



Ecole Nationale Polytechnique

Département de Génie Civil

Laboratoire de Génie Sismique et Dynamique des Structures

THESE DE MAGISTER

Présentée par :

M. MOUAFKI Kamel

Ingénieur d'Etat en Génie Civil

Diplômé de l'Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

En Vue de l'obtention du Titre de MAGISTER en Génie Civil

Thème

UTILISATION DES ELEMENTS DE CONTACT DANS L'ETUDE DES CHAMPS DE DEPLACEMENTS ET DE CONTRAINTES SOUS FONDATIONS REPOSANT SUR DES MILIEUX STRATIFIES ELASTOPLASTIQUES

Soutenue le 10 Juillet 2003 devant le jury d'examen composé de

<i>Président :</i>	<i>M.K.Berrah</i>	<i>Professeur, ENP</i>
<i>Directeur de thèse :</i>	<i>B.Tiliouine</i>	<i>Professeur, ENP</i>
<i>Co - directeur de thèse :</i>	<i>B.Zeghlache</i>	<i>Chargé de cours, ENP</i>
<i>Examineurs :</i>	<i>S.Belkacemi</i>	<i>Maître de conférences, ENP</i>
	<i>M.Hamoutene</i>	<i>Maître de conférences, ENP</i>
	<i>M.Bensaibi</i>	<i>Maître de conférences, Univ. Blida</i>

* بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ *

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

(يرفع الله الذين آمنوا منكم والذين أوتوا العلم درجات والله بما تعملون خبير.)

المجادلة . 11.

قال سيّد المرسلين صلوات الله عليه وسلامه :

(وأن العلماء هم ورثة الأنبياء، ورثوا العلم، من أخذه أخذ بحظّ وافر، ومن سلك

طريقاً يطلب به علماً سهّل الله له طريقاً إلى الجنة.)

صدق رسول الله

تهدف الدراسة الحالية إلى إعطاء فكرة واضحة وموضوعية عن التأثيرات التي تدخلها تقنية استعمال عناصر التماس على ردة فعل الأساسات المرتكزة على تربة متجانسة أو متعددة الطبقات تحت تأثير قوى شاقولية. إذ تتم العملية مع الأخذ بعين الاعتبار تصرف التربة مهما كانت نوعيتها، الذي يمكن أن يكون خطياً أو غير خطياً.

كل هذا يتدرج في سياق ظاهرة الداخلة بين الأساس والتربة، التي تعتبر معقدة جداً، والتي يمكن دراستها بواسطة عدة طرق تتركز أساساً على الأخذ بعين الاعتبار كل من خصائص التربة والأساسات في آن واحد، لأن في هذا يكمن التأثير المتبادل.

علماً أن البرنامج المستعمل تركز على الاستعمال المزدوج لطريقة العناصر المتناهية والاستنامية.

Abstract :

The present study give us a clear idea on the influence of using contact elements on the behaviour of footing resting on soils, under the effect of axial loading. The soils maybe homogeneous or multi layer , and its behaviour should be either linear or non-linear obeying the Mohr-Coulomb criterion.

The soil structure interaction is a very complex phenomenon, which can be study with a several methods, among them we can use the finite element method that we can use in connection with infinite elements.

Résumé :

La présente étude sert à donner une idée suffisante sur l'influence des éléments de contact sur la réaction des fondations reposant sur des sols homogènes ou multi-couches, sous l'effet des sollicitations verticales, prenant en considération le comportement du sol qui pourra être linéaire ou non linéaire (critère de Mohr-Coulomb).

Tout cela se regroupe dans le phénomèné d'interaction sol - structure, un phénomèné très complexe qu'on peut étudier par le biais de plusieurs méthodes, notamment la méthode des éléments finis, et éventuellement couplés avec des éléments infinis.

Liste des mots clés

- 1- Champs de déplacements et de contraintes.
- 2- Phénomène d'interaction sol-structure.
- 3- Méthodes globales.
- 4- Couplage éléments finis éléments infinis..
- 5- Élément finis isoparamétrique à 8 nœuds.
- 6- Déformations axisymétriques.
- 7- Déformations planes.
- 8- Éléments de contact (ou d'interface), quadrilatères à 6 nœuds.
- 9- Caractéristiques de éléments de contact.
- 10- Relation limite en contraintes.
- 11- Loi de comportement de l'interface.
- 12- Critère de non-interpénétration.
- 13- Critère de résistance à la traction.
- 14- Critère de frottement.
- 15- Élément de contact actif.
- 16- Élément de contact inactif.
- 17- Méthode incrémentale.
- 18- Méthode itérative.
- 19- Méthode mixte.
- 20- Éléments infinis.
- 21- Approche directe.
- 22- Approche-inverse.
- 23- Élément infinis vertical, horizontal ou coin.
- 24- Couplage éléments finis, éléments infinis et éléments de contact.
- 25- Milieux stratifiés élasto-plastiques.
- 26- Sols homogènes élastiques.
- 27- Sols plastiques.
- 28- Sols de Gibson (non homogènes).
- 29- Sols purement cohesifs.
- 30- Fondations superficielles.
- 31- Fondation rigide.
- 32- Fondation flexible.
- 33- Capacité portante des fondations superficielles.
- 34- Charge de rupture de Prandtl.
- 35- Control par déplacements.
- 36- Control par contraintes.
- 37- Modèle élasto-plastique.
- 38- Comportement élastique ou élasto-plastique du sol support.
- 39- Invariants de contraintes.
- 40- Critère de rupture de Mohr-Coulomb.
- 41- Charges verticales (centrées ou réparties).
- 42- Comportement linéaire ou non linéaire du sol support.
- 43- Problèmes linéaires.
- 44- Problèmes non-linéaires.

*Il n'est pas nécessaire d'espérer pour entreprendre
ni de réussir pour persévérer.*

Guillaume d'Orange

Je dédie ce modeste travail à

La mémoire de notre cher père qui vit pour toujours dans nos cœurs.

Ma chère mère, pour son soutien constant et son aide sans défaut.

Mes chères frères et sœurs, pour leur compréhension.

A toi, ma chère, pour te dire...

REMERCIEMENTS

Le présent travail présenté dans ce mémoire ayant été entrepris il y a plusieurs années, son aboutissement a pu, parfois sembler lointain à mon entourage. Outre son intérêt propre, il m'a donné l'occasion de multiples rencontres avec des personnes d'horizons divers.

Pensant en premier lieu à mon professeur, **Boualem TILIOUINE**, qui a accepté d'encadrer mon travail, je tiens ici à lui exprimer ma profonde gratitude pour m'avoir aidé par ses remarques judicieuses et par ses conseils éclairés ainsi que par son assistance scientifique. Je le remercie aussi pour m'avoir accueilli dans le laboratoire de génie sismique et dynamique des structures, dont il est le directeur.

De même, je sais gré à monsieur **Brahim ZEGHLACHE**, Chargé de cours à l'école nationale polytechnique, d'avoir consenti à être co-promoteur de ce mémoire et de m'avoir donné à travers la pertinence de ses commentaires critiques l'occasion d'apprécier l'étendue de sa culture scientifique et l'ouverture de son esprit.

A monsieur le professeur, **Mounir Khaled BERRAH**, Directeur de l'école nationale polytechnique, je tiens à exprimer mes sincères remerciements pour avoir bien voulu examiner ma thèse de magister, et de présider le jury de soutenance.

Je tiens également remercier monsieur **Smail BELKACEMI**, Docteur à l'école nationale polytechnique, qui est une figure reconnue par sa compétence et sa sincérité, combien j'apprécie l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être membre de jury de soutenance.

Sans oublier de transmettre mes salutations les plus distinguées à monsieur **Malek HAMMOUTENE**, Docteur à l'école nationale polytechnique, qui se caractérise par sa générosité, simplicité et sagesse envers ses étudiants. Monsieur vous devriez croire à ma haute considération du fait que vous avez accepté d'être membre du jury de soutenance.

Je voudrais aussi remercier, tous les enseignants du département génie civil, aussi bien de graduation que de la post-graduation, qui ont contribué de façon ou d'autre à ma formation.

Merci de tout cœur aussi aux membres de l'équipe du laboratoire du génie sismique et de dynamique des structures, qui ont plus de leurs aptitudes scientifiques, ont fait preuve de générosité et de bonne humeur, qui m'ont apporté leurs connaissances à travers de nombreuses discussions et collaborations diverses. Ce qui m'a permis de mener à bien ce travail en toute tranquillité d'esprit.

Elles se sont impliquées de façons diverses par l'aide qu'elles m'ont apportée et elles l'ont toujours fait avec beaucoup d'amabilité et de compétence. Il m'apparaît donc essentiel de remercier **D.AMAR BOUZID**, **K.SANDJAK**, **A.G.SEGHIR**, **S.BOUZIANE** et de leur faire savoir à travers ces pages que souvent, sans eux certaines choses n'auraient pu aboutir.

Dans un deuxième temps, je dois évoquer la structure (L'école nationale polytechnique), dans laquelle j'ai suivi ma formation, l'ensemble de ses administratifs. L'E.N.P est pour moi un symbole.

En dernier lieu, permettez moi de remercier toutes les personnes que j'ai pu croiser lors de mes recherches et qui par leurs concours ont contribué à leur progression. Je cite particulièrement celles qui m'ont permis, chaque fois qu'il a été nécessaire, d'accéder aux salles dont elles avaient la responsabilité.

I. PROBLEMATIQUE ET OBJECTIFS	7
CHAPITRE II : INTRODUCTION A L'ETUDE D'INTERACTION SOL-STRUCTURE	9
II.1 Introduction	10
II.2 Méthodes de prise en compte de l'interaction sol - structure	10
II.2.1 Méthodes globales	10
II.2.1.1 La méthode des éléments finis	11
II.2.1.2 La méthode des éléments finis - éléments infinis	11
II.2.2 Les méthodes hybrides	12
II.2.3 Méthode de sous - structures	12
II.2.3.1 Méthode de frontière	12
II.2.3.2 Méthode des volumes	13
CHAPITRE III : FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS	14
III.1 Introduction	15
III.2 Formulation de la méthode des éléments finis	16
III.2.1 Formulation Contraintes (ou équilibre)	16
III.2.2 Formulation Déplacements	16
III.2.3 Formulation mixte	16
III.3 Evaluation de la matrice de rigidité	16
III.3.1 Choix de la fonction déplacement	16
III.3.2 Calcul de la matrice de rigidité	16
III.3.3 Propriétés de la matrice de rigidité	18
III.3.4 Règles d'assemblage	18
III.4 Etude des structures à symétrie axiale	19
III.4.1 Éléments isoparamétriques	21
III.4.2 Avantages de l'élément isoparamétrique	21
III.4.3 Interpolation du champ de déplacements	23
III.4.4 Calcul des propriétés de l'élément isoparamétrique	23
III.4.4.1 Matrice de rigidité	23
III.4.4.2 Forces généralisées	23
CHAPITRE IV : FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS	24
IV.1 Introduction	25
IV.2 Formulation des éléments infinis	25
IV.2.1 Approche directe	25
IV.2.2 Approche inverse	26
IV.3 Principe de construction de la fonction de transformation	26
IV.3.1 Cas unidimensionnel	26
IV.3.2 Cas bidimensionnel	28
IV.4 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini	28
IV.5 Différents types d'éléments infinis	29
IV.5.1 Éléments infinis dans le sens horizontal ou vertical	29
IV.5.2 Éléments infinis dans le sens horizontal et vertical (élément coin)	30
IV.6 Couplage éléments finis, éléments infinis	30
CHAPITRE V : FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS DE CONTACT	31
V.1 Généralités et définitions	32
V.1.1 Introduction	32
V.1.2 Modélisation des solides en contact	33
V.1.3 Modélisation de la zone de contact	33
V.2 Description des éléments de contact	33
V.2.1 Présentation des éléments finis de contact	33
V.2.2 Définition de la géométrie d'un élément de contact	34
V.2.3 Définition du champ de déplacement	34
V.2.4 Définition de l'épaisseur des éléments de contact	35
V.2.5 Calcul de l'épaisseur e	36
V.3 Relation contraintes - déformations de l'élément de contact	36

V.3.1 Expression de la matrice $[D^i]$	37
V.3.1.1 Glissement parfait	37
V.3.1.2 Adhérence	38
V.3.1.3 Frottement de Coulomb	39
V.3.2 Expression dans le repère global	39
V.4 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément de contact	39
V.4.1 Expression de la matrice de rigidité élémentaire	39
V.4.2 Calcul de la matrice de rigidité élémentaire	40
V.4.3 Choix du type d'intégration numérique	41
V.4.4 Caractéristiques mécaniques des éléments de contact	41
V.5 Calcul des contraintes dans les éléments de contact	41
V.5.1 Élément de contact actif - inactif	42
V.5.2 Critères de contact	43
V.5.2.1 Critère de non interpénétration	43
V.5.2.2 Critère de résistance à la traction	44
V.5.2.3 Critère de frottement	44
V.5.3 Critères sur les contraintes	45
V.5.3.1 Critère de la résistance à la traction	45
V.5.3.2 Critère de frottement	45
V.5.3.3 Critère de non - interpénétration	47
V.5.4 Calcul du vecteur correction de déplacement $\{\Delta U_{ic}\}$	47
V.5.5 Schéma général de l'algorithme de résolution	48
V.6 Classification des interfaces	49
V.6.1 Les interfaces de premier type	49
V.6.2 Les interfaces de deuxième ordre	49
V.7 Méthodes d'analyse des problèmes d'interaction	49
V.7.1 Méthodes utilisant une relation limite en contrainte	49
V.7.2 Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface	50
V.7.2.1 Analyse globale	50
V.7.2.2 Analyse locale	51
V.7.3 Formulation d'une loi de comportement	51
V.7.4 Formulation élasto - plastique	52
V.7.4.1 Expression générale de la matrice de comportement	53
V.8 Choix du modèle de l'interface	55
V.9 Méthodes de résolution des problèmes non linéaires	58
V.9.1 Méthode incrémentale	59
V.9.2 Méthode itérative	59
V.9.2.1 Méthode de rigidité constante	60
V.9.2.2 Méthode de rigidité variable	60
V.9.2.3 Méthode mixte	61
CHAPITRE VI : ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE	62
VI.1 Introduction	63
VI.2 Détermination du tenseur des déformations	63
VI.3 Relation contraintes - déformations incrémentales	65
VI.4 Identification du problème	66
VI.5 Elaboration du modèle élasto-plastique	66
VI.6 Invariants de contraintes	68
VI.7 Critères de plasticité (rupture) dans le sol	69
VI.7.1 Critère de VON - MISES	69
VI.7.2 Critère de MOHR-COULOMB	70
VI.7.3 Critère de TRESCA	71
VI.7.4 Critère de DRUCKER-PRAGER	71
VI.7.5 Critère Parabolique	72
CHAPITRE VII : APPLICATIONS NUMERIQUES	73
VII.1 Théorie de Boussinesq	74
VII.1.1 Hypothèses de la théorie de Boussinesq	74
VII.2 Représentation des programmes	76
VII.2.1 Résolution des problèmes linéaires	77
VII.2.2 Résolution des problèmes non linéaires	79
VII.3 Demi - espace soumis à une charge concentrée	82
VII.3.1 Cas de déformations axisymétriques.	82

<i>VII.3.2 Cas de déformations planes.</i>	83
<i>VII.4 Fondation reposant sur un sol non homogène de Gibson</i>	84
<i>VII.5 Fondation reposant sur un sol élastique stratifié</i>	86
<i>VII.6 Fondation reposant sur un sol élasto-plastique</i>	89
<i>VII.6.1 Influence du rapport E/c</i>	91
<i>VII.7 Fondation reposant sur un bicouche de sol élasto-plastique de type Mohr-Coulomb</i>	91
<i>VII.8 Fondation reposant sur un sol élasto-plastique</i>	93
<i>VII.8.1 Influence de la rigidité du sol</i>	95

VIII. CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS	98
---	-----------

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

I. PROBLEMATIQUE ET OBJECTIFS :

Le comportement précis des fondations superficielles reposant sur un sol modélisé par un demi espace non homogène ou un milieu stratifié non linéaire demeure un thème de recherche. L'évaluation des champs de déplacements et de contraintes à l'interface du sol et de la fondation constitue un problème complexe nécessitant souvent la mise en œuvre de méthodes numériques sophistiquées. Dans l'état actuel des connaissances, seule la méthode des éléments finis permet de par ses multiples extensions, une représentation précise du comportement non linéaire complexe des champs de contraintes à la fois dans le sol, dans la fondation et à leur interface. Ceci a été rendu possible grâce d'une part au développement important ces dernières décennies des techniques numériques et d'autre part à l'introduction de nouveaux types d'éléments.

Ces techniques numériques permettent de traiter des problèmes d'interaction linéaires et non linéaires avec des paramètres variables aussi bien dans l'espace et dans le temps. Parmi les nouveaux types d'élément nous distinguons tout d'abord les éléments infinis qui permettent une représentation plus précise et plus économique du comportement du sol en champs lointain de la structure. Nous avons ensuite, les éléments de contact qui permettent de mieux rendre compte du comportement du sol et de la structure au niveau de l'interface sol fondation.

Le principal objet de ce travail est dans une première étape la mise au point d'un code de calcul par éléments finis incluant tous les types d'éléments suscités, et permettant la résolution de problème statique aussi bien linéaire que non linéaire. Dans une seconde étape, après validation, nous avons appliqué ce programme à la détermination des champs de contraintes ou de déplacements pour le cas classique d'une fondation superficielle plus ou moins rigide reposant sur un sol élastique homogène ou non-homogène, ou encore élasto-plastique, semi-infini, monocouche ou multicouches. Ainsi, notre travail se présente en sept chapitres, à savoir :

CHAPITRE II

Ce premier chapitre présente les différentes méthodes qui permettent la prise en compte du phénomène d'interaction sol structure, notamment les diverses approches basées sur la méthode des éléments infinis.

CHAPITRE III

La méthode des éléments finis, et sa formulation sont développées dans ce deuxième chapitre.

CHAPITRE IV

Dans ce troisième chapitre, on découvre la méthode des éléments infinis. Ces éléments qui sont en réalité qu'une dérivée des éléments finis, tout en utilisant l'approche directe ou l'approche inverse, ont le principal avantage de réduire la taille du problème à étudier tout en gagnant en précision.

CHAPITRE V

La formulation des éléments de contact est décortiquée dans ce quatrième chapitre.

CHAPITRE VI

Le comportement élasto-plastique parfait associé à divers critères de rupture sont présentés dans ce cinquième chapitre avec entre autres le critère de Mohr-Coulomb utilisé dans la présente étude pour le sol.

CHAPITRE VII

Dans le dernier chapitre, on présente la structure des programmes élaborés, leur validation et les différentes applications.

Une conclusion générale clôture ce travail qui a permis en outre d'estimer les effets que peut apporter l'utilisation des éléments de contact sur la réponse des fondations superficielles reposant sur des milieux stratifiés.

Chapitre II

INTRODUCTION A L'ETUDE D'INTERACTION SOL - STRUCTURE

Introduction à l'étude d'interaction sol-structure

II.1. Introduction :

L'interaction sol-structure est une notion qui met en évidence les modifications du mouvement de la structure(ou du sol), lors d'une sollicitation d'origine statique ou dynamique, en prenant en compte la présence de la deuxième composante (le sol, ou la structure).

L'interaction a pour but de définir la relation entre la réponse de la structure et les caractéristiques du son support(fondation). En général l'effet de l'interaction est du à un mécanisme d'échange d'énergie entre la structure et le sol, pour cela la recherche de la réponse de la réponse des structures en prenant considération l'interaction sol-structure nécessite l'incorporation des propriétés intrinsèques du sol dans la formation globale du problème.

L'analyse de la réponse des structures en introduisant l'effet de l'interaction présente une étude impérieuse surtout lorsqu'il s'agit des structures à grande importance telles que les barrages, fondations profondes(pieux), réservoirs et centrales multi-fonctionnelles.

L'analyse complète d'interaction sol-structure, doit prendre en considération les critères suivants :

- La variation des caractéristiques du sol avec la profondeur.
- Le schéma complexe de propagation des ondes qui engendrent le mouvement, lorsqu'il s'agit de l'interaction dynamique.
- Le comportement non linéaire du sol.
- L'interaction avec les structures avoisinantes.
- Le caractère tridimensionnel du problème.

Donc, le problème d'interaction sol-structure présente des grandes difficultés, pour cela le recours aux méthodes numériques est inévitable.

II.2. Méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure :

II.2.1. Méthodes globales :

Les méthodes globales conduisent à une détermination du mouvement dans le sol et la structure en parallèle, ces méthodes sont les plus adaptées aux ouvrages enterrés. Ces méthodes sont susceptibles d'appréhender les comportements non-linéaires du sol (variation de ces caractéristiques), et des interfaces sol-structure, aussi on doit noter que les méthodes

globales peuvent être étendues aux cas tridimensionnels, mais elles sont coûteuses, et nécessitent l'utilisation de l'outil informatique.

Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode des éléments finis, et celle des éléments infinis.

II.2.1.1. La méthode des éléments finis :

La méthode est détaillée dans le chapitre suivant, et elle reflète mieux la continuité du milieu et permet de prendre en considération toute éventuelle complexité comme le cas des multicouches, ainsi que les paramètres internes du sol tel que E (module de Young), et ν (coefficient de poisson) qui sont plus faciles à obtenir sur le plan expérimental que le coefficient K_s dans le modèle de Winkler.

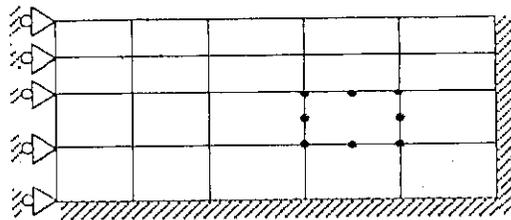


Figure II .1: Modèle Eléments Finis

II.2.1.2. La méthode des éléments finis-éléments infinis :

La méthode des éléments finis a parmi ses inconvénients, le raffinement du maillage à proximité des points d'application des charges, ce raffinement exige une mémoire énorme pour le calculateur et même le temps d'exécution qui devient important si la structure est compliquée, bien entendu le type de chargement également.

Tous ces inconvénients ont poussé les chercheurs à trouver une solution pour ce problème. La solution réside dans l'idée de couplage entre la méthode des éléments finis, et celle des éléments infinis.

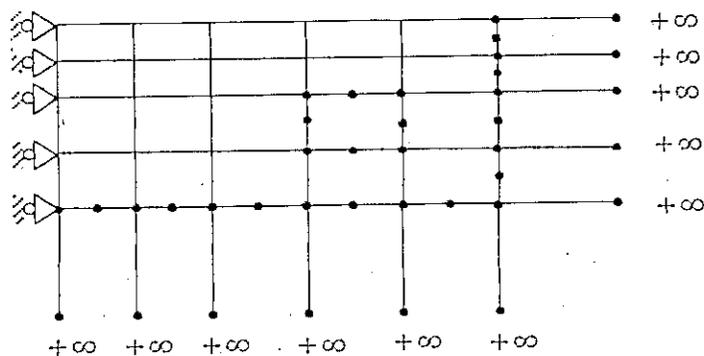


Figure II .2. Modèle Eléments-Finis, Eléments-Infinis

II.2.2. Les méthodes hybrides :

Gupta et Al (1980), ont développé une méthode hybride qui consiste à séparer le sol support, en un champ libre et un champ lointain. Ils ont résolu le problème à l'aide d'une méthode d'identification permettant d'assurer que le modèle est hybride.

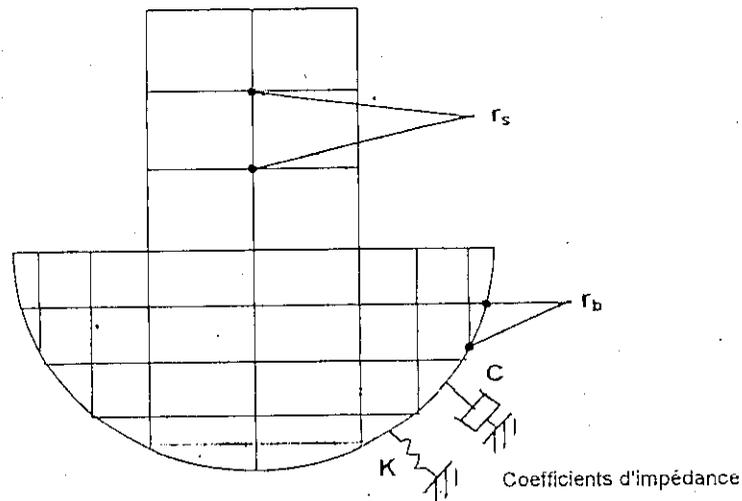


Figure II.3. Méthode Hybride

II.2.3. Méthode de sous - structures :

Elles font appel au principe de superposition, c'est à dire faire une analyse du problème d'interaction en plusieurs étapes successives, chacune de ces étapes est facile à résoudre de point de vue modélisation et traitement. Ces méthodes présentent une telle puissance quand une partie du système a une géométrie simple alors que la structure requiert à une analyse tridimensionnelle.

Ces méthodes représentent l'avantage de déterminer la part relative de chaque composante contribuant au système d'interaction. Les différentes méthodes de sous-structures se différencient par la décomposition du modèle global, d'où on distingue :

II.2.3.1. Méthode de frontière :

Le modèle global est divisé en deux sous-systèmes représentant le sol et la structure, Pour cela à la frontière séparant le sol et la structure une compatibilité des efforts et déplacements d'où les différentes équations d'équilibre s'écrivent :

- Pour la structure :

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ss} & k_{sb} \\ k_{bs} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (I.2.)$$

- Pour le sol :

$$\begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_f \\ \ddot{u}_a \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fa} \\ k_{af} & k_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (L3.)$$

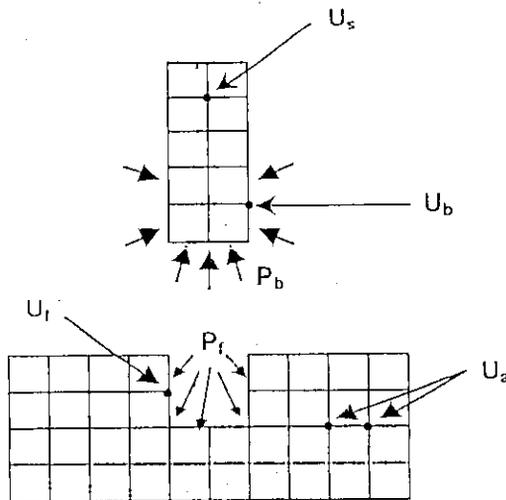


Figure II .4. Méthode des sous - structures : Méthode des frontières

II.2.3.2. Méthode des volumes :

Dans cette méthode, l'interaction sol - structure est prise en compte non seulement à l'interface, mais à tous les nœuds de la structure sous la surface libre, comme il est indiqué ci-dessous :

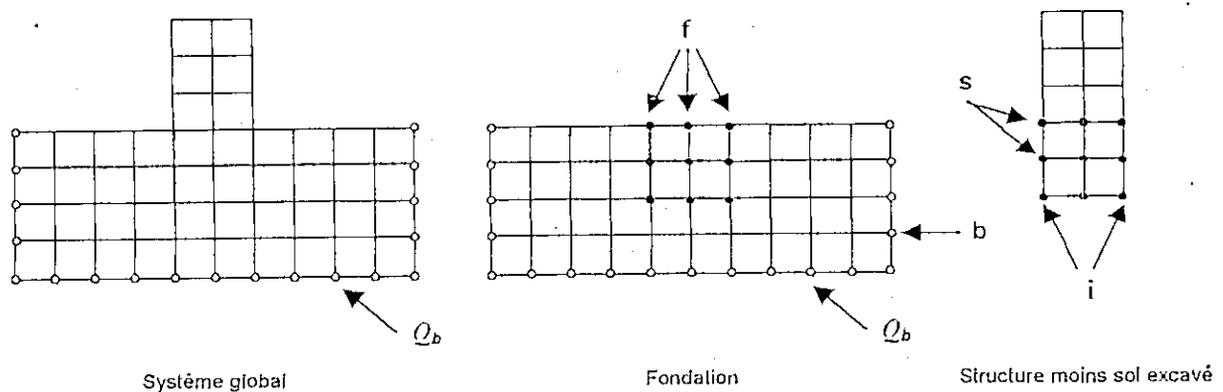


Figure II .5. Méthode des sous - structures : Méthode des volumes

Chapitre III

FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Formulation de la méthode des éléments finis

III.1. Introduction :

Le calcul des structures, et en particulier les milieux continus couvre une grande variété d'applications dans les secteurs industriels des constructions liées au génie civil, génie mécanique, l'aéronautique,.....etc.

Ce domaine, a pour objet la modélisation théorique au stade de la conception d'une structure ou d'un système mécanique, ce qui permet de faire la simulation du comportement et d'enchaîner ainsi une procédure d'optimisation des forces et des dimensions, compte tenu des fonctions de la structure et du choix du matériau. Pour la modélisation, il existe plusieurs méthodes qui permettent de décrire le comportement des systèmes physiques grâce aux systèmes d'équations aux dérivées partielles, et la on cite la méthodes des éléments finis.

La méthode des éléments finis est une technique utilisée dans l'analyse des structures par le biais d'une approximation simple des variables inconnus afin d'avoir des équations algébriques faciles à résoudre.

Le système continu est discrétisé par une subdivision du domaine en un grand nombre d'éléments de formes arbitraires(rectangulaires ou triangulaires), liés entre eux par des nœuds.

Dans plusieurs cas, on peut utiliser une subdivision graduelle en éléments pour permettre une étude plus détaillée des régions de la structure là ou l'on attend à une très forte concentration des contraintes.

Le choix d'une subdivision convenable doit, si possible être basé sur plusieurs essais, sinon, on doit alors mettre en œuvre un grand nombre de résolutions faisant intervenir différentes dimensions de mailles pour tester la convergence de la solution.

En résumé, on peut conclure qu'en tout problème d'engineering, on doit se procéder aux étapes suivantes :

- Idéalisation du système, c'est à dire le représenter par un modèle qui peut simplifier le traitement du problème.
- Positions des équations gouvernantes, il s'agit ici d'équations algébriques gouvernantes pour le système idéalisé, et non différentielles pour le système continu.
- Résolution des équations gouvernantes.
- Interprétation des résultats, qui est absolument nécessaire pour justifier le choix de modèle et des étapes de résolution.

III.2. Formulation de la méthode des éléments finis :

III.2.1. Formulation Contraintes (ou équilibre) :

Dans laquelle on se donne une approximation soit sous forme d'un champ de contraintes, soit sous forme d'une fonction de contraintes. Elle se base sur la théorie de l'énergie complémentaire.

III.2.2. Formulation Déplacements :

Dans laquelle on se donne une approximation du champ déplacement, elle se base sur la stationnarité de l'énergie potentielle.

III.2.3. Formulation mixte :

Dans cette formulation on suppose que le champ de déplacements et des contraintes comme inconnus primaires de problème, d'ou on considère que cette formulation est basée sur la méthode des déplacements.

III.3. Evaluation de la matrice de rigidité :

III.3.1. Choix de la fonction déplacement :

Comme la formulation choisie est une formulation déplacement, on doit donc imposer un champ de déplacement qui remplit les conditions suivantes :

- ♦ Les fonctions choisies doivent être continues au sein de l'élément, ainsi qu'au passage des frontières entre les éléments, lorsque les éléments adjacents sont de même type ou possédant les mêmes fonctions de déformations sur les frontières.
- ♦ Les équations force, déplacement découlant des fonctions choisies doivent refléter une énergie de déformation nulle lorsque l'élément subit un déplacement de corps rigide.
- ♦ Les fonctions choisies devraient permettre la représentation des valeurs uniformes pour toutes les contraintes ou déformations.
- ♦ Le nombre de termes indépendants dans le polynôme doit être égal au nombre de composantes qui sont à calculer.

III.3.2. Calcul de la matrice de rigidité :

La détermination de la matrice de rigidité peut s'effectuer à l'aide du théorème de minimum d'énergie potentielle totale, avec :

$$\delta\pi - \delta(U - W) = 0 \rightarrow \delta U - \delta W \quad (\text{III.1.})$$

ou l'énergie de déformation virtuelle est :

$$\delta U = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} dv \quad (\text{III.2.})$$

et l'énergie accomplie par les forces extérieures pour un déplacement virtuel est :

$$\delta W = \{F\}^T \{\delta U\} \quad (III.3.)$$

avec :

$\{\sigma\}$: vecteur contrainte.

$\{\delta \varepsilon\}$: vecteur des déplacements.

$\{F\}$: vecteur des forces nodales.

$\{\delta U\}$: vecteur des déplacements nodaux virtuels.

En raison de l'élasticité du corps et en absence de tout champ thermique on a :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \text{ et } \{\varepsilon\} = [L]\{U\} \quad (III.4.)$$

avec :

$[D]$: matrice d'élasticité.

$[L]$: matrice opérateur différentielle, (particulier pour chaque type de structure).

$\{U\}$: vecteur champ déplacement.

or :

$$\{U\} = [N]\{\hat{U}\} \Rightarrow \{\varepsilon\} = [L][N]\{\hat{U}\} \quad (III.5.)$$

et comme :

$$[B] = [L][N]$$

on peut aussi écrire :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\hat{U}\} \quad (III.6.)$$

d'où :

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\hat{U}\} \quad (III.7.)$$

avec :

$\{\hat{U}\}$: vecteur déplacements nodaux.

$[N]$: matrice fonctions d'interpolations.

de l'équation (III.1.) et (III.2.) on trouve :

$$\{F\}^T \{\delta U\} = \int_V \{\sigma\}^T \{\delta \varepsilon\} dV \quad (III.8.)$$

en injectant (III.6.) et (III.7.) dans (III.8.) on obtient :

$$\{F\}^T \{\delta U\} = \int_V \{\hat{\gamma}\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta U\} dv$$

or les équations d'équilibre sont définies par :

$$\{F\} = [K] \{U\} \Rightarrow \{F\}^T = \{\hat{\gamma}\}^T [K] = \{\hat{\gamma}\}^T \int_V [B]^T [D] [B] dv$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv \quad (III.9.)$$

III.3.3. Propriétés de la matrice de rigidité :

La matrice de rigidité est :

- Symétrique en vertu du théorème de Maxwell-Betti.
- Singulière avant l'introduction des déplacements aux limites, ce qui explique le mode de déplacement rigide de l'élément.
- Définie comme étant positive, ce qui donne à l'énergie de déformation sa propriété physique d'être positive ou nulle.

III.3.4. Règles d'assemblage :

La phase d'assemblage consiste à construire la matrice $[K]$ et le vecteur $\{F\}$ de la structure complète à partir des matrices et vecteurs caractéristiques des différents éléments $[K]^e$, et $\{F\}^e$, préalablement calculés. En utilisant l'approche énergétique, on peut définir la méthode d'assemblage.

Soit π l'énergie potentielle totale de l'élément e :

$$\pi^e = \frac{1}{2} \{\hat{U}\}^{eT} [K]^e \{\hat{U}\}^e - \{\hat{U}\}^{eT} \{F\}^e \quad (III.10.)$$

Si les éléments ont la compatibilité requise, l'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par des énergies potentielles élémentaires, soit :

$$\pi = \sum_{\text{éléments}} \pi^e = \sum_{\text{éléments}} \left\{ \frac{1}{2} \{\hat{U}\}^{eT} [K]^e \{\hat{U}\}^e - \{\hat{U}\}^{eT} \{F\}^e \right\} \quad (III.11.)$$

La compatibilité des déplacements nodaux de la structure est obtenue en écrivant pour chaque élément une relation matricielle de type :

$$\{U\}^e = [B]^e \{\hat{U}\} \quad (III.12.)$$

ou $[B]^e$, représente la matrice de localisation ou de connectivité géométrique dont les éléments sont des 0 ou des 1.

Chaque relation (III.3.), permet de repérer et de localiser les d.d.l de chaque élément dans l'ensemble des d.d.l de la structure.

En utilisant les relations (III.10.) et (III.12.), on peut écrire :

$$\pi = \sum_{\text{éléments}} \frac{1}{2} \{\hat{U}\}^T [B]^{eT} [K]^e [B]^e \{\hat{U}\} - \{\hat{U}\}^T [B]^e \{F^e\} \quad (\text{III.13.})$$

d'où :

$$\pi = \frac{1}{2} \{\hat{U}\}^T [K] \{\hat{U}\} - \{\hat{U}\}^T \{F\} \quad (\text{III.14.})$$

avec :

$$[K] = \sum_{\text{éléments}} [B]^{eT} [K]^e [B]^e \quad \text{et} \quad \{F\} = \sum_{\text{éléments}} [B]^e \{F^e\} \quad (\text{III.15.})$$

L'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure s'effectue en additionnant bloc à bloc les sous matrices de rigidité nodale de chaque élément.

III.4. Etude des structures à symétrie axiale :

L'étude des structures à symétrie axiale, est d'une importance considérable dans un grand nombre de problèmes en technologie. Parmi ces problèmes on peut citer les enceintes sous pression, certaines parties des machines comme les pistons, les basses des colonnes sur le sol, les corps et les têtes de fusées, ou à la fois la forme de la structure et les charges appliquées ont une symétrie axiale.

Quand un solide de révolution est soumis à un chargement axisymétrique, il ne possède que des composantes indépendantes de déplacements, le problème est dit bi-dimensionnel.

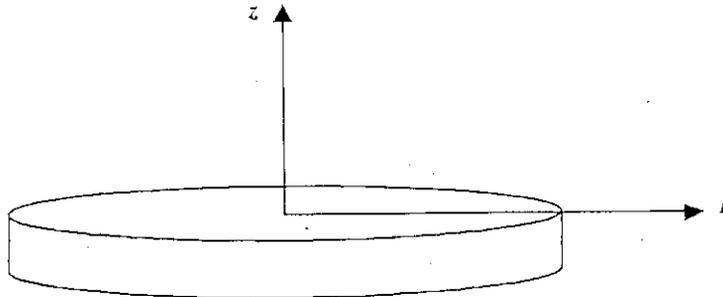


Figure III.1. Structure à symétrie axiale

Dans ce type de problème, le système des coordonnées cylindriques est plus commode, et la matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K]^e = \iiint [B]^T [D] [B] r dr d\theta dz \quad (\text{III.16.})$$

Quand on intègre sur un radian on aura :

$$[K]^e = \iint [B]^T [D] [B] r dr dz \quad (\text{III.16a.})$$

Ou les relations déformations, déplacements sont données par Timoshenko et Goodier en 1951 avec :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (III.16b.)$$

ou bien :

$$\{\varepsilon\} = [L] \{u\} \quad (III.16c.)$$

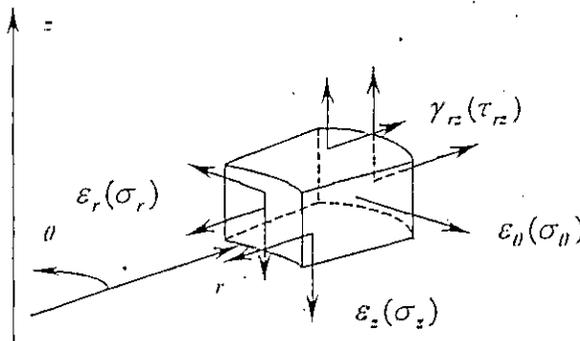


Figure III.2. Déformations et contraintes axisymétriques

Ou les déformations en question sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E} [(\sigma_r - \nu(\sigma_z + \sigma_\theta))] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta))] \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [(\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z))] \\ \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \end{cases} \quad (III.17.)$$

On peut obtenir maintenant les contraintes en fonction des déformations en inversant uniquement le système d'équations (III.17.), on aura donc :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \begin{cases} \sigma_r = 2G\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta \\ \sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta = 2G\varepsilon_\theta + \lambda\varepsilon_\theta \\ \tau_{rz} = G\gamma_{rz} \end{cases} \quad (III.18.)$$

avec :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_{\theta} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \end{cases} \quad (III.19.)$$

et les relations contraintes déformations sont données par :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (III.20.)$$

avec :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.20a.)$$

III.4.1. Eléments isoparamétriques :

Souvent la modélisation d'une structure génère des éléments de forme irrégulière; cela est du à la forme arbitraire de cette dernière, donc on a recours à d'autres éléments qui peuvent mieux discrétiser le domaine, ces éléments sont appelés éléments isoparamétriques, superparamétriques et subparamétriques.

Les éléments isoparamétriques, sont ceux pour lesquels les fonctions de déplacements sont les mêmes que les fonctions de forme. Si la fonction de forme est d'ordre supérieur à la fonction d'interpolation (déplacement), l'élément est superparamétrique, dans le cas contraire il est déclaré subparamétrique.

III.4.2. Avantages de l'élément isoparamétrique :

On peut résumer les avantages de l'élément isoparamétrique dans les points suivants :

1. Diversité de la géométrie des éléments.
2. Grande simplicité des calculs.
3. Facilité des parties courbées.
4. Possibilité de confectionner des éléments d'ordre supérieur.

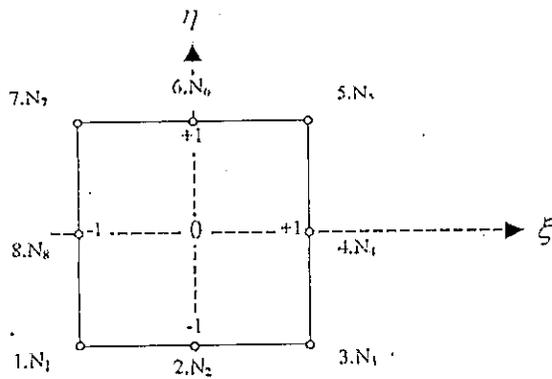


Figure III.3.a Elément isoparamétrique à huit nœuds Q8

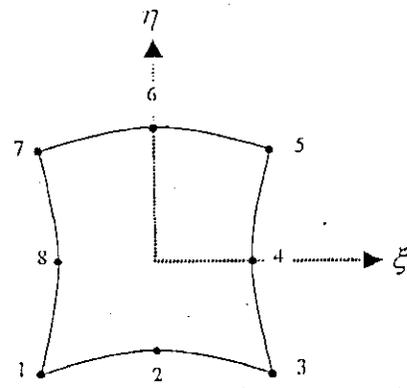


Figure III.3.b. Elément isoparamétrique à huit nœuds Transformation géométrique

La transformation définissant la forme géométrique de l'élément isoparamétrique, lie tous point $P(x,y)$, à un point $P'(\xi, \eta)$ de l'élément parent. Cette transformation doit répondre aux conditions suivantes :

1. La transformation doit être biunivoque, les points P et P' forment des couples. Le déterminant du Jacobien de la transformation ne peut être nul ou infini (pour tout point P' de l'élément parent).
2. La transformation doit être définie univoquement par les coordonnées x_i, y_i des huit nœuds de l'élément isoparamétrique.

Si P coïncide avec un nœud de l'élément parent, le point P correspondant est le nœud de même numéro de l'élément isoparamétrique, donc on a :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \end{cases} \quad (III.21.)$$

• Pour les nœuds d'angle (1,3,5,7) :

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad (III.21a.)$$

• Pour les nœuds de rive (2,4,6,8) :

$$\begin{cases} \xi_i = 0 \Rightarrow N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i) \\ \eta_i = 0 \Rightarrow N_i = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i) \end{cases} \quad (III.21b.)$$

Pour que le champ des déplacements soit nul à une région infinie, on doit avoir :

$$N_i(\xi_i, \eta_i) = \delta_{ij} \text{ pour : } i=1,8 ; j=1,8 \quad (III.22.)$$

III.4.3. Interpolation du champ de déplacements :

Le champ de déplacements $\{u\}$ en tout point P de l'élément isoparamétrique est donné par :

$$\{u\} = [N] \{d\} \Rightarrow \begin{cases} u = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) v_i \end{cases} \quad (\text{III.23.})$$

La définition de la transformation géométrique et la définition de l'interpolation du champ des déplacements se basent sur les mêmes nœuds, les mêmes fonctions de forme N_i , et cela justifie l'appellation d'élément isoparamétrique.

III.4.4. Calcul des propriétés de l'élément isoparamétrique :

III.4.4.1. Matrice de rigidité :

La matrice de rigidité est donnée par :

$$[K]^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] [J] d\xi d\eta \quad (\text{III.24.})$$

avec :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.24a.})$$

III.4.4.2. Forces généralisées :

En utilisant le principe des travaux virtuels, on trouve le vecteur $\{F_v\}^e$ des forces généralisées équivalentes à une force $\{f_v\}^e$ répartie par unité de volume sur l'élément, on a :

$$\{F_v\}^e = \int_V [N]^T \{f_v\}^e dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \{f_v\}^e [J] d\xi d\eta \quad (\text{III.25.})$$

de même pour les forces de surface, on a :

$$\{F_s\}^e = \int_S [N]^T \{f_s\}^e dS = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N]^T \{f_s\}^e [J] d\xi d\eta \quad (\text{III.26.})$$

Chapitre IV

FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS INFINIS

Formulation de la méthode des éléments infinis

IV.1. Introduction :

L'application directe de la méthode des éléments finis à un domaine infini nous oblige à considérer une infinité d'éléments bornés. Le problème n'est donc pas adapté à une résolution numérique, mais rien n'empêche de considérer des éléments non bornés, pourvu que les quantités intégrées restent finis. Le choix des fonctions de base devra respecter deux critères :

- Les fonctions doivent être proches de la solution afin d'assurer la convergence.
- Ces fonctions doivent conduire à des intégrales finis sur le domaine considéré.

IV.2. Formulation des éléments infinis :

Dans la formulation des éléments infinis, deux types de transformations sont utilisés ; la première pour l'interpolation de la géométrie, et la deuxième pour l'interpolation des déplacements. Ces deux types de transformations sont encore utilisées pour la formulation des éléments finis.

Il existe deux approches pour la formulation des éléments infinis :

- Approche directe.
- Approche inverse.

IV.2.1. Approche directe :

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est étendu à l'infini dans la direction considérée. Les variables inconnues sont exprimées en terme de fonctions descendantes, et qui tendent vers zéro à l'infini.

Les fonctions de forme descendante sont données par l'expression :

$$M_i(\xi, \eta) = f_i(\xi, \eta) N_i(\xi, \eta) \quad (IV.1.)$$

avec :

- N_i : sont les fonctions de forme standard.
- f_i : sont les fonctions décroissantes.
- M_i : sont les fonctions de forme de l'élément infini.

L'inconvénient principal de cette approche, est qu'elle nécessite l'utilisation d'intégration numérique sur un domaine semi-infini.

IV.2.2. Approche inverse :

Dans cette approche, le domaine des coordonnées naturelles est maintenu. Des fonctions ascendantes sont utilisées pour la transformation géométrique, et qui sont singulières à l'extrémité du plan naturel.

Les valeurs des coordonnées physiques tendent vers l'infini à l'extrémité du plan naturel, ainsi les éléments infinis représentent un milieu infini.

L'avantage de cette approche, est qu'elle garde les points d'intégration originaux de Gauss-Legendre, utilisés pour un milieu fini.

Dans la présente étude, nous nous intéresserons à l'approche inverse pour sa facilité d'implémentation.

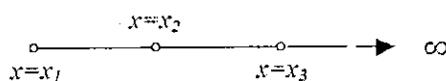
Dans ce qui suit, nous allons développer le principe de construction des fonctions de forme ascendante.

IV.3. Principe de construction de la fonction de transformation :

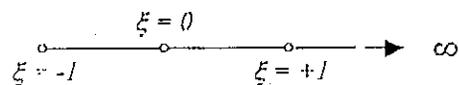
IV.3.1. Cas unidimensionnel :

Commençons par une transformation unidimensionnelle le long d'une ligne (1.2.3), dont la direction coïncide avec l'axe des x ; considérons la fonction suivante :

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \left(\frac{-2\xi}{1-\xi} \right) x_1 + \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right) x_2 \quad (IV.2.)$$



a. Représentation globale



b. Représentation locale

Figure IV.1. Élément infini unidimensionnel

nous remarquons que :

$$\begin{cases} \xi = 0 \Rightarrow x = x_2 \\ \xi = -1 \Rightarrow x = x_1 \\ \xi = +1 \Rightarrow x = \infty \end{cases} \quad (IV.2a.)$$

de plus, on à :

$$\xi = \frac{x - x_2}{x - 2x_1 + x_2} = 1 - \frac{2(x_2 - x_1)}{x - 2x_1 + x_2} \tag{IV.2b.}$$

avec une valeur ($x_2=2x_1$), l'équation (IV.2b) devient :

$$\xi = 1 - \frac{2x_1}{x} \tag{IV.3.}$$

Si, par exemple la fonction inconnue U est approchée par une fonction de la forme polynomiale suivante :

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \dots + \alpha_n \xi^n \tag{IV.4.}$$

Par substitution de la valeur de ξ dans l'équation (IV.2a.), nous obtenons un développement en série de la forme :

$$U = C + \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \dots + \frac{C_n}{r^n} \tag{IV.5.}$$

- avec : - C_i : sont des coefficients quelconques.
 - R (ou x) : représente la distance radiale mesurée à partir de l'origine(ou le pôle).

Donc la convergence est obtenue avec cet élément lorsque le degré du développement polynomial augmente, et on peut déduire comme remarques ce qui suit :

1. La condition $x_2 = 2x_1$, implique que le nœud du milieu doit être le nœud médian.
2. Dans cette approche, la formulation des éléments infinis dépend du type de la fonction décroissante utilisée ($1/r, 1/r^2, 1/r^{1/2}, \dots$).
3. La généralisation de cette interpolation pour n'importe quelle ligne droite dans l'espace (x,y,z) donne :

$$\begin{cases} X = \sum_{i=1}^2 N_i x_i \\ Y = \sum_{i=1}^2 N_i y_i \\ Z = \sum_{i=1}^2 N_i z_i \end{cases} \tag{IV.6.}$$

ou N_i , représentent les transformations infinies à une direction.

IV.3.2. Cas bidimensionnel :

La généralisation de cette formulation pour les cas 2D, 3D est nécessaire. Il est facile de voir que cette généralisation est réalisée en faisant le produit des transformations infinies à une dimension avec des fonctions de forme standard en η .

Donc, les fonctions de forme sont données par :

$$M_i = N_i(\xi) N_i(\eta) \tag{IV.7.}$$

- Avec :
- $N_i(\xi)$: transformation infinie à une dimension.
 - $N_i(\eta)$: fonction de forme standard en η .
 - $M_i(\xi, \eta)$: fonction de forme de l'élément infini.

Considérons l'élément bidimensionnel suivant :

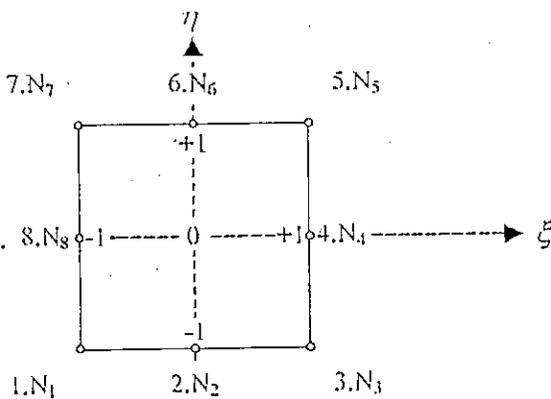


Figure IV.2.a. Elément de référence infini Q8 - Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

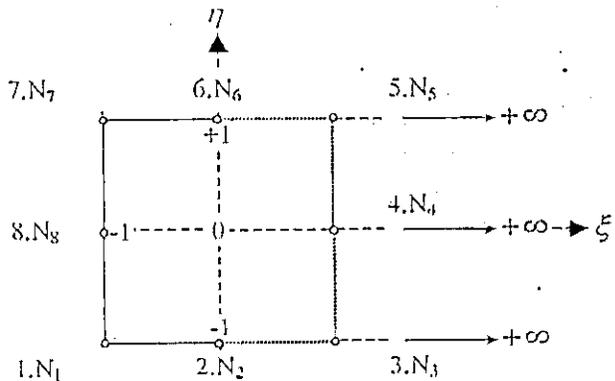


Figure IV.2.b. Elément infini à 5 nœuds Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

Notant que les fonctions de forme dépendent des fonctions décroissantes choisies préalablement.

IV.4. Calcul de la matrice de rigidité de l'élément infini :

Considérons l'élément infini à n nœuds donné par la figure ci-dessus, la transformation géométrique s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n M_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^n M_i y_i \end{cases} \tag{IV.8.}$$

avec M_i sont les fonctions données précédemment.

Le champ de déplacements en tout point de l'élément est donné par :

$$\begin{cases} U = \sum_{i=1}^n N_i u_i \\ V = \sum_{i=1}^n N_i v_i \end{cases} \quad (IV.9.)$$

avec N_i sont les fonctions de forme standards

D'après le principe des travaux virtuels, on a :

$$[K_e] = [B]^T [D] [B] dV = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \cdot [J] d\xi d\eta \quad (IV.10.)$$

avec :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial M_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial M_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial M_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial M_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (IV.10a.)$$

IV.5. Différents types d'éléments infinis :

On peut distinguer pour un problème bidimensionnel, trois types d'éléments infinis.

IV.5.1. Eléments infinis dans le sens horizontal ou vertical :

La fonction de transformation pour le cas bidimensionnel suivant l'axe des abscisses s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^5 M_{ix}(\xi, \eta) x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^5 M_{iy}(\xi, \eta) y_i \quad (IV.11.)$$

$$\sum_{i=1}^5 M_{ix} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^5 M_{iy} = 1 \quad (IV.11a.)$$

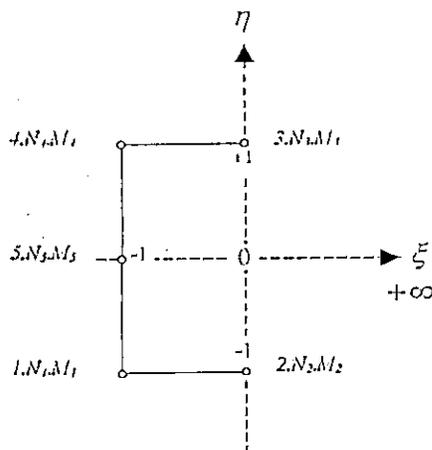


Figure IV.3. Elément infini horizontal à 5 nœuds
Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

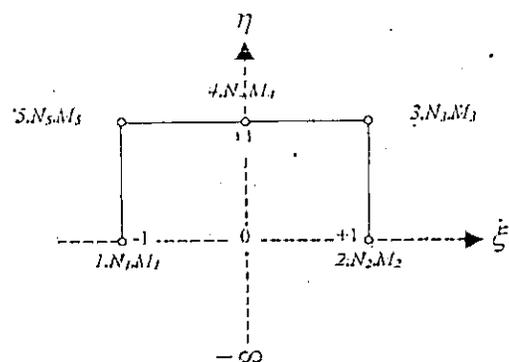


Figure IV.4. Elément infini vertical à 5 nœuds
Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

IV.5.2. Eléments infinis dans le sens horizontal et vertical (élément coin) :

La fonction de transformation pour le cas bidimensionnel pour le cas de l'élément coin s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^3 M_{ix}(\xi, \eta) x_i \quad (IV.12a.)$$

$$y = \sum_{i=1}^3 M_{iy}(\xi, \eta) y_i \quad (IV.12b.)$$

avec :

$$\sum_{i=1}^3 M_{ix} = 1. \quad (IV.12c.)$$

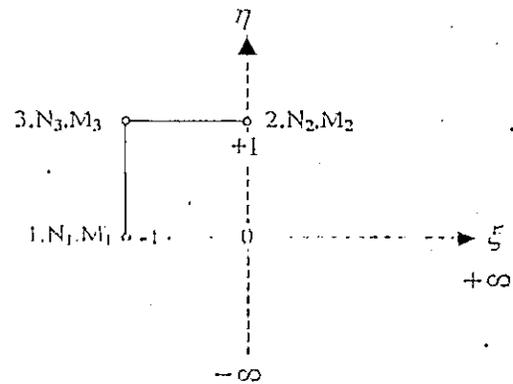


Figure IV.5. Elément infini coin à 3 nœuds
Numérotation des nœuds et des fonctions de forme

IV.6. Couplage éléments finis, éléments infinis :

Dans de nombreux problèmes de géomécanique, nous nous trouvons en présence de domaines infinis, ou semi-infinis. Un exemple simple est donné, celui d'un domaine semi-infini soumis à une charge ponctuelle centrée, illustré par la figure ci-dessous :

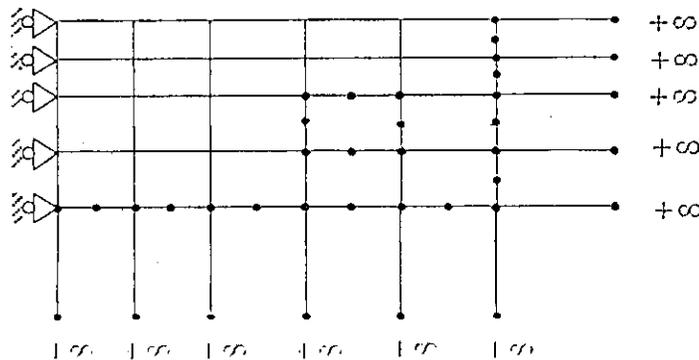


Figure IV.6. Modèle Eléments-Finis, Eléments-Infinis

La question qui se pose, c'est bien le choix d'une méthode de résolution pour ce type de problème. La première réponse consiste à imposer des déplacements nuls sur une frontière bien étudiée, car le choix d'une frontière arbitraire pose des problèmes.

Une méthode plus efficace, consiste à coupler les éléments finis standards avec des éléments infinis. Cette méthode modélise d'une façon satisfaisante le comportement du matériau à l'infini.

Chapitre V

FORMULATION DE LA METHODE DES ELEMENTS DE CONTACT

Formulation de la méthode des éléments de contact

V.1. Généralités et définitions :

V.1.1. Introduction :

Dans le domaine de la géotechnique et du génie-civil, la modélisation des phénomènes de contact est un problème très important. En cet effet de nombreuses structures présentent des surfaces de discontinuité qui peuvent jouer un rôle prépondérant dans leur comportement mécanique. On peut citer par exemple les interfaces entre le sol et la structure (sol-pieux, sol-tirant,..etc.), les interfaces entre deux couches de sol (remblai- sol de fondation,...), les failles dans les massifs rocheux ou encore les interfaces entre massifs en béton, béton et armatures, dalles et connecteurs,...etc.

Les premières publications sur la mécanique du contact sont dues en 1882 à Hertz, et en 1885 à Boussinesq, Hertz propose une solution analytique pour les problèmes de contact, sans frottement entre les sphères élastiques ou entre un poinçon sphérique (ou cylindrique) et un massif semi-infini élastique. Boussinesq utilisa la méthode des potentiels pour résoudre le problème de contact sans frottement entre un poinçon à base plane et un massif semi-infini élastique:

Par la suite, de nombreux auteurs s'intéresseront à la résolution analytique des problèmes de contact. Parmi les principaux il faut citer Huber (1904), Love (1929), Thomas et Hoersch (1930), Sneddon (1946) et Timoshenko et Goodier (1948).

Plus récemment et grâce au développement des moyens de calcul automatique, de nombreux chercheurs ont mis au point des méthodes de résolution numérique de ce type de problèmes.

Les premiers travaux sur le traitement numérique des problèmes de contact ont été réalisés en 1968 par Goodman et Al, qui ont proposé la formulation d'un élément de joint à quatre nœuds d'épaisseur nulle pour la modélisation des failles des massifs rocheux.

En 1972, Goodman et Al, ont complété ces travaux en prenant en compte dans les éléments de joints les phénomènes de dilatance, puis en 1977 Goodman et Al ont étudié une nouvelle extension faisant apparaître explicitement la rigidité de rotation dans la formulation de l'élément.

Parallèlement à ces travaux, Ghaboussi et Al ont présenté un autre type d'élément de joint à quatre nœuds ayant pour degrés de liberté les déplacements relatifs tangentiels et normaux des nœuds en vis à vis.

Plus tard, en 1979, Pande et Al ont développé un élément isoparamétrique quadratique à 8 nœuds d'épaisseur non nulle ayant pour degrés de liberté les déplacements relatifs des nœuds de l'élément.

D'autres comme Frank et Al, ou Hermen ont proposé des éléments de contact à 2 nœuds de type ressort.

Kang à comme lui introduit la notion de matériau fictif de contact et développé un élément de contact plan quadrilatère à 6 nœuds, quand à Ksanguou il a étendu ces travaux au traitement des problèmes axisymétriques et tridimensionnels.

V.1.2. Modélisation des solides en contact :

La modélisation des solides en contact peut être réalisée à l'aide de l'ensemble des éléments de type déplacement qui sont :

- Eléments de massifs plans, et ou tridimensionnels.
- Eléments de poutre plans, et ou tridimensionnels.
- Elément de coque.

V.1.3. Modélisation de la zone de contact :

Pour modéliser le contact entre les solides S_1 et S_2 , nous serons amenés à trois surfaces distinctes :

- S_c : surface sur laquelle le contact peut se produire.
- S : surface de contact actuelle entre les solides.
- S_0 : surface initiale de contact.

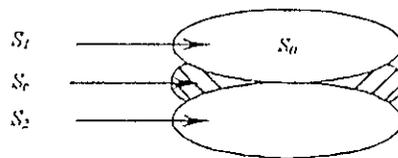


Figure V.1. Zone de contact

La surface S_c est représentée par un matériau fictif, la modélisation de ce matériau fictif est réalisée à l'aide d'éléments finis particuliers que nous appellerons « éléments finis de contact », ces éléments permettent d'assurer dans la surface de contact, la continuité des déplacements normaux et tangentiels des solides en contact.

V.2. Description des éléments de contact :

V.2.1. Présentation des éléments finis de contact :

La surface de contact est modélisée à l'aide d'éléments finis quadrilatères à 6 nœuds :

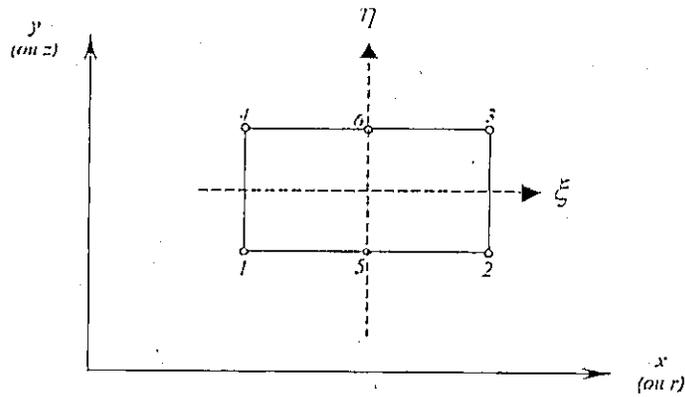


Figure V.2. Elément de contact quadrilatère à 6 nœuds

Ces éléments sont quadratiques suivant la direction tangente au contact, et linéaires suivant la direction normale.

V.2.2. Définition de la géométrie d'un élément de contact :

La relation entre les coordonnées d'un point quelconque de l'élément et les coordonnées cartésiennes des nœuds de l'élément s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N H^k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x^k \\ y^k \end{Bmatrix} \tag{V.1}$$

avec :

- (x, y) : coordonnées cartésiennes dans le repère global d'un point de l'élément.
- (ξ, η) : coordonnées intrinsèques du point considéré.
- (x^k, y^k) : coordonnées cartésiennes du nœud k .
- H^k : fonction d'interpolation du nœud k .
- N : nombre de nœuds de l'élément.

Notons que les fonctions d'interpolation H^k sont linéaires suivant la direction normale de contact η , quadratique suivant la direction tangente ξ .

V.2.3. définition du champ de déplacement :

Il s'agit d'exprimer le vecteur déplacement d'un point courant de l'élément en fonction des vecteurs déplacement en fonction des vecteurs aux nœuds. Pour cela, nous utiliserons les mêmes fonctions d'interpolation pour la définition de la géométrie de l'élément de contact, donc les éléments de contact seront donc isoparamétriques.

La relation entre les déplacements d'un point quelconque de l'élément et les déplacements des nœuds s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N H^k(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u^k \\ v^k \end{Bmatrix} \tag{V.2}$$

avec :

- (u, v) : coordonnées de déplacement d'un point de l'élément.
- (ξ, η) : coordonnées intrinsèques du point considéré.
- (u^k, v^k) : composantes de déplacement du nœud k .
- H^k : fonction d'interpolation du nœud k .
- N : nombre de nœuds de l'élément.

V.2.4. Définition de l'épaisseur des éléments de contact :

Lorsque les solides sont en contact, l'épaisseur des éléments de contact est nulle. Ceci conduit à une singularité de comportement de l'élément.

Pour lever numériquement cette singularité, nous remplacerons l'épaisseur nulle par une valeur e très petite mais non nulle.

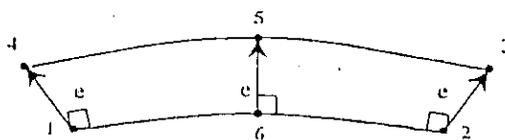


Figure V.3. Elément plan ou axisymétrique

La géométrie réelle de l'élément de contact est calculée de la position des nœuds 1,5 et 2 formant une courbe choisie comme courbe de référence.

A l'aide des coordonnées de ces trois nœuds et des fonctions d'interpolation quadratiques, on calcule le vecteur normal à cette courbe en chacun de ces nœuds, puis on positionne sur chacune de ces trois normales les nœuds 4,6 et 3 à une distance e des nœuds correspondants.

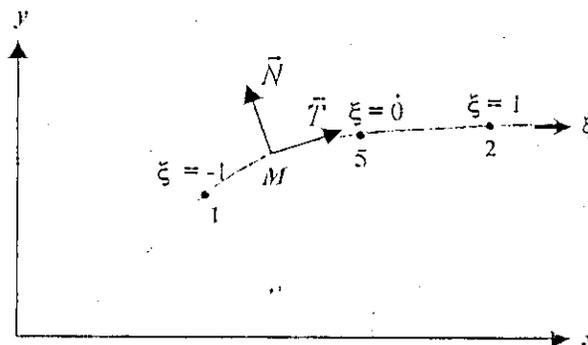


Figure V.4. Géométrie de l'élément de contact de référence

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point de la courbe 1,5,2 d'abscisse curviligne ξ d'où :

$$\begin{cases} x(\xi) = g_1(\xi)x_1 + g_2(\xi)x_2 + g_3(\xi)x_3 \\ y(\xi) = g_1(\xi)y_1 + g_2(\xi)y_2 + g_3(\xi)y_3 \end{cases} \quad (V.3.)$$

avec :

$$\begin{cases} g_1(\xi) = \frac{\xi}{2}(1-\xi) \\ g_2(\xi) = \frac{\xi}{2}(1+\xi) \\ g_3(\xi) = (1-\xi).(1+\xi) \end{cases} \quad (\text{V.3a.})$$

Soit (\vec{T}, \vec{N}) le repère local en M , le vecteur normal \vec{N} à pour expression :

$$\vec{N}(\xi) = \begin{cases} -y_{,\xi} = -\frac{1}{2}(-y^1 + y^2) - \xi(y^1 + y^2 - 2y^3) \\ x_{,\xi} = \frac{1}{2}(-x^1 + x^2) + \xi(x^3 + x^2 - 2x^5) \end{cases} \quad (\text{V.4.})$$

On calcule alors les coordonnées des nœuds 3,4 et 6 par les expressions :

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} + e \frac{\vec{N}(\xi=1)}{\|\vec{N}(\xi=1)\|} \\ \begin{Bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} + e \frac{\vec{N}(\xi=-1)}{\|\vec{N}(\xi=-1)\|} \\ \begin{Bmatrix} x_6 \\ y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_5 \\ y_5 \end{Bmatrix} + e \frac{\vec{N}(\xi=0)}{\|\vec{N}(\xi=0)\|} \end{cases} \quad (\text{V.5.})$$

V.2.5. Calcul de l'épaisseur e :

Nous choisirons de calculer cette valeur e comme le produit d'une grandeur caractéristique du maillage par un coefficient de pénalisation 10^n avec :

$$e = L \cdot 10^n \quad (\text{V.6.})$$

Nous avons adopté pour grandeur caractéristique du maillage :

$$L = \frac{1}{2} [(x_{\max} - x_{\min}) + (y_{\max} - y_{\min})] \quad (\text{V.6a.})$$

V.3. Relation contraintes-déformations de l'élément de contact :

A chaque élément de contact, on associe une loi de comportement permettant de prendre en compte différentes natures de contact, cette loi est exprimée par la relation :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (\text{V.7.})$$

ou $\{\sigma\}$ et $\{\varepsilon\}$ représentent respectivement les tenseurs des contraintes et des déformations en un point de l'élément, et on aura pour :

- Problème plan :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy} \rangle \\ \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy} \rangle \end{aligned} \quad (V.7a.)$$

- Problème axisymétrique :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_r, \sigma_z, \sigma_{\theta}, \sigma_{rz} \rangle \\ \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_{\theta}, 2\varepsilon_{rz} \rangle \end{aligned} \quad (V.7b.)$$

- Problème tridimensionnel :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz} \rangle \\ \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz} \rangle \end{aligned} \quad (V.7c.)$$

Différentes lois de comportement peuvent être envisagées, glissement parfait, adhérence, frottement de Coulomb, ... etc. à chacune de ces lois est associée une matrice de comportement (d'élasticité), $[D]$ qui permet d'assurer les continuités correspondantes sur les glissements.

Ces différentes matrices ne peuvent être exprimées que dans un repère local lié à l'élément de contact. Le calcul de ces matrices dans le repère global est réalisé à l'aide d'une matrice $[R]$, dite matrice de passage.

V.3.1. Expression de la matrice $[E']$:

V.3.1.1. Glissement parfait :

Les éléments finis de contact doivent exclusivement assurer la continuité des déplacements normaux, ainsi dans le repère local la matrice de comportement a pour expression :

- Pour le problème plan :

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.8a.)$$

- Pour le problème axisymétrique :

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.8b.)$$

- Pour le problème tridimensionnel :

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.8c.})$$

Où E représente le module d'Young du matériau de contact. Cette grandeur caractéristique de l'élément sera précisée dans les prochains paragraphes.

V.3.1.2. Adhérence :

Les éléments finis de contact doivent assurer la continuité des déplacements normaux et tangentiels des solides en contact. Dans le repère local la matrice de comportement à pour expression :

- Pour un problème plan :

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{V.9a.})$$

- Pour un problème axisymétrique :

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{V.9b.})$$

- Pour un problème tridimensionnel :

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (\text{V.9c.})$$

V.3.1.3. Frottement de Coulomb :

La matrice de comportement est identique à la matrice correspondante à l'adhérence. En effet elle a pour but d'assurer comme précédemment la continuité des déplacements normaux et tangentiels.

V.3.2. Expression dans le repère global :

Il s'agit d'exprimer dans le repère global la relation matricielle contrainte, déformation. Pour cela on utilise une matrice de passage $[R]$, telle que :

$$\{\sigma\} = [R]\{\sigma'\} \text{ et } \{\varepsilon\} = [R]^T \{\varepsilon'\} \quad (\text{V.10.})$$

La relation contrainte-déformation dans le repère global s'écrit :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \text{ avec } [D] = [R] [D'] [R]^T \quad (\text{V.11.})$$

La matrice $[R]$ peut s'exprimer à l'aide des composantes des vecteurs du repère local exprimés dans le repère global.

Et pour un problème plan ou axisymétrique soit (\vec{i}_1, \vec{i}_2) , les vecteurs du repère local en un point de l'élément, avec :

$$\vec{i}_1 \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix}, \vec{i}_2 \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \text{ et avec ces notations la matrice } [R] \text{ s'écrit :}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} c_1^2 & d_1^2 & 2c_1d_1 \\ c_2^2 & d_2^2 & 2c_2d_2 \\ c_1c_2 & d_1d_2 & c_1d_2 + c_2d_1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.11a.})$$

V.4. Calcul de la matrice de rigidité de l'élément de contact :

V.4.1. Expression de la matrice de rigidité élémentaire :

Ecrivons l'expression du principe des travaux virtuels :

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (\text{V.12.})$$

pour tout champ de déplacement cinématique admissible, avec :

δW_{int} : travail virtuel des efforts intérieurs.

δW_{ext} : travail virtuel des efforts extérieurs.

Calculons le travail virtuel des efforts intérieurs pour un élément :

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (\text{V.12a.})$$

ou Ω_e représente le volume de l'élément considéré.

Le travail virtuel des efforts intérieurs peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\delta W_{int} = - \int \langle \sigma \rangle \{ \delta \varepsilon \} d\Omega \quad (V.12b.)$$

Tout d'abord, nous allons exprimer les déformations en fonction des déplacements nodaux :

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{,x} \\ U_{,y} \\ V_{,x} \\ V_{,y} \end{Bmatrix} \quad (V.12c.)$$

soit :

$$\{ \varepsilon \} = [A] \{ U_{,x} \}$$

V.4.2. Calcul de la matrice de rigidité élémentaire :

La matrice de rigidité s'écrit sous la forme :

$$[K]^e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (V.13.)$$

avec :

$$[B] = [A] [T] [L] \text{ et } [D] = [B] [D'] [R]^T$$

Où les matrices $[A]$ et $[D']$ sont matrices constantes.

La matrice $[L]$ qui est composée des dérivées en ξ, ζ, η des fonctions d'interpolation est une matrice linéaire suivant la direction normale de contact.

Dans le cas axisymétrique par exemple on peut écrire :

$$\begin{aligned} [K]^e &= \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega = \iiint_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] r dr d\theta dz \\ &= 2\pi \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] r dr dz = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] r |\det J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (V.13a.)$$

finalement :

$$[K]^e = 2\pi \left[2 \int_{-1}^1 [B_1]^T [D] [B_1] r |\det J| d\xi + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 [B_2]^T [D] [B_2] r |\det J| d\xi \right] \quad (V.14.)$$

avec :

$$\begin{cases} [L(\xi, \zeta, \eta)] = [L_1(\xi, \eta)] + \zeta [L_2(\xi, \eta)] \\ [B(\xi, \zeta, \eta)] = [B_1(\xi, \eta)] + \zeta [B_2(\xi, \eta)] \\ [B_1] = [A] [T] [L_1] ; [B_2] = [A] [T] [L_2] \end{cases} \quad (\text{V.14.a.})$$

V.4.3. Choix du type d'intégration numérique :

Il existe diverses possibilités pour procéder à l'intégration numérique de la matrice de rigidité élémentaire. Parmi les choix classiques on peut citer l'intégration numérique de Gauss, et l'intégration numérique de Newton-cotes. Ces méthodes ne permettent l'intégration exacte que des fonctions polynômes.

Pour les éléments de contact, la matrice de rigidité élémentaire a pour fonction d'assurer certaines continuités entre les nœuds en vis à vis, donc l'intégration numérique choisie pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire doit assurer ces continuités.

V.4.4. Caractéristiques mécaniques des éléments de contact :

La matrice de comportement $[L^*]$ des éléments de contact fait apparaître les grandeurs L' et G . Ces grandeurs représentent le module d'Young et le module de cisaillement des éléments de contact.

Comme il s'agit de modéliser un matériau fictif, ces deux grandeurs n'ont pas de signification physique.

On a vu que la rigidité de l'élément de contact avait pour ordre de grandeur la quantité kL' ou k représente le rapport longueur sur épaisseur de l'élément de contact.

$$k = \frac{L}{e} \approx 10^n \quad (\text{V.15a.})$$

Pour assurer numériquement la continuité des déplacements à n décimales près, nous choisirons pour L' une valeur de même ordre de grandeur que le plus faible module d'Young des deux solides en contact. La valeur du module de cisaillement s'obtient par la relation :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{V.15b.})$$

Le coefficient de poisson est quant à lui sans influence sur le comportement des éléments de contact.

V.5. Calcul des contraintes dans les éléments de contact :

Compte tenu du caractère non linéaire du problème traité, nous calculerons le tenseur des contraintes dans les éléments de contact de manière incrémentale.

En un point M quelconque d'un élément de contact, l'incrément de contrainte $\{\Delta\sigma\}$ est ainsi relié à l'incrément de déformation $\{\Delta\varepsilon\}$ par la relation :

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{V.16})$$

soit encore, dans un repère local au point M :

$$\{\Delta\sigma'\} = [D'] [R]^T \{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{V.16a})$$

où $[R]$ désigne la matrice de passage.

En utilisant les notations précédemment définies, on peut exprimer l'incrément de contrainte en fonction de l'incrément déplacement par la relation :

$$\{\Delta\sigma'\} = [D'] [R]^T [A] [T] [L] \{\Delta U\} \quad (\text{V.16b.})$$

Les contraintes seront calculées aux points d'intégration de la matrice de rigidité élémentaire.

V.5.1. Elément de contact actif-inactif :

Nous rappelons ici les définitions données précédemment avec :

S_c : surface où le contact peut se produire.

S' : surface de contact actuelle entre les solides.

S_0 : surface initiale de contact.

La totalité de la surface S_c de contact est modélisée à l'aide d'éléments finis de contact, cependant les éléments de contact appartenant à S_c mais pas à S' , ont une matrice de rigidité élémentaire identiquement nulle. Ces éléments n'ont aucune contribution dans la matrice de rigidité globale du système étudié.

Au contraire, les éléments de contact appartenant à la surface S' sont déclarés actifs, par la suite on peut affiner cette distinction entre les éléments actifs et les éléments inactifs.

En effet, nous avons vu que la matrice de rigidité d'un élément de contact s'obtenait par intégration numérique, comme la somme des matrices calculées aux différents points d'intégration de l'élément.

Nous dirons qu'un point d'intégration d'un élément de contact est inactif (ou encore décollé) si la contribution de ce point dans la matrice de rigidité de l'élément est identiquement nulle. Dans le cas contraire, le point d'intégration sera déclaré actif (ou encore en contact).

La distinction actif-inactif, est donc réalisée non pas au niveau des points d'intégration de la matrice de rigidité élémentaire. Ainsi un élément de contact pourra être partiellement en contact ou partiellement décollé.

V.5.2. Critères de contact :

V.5.2.1. Critère de non interpénétration :

Le critère de non-interpénétration est un critère géométrique qui a pour but d'interdire à tout point du solide S_1 de pénétrer à l'intérieur du solide S_2 et réciproquement.

Cette limitation physique triviale est assurée numériquement dans la surface effective de contact par l'intermédiaire des matrices de rigidité des éléments de cette zone.

Par contre, pour les nœuds des solides S_1 ou S_2 appartenant à des éléments de contact inactifs, il faut prévoir un test géométrique des déplacements calculés.

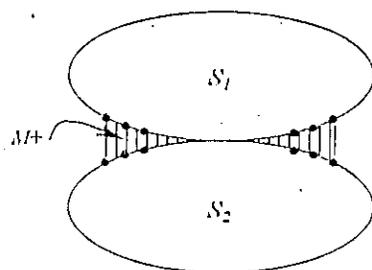


Figure V.5. Critère de non - interpénétration

Soit M un point d'un élément de contact décollé (ou partiellement décollé), avec ces coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Sous l'action d'un chargement ΔP , le point M se transforme en un point M^* tel que :

$$\begin{cases} x^* = x + \Delta u \\ y^* = y + \Delta v \\ z^* = z + \Delta w \end{cases} \quad (\text{V.17a.})$$

Ce changement de configuration transforme l'élément de volume initial dV autour de M , en un élément de volume dV^* tel que :

$$\begin{aligned} dV &= dx \cdot dy \cdot dz \\ dV^* &= dx^* \cdot dy^* \cdot dz^* \end{aligned} \quad (\text{V.17b.})$$

soit encore :

$$dV^* = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial x} & \frac{\partial x^*}{\partial y} & \frac{\partial x^*}{\partial z} \\ \frac{\partial y^*}{\partial x} & \frac{\partial y^*}{\partial y} & \frac{\partial y^*}{\partial z} \\ \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial z} \end{vmatrix} dx \cdot dy \cdot dz \quad (\text{V.17c.})$$

Notons que :

$$dV^* = (\det F^{**}) dV$$

avec :

$$[J^{**}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial x} & \frac{\partial x^*}{\partial y} & \frac{\partial x^*}{\partial z} \\ \frac{\partial y^*}{\partial x} & \frac{\partial y^*}{\partial y} & \frac{\partial y^*}{\partial z} \\ \frac{\partial z^*}{\partial x} & \frac{\partial z^*}{\partial y} & \frac{\partial z^*}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (V.17d.)$$

Le contact des solides se produit au point M considéré lorsque $dV^* = 0$, ainsi on retiendra pour critère d'interpénétration au point M :

$$\begin{cases} \text{Det } J^{**} > 0 : \text{ les solides sont décollés en } M. \\ \text{Det } J^{**} = 0 : \text{ les solides sont en contact en } M. \\ \text{Det } J^{**} < 0 : \text{ les solides s'interpénètrent en } M. \end{cases} \quad (V.18.)$$

V.5.2.2. Critère de résistance à la traction :

Soit un point M appartenant à un élément de contact actif, soumis à une contrainte normale σ_n et prenant comme R^T la résistance à la traction de l'élément de contact considéré, donc le critère de la résistance à la traction peut s'exprimer sous la forme :

$$\sigma_n < R^T \quad (V.19.)$$

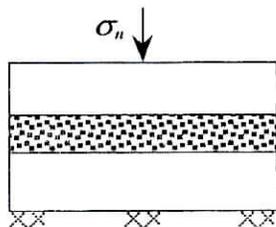


Figure V.6.a. Etat collé

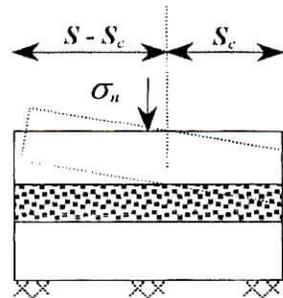


Figure V.6.b. Etat décollé

Figure V.6 Critère de résistance à la traction

V.5.2.3. Critère de frottement :

On a choisi de représenter les phénomènes de frottement entre les solides en contact à l'aide de la loi de Coulomb. Soit un point M appartenant à un élément de contact actif

sollicité par un couple de contrainte normale σ_n , et une contrainte tangentielle τ sachant que c et ϕ représentent la cohésion et l'angle de frottement qui caractérisent la nature de contact dans l'élément considéré.

La loi de frottement de Coulomb peut s'exprimer sous la forme :

$$|\tau| < c - \sigma_n / g \phi \quad (\text{V.20.})$$

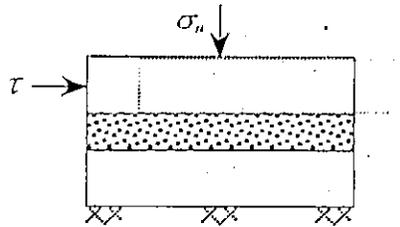


Figure V.7 Etat de glissement

V.5.3. Critères sur les contraintes :

V.5.3.1. Critère de la résistance à la traction :

Le critère de résistance à la traction doit être vérifié en tous points d'intégration actifs des éléments de contact.

Soit M un point d'intégration actif qui ne vérifie pas le critère, c'est à dire tel que :

$$\sigma_i'' = \sigma_{i-1}'' + \Delta\sigma_i'' \geq R'' \quad (\text{V.21.})$$

La contrainte normale calculée σ_i'' n'est pas admissible, il y'a rupture par traction du contact en ce point, donc on procède alors à une correction de manière à annuler les contraintes en ce point.

Le tenseur correction de contrainte $\{\Delta\sigma_{iv}\}$, est tel que :

$$\{\sigma_i\} + \{\Delta\sigma_{iv}\} = \{0\} \quad \text{ou encore :} \quad \{\sigma_i\} = -\{\Delta\sigma_{iv}\} \quad (\text{V.22.})$$

V.5.3.2. Critère de frottement :

On peut considérer le matériau fictif de contact comme un matériau rigide, parfaitement plastique obéissant au critère suivant :

$$\begin{cases} f = |\tau| - c - \sigma_n / g \phi < 0 \\ g = |\tau| - c + \sigma_n / g \phi \end{cases} \quad (\text{V.23.})$$

avec :

- f : fonction de charge.
- g : potentiel associé.
- c : cohésion.
- ϕ : angle de frottement.
- φ : angle de dilatance.

Le critère de frottement (ici la loi de Coulomb), doit être vérifié en tout points actifs des éléments de contact. Soit M_i un point d'intégration actif qui ne vérifie pas le critère, c'est à dire tel que :

$$f(\{\sigma_i\}) = |\tau_i| - c + \sigma_n \tan \phi \geq 0 \quad (\text{V.24.})$$

On procède alors en ce point à une correction de contraintes $\{\Delta\sigma_{ic}\}$, telle que :

$$f(\{\sigma_i + \Delta\sigma_{ic}\}) = 0 \quad (\text{V.24a.})$$

Comme la fonction f s'exprime linéairement en fonction du tenseur des contraintes, on peut écrire l'égalité suivante :

$$f(\{\sigma_i + \Delta\sigma_{ic}\}) = f(\{\sigma_i\}) + \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle \{\Delta\sigma_{ic}\} \quad (\text{V.24b.})$$

Soit en combinant les équations (V.24.a.) et (V.24b.) :

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle \{\Delta\sigma_{ic}\} = -f(\{\sigma_i\}) \quad (\text{V.25.})$$

Par analogie du traitement numérique des problèmes d'élasto-plasticité, on choisira $\{\Delta\sigma_{ic}\}$ sous la forme :

$$\{\Delta\sigma_{ic}\} = \Delta\lambda [D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} \quad (\text{V.26.})$$

Ou $[D]$ désigne la matrice de comportement, et $\Delta\lambda$ un scalaire positif. En reportant cette expression dans l'équation (V.24.) nous obtenons :

$$\Delta\lambda \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle [D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\} = -f(\{\sigma_i\}) \Rightarrow \Delta\lambda = -\frac{f(\{\sigma_i\})}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle [D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \quad (\text{V.27.})$$

La combinaison des équations (V.26.) et (V.27.) fournit alors l'expression du tenseur correction de contrainte :

$$\{\Delta\sigma_{ic}\} = -f(\{\sigma_i\}) \frac{[E] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\rangle [D] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right\}} \quad (\text{V.28.})$$

Pour la fonction de charge et le potentiel associé choisis, on obtient après calcul :

$$\{\Delta\sigma_{ic}\} = \frac{f}{G + E \operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\varphi} \begin{Bmatrix} 0 \\ E \operatorname{tg}\varphi \\ \pm G \end{Bmatrix} \quad (\text{V.28.a.})$$

D'où pour les problèmes tridimensionnels, on peut exprimer la loi de frottement de Coulomb sous la forme :

$$f = |\sigma_y| - c + \sigma_y \operatorname{tg}\psi = 0 \quad (\text{V.28.b.})$$

avec :

$$\begin{cases} i \\ j \neq i \end{cases} \text{ direction normale de contact.}$$

Le potentiel associé s'écrit alors :

$$g = |\sigma_y| + \sigma_y \operatorname{tg}\varphi \quad (\text{V.28.c.})$$

V.5.3.3. Critère de non-interpénétration :

Conformément à la vérification des critères en contraintes pour les points d'intégration actifs des éléments de contact, il faut procéder à la vérification de critère de non-interpénétration en tout point d'intégration inactif des éléments de contact.

V.5.4. Calcul du vecteur correction de déplacement $\{\Delta U_{ic}\}$:

Soit M un point d'intégration inactif d'un élément de contact, supposons que le vecteur déplacement calculé précédemment ne respecte pas le critère de non-interpénétration en ce point avec :

$$\{U_i\} = \{U_{i-1} + U_i\} \quad (\text{V.29.})$$

Conformément à la description faite auparavant, on peut calculer en M un coefficient α , tel que le vecteur déplacement élémentaire $\{U_{i-1} + \alpha U_i\}$, correspond exactement à la mise en contact des solides en ce point.

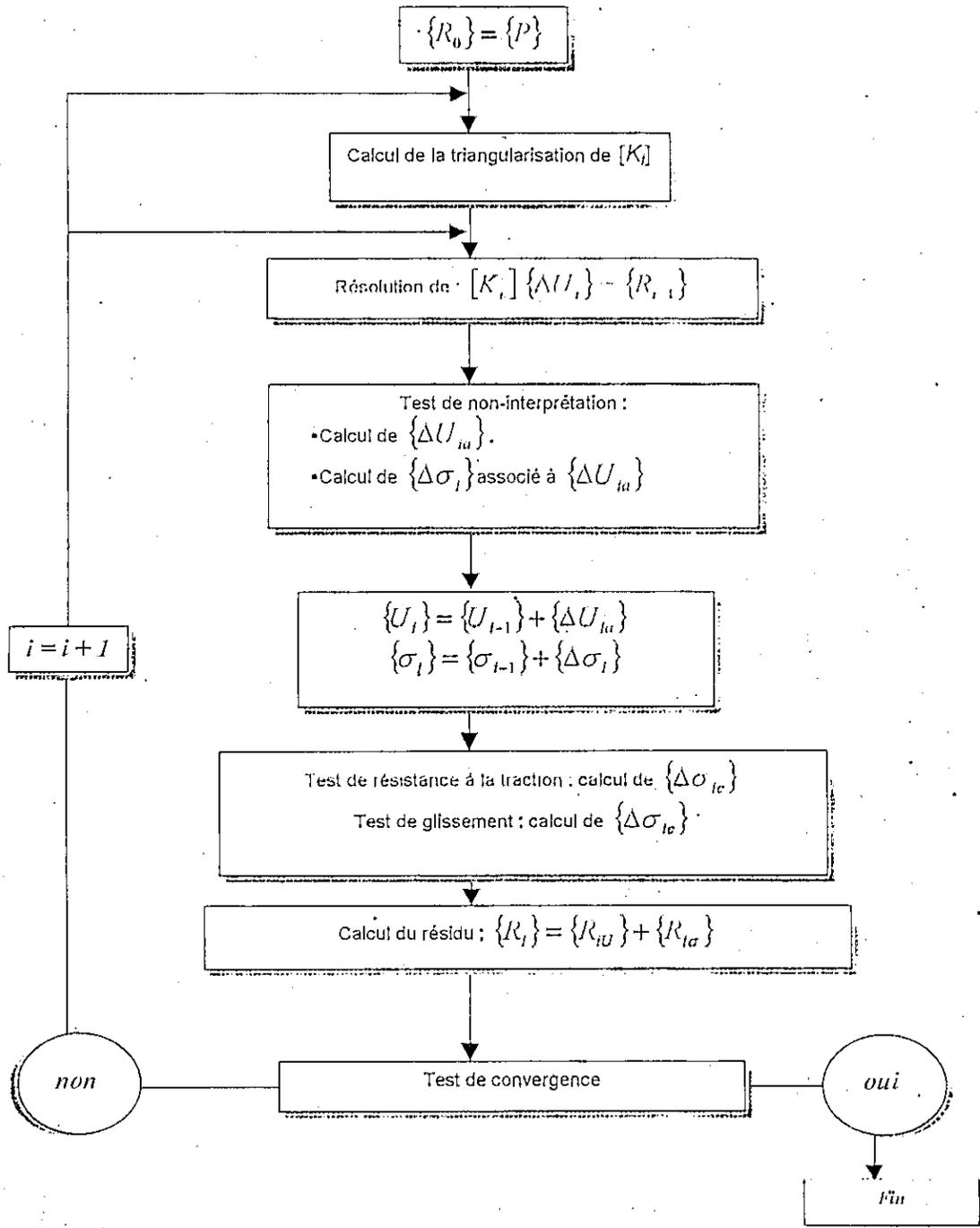
On peut alors calculer un vecteur déplacement global admissible $\{\Delta U_{ic}\}$ par assemblage des vecteurs élémentaires $\alpha \{U_i\}$.

Le nouveau vecteur déplacement $\{U_{i-1} + \Delta U_i + \Delta U_{ic}\}$ satisfait alors en tout point le critère de non-interpénétration, ou le vecteur correction de déplacement a pour expression :

$$\{\Delta U_{ic}\} = \{\Delta U_{ic}\} - \{U_i\} \quad (\text{V.30.})$$

V.5.5. Schéma général de l'algorithme de résolution :

Nous allons présenter tout d'abord le schéma de l'algorithme de résolution pour un incrément de chargement fixé $\{P\}$, où i désigne le numéro de l'itération.



V.6. Classification des interfaces :

Cette classification des interfaces, est basée sur l'importance des zones perturbées, dont on distingue :

V.6.1. Les interfaces de premier type :

Pour lesquelles l'essentiel des déformations observées au cours des sollicitations est concentrées au voisinage immédiat de la surface limite. a ce type d'interface correspondant, les contacts secs entre solides de rigidités élevées présentent un défaut de structure, comme les joints des massifs rocheux.

V.6.2. Les interfaces de deuxième ordre :

Pour lesquelles, on assiste au développement de zones non élastiques importantes. Par exemple le cas de l'interaction sol structure, les contacts entre milieux de rigidités très différentes.

V.7. Méthodes d'analyse des problèmes d'interaction :

L'analyse numérique de problèmes comportant des interfaces s'est développée en génie civil, essentiellement en mécanique des roches, et dans le cadre de l'interaction sol structure. Les études proposées par différents auteurs appartiennent à l'une des deux approches suivantes :

- Méthodes utilisant une relation limite en contraintes.
- Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface.

V.7.1. Méthodes utilisant une relation limite en contrainte :

Ces méthodes sont basées sur le partitionnement de l'interface à partir d'une relation limite exprimée en termes de contraintes.

L'hypothèse de base se base sur le fait que l'interface ne peut se trouver que dans un nombre fini d'états collé, décollé ou frottant.

Si on considère que la relation qui traduit la rupture de l'interface est de type Coulomb, c'est à dire :

$$\tau < c + \sigma_n \operatorname{tg} \phi \quad (\text{V.31.})$$

avec : - c : cohésion.
- ϕ : angle de frottement interne.

L'interface est caractérisée par certains nombres de points de contact, et elle est partitionnée en fonction de l'état de liaison en chaque point.

$$\begin{cases} \tau < c + \sigma_n \operatorname{tg} \phi \Rightarrow \text{liaison totale (état collé).} \\ \sigma_n = 0 \Rightarrow \text{traduit un décollement.} \\ \tau = c + \sigma_n \operatorname{tg} \phi \Rightarrow \text{exprime le glissement.} \end{cases} \quad (\text{V.32.})$$

V.7.2. Méthodes utilisant une loi de comportement de l'interface :

Dans ces méthodes, l'interface est assimilée à un matériau fictif, nous définissons donc sa loi de comportement comme la relation entre les contraintes et les déplacements relatifs associés en un point de l'interface.

Cette loi non linéaire dans le cas général, peut s'exprimer sous une forme matricielle et incrémentale :

$$\begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{tt} & C_{tn} \\ C_{nt} & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad (\text{V.33.})$$

Soit :

$$\{d\tau\} = [C]\{ds\} \text{ avec } [C] \text{ est la matrice de comportement.}$$

Les termes C_{tn} et C_{nt} de la matrice de comportement traduisent un couplage éventuel entre le cisaillement et la traction (ou compression) du plan de l'interface.

Deux approches peuvent être suivies pour l'établissement d'une loi de comportement par une analyse globale ou locale.

V.7.2.1. Analyse globale :

Pour introduire la notion de l'analyse globale, considérons l'exemple de la liaison entre deux solides (ou matériaux), par un joint rempli par un matériau intermédiaire (de remplissage).

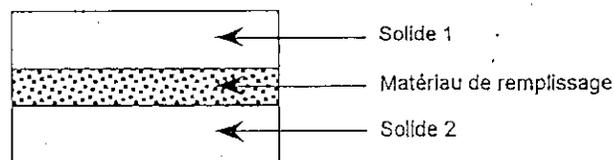


Figure V.8 Analyse globale

Dans un premier temps, on peut considérer qu'il s'agit d'un double problème d'interface :

- Contact solide 1, matériau de remplissage.
- Contact matériau de remplissage, matériau 2.

Pour la modélisation du problème, on doit disposer d'une part des caractéristiques de chacune des deux liaisons et d'autre part des propriétés de matériau de remplissage. Des difficultés expérimentales évidentes surgissent alors, si le joint est mince et le matériau est hétérogène ce qui est le cas courant.

Pour déterminer expérimentalement ces propriétés, il faut pratiquer des essais sur un échantillon de la zone d'interface de dimension suffisante pour qu'à chacune des extrémités on retrouve les matériaux 1 et 2 respectivement.

Le problème majeur est le choix de la taille de cet échantillon qui doit être effectué pour obtenir une bonne représentativité de l'interface.

Dans le cas des liaisons très hétérogènes, il faut procéder à une recherche par étapes, à partir de plusieurs dimensions. Pour chaque longueur testée, le profil géométrique est caractérisé et on retient la dimension à partir de laquelle les moyennes des paramètres utilisés ne varient pratiquement pas.

Le terme d'analyse globale désigne le procédé qui consiste à construire la loi de comportement de l'interface à partir du comportement d'un échantillon représentatif.

V.7.2.2. Analyse locale :

En considérant le même exemple précédent et en observant de plus près l'interface, on découvre une hétérogénéité de plus en plus importante, vides, parties en contact frottant. L'hétérogénéité de forme des aspérités peut être compliquée par hétérogénéité du matériau.

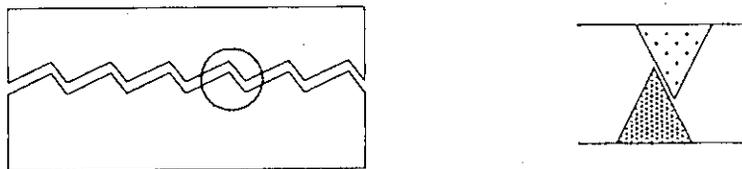


Figure V.9. Analyse locale

L'analyse locale consiste à étudier l'interface à l'échelle des aspérités, échelle à laquelle on ne peut effectuer de mesure de déplacements, la statistique devient un outil indispensable pour obtenir une loi de comportement à partir de mécanismes élémentaires.

Cette voie complète la précédente. En effet si l'analyse globale conduit à l'établissement d'une loi d'ensemble, elle ne permet pas de préciser la part des différentes caractéristiques physiques sur les paramètres de cette loi, et elle aboutit souvent à une expérimentation lourde. L'étude détaillée de ces caractéristiques doit permettre cas par cas d'épargner certaines mesures par des formulations.

V.7.3. Formulation d'une loi de comportement :

La loi rhéologique d'un matériau est la relation reliant la réponse de ce matériau à une sollicitation, par exemple les déformations à l'état de contraintes.

Cette loi peut se mettre sous la forme :

$$r(t) = \mathfrak{F}s(t) \quad (V.34.)$$

avec \mathfrak{F} est une fonctionnelle liant la réponse $r(t)$ à l'instant t à toute l'histoire de la sollicitation $s(t)$ de l'origine des temps t_0 au temps t .

La fonctionnelle \mathfrak{J} étant dans le cas général à expliquer, il faut faire appel à la procédure de linéarisation, qui mène à une formulation de type incrémentale.

Dans le cas des interfaces, cette loi devient sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} d\tau \\ d\sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{uu} & C_{un} \\ C_{nu} & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad (\text{V.35.})$$

Soit :

$$\{d\epsilon\} = [C']\{d\epsilon\}$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter une formulation élasto-plastique de la matrice de comportement.

V.7.4. Formulation élasto-plastique :

La théorie de la plasticité est fondée sur la décomposition de l'incrément de déformation $\{d\epsilon\}$ en une matrice élastique (réversible), et une partie plastique irréversible (irréversible) :

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon\}^e + \{d\epsilon\}^p \quad (\text{V.36.})$$

L'apparition de cette déformation plastique est liée à la notion de critère de plasticité qui s'écrit :

$$F(\{\sigma\}, K) = 0 \quad (\text{V.37.})$$

avec :

- K : paramètre d'écoulement.
- $\{\sigma\}$: vecteur contrainte.
- F : fonction de charge.

La surface $F(\{\sigma\}, K) = 0$, est la surface de charge (dans l'espace des contraintes), s'il existe une fonction $G(\{\sigma\}, K)$ telle que :

$$d\epsilon = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \quad (\text{V.38.})$$

- avec :
- $d\lambda$: scalaire positif.
 - G : potentiel plastique.

La représentation $G(\{\sigma\}, K) = 0$ est une surface telle que le vecteur $\{d\epsilon\}^p$ lui est normal, lorsque F est différente de G , le matériau est dit « non standard », on distingue une fonction d'écoulement et une fonction potentielle. La relation (V.37.) traduit la loi de normalité relative à la fonction potentiel. Si F et G sont confondues, la plasticité est standard.

V.7.4.1. Expression générale de la matrice de comportement :

Nous nous plaçons dans le cas le plus général, cas de la plasticité non standard. Le déplacement se décompose en :

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon\}^n + \{d\varepsilon\}^e \tag{V.39.}$$

avec :

$$\{ds\}^e = [C_e]^{-1} \{d\sigma\}$$

Expérimentalement, il est vérifié que le couplage entre déplacement normal et tangentielle est associé à des déplacements relatifs irréversibles.

La matrice élastique a donc pour expression :

$$[C_e] = \begin{bmatrix} [C_n] & 0 \\ 0 & [C_m] \end{bmatrix} \tag{V.40.}$$

avec :

- $[C_n]$: composante tangentielle.
- $[C_m]$: composante normale.

Appliquons la loi de normalité à partir d'un potentiel plastique G, dont nous supposons pour le moment qu'il existe :

$$\{ds\}^n = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma} \tag{V.41.}$$

De l'équation (V.39.), on peut déduire que :

$$\{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + d\lambda \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \tag{V.42.}$$

En multipliant les deux membres de (V.42.) par $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e]$ on obtient :

$$\{ds\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] + d\lambda \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] \tag{V.43.}$$

Posant :

$$\{d\} = [C_e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} ; \{\bar{d}\} = [C_e] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} ; \{B\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [C_e] \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \tag{V.43a.}$$

on aboutit à :

$$\{d\}^T \{ds\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + d\lambda B \quad (\text{V.44.})$$

Au cours des déplacements on a :

$$F(\{\sigma\}, K) = 0 \quad (\text{V.45.})$$

donc :

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left(\frac{\partial F}{\partial K} \right) dK = 0 \quad (\text{V.46.})$$

posons $A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial K} dK$, alors :

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} = Ad\lambda \quad (\text{V.47.})$$

de l'équation (V.44.) on obtient :

$$\{d\}^T \{ds\} = Ad\lambda + Bd\lambda = (A+B)d\lambda \quad (\text{V.48.})$$

cette dernière équation nous donne :

$$d\lambda = \left[\frac{1}{(A+B)} \right] \{d\}^T \{ds\} \quad (\text{V.49.})$$

En utilisant l'équation (V.49.) dans l'équation (V.42.) on opte pour :

$$\{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + \left[\frac{1}{(A+B)} \right] \{d\}^T \{ds\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right\} \quad (\text{V.50.})$$

et comme :

$$\left\{ \frac{\partial U}{\partial \sigma} \right\} = [C_e]^{-1} \{\bar{d}\}; \{ds\} = [C_e]^{-1} \{d\sigma\} + \left[\frac{1}{(A+B)} \right] \{d\}^T \{ds\} [C_e]^{-1} \{\bar{d}\} \quad (\text{V.50a.})$$

donc :

$$[C_e] \{ds\} = \{d\sigma\} + \left[\frac{1}{(A+B)} \right] \{d\}^T \{ds\} \{\bar{d}\} \quad (\text{V.51.})$$

on remarque que le terme $\{\bar{d}\}^T \{ds\}$ est un scalaire :

$$\{d\sigma\} = [C_e] \{ds\} - \left[\frac{1}{(A+B)} \right] [C_e]^{-1} \{\bar{d}\}^T \{ds\} \quad (V.52.)$$

Soit :

$$\{d\sigma\} = \{[C_p]\} \{ds\} \text{ avec } \{[C_p]\} = \left[\frac{1}{(A+B)} \right] \{\bar{d}\}^T \{ds\} \quad (V.52a.)$$

Il reste à expliciter les termes de $[C_p]$:

$$B = [C_u] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} + [C_m] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \right\} \quad (V.53.)$$

$$\{\bar{d}\}^T \{ds\} = \begin{bmatrix} [C_u] & [C_m] \\ [C_u] & [C_m] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\} & \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [C_u] & 0 \\ 0 & [C_m] \end{bmatrix} \quad (V.54.)$$

Finalement, l'expression générale de $[C_p]$ est :

$$[C_p] = \frac{1}{H} \begin{bmatrix} [C_u]^2 \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \tau} & [C_u] [C_m] \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \frac{\partial G}{\partial \tau} \\ [C_u] [C_m] \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} & [C_m]^2 \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \end{bmatrix} \quad (V.55.)$$

avec :

$$H = A + [C_u] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \tau} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \tau} \right\} + [C_m] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \sigma_n} \right\}$$

V.8.Choix du modèle de l'interface :

Comme il a été mentionné précédemment, il existe deux approches pour le traitement de l'interface ; la première traite les interfaces comme un problème direct de compatibilité. Les exigences de la compatibilité sont imposées exactement par le biais des multiplications de Lagrange, ou approximativement par le biais des fonctions de pénalités.

La deuxième approche utilise le concept physique des éléments d'interfaces. Dans cette approche, une équation reliant les contraintes de contact aux déplacements-relatifs est utilisée.

Dans cette étude, la deuxième approche est adoptée, et vu que l'élément d'interface peut être introduit dans un programme d'éléments finis, sans la nécessité d'introduire d'autres fonctions spéciales comme les multiplicateurs de Lagrange ou les fonctions de pénalité.

On a vu que l'élément d'interface des couches fines permet de tenir compte de plusieurs modes de déformation. De plus, ces dernières années, plusieurs études ont montré la satisfaction des résultats obtenus en utilisant cet élément pour les problèmes d'interaction sol-structure 2D et 3D.

Dans ce qui suit nous allons présenter l'élément d'interface des couches fines.

Élément d'interface des couches fines :

Cet élément est traité comme les autres éléments solides, mais avec une matrice de comportement :

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{nn}] & [C_{nt}] \\ [C_{tn}] & [C_{tt}] \end{bmatrix} \quad (\text{V.56.})$$

avec :

- $[C_{nn}]$: représente la composante normale.
- $[C_{nt}]$: représente la composante tangentielle.
- $[C_{tn}]$: représente la composante couplée.

Dans la formulation de cet élément d'interface, l'hypothèse de base réside dans le fait que le comportement au voisinage de l'interface entraîne une zone fine d'épaisseur supérieure à zéro.

Et comme l'interface est entourée par des matériaux différents (sol et béton), les propriétés normales de l'interface durant la déformation doivent dépendre de :

- La zone d'interface.
- L'état de contrainte.
- Des propriétés des éléments solides, qui entourent l'interface.

En se basant sur ces considérations, la raideur normale s'exprime sous la forme :

$$[C_{nn}] = [C_n(\alpha^I, \beta^S, \gamma^st)] \quad (\text{V.57.})$$

avec :

- α^I : les propriétés de l'interface.
- β^S : les propriétés du sol.
- γ^st : les propriétés de la structure.

donc on peut mettre $[C_{nn}]$ sous la forme :

$$[C_{nn}] = \lambda_1 [C_n^I] + \lambda_2 [C_n^S] + \lambda_3 [C_n^{st}] \quad (\text{V.58.})$$

avec :

- $[C_n]$: est la composante normale de l'élément d'interface des couches fines.
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: facteurs de participation ayant des valeurs variant entre 0 et 1.

afin de simplifier, on peut supposer que :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ceci implique que la composante normale est influencée seulement par le comportement normal de l'interface.

La composante tangentielle (de cisaillement) est obtenue à partir de l'essai de cisaillement direct.

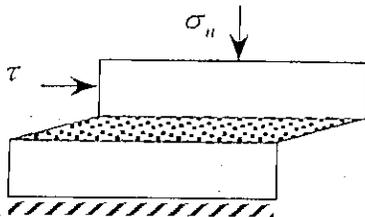


Figure V.10.a. Essai de cisaillement direct

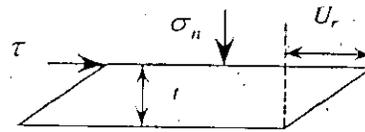


Figure V.10.b. Déformation à l'interface

Figure V.10 Comportement de l'interface

Dans cette étude la composante $[C_n]$ est de taille 1x1, elle est composée du module de cisaillement G de l'interface, d'où on a :

$$\gamma = \frac{U_r}{l} \tag{V.59.}$$

Le module de cisaillement est donné par :

$$G = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{\partial \tau}{\partial U_r} l \tag{V.60.}$$

ou :

$$G_i = G(\sigma_n, \tau, U_r) = \frac{\partial [(\tau(\sigma_n, U_r))]_i}{\partial U_r} \Big|_{\sigma_n} \tag{V.61.}$$

avec :

- l : épaisseur de l'interface.
- U_r : déplacement relatif.

L'élément d'interface des couches fines peut être formulé en supposant ayant un comportement :

- Soit linéaire élastique.
- Soit non-linéaire élastique.
- Soit élastoplastique.

La matrice de rigidité élémentaire de l'élément d'interface est donnée par :

$$[K]_e = \int_V [B]^T [C^{ep}] [B] dv \quad (V.62.)$$

avec :

- $[B]$: matrice de transformation.
- $[C^{ep}]$: matrice de comportement.

- Pour un comportement linéaire élastique, la matrice de comportement s'écrit sous la forme :

$$[C^e]_e = \begin{bmatrix} [C_{mm}] & 0 \\ 0 & [C_{nn}] \end{bmatrix} \quad (V.63.)$$

- Pour un cas élastoplastique, la matrice de comportement a la forme suivante :

$$[C^{ep}]_e = [C^e]_e + [C^p]_e \quad (V.64.)$$

La matrice $[C^p]$ est déterminée en se basant sur un critère de rupture de la théorie de plasticité. Dans cette étude le critère de Mohr-Coulomb est utilisé avec une fonction de charge I' et un potentiel plastique G .

V.9. Méthodes de résolution des problèmes non linéaires :

Il n'existe pas de méthodes générales directes de résolution des systèmes non linéaires, les problèmes non linéaires sont toujours résolus par plusieurs problèmes linéaires successifs ou les conditions non linéaires sont respectées pour certaines tolérances.

Pour les problèmes de la non linéarité matérielle uniquement, la relation entre les contraintes et les déformations est supposée être de forme :

$$F(\sigma, \varepsilon) = 0 \quad (V.65.)$$

La matrice de rigidité élémentaire est fonction des propriétés matérielles, et peut être écrite comme suit :

$$[K] = K(\sigma, \varepsilon) \quad (V.66.)$$

Les forces nodales externes $\{F\}$ peuvent être exprimées par :

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (V.67.)$$

Il existe trois méthodes de résolution du système non-linéaire, à savoir :

- la méthode incrémentale.
- La méthode itérative.
- La méthode mixte.

V.9.1. méthode incrémentale :

Le principe de la méthode incrémentale est la subdivision des vecteurs chargement en plusieurs incréments, durant chaque incrément de charge l'équation :

$$\{F\} = [K] \{U\} \quad (\text{V.68.})$$

Est supposée être linéaire avec une valeur constante $[K]$ déduite des résultats de l'incrément précédent. Des déplacements nodaux sont obtenus pour chaque incrément et sont ajoutés aux déplacements cumulés précédemment. Le processus est répété jusqu'au chargement final, il n'y a pas d'itération dans l'incrément pour restaurer l'équilibre et la précision dépend de la taille de l'incrément.

L'analyse des méthodes incrémentales est la meilleure description du comportement force-déplacement.

L'inconvénient majeur est la difficulté de la prédétermination des incréments nécessaires pour assurer une bonne précision.

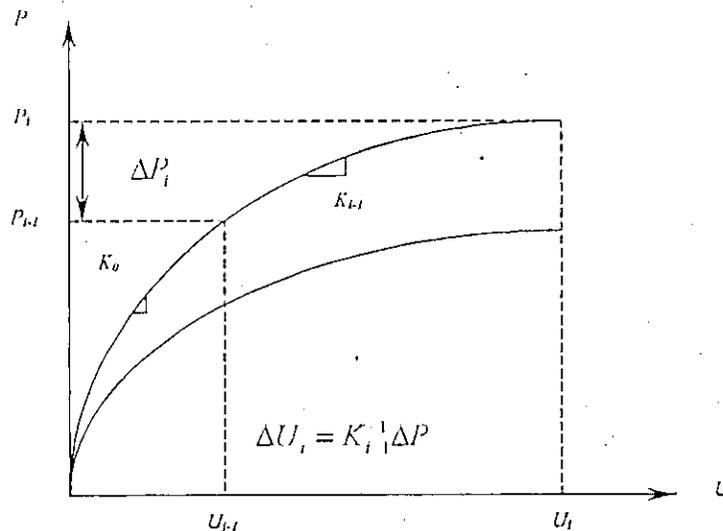


Figure V.11. Méthode incrémentale

V.9.2. Méthode itérative :

Dans la méthode itérative, le chargement est appliqué en un seul incrément avec une certaine matrice de rigidité initiale, et on calcule les déplacements. Les contraintes sont déduites selon les lois constitutives et on déduit les forces nodales équivalentes qui n'équilibrent pas forcément les forces externes. Les forces résiduelles sont appliquées à leur

tour et on déduit de nouveaux déplacements cumulés qui donnent de nouvelles contraintes et de nouvelles forces résiduelles. Ce processus est répété jusqu'à élimination des forces résiduelles à une certaine tolérance.

Généralement, la matrice de rigidité peut rester constante, ou bien varier durant le processus itératif à savoir :

V.9.2.1. méthode de rigidité constante :

Dans cette méthode, la rigidité initiale linéaire est utilisée pour chaque étape dans l'analyse. cette méthode possède des avantages économiques parce que la matrice de rigidité est calculée uniquement une seule fois.

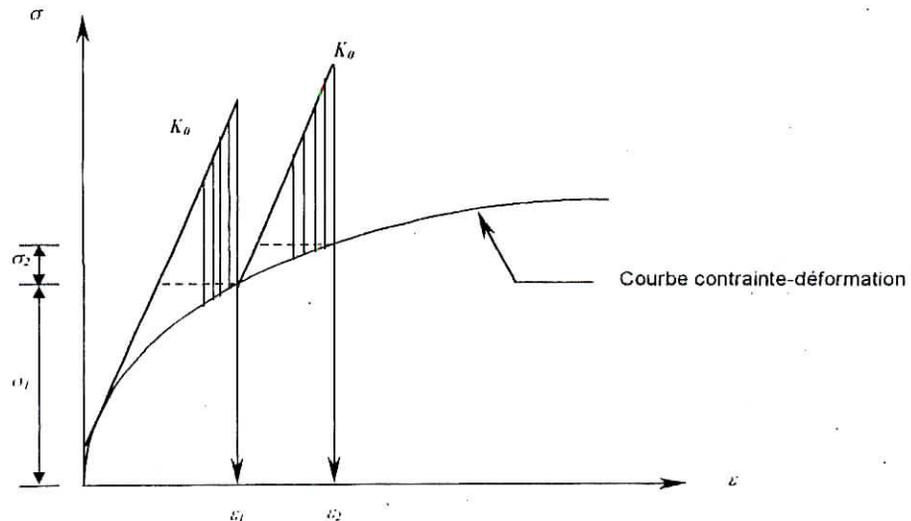


Figure V.12. Procédure de rigidité constante

V.9.2.2. Méthode de rigidité variable :

Dans cette méthode la méthode de Newton-Raphson ou sa version modifiée est utilisée. Dans la méthode de Newton-Raphson complète, la matrice de rigidité tangente est actualisée et un système complètement nouveau d'équation est résolu à chaque itération. Ce processus peut être particulièrement très cher si les incréments de charge relativement petits sont utilisés.

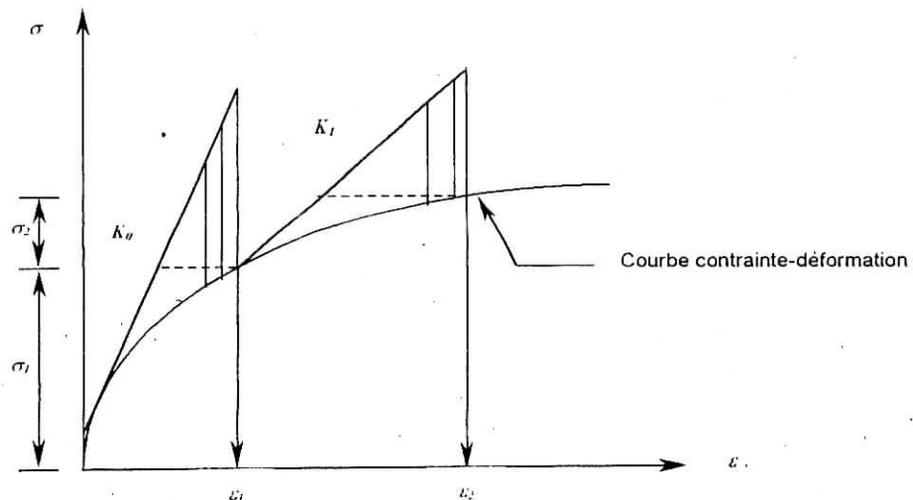


Figure V.13. Procédure de rigidité variable

V.9.3. Méthode mixte :

Les méthodes mixtes sont une bonne combinaison des deux méthodes citées précédemment. Le chargement est appliqué par incrément et la solution dans chaque étape de chargement est obtenue itérativement jusqu'à satisfaction de l'équilibre à une précision donnée.

La méthode mixte combine les avantages des deux méthodes incrémentales et itératives et elle est la plus utilisée. La figure ci-dessous montre les différentes approches de la méthode mixte.

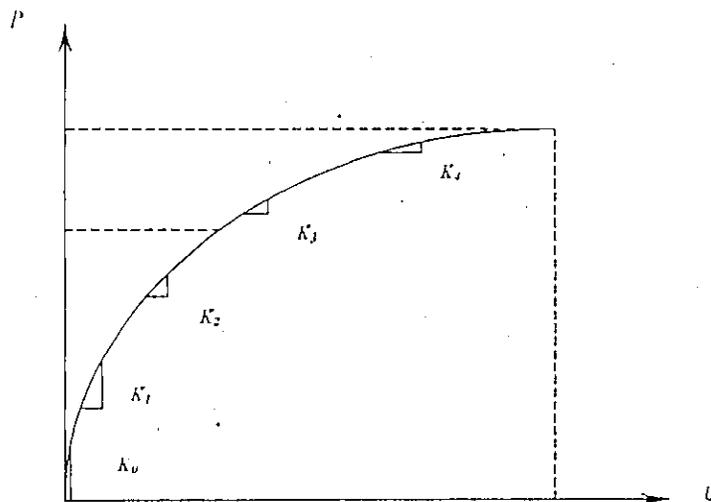


Figure V.14. Méthode mixte

Chapitre VI

ANALYSE ELASTO-PLASTIQUE

Analyse élasto-plastique

VI.1 Introduction :

Le tassement, pression intergranulaire et les efforts internes dans la base des structures élastiques sont affectées par la rigidité des structures, le type de connexion entre les différents éléments de la structure ainsi que la compressibilité du sol support.

Pour cela, au delà d'un certain niveau de chargement, le sol présente des déformations réversibles (élastiques), mais aussi des déformations irréversibles (plastiques), et que ces déformations et les contraintes obéissent à des lois bien précises. Notons que l'étude d'un corps en état élasto-plastique se fait en excluant le facteur temps.

VI.2 Détermination du tenseur de déformation :

Donc le tenseur de déformation est supposé être la somme du tenseur incrémental élastique, et du tenseur incrémental plastique, soit en notation indicielle :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (VI.1.)$$

Considérant maintenant la courbe contrainte-déformation, qui résume les résultats d'un essai de traction uniaxial :

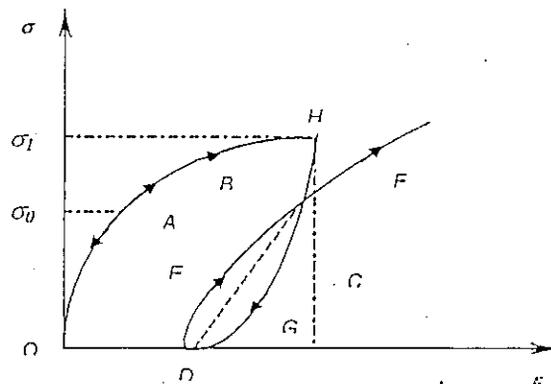


Figure VI.1. Essais de compression (et traction) simple du sol

Le long du chemin OA , le comportement du sol est élastique. Le point A représente la limite au delà de laquelle on a plus de comportement élastique, ce point correspond à une contrainte caractéristique dite seuil de plasticité initial (ou limite élastique). En allant au point B , et si on décharge le chemin de déchargement ne sera plus BAO , mais BCD .

La déformation qui reste est une déformation irréversible dite plastique. Si on décharge, le chemin sera DEF , F étant le prolongement du chemin AOB , il rejoint alors le chemin du premier chargement.

D'une façon générale, et pour les cas 3D le seuil de plasticité est remplacé par une fonction f dite fonction de charge ou critère de plasticité, telle que :

- Si $f < 0$: on est dans le domaine élastique.
- Si $f > 0$: on est dans le domaine plastique.

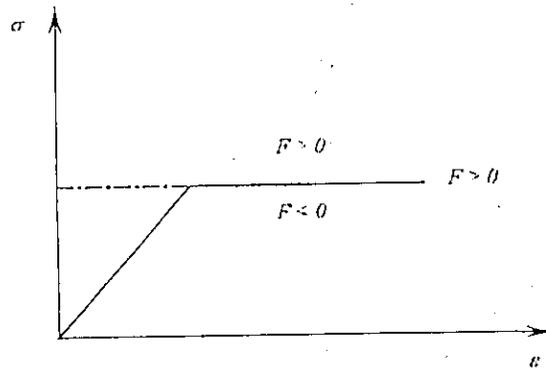


Figure VI.2. loi de comportement élasto-plastique

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes-déformations, une surface dite en mécanique des sols « Surface d'état limite », dont la projection dans le plan des contraintes est une courbe d'état limite.

L'allure de la courbe ci-dessous, est valable pour un écoulement positif. Notant qu'il y a des matériaux qui sous un certain chemin de charge et au delà d'un certain pic présente un ramollissement, ou un écoulement négatif.

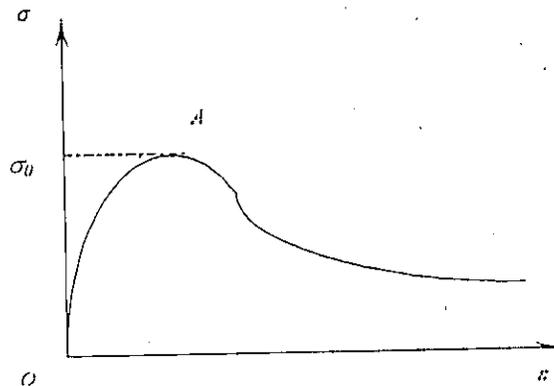


Figure VI.3. Courbe contrainte - déformation avec écoulement négatif

Soit $f(\sigma_y) = k$, l'équation de la surface de charge correspondante à la fonction de charge $f(\sigma_y)$, ou k est un paramètre caractéristique du matériau.

La condition pour que l'écoulement plastique se produise lorsque la surface de charge est atteinte est :

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \text{ et } df = \frac{df}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (VI.2.)$$

Dans le cas contraire, on aura un déchargement :

$$f(\sigma_{ij}, k) = 0 \text{ et } df = \frac{df}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (VI.3.)$$

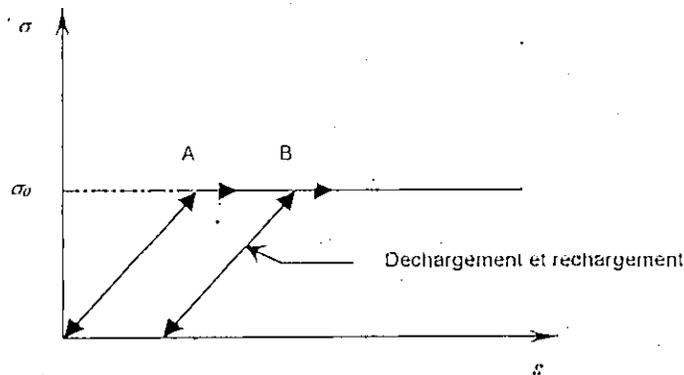


Figure VI.4. Relation contrainte - déformation pour un matériau élastique parfaitement plastique

VI.3 Relation contraintes - déformations incrémentales :

Dans l'analyse élasto-plastique, et par approche numérique la technique la plus commune est la méthode incrémentale utilisant une matrice tangente de rigidité reliant les éléments des tenseurs contraintes avec les éléments du tenseur déformations placés dans des vecteurs $\{\sigma\}$ ou $\{\sigma_{ij}\}$, et $\{\epsilon\}$ ou $\{\epsilon_{ij}\}$.

Pour un matériau parfaitement plastique, compte tenu de la loi d'écoulement et de la condition de consistance, on obtient la relation suivante :

$$d\sigma_{ij} = \left[C'_{ijkl} - \frac{C'_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C'_{rstkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C'_{rstkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}}} \right] d\epsilon_{kl} \quad (VI.4.)$$

ou C'_{ijkl} , est le tenseur relation contrainte-déformation élastique du matériau.

VI.4 Identification du problème :

Le sol support est responsable sur l'altération du comportement des structures; il sera donc modélisé par le modèle de Winkler, ou un demi espace semi infini linéaire élastique.

Mais, en réalité le comportement du sol est non linéaire, cette caractéristique influe directement sur le comportement des structures, d'ou on doit déterminer l'influence des tensions internes du sol sur l'interaction élasto-plastique, et la comparer avec le comportement élastique linéaire interactif.

VI.5 Elaboration du modèle élasto-plastique :

La relation contraintes-forces, est définit suivant une matrice élasto-plastique $[D_{ep}]$ qui à été établie par Zienkewicz avec :

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{[D]\{a\}\{a\}^T [D]}{\{A\} + \{a\}^T [D]\{a\}} \quad \dots (VI.5.)$$

avec :

- $[D]$: matrice d'élasticité.
- $\{a\}$: vecteur d'écoulement plastique.

ou :

$$a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \quad \dots (VI.5a.)$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\partial J_1}{\partial \sigma} ; a_2 = \frac{\partial (J_2')^{1/2}}{\partial \sigma} ; a_3 = \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \\ \{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\} \end{cases} \quad \dots (VI.5b.)$$

et :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\partial I'}{\partial J_1} \\ c_2 = \frac{\partial I'}{\partial (J_2')^{1/2}} - \tan\left(\frac{3\theta}{(J_2')^{1/2}}\right) * \left(\frac{\partial I'}{\partial \theta}\right) \\ c_3 = -\left[\sqrt{\frac{3}{2}} \cos 3\theta\right] * \left(\frac{1}{(J_2')^{3/2}}\right) * \left(\frac{\partial I'}{\partial \theta}\right) \end{cases} \quad \dots (VI.5c.)$$

avec :

- I' : fonction de rendement = $f(J_1, J_2, \theta)$.
- $[D]$: matrice d'élasticité.

- A : paramètre.
- J_1 : premier invariant de $[\sigma]$.
- J_2 : deuxième invariant de $[\sigma]$.

Viladkar a présenté la forme généralisée des développements récents du critère de rendement du sol, et présente aussi :

- Ces formes commodes utilisées dans l'analyse élasto-plastique.
- L'expression des contraintes pour différentes variétés des modèles des sols isotropes et élasto-plastiques.
- La constante α , est essentielle dans la détermination des vecteurs d'écoulements.

Par la suite on peut distinguer deux critères :

1. DPYC 1 : où les contraintes passent à travers la zone externe de l'exagone de Mohr-Coulomb.
2. DPYC 2 : Ou les contraintes passent à travers la zone interne de l'exagone de Mohr-Coulomb.

et la contrainte effective pour les deux critères est défini comme suit :

$$\bar{\sigma} = \alpha \left(J_1 + (J_2)^{1/2} \right) \quad (\text{VI.6.})$$

ou :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \text{ DPYC I} \\ \alpha = \frac{3c}{(9 + 12 \tan^2 \phi)^{1/2}} \text{ DPYC II} \end{cases} \quad (\text{VI.6a.})$$

et simultanément, la contrainte équivalente est déduite par :

$$\begin{cases} K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \text{ DPYC I} \\ K = \frac{3c}{(9 + 12 \tan^2 \phi)^{1/2}} \text{ DPYC II} \end{cases} \quad (\text{VI.6b.})$$

avec :

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{VI.6c.})$$

VI.6 Invariants de contraintes :

Le tenseur de contraintes définit en tout point chargé dans le sol est $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}$, ce tenseur est équivalent à 3 contraintes principales qui agissent dans un plan orthogonal $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Pour faciliter la tâche de la détermination des contraintes principales dans un point considéré, on se ramène à utiliser d'autres invariants :

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\ I = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{xz}^2] \\ \theta = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{-3\sqrt{6}J_3}{I^3}\right) \end{cases} \quad (\text{VI.7.})$$

ou :

$$J_3 = S_x \cdot S_y \cdot S_z - S_x \cdot \tau_{yz}^2 - S_y \cdot \tau_{xz}^2 - S_z \cdot \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{xz} \quad (\text{VI.7a.})$$

et :

$$\begin{cases} S_x = \frac{(2\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3} \\ S_y = \frac{(2\sigma_y + \sigma_x + \sigma_z)}{3} \\ S_z = \frac{(2\sigma_z + \sigma_x + \sigma_y)}{3} \end{cases} \quad (\text{VI.7b.})$$

ou θ est l'angle qui définit l'orientation du plan de contraintes par rapport au plan π , et on note que dans la plupart des applications de la mécanique des sols, l'étude en déformations planes se simplifie car :

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{VI.8.})$$

En utilisant les invariants de contraintes, on peut déduire par la suite les paramètres suivants :

$$\begin{cases} \sigma_m = \frac{S}{\sqrt{3}} \\ \bar{\sigma} = \frac{2I}{3} \end{cases} \quad (\text{VI.9.})$$

et pour déduire les contraintes principales qui sont en fonction des invariants on a :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_m + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sigma_2 = \sigma_m + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sin \theta \\ \sigma_3 = \sigma_m + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \quad (\text{VI.10.})$$

VI.7 Critères de plasticité (rupture) dans le sol :

VI.7.1 Critère de Von - Mises :

La symétrie du critère de Von-Mises dans le plan π est introduite dans les concepts traditionnels de contraintes dans la mécanique des sols.

Ce critère est basé sur l'égalité de deux composantes des trois contraintes principales, et il est souvent utilisé dans l'étude du comportement des sols non drainés.

Considérant une valeur moyenne de la contrainte principale σ_2 , à la rupture on a :

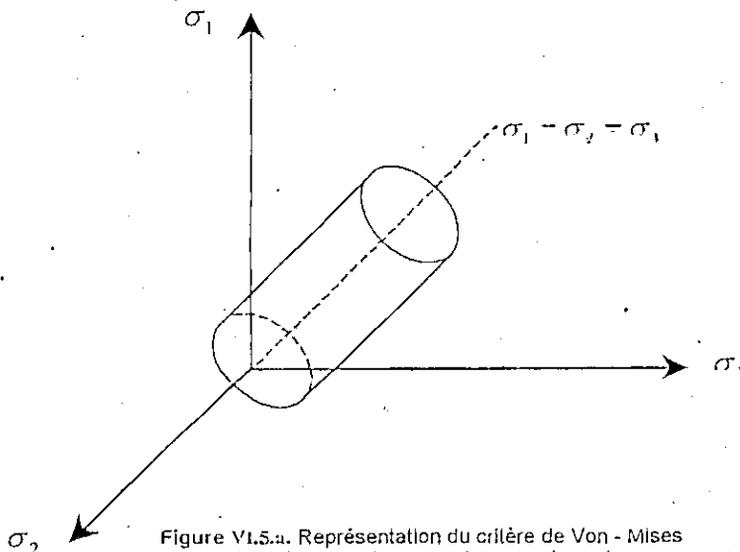


Figure VI.5.a. Représentation du critère de Von - Mises dans l'espace des contraintes ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

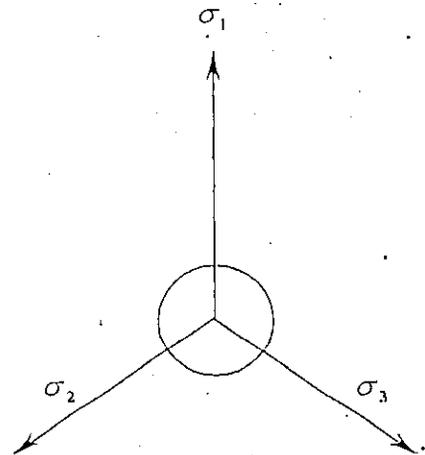


Figure VI.5.b. Section du cylindre traversé par le plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$)

Figure VI.5. Critère de Von-Mises

Pour le cas de déformations planes, et à l'état de rupture on a :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (\text{VI.11.})$$

d'ou la rupture aura lieu lorsque :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \sqrt{3} c_u \quad (\text{VI.12.})$$

Sachant que sous les conditions du triaxial, et à chaque incrément de temps on a :

$$\sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow F = \sigma - 2 c_u \tag{VI.13.}$$

et la cohésion non drainée à la rupture est :

$$c_u = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{VI.14.}$$

VI.7.2 Critère de Mohr-Coulomb:

Dans l'espace de contraintes principales, ce critère prend la forme d'un cône hexagonal irrégulier, cette irrégularité est le résultat de l'élimination de la composante σ_2 .

L'équation qui conduit au tracé du cercle de Mohr en terme de contraintes principales, est défini comme suit :

$$\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \sin \phi - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) \cos \phi = c \tag{VI.15.}$$

et on constate que la rupture aura lieu lorsque :

$$F_{Mc} = \sigma_m \sin \phi + \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \left(\frac{\cos \phi - \sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) \tag{VI.16.}$$

cette rupture dépend des invariants de contraintes $(\sigma_m, \bar{\sigma}, \theta)$.

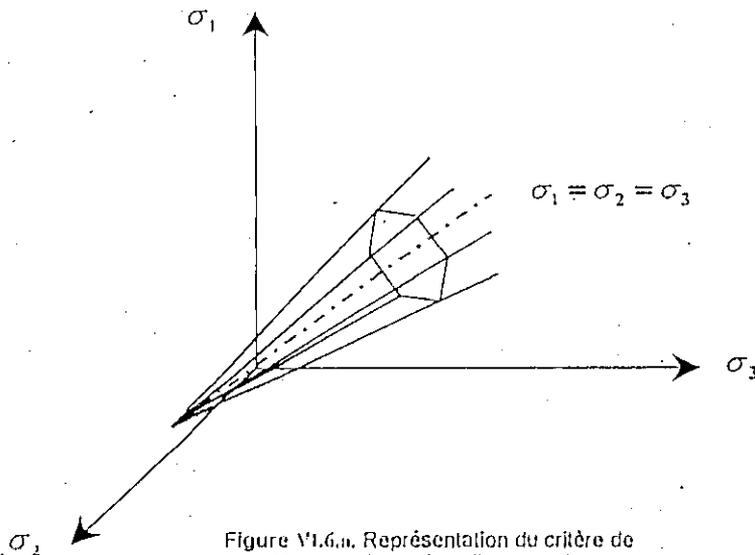


Figure VI.6.a. Représentation du critère de Mohr-Coulomb dans l'espace des contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

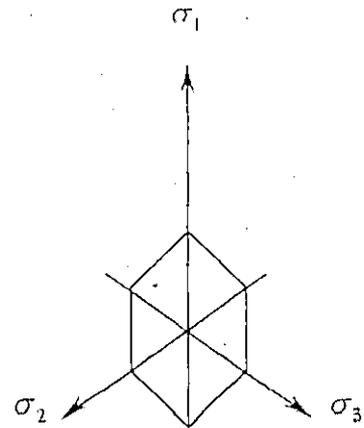


Figure VI.6.b. Section de la pyramide traversée par le plan $\pi (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$

Figure VI.6. Critère de Mohr-Coulomb

VI.7.3 Critère de Tresca :

Tresca (1864), après des essais sur le plomb a conclu que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteint une certaine limite, ou on peut écrire :

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2K \text{ ou : } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (\text{VI.17.})$$

On peut dire que le critère de Tresca se dérive du critère de Mohr-Coulomb dans le cas où $\phi = 0$, d'où par la suite la rupture aura lieu quand :

$$F_T = \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} \cos \theta - c_u \quad (\text{VI.18.})$$

et on remarque que ce critère est le plus préféré par rapport à celui de Von-Mises, surtout lorsqu'il s'agit des applications non drainées.

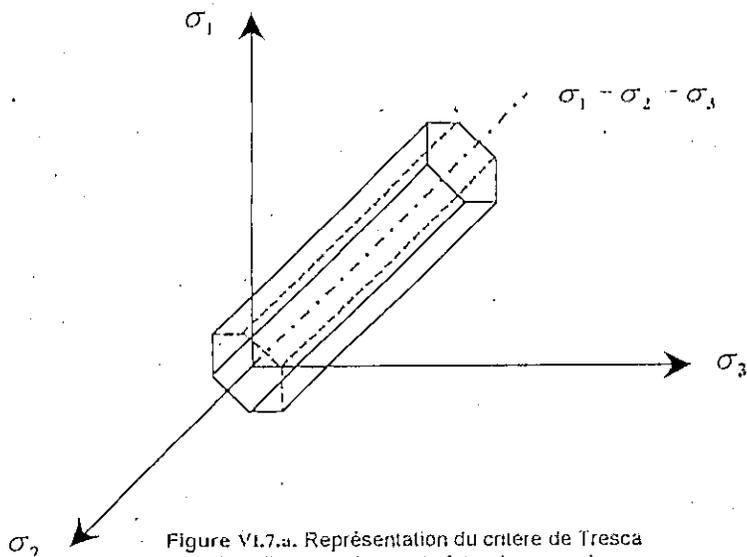


Figure VI.7.a. Représentation du critère de Tresca dans l'espace des contraintes ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)

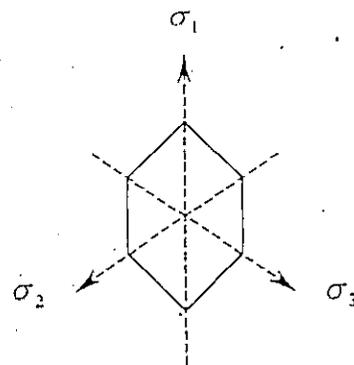


Figure VI.7.b. Section du prisme traversé par le plan π ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$)

Figure VI.7. Critère de Tresca

VI.7.4 Critère de Drucker-Prager :

Drucker et Prager (1952), ont présenté un critère qui tient en compte le premier invariant du tenseur des contraintes J_1 , et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes J_2 , sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$F_{DP} = J_2^{1/2} - K - \alpha J_1 \quad (\text{VI.19.})$$

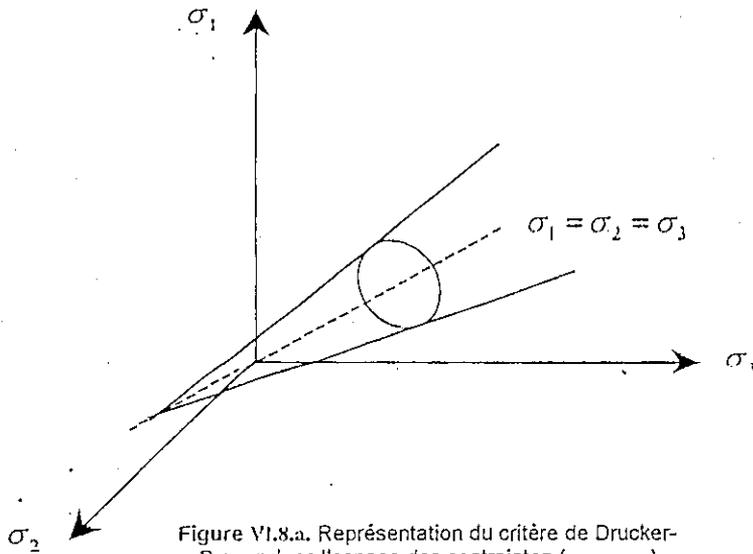


Figure VI.8.a. Représentation du critère de Drucker-Prager dans l'espace des contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

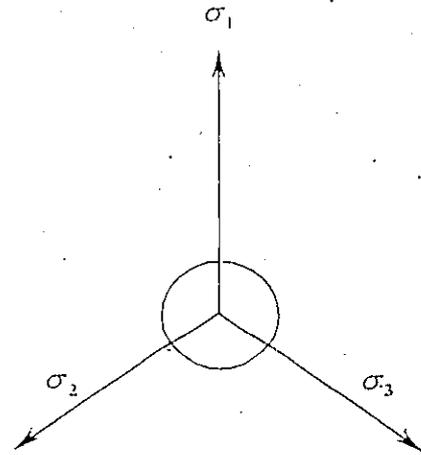


Figure VI.8.b. Section du cône traversé par le plan $\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$

Figure VI.8. Critère de Drucker-Prager

VI.7.5 Critère Parabolique :

Pour ce critère, et à la rupture on a :

$$F = J_2' - \frac{R_C - R_T}{3} J_1 - \frac{R_C R_T}{3} = 0 \tag{VI.20.}$$

ou R_C et R_T sont les résistances en compression et en traction simple, et on constate que lorsque $R_C = R_T$, on se ramène au critère de Von-Mises.

Dans l'espace des contraintes principales, la surface limite est une parabololoïde d'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. La courbe intrinsèque (tangente au cercle de Mohr), obtenue en prenant $\sigma_2 = \sigma_3$ est une parabole dans le plan (σ, τ) .

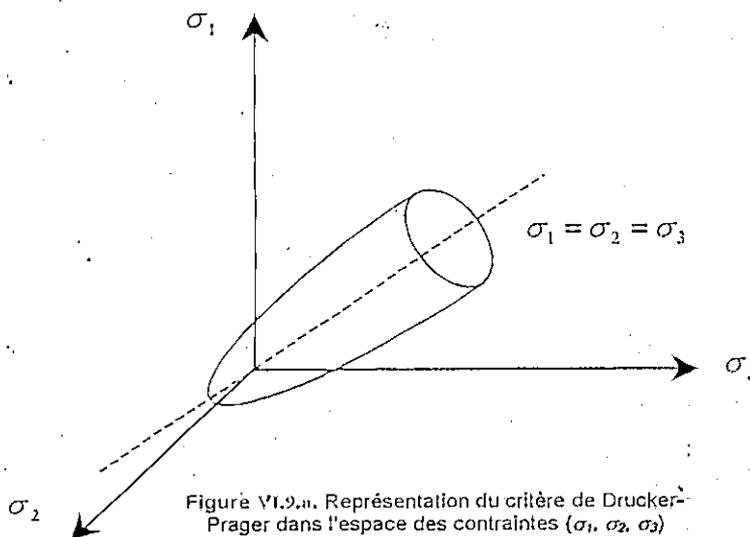


Figure VI.9.a. Représentation du critère de Drucker-Prager dans l'espace des contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

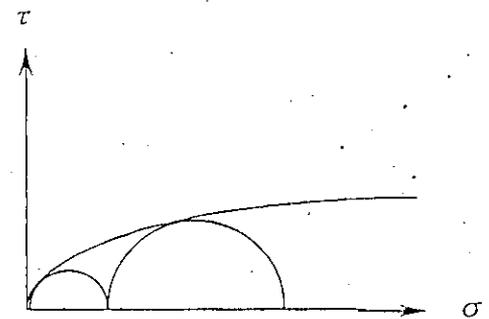


Figure VI.9.b. Critère parabolique dans le plan (τ, σ) ou $\sigma_2 = \sigma_3$

Figure VI.9. Critère Parabolique

Chapitre VII

APPLICATIONS NUMERIQUES

Applications numériques

VII.1. Théorie de Boussinesq :

VII.1.1. Hypothèses de la théorie de Boussinesq :

La théorie de distribution des contraintes est basée sur les résultats donnés par la théorie mathématique de l'élasticité pour le cas simple d'un chargement d'un solide homogène élastique et isotrope, cas d'un milieu semi - infini.

Les hypothèses de Boussinesq sont :

- Le sol est un milieu élastique, homogène, isotrope, semi – infini étendu obéissant à la loi de HOOKE.
- Le poids du sol n'est pas pris en considération.
- Au préalable, avant l'application de la seule charge concentrée, le sol n'était pas sujet de toute autre contrainte.
- La distribution des contraintes, qui prennent naissance après l'application de la charge concentrée, est indépendante du type du matériau constituant le corps homogène élastique isotrope.

Pour le sol, le changement en volume après l'application de la contrainte est négligé, donc on suppose que la distribution des contraintes linéaires est valable. D'où on a une continuité de contraintes, et leur distribution est symétrique par rapport à l'axe porteur de la charge.

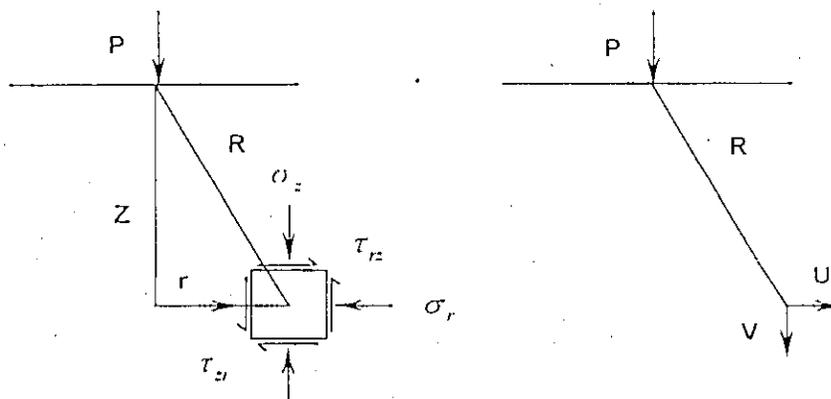


Figure VII.1. Demi - espace élastique soumis à une charge concentrée

Pour une charge concentrée, les contraintes et les déplacements sont symétriques, et il est plus commode d'exprimer les résultats en terme du système de contraintes cylindriques $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$ ou σ_θ , pour l'élément illustré ci-dessus est perpendiculaire au plan σ_r, σ_z les solutions de Boussinesq sont :

- Les contraintes :

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[3 \frac{r^2 Z}{R^3} - (1-2\nu) \left(\frac{R}{R+Z} \right) \right] \quad (\text{VII.1 a.})$$

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[3 \left(\frac{Z}{R} \right)^3 \right] \quad (\text{VII.1 b.})$$

$$\tau_{rz} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[3 \frac{rZ^2}{R^3} \right] \quad (\text{VII.1 c.})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2\pi R^2} \left[(1-2\nu) \left(\frac{Z}{R} - \frac{R}{Z+R} \right) \right] \quad (\text{VII.1 d.})$$

- Les déplacements :

$$V = \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[\left(\frac{Z}{R} \right)^2 + 2(1-\nu) \right] \quad (\text{VII.2 a.})$$

$$U = \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[\left(\frac{rZ}{R^2} \right) - (1-2\nu) \left(\frac{r}{R+Z} \right) \right] \quad (\text{VII.2 b.})$$

Au dessus de l'axe de la fondation on a :

$$R = Z \text{ et } r = 0$$

Alors les contraintes sont :

$$\sigma_{rr} = -\frac{P(1-2\nu)}{2\pi R(R+Z)} = -\frac{P(1-2\nu)}{4\pi R^2} \quad (\text{VII.3 a.})$$

$$\sigma_{zz} = \frac{3}{2\pi} \frac{P}{R^2} \quad (\text{VII.3 b.})$$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (\text{VII.3 c.})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{P(1-2\nu)}{4\pi R^2} \quad (\text{VII.3 d.})$$

Et les déplacements sont :

$$V = \frac{P(1+\nu)(3-2\nu)}{2\pi ER} \quad (\text{VII.4 a.})$$

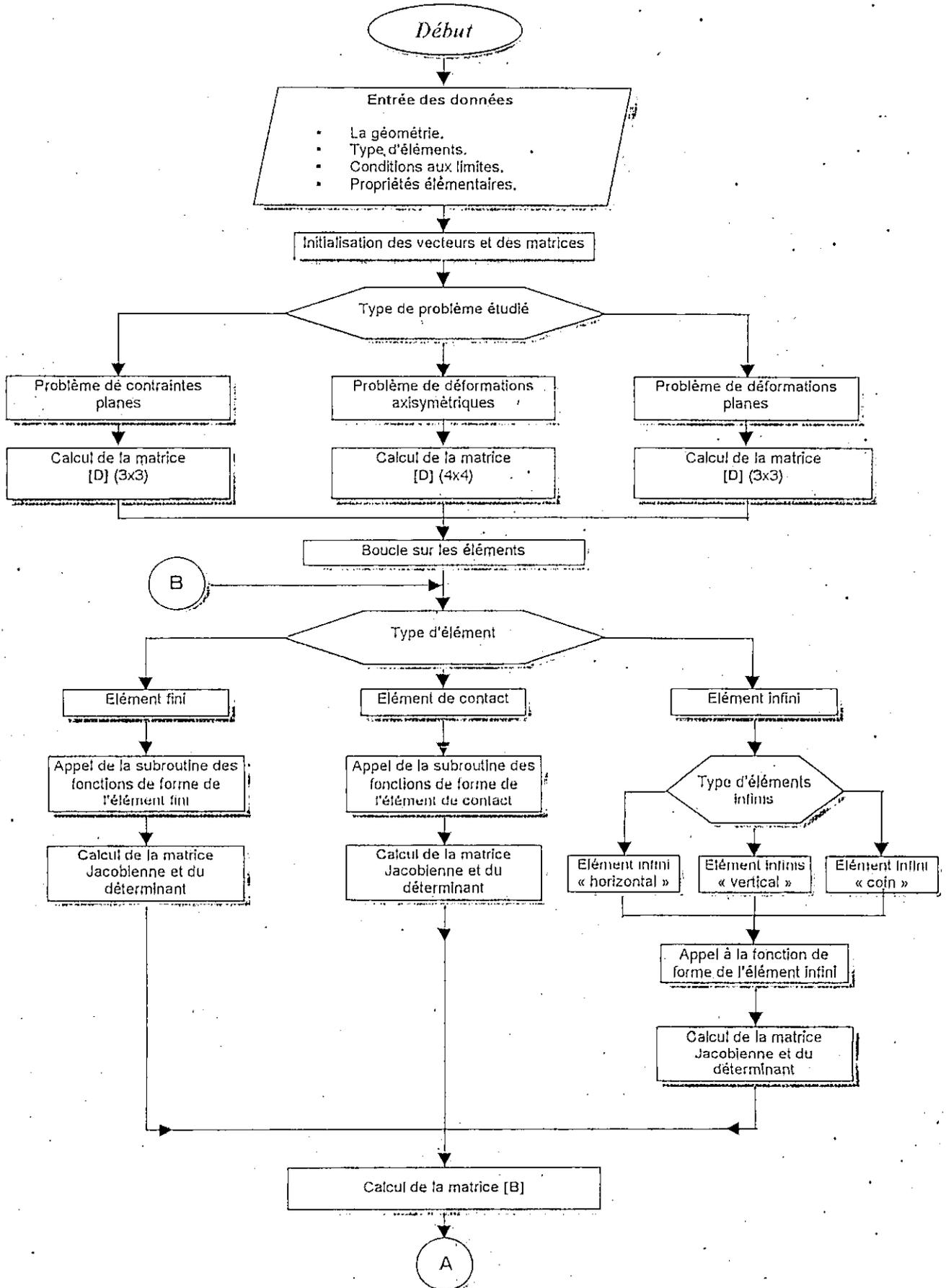
$$U = 0 \quad (\text{VII.4 b.})$$

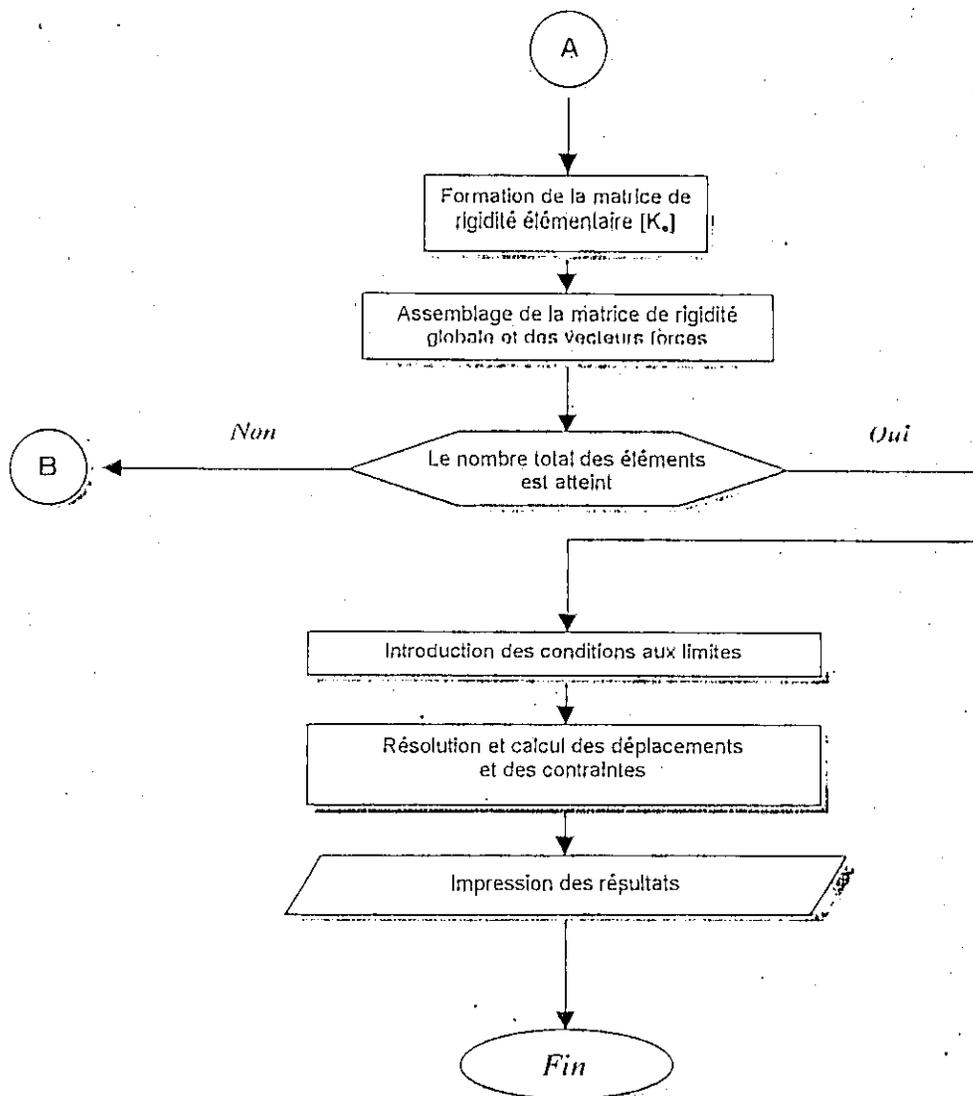
VII.2. Représentation des programmes :

Au début, on doit signaler que les programmes utilisés ont été établis en langage Fortran, et que le couplage s'effectue au niveau de la déclaration des éléments. Pour cela et pour les problèmes linéaires on a pu établir un programme ou les différentes étapes de résolution se résume dans l'organigramme VII.1.

Tandis que pour le non linéaire, utilisant le critère de Mohr-Coulomb, et la technique du contrôle par déplacement, l'organigramme VII.2. représente l'enchaînement des différentes étapes suivies lors de la résolution du problème.

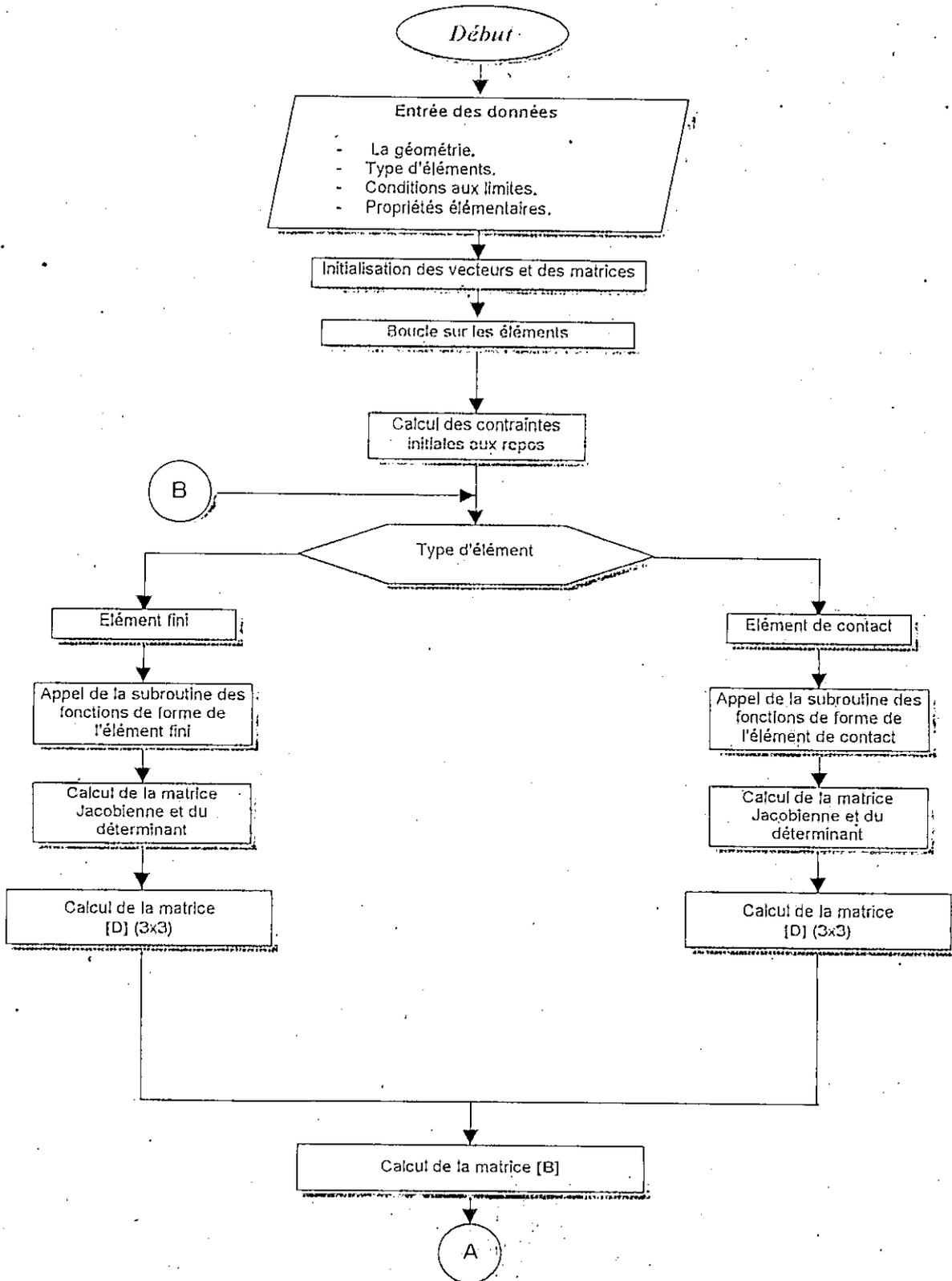
VII.2.1 Résolution des problèmes linéaires :

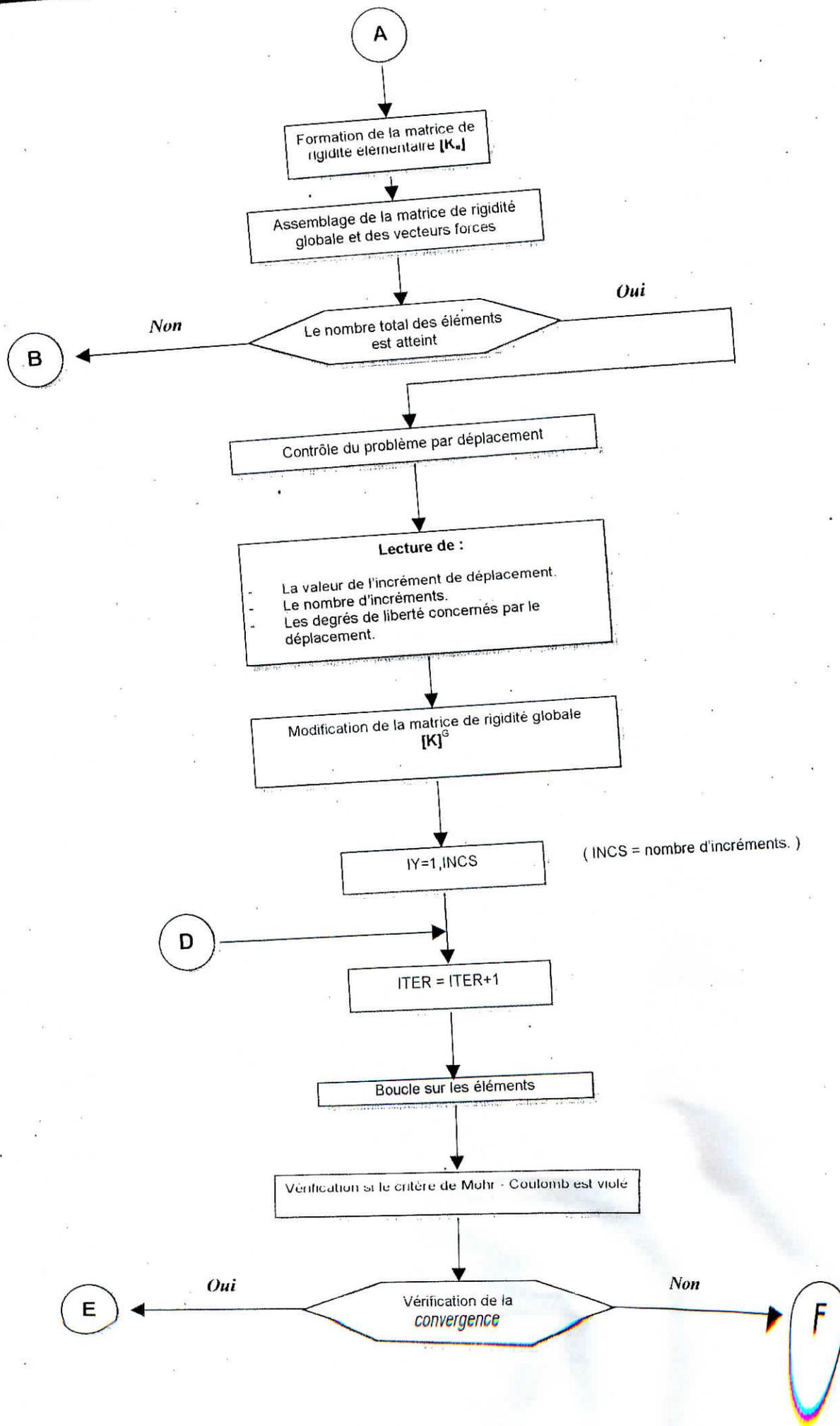


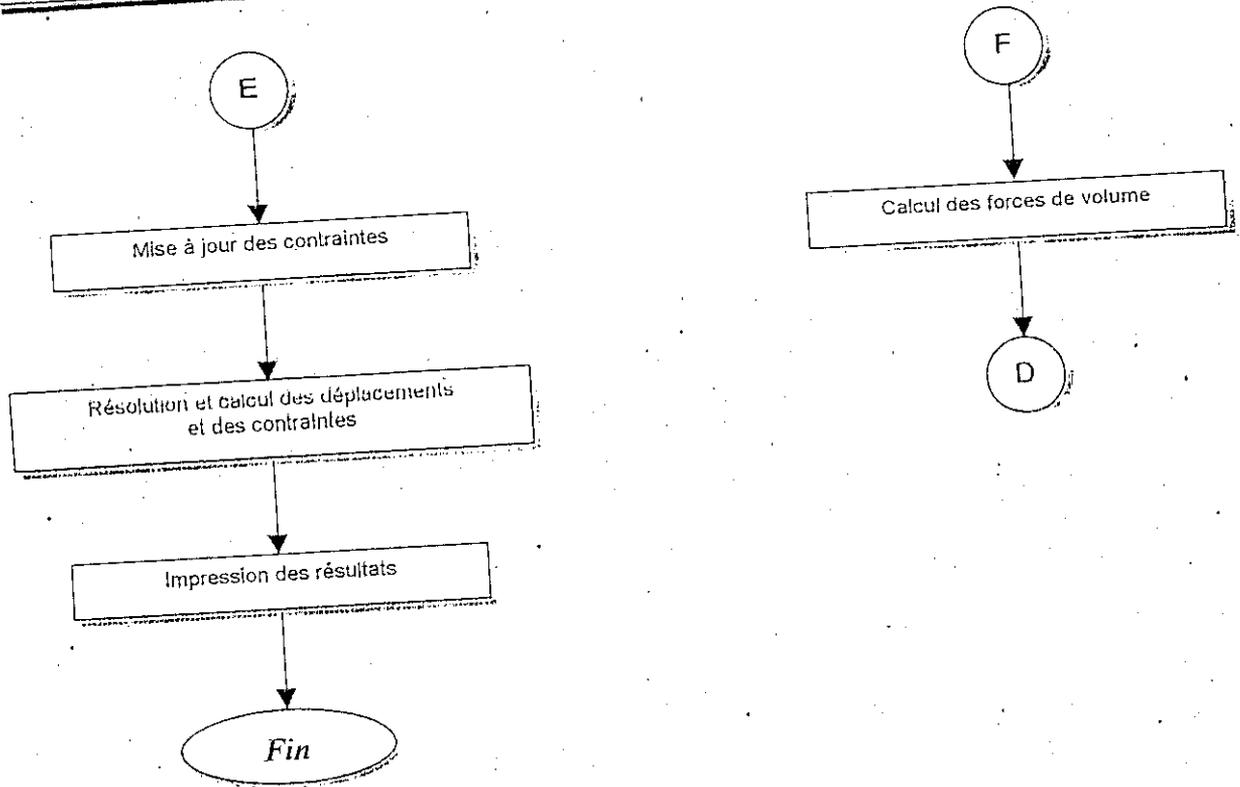


Organigramme VII.1. Structure du programme pour la résolution des problèmes linéaires.

VII.2.2 Résolution des problèmes non linéaires :







Organigramme VII.2. Structure du programme pour la résolution des problèmes non linéaires

VII.3. Un demi-espèce soumis à une charge concentrée :

Le demi espace est soumis à une charge ponctuelle(Problème de Boussinesq), le sol est considéré comme étant un milieu homogène élastique.

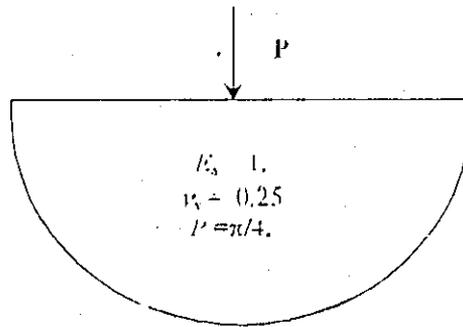


Figure VII.2. Un demi-espèce élastique soumis à une charge concentrée.

VII.3.1. Cas de déformations axisymétriques :

Comme il à été déclaré avant le demi-espèce est soumis à une charge ponctuelle, le modèle proposé contient 421 éléments finis, et 42 éléments infinis (voir figure VII.2.).

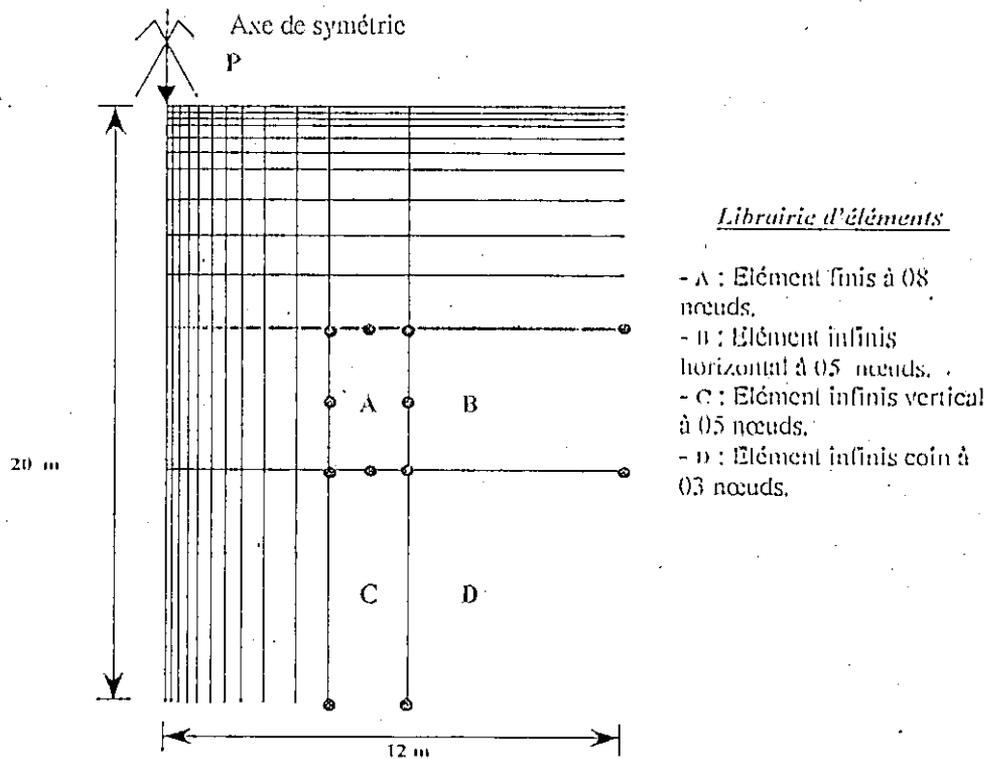


Figure VII.3. Modèle éléments-finis, éléments-infinis.

Les résultats obtenues sont représentés ci-dessous.

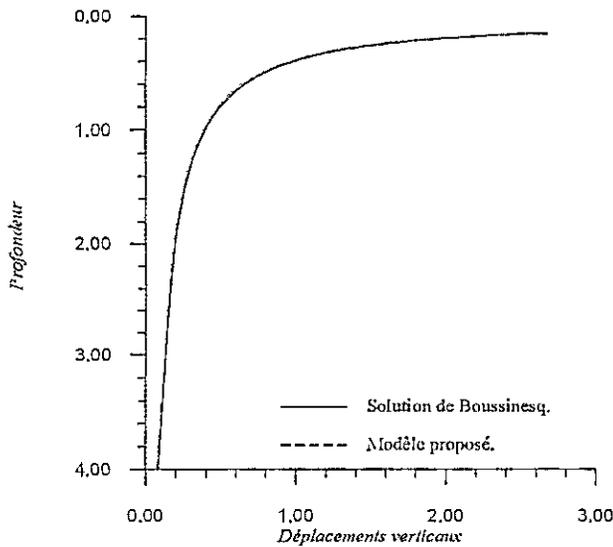


Figure VII.4. Déplacements verticaux le long de l'axe de chargement.

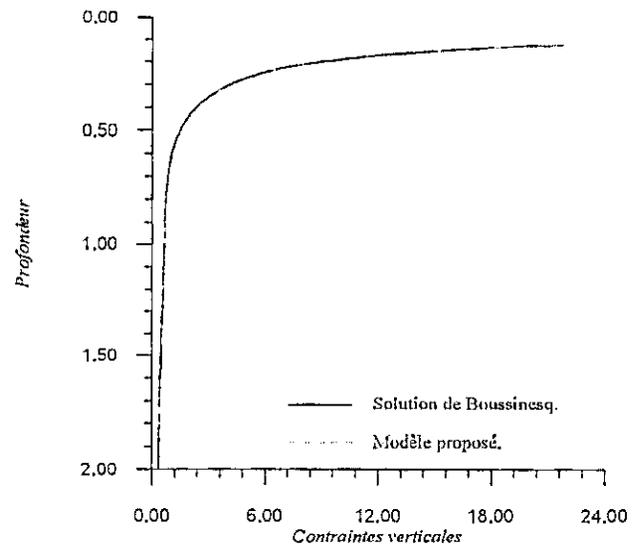


Figure VII.5. Contraintes verticales le long de l'axe de chargement.

Ce qu'on remarque d'après les résultats ci-dessus, la très bonne convergence entre la solution analytique et le modèle proposé, ca est du au raffinement du maillage au niveau des zones de forte concentration des contraintes, (au voisinage du point d'application de la charge concentrée).

VII.3.2. Cas de déformations planes:

En ce qui concerne l'étude en déformations planes, on a utilisé le couplage éléments finis, éléments infinis, les résultats obtenues sont regroupés dans les figures suivantes :

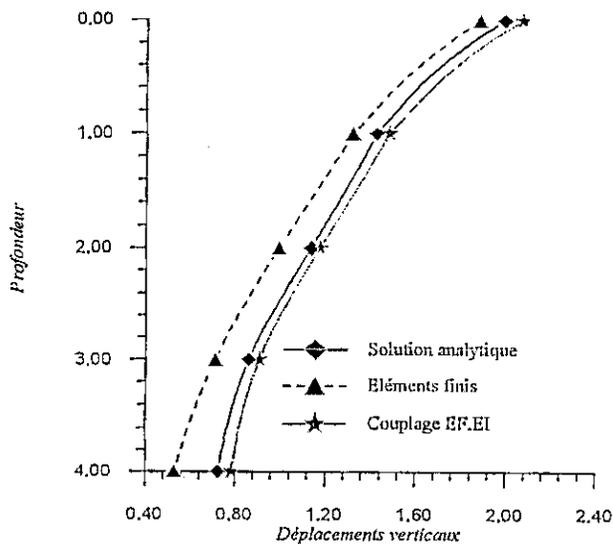


Figure VII.6. Déplacements verticaux le long de l'axe de chargement.

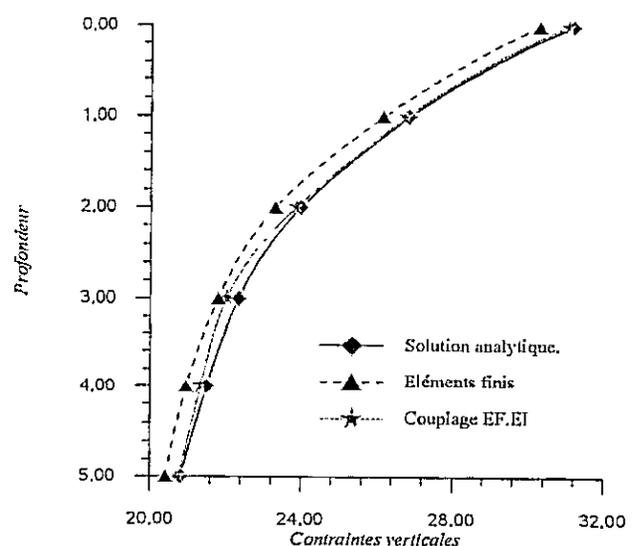


Figure VII.7. Contraintes verticales le long de l'axe de chargement.

La prise en considération des recommandations du L.C.P.C, nous à permis d'avoir une très bonne convergence entre les résultats obtenus et la solution théorique.

VII.4. Fondation rigide reposant sur un sol élastique :

Pour mettre en évidence l'influence des éléments de contact sur le comportement de l'interface sol fondation, on prend comme exemple une fondation rigide soumise à une charge centrée, ou des éléments de contact sont introduits au niveau de l'interface sol fondation avec les caractéristiques suivantes :

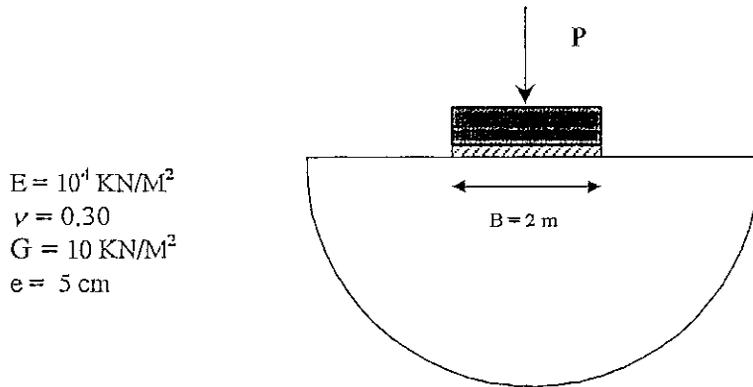


Figure VII.8. Fondation rigide sur un sol élastique

Les résultats obtenus nous en permis de tracer les figures suivantes :

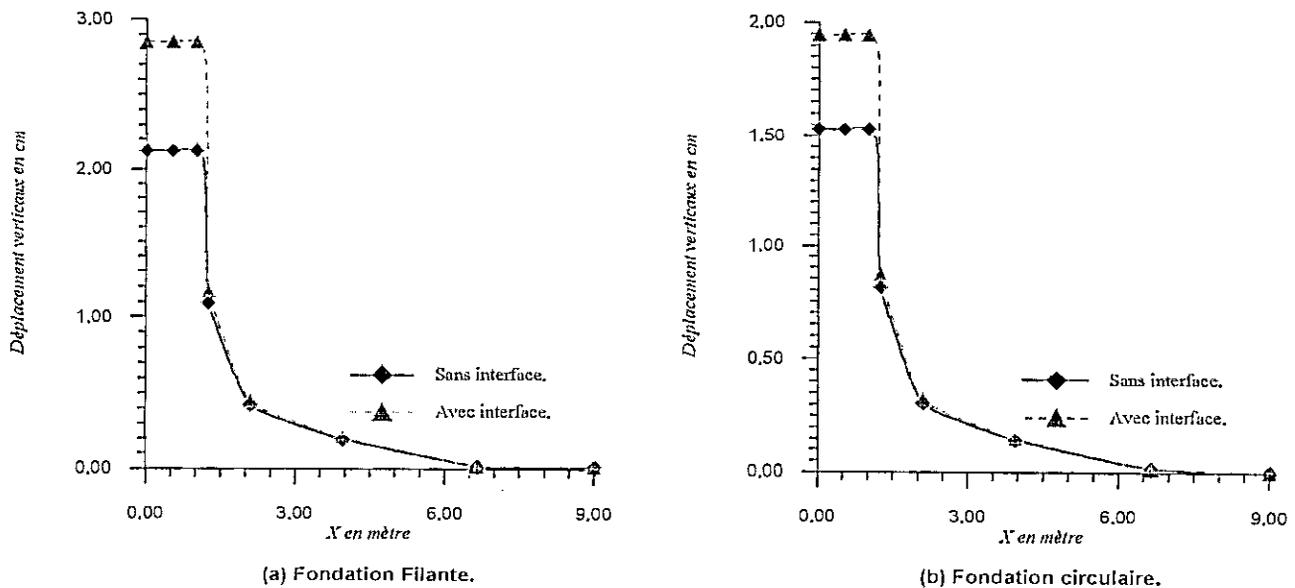


Figure VII.9. Variation des déplacements verticaux en surface

On remarque que les déplacements au niveau de l'interface sont plus importants quand on introduit des éléments de contact. Cette importance est du essentiellement à la création d'une nouvelle distribution des contraintes sous la fondation à cause du

changement des caractéristiques des solides en contact comme il est illustré dans la figure suivante.

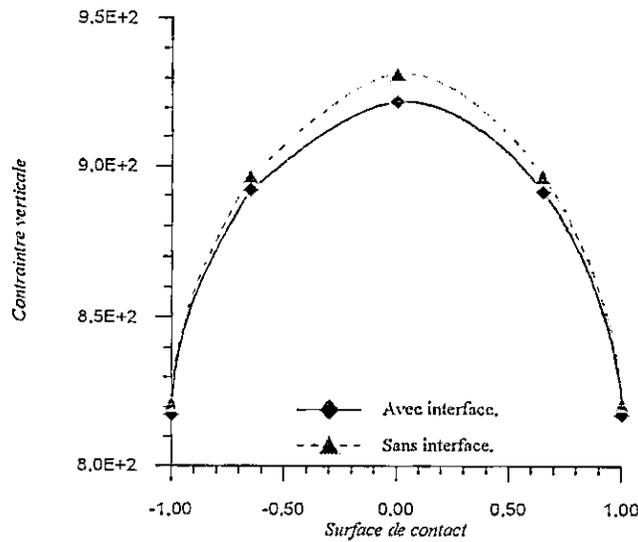


Figure VII.10. Répartition des contraintes le long de l'interface

Donc l'utilisation des éléments de contact, devient très utile pour les études des problèmes d'interaction sol – structure, car l'état d'équilibre de l'interface se modifie grâce à l'incorporation d'un nouveau matériau de remplissage qui sert comme étant un joint séparant les deux solides, ou la liaison avant était parfaite.

VII.4.1. Analyse de la non homogénéité du sol :

Dés fois on suppose que le sol est homogène, ou ses caractéristiques sont constantes en profondeur, tandis que pour les sols de Gibson, cette hypothèse n'est plus valable. Et pour mettre en évidence l'influence de ce facteur on prend le même exemple cité ci-dessus, comme l'indique la figure suivante :

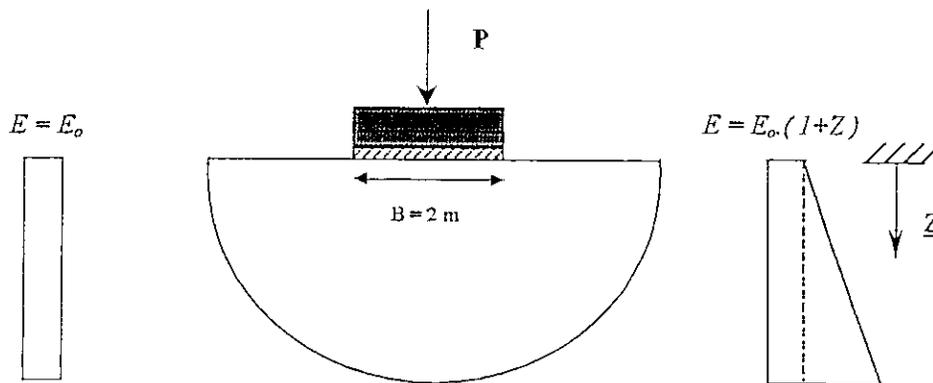


Figure VII.11. Fondation rigide sur un sol élastique

En traitant les deux variantes, on a pu tracer les courbes suivantes :

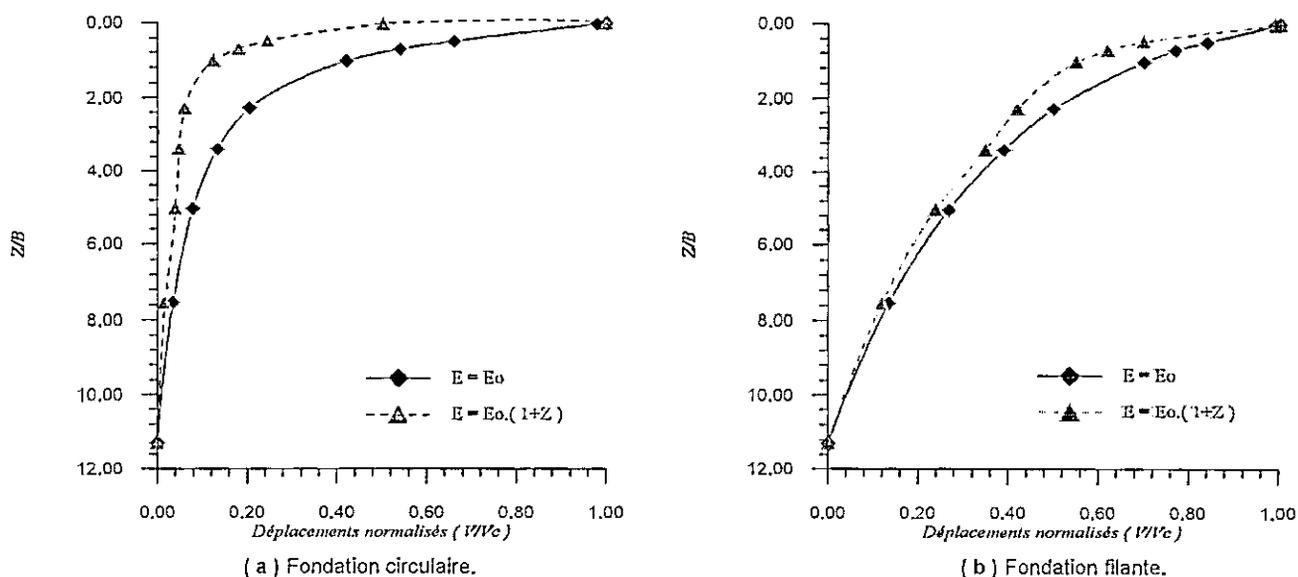


Figure VII.12. Variation des déplacements normalisés du sol en profondeur

Donc pour un même sol, on peut avoir deux allures différentes des tassements, cette différence est causée par la croissance de la rigidité en profondeur, d'où la réduction des tassements en profondeur est moins importante dans le deuxième cas, par rapport à celle où la rigidité est constante.

VII.5. Fondation rigide reposant sur un bicouche de sol élastique :

Dans cette application on va étudier une fondation rigide (filante) reposant sur un bicouche de sol élastique, en introduisant des éléments de contact (interface), d'épaisseur $e = 4$ cm comme l'indique la figure ci-dessous, notant que les caractéristiques du problème, sont mentionnées dans le tableau suivant :

	E (KN/m ²)	ν	G (KN/m ²)
Fondation	$2 \cdot 10^7$	0.30	/
Elément d'interface	$1 \cdot 10^3$	0.30	$4 \cdot 10^2$
Couche 01	$1 \cdot 10^3$	0.30	/
Couche 02	$2 \cdot 10^3$	0.30	/
	$5 \cdot 10^3$	0.30	/
	$1 \cdot 10^4$	0.30	/

Tableau VII.13. Caractéristiques élémentaires du problème.

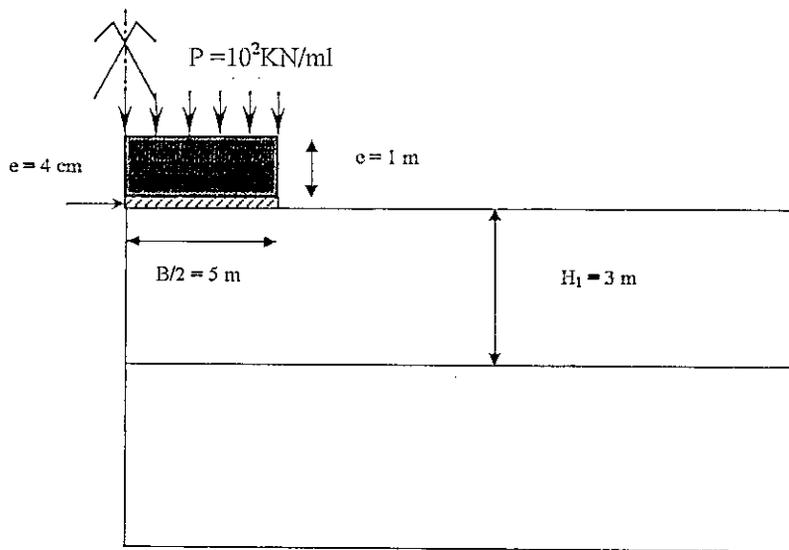
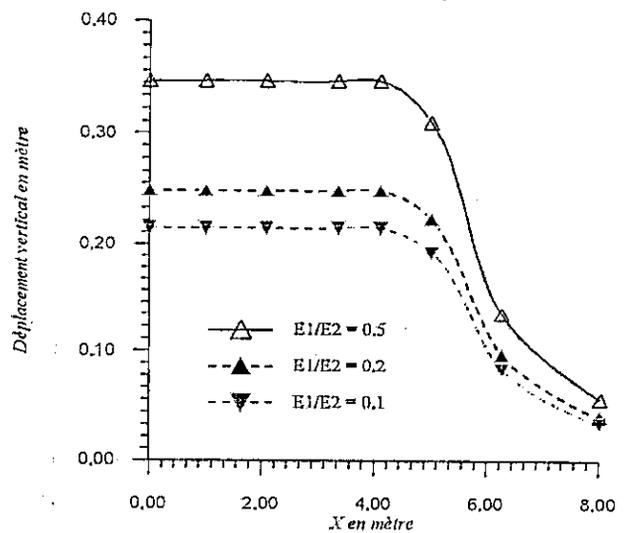
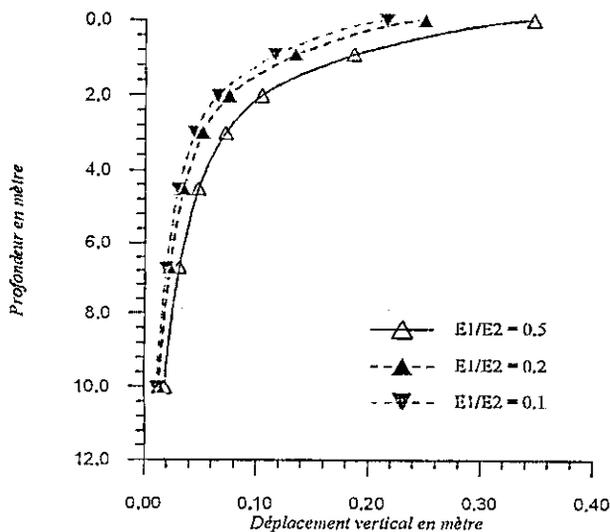


Figure VII.14. Fondation filante sur un bicouche élastique.

Les variantes étudiées nous ont mener à tracer la variation des en surface et en profondeur :



On doit signaler que plus la rigidité de la couche inférieure diminue, plus le tassement

Figure VII.15. Déplacement vertical le long de l'axe de la fondation.

Figure VII.16. Déplacement vertical le long la surface du sol.

En traitant le modèle proposé, et pour voir de près la variation des déplacements horizontaux le long des deux faces de l'interface le long de la zone de contact sol - fondation, on a opté pour les résultats suivants : les trois variantes ont opté aux résultats suivants :

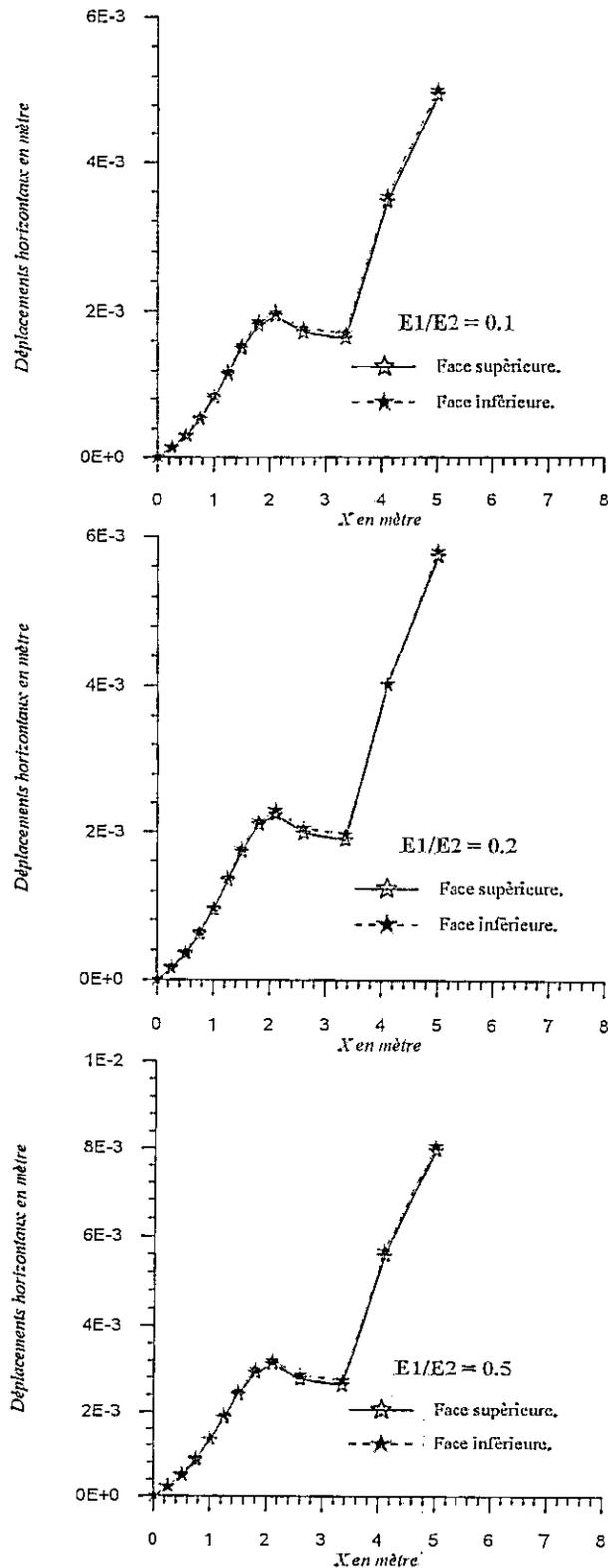


Figure VII.17. Déplacements horizontaux des deux faces de l'interface sol - fondation Pour différentes valeurs de $E1/E2$

On constate qu'il s'agit d'une légère différence du champ de déplacements horizontaux des deux faces, d'où un mouvement relatif, et que la valeur maximale se trouve toujours au niveau de l'abscisse de l'arrête de la fondation, cette valeur lors des études des problèmes d'interaction sol structure entraîne un changement des conditions aux frontières.

En ce qui concerne le déplacement du centre de la fondation, le modèle traité nous à donné de très bons résultats par la suite une excellente convergence entre les valeurs obtenues et celles de Bescond et Al comme l'indiquent le tableau et la figure suivante :

$E1/E2$	La présente étude.	Bescond et Al
0,2	0,2760 m	0,280 m
0,5	0,3829 m	0,390 m
0,1	0,2388 m	0,241 m

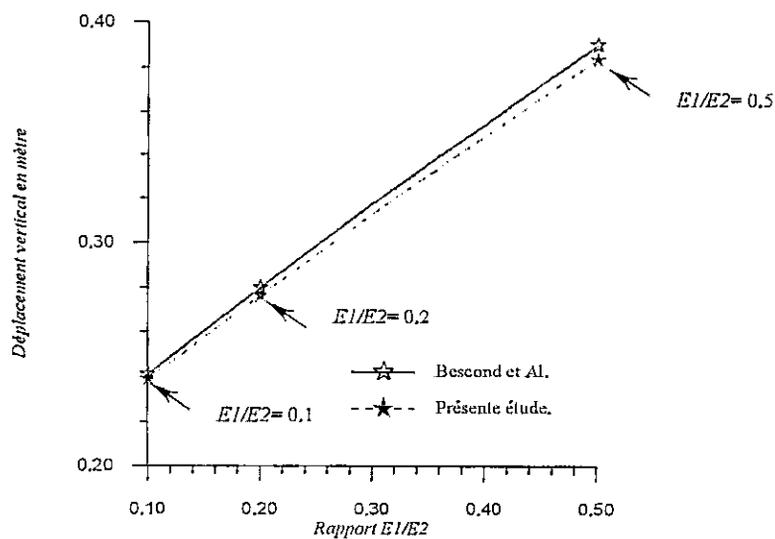


Figure VII.18. Déplacement vertical du centre de la fondation.

VII.6.. Fondation flexible reposant sur un sol élasto-plastique :

Dans cet exemple on va étudier une fondation filante, soumise à une charge uniforme, la technique du couplage des éléments finis, éléments infinis est toujours présente.

En ce qui concerne le sol, il est supposé comme étant un matériau linéaire élastique, parfaitement plastique, ou le critère de rupture utilisé est celui de Mohr – Coulomb, avec les caractéristiques désignées ci-dessous.

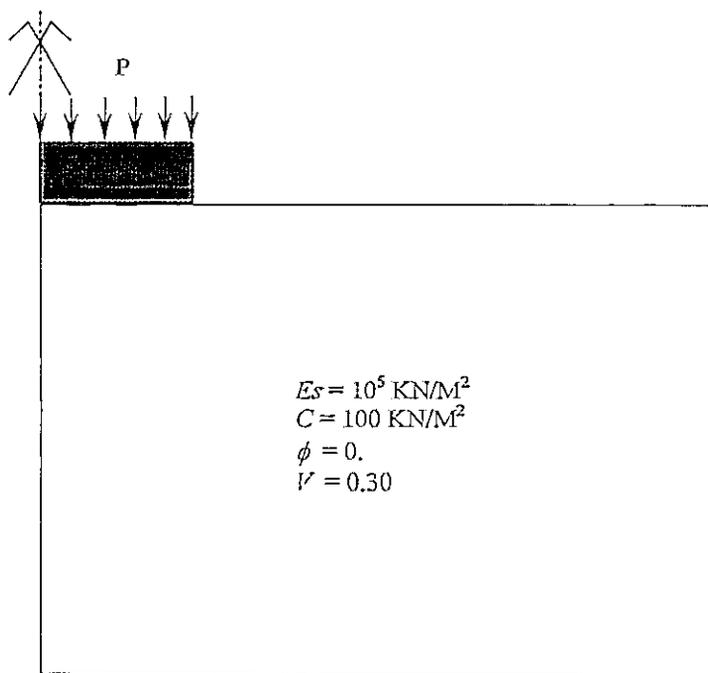


Figure VII.19. Fondation flexible sur un sol élasto plastique.

La figure suivante, traduit la variation du déplacement du centre de la fondation en fonction du rapport P/c .

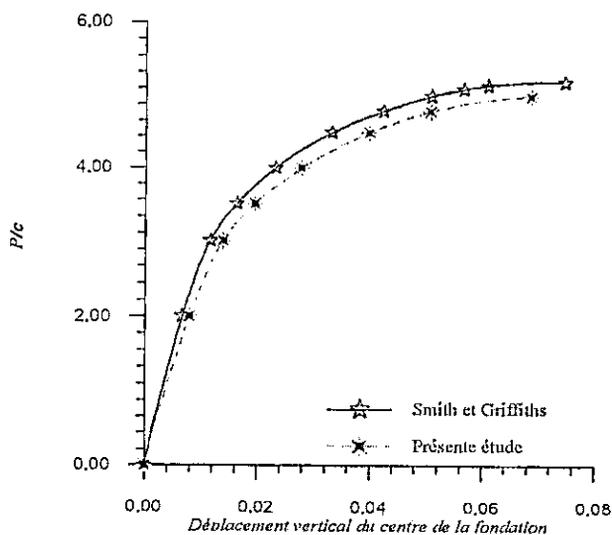


Figure VII.20. Déplacement vertical du centre de la fondation en fonction de P/c .

La charge limite qui est définie comme étant la limite à partir de laquelle, la rupture est atteinte, obtenue par la présente étude est $P/c = 5$, tandis que celle décrite par Prandtl est $P/c = (\pi + 2) = 5.14$, et on remarque la progression du déplacement vertical du centre de la fondation avant d'atteindre la rupture.

VII.6.1. Influence du rapport E/c :

Une étude paramétrique a été menée pour déterminer la façon avec laquelle influe le facteur E/c sur la réponse du problème en terme de déplacements, les résultats acquis sont groupés dans la figure suivante.

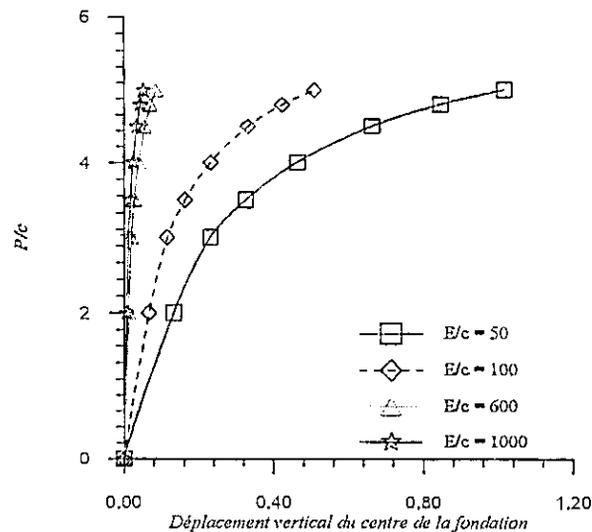


Figure VII.21. Déplacement vertical du centre de la fondation en fonction de P/c pour différentes valeurs de E/c .

On constate que la charge limite pour les différentes valeurs de E/c , n'a pas une influence sur la valeur de la charge limite qui tend toujours à converger vers la valeur décrite précédemment par Prandtl, mais le déplacement vertical du centre de la fondation est inversement proportionnelle avec la valeur de E/c pour une valeur constante de P/c .

VII.7. Fondation flexible reposant sur un bicouche élastoplastique :

Le calcul de la capacité portante des fondations à partir des paramètres de cisaillement est le problème le plus connu de la mécanique des sols, et après avoir déterminé ces paramètres par des essais que ce soit in-situ ou en laboratoire, on peut déduire la charge de rupture par l'intermédiaire de la relation de Terzaghi ou :

$$q_1 = 1/2\gamma_1 B N_\gamma(\phi) + c N_c(\phi) + (q + \gamma_2 D) N_q(\phi) \quad (\text{VII.5.})$$

Avec :

- q_1 : contrainte de rupture (capacité portante par unité de surface)
- γ_1 : poids volumique du sol sous la base de la fondation.
- γ_2 : poids volumique du sol latéralement à la fondation.
- q : surcharge verticale latérale à la fondation.
- c : cohésion du sol sous la base de la fondation.
- D : ancrage de la fondation.

Donc on va prendre comme exemple une fondation flexible qui repose sur un bicouche d'argile ou les caractéristiques sont comme l'indique la figure suivante :

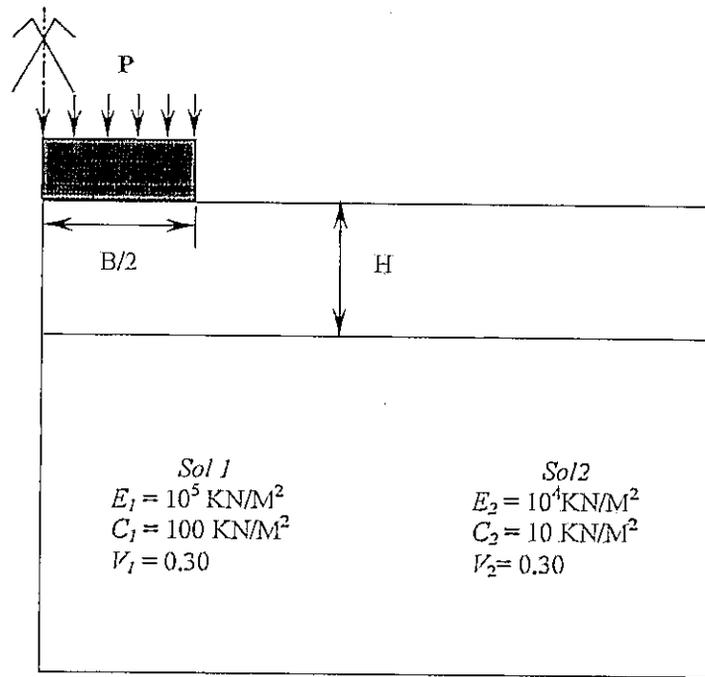


Figure VII.22. Fondation flexible sur un sol bicouche d'argile.

Les figures suivantes montrent la variation du déplacement du centre de la fondation en fonction de pression moyenne sous la fondation

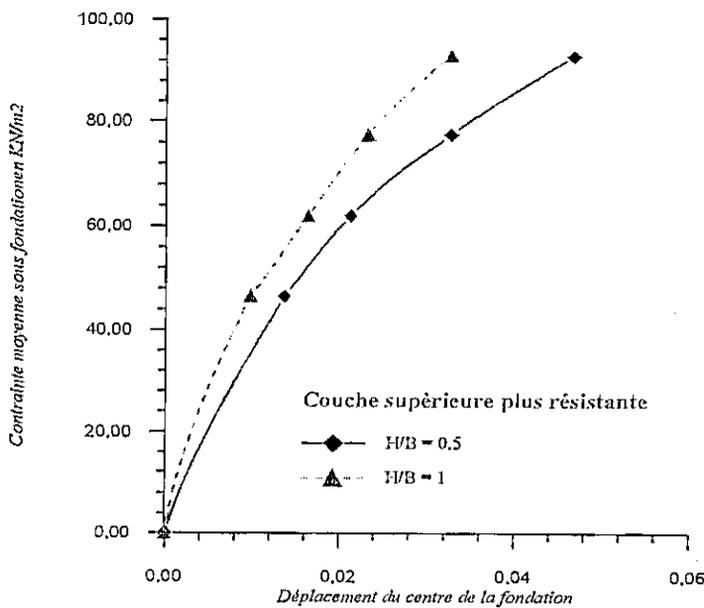


Figure VII.23. Courbe contrainte – tassement sous la fondation.

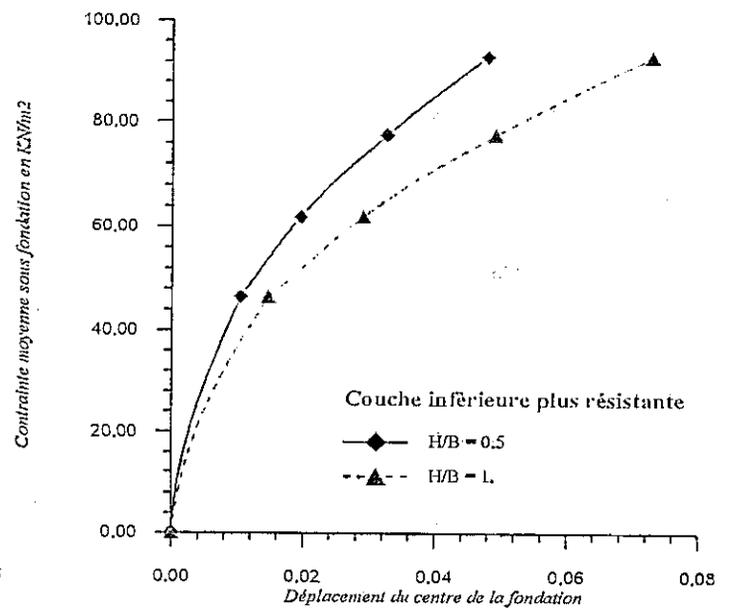


Figure VII.24. Courbe contrainte – tassement sous la fondation.

On remarque que pour le premier cas, le déplacement à la rupture est proportionnelle avec la hauteur de la couche, tandis que c'est le contraire pour le deuxième cas, ou on a une proportionnalité inverse entre le déplacement et la hauteur de la couche.

En ce qui concerne les déplacements normalisés en profondeur, on peut distinguer par les courbes suivantes :

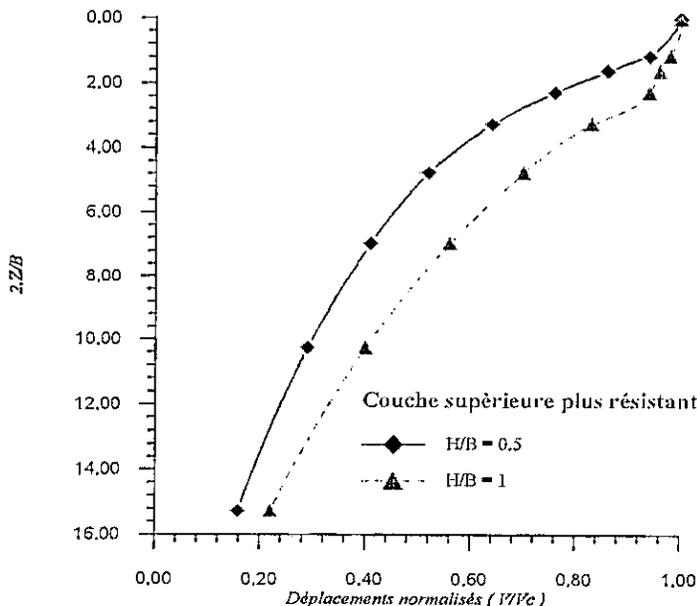


Figure VII.25. Variation des déplacements normalisés en profondeur.

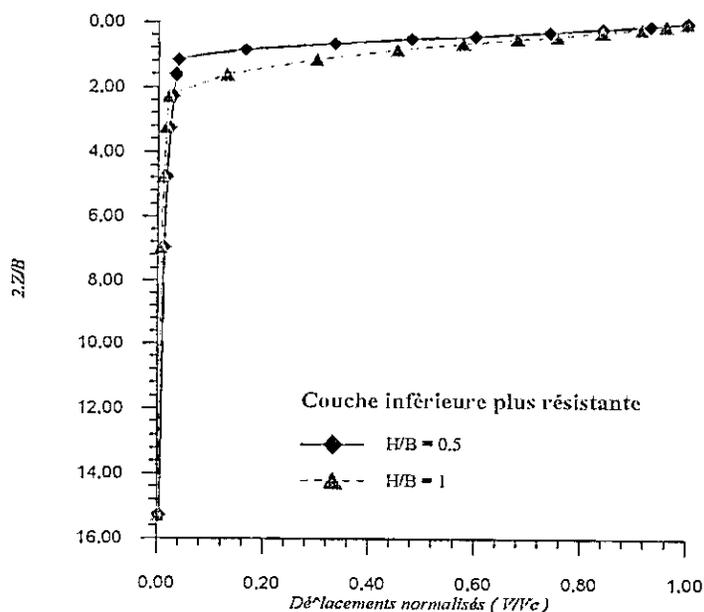


Figure VII.26. Variation des déplacements normalisés en profondeur.

Que la vitesse de réduction des tassements en profondeur de la couche inférieure est proportionnelle avec l'épaisseur de la première couche dans le cas où la couche supérieure est plus résistante, dans le deuxième cas cette réduction est inversement proportionnelle avec la hauteur de la couche supérieure.

VII.8. Fondation rigide reposant sur sol élasto - plastique :

Dans cet exemple, on va utiliser la technique du contrôle par déplacements (sachant qu'il existe en plus la technique du contrôle par chargement), et voyant comment varie la charge sous fondation que ca soit en terme de force résultante moyenne ou contrainte moyenne, en fonction des incréments de déplacements.

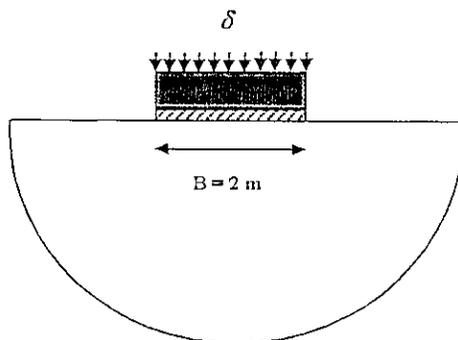


Figure VII.27. Fondation rigide sur un sol élasto - plastique.

Pour cela on prend comme modèle une fondation filante, reposant sur un sol élastoplastique, soumise à des incréments de déplacements comme l'indique la figure ci-dessus, en premier lieu on suppose que la liaison est parfaite, et en deuxième lieu en introduisant des éléments de contact dans la zone de contact sol fondation. Sachant que les caractéristiques des éléments de contact sont données comme suit :

$$G = 50 \text{ KN/M}^2, E = 10^4 \text{ KN/M}^2, C = 0, \phi = 30^\circ, e = 5 \text{ cm}, \nu = 0.30$$

Sachant que le critère utilisé est le critère de Mohr – Coulomb, et qu'il s'agit d'un comportement non - linéaire que ce soit sans ou avec éléments de contact.

La figure suivante décrit la variation des déplacements normalisés le long de l'axe de la fondation

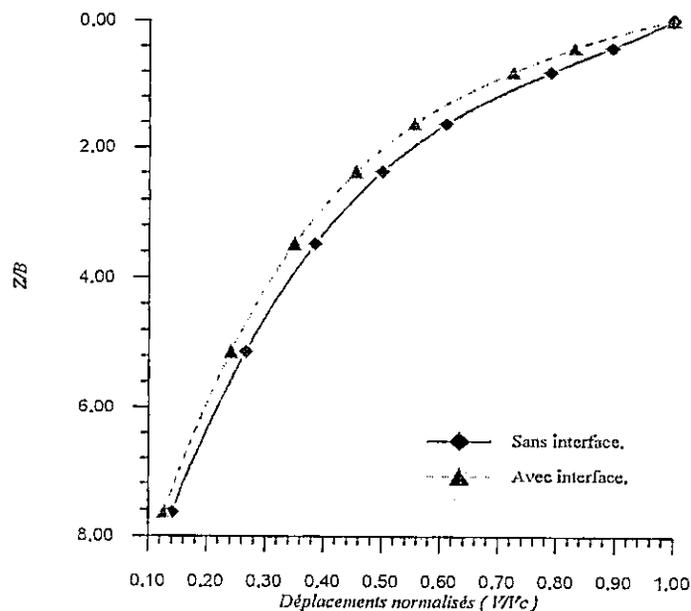


Figure VII.28. Variation des déplacements normalisés le long de l'axe de la fondation

On remarque que lorsqu'on tient en considération la modélisation de la zone de contact, les déplacements deviendront plus importants, cela est du principalement au fait de la naissance d'une nouvelle distribution des contraintes sous la fondation .

En ce qui concerne la réponse du système en terme de contrainte, la figure suivante représente la variation de la contrainte moyenne résultante en fonction du déplacement vertical.

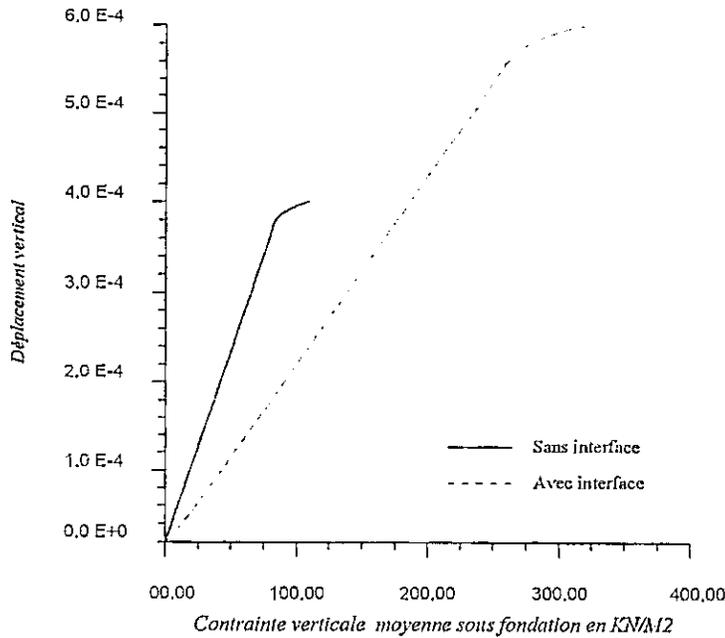


Figure VII.29. Courbe déplacement contrainte moyenne sous fondation rigide reposant sur un sol élasto - plastique

Ce qu'on pourra tirer comme conclusion c'est que la capacité portante est inversement proportionnelle avec la rigidité de la fondation, et que ca s'associe avec un grand tassement avant la rupture, ce tassement se dérive de la nouvelle distribution des contraintes.

VII.8.1 Influence de la rigidité du sol de fondation :

La rigidité du sol de fondation à une grande influence sur la réponse du système global, et pour avoir une idée sur l'influence de ce facteur, on va supposer qu'il s'agit d'un bicouche élastoplastique purement cohésif, ou les caractéristiques sont mentionnées ci-dessous.

	$E (KNM^2)$	ν	$C (KNM^2)$
Argile raide	10^5	0.40	100
Argile molle	10^4	0.30	10

Tableau VII.1. Caractéristiques du bicouche.

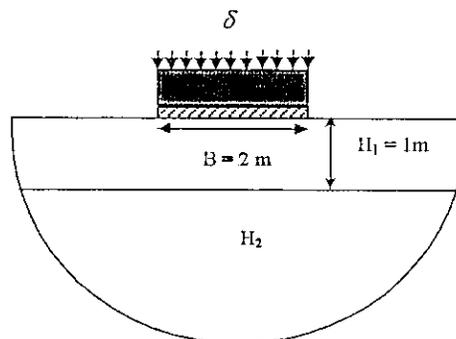


Figure VII.30. Fondation rigide sur un bicouche purement cohésif.

Lors de la superposition des deux couches, on à obtenue les courbes suivantes :

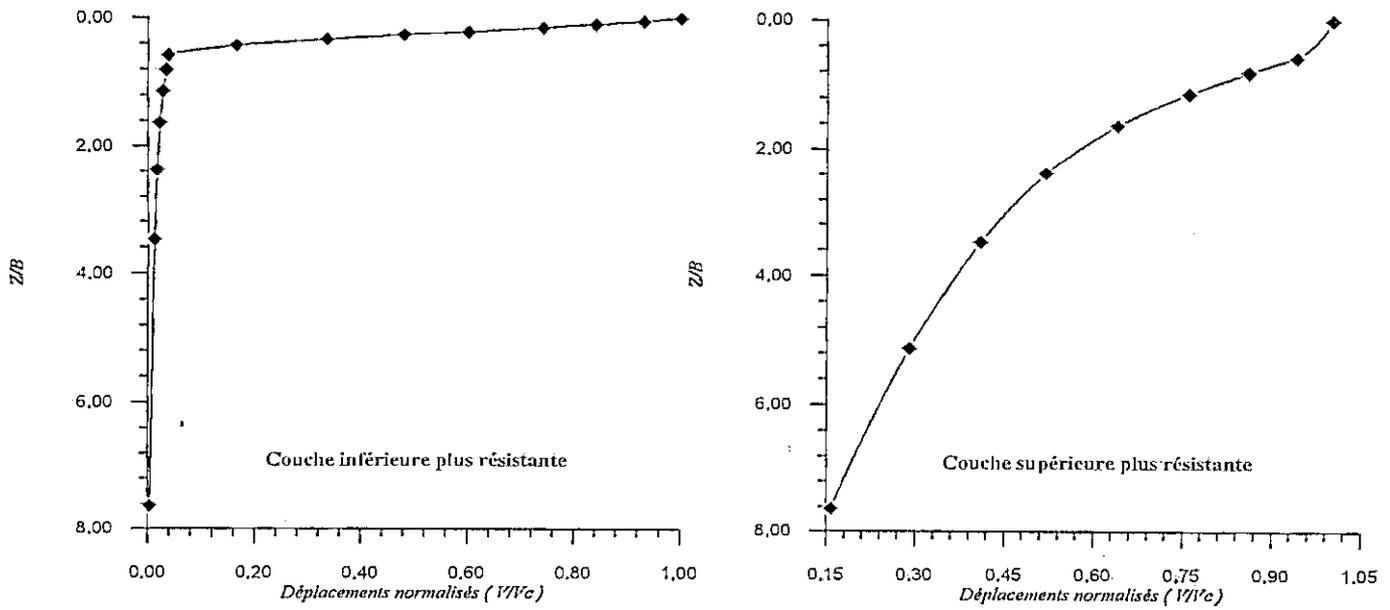


Figure VII.31. Variation des déplacements normalisés en profondeur.

On remarque la grande différence des champs de déplacements entre les deux cas. Cette différence est du essentiellement à la variation des caractéristiques des couches et de leurs dispositions sous la fondation.

VIII. CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS :

La présente étude nous a permis de développer des programmes pour le calcul du champ de contraintes et de déformations induit par une fondation superficielle, reposant sur des milieux stratifiés élasto-plastiques, basés sur le couplage d'éléments finis, éléments infinis, éléments de contact.

Cette approche a permis de mettre en évidence, à partir de l'étude des champs de contraintes et de déformations du problème classique d'une fondation superficielle circulaire ou filante reposant sur un milieu semi-infini homogène élastique linéaire, l'efficacité relative à l'introduction d'éléments infinis qui a permis d'une part de réduire considérablement le nombre d'éléments à prendre en considération et d'autre part d'avoir une meilleure précision.

Ainsi nous avons pu ensuite, en introduisant des éléments de contact d'estimer leur impact. Nous avons constaté que pour le cas d'une charge verticale centrée, les champs de contraintes et de déformations étaient perturbés qu'au voisinage de la fondation.

Le programme de calcul ainsi élaboré, permet de prendre en considération pratiquement de nombreux cas que l'on trouve dans la réalité, à savoir la flexibilité de la fondation, la variation de la rigidité du sol avec la profondeur et le cas des sols multicouches.

De plus, l'introduction d'une loi de comportement élasto-plastique, nous permet en plus d'estimer la capacité portante de la fondation. Les comparaisons faites avec les méthodes classiques d'évaluation des capacités portantes proposées dans la littérature montre une bonne concordance des résultats.

Au cours de cette étude nous avons constaté que l'attribution de caractéristiques géométriques et mécaniques aux éléments de contact peut avoir une incidence notable sur la qualité des résultats. A cet effet on propose de faire une étude plus approfondie qui nous permettra par la suite d'élaborer des règles plus précises pour la détermination de ces dernières en fonction des caractéristiques de la fondation (rigidité, matériaux, état de surface) et du sol sous - jacent.

Une extension de cette approche pour d'autres lois de comportement des sols serait aussi intéressante notamment pour des lois tenant compte de l'historique ou de la mémoire du sol.

De plus des applications multiples avec des charges inclinées excentrées, ne pourraient que contribuer à un meilleur enrichissement.

Références Bibliographiques

- **Bulletin des laboratoires des points et chaussées-212.** Novembre - Décembre 1997, 39-64
- **Bulletin du Laboratoire central des ponts et chaussées.** " Les éléments de contact ". 1987.
- **B.Haggblad and G.Nordgren.** " Modelling nonlinear soil-structure interaction using interface elements, elastic-plastic soil elements and absorbing infinite elements ". Computers and structures, Vol.26, 307-324.1987.
- **C.S.Desai and M.M.Zaman.** " Thin layer element for interfaces and joints ". International journal for numerical and analytical methods in Geomechanics, Vol.8, 19-43.1993.
- **C.S.Dessai and M.M.Zaman.** " Thin layer element for interfaces and joints ". International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, Vol.8, 19-43.1984.
- **D.N.Trikha, N.M.Bhandari and N.K.Saxena.** " Modified profile solver for finite-infinite coupled problems ". Computers and structures Vol.59, 387-390.1996.
- **D.Amar Bouzid.** " Analyse semi - analytique par éléments finis des pieux isolés sollicités horizontalement dans un milieu à comportement non - linéaire". Thèse de Magister , ENP 1997.
- **G.Donida, R.Brusch and R.Bernetti.** " Infinite elements in problems of geomechanics ". Computers and structures, Vol.29, 63-67.1988.
- **G.Giancarlo and D.D.Osvaldo.** " Elastic-plastic analysis of geotechnical problems by mathematical programming ". International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, Vol.3, 381-401.1979
- **H.Modaressi.** " Amélioration des éléments infinis". Rapport de stage E.C.Paris, 1983.
- **H.Liu and G.Yang.** " Infinite element and its application to geotechnical problems". Numerical methods in Geomechanics. 1988.
- **I.M.Smith, D.V. Griffiths.** " Programming the finite element method ". John Wiley, 1992 .
- **J.Costet, G. Sanglerat.** " Cours pratique de mécanique des sols T1,T2 ". Dunod, 1983.
- **J.P.Wolf.** " Soil structure interaction analysis in time domain ". Prentice - hall, Inc, 1988.
- **J.S.C.Schellekens and R.De borst.** " On the numerical integration of interface elements ". International journal for numerical methods in Engineering, Vol.36, 43-66.1993.
- **K.J.Bathe.** " Finite element procedures ". PrenticeHall,1996.
- **K.Sandjak.** " Etude de la réponse dynamique des structures sous sollicitations d'origine sismique en considérant le phénomène d'interaction sol - structure ".Thèse de Magister, ENP, Alger 2002.
- **M.El-Rich.M, K.Mouafki.** " Etude de la réponse dynamique des structures sous sollicitations d'origine sismique en considérant le phénomène d'interaction sol - structure ".Projet de fin d'étude, ENP, Alger 1995.

- M.R.Bouda, M.Cheickh Touami." Analyse du phénomène d'interaction sol - fondation circulaire, par le couplage éléments finis, éléments infinis ".Projet de fin d'étude, ENP, Alger 1996.
- M.N.Viladkar, J.Noorzaei and P.N.Godbole." Behaviour of infinite elements in an elasto-plastic domain ". Computers and structures Vol.51, 337-342.1994.
- M.N.Viladkar , P.N.Godbole and J.Noorzaei. " Non-linear soil-structure interaction of plane frames-a parametric study ". Computers and structures Vol.49, 561-566.1993.
- M.N.Viladkar, P.N.Godbole and J.Noorzaei. " Modeling of interface for soil-structure interaction studies ". Computers and structures Vol.52, 765-779.1994.
- M.M.Zaman." Evaluation of thin layer element and modeling of interface behavior in soil-structure interaction ". Fifth International conference on numerical methods in geomechanics, Nagoya, 1-5 April. 1985.
- O.C.Zienkewicz, R.L. Taylor." The finite element method, Basic formulation and linear problems ". Vol 01 Fourth edition, Mc-Graw Hill,1998.
- O.C.Zienkewicz, R.L. Taylor." Solid and fluid mechanics dynamics and non linearity ". Vol 02 Fourth edition, Mc-Graw Hill,1997.
- O.C.Zienkewicz, C.Emsen and P.Bettes. " A novel boundary infinite element. ". International journal for numerical methods in engineering, Vol.19, 393-404.1983.
- P.Bettes. " Infinite element ". Panshaw Press, 1992.
- P.Bettes. " Infinite elements ". International journal for numerical methods in Engineering, Vol.11, 53-64.1977.
- P.Kumar. " Static infinite element formulation ".
- P.Mestat. " Maillage d'éléments finis pour les ouvrages de géotechnique Conseils et recommandations ". Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées -212 Novembre - Décembre 1997 - Réf.4161 - PP39-64
- S.Bouziane." Modélisation non linéaire de comportement du sol, par couplage éléments finis, éléments infinis et éléments d'interface ". Thèse de Magister, ENP, Alger 1996.
- S.Cescotto, R.Charlier. " Frictional contact finite elements based on mixed variational principles ".International journal for numerical methods in engineering, Vol.36, 1681-1701. 1993.
- S.W.Sloan and M.F.Randolph. " Numerical prediction of collapse loads using finite element methods ". International journal for numerical and analytical methods in geomechanics, Vol.6, 47-76.1982.
- Techniques de l'Ingénieur." Fondations superficielles ". Vol C.246, 2001.