.

2.4 : Consernant l'action des systemes :

On suppose qu'il n'y a aucune action des systemes sur l'excitation.

3. Probleme de criteres

D'un coté, le systeme de vibro-isolation doit être souple pour obtenir par exemple une acceleration minimale, mais d'un autre côté il doit être rigide pour limiter les deplacements relatifs.

On voit donc qu'on est en presence de deux critères contradictoires. Le probleme consiste donc à trouver un cas optimum un cas satisfaisant chacun des criteres sans influences sur l'autre.

Si on pose : $\delta(t) = x(t) - x_o(t)$

$\ddot{x}_i(t) =$ Acceleration de la i^e masse,

avec les hypotheses :

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ \ddot{x}_i(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases},$$

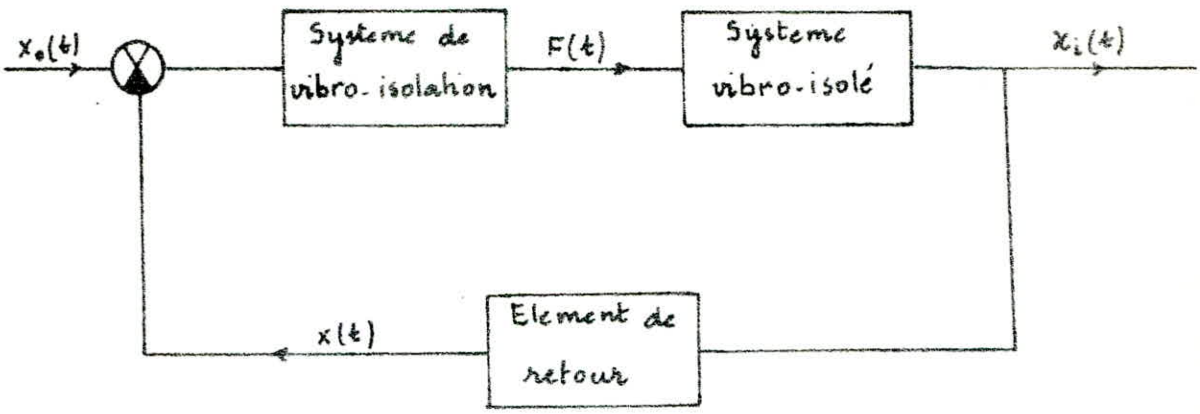
le probleme enoncé ci-haut se traduit en la minimisation la fonctionnelle C :

$$C = \int_0^{\infty} \left[\delta(t)\right]^2 dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^{\infty} \left[\ddot{x}_i(t)\right]^2 dt ,$$

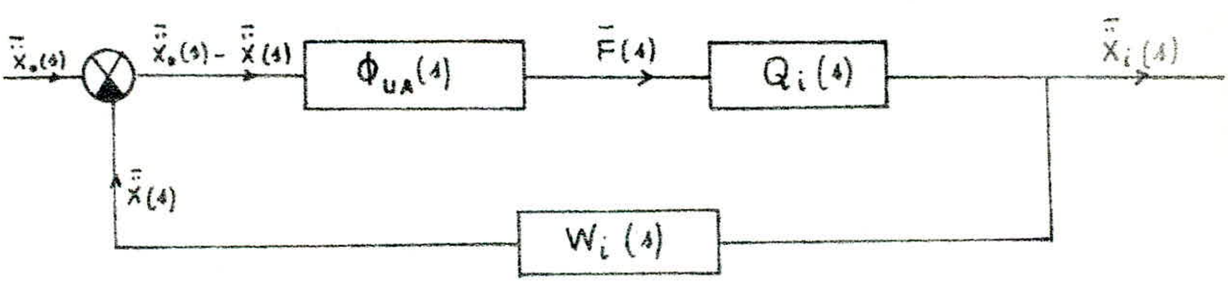
où les λ_i constituent les multiplicateurs de Lagrange.

4. Formulation mathematique du pb

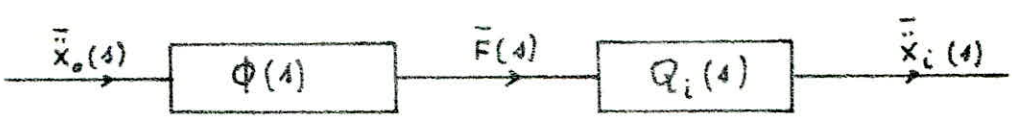
Le probleme peut etre posé, tenant compte des hypothèses, de la façon suivante :



Faisons intervenir les transformées de Laplace $\ddot{\bar{X}}_o(s)$, $\bar{x}_i(s)$, $\ddot{\bar{x}}(s)$



En boucle ouverte on a :



En boucle ouverte on a :

$$\frac{\ddot{\bar{x}}_i(s)}{\ddot{\bar{x}}_o(s)} = \Phi(s)\, Q_i(s)$$

En boucle fermée on a :

$$\frac{\ddot{\bar{x}}_i(s)}{\ddot{\bar{x}}_o(s)} = \frac{\Phi_{UA}(s) \cdot Q_i(s)}{1 + \Phi_{UA}(s) \cdot Q_i(s) \cdot W_i(s)}$$

$$\Rightarrow \Phi(s) = \frac{\Phi_{UA}(s)}{1 + \Phi_{UA}(s) \cdot Q_i(s) \cdot W_i(s)}$$

avec $\Phi(s) = \dfrac{\bar{F}(s)}{\ddot{\bar{x}}_o(s)}$

Soient :

$$L_i(s) = \frac{\bar{x}_i(s)}{\bar{x}(s)} \quad , \quad L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} \quad ,$$

alors $$Q_i(s) = \frac{\ddot{\bar{x}}_i(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{\ddot{\bar{x}}_i(s)}{\bar{x}(s)} \cdot \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{s^2\, \bar{x}_i(s)}{\bar{x}(s)} \cdot \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} = \frac{s^2\, L_i(s)}{L(s)}$$

et $$W_i(s) = \frac{\ddot{\bar{x}}(s)}{\ddot{\bar{x}}_i(s)} = \frac{1}{L_i(s)}$$

La fonctionnelle C est equivalente à :

$$C = \langle \delta^2(t) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle \quad \text{où}$$

$$\langle \delta^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \delta^2(t)\, dt \quad ; \quad \langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \ddot{x}_i^2(t)\, dt$$

Si l'on considère que les valeurs moyennes de $\delta(t)$ et de $\ddot{x}_i(t)$ sont nulles , alors :

$\langle \delta^2(t) \rangle = \sigma^2_{x-x_o}$, Dispersion de l'écart.

$\langle \ddot{x}_i^2(t) \rangle = \sigma^2_{\ddot{x}_i}$, Dispersion de l'acceleration.

La fonctionnelle sera donc :

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \sigma^2_{\ddot{x}_i} \quad , \qquad (1)$$

avec donc :

$$\sigma^2_{x-x_0} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds \qquad (s = j\omega)$$

$$\sigma^2_{\ddot{x}_i} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \left| H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) \right|^2 S_{\ddot{x}_0}(s) \, ds \qquad (s = j\omega)$$

les fonctions de transfert H étant égales à :

$$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\bar{x}(s) - \bar{x}_0(s)}{\bar{\ddot{x}}_0(s)} = \frac{\frac{\bar{x}(s)}{F(s)} - \frac{\bar{x}_0(s)}{F(s)}}{\frac{\bar{\ddot{x}}_0(s)}{F(s)}} = \frac{\frac{1}{L(s)} - \frac{1}{s^2\Phi(s)}}{\frac{1}{\Phi(s)}} = \frac{\frac{s^2\Phi(s)}{L(s)} -}{s^2}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\bar{\ddot{x}}_i(s)}{\bar{\ddot{x}}_0(s)} = \frac{\bar{\ddot{x}}_i(s)}{\bar{\ddot{x}}(s)} \cdot \frac{s^2 \bar{x}(s)}{s^2 \bar{x}_0(s)} = L_i(s) \cdot \frac{\bar{x}(s)}{\bar{F}(s)} \cdot \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}_0(s)}$$

soit $$H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{s^2 L_i(s) \cdot \Phi(s)}{L(s)}$$

Soit $G(s) = \dfrac{s^2}{L(s)}$

Donc : $$H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\Phi(s)\, G(s) - 1}{s^2} \quad ; \quad H_{\frac{\ddot{x}_i}{\ddot{x}_0}}(s) = G(s) \cdot L_i(s) \cdot \Phi(s)$$

et tenant compte du fait que $|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s)$, la relation (1) s'écrit donc :

$$C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[\frac{\Phi(s)G(s)-1}{s^2}\right]\left[\frac{\Phi(-s)G(-s)-1}{s^2}\right]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[G(s)L_i(s)\Phi(s)\right]\left[G(-s)L_i(-s)\Phi(-s)\right]\right\}\times$$

$$\times\, S_{\ddot{x}_0}(s)\, ds\,.$$

Tenant compte du fait que, par hypothèse, $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$ est une fraction rationnelle de ω^2, on peut écrire :

$$S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 . S_0 . \Psi(s) . \Psi(-s) \quad \text{avec } S_0 = \text{constante}.$$

Finalement :

$$C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[\Phi(s)G(s)-1\right]\left[\Phi(-s)G(-s)-1\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, s^4\left[G(s)L_i(s)\Phi(s)\right]\left[G(-s)L_i(-s)\Phi(-s)\right]\right\}S_0\Psi(s)\Psi(-s)\,ds$$

5. Solution generale du probleme par l'equation de Wiener-Hopf

Soit $\Phi_w(s) = \Phi(s) + \varepsilon\,\eta(s)$ où $\eta(s)$ = Fonction de balance arbitraire.
ε = Paramètre constant.
$\varepsilon\,\eta(s)$ représente ainsi $\Phi_w(s) - \Phi(s)$.

$\Phi_w(s)$ représente la fonction optimum pour laquelle la fonctionnelle est minimale. Soit C^* la valeur de cette dernière, c'est à dire :

$$C^* = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\left\{\left[\left(\Phi(s)+\varepsilon\eta(s)\right)G(s)-1\right]\left[\left(\Phi(-s)+\varepsilon\eta(-s)\right)G(-s)-1\right]+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, s^4\left[G(s)L_i(s)\left(\Phi(s)+\varepsilon\eta(s)\right)\right]\left[G(-s)L_i(-s)\left(\Phi(-s)+\varepsilon\eta(-s)\right)\right]\right\}S_0\Psi(s)\Psi(-s)\,ds$$

Soit $\delta C = C^* - C$ l'erreur ou l'écart entre C^* et C.

Alors on a :

$$\delta C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Big\{\Big[\big(\Phi(s)G(s)+\varepsilon\eta(s)G(s)-1\big)\Big]\Big[\Phi(-s)G(-s)+\varepsilon\eta(-s)G(-s)-1\Big]-\Big[\Phi(s)G(s)-1\Big]\Big[\Phi(-s)G(-s)-1\Big]$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4\Big[\big(G(s)L_i(s)\Phi(s)+G(s)L_i(s)\varepsilon\eta(s)\big)\big(G(-s)L_i(-s)\Phi(-s)+G(-s)L_i(-s)\varepsilon\eta(-s)\big)$$

$$-\big(G(s)L_i(s)\Phi(s)\big)\big(G(-s)L_i(-s)\Phi(-s)\big)\Big]\Big\}\, S_0\varphi(s)\varphi(-s)\, ds.$$

$$\delta C = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Big\{\Big[\varepsilon\eta(s)G(s)\Phi(-s)G(-s)-\varepsilon\eta(s)G(s)+\varepsilon^2\eta(s)\eta(-s)G(s)G(-s)-\varepsilon\eta(-s)G(-s)+$$

$$+\varepsilon\eta(-s)G(-s)\Phi(s)G(s)\Big]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4\Big[G(s)L_i(s)\Phi(s)G(-s)L_i(-s)\varepsilon\eta(-s)+$$

$$+G(s)L_i(s)\varepsilon\eta(s)G(-s)L_i(-s)\Phi(-s)+\varepsilon^2G(s)G(-s)L_i(s)L_i(-s)\eta(s)\eta(-s)\Big]\Big\}$$

$$\times\; S_0\varphi(s)\varphi(-s)\, ds.$$

Identifier $\Phi(s)$ à $\Phi_w(s)$ revient à avoir l'ecart δC minimum pour $\varepsilon = 0$, ce qui se traduit par :

$$\left.\frac{d(\delta C)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad , \quad \text{donc :}$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\Big\{\Big[\Phi(s)G(s)G(-s)\eta(-s)+\Phi(-s)G(-s)G(s)\eta(s)-G(-s)\eta(-s)-\eta(s)G(s)\Big]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4\Big[\Phi(s)G(s)G(-s)L_i(s)L_i(-s)\eta(-s)+\Phi(-s)G(-s)G(s)L_i(-s)L_i(s)\eta(s)\Big]\Big\}$$

$$\times\, S_0\varphi(s)\varphi(-s)\, ds = 0 \quad , \quad \text{soit :}$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\Big\{\Big[\Big(G(s)G(-s)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4 L_i(s)L_i(-s)G(s)G(-s)\Big)\Phi(s)-G(-s)\Big]\eta(-s)+\Big[\Big(G(s)G(-s)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i s^4 L_i(s)L_i(-s)G(s)G(-s)\Big)\Phi(-s)-G(s)\Big]\eta(s)\Big\}\times S_0\varphi(s)\varphi(-s)\, ds = 0$$

Posons :

$$D(s)\,D(-s) = \left[1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s^4 L_i(s) L_i(-s)\right] G(s)\,G(-s)$$

On aura donc :

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \Big\{ \left[D(s) D(-s) \varphi(s) \varphi(-s) \Phi(s) - G(-s) \varphi(s) \varphi(-s) \right] \eta(-s) + \left[D(s) D(-s) \varphi(s) \varphi(-s) \Phi(-s) + \right.$$

$$\left. - G(s) \varphi(s) \varphi(-s) \right] \eta(s) \Big\} \times ds = 0$$

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \Big\{ \left[D(s) \varphi(s) \Phi(s) - \frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)} \right] D(-s) \varphi(-s) \eta(-s) + \left[D(-s)\varphi(-s)\Phi(-s) - \frac{G(s)\varphi(-s)}{D(s)} \right] D(s)\varphi(s)\eta(s) \Big\}$$

$$\times ds = 0$$

que l'on peut ecrire :

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[D(s)\varphi(s)\Phi(s) - \frac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)} \right] D(-s)\varphi(-s)\eta(-s)\, ds \; +$$

$$+ \int_{-j\infty}^{j\infty} \left[D(-s)\varphi(-s)\Phi(-s) - \frac{G(s)\varphi(-s)}{D(s)} \right] D(s)\varphi(s)\eta(s)\, ds = 0$$

$D(s)\varphi(s)\Phi(s)$ a des pôles à gauche de l'axe imaginaire, par consequent, de $\dfrac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}$ on ne prend que la partie ayant des pôles à gauche pour pouvoir effectuer la difference $D(s)\varphi(s)\Phi(s) - \dfrac{G(-s)\varphi(s)}{D(-s)}$ en respectant les conditions de stabilité et de realisation.

Dans la 2e integrale, on a le contraire et l'on doit avoir donc l'integrale :

$$\int_{-j\infty}^{j\infty} \left[D(-s)\varphi(-s)\Phi(-s) - \left\{ \frac{G(s)\varphi(-s)}{D(s)} \right\}_{-} \right] D(s)\varphi(s)\eta(s)\, ds$$

En effectuant un changement de variable $s \to -s$ on aura :

G.S. BROWN, D.P. CAMPBELL – "PRINCIPLES OF SERVOMECHANISMS" J. WILEY & SONS,
INC. NEW YORK 1948.

$$-\int_{j\infty}^{-j\infty}\left[D(s)\ell(s)\Phi(s)-\left\{\frac{G(-s)\ell(s)}{D(-s)}\right\}_+\right]D(-s)\ell(-s)\eta(-s)\,ds$$, soit :

$$\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(s)\ell(s)\Phi(s)-\left\{\frac{G(-s)\ell(s)}{D(-s)}\right\}_+\right]D(-s)\ell(-s)\eta(-s)\,ds$$, integrale identique à la premiere, donc le probleme consiste en la resolution de l'equation integrale :

$$2\int_{-j\infty}^{j\infty}\left[D(s)\ell(s)\Phi(s)-\left\{\frac{G(-s)\ell(+s)}{D(-s)}\right\}_+\right]D(-s)\ell(s)\eta(-s)\,ds = 0$$

D'où :

$$\Phi(s) = \frac{1}{D(s)\ell(s)}\left\{\frac{G(-s)\ell(s)}{D(-s)}\right\}_+$$

Si l'on pose :

$R(s)\,R(-s) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, s^4\, L_i(s)\, L_i(-s)$, c'est à dire ,

$D(s)\,D(-s) = R(s)\,R(-s)\,G(s)\,G(-s)$, donc que $D(s) = R(s)\,G(s)$,

on aura :
$$\Phi(s) = \frac{1}{R(s)\,G(s)\,\ell(s)}\left\{\frac{\ell(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

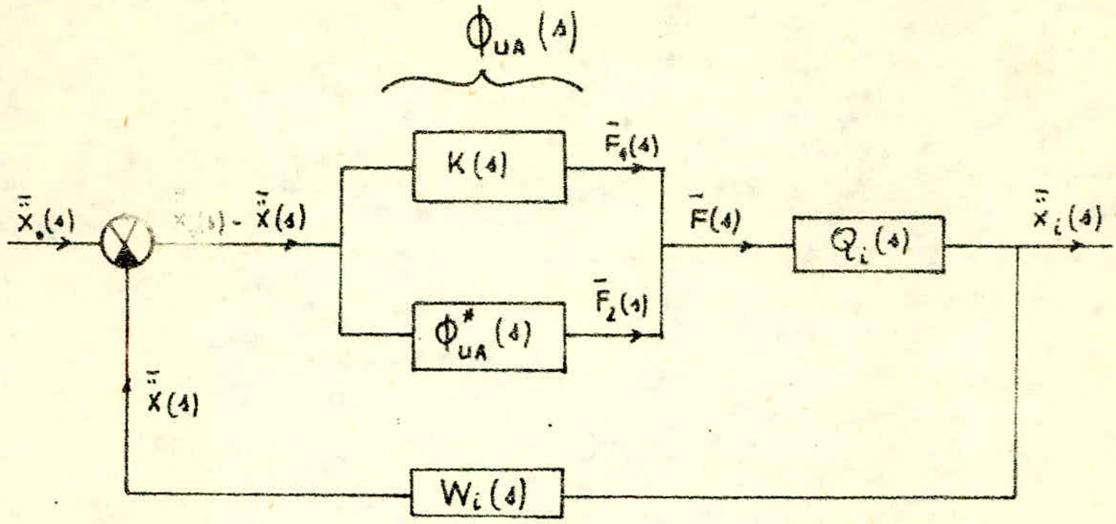
et l'on peut deduire $\Phi_{UA}(s)$ sachant que :

$$\Phi_{UA} = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)\,W_i(s)\,Q_i(s)} = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)\,\frac{s^2}{L(s)}}$$

$$\Phi_{UA} = \frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)\,G(s)}$$

Cas où l'on connait partiellement la structure du système de vibro-isolation

Dans ce cas, on décompose la fonction de transfert totale Φ_{UA}.



$$\bar{F}_1(s) + \bar{F}_2(s) = \bar{F}(s)$$

$$K(s) = \frac{F_1(s)}{\bar{\ddot{X}}_0(s) - \bar{\ddot{X}}(s)} \quad \text{connue}$$

$$\Phi^*_{UA}(s) = \frac{F_2(s)}{\bar{\ddot{X}}_0(s) - \bar{\ddot{X}}(s)} \quad \text{inconnue}$$

On calcule comme précédemment $\Phi_{UA}(s)$

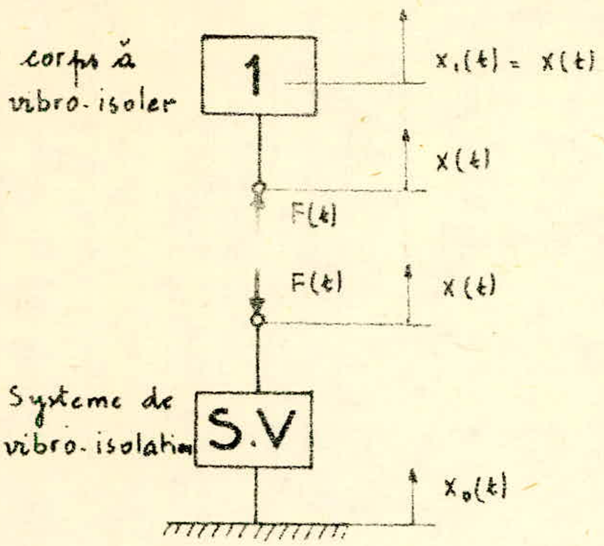
$$\Phi_{UA}(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)\,G(s)}$$

Comme $\Phi_{UA}(s) = \Phi^*_{UA}(s) + K(s)$, on déduit $\Phi^*_{UA}(s)$:

$$\Phi^*_{UA}(s) = \frac{\Phi(s)}{1 - \Phi(s)\,G(s)} - K(s)$$

IV. S.V POUR VIBRO-ISOLER UN CORPS RIGIDE

1. Schema et relations



Dans ce cas on a :

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = 1 \Rightarrow R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4 .$$

La fonction optimum du systeme de vibro-isolation est donnée par la relation :

$$\Phi(s) = \frac{1}{f(s)\,R(s)\,G(s)} \left\{ \frac{f(s)}{R(-s)} \right\}_+ , \quad \text{avec}$$

$f(s)$ telle que $\quad S_{\ddot{x}_0}(s) = S_0\, s^4 f(s)\, f(-s)$

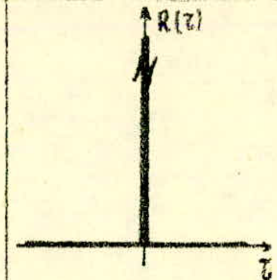
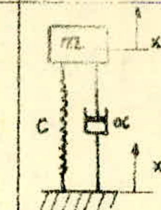
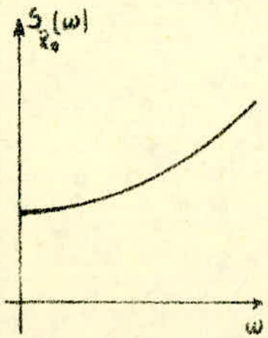
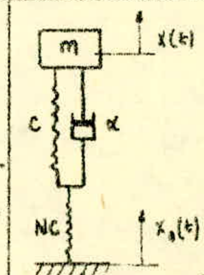
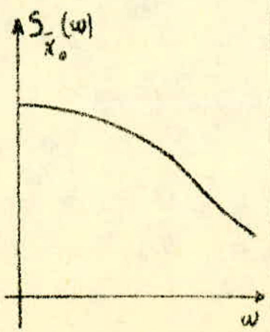
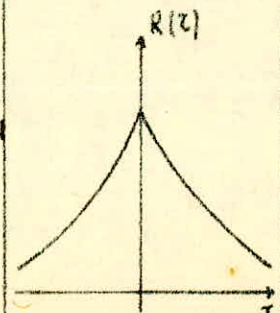
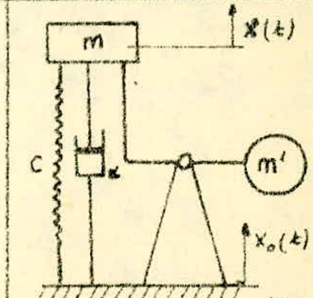
$$G(s) = \frac{s^2}{L(s)} \qquad \text{où} \quad L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = m s^2 \quad \text{où } m = \text{masse du corps}.$$

2. $\Phi(s)$ pour differentes formes de $S_{\ddot{x}_0}(s)$.

On considerera 3 formes de $S_{\ddot{x}_0}(s)$, soient :

$S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2 = \text{cste}$ (bruit blanc) ; $\quad S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{N^2}{\Omega^2}\left(-s^2+\omega_0^2\right)$; $\quad S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{N^2\Omega^2}{-s^2+\omega_0^2}$

Fonction de transfert optimum d'un système de vibro-isolation pour différentes formes de la densité spectrale de l'accélération de l'excitation et réalisations physiques possibles.

Densité spectrale $S_{\ddot{x}_0}(s)$	Graphique de $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$	Fonction d'auto-corrélation $R(\tau)$	Graphique de $R(\tau)$	$\Phi(s) = \dfrac{\bar{F}(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)}$	$\dfrac{\ddot{\bar{X}}(s)}{\ddot{\bar{X}}_0(s)} = \dfrac{s^2 L_1(s)\,\Phi(s)}{L(s)}$	Réalisation possible.
N^2		$N^2\delta(\tau)$		$\dfrac{(\sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2)\,m}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$ avec : $\omega_c^2 = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\lambda}$	$\dfrac{\sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$	 $\alpha = m\sqrt[4]{\dfrac{4}{\lambda}}$ $C = m\sqrt{\dfrac{1}{\lambda}}$
$\dfrac{N^2}{\Omega^2}(-s^2+\omega_0^2)$		Indéterminée		$\dfrac{m\left[(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0)s + \omega_c^2\omega_0\right]}{s^3+s^2(\sqrt{2}\,\omega_c+\omega_0)+(\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0+\omega_c^2)s+\omega_c^2\omega_0}$	$\dfrac{(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0)s + \omega_c^2\omega_0}{s^3+s^2(\sqrt{2}\,\omega_c+\omega_0)+s(\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0+\omega_c^2)+\omega_c^2\omega_0}$	 $c = m\omega_c^2\dfrac{(1+\sqrt{1+2N})^2}{2N^2}$ $\alpha = m\omega_c\dfrac{(1+\sqrt{1+2N})^2}{2\sqrt{2}\,N^2}$
$\dfrac{N^2\Omega^2}{(-s^2+\omega_0^2)}$		$\dfrac{N^2\Omega^2 e^{-\omega_0\lvert\tau\rvert}}{2\omega_0}$		$m\,\dfrac{a_2 s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$ avec : $a_2 = \dfrac{\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0 + \omega_c^2}{\omega_0^2 + \sqrt{2}\,\omega_c\omega_0 + \omega_c^2}$	$\dfrac{a_2 s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}$	 $c = \dfrac{m}{\sqrt{\lambda}}$; $\alpha = m\sqrt{2}\,\dfrac{\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ $m' = m(1+\sqrt{2})$

3. Comparaison des resultats

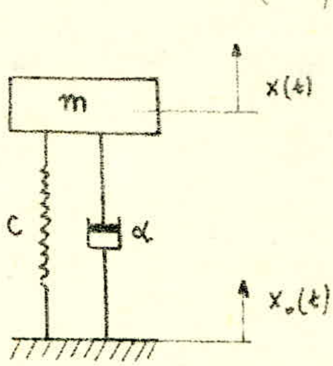
La comparaison des resultats trouvés precedemment et mentionnés dans le tableau se fera en considerant un systeme de vibro-isolation donné avec qui on comparera la dispersion de l'acceleration de sortie pour chacun des 3 cas d'excitation.

On nommera : $\sigma^2_{\ddot{x}\,opt}$: La dispersion de l'acceleration de l'objet dans le cas du S.V optimum.

$\sigma^2_{\ddot{x}}$: La dispersion de l'acceleration de l'objet dans le cas du S.V donné.

R : Le rapport $\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} / \sigma^2_{\ddot{x}}$.

Soit le systeme de vibro-isolation (S.V) donné suivant :



3.1: Excitation par un bruit blanc : $S_{\ddot{x}_0}(\omega) = cste = N^2$.

* La dispersion de l'acceleration de l'objet pour le systeme de vibro-isolation donné est calculée precedemment (parag: II.6.2, 1er exple) et on a :

$$\sigma^2_{\ddot{x}} = N^2 \frac{\alpha^2 + mc}{2\,m\alpha}.$$

* Le systeme de vibro-isolation optimum correspondant à ce type d'excitation est donné par le tableau precedent, systeme identique à celui donné, avec :

$$c = m\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{et} \quad \alpha = m\sqrt[4]{\frac{4}{\lambda}}, \quad \text{d'où}$$

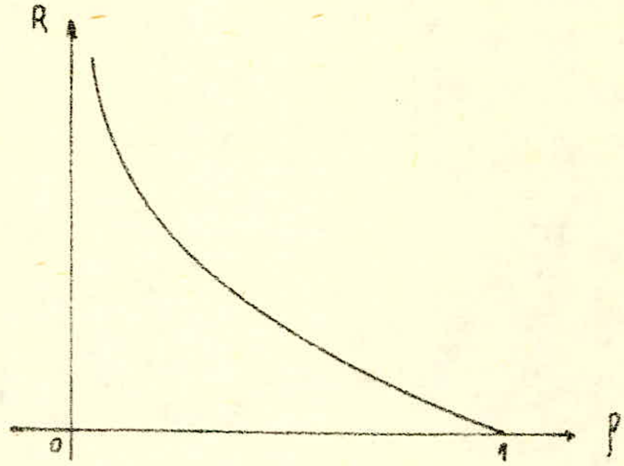
$$\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} = N^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda}}$$

Donc $R = \dfrac{\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt[4]{\dfrac{1}{\lambda}}}{\dfrac{\alpha^2 + mc}{2m\alpha}}$ et pour α et c fixés on aura la courbe de variation suivante :

Posons $\lambda = \lambda_0 \dfrac{\rho}{1-\rho}$ avec $\lambda_0 = 1$ [Unité].

La variation de λ de 0 à ∞ equivaut à la variation de ρ de 0 à 1.

Fig 1 :



3.2 : Excitation par un processus $x_0(t)$ tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2\Omega^2 \cdot \dfrac{1}{-s^2+\omega_0^2}$

* La dispersion de l'acceleration de l'objet pour le systeme de vibro-isolation donné d'avance sera :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = N^2\Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2\omega^2 + c^2}{\left[(c-m\omega^2) + j\alpha\omega\right]\left[(c-m\omega^2) - j\alpha\omega\right](\omega_0+j\omega)(\omega_0-j\omega)}\, d\omega$$

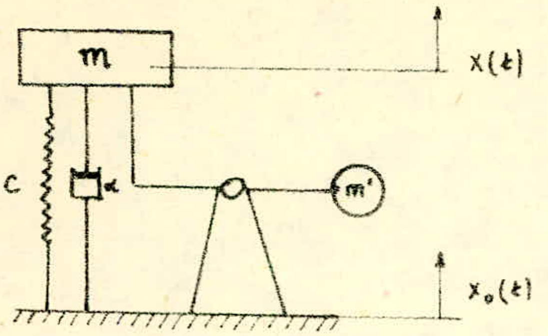
soit :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = N^2\Omega^2 \cdot \frac{\alpha^2\omega_0 + mc\omega_0 + c\alpha}{2\omega_0\left(m\alpha\omega_0^2 + \alpha^2\omega_0 + c\alpha\right)}$$ et puisque $\omega_0^2 = \dfrac{c}{m}$,

on a finalement :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = N^2\Omega^2 \frac{mc + \alpha^2 + \alpha\sqrt{mc}}{\sqrt{\dfrac{c}{m}}\left(4\alpha\sqrt{mc} + 2\alpha^2\right)}$$

* Le système de vibro-isolation optimum correspondant à ce type d'excitation est donné par le tableau précédent et on a :



$$c = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad \alpha = m\sqrt{2}\,\frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \quad ;$$

$$m' = m\,(1+\sqrt{2})$$

système dont la fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\,\omega_c s + \omega_c^2}.$$

La dispersion de l'accélération de l'objet pour ce système de vibro-isolation sera :

$$\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} = N^2\Omega^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-a_2\omega^2+\omega_c^2)^2 + 2\,\omega_c^4\omega^2}{\left[(-\omega^2+\omega_c^2)+j\sqrt{2}\,\omega_c\omega\right](\omega_0+j\omega)\times\left[(-\omega^2+\omega_c^2)-j\sqrt{2}\,\omega_c\omega\right](\omega_0-j\omega)}\,d\omega$$

Soit :

$$\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} = N^2\Omega^2\,\frac{3\omega_c^2\omega_0^5 + 7\sqrt{2}\,\omega_c^3\omega_0^4 + 16\,\omega_c^4\omega_0^3 + 9\sqrt{2}\,\omega_c^5\omega_0^2 + 6\,\omega_c^6\omega_0 + \sqrt{2}\,\omega_c^7}{2\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0^7 + 12\,\omega_c^2\omega_0^6 + 18\sqrt{2}\,\omega_c^3\omega_0^5 + 32\,\omega_c^4\omega_0^4 + 18\sqrt{2}\,\omega_c^5\omega_0^3 + 12\,\omega_c^6\omega_0^2 + 2\sqrt{2}\,\omega_c^7\omega_0}$$

Lorsque $\omega_c = \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers ∞, c'est à dire $\lambda \to 0$ $(\rho \to 0)$, on a

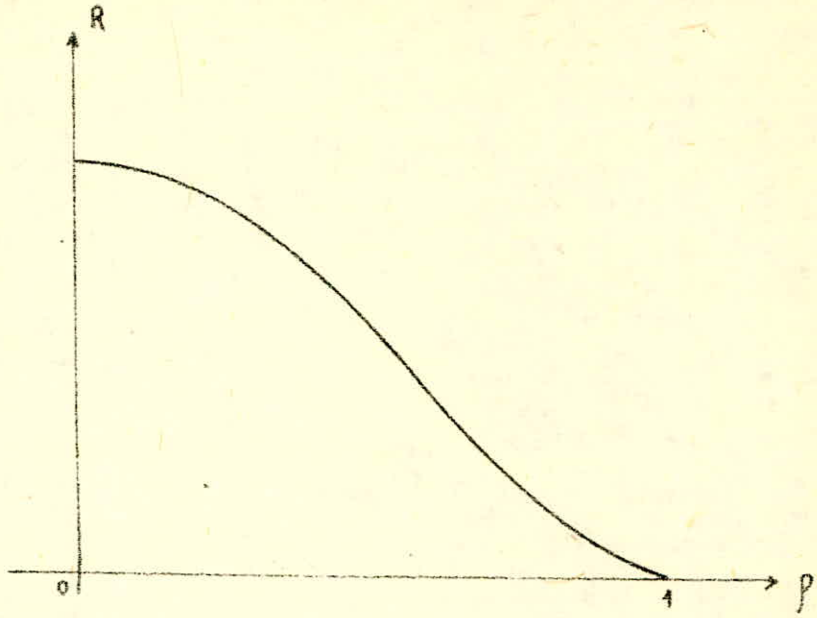
$$\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} \text{ tend vers } N^2\Omega^2\,\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\omega_0} = N^2\Omega^2\,\frac{1}{2\omega_0}.$$

Donc R tend vers $\dfrac{2\alpha\sqrt{mc} + \alpha^2}{mc + \alpha\sqrt{mc} + \alpha^2}$

Lorsque ω_c tend vers 0, c'est à dire $\lambda \to \infty$ $(\rho \to 1)$, $\sigma^2_{\ddot{x}\,opt}$ tend vers 0 donc R tend vers 0.

Pour α, c et m fixés on a la courbe de variation suivante :

Fig 2 :



3.3 : Excitation par un processus $x_0(t)$ tel que $S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{N^2}{\Omega^2}\left(-s^2 + \omega_0^2\right)$:

$$\text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = \text{pulsation propre du système.}$$

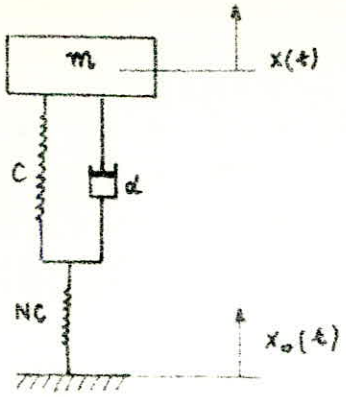
* La dispersion de l'accélération de l'objet pour le système donné est :

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{N^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{c + j\alpha\omega}{(-m\omega^2 + c) + j\alpha\omega} \right|^2 \cdot \left(\omega^2 + \omega_0^2\right) d\omega .$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \frac{N^2}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(c^2 + \alpha^2\omega^2)(\omega^2 + \omega_0^2)}{\left[(-m\omega^2 + c) + j\alpha\omega\right]\left[(-m\omega_0^2 + c) - j\alpha\omega\right]} d\omega = \infty$$

L'intégrale est divergente. Ce qui entraine que la dispersion de l'accélération est infinie ; ce qui veut dire que pour une telle excitation, le système n'est pas réalisable, sans quoi il serait instable.

* Le système de vibro-isolation optimum correspondant à ce type d'excitation est donné par le tableau précédent et on a :



$$c = m\omega_c^2 \,\frac{\left(1+\sqrt{1+2N}\right)^2}{2N^2}$$

$$d = m\omega_c \,\frac{\left(1+\sqrt{1+2N}\right)^2}{2\sqrt{2}\,N^2}$$

système donc la fonction de transfert est :

$$H(s) = \frac{(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0)\,s + \omega_c^2\omega_0}{s^3 + s^2\left(\sqrt{2}\,\omega_c + \omega_0\right) + s\left(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0\right) + \omega_0\omega_c^2}$$

La dispersion de l'accélération de l'objet pour ce système de vibro-isolation sera :

$$\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} = \frac{N^2}{\Omega^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega_c^4\omega_0^2 + \left(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0\right)^2\omega^2}{\left|\left[-\omega^2\left(\sqrt{2}\,\omega_c+\omega_0\right)+\omega_0\omega_c^2\right] + j\left[\omega\left(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0\right)-\omega^3\right]\right|^2}\left(\omega^2+\omega_0^2\right)d\omega$$

soit :

$$\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} = \frac{N^2}{\Omega^2}\cdot\frac{-\left(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0\right)^3 - \left[\omega_c^4\omega_0^2+\omega_0^2\left(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0\right)^2\right] - \left(\sqrt{2}\,\omega_c+\omega_0\right)\omega_0^3\omega_c^2}{2\left[\omega_0\omega_c^2 - \left(\sqrt{2}\,\omega_c+\omega_0\right)\left(\omega_c^2+\sqrt{2}\,\omega_c\omega_0\right)\right]}$$

$\sigma_{\ddot{x}\,opt}$ possède une valeur bien déterminée (valeur dépendant de λ), propriété que $\sigma^2_{\ddot{x}}$ n'a pas, cette dernière étant infinie.

Ceci veut dire que pour l'excitation telle que $S_{\ddot{x}_0}(s) = \frac{N^2}{\Omega^2}\left(-s^2+\omega_0^2\right)$ le système optimum est réalisable, malgré que le système de vibro-isolation donné d'avance est irréalisable.

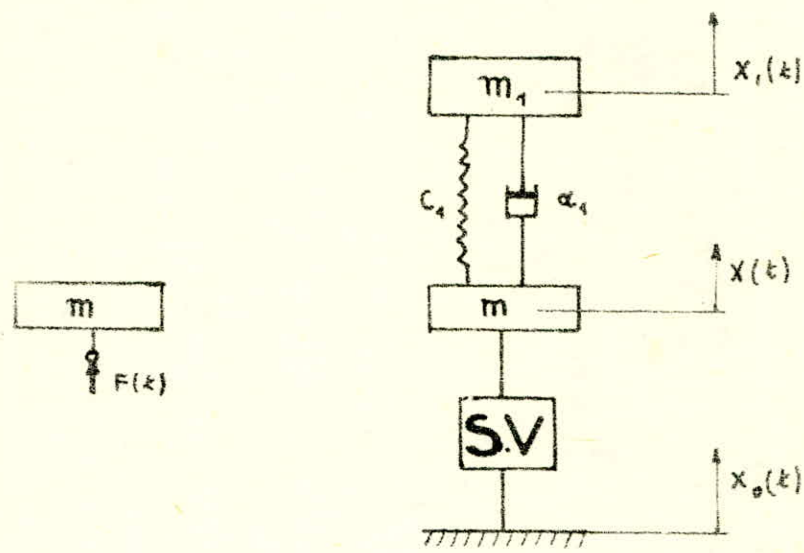
<u>Discussion des figures 1 et 2</u> :

On remarque que, dans les deux cas, la fonction $\sigma^2_{\ddot{x}\,opt} = f(\lambda)$ est bornée et possède la valeur maximale, bien déterminée, pour $\lambda = 0$

et tend vers zero lorsque λ devient très grand, isolant ainsi de plus en plus rigoureusement l'objet à vibro-isoler.

V. S.V POUR VIBRO-ISOLER UN SYSTEME DYNAMIQUE

1. $\Phi(s)$ en fonction de l'impedance de deplacement



La fonction de transfert optimum du systeme de vibro-isolation est donnée par la formule :

$$\Phi(s) = \frac{1}{R(s)\,\varphi(s)\,G(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+ \qquad (1),$$

où : $R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4\, L_1(s)\, L_1(-s)$

$$L_1(s) = \frac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$\varphi(s)$ telle que $S_{\ddot{x}_0}(s) = s^4 \cdot S_0 \cdot \varphi(s) \cdot \varphi(-s)$

$$G(s) = \frac{s^2}{L(s)}$$

$$L(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{x}(s)} = Z(s) \text{ impedance de deplacement}$$

$$G(s) = \frac{s^2}{Z(s)}$$

Donc on a d'après (1) :
$$\Phi(s) = \frac{Z(s)}{R(s)\cdot\varphi(s)\cdot s^2} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+ \qquad (2)$$

2. Schema et relations

La determination de la fonction de transfert optimum necessite la connaissance de chaque terme de la relation (2)

a) $R(s)$ est telle que $R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4 L_1(s)\,L_1(-s)$ avec

$$L_1(s) = \frac{\bar{X}_1(s)}{\bar{X}(s)} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

Donc $R(s)\,R(-s) = 1 + \lambda s^4 \dfrac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \dfrac{-\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$

Soit $R(s)\,R(-s) = \dfrac{-\lambda \alpha_1^2 s^6 + s^4 (m_1^2 + \lambda c_1^2) + s^2 (2 m_1 c_1 - \alpha_1^2) + c_1^2}{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\cdot(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}$,

forme que l'on peut ecrire ainsi :

$$R(s)\cdot R(-s) = \frac{A s^3 + B s^2 + D s + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \cdot \frac{-A s^3 + B s^2 - D s + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}$$

où A, B, D et E des coefficients qui constituent les solutions du systeme d'equations suivant :

$$\begin{cases} A = \alpha_1 \sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2\alpha_1 \sqrt{\lambda}\, D = m_1^2 + \lambda c_1^2 \\ 2 B c_1 - D^2 = 2 m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ E = c_1 \end{cases}$$

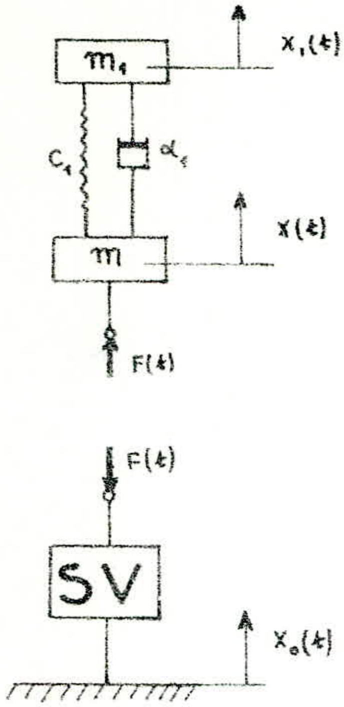
La resolution de ce systeme non lineaire en B et D nous permettera de determiner la forme de $R(s)$, soit :

$$R(s) = \frac{A s^3 + B s^2 + D s + E}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

b) L'impédance de déplacement $Z(s)$ du système est telle que :

$$Z(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}(s)}$$

On a le schéma suivant :



On peut écrire la relation suivante :

$$m\ddot{X} = F + C_1(X_1 - X) + \alpha_1(\dot{X}_1 - \dot{X})$$

En introduisant la transformation de Laplace on a :

$$m\ddot{\bar{X}}(s) = \bar{F}(s) + C_1(\bar{X}_1 - \bar{X}) + \alpha_1(\dot{\bar{X}}_1 - \dot{\bar{X}})$$

Avec l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles, on a :

$$m s^2 \bar{X}(s) = \bar{F}(s) - \bar{X}(s)(C_1 + \alpha_1 s) + \bar{X}_1(s)(C_1 + \alpha_1 s)$$

$$\Rightarrow (m s^2 + \alpha_1 s + C_1)\bar{X}(s) = \bar{F}(s) + \bar{X}_1(s)(\alpha_1 s + C_1) \qquad (3)$$

comme $\dfrac{X_1(s)}{X(s)} = \dfrac{\alpha_1 s + C_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}$, $\left(m_1 \ddot{X}_1 = -C_1(X_1 - X) - \alpha_1(\dot{X}_1 - \dot{X})\right)$

Donc (3) devient :

$$(m s^2 + \alpha_1 s + C_1)\bar{X}(s) = \bar{F}(s) + \bar{X}(s)\frac{(\alpha_1 s + C_1)^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}$$

Soit : $\left(m s^2 + \alpha_1 s + C_1 - \dfrac{(\alpha_1 s + C_1)^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}\right)\bar{X}(s) = \bar{F}(s)$, d'où

$$Z(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{X}(s)} = \frac{m m_1 s^4 + (m + m_1)\alpha_1 s^3 + (m + m_1) C_1 s^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}$$

c) $\varphi(s)$ dépend du type d'excitation de la façon :

$$S_{\ddot{X}_0}(s) = s^4 . S_0 . \varphi(s) . \varphi(-s) \quad \text{où } S_0 = \text{constante}.$$

Finalement, on peut écrire la relation donnant la fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation ; en effet, d'après (2) on a :

$$\Phi(s) = \frac{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1) c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) \cdot \varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+ \qquad (4),$$

avec $\Phi(s) = \dfrac{\bar{F}(s)}{\bar{\ddot{X}}_o(s)}$

Déterminons $H_{\frac{X}{X_o}}(s)$.

$$\Phi(s) = \frac{\bar{F}(s)}{\bar{\ddot{X}}_o(s)} = \frac{1}{s^2 \bar{X}_o(s)} \cdot \bar{X}(s) \left(\frac{m_1 m s^4 + (m+m_1)\alpha_1 s^3 + (m+m_1) c_1 s^2}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1} \right)$$

$$\Rightarrow \quad H_{\frac{X}{X_o}}(s) = \frac{\bar{X}(s)}{\bar{X}_o(s)} = \Phi(s) \cdot \frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1) c_1}$$

soit :

$$H_{\frac{X}{X_o}}(s) = \frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) \cdot \varphi(s)} \left\{ \frac{\varphi(s)}{R(-s)} \right\}_+ \qquad (5)$$

indépendante de la masse m, contrairement à $\Phi(s)$.

3. $\Phi(s)$ pour deux formes de $S_{\ddot{X}_o}(s)$

a) $S_{\ddot{X}_o}(s) = N^2$ = constante (bruit blanc)

$\varphi(s)$ sera donc :

$$\left.\begin{aligned} S_{\ddot{X}_o}(s) &= s^4 \cdot S_o \cdot \varphi(s) \cdot \varphi(-s) \\ S_{\ddot{X}_o}(s) &= s^4 \cdot N^2 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(-s)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} S_o &= N^2 \\ \varphi(s) &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

La relation (4) nous donne $\Phi(s)$:

$$\phi(s) = \frac{mm_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1) c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) \cdot \frac{1}{s^2}} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2}}{\frac{-A s^3 + B s^2 - D s + E}{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}} \right\}_+$$

Posons $M = \dfrac{m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1}{s^2(-A s^3 + B s^2 - D s + E)}$

$$M = \underbrace{\frac{F s + G}{s^2}}_{M_+} + \underbrace{\frac{H s^2 + I s + J}{-A s^3 + B s^2 - D s + E}}_{M_-}$$

(M_+ possede des pôles à gauche de l'axe imaginaire ou nuls)

Aprés calcul, on obtient : $G = \dfrac{c_1}{E}$ et $F = \dfrac{-\alpha_1 E + c_1 D}{E^2}$

donc $M_+ = \dfrac{(-\alpha_1 E + c_1 D) s + c_1 E}{E^2 s^2}$, et

$$\phi(s) = \frac{mm_1(-\alpha_1 E + c_1 D) s^3 + s^2 \left[mm_1 c_1 E + (m+m_1)(-\alpha_1 E + c_1 D)\alpha_1 \right]}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) E^2} +$$

$$\frac{s\left[(m+m_1)\alpha_1 c_1 E + (m+m_1)(-\alpha_1 E + c_1 D) c_1\right] + (m+m_1) c_1^2 E}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) E^2}$$

soit ,

$$\phi(s) = \frac{mm_1 c_1(-\alpha_1 + D) s^3 + \left[mm_1 c_1 + (m+m_1)(-\alpha_1 + D)\alpha_1\right] c_1 s^2 + (m+m_1) c_1^2 D s + (m+m_1) c_1^3}{A c_1^2 s^3 + B c_1^2 s^2 + D c_1^2 s + c_1^3}$$

---

b) $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \cdot \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

Determinons $\varphi(s)$:

$$S_{\dot{X}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \cdot s^4 \cdot \frac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)} \cdot \frac{\Omega - s}{s^2(s^2 - 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$$

d'où $\varphi(s) = \dfrac{\Omega + s}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$

Dans ce cas :

$$M = \frac{(\Omega + s)(m_1 s^2 - \alpha_1 s + c_1)}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)(-A s^3 + B s^2 - D s + E)}, \text{ ou}$$

$$M = \underbrace{\frac{F s^3 + G s^2 + H s + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}}_{M_+} + \underbrace{\frac{J s^2 + K s + L}{-A s^3 + B s^2 - D s + E}}_{M_-}$$

La determination des coefficients F, G, H, I necessite la resolution du systeme d'équations, d'inconnues F, G, H, I, J, K et L, suivant :

$$\begin{cases} -AF + J = 0. \\ FB - AG + K + 2\sqrt{\alpha_1}\, J = 0. \\ -FD + GB - AH + L + 2\sqrt{\alpha_1}\, K + J\Omega^2 = 0. \\ FE - GD + HB - AI + 2\sqrt{\alpha_1}\, L + K\Omega^2 = m_1. \\ GE - HD + BI + \Omega^2 L = m_1 \Omega - \alpha_1. \\ HE - ID = -\alpha_1 \Omega + c_1. \\ IE = \Omega c_1. \end{cases}$$

avec A, B, D, E determinés precedemment en fonction de λ.

Aprés resolution de ce systeme, on obtient M_+

$M_+ = \dfrac{F s^3 + G s^2 + H s + I}{s^2(s^2 + 2\sqrt{\alpha_1}\, s + \Omega^2)}$ et d'aprés la relation (4) on peut avoir $\Phi(s)$; en effet :

$$\Phi(s) = \frac{\left[m m_1 s^2 + (m+m_1)\alpha_1 s + (m+m_1)c_1\right]\left[F s^3 + G s^2 + H s + I\right]}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)}$$

La densité spectrale de l'excitation dependant du paramètre Ω, on voit que $\Phi(s)$ à la meme proprieté. On deduit que la fonction de transfert globale $H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)$ depend aussi de Ω et par consequent, la dispersion de l'acceleration de l'objet à vibro-isoler (m_1) s'en trouvera influencée.

Determinons donc $\left|H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)\right|^2$:

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_0} = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}} \cdot \frac{\bar{X}}{\bar{X}_0} = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)} \Longrightarrow$$

$$H_{\frac{x_1}{x}}(s) = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)} \quad \text{d'où},$$

$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega) = \frac{\left[F\alpha_1 \omega^4 - (\alpha_1 H + c_1 G)\omega^2 + c_1 I\right] + j\left[(\alpha_1 I + c_1 H)\omega - \omega^3(\alpha_1 G + c_1 F)\right]}{\left[A\omega^4 - (B\Omega + D)\omega^2 + E\Omega\right] + j\left[(D\Omega + E)\omega - \omega^3(A\Omega + B)\right]}$$

$$\left|H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)\right|^2 = \frac{\left[F\alpha_1 \omega^4 - (\alpha_1 H + c_1 G)\omega^2 + c_1 I\right]^2 + \left[(\alpha_1 I + c_1 H)\omega - \omega^3(\alpha_1 G + c_1 F)\right]}{\left[A\omega^4 - (B\Omega + D)\omega^2 + E\Omega\right]^2 + \left[(D\Omega + E)\omega - \omega^3(A\Omega + B)\right]}$$

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{F^2\alpha_1^2\omega^8 + \omega^6\left[-2F\alpha_1(\alpha_1 H + c_1 G) + (\alpha_1 G + c_1 F)^2\right] + \omega^4\left[2F\alpha_1 c_1 I + (\alpha_1 H + c_1 G)^2 - 2(\alpha_1 G + c_1 F)(\alpha_1 I + c_1 H)\right] + \omega^2\left[(\alpha_1 I + c_1 F)^2 - 2c_1 I(\alpha_1 H + c_1 G)\right] + c_1^2 I^2}{A^2\omega^8 + \omega^6\left[(A\Omega + B)^2 - 2A(B\Omega + D)\right] + \omega^4\left[2AE\Omega + (B\Omega + D)^2 - 2(A\Omega + B)(D\Omega + E)\right] + \omega^2\left[(D\Omega + E)^2 - 2E\Omega(B\Omega + D)\right] + E^2\Omega^2}$$

Traçons, en fonction de ω, les courbes $|H(j\omega)|^2$ et $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$ pour différentes valeurs de Ω.

* Pour $\omega = 0$, $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{c_1^2 I^2}{E^2\Omega^2} = 1$ avec $\Omega \neq 0$

Quand $\omega \to \infty$, $|H(j\omega)|^2 \to \dfrac{F^2\alpha_1^2}{A^2} = \dfrac{F^2\alpha_1^2}{\alpha_1^2 \lambda} = \dfrac{F^2}{\lambda}$

et pour λ très grand (cas où l'on a meilleure vibro-isolation)

$|H(j\omega)|^2 \longrightarrow 0$

* $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \dfrac{\Omega^2 - s^2}{s^4 + s^2(2\Omega^2 - 4\alpha_1) + \Omega^4} \Rightarrow$

$$S_{\ddot{x}_0}(\omega) = 2\alpha_1 N^2 \cdot \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\omega^4 - \omega^2(2\Omega^2 - 4\alpha_1) + \Omega^4}$$

on détermine facilement l'allure de la courbe, cette dernière possède :

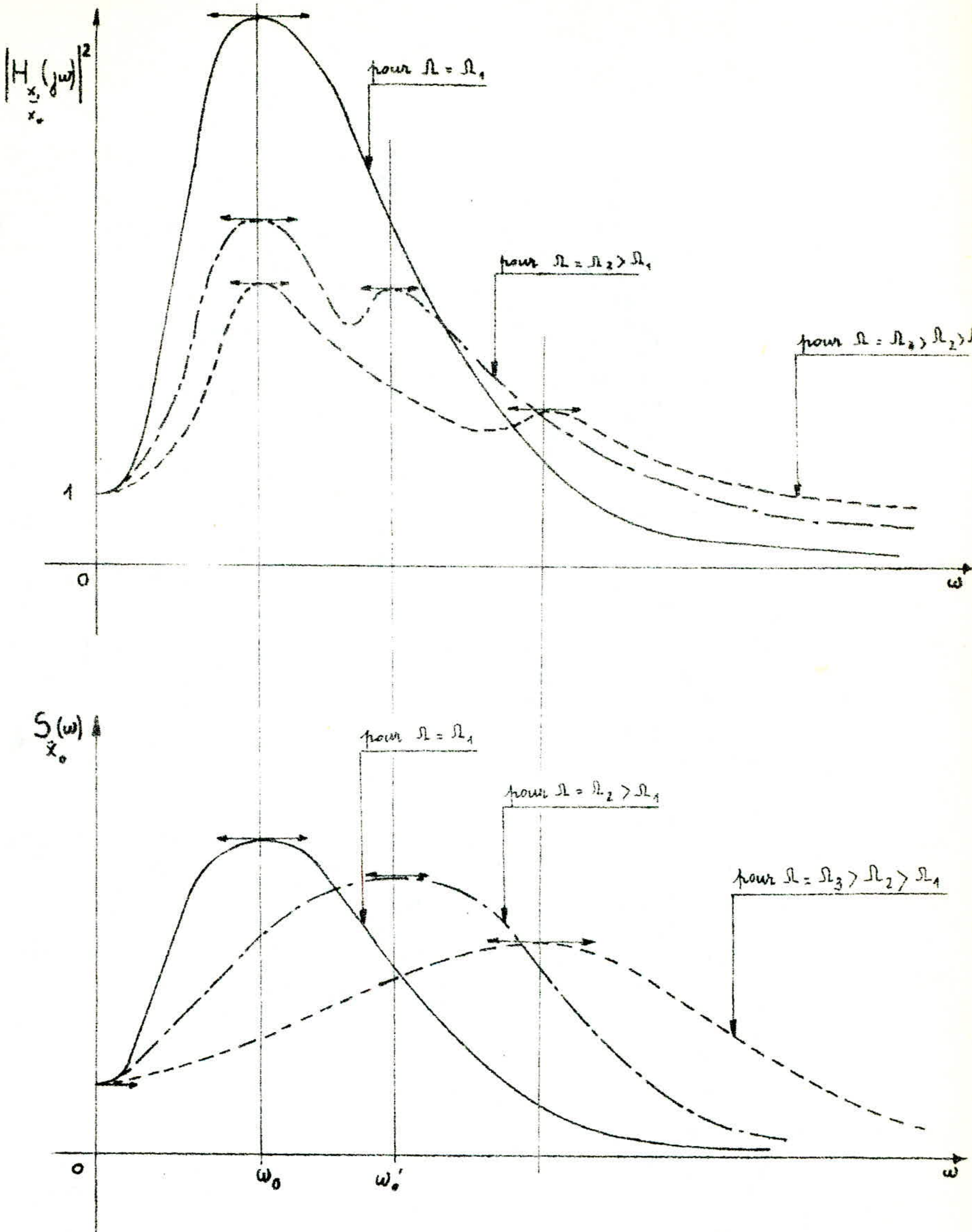
minimum au point $\omega = 0$

maximum aux points $\omega_0 = \pm\sqrt{1 + \Omega\sqrt{3\Omega^2 - 4\alpha_1}}$

avec la condition $\Omega\sqrt{3\Omega^2 - 4\alpha_1} > 1$

Si l'on se borne à utiliser seulement les fréquences positives, la fonction $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$ étant paire, on considèrera la moitié à droite en doublant l'aire limitée par cette moitié de la courbe.

On aura ainsi les courbes suivantes :



$\left|H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)\right|^2$
pour $\Omega = \Omega_1$
pour $\Omega = \Omega_2 > \Omega_1$
pour $\Omega = \Omega_3 > \Omega_2 > \Omega_1$
1
0
ω
$S_{\ddot{x}_0}(\omega)$
pour $\Omega = \Omega_1$
pour $\Omega = \Omega_2 > \Omega_1$
pour $\Omega = \Omega_3 > \Omega_2 > \Omega_1$
0
ω_0
ω_0'
ω

Interprétation des courbes :

Pour $\Omega = \Omega_1$, la courbe $|H(j\omega)|^2$ passe par un seul "maximal" (dérivée nulle) ce qui correspond au point ω_0 où la courbe $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$ passe par son maximum.

Lorsque Ω devient de plus en plus grand, on distingue deux points de résonance, le premier au point ω_0 et le deuxième au point ω_0' où la courbe $S_{\ddot{x}_0}(\omega)$ passe par son maximum, cette dernière s'étire vers la droite ce qui fait diminuer son maximum.

De même, on remarque que ces points de résonance font correspondre des extrémas de plus en plus faibles quand Ω croît.

On déduit que l'on a meilleure vibro-isolation quand Ω est grand, car $|H(j\omega)|^2$ s'en trouvera diminué et par conséquent $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ le sera aussi.

Cette étude en fréquence nous a permis donc de conclure que le paramètre Ω a une grande influence sur la qualité du système de vibro-isolation optimum.

Réalisation physique des systèmes de vibro-isolation optimum :

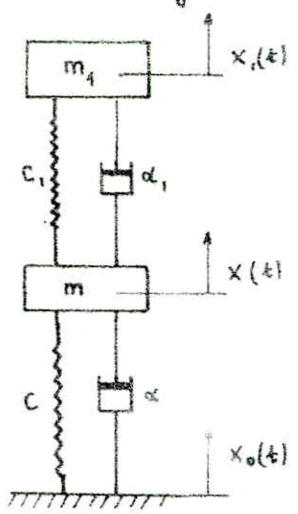
Après l'obtention de la relation donnant la fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation pour une forme d'excitation donnée, la réalisation physique de ce système se fera par l'intermédiaire de systèmes actifs et passifs ou de l'un d'entre eux seulement, combinant les uns et les autres en mesurant, à chaque cas, la dispersion de l'accélération de l'objet, jusqu'à l'obtention d'une valeur voisine de celle donnée par le cas optimum.

Notons que dans le cas où le système à vibro-isoler est un corps rigide représenté par une masse m et l'excitation étant une forme du bruit blanc par exple, la réalisation physique du système de vibro-isolation optimum est constituée par un système passif dont les paramètres sont donnés en fonction de ρ ou λ (multiplicateur de Lagrange).

4- Comparaison des resultats

Pour ce faire, on considerera un systeme particulier auquel on calculera la fonction de transfert globale $H_{\frac{x_1}{x_0}}(s)$ et on comparera cette dernière avec celle relative au cas où l'on a un systeme de vibro-isolation optimum.

Soit le systeme suivant :



$$H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{x_0}}(s)$$

Determinons $H_{\frac{x}{x_0}}(s)$ relative à ce cas de figure :

$$m\ddot{x} = -c(x-x_0) - \alpha(\dot{x}-\dot{x}_0) + c_1(x_1-x) + \alpha_1(\dot{x}_1-\dot{x})$$

$$ms^2\bar{x}(s) = -\bar{x}(s)\big((\alpha s+c)+(\alpha_1 s+c_1)\big) + \bar{x}_0(s)(\alpha s+c) + \bar{x}_1(s)(\alpha_1 s+c_1)$$

comme : $\dfrac{\bar{x}_1(s)}{\bar{x}(s)} = \dfrac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$, on a :

$$\bar{x}(s)\left[ms^2 + (\alpha s+c) + (\alpha_1 s+c_1) - \frac{(\alpha_1 s+c_1)^2}{m_1 s^2+\alpha_1 s+c_1}\right] = x_0(s)(\alpha s+c)$$

$$\bar{x}(s)\left\{\left[ms^2+(\alpha s+c)+(\alpha_1 s+c_1)\right]\left[m_1 s^2+(\alpha_1 s+c_1)\right] - (\alpha_1 s+c_1)^2\right\} = x_0(s)(\alpha s+c)(m_1 s^2+\alpha_1 s+c_1)$$

$$\bar{x}(s)\left[mm_1 s^4 + (\alpha_1 s+c_1)(m+m_1)s^2 + (\alpha s+c)(\alpha_1 s+c_1) + m_1(\alpha s+c)s^2\right] = x_0(s)(\alpha s+c)(m_1 s^2+\alpha_1 s+c_1)$$

Soit $$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{m_1\alpha s^3 + s^2(m_1 c + \alpha\alpha_1) + s(\alpha c_1 + c\alpha_1) + cc_1}{mm_1 s^4 + s^3\left[\alpha_1(m+m_1)+\alpha m_1\right] + s^2\left[c_1(m+m_1) + cm_1 + \alpha\alpha_1\right] + s(c_1\alpha+\alpha_1 c) + cc_1}$$

$$H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}}}(s) = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$, d'où on obtient $H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)$:

$$H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{(\alpha s + c)(\alpha_1 s + c_1)}{mm_1 s^4 + s^3\left[\alpha_1(m+m_1) + \alpha m_1\right] + s^2\left[c_1(m+m_1) + cm_1 + \alpha\alpha_1\right] + s(c_1\alpha + \alpha_1 c) + cc_1}$$

soit : $$H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\alpha\alpha_1 s^2 + s(\alpha c_1 + \alpha_1 c) + cc_1}{mm_1 s^4 + s^3\left[\alpha_1(m+m_1) + \alpha m_1\right] + s^2\left[c_1(m+m_1) + cm_1 + \alpha\alpha_1\right] + s(c_1\alpha + \alpha_1 c) + cc_1}$$

Dans le cas où l'on a un systeme de vibro-isolation optimum on a, compte tenu de la relation (5) :

$$H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\Big|_{opt} = \frac{\alpha_1 s + c_1}{(As^3 + Bs^2 + Ds + E)\cdot \Psi(s)}\left\{\frac{\Psi(s)}{R(-s)}\right\}_+$$

En comparant $H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)$ et $H_{\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_0}}(s)\Big|_{opt}$, on remarque que la première depend de la masse m servant de support pour le systeme de vibro-isolation existant entre les deux masses m et m_1, au contraire de la deuxieme. Cette dependance se repercute sur la dispersion de l'acceleration de l'objet m_1, à la façon suivante :

$$\sigma^2_{\ddot{x}_1} = N^2\,\frac{N_1}{D_1}$$ pour le cas d'une excitation par un bruit blanc $S_{\ddot{x}_0}(s) = N^2$

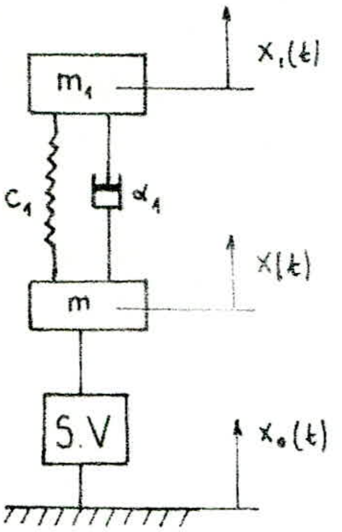
avec :

$$\begin{aligned}N_1 = &-mm_1\alpha_1^2\alpha^3 c_1 - mm_1\alpha^2\alpha_1^3 c - m^2 m_1\alpha^2\alpha_1 c_1^2 - m^2 m_1\alpha_1^3 c^2 - mm_1^2\alpha^3 c_1^2 - mm_1^2\alpha\alpha_1^2 c^2 +\\ &- mm_1^2\alpha^2\alpha_1 c_1^2 - mm_1^2\alpha_1^3 c^2 - m^3 m_1\alpha_1 cc_1^2 - m^2 m_1\alpha\alpha_1^2 cc_1 - 2m^2 m_1^2\alpha_1 cc_1^2 - mm_1^2\alpha^2\alpha_1 cc_1 +\\ &- mm_1^3\alpha cc_1^2 - mm_1^3\alpha c^2 c_1 - mm_1^2\alpha\alpha_1^2 cc_1 - mm_1^3\alpha_1 c^2 c_1 - mm_1^3\alpha_1 cc_1^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_1 = 2mm_1\big(&2mm_1\alpha\alpha_1 cc_1 - m^2\alpha\alpha_1 c_1^2 - m\alpha^2\alpha_1^2 c_1 - 2mm_1\alpha\alpha_1 c_1^2 - m_1\alpha^3\alpha_1 c_1 - m_1^2\alpha^2 c_1^2 +\\ &- m_1\alpha^2\alpha_1^2 c_1 - m_1^2\alpha\alpha_1 c_1^2 - m\alpha\alpha_1^3 c - m_1\alpha^2\alpha_1^2 c - m_1^2\alpha\alpha_1 c^2 - m_1\alpha\alpha_1^3 c - m_1^2\alpha_1^2 c^2\big)\end{aligned}$$

On voit que, et N_1 et D_1 dependent de m. L'utilisation de ce systeme de vibro-isolation necessite donc l'etude de l'optimisation du rapport $\frac{N_1}{D_1}$.

5. Détermination de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ (respectivement de $\sigma^2_{x-x_0}$) à partir de $\sigma^2_{x-x_0}$ (respectivement de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$) tout en respectant le critère d'optimisation :



Le critère d'optimisation est donnée par la fonctionnelle :

$$C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda\, \sigma^2_{\ddot{x}_1} = \text{minimum},$$

critère nous donnant la fonction de transfert optimale du système de vibro-isolation $H_{\frac{x}{x_0}}(s)$, connaissant la densité spectrale de l'accélération, $S_{\ddot{x}_0}(s)$, de l'excitation.

($H_{\frac{x}{x_0}}(s)$ est donnée par la relation (5))

Déterminons $\sigma^2_{x-x_0}$ et $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ en fonction de λ :

on sait que :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma^2_{\ddot{x}_1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x_1}{x_0}}(j\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega \\
\sigma^2_{x-x_0} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(j\omega)\right|^2 S_{\ddot{x}_0}(\omega)\, d\omega
\end{aligned}\right\}$$

Dispersions de l'écart $x - x_0$ et de l'accélération $\ddot{x}_1$,

avec :

$* \; H_{\frac{x_1}{x_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \times H_{\frac{x}{x_0}}(s)$ où $H_{\frac{x_1}{x}}(s) = \dfrac{\alpha_1 s + C_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + C_1}$

$* \; H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \dfrac{\bar{X}(s) - \bar{X}_0(s)}{s^2\, \bar{X}_0(s)} = \dfrac{1}{s^2}\left[\dfrac{\bar{X}(s)}{X_0(s)} - 1\right] = \dfrac{1}{s^2}\left[H_{\frac{x}{x_0}}(s) - 1\right]$

Effectuons le calcul en question pour le cas où l'excitation est un bruit blanc $\left(S_{\ddot{x}_0}(\omega) = N^2 = \text{constante}\right)$.

D'après la relation (5) on a : $H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) = \dfrac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)} \left\{\dfrac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ \cdot \dfrac{1}{\varphi(s)}$

On a vu (Paragraphe I.3) que :

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{et} \quad \left\{\frac{\varphi(s)}{R(-s)}\right\}_+ = \frac{(-\alpha_1 E + c_1 D)\, s + c_1 E}{E^2 s^2}$$

Donc : $$H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{(m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1)\left[(-\alpha_1 c_1 + c_1 D)\, s + c_1^2\right]}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) \cdot E^2 s^2 \cdot \frac{1}{s^2}} \; ; (6) \quad \text{avec } E = c_1.$$

* Calcul de $\sigma_{\ddot{x}_1}$:

$$H_{\frac{x_1}{\ddot{x}_0}}(s) = H_{\frac{x_1}{x}}(s) \cdot H_{\frac{x}{\ddot{x}_0}}(s) \quad \text{avec} \quad H_{\frac{x_1}{x}}(s) = \frac{\alpha_1 s + c_1}{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}$$

Donc $$H_{\frac{x_1}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{(\alpha_1 s + c_1)\left[(-\alpha_1 c_1 + c_1 D) s + c_1^2\right]}{c_1^2 (A s^3 + B s^2 + D s + c_1)}$$ soit,

$$H_{\frac{x_1}{\ddot{x}_0}}(s) = \frac{\alpha_1(-\alpha_1 + D) s^2 + c_1 D s + c_1^2}{c_1 (A s^3 + B s^2 + D s + c_1)}$$ d'où,

$$H_{\frac{x_1}{\ddot{x}_0}}(j\omega) = \frac{c_1^2 - \alpha_1(-\alpha_1 + D)\omega^2 + j c_1 D \omega}{(c_1^2 - c_1 B \omega^2) + j(c_1 D \omega - c_1 A \omega^3)}$$ et donc :

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = N^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[c_1^2 - \alpha_1(-\alpha_1 + D)\omega^2\right]^2 + c_1^2 D^2 \omega^2}{\left|(c_1^2 - c_1 B\omega^2) + j(c_1 D\omega - c_1 A\omega^3)\right|^2}\, d\omega,$$ soit :

$$\sigma_{\ddot{x}_1}^2 = N^2 \cdot \frac{-D\alpha_1^2(-\alpha_1 + D)^2 + 2Ac_1^2\alpha_1(-\alpha_1 + D) - Ac_1^2(D^2 + Bc_1)}{2Ac_1^2(Ac_1 - BD)} \; ; (7)$$

* Calcul de $\sigma^2_{x-x_0}$:

on détermine $H_{\frac{x-x_0}{\ddot{x}_0}}(s) = \dfrac{\left[m_1(-\alpha_1 E + c_1 D) - AE^2\right]s + \left[m_1 c_1 E + \alpha_1(-\alpha_1 E + c_1 D)^2 - BE^2\right]}{AE^2 s^3 + BE^2 s^2 + DE^2 s + E^3}$

avec $E = c_1$

D'où : $$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[m_1 c_1^2 + \alpha_1 c_1(-\alpha_1 + D) - Bc_1^2\right]^2 + \omega^2\left[m_1 c_1(-\alpha_1 + D) - Ac_1^2\right]^2}{\left|(c_1^3 - Bc_1^2\omega^2) + j\,(Dc_1^2\omega - Ac_1^2\omega^3)\right|^2}\, d\omega$$

soit :

$$\sigma^2_{x-x_0} = N^2 \cdot \frac{-Ac_1\left[m_1(-\alpha_1 + D) - Ac_1^2\right]^2 - AB\left[m_1 c_1 + \alpha_1(-\alpha_1 + D) - Bc_1\right]^2}{2Ac_1^3\,(Ac_1 - BD)} \; ; \quad (8)$$

A, B et D étant des fonctions de λ, $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ et $\sigma^2_{x-x_0}$ dépendent donc aussi de λ.

Pour illustrer la détermination de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ (ou de $\sigma^2_{x-x_0}$) à partir de $\sigma^2_{x-x_0}$ (ou de $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$) tout en respectant le critère d'optimisation, considérons un exemple auquel on effectuera ce calcul.

Soit le cas le plus fréquent où l'on désire vibro-isoler un modèle dynamique d'un homme opérateur (conducteur d'un véhicule, le modèle dynamique étant le fauteuil avec son système de vibro-isolation).

Les données sont :

La masse $m_1 = 80{,}862$ Kg.
Le ressort $c_1 = 7961{,}05$ Kg/s^2.
L'amortisseur $\alpha_1 = 141{,}688$ Kg/s.

La détermination de la fonction optimum du système de vibro-isolation nécessite, en premier lieu, la résolution du système d'équations en A, B, D et E suivant :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} A = \alpha_1\sqrt{\lambda} \\ B^2 - 2\alpha_1\sqrt{\lambda}\, D = m_1^2 + \lambda c_1^2 \\ 2Bc_1 - D^2 = 2m_1 c_1 - \alpha_1^2 \\ E = c_1 \end{cases}$$

λ étant le multiplicateur de Lagrange variant de 0 à l'∞.

Pour ce faire, utilisons la méthode de NEWTON, basée sur les approximations successives :

Le système (I) peut se mettre sous la forme :

$$(\mathrm{II})\begin{cases} A = \alpha_1\sqrt{\lambda} \\ f_1(x) = B^2 - 2\alpha_1\sqrt{\lambda}\,D - (m_1^2 + \lambda c_1^2) = 0 \\ f_2(x) = 2Bc_1 - D^2 - (2m_1c_1 - \alpha_1^2) = 0 \\ E = c_1 \end{cases}$$

où x est le vecteur $\begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}$, et si l'on pose $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, le système s'écrit comme suit :

$$(\mathrm{III})\begin{cases} A = \alpha_1\sqrt{\lambda} \\ f(x) = 0 \\ E = c_1 \end{cases}$$

L'algorithme permettant de résoudre ce système concernera seulement la résolution de l'équation $f(x) = 0$ représentant au juste un système de deux équations à deux inconnues non linéaire et paramétré, le paramètre étant λ. A et E sont directement donnés par leur relation.

Soit $[A]$ la matrice : $[A] = \begin{bmatrix} \frac{-2D}{\Delta} & \frac{2\alpha_1\sqrt{\lambda}}{\Delta} \\ \frac{-2c_1}{\Delta} & \frac{2B}{\Delta} \end{bmatrix}$,

avec $\Delta = 4\alpha_1c_1\sqrt{\lambda} - 4BD$.

Pour l'établissement du programme permettant de résoudre le système, utilisons les notations :

$X(1) = A$	$S = \alpha_1$	$Z = [A] \times f(x)$
$X(2) = B$	$R = m_1$	$V = \Delta$
$X(3) = D$	$C = c_1$	$P = \lambda$
$X(4) = E$		

De même, posons $\lambda = \lambda_0 \cdot \dfrac{\rho}{1-\rho}$, ρ variera donc de 0 à 1

avec, par exemple, un pas de 0,1, et $\lambda_0 = 1\ [s^4]$

Dans le programme $\rho = H$.

* Pour le cas où l'excitation est un bruit blanc, la fonction de transfert optimum du système de vibro-isolation est donnée par la relation (6) (paragraphe V.5) et les dispersions $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ et $\sigma^2_{x-x_0}$ par les relations (7) et (8).

La détermination de A, B, D et E en fonction de λ nous donnera $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ et $\sigma^2_{x-x_0}$ en fonction de λ. Ainsi, posons dans le programme $\sigma^2_{\ddot{x}_1} = T$ et $\sigma^2_{x-x_0} = D$

Le programme est le suivant :

```
      DIMENSION A(2,2), X(4), F(2), Z(2)
      H = 0.
      X(1) = 0.0000
      X(2) = 0.1
      X(3) = 2.
      X(4) = 79.6105
      S = 1.41688
      R = 0.080862
      C = 79.6105
600   U = 0
      P = 0
      V = 0
      P = P + H/(1.-H)
      B = SQRT (P)
      U = U + B
      I = 1
      J = I + 1
      K = J + 1
      L = K + 1
      F(I) = X(J)**2 - 2*S*U*X(K) - (R**2 + P*C**2)
      F(J) = 2*X(J)*C - X(K)**2 - (2*R*C - S**2)
      Y = ABS (F(I))
      B = ABS(F(J))
      IF (Y.LT.0.0001) GO TO 700
      GO TO 500
700   IF (B.LT.0.0001) GO TO 400
      GOTO 500
```

```
400     X(I) = S*U
        WRITE (   ,200) (X(I), I = 1,4)
200     FØRMAT (2X,3HX1=, F12.5, 2X, 3HX2=,F12.5, 2X, 3HX3=
     1  , F12.5 , 2X, 3HX4=, F12.5)
        DEN = 0.
        DN = 0.
        TN = 0.
        T = 0.
        D = 0.
        DEN = DEN + 2 * X(I) *(C**2) * (X(I) * C - X(J) * X(K))
        TN = TN - X(K) * (S**2) * ((X(K)-S)** 2)
        TN = TN + 2* X(I) * (C**2) * S * (X(K) - S)
        TN = TN - X(I) * (C**2) * ((X(K)**2) + X(J) * C)
        DN = DN - X(I) * C * ((R * (X(K) - S) - X(I) * C) ** 2)
        DN = DN - X(I) * X(J) * ((R*C + S* (X(K)-S) - X(J) * C) ** 2)
        T = TN / DEN
        D = DN / (C * DEN)
        WRITE (   ,202) T, D
202     FØRMAT (2X, 2HT=, F12.5, 2X, 2HD=, F12.5)
        H = H + 0.1
        IF (H.EQ. 1.0) GØ TØ 900
        GØ TØ 600
500     V = V + 4*S*C*U - 4 * X(J) * X(K)
        A(I,I) = - 2* X(K) /V
        A(I,J) = 2*S*U/V
        A(J,I) = - 2*C/V
        A(J,J) = 2*X(J)/V
        Z(I) = A(I,I) * F(I) + A(I,J) * F(J)
        Z(J) = A(J,I) * F(I) + A(J,J) * F(J)
        X(J) = X(J) - Z(I)
        X(K) = X(K) - Z(J)
        GØ TØ 600
900     STØP
        END
```

La resolution du systeme nous donnera les resultats suivants :

figure 1 :

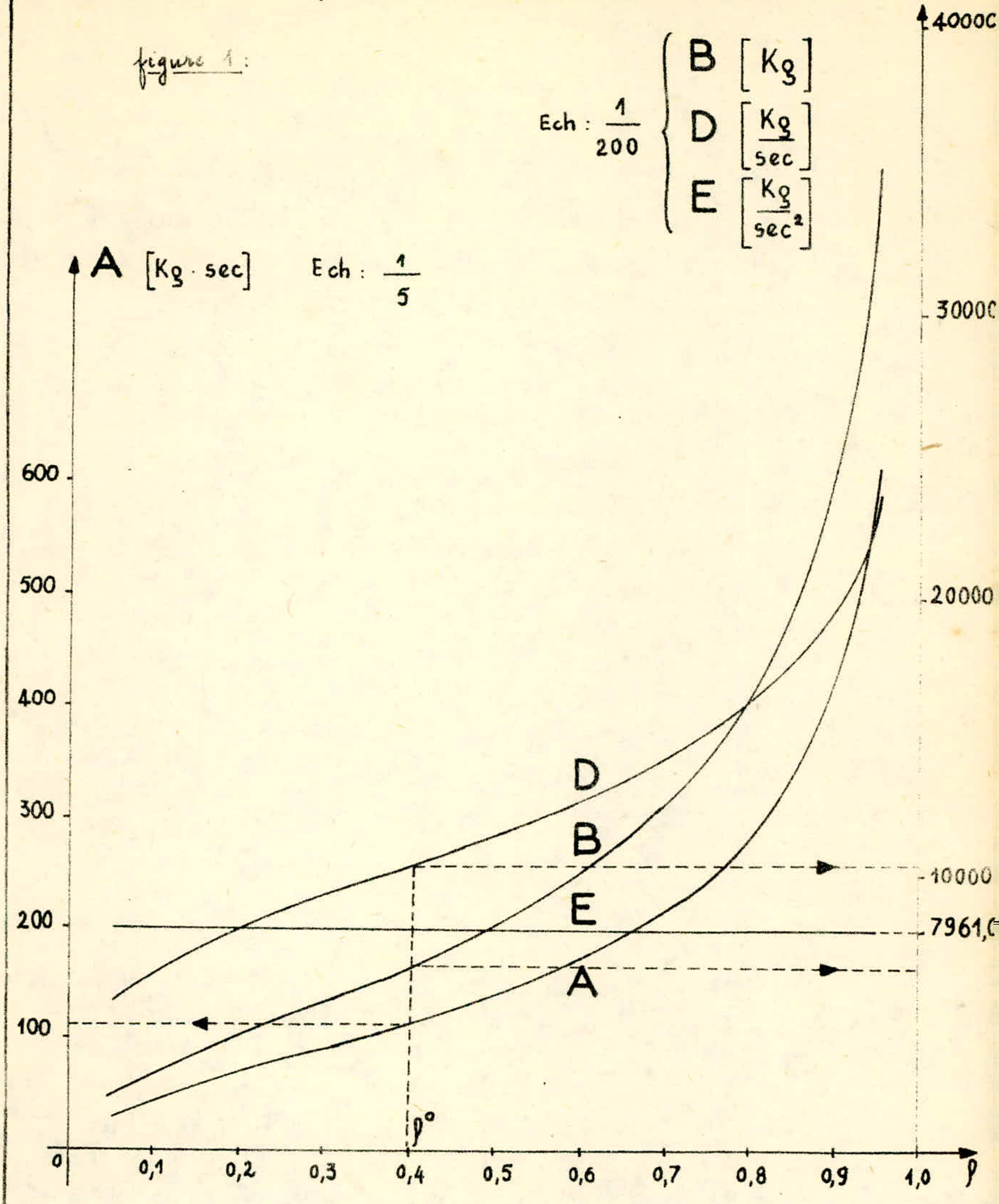
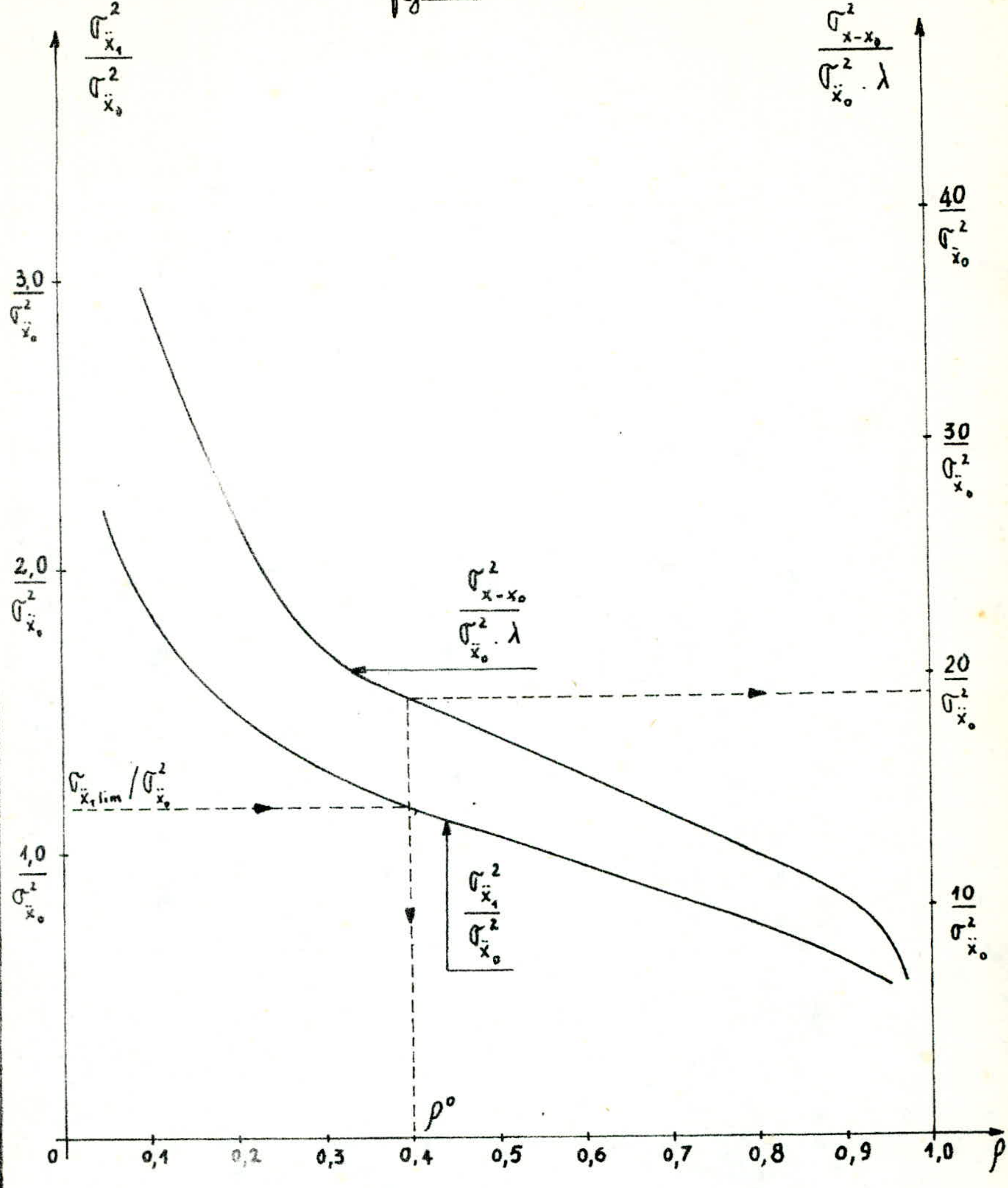


figure 2 :



Interpretation des resultats :

En limitant par exple $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ à une valeur $\sigma^2_{\ddot{x}_1 lim}$, on determine la valeur de ρ correspondante (dans notre cas, $\rho = 0,4$) et la valeur de $\sigma^2_{x-x_0}$ correspondante respectant ainsi le critere d'optimisation.

Ayant la valeur de β, on determine les coefficients A, B, D et E et l'on deduit la fonction de transfert du systeme de vibro-isolation optimum.

Dans notre cas $\beta = 0{,}4$, on a :

$$A = 1\,15{,}69 \quad [KG \cdot sec]$$
$$B = 66\,81{,}13 \quad [KG]$$
$$D = 103\,0{,}868 \quad [KG/sec]$$
$$E = 79\,61{,}05 \quad [KG/sec^2]$$

La fonction de transfert du S.V optimum est : d'après (6),

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{m_1 s^2 + \alpha_1 s + c_1}{(A s^3 + B s^2 + D s + E) \cdot \frac{1}{s^2}} \cdot \frac{(-\alpha_1 E + c_1 D) s + c_1 E}{E^2 s^2}$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{m_1(-\alpha_1 E + c_1 D) s^3 + s^2 \left[m_1 c_1 E + \alpha_1 (-\alpha_1 E + c_1 D) \right] + s \left[\alpha_1 c_1 E + c_1 (-\alpha_1 E + c_1 D) \right] + c_1^2 E}{A E^2 s^3 + B E^2 s^2 + D E^2 s + E^3}$$

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{8{,}22\, s^3 + 150{,}5\, s^2 + 8206{,}8\, s + 6337{,}8}{92{,}1\, s^3 + 5318{,}9\, s^2 + 8206{,}8\, s + 6337{,}8}$$

* Pour le cas où l'excitation est telle que $S_{\ddot{x}_0}(s) = 2\alpha_1 N^2 \cdot \dfrac{\Omega^2 - s^2}{(\Omega^2 + s^2)^2 - 4\alpha_1 s^2}$

La determination de la fonction de transfert du systeme de vibro-isolation optimum necessite la resolution du systeme d'equations (donné au paragraphe V.3.b) en F, G, H, I, J, K et L suivant :

$$\begin{cases} -A F + 0 \cdot G + 0 \cdot H + 0 \cdot I + 1 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L = 0 \\ 0 \cdot F + E \cdot G - D \cdot H + B \cdot I + 0 \cdot J + 0 \cdot K + \Omega^2 \cdot L = m_1 \Omega - \alpha_1 \\ 0 \cdot F + 0 \cdot G + E \cdot H - D \cdot I + 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L = -\alpha_1 \Omega + c_1 \\ 0 \cdot F + 0 \cdot G + 0 \cdot H + E \cdot I + 0 \cdot J + 0 \cdot K + 0 \cdot L = \Omega c_1 \\ B \cdot F - A \cdot G + 0 \cdot H + 0 \cdot I + 2\sqrt{\alpha_1} J + 1 \cdot K + 0 \cdot L = 0 \\ -D \cdot F + B \cdot G - A \cdot H + 0 \cdot I + \Omega^2 J + 2\sqrt{\alpha_1} K + 1 \cdot L = 0 \\ E \cdot F - 0 \cdot G + B \cdot H - A \cdot I + 0 \cdot J + \Omega^2 K + 2\sqrt{\alpha_1} \cdot L = m_1 \end{cases}$$

Utilisons la methode de GAUSS :

En posant $X(1) = F$ $\quad X(3) = H$ $\quad X(5) = J$ $\quad X(7) = L$

$X(2) = G$ $\quad X(4) = I$ $\quad X(6) = K$

on peut ecrire le systeme precedent de la façon :

$$A(1,1)\,X(1) + A(1,2)\,X(2) + ,\dots, + A(1,7)\,X(7) = A(1,8)$$
$$A(2,1)\,X(1) + A(2,2)\,X(2) + ,\dots, + A(2,7)\,X(7) = A(2,8)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A(7,1)\,X(1) + A(7,2)\,X(2) + ,\dots, + A(7,7)\,X(7) = A(7,8)$$

avec :

$A(1,1) = -A$; $A(1,2) = A(1,3) = A(1,4) = A(1,6) = A(1,7) = 0$; $A(1,5) = 1$

$A(2,1) = A(2,5) = A(2,6) = 0$; $A(2,2) = E$; $A(2,3) = -D$; $A(2,4) = B$; $A(2,7) = \Omega^2$

$A(3,1) = A(3,2) = A(3,5) = A(3,6) = A(3,7) = 0$; $A(3,3) = E$; $A(3,4) = -D$

$A(4,1) = A(4,2) = A(4,3) = A(4,5) = A(4,6) = A(4,7) = 0$; $A(4,4) = E$

$A(5,1) = B$; $A(5,2) = -A$; $A(5,3) = A(5,4) = A(5,7) = 0$; $A(5,5) = 2\sqrt{\alpha_1}$; $A(5,6)$

$A(6,1) = -D$; $A(6,2) = B$; $A(6,3) = -A$; $A(6,4) = 0$; $A(6,5) = \Omega^2$; $A(6,6) = 2\sqrt{\alpha_1}$; $A(6$

$A(7,1) = E$; $A(7,2) = -D$; $A(7,3) = B$; $A(7,4) = -A$; $A(7,5) = 0$; $A(7,6) = \Omega^2$; $A(7,7)$

$A(1,8) = A(5,8) = A(6,8) = 0$; $A(2,8) = m_1\Omega - \alpha_1$; $A(3,8) = -\alpha_1\Omega + c_1$; $A(4,8) = \Omega$

$A(7,8) = m_1$.

Soit :

* $B(J) = B(1,J) = A(1,J)/A(1,1)$; $J = 2,\dots,8$

$A(I,J,1) = C(I,J) = A(I,J) - A(I,1)\,B(1,J)$; $I = 2,\dots,7$; $J = 2,\dots,8$.

* $D(J) = B(2,J,1) = A(2,J,1)/A(2,2,1)$; $J = 3,\dots,8$.

$P(I,J) = A(I,J,2) = A(I,J,1) - A(I,2,1)\,B(2,J,1)$; $I = 3,\dots,7$; $J = 3,\dots,8$

* $Q(J) = B(3,J,2) = A(3,J,2)/A(3,3,2)$; $J = 4,\dots,8$.

$R(I,J) = A(I,J,3) = A(I,J,2) - A(I,3,2)\,B(3,J,2)$; $I = 4,\dots,7$; $J = 4,\dots,8$

* $S(J) = B(4,J,3) = A(4,J,3)/A(4,4,3)$; $J = 5,\dots,8$

$T(I,J) = A(I,J,4) = A(I,J,3) - A(I,4,3)\,B(4,J,3)$; $I = 5,6,7$; $J = 5,\dots,8$

* $V(J) = B(5,J,4) = A(5,J,4)/A(5,5,4)$; $J = 6,7,8$.

$W(I,J) = A(I,J,5) = A(I,J,4) - A(I,5,4)\,B(5,J,4)$; $I = 6,7$; $J = 6,7,8$.

* $Y(J) = B(6,J,5) = A(6,J,5)/A(6,6,5)$; $J = 7,8$

$Z(I,J) = A(I,J,6) = A(I,J,5) - A(I,6,5)\,B(6,J,5)$; $I = 7$; $J = 7,8$

* $\phi(J) = B(7,J,6) = A(7,J,6)/A(7,7,6)$; $J = 8$

On deduit ensuite :

$X(7) = B(7,8,6)$

$X(6) = B(6,8,5) - B(6,7,5)\,X(7)$

$X(5) = B(5,8,4) - B(5,7,4)\,X(7) - B(5,6,4)\,X(6)$

$X(4) = B(4,8,3) - B(4,7,3)\,X(7) - B(4,6,3)\,X(6) - B(4,5,3)\,X(5)$

$X(3) = B(3,8,2) - B(3,7,2)\,X(7) - B(3,6,2)\,X(6) - B(3,5,2)\,X(5) - B(3,4,2)\,X(4)$

$X(2) = B(2,8,1) - B(2,7,1)\,X(7) - B(2,6,1)\,X(6) - B(2,5,1)\,X(5) - B(2,4,1)\,X(4) - B(2,3,1)\,X($

$X(1) = B(1,8) - B(1,7)\,X(7) - B(1,6)\,X(6) - B(1,5)\,X(5) - B(1,4)\,X(4) - B(1,3)\,X(3) - B(1,2)\,X($

Posons $\Omega = \Omega_0 \cdot \dfrac{\delta}{1-\delta}$ $\quad\delta$ allant de 0 à 0,9 par pas de 0,1 , $\Omega_0 = 1$.

Etablissement du programme pour la resolution de ce systeme .

posons $\delta \rightarrow Q$, $\Omega = \Phi$.

```
      DIMENSIØN  Y(7,8) , A(7) , B(7) , C(6,7) , D(6) , P(5,6) , Q(5) , R(4,5) , S(4) , T(3,4) , V(3) ,
     W(2,3) , Y(2) , Z(1,2) , Φ(1) , A(2,2) , X(4) , F(2) , Z(2)
      H = 0.
      calcul de X(I)  (I = 1,4)
      Determination de T, D
      Q = 0.
      Φ = 0.
300   Φ = Q/(1. - Q)
      Y(1,1) = - X(1)
      Y(1,2) = 0.
      Y(1,3) = 0.
      Y(1,4) = 0
      Y(1,5) = 1.
      Y(1,6) = 0.
      Y(1,7) = 0.
      Y(1,8) = X(1)
      Y(2,1) = 0.
      Y(2,2) = X(4)
      Y(2,3) = - X(3)
      Y(2,4) = -X(2)
      Y(2,5) = 0.
      Y(2,6) = 0.
      Y(2,7) = Φ**2
```

```
Y(2,8)  = R*Ø - S
Y(3,1)  = 0.
Y(3,2)  = 0.
Y(3,3)  = X(4)
Y(3,4)  = -X(3)
Y(3,5)  = 0.
Y(3,6)  = 0.
Y(3,7)  = 0.
Y(3,8)  = S*Ø + C
Y(4,1)  = 0.
Y(4,2)  = 0.
Y(4,3)  = 0.
Y(4,4)  = X(4)
Y(4,5)  = 0.
Y(4,6)  = 0.
Y(4,7)  = 0.
Y(4,8)  = Ø*C
Y(5,1)  = X(2)
Y(5,2)  = -X(1)
Y(5,3)  = 0.
Y(5,4)  = 0.
Y(5,5)  = 2*SQRT(S)
Y(5,6)  = 1.
Y(5,7)  = 0.
Y(5,8)  = 0.
Y(6,1)  = -X(3)
Y(6,2)  = X(2)
Y(6,3)  = -X(1)
Y(6,4)  = 0.
Y(6,5)  = Ø**2
Y(6,6)  = 2*SQRT(S)
Y(6,7)  = 1.
Y(6,8)  = 0.
Y(7,1)  = X(4)
Y(7,2)  = -X(3)
```

```
      Y(7,3) = X(2)
      Y(7,4) = - X(1)
      Y(7,5) = 0.
      Y(7,6) = Ø**2
      Y(7,7) = 2*SQRT(S)
      Y(7,8) = R
      DØ 1  J = 2,8
1     B(J) = A(1,J) / A(1,1)
      DØ 2  I = 2,7
      DØ 3  J = 2,8
3     C(I,J) = Y(I,J) - Y(I,1) * B(J)
2     CØNTINUE
      DØ 4  J = 3,8
4     D(J) = C(2,J) / C(2,2)
      DØ 5  I = 3,7
      DØ 6  J = 3,8
6     P(I,J) = C(I,J) - C(I,2) * D(J)
5     CØNTINUE
      DØ 7  J = 4,8
7     Q(J) = P(3,J) / P(3,3)
      DØ 8  I = 4,7
      DØ 9  J = 4,8
9     R(I,J) = P(I,J) - P(I,3) * Q(J)
8     CØNTINUE
      DØ 10  J = 5,8
10    S(J) = R(4,J) / R(4,4)
      DØ 11  I = 5,7
      DØ 12  J = 5,8
12    T(I,J) = R(I,J) - R(I,4) * S(J)
11    CØNTINUE
      DØ 13  J = 6,8
13    V(J) = T(5,J) / T(5,5)
      DØ 14  I = 6,7
      DØ 15  J = 6,8
15    W(I,J) = T(I,J) - T(I,5) * V(J)
```

```
14    CØNTINUE
      DØ 16 J = 7,8
16    Y(J) = W(6,J) / W(6,6)
      DØ 17 J = 7,8
17    Z(7,J) = W(7,J) - W(7,6) * Y(J)
      Ø(8) = Z(7,8) / Z(7,7)
      A(7) = Ø(8)
      A(6) = Y(8) - Y(7) * A(7)
      A(5) = V(8) - V(7) * A(7) - V(6) * A(6)
      A(4) = S(8) - S(7) * A(7) - S(6) * A(6) - S(5) * A(5)
      A(3) = Q(8) - Q(7) * A(7) - Q(6) * A(6) - Q(5) * A(5) - Q(4) * A(4)
      A(2) = D(8) - D(7) * A(7) - D(6) * A(6) - D(5) * A(5) - D(4) * A(4) - D(3) * A(3)
      A(1) = B(8) - B(7) * A(7) - B(6) * A(6) - B(5) * A(5) - B(4) * A(4) - B(3) * A(3) - B(2) * A(2
      WRITE ( ,204) A(I) (I = 1,4)
204   FØRMAT('A(1)=' F10.3, 2X, 'A(2)=' F10.3, 2X, 'A(3)=' F10.3, 2X, 'A(4)=' F10.3)
      Q = Q + 0.1
      IF (Q.EQ.1.) GØ TØ 900
      GØTØ 300
      H = H + 0.1
      IF (H.EQ.1) GØ TØ 500
      GØTØ 600
      STØP
      END
```

Aprés resolution du systeme, on obtiendra la fonction de transfert du S.V optimum :

$$H_{\frac{x}{x_0}}(s) = \frac{(m_1 s^2 + d_1 s + c_1)(F s^3 + G s^2 + H s + I)}{(A s^3 + B s^2 + D s + E)(\Omega + s)},$$

ce qui nous permettera de determiner $\sigma^2_{\ddot{x}_1}$ et $\sigma^2_{x-x_0}$ et proceder comme dans le cas precedent (excitation par un bruit blanc).

Resultat fort interessant, mais malheureusement, il est actuellement pratiquement impossible ä avoir, vu le manque de moyens pour y aboutir, c'est à dire, il n'y a pas d'ordinateur.

VI. CONCLUSION

1. Cette theorie nous permet de trouver le systeme optimum de vibro-isolation d'objets considerés comme des modèles à parametres discrets, et en tenant compte des hypothèses enoncées au paragraphe III-2, dont la plus importante conserne la linearité du systeme de vibro-isolation que l'on suppose, stable et realisable.

La determination de ce systeme de vibro-isolation est faite en partant de la minimisation de la fonctionnelle $C = \sigma^2_{x-x_0} + \lambda \sigma^2_{\ddot{x}_1}$, cette dernière etant élaborée en tenant compte des cas frequents rencontrables.

Toutefois, on peut dire que cette methode est tout à fait generale et peut-être utilisées pour la resolution de n'importe quel probleme de vibro-isolation.

2. En general, la realisation physique des systemes de vibro-isolation peut-être obtenue par combinaison de systemes actifs et passifs, mais dans des cas particuliers ($S_{\ddot{x}_0}$ = cste, systeme à vibro-isoler = corps rigide representé par une masse m), le systeme optimum de vibro-isolation peut être un systeme passif dont les paramètres sont exprimés en fonction de ρ (ou λ, multiplicateur de Lagrange).

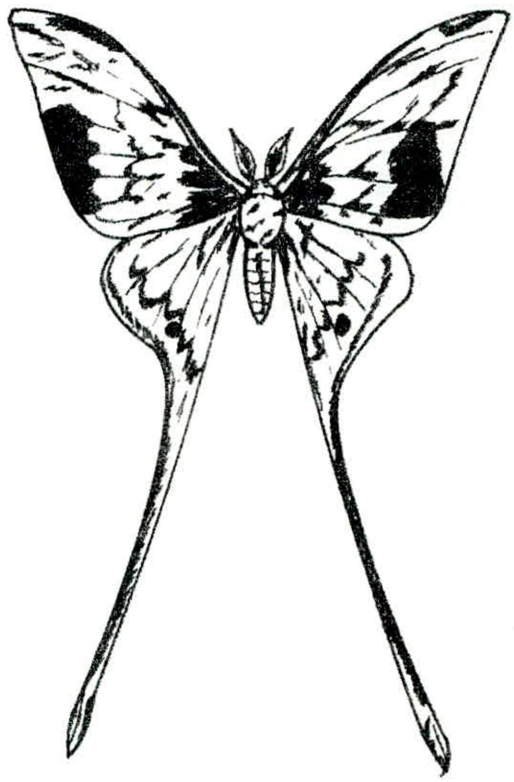
3. Lors d'une excitation par un bruit blanc ($S_{\ddot{x}_0}(s)$ = cste = N^2), les parametres du systeme de vibro-isolation decrit par $\Phi(s)$ dependent seulement de la structure de l'objet à vibro-isoler

Dans le cas où l'on a des vibrations forcées dans l'etat permanent, la fonction $\Phi(s)$ depend de la structure du systeme à vibro-isoler et de la densité spectrale de l'excitation.

4. La theorie ainsi developpée conserne en particulier la vibro-isolation de systemes à parametres discrets et pourra peut etre etre complémentée par la vibro-isolation de systemes à paramètres continus, etude qui s'avère plus serieuse vu son application dans la vie courante.

5. Rappelons enfin que dans cette etude, il est omis de donner des notions jugées toutefois faciles à trouver dans des ouvrages, telles les transformations de Fourier, de Laplace .... La bibliographie

donnée en fin de memoire palliera quelque peu à cette "deficience" voulu



BIBLIOGRAPHIE

1. G.C Newton, Jr. L.A. Gould, J.F. Kaiser.
"Analytical Design of Linear Feedback Controls"
New-york, John Wiley & Sons, Inc. London 1957.

2. J. Halcombe Laning, Richard H. Battin.
"Random Processes in Automatic Control"
Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New-york, Toronto, London 1956.

3. J.S Bendat.
"Principles and Applications of Random Noise Theory"
New-York, John Wiley & Sons, Inc. 1958.

4. Alexandru Spătaru.
"Therie de la Transmission de l'Information.
Tome 1: Signaux et Bruits"
Editura Technică, Bucarest 1970.

5. J. Ortusi.
"Etude Mathematique des Circuits de l'Electronique.
Tome 2: Synthèse des circuits"
Dunod - Paris 1965

6. V.V. Solodovnikov.
"Dynamique Statistique des Systemes Lineaires de Commande Automatique".
Dunod - Paris 1965.

7. Politechnika Poznańska - Materialy dla studiów doktoranckich i pody plomowych. Nr 2.
"Metody probabilistyczne w teorii drgań nieliniowych"
Poznan 1974.

8. Marek Ksiazek
Thèse de Doctorat.
Kraków 1978.