

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

*Génie Electrique*

# PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Développement de la  
Formule généralisée  
des Pertes.  
dans les réseaux électriques*

Proposé par :

*A. HELLAL*

Etudié par :

*T. OUAGUENOUNI*

*K. TAKRIET*

Dirigé par

*A. HELLAL*

PROMOTION  
1993 / 1994

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التربية الوطنية  
MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT

*Genie Electrique*

# PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Développement de la  
Formule généralisée  
des Pertes  
dans les réseaux électriques*

Proposé par :  
A. HELLAL

Etudié par :  
T. OUAGUENOUNI  
K. TAKRIET

Dirigé par  
A. HELLAL

PROMOTION  
1993/1994

## *Dédicaces*

---

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

*à ma mère, à mon père  
à mon frère et ma soeur  
à tous mes amis qui me sont chers  
aux familles Kouidri et Van Echelpoel*

*Fariq*

*à ma mère, à mon père  
à mes frères et mes soeurs  
à toute ma famille  
à tous mes amis qui me sont chers  
à Abderrahmane*

*Ramel*

## Remerciements

---

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Nous remercions notre promoteur Monsieur A. Hellal, ainsi que tout le corps enseignant qui nous a formés tout le long de notre cursus scolaire. Qu'ils trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

Nous tenons aussi à remercier nos proches et nos amis qui nous ont aidé par leurs conseils et leur soutien moral, tout spécialement M. Lebib Mérouane.

## ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بصياغة الصيغة العامة لفقدان الطاقة (ص.ع.ف.ط). ص.ع.ف.ط عبارة عن صيغة تقريبية للفقدان الحقيقي، وهي عبارة عن دالة من الدرجة الثانية ذات ثلاث متغيرات موجهة.  
\*متغيرات أولية: طاقة المولدات.  
\*متغيرات ثانوية: فلتية المولدات و نسبة تحويل المحولات.  
بعد العديد من التحويلات تحصلنا على نموذجين للصيغة العامة لفقدان الطاقة.  
\*الصيغة الأولى: بتغيير المتغيرات الأولية و تثبيت المتغيرات الثانوية.  
\*الصيغة الثانية: بتغيير المتغيرات الثانوية و تثبيت المتغيرات الأولية.

## Abstract

In this thesis a Generalized Loss Formula (G.L.F) is developed for the system losses around an operating point(base case). It' s an approximation of the exact losses and it' s a quadratic function to three sets of variables:

**Primary variables** : generator powers ( $P_g$ )

**Secondary variables** : generator voltage magnitude ( $V_g$ ) and transformer tap settings ( $t$ )

After several transformations, we obtained two specific types of the G.L.F

- **type 1:** in terms of primary variables by considering all secondary variables constants
- **type 2:** in terms of secondary variables by considering all primary variables constants

## TABLE DES MATIERES

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

### CHAPITRE I

#### Modélisation du réseau électrique

I.1 INTRODUCTION .....	3
I.2 MODELISATION DES TRANSFORMATEURS .....	3
I.2.1 Transformateur de réglage ( Tap Changing Under Load : TCUL) .....	3
I.2.1 Transformateurs déphaseurs ( phase shifting transformers ).....	5
I.3 REPRESENTATION DES LIGNES.....	6
I.3.1 Lignes courtes.....	7
I.3.2 Lignes moyennes .....	7
I.3.3 Lignes longues .....	8
I.4 CHOIX DE LA MODELISATION.....	11
I.5 MATRICE ADMITTANCE COMPLETE DU RESEAU.....	13

### CHAPITRE II

#### Développement de la Formule Généralisée des Pertes

II.1 INTRODUCTION .....	21
II.2 SYSTEME DE PERTES EXACTES .....	21
II.3 DERIVATION DE LA FORMULE DES PERTES.....	23
II.3.1 Passage aux coordonnées polaires.....	29
II.4 DETERMINATION DU VECTEUR $[V_L \ \theta]^T$ .....	33
II.5 FORMULATION DE LA FORMULE GENERALISEE DES PERTES.....	41
II.6 FORMES SPECIALES DE LA F.G.P .....	42
II.6.1 La F.G.P de Type 1.....	42
II.6.2 La F.G.P de Type 2.....	43

### CHAPITRE III

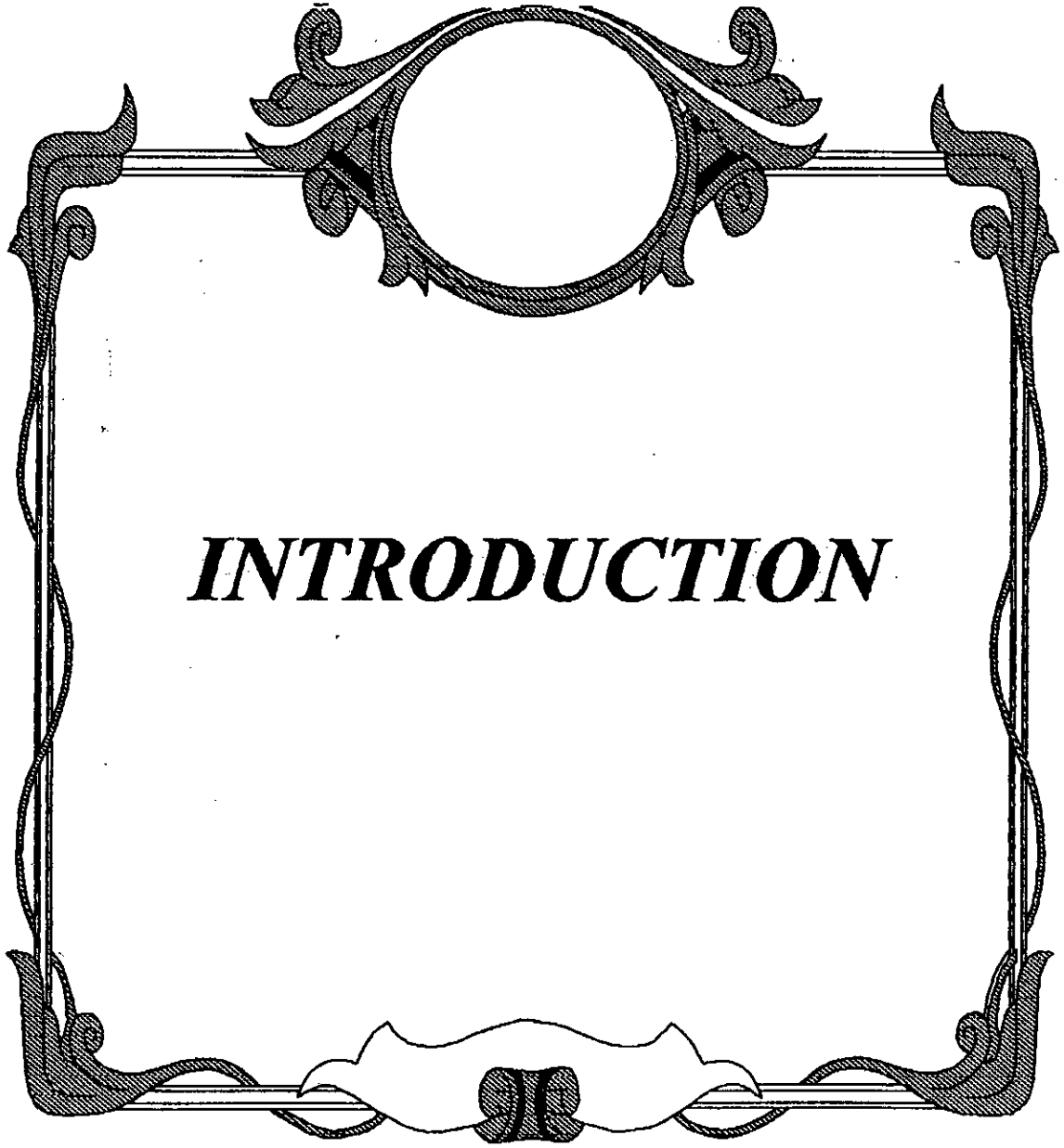
#### Simulations et interprétations des résultats

III.1 INTRODUCTION.....	45
III.2 DESCRIPTION DU PROGRAMME.....	45
III.3 VALIDATION DE LA F.G.P.....	45
III.3.1 Variation globale de la charge.....	47
III.3.1.1 Réseau à 5 noeuds.....	47
III.3.1.2 Réseau à 14 noeuds (IEEE 14 Bus system).....	47
III.3.1.3 Réseau à 30 noeuds (IEEE 30 Bus system).....	47
III.3.1.4 Interprétation des résultats et conclusion.....	47
III.3.2 Variation de l'amplitude de tension $V_g$ aux noeuds PV.....	51
III.3.2.1 Réseau à 5 noeuds.....	51
III.3.2.2 Réseau à 14 noeuds.....	58
III.3.2.3 Réseau à 30 noeuds.....	58
III.3.2.4 Interprétation des résultats et conclusion.....	58
III.3.2 Variation de la prise de réglage $f$ .....	58
Interprétation des résultats et conclusion.....	61
III.4 TEMPS D'EXECUTION.....	61
CONCLUSION GENERALE.....	66
APPENDICES	
BIBLIOGRAPHIE	

## TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure I-1 : Connexion générale d'une ligne de transmission .....	3
Figure I-2.b : Schéma en $\pi$ équivalent d'un transformateur TCUL .....	5
Figure I-2.c : Modélisation d'un déphaseur .....	5
Figure I-3.a : Ligne à constante répartie .....	6
Figure I-3.b : Schéma équivalent d'une ligne courte .....	7
Figure I-3.b' : Circuit équivalent d'une ligne moyenne .....	7
Figure I-3.c : Circuit équivalent d'une ligne longue .....	8
Figure I-3.d : Représentation en $\pi$ d'une ligne longue .....	10
Figure I-4.a : Prise de réglage $\bar{t}$ et rapport de transformation $\bar{a}$ des transformateurs de réglage .....	11
Figure I-4.b : Circuit équivalent de la ligne de transmission connectée à deux transformateurs.....	12
Figure I-5.a : Connexion de plusieurs lignes au même noeud .....	13
Organigramme de la Formule Généralisée des Pertes .....	46
Figure III-1 à III-3 : Graphes représentant la variation de $K$ .....	de 48 à 50
Figure III-4 à III-9 : Graphes représentant la variation de $V_g$ .....	de 52 à 57
Figure III-10 à III-12 Graphes représentant la variation de $t$ .....	de 59 à 60
Tableau III-1 Temps obtenus en fonction du nombre de points d'essai Réseau 5 noeuds .....	63
Tableau III-2 Temps obtenus en fonction du nombre de points d'essai Réseau 14 noeuds .....	63
Tableau III-3 Temps obtenus en fonction du nombre de points d'essai Réseau 30 noeuds .....	64
Figure III-13 Variation du temps de calcul en fonction du nombre de noeuds .....	65
Figure 1 : Schéma du réseau 5 noeuds .....	Appendice p.I
Figure 2 : Schéma du réseau IEEE 14 noeuds .....	Appendice p.III
Figure 3 : Schéma du réseau IEEE 30 noeuds .....	Appendice p.VI





***INTRODUCTION***

L'économie est l'un des critères les plus importants dans les systèmes de puissance. Elle dépend principalement des pertes dans les lignes de transmission.

Le calcul des pertes dans les réseaux électriques fait généralement appel à la résolution de l'écoulement de puissance classique (Newton-Raphson, Gauss-Seidel, ...). Mais comme on est de plus en plus confronté à de grands réseaux, ces méthodes s'avèrent être lentes et s'adaptent mal à la gestion de ce type de réseaux en temps réel.

Dès les années cinquante, une formule des pertes quadratique homogène fut développée. [1] Quelques années plus tard, une formule des pertes quadratique non-homogène sera utilisée pour augmenter la précision de la formule initiale. Mais ces deux expressions ne sont fonction que des puissances générées et restent donc très limitées dans leur application. [1]

Le développement de la Formule Généralisée des Pertes (F.G.P), étudié dans ce projet, rend celle-ci très compétitive avec le calcul de l'écoulement de puissance classique. Du fait qu'elle tient compte de la variation des puissances générées  $P_g$ , des tensions générées  $V_g$ , et de la prise de réglage des transformateurs  $t$ . Le gain de temps acquis en est considérable.

La F.G.P s'établit autour d'un point de fonctionnement nominal qu'on appellera cas de base, et dont on déterminera les paramètres  $P_{g0}$ ,  $V_{g0}$ ,  $t_0$  ainsi que les pertes  $P_{l0}$  grâce à l'écoulement de puissance classique. Son principal atout est qu'en faisant varier ces paramètres, on obtient presque instantanément les pertes dans le réseau à partir des données du cas de base.

On présentera ainsi deux types de F.G.P :

- **Type 1** : La Formule Généralisée des pertes est fonction des puissances générées  $P_g$  seulement (variables primaires). On considère les amplitudes des tensions des noeuds générateurs  $V_g$  et les prises de réglage des transformateurs  $t$  (variables secondaires) comme constantes. Pour cela, nous définirons les coefficients de charge  $K$  par lequel toutes les puissances seront multipliées. Il représente la fluctuation en puissance du réseau,  $K$  variant entre 0.5 et 1.5.

- **Type 2**: La Formule Généralisée des pertes est fonction de toutes les variables secondaires  $V_g$  (qui varie entre 0.95 à 1.05) et  $t$  (qui varie entre -0.1 à 0.1), en fixant les variables primaires  $P_g$ .

Pour ce faire le plan de notre travail se présente comme suit :

Dans le chapitre I, nous présentons la modélisation adoptée des différents éléments qui constituent les réseaux (ligne, transformateur). Puis on évaluera la matrice  $Y$  correspondante.

Au cours du chapitre II, nous allons établir la Formule Généralisée des Pertes en faisant un développement de Taylor tronqué. On présentera ainsi, le développement mathématique complet, puis les simplifications apportées.

Le chapitre III consistera à simuler notre programme sur différents modèles de réseaux, et évaluer les erreurs relatives commises suivant les différents types de variations, en comparaison avec le calcul d'écoulement de puissance classique par la méthode de Newton-Raphson.



*CHAPITRE I*

*Modélisation du  
Réseau Electrique*

Un réseau électrique de puissance est constitué de générateurs, de lignes de transmissions, de transformateurs ainsi que de charges.

Pour étudier le comportement d'un réseau électrique (écoulement et répartition de charges, calcul des pertes...), on est amené à modéliser ses différentes parties sous forme de schémas appropriés obéissant à des modèles mathématiques; constitués essentiellement de résistances, inductances et capacités.

La modélisation que nous allons adopter telle qu'elle est montrée dans la figure (I-1), est très générale, et peut être adaptée à n'importe quel réseau. Elle représente une ligne avec deux transformateurs de réglage, un de chaque côté.  $T_{ij}^{(r)}$  désigne le transformateur de réglage connecté entre le noeud  $i$  et le noeud  $j$  via une ligne de transmission.  $T_{ji}^{(s)}$  désigne le transformateur de réglage connecté entre le noeud  $j$  et le noeud  $i$ .

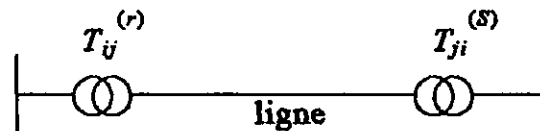


Figure I-1 : Connexion générale d'une ligne de transmission

## 1.2 Modélisation des transformateurs

Parmi les objectifs de l'étude des systèmes de puissance, nous avons le maintien de la tension d'un noeud autour d'un point de fonctionnement. Pour ce faire, la technique la plus usitée est l'utilisation des transformateurs.

### 1.2.1 Transformateur de réglage ( Tap Changing Under Load : TCUL)

Ils sont utilisés pour maintenir la tension aux noeuds de charges à la valeur spécifiée. Et vu la relation étroite existant entre le module de la tension et la puissance réactive, ils sont également utilisés pour contrôler l'écoulement de la puissance réactive dans le réseau. [6]

Chaque transformateur de la figure (I-1) est remplacé par un transformateur idéal possédant le même rapport de transformation en série avec une impédance de fuite : figure (I-2.a) [1].

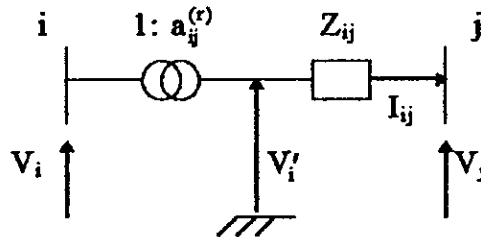


Figure I-2.a

$V_i'$  étant la tension au secondaire du transformateur idéal.

-  $V_j$  étant la tension au secondaire du transformateur réel.

- Si le transformateur est en régime nominal ( $a = 1$ ) « on-nominal Tap settings », les équations nodales du système sont :

$$I_{ij} = Y_{ij}V_i - Y_{ij}V_j \quad (I.1)$$

$$I_{ji} = -Y_{ij}V_i + Y_{ij}V_j \quad (I.2)$$

Dans ce cas  $I_{ij} = -I_{ji}$

Si le transformateur opère avec un rapport de transformation  $a$  ( $a \neq 1$ ) « off-nominal Tap settings », alors

$$V_i' = aV_i \quad (I.3)$$

$$I_{ij} = Y_{ij}(V_i' - V_j) \quad (I.4)$$

$$I_{ji} = -aI_{ij} \quad (I.5)$$

de (I.3) et (I.4) nous obtenons :

$$\begin{cases} I_{\bar{i}} = a^2 Y_{\bar{ij}} V_i - a Y_{\bar{ij}} V_j \\ I_{\bar{j}} = a Y_{\bar{ij}} V_i - Y_{\bar{ij}} V_j \end{cases} \quad (I.6)$$

Le schéma équivalent en  $\pi$  peut être déduit des équations (I.6), ce circuit est illustré dans la figure (I.2.b).

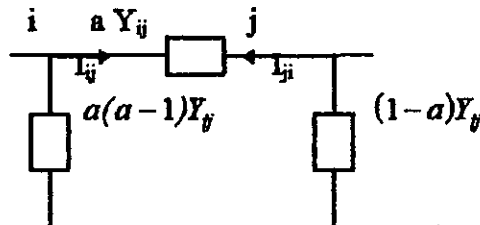


Figure I-2.b : Schéma en  $\pi$  équivalent d'un transformateur TCUL

En pratique la variation du rapport de transformation ( le réglage des TCUL se fait par pas discrets ), s'incrémente par pas de 5/8 % de  $V_n$  . [7]

Par hypothèse, on considère que la prise de réglage est continue.

### 1.2.1 Transformateurs déphaseurs « phase shifting transformers »

Ils sont utilisés pour contrôler l'argument (la phase), et par conséquent, l'écoulement de la puissance active. Ils sont représentés par un autotransformateur idéal ayant un rapport de transformation complexe  $a$  de module 1 et d'argument  $\theta$  en série avec une admittance de fuite.

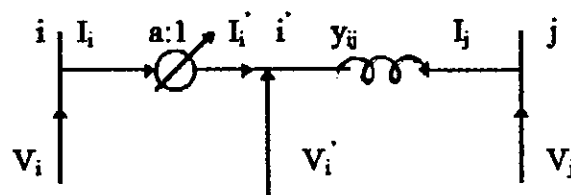


Figure I-2.3 : Modélisation d'un déphaseur

$V_i'$  et  $I_i'$  représentent la tension et le courant au secondaire de l'autotransformateur idéal :

$$|V_i'| = |V_i| \quad (I.8)$$

$\delta_i'$  est l'argument de la tension  $V_i'$  :

$$\delta'_i = \delta_i \pm \Delta\theta \quad (I.9)$$

$$I_i = a^* I'_i \quad (I.10)$$

$$I_i = a^* (V'_i - V_j) y_{ij}$$

$$I_i = |a|^2 y_{ij} V_i - a^* y_{ij} V_j \quad (I.11)$$

$a^*$  étant le complexe conjugué de  $a$

De même

$$I_j = -a y_{ij} V_i + y_{ij} V_j \quad (I.12)$$

De (I.11) et (I.12), on constate que la matrice admittance du transformateur déphaseur n'est pas symétrique, donc un circuit équivalent en  $\pi$  n'est pas possible.

Les transformateurs déphaseurs sont seulement représentés analytiquement par leur matrice admittance.

### I.3 Représentation des lignes

La représentation (modélisation) dépend beaucoup de la longueur de la ligne; selon cette dernière, on définit trois classes de lignes :

Lignes courtes (jusqu'à 80 km), lignes moyennes (jusqu'à 240 km), lignes longues (au-delà de 240 km). [8]

Une ligne est dite à constante répartie, quand la résistance, inductance, capacitance, et résistance de fuite sont uniformément réparties le long de la ligne figure (I-3.a), ce qui n'est pas le cas pour les très longues lignes.

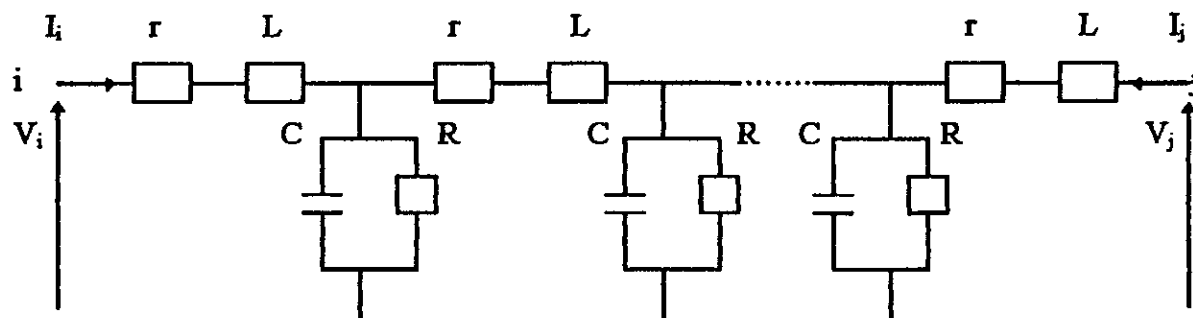


Figure I-3.a : Ligne à constante répartie



- L : inductance linéique
- r : résistance linéique
- C : capacitance linéique
- R : résistance de fuite linéique

### 1.3.1 Lignes courtes

La figure (I-3.b) représente le circuit équivalent d'une ligne courte. Il est à remarquer que la branche constituée de la capacité et de la résistance de fuite est négligée.

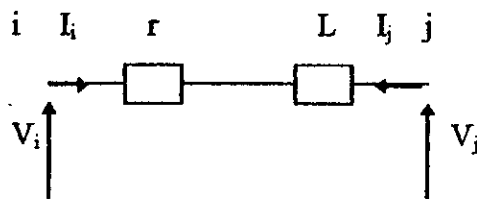
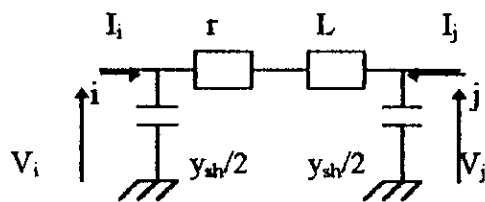


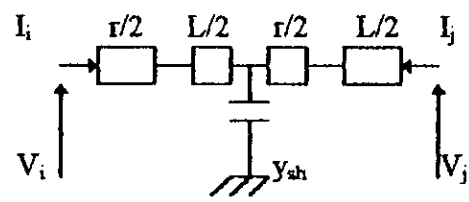
Figure I-3.b : Schéma équivalent d'une ligne courte

### 1.3.2 Lignes moyennes

A cause de l'augmentation de la longueur, la capacité shunt est prise en considération lors de la formation du circuit équivalent en  $\pi$  ou en T.



(a') : représentation en  $\pi$



(b') : représentation en T

Figure I-3.b' : Circuit équivalent d'une ligne moyenne

Le modèle en  $\pi$  est celui qu'on utilise le plus souvent.

### I.3.3 Lignes longues

Dans ce type de lignes, l'étude est souvent faite sur un élément  $\Delta x$  de la ligne; et par intégration on extrapole sur la totalité de la ligne.

Soit la ligne connectée entre les noeuds  $i$  et  $j$  de longueur  $L$  :

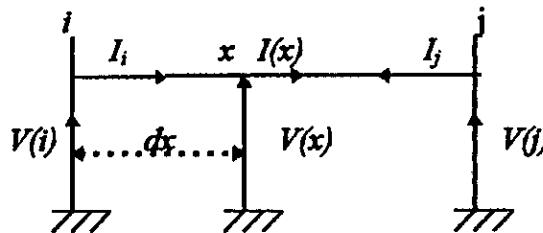


Figure I-3.c : Circuit équivalent d'une ligne longue

En un point  $x$  distant de  $dx$  du noeud  $i$ , on a une tension  $V(x)$  et un courant  $I(x)$ .

$$\begin{cases} V(i) - V(x) = Z'(x) I(x) \\ I(i) - I(x) = Y(x) V(x) \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

avec

$$\begin{cases} Z(x) = z dx \\ Y(x) = y dx \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

$z$  et  $y$  étant respectivement l'impédance et l'admittance de la ligne par unité de longueur.

En injectant l'équation (I.13) dans (I.12), on obtient :

$$\begin{cases} V(i) - V(x) = z I(x) dx \\ I(i) - I(x) = y V(x) dx \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Soit :

$$\begin{cases} V(i) - V(x) = dV(x) \\ I(i) - I(x) = dI(x) \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

En remplaçant (I.15) dans (I.14), il vient alors:

$$\begin{cases} \frac{dV(x)}{dx} = z I(x) \\ \frac{dI(x)}{dx} = y V(x) \end{cases} \quad (\text{I.16})$$

En dérivant le système (I.16), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \frac{dI(x)}{dx} \\ \frac{d^2I(x)}{dx^2} = y \frac{dV(x)}{dx} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

En injectant l'équation (I.16) dans (I.17), on trouve :

$$\begin{cases} \frac{d^2V(x)}{dx^2} = z y V(x) \\ \frac{d^2I(x)}{dx^2} = y z I(x) \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Le système (I.18) est un système d'équations différentielles du second ordre dont la solution est [8]:

$$\begin{cases} V(x) = V(i) \cosh \gamma x - I(i) Z_c \sinh \gamma x \\ I(x) = I(i) \cosh \gamma x - \frac{V(i)}{Z_c} \sinh \gamma x \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Et avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} V(x=0) = V(i) \\ I(x=0) = I(i) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V(x=L) = V(j) \\ I(x=L) = I(j) \end{cases}$$

De même si on connaît le courant et la tension au noeud  $j$  on aura :

$$\begin{cases} V(x) = V(j) \cosh \gamma x + I(j) Z_c \sinh \gamma x \\ I(x) = I(j) \cosh \gamma x + \frac{V(j)}{Z_c} \sinh \gamma x \end{cases}$$

où :  $\gamma$  est la constante de propagation, qui représente la variation de l'onde tension (courant) lors de sa progression le long de la ligne.

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y}$$

$Z_c$  : impédance caractéristique de la ligne.

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}}$$

Le circuit en  $\pi$  est donné par la figure (I-3.d)

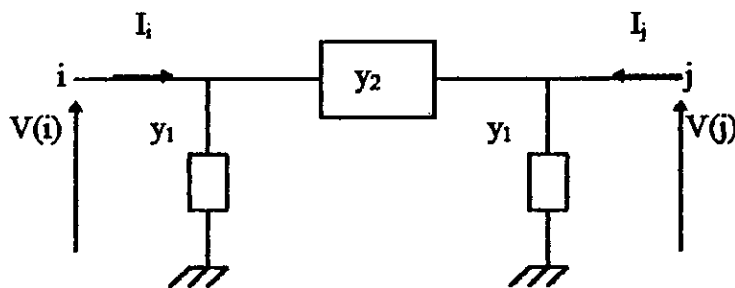


Figure I-3.d : Représentation en  $\pi$  d'une ligne longue

Tels que :

$$y_2 = \sqrt{\frac{Z_L}{Y_{sh}}} \sinh \sqrt{Z_L Y_{sh}} \quad (I.27)$$

$$y_1 = \frac{\cosh \sqrt{Z_L Y_{sh}} - 1}{y_2}$$

où  $Z_L$  et  $Y_{sh}$  sont respectivement l'impédance série totale et l'admittance shunte totale de la ligne.

Sachant que (par développement limité) :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{Z_L}{Y_{sh}}} \sinh \sqrt{Z_L Y_{sh}} = Z_L \left( 1 + \frac{Y_{sh} Z_L}{6} + \frac{Y_{sh}^2 Z_L^2}{120} + \frac{Y_{sh}^3 Z_L^3}{5040} + \dots \right) \cong Z_L \left( 1 + \frac{Y_{sh} Z_L}{6} \right) \\ \cosh \sqrt{Z_L Y_{sh}} = 1 + \frac{Y_{sh} Z_L}{2} + \frac{Y_{sh}^2 Z_L^2}{24} + \frac{Y_{sh}^3 Z_L^3}{720} + \dots \cong 1 + \frac{Y_{sh} Z_L}{2} \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases} y_2 \equiv Z_L \left( 1 + \frac{Y_{sh} Z_L}{6} \right) \\ y_1 \equiv \frac{3Y_{sh}}{6 + Z_L Y_{sh}} \end{cases}$$

Pour  $Z_L Y=1$  et avec une bonne approximation, on retrouve les paramètres du schéma en  $\pi$  d'une ligne moyenne.

## 1.4 Choix de la modélisation

Dans le but de rendre la Formule Généralisée des Pertes plus compétitive, adaptable et exécutable sur la plupart des réseaux; nous avons adopté une modélisation très générale.

Pour les lignes, nous avons adopté celle des lignes longues. Comme il existe des transformateurs de réglage et des déphaseurs, chaque transformateur de la figure (I-1) et selon les besoins, peut assurer les deux fonctions en même temps.

La figure (I-4.a) représente le rapport de transformation selon la modélisation adoptée.

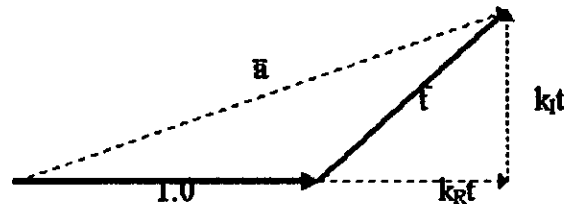


Figure I-4.a : prise de réglage  $\bar{f}$  et rapport de transformation  $\bar{a}$  des transformateurs de réglage

Soit  $\bar{f}$  la prise de réglage [1] :  $\bar{f} = (k_R + jk_I)t$  (I.21)

Le rapport de transformation est défini par :

$$\bar{a} = 1 + \bar{f}$$

$$\bar{a} = (1 + k_R t) + jk_I t \quad (I.22)$$

où  $k_r$  et  $k_i$  sont fixes et  $t$  varie (variable de contrôle).

$a$  étant une valeur complexe, on peut la réécrire par :

$$\bar{a} = a \angle \theta$$

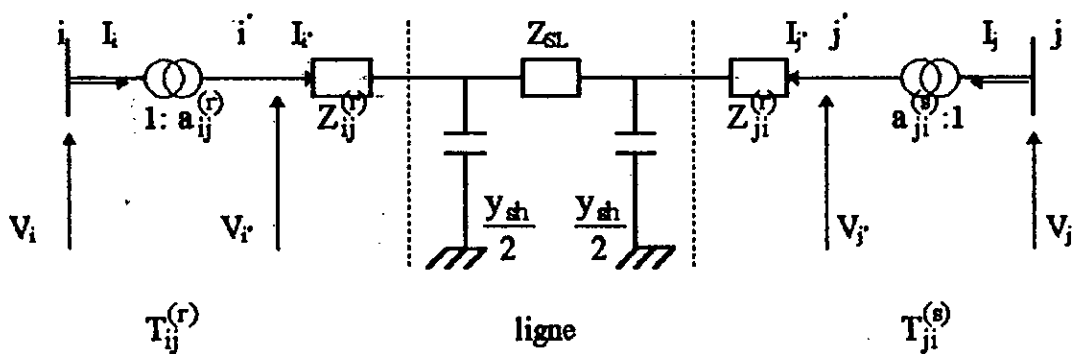
Le module est donné par :

$$a = \left( (1+k_{Rt})^2 + (k_{It})^2 \right)^{1/2} \tag{I.23}$$

et l'argument par :

$$\theta = \text{arctg} \frac{k_{It}}{1+k_{Rt}} \tag{I.24}$$

Avec cette modélisation, la figure (I-1) devient :



**Figure I-4.b : Circuit équivalent de la ligne de transmission connectée à deux transformateurs**

La matrice admittance de cette représentation est simplifiée dans la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{ii} & y_{ij} \\ y_{ji} & y_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{bmatrix} \tag{I.25}$$

avec :

$$y_{ii} = (\bar{a}_{ij}^{(r)} \bar{a}_{ij}^{(r)*}) y_{iir} \tag{I.26}$$

$$y_{ij} = (\bar{a}_{ij}^{(r)} \bar{a}_{ji}^{(s)}) y_{ijr} \tag{I.27}$$

$$y_{ji} = (\bar{a}_{ij}^{(r)} \bar{a}_{ji}^{(s)*}) y_{jir} \tag{I.28}$$

$$y_{jj} = (\bar{a}_{ji}^{(s)} \bar{a}_{ji}^{(s)*}) y_{jjs} \tag{I.29}$$

Les équations (I.2 et I.26..I.29) sont générales. Dans le cas où un des transformateurs n'existe pas, on prend  $\bar{a} = 1 \angle 0^\circ$  et l'impédance de fuite égale à zéro.

Les éléments  $y_{rr}, y_{rr'}, y_{jv}, y_{jv'}$  seront définis ultérieurement (paragraphe suivant).

## 1.5 Matrice admittance complète du réseau

Dans les réseaux réels, chaque noeud est souvent connecté à plusieurs lignes, la figure (I-5.a) représente un cas où le noeud  $i$  est connecté à  $N$  lignes.

Les éléments diagonaux de la matrice admittance définis par (I.25) deviennent égaux à :

$$Y_{ii} = \sum_{k=1}^N (\bar{a}_i^{(r)} \bar{a}_i^{(r')}) y_{vv}^{(k)} \quad (\text{I.30})$$

Les éléments non-diagonaux restent égaux à ceux définis par les équations (I.27) et (I.28).

$y_{vv}^{(k)}$  : admittance d'entrée de la  $k^{\text{ème}}$  ligne

$\bar{a}_i^{(r)}$  : rapport de transformation du  $r^{\text{ème}}$  transformateur, connecté au noeud  $i$  et se trouvant dans la  $k^{\text{ème}}$  ligne.

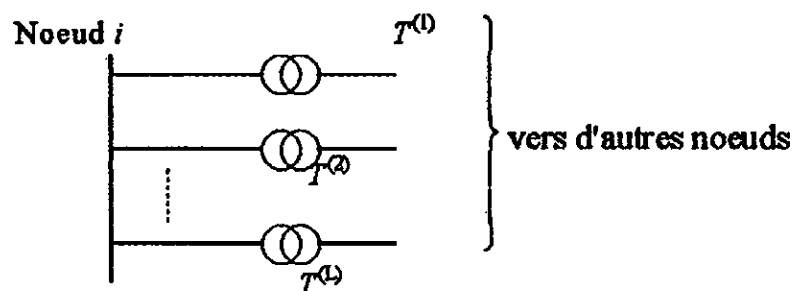


Figure I-5.a : Connexion de plusieurs lignes au même noeud

Comme le réseau contient des transformateurs de réglage, la matrice  $Y$  sera fonction de  $t$ .

Pour déterminer la matrice admittance du système, représenté par :

- Une ligne, ayant une impédance série  $Z_{SL}$ , deux impédances shunt
- Les impédances de fuite des transformateurs  $T_{ij}^{(r)}$  et  $T_{ji}^{(s)}$ .

On manipule la figure (I-4.b) , en passant de la représentation en *triangle* (en  $\pi$ ) de la ligne à la représentation étoile (T).

On a

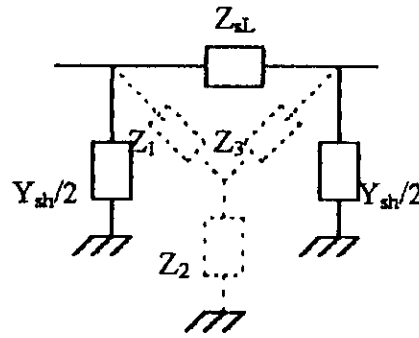


Figure I-5.b

avec :

$$Z_1 = \frac{Z_{SL} \frac{2}{Y_{sh}}}{Z_{SL} + \frac{4}{Y_{sh}}} \quad Z_2 = \frac{\left(\frac{2}{Y_{sh}}\right)^2}{Z_{SL} + \frac{4}{Y_{sh}}} \quad Z_3 = \frac{Z_{SL} \frac{2}{Y_{sh}}}{Z_{SL} + \frac{4}{Y_{sh}}}$$

Avec cette transformation, la figure (I-4.b) devient :

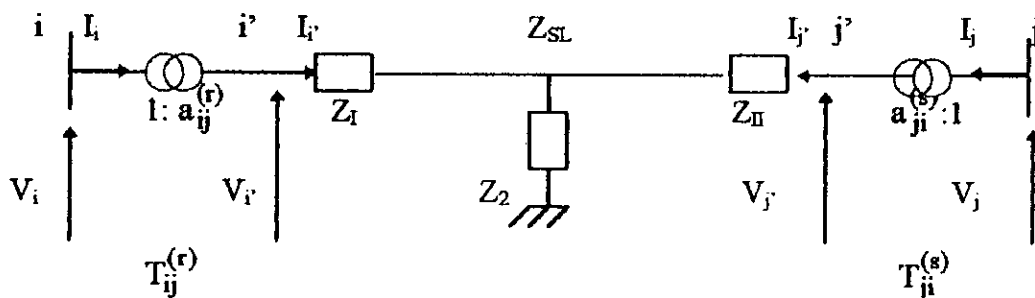


Figure I-5.c

Avec :

$$\begin{cases} Z_I = Z_1 + Z_{ij}^{(r)} \\ Z_{II} = Z_3 + Z_{ji}^{(s)} \end{cases} \quad (I.31)$$

De la figure (I-5.c), on a :



De la figure (I-5.c), on a :

$$\begin{cases} V_{i'} = Z_1 I_{i'} + Z_2 (I_{i'} + I_{j'}) \\ Z_2 (I_{i'} + I_{j'}) = Z_{II} I_{j'} + V_{j'} \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

Dans le système d'équations (I.32),  $I_{i'}$  et  $I_{j'}$  sont des inconnues à déterminer en fonction des tensions des noeuds  $i'$  et  $j'$  qui représentent les secondaires des transformateurs  $T_{i'}^{(r)} = T^{(r)}$  et  $T_{j'}^{(s)} = T^{(s)}$  respectivement; ainsi qu'en fonction de  $Z_1$ ,  $Z_{II}$ , et  $Z_2$ .

On veut arriver à l'expression analytique suivante :

$$\begin{bmatrix} I_{i'} \\ I_{j'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i'i'} & y_{i'j'} \\ y_{j'i'} & y_{j'j'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i'} \\ V_{j'} \end{bmatrix} \quad (\text{I.33})$$

où :

$$y' = \begin{bmatrix} y_{i'i'} & y_{i'j'} \\ y_{j'i'} & y_{j'j'} \end{bmatrix} \quad \text{représente la matrice admittance de la ligne } i'j'$$

A noter que  $[y']$  ne représente que l'admittance entre les secondaires des transformateurs, par contre la matrice admittance totale de la ligne  $ij$  sera calculée ultérieurement.

Le système (I.32) devient :

$$\begin{cases} (Z_1 + Z_2) I_{i'} + Z_2 I_{j'} = V_{i'} \\ Z_2 I_{i'} + (Z_2 - Z_{II}) I_{j'} = V_{j'} \end{cases} \quad (\text{I.34})$$

d'où :

$$\begin{cases} I_{i'} = \frac{Z_2 - Z_{II}}{\det} V_{i'} - \frac{Z_2}{\det} V_{j'} \\ I_{j'} = \frac{-Z_2}{\det} V_{i'} + \frac{Z_1 + Z_2}{\det} V_{j'} \end{cases} \quad (\text{I.35})$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_{i'} \\ I_{j'} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} Z_2 - Z_{II} & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i'} \\ V_{j'} \end{bmatrix} \quad (\text{I.36})$$

avec  $\det = Z_2 (Z_1 - Z_{11}) - Z_1 Z_1$ .

Par identification avec (I.33) on a :

$$y' = \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} Z_2 - Z_{11} & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_1 \end{bmatrix}$$

Pour déterminer la matrice admittance totale de la ligne  $ij$  on se place au niveau des primaires des transformateurs  $T_{ij}^{(D)}$  et  $T_{ji}^{(S)}$ , soit:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_{i'} \\ \bar{I}_{j'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{a}^{(r)*}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\bar{a}^{(s)*}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_i \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} \quad (\text{I.37})$$

tels que:

$\bar{I}_{i'}$ ,  $\bar{I}_{j'}$  représentent les courants aux secondaires des transformateurs  $T_{ij}^{(D)}$  et  $T_{ji}^{(S)}$  respectivement,

$\bar{I}_i$ : le courant au primaire du transformateur  $T_{ij}^{(D)}$ ,

$\bar{I}_j$ : le courant au primaire du transformateur  $T_{ji}^{(S)}$ ,

$\bar{a}^{(r)*}$ : le rapport de transformation du transformateur  $T_{ij}^{(D)}$ ,

$\bar{a}^{(s)*}$ : le rapport de transformation du transformateur  $T_{ji}^{(S)}$ ,

(\*) désigne le complexe conjugué.

Nous avons :

$$\bar{V}_{i'} = \bar{a}^{(r)} V_i$$

$$\bar{V}_{j'} = \bar{a}^{(s)} V_j$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{i'} \\ \bar{V}_{j'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(r)} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{bmatrix} \quad (\text{I.38})$$

telles que:

$\bar{V}_{i'}$ ,  $\bar{V}_{j'}$ : tensions aux secondaires des transformateurs  $T_{ij}^{(D)}$  et  $T_{ji}^{(S)}$  respectivement,

$\bar{V}_i, \bar{V}_j$  : tensions aux primaires des transformateurs  $T_{ij}^{(i)}$  et  $T_{ji}^{(s)}$  respectivement.

La matrice admittance totale de la ligne  $ij$  sera définie comme étant une matrice qui relie directement les courants primaires aux tensions primaires, soit:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ii} & Y_{ij} \\ Y_{ji} & Y_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

Les éléments  $Y_{ii}, Y_{ij}, Y_{ji}, Y_{jj}$  sont à déterminer.

De l'équation (I.37) on tire:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(r)*} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(s)*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_{i'} \\ \bar{I}_{j'} \end{bmatrix} \quad (\text{I.40})$$

De (I.36) et (I.40) on aura:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(r)*} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(s)*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{i'i'} & Y_{i'j'} \\ Y_{j'i'} & Y_{j'j'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_{i'} \\ \bar{V}_{j'} \end{bmatrix} \quad (\text{I.41})$$

ou, en utilisant (I.38) et (I.41):

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_i \\ \bar{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(r)*} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(s)*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{i'i'} & Y_{i'j'} \\ Y_{j'i'} & Y_{j'j'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}^{(r)} & 0 \\ 0 & \bar{a}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}_i \\ \bar{V}_j \end{bmatrix} \quad (\text{I.42})$$

soit en identifiant avec (I.39):

$$[Y] = \begin{bmatrix} \bar{a}^{(r)} \bar{a}^{(r)*} Y_{i'i'} & \bar{a}^{(r)} \bar{a}^{(s)*} Y_{i'j'} \\ \bar{a}^{(s)} \bar{a}^{(r)*} Y_{j'i'} & \bar{a}^{(s)} \bar{a}^{(s)*} Y_{j'j'} \end{bmatrix} \quad (\text{I.43})$$

or, de (I.25) on a:

$$\begin{cases} \bar{a}^{(r)} = (1 + K_R^{(r)} t^{(r)}) + j K_I^{(r)} t^{(r)} \\ \bar{a}^{(s)} = (1 + K_R^{(s)} t^{(s)}) + j K_I^{(s)} t^{(s)} \end{cases} \quad (\text{I.44})$$

En remplaçant (I.44) dans (I.43) et en posant:

$$\begin{bmatrix} Y_{i'i'} & Y_{i'j'} \\ Y_{j'i'} & Y_{j'j'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ii} + j b_{ii} & g_{ij} + j b_{ij} \\ g_{ji} + j b_{ji} & g_{jj} + j b_{jj} \end{bmatrix} \quad (\text{I.45})$$

On aura alors

$$\begin{cases} y_{\bar{v}} = (k_2 g_{\bar{v}v'} + k_2 b_{\bar{v}v'}) + j (k_1 b_{\bar{v}v'} - k_2 g_{\bar{v}v'}) \\ y_{\bar{v}i} = (k_1 g_{\bar{v}v'} - k_2 b_{\bar{v}v'}) + j (k_1 b_{\bar{v}v'} + k_2 g_{\bar{v}v'}) \\ y_{\bar{u}} = \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} g_{\bar{u}v'}^{(j)} + j \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} b_{\bar{u}v'}^{(j)} \\ y_{\bar{v}} = \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} g_{\bar{v}v'}^{(j)} + j \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} b_{\bar{v}v'}^{(j)} \end{cases} \quad (I.46)$$

avec

$$\begin{cases} k_1 = 1 + k_R^{(r)} t^{(r)} + k_R^{(s)} t^{(s)} + (k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_1^{(r)} k_1^{(s)}) t^{(r)} t^{(s)} \\ k_2 = k_1^{(r)} t^{(r)} - k_1^{(s)} t^{(s)} + (k_1^{(r)} k_R^{(s)} - k_R^{(r)} k_1^{(s)}) t^{(r)} t^{(s)} \\ k_3^{(j)} = 1 + 2k_R^{(j)} t^{(j)} + (k_R^{(j)2} + k_1^{(j)2}) t^{(j)2} \\ nl : \text{nombre de ligne} \end{cases} \quad (I.47)$$

On constate dans les expressions de  $y_{\bar{u}}$  et  $y_{\bar{v}}$  l'existence de l'exposant ( $j$ ) pour  $g_{\bar{u}v'}$  et  $b_{\bar{u}v'}$ . On le met pour différencier entre les  $g_{\bar{u}v'}$  et  $b_{\bar{u}v'}$  des différentes lignes. Par exemple, si dans un réseau quelconque, le noeud ' $k$ ' est connecté vers les lignes:  $m$ ,  $l$ ,  $n$ , alors on définit  $g_{\bar{u}k}^{(m)}$ ,  $g_{\bar{u}k}^{(l)}$  et  $g_{\bar{u}k}^{(n)}$  qui sont différents; il en est de même pour  $b_{\bar{u}k}^{(m)}$ ,  $b_{\bar{u}k}^{(l)}$ , et  $b_{\bar{u}k}^{(n)}$ . Par contre dans les autres expressions, on trouve seulement  $g_{\bar{u}}$  et  $b_{\bar{u}}$  sans l'exposant; en effet, on peut s'en passer parce qu'il n'existe qu'un seul  $g_{\bar{u}}$  et  $b_{\bar{u}}$  entre les noeuds  $i$  et  $j$ .

On constate aussi dans l'expression de  $k_3^{(j)}$  l'existence de l'exposant ( $j$ ); qui certes réfère au numéro de la ligne mais aussi au numéro du transformateur.  $k_3^{(j)}$  et  $t^{(j)}$  font référence à la prise de réglage du  $j^{ème}$  transformateur. Comme dans notre représentation, il existe deux transformateurs, alors dans ce cas, le ( $j$ ) indique le transformateur ayant son primaire connecté au noeud  $k(m)$  quand on calcule  $y_{\bar{u}k}$  ( $y_{mm}$ ).

Pour ce faire, on a conçu des sous-programmes dont un ayant pour rôle d'attribuer à chaque ligne le noeud de départ ( $I_1$ ) et le noeud d'arrivée ( $I_2$ ), alors qu'un autre, en ayant ( $I_1$  et  $I_2$ ) et/ou ( $I_2$  et  $I_1$ ) donne les numéros de la ligne et des

transformateurs connectés entre  $I_1$  et  $I_2$  et/ou  $I_2$  et  $I_1$  qui, notons le, ne sont pas les mêmes. Du système (I.46) on définit les matrices conductances ( $G$ ) et susceptance ( $B$ ) comme étant respectivement la partie réelle et imaginaire de la matrice admittance. On définit aussi:

$$\begin{cases} G(i, j) = G^{(1)}(i, j) + G^{(2)}(i, j) \\ B(i, j) = B^{(1)}(i, j) + B^{(2)}(i, j) \end{cases} \quad (\text{I.48})$$

tel que, pour un réseau de  $N_T$  noeuds on aura:

$$G^{(1)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} g_{11}^{(j)} & \dots & k_1 g_{1k'} & \dots & k_1 g_{1n'} \\ \vdots & \ddots & & & \\ k_1 g_{k1} & & \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} g_{kk'}^{(j)} & & k_1 g_{kn'} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ k_1 g_{n1} & \dots & k_1 g_{nk'} & \dots & \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} g_{nn'}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (\text{I.49})$$

$$G^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & k_2 b_{1k'} & \dots & k_2 b_{1n'} \\ \vdots & \ddots & & & \\ -k_2 b_{k1} & & 0 & & k_2 b_{kn'} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -k_2 b_{n1} & \dots & -k_2 b_{nk'} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.50})$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} b_{11}^{(j)} & \dots & k_1 b_{1k'} & \dots & k_1 b_{1n'} \\ \vdots & \ddots & & & \\ k_1 b_{k1} & & \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} b_{kk'}^{(j)} & & k_1 b_{kn'} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ k_1 b_{n1} & \dots & k_1 b_{nk'} & \dots & \sum_{j=1}^{nl} k_3^{(j)} b_{nn'}^{(j)} \end{bmatrix} \quad (\text{I.51})$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -k_2 g_{1k'} & \cdots & -k_2 g_{1n'} \\ \vdots & \ddots & & & \\ k_2 g_{k1} & & 0 & & -k_2 g_{kn'} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ k_2 g_{n1} & \cdots & k_2 g_{nk'} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.52})$$

On obtient donc bien des propriétés intéressantes, que sont la symétrie de  $G^{(1)}$  et  $B^{(1)}$  et l'antisymétrie de  $G^{(2)}$  et  $B^{(2)}$ .

Ces matrices seront utilisées dans le chapitre suivant pour le développement de la F.G.P.

Le cas de base représente l'état du système dans le point de fonctionnement nominal. C'est le point autour duquel les variations du rapport de transformation s'opèrent.

Dans ce cas ( $t = 0$ ) la matrice admittance totale du réseau devient :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= 0 \\ k_3^{(j)} &= 1 \\ G^{(2)} &= B^{(2)} = 0 \\ y &= G^{(1)} + jB^{(1)} \end{aligned}$$

Dans la plupart des schémas de réseaux rencontrés, entre deux noeuds, on ne représente qu'une ligne de transmission ou bien un transformateur. Pour cela, l'équation (I.34) devient :

$$\begin{cases} Z_I = Z_1 \\ Z_{II} = Z_3 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} Z_I = Z_V^{(r)} \\ Z_{II} = Z_{jI}^{(s)} \end{cases}$$

A noter que la plupart des transformateurs rencontrés opèrent en TCUL, d'où : ( $K_I = 0$ )

L'équation (I.47) devient :

$$\begin{cases} k_1 = 1 + K_R^{(r)} t^{(r)} \\ k_2 = 0 \\ k_3^{(j)} = 1 + 2K_R^{(r)} t^{(j)} + K_R^{(r)2} t^{(j)2} \end{cases}$$



*CHAPITRE II*

*Développement de la  
Formule Généralisée  
des Pertes*

Il y a plusieurs méthodes pour le calcul des pertes dans les réseaux électriques, entre autres en utilisant l'écoulement de puissance classique.

Dans ce présent chapitre, nous allons établir l'expression de la **Formule Généralisée des Pertes (F.G.P)** dans les réseaux électriques.

C'est une formule qui est établie autour d'un point d'état nominal appelé **cas de base** « base case ». C'est une approximation oscillatoire [1] qui est fonction des variables de contrôle. On définit ainsi deux (2) types de variables de contrôle :

- **Les variables de contrôle primaires** : Puissance des générateurs  $P_g$
- **Les variables de contrôle secondaires** : Amplitude des tensions des générateurs  $V_g$  et prises de réglage des transformateurs  $t$ .

Selon la nature des variables de contrôle (primaires ou secondaires), on définit deux types de Formule Généralisée des Pertes et par suite on déterminera les coefficients (matrices et vecteurs) correspondants:  $Q_p, q_p^f, q_{p0}$  pour le 1<sup>er</sup> type et  $Q_s, q_s^f, q_{s0}$  pour le 2<sup>nd</sup> type.

## II.2 Système de pertes exactes

Soit  $P_{L_e}$  les pertes totales exactes en puissance active du réseau, et  $N_T$  le nombre de noeuds du réseau :

$$P_{L_e} = Re\{\bar{V}^T \bar{I}^*\} \quad (II.1)$$

où  $\bar{V}$  est le vecteur de tension formé de  $N_T$  éléments

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} \bar{V}(1) \\ \bar{V}(2) \\ \vdots \\ \bar{V}(N_T) \end{bmatrix}$$

et  $\bar{I}$  est le vecteur courant de dimension  $N_T$



$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \bar{I}(1) \\ \bar{I}(2) \\ \vdots \\ \bar{I}(N_T) \end{bmatrix}$$

$\bar{I}^*$  désignant le complexe conjugué.

$\bar{V}^T$  est le vecteur transposé de  $\bar{V}$ ,  $\bar{V}^T = (\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_{N_T})$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur  $\bar{V}$  s'écrit :

$$\bar{V} = \bar{V}' + j\bar{V}'' \quad (\text{II.2})$$

$$\text{sachant que } \bar{I} = \bar{Y}\bar{V} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{avec } Y = G + jB \quad (\text{II.4})$$

En remplaçant  $\bar{V}$  et  $\bar{I}$  dans (II.1) par (II.2), (II.3) et (II.4), on obtient

$$P_{Ls} = \text{Re}\left\{(\bar{V}' + j\bar{V}'')^T (G - jB)(\bar{V}' - j\bar{V}'')\right\} \quad (\text{II.5})$$

Puisque  $V'^T B V'$  est issue du développement de l'équation (II.5), c'est donc un scalaire et son transposé reste égal à lui-même:

$$V'^T B V' = (V'^T B V')^T$$

$$\text{d'où } V'^T B V' = V'^T B^T V'$$

Ainsi, on trouve après simplifications :

$$P_{Ls} = V'^T G V' + V''^T G V'' - V'^T (B - B^T) V'' \quad (\text{II.6})$$

Si on remplace dans (II.6) :  $G$  par  $G^{(1)} + G^{(2)}$  et  $B$  par  $B^{(1)} + B^{(2)}$

$$P_{Ls} = V'^T (G^{(1)} + G^{(2)}) V' + V''^T (G^{(1)} + G^{(2)}) V'' - V'^T (B^{(1)} + B^{(2)} - B^{(1)T} - B^{(2)T}) V''$$

Puisque on a  $G_{ij}^{(2)} = -G_{ji}^{(2)}$  pour  $i \neq j$

en en déduit que :  $V'^T G^{(2)} V' = \sum_{i=1}^{N_T} G^{(2)}(i,i) V'(i)^2$

et comme  $G^{(2)}(i,i) = 0 \quad \forall i$

il vient alors:

$$V'^T G^{(2)} V' = 0 \quad (\text{II.6.a})$$

De même 
$$V''^T G^{(2)} V'' = 0 \quad (\text{II.6.b})$$

$B^{(1)}$  est symétrique d'où 
$$B^{(1)} - B^{(1)T} = 0 \quad (\text{II.6.c})$$

$B^{(2)}$  est antisymétrique d'où : 
$$B^{(2)} - B^{(2)T} = 2B^{(2)} \quad (\text{II.6.d})$$

En remplaçant les équations (II.6.a), (II.6.b), (II.6.c), (II.6.d) dans l'équation (II.6) on obtient:

$$P_{L_0} = V'^T G^{(1)} V' + V''^T G^{(1)} V'' - 2V'^T B^{(2)} V'' \quad (\text{II.7})$$

L'équation (II.7) représente les pertes exactes du système. Comme on l'a déjà dit, la Formule Généralisée des Pertes est établie autour d'un point de fonctionnement. Il est donc très utile de déterminer les pertes correspondantes au cas de base, ainsi que celles conséquentes à une variation autour de ce point de fonctionnement (but de notre étude). Variation qui sera exprimée par les variables d'incrémentation :  $\Delta V'$ ,  $\Delta V''$  et  $\Delta t$ .

### II.3 Dérivation de la Formule des Pertes

La dérivation de la F.G.P est basée sur le développement en série de Taylor tronquée à l'ordre 2 [1][10] de l'équation (II.7), autour d'un point de fonctionnement (cas de base) :

Soit 
$$P_L(V', V'', t) = V'^T G^{(1)} V' + V''^T G^{(1)} V'' - 2V'^T B^{(2)} V''$$

La variation autour du cas de base est définie par :

$$\begin{cases} V' = V'_0 + \Delta V' \\ V'' = V''_0 + \Delta V'' \\ t = t_0 + \Delta t \end{cases}$$

L'indice '0' fait référence au cas de base.

Le développement en série de Taylor tronquée à l'ordre 2 nous donne :

$$\begin{aligned}
P_{L_e}(V', V'', t) = & P_{L_e}(V'_0, V''_0, t_0) + \Delta V' \frac{\partial P_L}{\partial V'} + \Delta V'' \frac{\partial P_L}{\partial V''} + \Delta t \frac{\partial P_L}{\partial t} + \\
& + \frac{1}{2} \Delta V'^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial V'^2} \Delta V' + \frac{1}{2} \Delta V'^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial V' \partial V''} \Delta V'' + \frac{1}{2} \Delta V'^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial V' \partial t} \Delta t + \\
& + \frac{1}{2} \Delta V''^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial V'' \partial V'} \Delta V' + \frac{1}{2} \Delta V''^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial V''^2} \Delta V'' + \frac{1}{2} \Delta V''^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial V'' \partial t} \Delta t + \\
& + \frac{1}{2} \Delta t^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial t \partial V'} \Delta V' + \frac{1}{2} \Delta t^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial t \partial V''} \Delta V'' + \frac{1}{2} \Delta t^T \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} \Delta t
\end{aligned} \tag{II.8}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
P_L = P_{L0} + & \begin{bmatrix} \frac{\partial P_L^T}{\partial V'} & \frac{\partial P_L^T}{\partial V''} & \frac{\partial P_L^T}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V' \\ \Delta V'' \\ \Delta t \end{bmatrix} + \\
& + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta V'^T & \Delta V''^T & \Delta t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_L}{\partial V'^2} & \frac{\partial^2 P_L}{\partial V' \partial V''} & \frac{\partial^2 P_L}{\partial V' \partial t} \\ \frac{\partial^2 P_L}{\partial V'' \partial V'} & \frac{\partial^2 P_L}{\partial V''^2} & \frac{\partial^2 P_L}{\partial V'' \partial t} \\ \frac{\partial^2 P_L}{\partial t \partial V'} & \frac{\partial^2 P_L}{\partial t \partial V''} & \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V' \\ \Delta V'' \\ \Delta t \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{II.9}$$

$P_{L0}$  : représente les pertes dans le cas de base :

$P_L$  : représente les pertes totales exactes ( $P_{L_e}$ ) tronquées à l'ordre 2 :

Sous une formulation simplifiée, on a :

$$P_L = P_{L0} + \begin{bmatrix} h_1^T & h_2^T & h_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V' \\ \Delta V'' \\ \Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta V'^T & \Delta V''^T & \Delta t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V' \\ \Delta V'' \\ \Delta t \end{bmatrix} \tag{II.10}$$

En considérant un réseau ayant M noeuds générateurs et N noeuds de charge et L transformateurs, on pourra établir les vecteurs  $h$  et les matrices Hessiennes  $H$  comme suit :

Le vecteur  $h_1^T$  est de dimension (M+N)

$$h_1 = \frac{\partial P_L}{\partial V'} = 2G^{(1)}V' - 2B^{(2)}V'' \tag{II.11}$$

Le vecteur  $h_2^T$  est de dimension (M+N)

$$h_2 = \frac{\partial P_L}{\partial V''} = 2G^{(1)}V'' - 2B^{(2)T}V' \quad (II.12)$$

Le vecteur  $h_3^T$  est de dimension (L), c'est la dérivée de la formule des pertes  $P_L$  par rapport à la prise de réglage du transformateur.

Comme le transformateur est connecté entre deux noeuds, via une ligne de transmission ou sans, alors le  $t^{(r)}$  n'apparaît que dans  $G^{(1)}$  (k,m) et  $B^{(2)}$  (k,m).

D'où on ne retient que le terme dérivable par rapport à  $t^{(r)}$  dans  $P_L$ .

De l'équation (II.7) et connaissant l'expression de  $G^{(1)}$  et  $B^{(2)}$  (Chapitre I), on a :

$$P_L = \begin{pmatrix} V'_1 & V'_2 & \dots & V'_k & \dots & V'_m & \dots & V'_{NT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(j)}g_{11} & \dots & K_1g_{1k} & \dots & K_1g_{1m} & \dots & K_1g_{1NT} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_1g_{k1} & \dots & K^{(j)}g_{kk} & \dots & K_1g_{km} & \dots & K_1g_{kNT} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ K_1g_{m1} & \dots & K_1g_{mk} & \dots & K^{(j)}g_{mm} & \dots & K_1g_{mNT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1g_{NT1} & \dots & K_1g_{NTk} & \dots & K_1g_{NTm} & \dots & K^{(j)}g_{NTNT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V'_1 \\ V'_2 \\ \vdots \\ V'_k \\ \vdots \\ V'_m \\ \vdots \\ V'_{NT} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} V''_1 & V''_2 & \dots & V''_k & \dots & V''_m & \dots & V''_{NT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^{(j)}g_{11} & \dots & K_1g_{1k} & \dots & K_1g_{1m} & \dots & K_1g_{1NT} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_1g_{k1} & \dots & K^{(j)}g_{kk} & \dots & K_1g_{km} & \dots & K_1g_{kNT} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ K_1g_{m1} & \dots & K_1g_{mk} & \dots & K^{(j)}g_{mm} & \dots & K_1g_{mNT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_1g_{NT1} & \dots & K_1g_{NTk} & \dots & K_1g_{NTm} & \dots & K^{(j)}g_{NTNT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V''_1 \\ V''_2 \\ \vdots \\ V''_k \\ \vdots \\ V''_m \\ \vdots \\ V''_{NT} \end{pmatrix}$$

$$- 2 \begin{pmatrix} V'_1 & V'_2 & \dots & V'_k & \dots & V'_m & \dots & V'_{NT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \dots & -K_2b_{1k} & \dots & -K_2b_{1m} & \dots & -K_2b_{1NT} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_2b_{k1} & \dots & 0 & \dots & -K_2b_{km} & \dots & -K_2b_{kNT} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ K_2b_{m1} & \dots & K_2b_{mk} & \dots & 0 & \dots & -K_2b_{mNT} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_2b_{NT1} & \dots & K_2b_{NTk} & \dots & K_2b_{NTm} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V''_1 \\ V''_2 \\ \vdots \\ V''_k \\ \vdots \\ V''_m \\ \vdots \\ V''_{NT} \end{pmatrix}$$

La dérivée de l'expression précédente par rapport à  $t^{(r)}$ , revient à dériver l'expression :

$$2K_1g_{ij} (V_i V'_j + V'_i V''_j) + (V_i'^2 + V''_i'^2) K^{(j)}g_{iw} + (V_j'^2 + V''_j'^2) K^{(j)}g_{jj} + 2K_2g_{jw} (V_i V''_j - V'_j V''_i) \quad (II.13)$$

La dérivée des autres termes étant nulle (ils sont indépendants de  $t^{(r)}$ )

Il a été vu précédemment que :

$$\frac{\partial K_1}{\partial t^{(r)}} = k_R^{(r)} + (k_R^{(r)} k_R^{(S)} + k_i^{(r)} k_i^{(S)}) t^{(S)} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial K_2}{\partial t^{(r)}} = k_i^{(r)} + (k_i^{(r)} k_R^{(S)} - k_i^{(S)} k_R^{(r)}) t^{(S)} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{\partial K^{(j)}}{\partial t^{(j)}} = 2k_R^{(j)} + 2(k_R^{(j)^2} + k_i^{(j)^2}) t^{(j)} \quad (\text{II.16})$$

d'où :

$$\begin{aligned} h_3(r) = \frac{\partial P_L}{\partial t^{(r)}} = & 2g_{iv}^{(r)} \left[ k_R^{(r)} + (k_R^{(r)^2} + k_i^{(r)^2}) t^{(r)} \right] (V_i'^2 + V_i''^2) \\ & + 2g_{ij}^{(r)} \left[ k_R^{(r)} + (k_R^{(r)} k_R^{(S)} + k_i^{(r)} k_i^{(S)}) t^{(S)} \right] (V_i' V_j' + V_i'' V_j'') \\ & + 2g_{ij}^{(r)} \left[ k_i^{(r)} + (k_i^{(r)} k_R^{(S)} - k_i^{(S)} k_R^{(r)}) t^{(S)} \right] (V_i' V_j' - V_i'' V_j'') \\ & + 2g_{ij}^{(r)} \left[ k_R^{(r)} + (k_R^{(r)^2} + k_i^{(r)^2}) t^{(r)} \right] (V_j'^2 + V_j''^2) \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$(r = 1, 2, \dots, L)$$

La matrice  $H_{11}$  est de dimension  $(M+N \times M+N)$

$$H_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V'^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V'} \left[ \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V'} \right] = G^{(1)} \quad (\text{II.18})$$

La matrice  $H_{22}$  est de dimension  $(M+N \times M+N)$

$$H_{22} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V''^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V''} \left[ \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V''} \right] = G^{(1)} \quad (\text{II.19})$$

La matrice  $H_{12}$  est de dimension  $(M+N \times M+N)$

$$H_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V''} \left[ \frac{\partial P_{Ls}}{\partial V'} \right] = -B^{(2)} \quad (\text{II.20})$$

La matrice  $H_{21}$  est de dimension  $(M+N \times M+N)$

$$H_{21} = H_{12}^T = -B^{(2)T} \quad (\text{II.21})$$

La matrice  $H_{31}$ , de dimension  $(L \times M+N)$ , est la dérivée du vecteur  $h_3$  par rapport au vecteur  $V'$ .

Comme chaque élément de  $h_3$  est décrit en fonction des tensions des noeuds de connexion du transformateur correspondant, on calculera les sous matrices  $H_{31}(ri)$ ,  $H_{31}(r,j)$ , tels que :

$r$  : numéro du transformateur

$i, j$  : les connexions du  $r^{\text{ème}}$  transformateur

$$\begin{aligned}
 H_{31}(r,i) &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_3(r)}{\partial V'_i} = 2g_{iv'} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)2} + k_i^{(r)2} \right) t^{(r)} \right] V'_i \\
 &\quad + g_{ij'} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_i^{(r)} k_i^{(s)} \right) t^{(s)} \right] V'_j \\
 &\quad + g_{ij''} \left[ k_i^{(r)} + \left( k_i^{(r)} k_R^{(s)} - k_i^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right] V''_j
 \end{aligned} \tag{II.22}$$

$$\begin{aligned}
 H_{31}(r,j) &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_3(r)}{\partial V'_j} = g_{iv'} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_i^{(r)} k_i^{(s)} \right) t^{(s)} \right] V'_i \\
 &\quad - g_{ij'} \left[ k_i^{(r)} + \left( k_i^{(r)} k_R^{(s)} - k_i^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right] V'_j \\
 &\quad + 2g_{ij''} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)2} + k_i^{(r)2} \right) t^{(r)} \right] V''_j
 \end{aligned} \tag{II.23}$$

Les autres éléments de la matrice  $H_{31}$  sont nuls.

$H_{32}$  est une matrice de dimension  $(L \times M+N)$ , le calcul de ses éléments se fait de manière analogue à celle des éléments de la matrice  $H_{31}$ .

$$\begin{aligned}
 H_{32}(r,i) &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_3(r)}{\partial V''_i} = 2g_{iv''} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)2} + k_i^{(r)2} \right) t^{(r)} \right] V''_i \\
 &\quad + g_{ij'} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_i^{(r)} k_i^{(s)} \right) t^{(s)} \right] V'_j \\
 &\quad - g_{ij''} \left[ k_i^{(r)} + \left( k_i^{(r)} k_R^{(s)} - k_i^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right] V''_j
 \end{aligned} \tag{II.24}$$

$$\begin{aligned}
 H_{32}(r,j) &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_3(r)}{\partial V''_j} = g_{iv'} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_i^{(r)} k_i^{(s)} \right) t^{(s)} \right] V'_i \\
 &\quad + g_{ij'} \left[ k_i^{(r)} + \left( k_i^{(r)} k_R^{(s)} - k_i^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right] V'_j \\
 &\quad + 2g_{ij''} \left[ k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)2} + k_i^{(r)2} \right) t^{(r)} \right] V''_j
 \end{aligned} \tag{II.25}$$

Les autres éléments de la matrice  $H_{32}$  sont nuls.

$H_{13}$  est une matrice de dimension  $(M+N \text{ par } L)$

$$H_{13} = H_{31}^T$$

$H_{23}$  est une matrice de dimension  $(M+N \text{ par } L)$

$$H_{23} = H_{32}^T$$

$H_{33}$  est une matrice de dimension  $(L \text{ par } L)$ . C'est la dérivée du vecteur  $h_3$  par rapport au vecteur  $t$ . L'expression du vecteur  $h_3(r)$  n'étant fonction que du  $t^{(r)}$  et  $t^{(s)}$  (tel que  $(r)$  et  $(s)$  sont les numéros des deux transformateurs qui sont connectés sur la même ligne), on calculera  $h_{33}(r,s)$  et  $h_{33}(r,r)$  :

$$H_{33}(r,s) = \frac{1}{2} \frac{\partial h_3(r)}{\partial t^{(s)}} = g_{ij} (k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)}) (V_i' V_j' + V_i'' V_j'') + g_{ij} (k_I^{(r)} k_R^{(s)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)}) (V_i' V_j'' - V_j' V_i'') \quad (\text{II.26})$$

$$H_{33}(r,r) = \frac{1}{2} \frac{\partial h_3(r)}{\partial t^{(r)}} = g_{iR} (k_R^{(r)2} + k_I^{(r)2}) (V_i'^2 + V_i''^2) + g_{jI} (k_R^{(r)2} + k_I^{(r)2}) (V_j'^2 + V_j''^2) \quad (\text{II.27})$$

Les autres termes de la matrice  $H_{33}$  sont nuls.

Pour le cas de base, toutes les prises de réglage sont mises à zéro ( $t = 0$ ). Ainsi, pour ce cas on définit  $G^{(0)}$  comme étant la matrice conductance.  $V_0'$  et  $V_0''$ , sont respectivement, la partie réelle et imaginaire de la tension de base.

Dans ce cas (voir chapitre précédent), la matrice  $B^{(2)}$  sera nulle (car  $k_2 = 0$ ).

Certains vecteurs et matrices entrant dans le développement de  $P_L$  en série de Taylor se simplifient et deviennent :

- $h_1 = 2G^{(0)} V_0'$
- $h_2 = 2G^{(0)} V_0''$
- $h_3(r) = 2g_{iR}^{(r)} k_R^{(r)} (V_{i0}'^2 + V_{i0}''^2) + 2g_{iI}^{(r)} k_R^{(r)} (V_{i0}' V_{i0}'' + V_{i0}'' V_{i0}') + 2g_{jI}^{(r)} k_I^{(r)} (V_{j0}' V_{j0}'' - V_{j0}'' V_{j0}') + 2g_{jR}^{(r)} k_I^{(r)} (V_{j0}'^2 + V_{j0}''^2)$

- $H_{11} = H_{22} = G^{(0)}$
- $H_{12} = H_{21} = 0$
- $H_{31}(r, i) = 2g_{i\bar{v}}^{(r)}k_R^{(r)}V_{i0}' + g_{i\bar{v}}k_R^{(r)}V_{j0}' + g_{i\bar{v}}k_l^{(r)}V_{j0}''$
- $H_{31}(r, j) = g_{i\bar{v}}k_R^{(r)}V_{i0}' - g_{i\bar{v}}k_l^{(r)}V_{i0}'' + 2g_{j\bar{v}}^{(r)}k_R^{(r)}V_{j0}'$
- $H_{32}(r, i) = 2g_{i\bar{v}}^{(r)}k_R^{(r)}V_{i0}'' + g_{i\bar{v}}k_R^{(r)}V_{j0}' - g_{i\bar{v}}k_l^{(r)}V_{j0}'$
- $H_{32}(r, j) = g_{i\bar{v}}k_R^{(r)}V_{i0}'' + g_{i\bar{v}}k_l^{(r)}V_{i0}' + 2g_{j\bar{v}}^{(r)}k_R^{(r)}V_{j0}''$

Nous en concluons qu'en remplaçant :  $H_{13}$  par  $H_{31}^T$   
 et  $H_{23}$  par  $H_{32}^T$   
 $H_{12} = H_{21} = 0$

dans l'équation (II.10):

$$P_L = P_{L0} + \begin{bmatrix} h_1^T & h_2^T & h_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V' \\ \Delta V'' \\ \Delta t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta V'^T & \Delta V''^T & \Delta t^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{31}^T \\ 0 & H_{22} & H_{32}^T \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V' \\ \Delta V'' \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

En développant l'équation (II.28)

et sachant que  $\Delta V'^T H_{13} \Delta t = \Delta t^T H_{31} \Delta V'$

$$\Delta V''^T H_{23} \Delta t = \Delta t^T H_{32} \Delta V''$$

On obtient :

$$P_L = P_{L0} + h_1^T \Delta V' + h_2^T \Delta V'' + h_3^T \Delta t + \Delta V'^T H_{11} \Delta V' + \Delta V''^T H_{22} \Delta V'' + 2\Delta t^T H_{31} \Delta V' + 2\Delta t^T H_{32} \Delta V'' + \Delta t^T H_{33} \Delta t \quad (\text{II.29})$$

### II.3.1 Passage aux coordonnées polaires

Dans l'étude des réseaux électriques, il est parfois plus commode de représenter les variables complexes en coordonnées polaires. Ce système présente des avantages considérables par rapport aux coordonnées cartésiennes du fait de certaines simplifications apportées.



Nous avons pour un noeud spécifié  $k$  :  $\bar{V}_k = V'_k + jV''_k = V_k \angle \theta_k$

$$\text{tel que : } \begin{cases} V'_k = V_k \cos \theta_k \\ V''_k = V_k \sin \theta_k \end{cases} \quad (\text{II.30})$$

$V$  : vecteur des modules des tensions.

$\theta$  : vecteur d'arguments des tensions.

On définit les variables d'incrémentation  $\Delta V'_k$  et  $\Delta V''_k$  comme suit :

$$\begin{cases} \Delta V'_k = \cos \theta_k \Delta V_k - V_k \sin \theta_k \Delta \theta_k \\ \Delta V''_k = \sin \theta_k \Delta V_k + V_k \cos \theta_k \Delta \theta_k \\ k = 1, \dots, N_T \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Sous forme matricielle (II.31) s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta V' = D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta \\ \Delta V'' = D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

$D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et  $D_4$  sont des matrices carrées diagonales de dimension ( $N_T \times N_T$ ) :

$$\begin{cases} D_1(i,i) = \cos \theta_i \\ D_2(i,i) = -V_i \sin \theta_i \\ D_3(i,i) = \sin \theta_i \\ D_4(i,i) = V_i \cos \theta_i \\ i = 1, \dots, N_T \end{cases} \quad (\text{II.33})$$

On remplace (II.32) dans (II.29), il vient :

$$\begin{aligned} P_L = P_{L0} + h_1^T (D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta) + h_2^T (D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta) + h_3^T \Delta t \\ + (D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta)^T H_{11} (D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta) + (D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta)^T H_{22} (D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta) \\ + 2 \Delta t^T H_{31} (D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta) + 2 \Delta t^T H_{32} (D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta) + \Delta t^T H_{33} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Comme nous avons :

$$\begin{aligned} (D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta)^T H_{11} (D_1 \Delta V + D_2 \Delta \theta) = \Delta V^T D_1^T H_{11} D_1 \Delta V + \Delta V^T D_1^T H_{11} D_2 \Delta \theta \\ + \Delta \theta^T D_2^T H_{11} D_1 \Delta V + \Delta \theta^T D_2^T H_{11} D_2 \Delta \theta \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta)^T H_{22} (D_3 \Delta V + D_4 \Delta \theta) &= \Delta V^T D_3^T H_{22} D_3 \Delta V + \Delta V^T D_3^T H_{22} D_4 \Delta \theta \\ &\quad + \Delta \theta^T D_4^T H_{22} D_3 \Delta V + \Delta \theta^T D_4^T H_{22} D_4 \Delta \theta \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P_L &= P_{L0} + (h_1^T D_1 + h_2^T D_3) \Delta V + (h_1^T D_2 + h_2^T D_4) \Delta \theta + h_3^T \Delta t \\ &\quad + \Delta V^T (D_1^T H_{11} D_1 + D_3^T H_{22} D_3) \Delta V + \Delta \theta^T (D_2^T H_{11} D_2 + D_4^T H_{22} D_4) \Delta \theta \\ &\quad + 2 \Delta \theta^T (D_2^T H_{11} D_1 + D_4^T H_{22} D_3) \Delta V + 2 \Delta t^T (H_{31} D_1 + H_{32} D_3) \Delta V \\ &\quad + 2 \Delta t^T (H_{31} D_2 + H_{32} D_4) \Delta \theta + \Delta t^T H_{33} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Afin d'alléger les expressions qui suivent, nous allons remplacer quelques termes de l'équation (II.35) par :

$$\bullet f_1^T = h_1^T D_1 + h_2^T D_3 \quad (\text{II.36.a})$$

$$\bullet f_2^T = h_1^T D_2 + h_2^T D_4 \quad (\text{II.36.b})$$

$$\bullet F_1 = D_1^T H_{11} D_1 + D_3^T H_{22} D_3 \quad (\text{II.37})$$

$$\bullet F_2 = D_2^T H_{11} D_2 + D_4^T H_{22} D_4 \quad (\text{II.38})$$

$$\bullet F_3 = 2(D_2^T H_{11} D_1 + D_4^T H_{22} D_3) \quad (\text{II.39})$$

$$\bullet F_4 = 2(H_{31} D_1 + H_{32} D_3) \quad (\text{II.40})$$

$$\bullet F_5 = 2(H_{31} D_2 + H_{32} D_4) \quad (\text{II.41})$$

D'où

$$\begin{aligned} P_L &= P_{L0} + f_1^T \Delta V + f_2^T \Delta \theta + h_3^T \Delta t + \Delta V^T F_1 \Delta V + \Delta \theta^T F_2 \Delta \theta \\ &\quad + \Delta \theta^T F_3 \Delta V + \Delta t^T F_4 \Delta V + \Delta t^T F_5 \Delta \theta + \Delta t^T H_{33} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

L'équation (II.42) représente la **formule des pertes en coordonnées polaires**.

Comme notre but est de déterminer la F.G.P, on doit pouvoir agir sur les pertes en faisant varier les paramètres  $P_g$ ,  $V_g$  et  $t$ . Pour ce faire, il faut différencier dans l'équation (II.42) entre les noeuds générateurs (indice  $g$ ) et noeuds de charge (indice  $\ell$ ).

$$V = \begin{bmatrix} V_g \\ V_\ell \end{bmatrix} \begin{matrix} M \\ N \end{matrix}$$

Par linéarité, on peut écrire :

$$\Delta V = \begin{bmatrix} \Delta V_g \\ \Delta V_\ell \end{bmatrix} \begin{matrix} M \\ N \end{matrix} \quad (\text{II.43})$$

Les noeuds générateurs sont contrôlables à l'aide des transformateurs, on agit ainsi sur  $\Delta V$ , donc sur  $V_g$ .

Dans (II.42) tous les coefficients (qui sont des vecteurs ou matrices) de  $V$  seront l'objet d'une nouvelle répartition :

$f_1^T$  : sera subdivisé en deux sous-vecteurs.

Le premier correspond aux  $\Delta V_g$  et le second aux  $\Delta V_\ell$

$$\bullet f_1^T = \begin{bmatrix} M & N \\ f_{1g}^T & f_{1\ell}^T \end{bmatrix} \quad (\text{II.44})$$

De même pour les matrices  $F_1$ ,  $F_3$ ,  $F_4$ ; tandis que  $F_2$ ,  $F_5$ ,  $H_{33}$ ,  $f_2^T$  et  $h_3^T$  ne nécessitent pas de subdivisions.

$$\bullet F_1 = \begin{bmatrix} M & N \\ F_{1gg} & F_{1g\ell} \\ F_{1\ell g} & F_{1\ell\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

$$\bullet F_3 = \begin{bmatrix} M & N \\ F_{3g} & F_{3\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

$$\bullet F_4 = \begin{bmatrix} M & N \\ F_{4g} & F_{4\ell} \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

On injecte les équations (II.44), (II.45), (II.46) et (II.47) dans (II.42); ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_L = & P_{L0} + f_{1g}^T \Delta V_g + f_{1\ell}^T \Delta V_\ell + f_2^T \Delta \theta + h_3^T \Delta t + \Delta V_g^T F_{1gg} \Delta V_g + \Delta V_g^T F_{1g\ell} \Delta V_\ell \\ & + \Delta V_\ell^T F_{1\ell\ell} \Delta V_\ell + \Delta \theta^T F_2 \Delta \theta + \Delta \theta^T F_{3g} \Delta V_g + \Delta \theta^T F_{3\ell} \Delta V_\ell + \Delta t^T F_{4g} \Delta V_g \\ & + \Delta t^T F_{4\ell} \Delta V_\ell + \Delta t^T F_5 \Delta \theta + \Delta t^T H_{33} \Delta t \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

L'équation (II.48) est fonction des variables  $\Delta V_g$ ,  $\Delta V_l$ ,  $\Delta t$  et  $\Delta \theta$ . Deux d'entre elles sont contrôlables ( $\Delta V_g$  et  $\Delta t$ ), par contre les deux autres nous sont imposées par le consommateur (amplitude demandée et nature de la charge).

Afin d'aboutir à une formule généralisée des pertes ayant uniquement comme variables, les variables de contrôle, on est amené à déterminer le vecteur  $[\Delta V_l \ \Delta \theta]^T$ , ce dernier sera fonction des variables de contrôles  $\Delta(P/V)_g$ ,  $\Delta V_g$  et  $\Delta t$ .

### II.4 Détermination du vecteur $[V_l \ \theta]^T$

La prochaine étape de notre travail est la linéarisation des équations du réseau et la détermination du vecteur  $[\Delta V_l \ \Delta \theta]^T$ . Pour cela, on fait appel à la méthode de Newton-Raphson (N-R). [1][2][3][4][5][6]

En appliquant le principe de Newton-Raphson, on déterminera les variables  $V_l$  et  $\theta$ ; Notre but étant de les déterminer en fonction des variables de contrôle  $[P_g, V_g, t]$  afin d'aboutir à une expression de la F.G.P ayant comme variables, les variables de contrôle. Et par suite, on aura la possibilité de contrôler les pertes tout en agissant sur les transformateurs pour ajuster  $[V$  et  $t]$ , ou sur l'excitation des turboalternateurs pour faire varier  $P_g$ .

Le système d'équations à résoudre est donné par :

$$\begin{matrix} M \\ N \\ N \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta(P/V)_g \\ \Delta(P/V)_l \\ \Delta(Q/V)_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 \\ J_5 & J_6 & J_7 & J_8 \\ J_9 & J_{10} & J_{11} & J_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V_g \\ \Delta V_l \\ \Delta t \end{bmatrix} \begin{matrix} M+N-1 \\ M \\ N \\ L \end{matrix} \quad (II.49)$$

Dans le sous-vecteur  $\Delta \theta$ , le  $\Delta \theta_1$  correspondant au slack bus *n* apparaît pas (d'où le  $(M+N-1)$ ), car on maintient  $\theta_1 = 0$ .

Les éléments  $J_1, J_2, \dots, J_{12}$  sont des sous-matrices qui définissent la matrice Jacobienne. Elles ont les expressions suivantes :

- $J_1 (M \times M+N-1), \quad 1 < i < M$   
 $\quad \quad \quad 2 < j < M+N$

$$\begin{cases} J_1(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_i}{\partial \theta_j} = V_j (G_{\bar{v}} \sin \theta_{\bar{v}} - B_{\bar{v}} \cos \theta_{\bar{v}}) \\ J_1(i, i) = \frac{\partial \Delta(P/V)_i}{\partial \theta_i} = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{M+N} V_j (-G_{\bar{v}} \sin \theta_{\bar{v}} + B_{\bar{v}} \cos \theta_{\bar{v}}) \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

- $J_2 (M \times M)$ ,  $1 < i < M$   
 $1 < j < M$

$$\begin{cases} J_2(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{e^i}}{\partial V_{e^j}} = G_{\bar{v}} \cos \theta_{\bar{v}} + B_{\bar{v}} \sin \theta_{\bar{v}} \\ J_2(i, i) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{e^i}}{\partial V_{e^j}} = G_{\bar{u}} \end{cases} \quad (\text{II.51})$$

- $J_3 (M \times N)$ ,  $1 < i < M$   
 $M+1 < j < M+N$

$$\begin{cases} J_3(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{e^i}}{\partial V_{e^j}} = G_{\bar{v}} \cos \theta_{\bar{v}} + B_{\bar{v}} \sin \theta_{\bar{v}} \\ J_3(i, i) = G_{\bar{u}} \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

- $J_5 (N \times M+N-1)$ ,  $M+1 < i < M+N$   
 $2 < j < M+N$

$$\begin{cases} J_5(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{e^i}}{\partial \theta_j} = V_j (G_{\bar{v}} \sin \theta_{\bar{v}} - B_{\bar{v}} \cos \theta_{\bar{v}}) \\ J_5(i, i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_T} V_k (-G_{\bar{\alpha}} \sin \theta_{\bar{\alpha}} + B_{\bar{\alpha}} \cos \theta_{\bar{\alpha}}) \end{cases} \quad (\text{II.53})$$

- $J_6 (N \times M)$ ,  $M+1 < i < M+N$   
 $1 < j < M$

$$J_6(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_i}{\partial V_B} = G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij} \quad (\text{II.54})$$

- $J_7 (N \times N)$ ,  $M+1 < i < M+N$   
 $1 < j < N$

$$\begin{cases} J_7(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{ti}}{\partial V_{\theta_j}} = G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij} \\ J_7(i, i) = G_{ii} \end{cases} \quad (\text{II.55})$$

- $J_9 (N \times M+N-1)$ ,  $M+1 < i < M+N$   
 $2 < j < M+N$

$$\begin{cases} J_9(i, j) = \frac{\partial \Delta(Q/V)_{ti}}{\partial \theta_j} = V_i \{-G_{ij} \cos \theta_{ij} - B_{ij} \sin \theta_{ij}\} \\ J_9(i, i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_T} V_k (G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}) \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

- $J_{10} (N \times M)$ ,  $M+1 < i < N+M$   
 $1 < j < M$

$$J_{10}(i, j) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{ti}}{\partial V_B} = G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij} \quad (\text{II.57})$$

- $J_{11} (N \times N)$ ,  $M+1 < i < M+N$   
 $M+1 < j < M+N$

$$\begin{cases} J_{11}(i, j) = \frac{\partial \Delta(Q/V)_{ti}}{\partial V_{\theta_j}} = G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij} \\ J_{11}(i, i) = -B_{ii} \end{cases} \quad (\text{II.58})$$

La dérivation de  $(P/V)_k$  et  $(Q/V)_k$  par rapport à  $t^{(r)}$  (pour évaluer les matrices  $J_1, J_8, J_{12}$ ) revient à dériver  $G_{km}$ ,  $B_{km}$ ,  $G_{kk}$  et  $B_{kk}$  par rapport à  $t^{(r)}$ , car pour un transformateur qui est connecté entre les noeuds  $k$  et  $m$ , le  $t^{(r)}$  n'apparaît que dans les

expressions de:  $G_{km}$  et  $B_{km}$ , ainsi que dans  $G_{kk}$  et  $B_{kk}$ , au niveau de  $k_1, k_2, k^0$ . (voir construction de  $Y$  dans le chapitre précédent), d'où les expressions suivantes :

$$J_4(k, r) = \frac{\partial \Delta(P/V)_k}{\partial t^{(r)}} = V_j \left( \frac{\partial G_{km}}{\partial t^{(r)}} \cos \theta_{km} + \frac{\partial B_{km}}{\partial t^{(r)}} \sin \theta_{km} + \frac{\partial G_{kk}}{\partial t^{(r)}} \right) \quad (\text{II.59.a})$$

$$\frac{\partial G_{km}}{\partial t^{(r)}} = \frac{\partial}{\partial t^{(r)}} (G_{km}^{(1)} + G_{km}^{(2)})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I < J \\ \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(r)}} = \left( k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(s)} \right) g_{iy} + \left( k_I^{(r)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right) b_{iy} \\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(r)}} = \left( k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(s)} \right) b_{iy} - \left( k_I^{(r)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right) g_{iy} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I > J \\ \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(r)}} = \left( k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(s)} \right) g_{iy} - \left( k_I^{(r)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right) b_{iy} \\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(r)}} = \left( k_R^{(r)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(s)} \right) b_{iy} + \left( k_I^{(r)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right) g_{iy} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_{ii}}{\partial t^{(r)}} = \left( 2k_R^{(r)} + 2 \left( k_R^{(r)2} + k_I^{(r)2} \right) t^{(r)} \right) g_{ii} \\ \frac{\partial B_{ii}}{\partial t^{(r)}} = \left( 2k_R^{(r)} + 2 \left( k_R^{(r)2} + k_I^{(r)2} \right) t^{(r)} \right) b_{ii} \end{array} \right.$$

de même, on évalue l'expression de

$$J_4(i, s) = \frac{\partial \Delta(P/V)_i}{\partial t^{(s)}} = V_j \left( \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(s)}} \cos \theta_{ij} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(s)}} \sin \theta_{ij} \right) \quad (\text{II.59.b})$$

tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} I < J \\ \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(s)}} = \left( k_R^{(s)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(r)} \right) g_{ij} + \left( -k_I^{(s)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right) b_{ij} \\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(s)}} = \left( k_R^{(s)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(r)} \right) b_{ij} - \left( -k_I^{(s)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(r)} \right) g_{ij} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I > J \\ \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(s)}} = \left( k_R^{(s)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(r)} \right) g_{ij} - \left( -k_I^{(s)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(s)} \right) b_{ij} \\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(s)}} = \left( k_R^{(s)} + \left( k_R^{(r)} k_R^{(s)} + k_I^{(r)} k_I^{(s)} \right) t^{(r)} \right) b_{ij} + \left( -k_I^{(s)} + \left( k_R^{(s)} k_I^{(r)} - k_I^{(s)} k_R^{(r)} \right) t^{(r)} \right) g_{ij} \end{array} \right.$$

De la même manière, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_8(t, r) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{ti}}{\partial t^{(r)}} = V_j \left( \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(r)}} \cos \theta_{ij} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(r)}} \sin \theta_{ij} + \frac{\partial G_{ii}}{\partial t^{(r)}} \right) \\ J_8(t, s) = \frac{\partial \Delta(P/V)_{ti}}{\partial t^{(s)}} = V_j \left( \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(s)}} \cos \theta_{ij} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(s)}} \sin \theta_{ij} \right) \\ 1 \leq i \leq N \end{array} \right. \quad (II.60)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{12}(t, r) = \frac{\partial (Q/V)_{ij}}{\partial t^{(r)}} = V_j \left( \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(r)}} \sin \theta_{ij} - \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(r)}} \cos \theta_{ij} - \frac{\partial B_{ii}}{\partial t^{(r)}} \right) \\ J_{12}(t, s) = \frac{\partial (Q/V)_{ij}}{\partial t^{(s)}} = V_j \left( \frac{\partial G_{ij}}{\partial t^{(s)}} \sin \theta_{ij} - \frac{\partial B_{ij}}{\partial t^{(s)}} \cos \theta_{ij} \right) \\ 1 \leq i \leq N \end{array} \right. \quad (II.61)$$

On définit les variables d'incrémentations  $\Delta(P/V)$  et  $\Delta(Q/V)$  comme étant la différence entre les puissances spécifiées et les puissances calculées.



$$\begin{cases} \Delta(P/V) = (P/V)_{sp\acute{e}cif\acute{e}} - (P/V)_{calcul\acute{e}} \\ \Delta(Q/V) = (Q/V)_{sp\acute{e}cif\acute{e}} - (Q/V)_{calcul\acute{e}} \end{cases} \quad (II.62)$$

A noter que dans l'équation (II.49), on a pris  $(P/V)$ ,  $(Q/V)$  à la place de  $P$  et  $Q$  pour mieux linéariser les équations du réseau.

Dans l'équation (II.49), la matrice Jacobienne n'est pas carrée  $((M+2N) \times (2M+2N+L-1))$ , donc non-inversible. Pour surmonter ce problème, nous avons recours à un artifice de calcul. On procède comme suit : [1]

L'équation (II.49) s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta(P/V)_g = J_1\Delta\theta + J_2\Delta V_g + J_3\Delta V_\ell + J_4\Delta t \\ \Delta(P/V)_\ell = J_5\Delta\theta + J_6\Delta V_g + J_7\Delta V_\ell + J_8\Delta t \\ \Delta(Q/V)_\ell = J_9\Delta\theta + J_{10}\Delta V_g + J_{11}\Delta V_\ell + J_{12}\Delta t \end{cases} \quad (II.63)$$

En faisant la séparation entre les variables de contrôle  $\Delta(P/V)_g$ ,  $\Delta V_g$ ,  $\Delta t$  et les variables à déterminer  $\Delta\theta$  et  $\Delta V_\ell$ , l'équation (II.63) devient :

$$\begin{cases} J_1\Delta\theta + J_3\Delta V_\ell = \Delta(P/V)_g - J_2\Delta V_g - J_4\Delta t \\ J_5\Delta\theta + J_7\Delta V_\ell = \Delta(P/V)_\ell - J_6\Delta V_g - J_8\Delta t \\ J_9\Delta\theta + J_{11}\Delta V_\ell = \Delta(Q/V)_\ell - J_{10}\Delta V_g - J_{12}\Delta t \end{cases} \quad (II.64)$$

Pour une charge cohérente, c.à.d que  $\Delta(P/V)_\ell$  et  $\Delta(Q/V)_\ell$  varient proportionnellement avec la puissance totale demandée par le système ( $P_{T\ell}$ ),

$$P_{T\ell} = \sum P_\ell$$

Et donc on peut mettre  $\Delta(P/V)_\ell$  et  $\Delta(Q/V)_\ell$  sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta(P/V)_k = \alpha_{0k} + \alpha_k \Delta P_{T\ell} \\ \Delta(Q/V)_k = \beta_{0k} + \beta_k \Delta P_{T\ell} \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des vecteurs de  $N$  éléments.

Les coefficients  $\alpha_{0k}$  et  $\beta_{0k}$  permettent d'améliorer la linéarité entre la variation de la charge au niveau d'un noeud par rapport à la charge totale du réseau. On note aussi que si  $P_{TT} = 0$  et  $\Delta(P/V)_\ell = \Delta(Q/V)_\ell = 0$ , ce cas ne peut être obtenu que pour  $\alpha_{0k} = \beta_{0k} = 0$ .

Ainsi, notre modèle se réduit à:

$$\begin{cases} \Delta(P/V)_\ell = \alpha \Delta P_{TT} \\ \Delta(Q/V)_\ell = \beta \Delta P_{TT} \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

Connaissant  $P_\ell$ ,  $V_\ell$ ,  $Q$ , on détermine  $\alpha$  et  $\beta$ , en remplaçant (II.65) dans (II.64), il vient :

$$\begin{cases} J_1 \Delta\theta + J_3 \Delta V_\ell = \Delta(P/V)_g - J_2 \Delta V_g - J_4 \Delta t \\ J_5 \Delta\theta + J_7 \Delta V_\ell = \alpha P_{TT} - J_6 \Delta V_g - J_8 \Delta t \\ J_9 \Delta\theta + J_{11} \Delta V_\ell = \beta P_\ell - J_{10} \Delta V_g - J_{12} \Delta t \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

En faisant un arrangement adéquat, on peut avoir la représentation matricielle suivante du système :

$$\begin{matrix} M+N-1 & N & 1 \\ N & \begin{bmatrix} J_9 & J_{11} & -\beta \end{bmatrix} \\ M & \begin{bmatrix} J_1 & J_3 & 0 \end{bmatrix} \\ N & \begin{bmatrix} J_5 & J_7 & -\alpha \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V_\ell \\ \Delta P_{TT} \end{bmatrix} = \begin{matrix} M & M & L \\ N & \begin{bmatrix} 0 & -J_{10} & -J_{12} \\ I & -J_2 & -J_4 \\ 0 & -J_6 & -J_8 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} \Delta(P/V)_g \\ \Delta V_g \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{II.67})$$

où  $I$  est la matrice identité.

En effet, cet artifice mathématique permet d'obtenir le vecteur  $[\Delta\theta \quad \Delta V_\ell \quad \Delta P_{TT}]^T$  :

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V_\ell \\ \Delta P_{TT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_9 & J_{11} & -\beta \\ J_1 & J_3 & 0 \\ J_5 & J_7 & -\alpha \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -J_{10} & -J_{12} \\ I & -J_2 & -J_4 \\ 0 & -J_6 & -J_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(P/V)_g \\ \Delta V_g \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{II.68})$$

Soit :

$$A = \begin{bmatrix} J_9 & J_{11} & -\beta \\ J_1 & J_3 & 0 \\ J_5 & J_7 & -\alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{J}_{10} & \mathcal{J}_{12} \\ I & \mathcal{J}_2 & \mathcal{J}_4 \\ 0 & \mathcal{J}_6 & \mathcal{J}_8 \end{bmatrix}$$

tel que

$$A = \begin{matrix} & M & N & L \\ M+N-1 & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Le système (II.68) devient donc

:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V_\ell \\ \Delta P_{\ell T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_4 & A_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(P/V)_g \\ \Delta V_g \\ \Delta t \end{bmatrix} \quad (\text{II.69})$$

d'où :

$$\begin{cases} \Delta\theta = A_1 \Delta(P/V)_g + A_2 \Delta V_g + A_3 \Delta t \\ \Delta V_\ell = A_3 \Delta(P/V)_g + A_4 \Delta V_g + A_6 \Delta t \end{cases} \quad (\text{II.70})$$

En substituant l'équation (II.70) dans (II.48), on aura la F.G.P décrite en fonction des variables de contrôles comme suit :

$$\begin{aligned} P_L &= P_{L0} + h_1^T \Delta(P/V)_g + h_2^T \Delta V_g + h_3^T \Delta t + \Delta(P/V)_g^T H_1 \Delta(P/V)_g \\ &\quad + \Delta(P/V)_g^T H_2 \Delta V_g + \Delta V_g^T H_3 \Delta V_g + \Delta t^T H_4 \Delta(P/V)_g \\ &\quad + \Delta t^T H_5 \Delta V_g + \Delta t^T H_6 \Delta t \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

Les coefficients  $h_1^T, h_2^T, h_3^T, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$  sont donnés par:

$$h_1^T = f_{1\ell}^T A_3 + f_{2\ell}^T A_4$$

$$h_2^T = f_{1g}^T + f_{1\ell}^T A_4 + f_2^T A_2$$

$$h_3^T = h_3^T + f_{1\ell}^T A_6 + f_2^T A_5$$

$$H_1 = A_3^T F_{1\ell\ell} A_3 + A_4^T F_2 A_4 + A_1^T F_{3\ell} A_3$$

$$H_2 = A_3^T (F_{1\ell\ell} + F_{1\ell\ell}^T) A_4 + A_1^T (F_2 + F_2^T) A_2 + A_1^T F_{3g} + 2A_3^T F_{1g\ell}^T + A_1^T F_{3\ell} H_4 + A_3^T F_{3\ell}^T A_4$$

$$H_3 = F_{1g\ell} + 2F_{1g\ell} A_4 + A_4^T F_{1\ell\ell} A_4 + A_2^T F_2 A_2 + A_2^T F_{3g} + A_2^T F_{3\ell} A_4$$

$$H_4 = A_6^T (F_{1\ell\ell} + F_{1\ell\ell}^T) A_3 + A_3^T (F_2 + F_2^T) A_1 + A_6^T F_{3\ell}^T A_1 + A_5^T F_{3\ell} A_3 + F_{4\ell} A_3 + F_5 A_1$$

$$H_5 = F_{4g} + 2A_6^T F_{1g\ell}^T + A_6^T (F_{1\ell\ell} + F_{1\ell\ell}^T) A_4 + A_5^T (F_2 + F_2^T) A_2 + A_5 F_{3g} + A_6^T F_{3\ell}^T A_2 + A_6^T F_{1g\ell}^T + A_5^T F_{3\ell} A_4 + F_{4\ell} A_4 + F_5 A_2$$

$$H_6 = H_{33} + A_6^T F_{1\ell\ell} A_6 + A_5^T F_2 A_5 + A_5^T F_{3\ell} A_6 + F_{4\ell} A_6 + F_5 A_5$$

## II.5 Formulation de la Formule Généralisée des Pertes

L'équation (II.71) représente la formule généralisée des pertes en fonction des variables de contrôle, toutefois  $\Delta(P/V)_g$ ,  $\Delta V_g$  et  $\Delta t$  représentent les termes d'incrémentations des variables de contrôle.

Comme on l'a déjà vu, la F.G.P est établie autour du cas de base, ce dernier est défini par  $(P/V)_{g0}$ ,  $V_{g0}$  et  $t_0$ , sachant que  $t_0 = 0$ .

D'où l'expression des variables d'incrémentations :

$$\begin{cases} \Delta(P/V)_g = (P/V)_g - (P/V)_{g0} \\ \Delta V_g = V_g - V_{g0} \\ \Delta t = t - t_0 = t \end{cases} \quad (\text{II.72})$$

avec  $(P/V)_g$ ,  $V_g$  et  $t$  sont les variables qui définissent le point de fonctionnement actuel.

Il est très intéressant d'établir la F.G.P en fonction des variables de contrôle instantanées :  $\left( (P/V)_g, V_g \text{ et } t \right)$ .

L'expression de la F.G.P en termes de  $\left( (P/V)_g, V_g \text{ et } t \right)$  est obtenue en remplaçant (II.72) dans (II.71) :

$$\begin{aligned}
P_L = & h_{S0} + h_{S1}^T (P/V)_g + h_{S2}^T V_g + h_{S3}^T t + (P/V)_g^T H_1 (P/V)_g \\
& + (P/V)_g^T H_2 V_g + V_g^T H_3 V_g + t^T H_4 (P/V)_g + t^T H_5 V_g + t^T H_6 t
\end{aligned} \tag{II.73}$$

Les coefficients  $h_{S0}, h_{S1}^T, h_{S2}^T, h_{S3}^T$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
h_{S0} = & P_{L0} - h_1^T (P/V)_{g0} - h_2^T V_{g0} + (P/V)_{g0}^T H_1 (P/V)_{g0} \\
& + (P/V)_{g0}^T H_2 V_{g0} + V_{g0}^T H_3 V_{g0}
\end{aligned}$$

$$h_{S1}^T = h_1^T - (P/V)_{g0}^T (H_1 + H_1^T) - V_{g0}^T H_2^T$$

$$h_{S2}^T = h_2^T - (P/V)_{g0}^T H_2 - V_{g0}^T (H_3 + H_3^T)$$

$$h_{S3}^T = h_3^T - (P/V)_{g0}^T H_4 - V_{g0}^T H_5^T$$

## II.6 Formes spéciales de la F.G.P

On peut subdiviser les variables de contrôle en deux types. L'un dit primaire ( $P_g$ ) et l'autre: secondaire ( $V_g$  et  $t$ ).

On distingue alors la F.G.P type 1, quand elle est écrite en fonction des variables primaires tout en fixant les variables secondaires.

La F.G.P type 2 est obtenue en fixant les variables de contrôle primaires et en faisant varier les variables de contrôle secondaires.

### II.6.1 La F.G.P de Type 1

L'idée est de séparer  $P_g$  de  $(P/V)_g$ , pour se faire, on écrit:

$$(P/V)_g = D_v P_g \tag{II.74}$$

Telle que  $D_v$  est une matrice carrée de dimension  $(M \times M)$ .

$$\begin{cases} D_v(i,i) = \frac{1}{V_g(i)} \\ D_v(i,j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

En substituant l'équation (II.74) dans (II.73), il vient :

**Type 1 de la F.G.P**

$$P_L = P_g^T Q_p P_g + q_p^T P_g + q_{p0} \quad (\text{II.75})$$

avec :

$$Q_p = D_v H_1 D_v \quad (\text{II.76})$$

$$q_p^T = h_{S1}^T D_v + V_g^T H_2^T D_v + t^T H_4 D_v \quad (\text{II.77})$$

$$q_{p0} = h_{S3}^T + V_g^T H_2^T V_g + t^T H_5 V_g + t^T H_6 t + h_{S0} + h_{S7} V_g \quad (\text{II.78})$$

**II.6.2 La F.G.P de Type 2**

Comme le module des tensions varie très peu autour de 1 p.u, l'approximation suivante faite afin de pouvoir séparer  $V_g$  des termes  $(P/V)_g$  est valable, et on aura :

si on pose  $V=1+a$

alors  $\frac{1}{V} = \frac{1}{1+a}$  tel que  $a$  tend vers 0

L'approximation faite (développement limité d'ordre 1 autour de  $a=0$ ), on a:

$$\frac{1}{V} = 1 - a = 1 - (V - 1) = 2 - V$$

d'où

$$(P/V)_g = D_p(2e - V_e) \quad (\text{II.79})$$

avec

$$\begin{cases} D_p(i,i) = P_g(i) \\ D_p(i,j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j \end{cases}$$

tel que :

$$e = [1, 1, \dots, 1]$$

En substituant l'équation (II.79) dans (II.73), il vient :

**Type 2 de la F.G.P**

et on trouve

$$P_L = s^T Q_s s + q_s^T s + q_{s0} \quad (\text{II.80})$$

avec :

$$q_{s0} = 2h_{s1}^T D_p e + 4e^T D_p H_1 D_p e + h_{s0} \quad (\text{II.81})$$

$$q_s^T = [w_1^T, w_2^T] \quad (\text{II.82})$$

tels que :

$$w_1^T = -h_{s1}^T D_p + h_{s2}^T + 2e^T D_p (H_2 - D_p (H_1 + H_1^T))$$

$$w_2^T = h_{s3}^T + 2e^T D_p H_4^T$$

$$Q_s = \begin{matrix} M & L \\ M & L \end{matrix} \begin{bmatrix} W & 0 \\ W_1 & H_6 \end{bmatrix} \quad (\text{II.83})$$

tels que :

$$W = D_p H_1 D_p - D_p H_2 + H_3$$

$$W_1 = H_3 - H_4 D_p$$



**CHAPITRE III**

***Simulations et  
Interprétations des  
Résultats***



**A**fin d'appliquer la Formule Généralisée des Pertes au Réseau, nous avons développé un programme FORTRAN qui nous permet de simuler l'évolution des différents paramètres. Nous allons ainsi faire une étude comparative avec les résultats obtenus avec l'écoulement de puissance classique par la méthode de Newton-Raphson. Cette dernière a été choisie pour sa rapidité de convergence et sa précision.

### III.2 Description du programme

Etant donnée la généralisation de la formulation des pertes, le programme aura pour première tâche, la formation des différentes matrices  $Q_p$ ,  $q_p$ ,  $q_{p0}$  et  $Q_s$ ,  $q_s$ ,  $q_{s0}$ . Puis à partir de cela, pour une variation donnée des variables *primaires* et *secondaires*, on obtient instantanément les pertes au niveau du réseau.

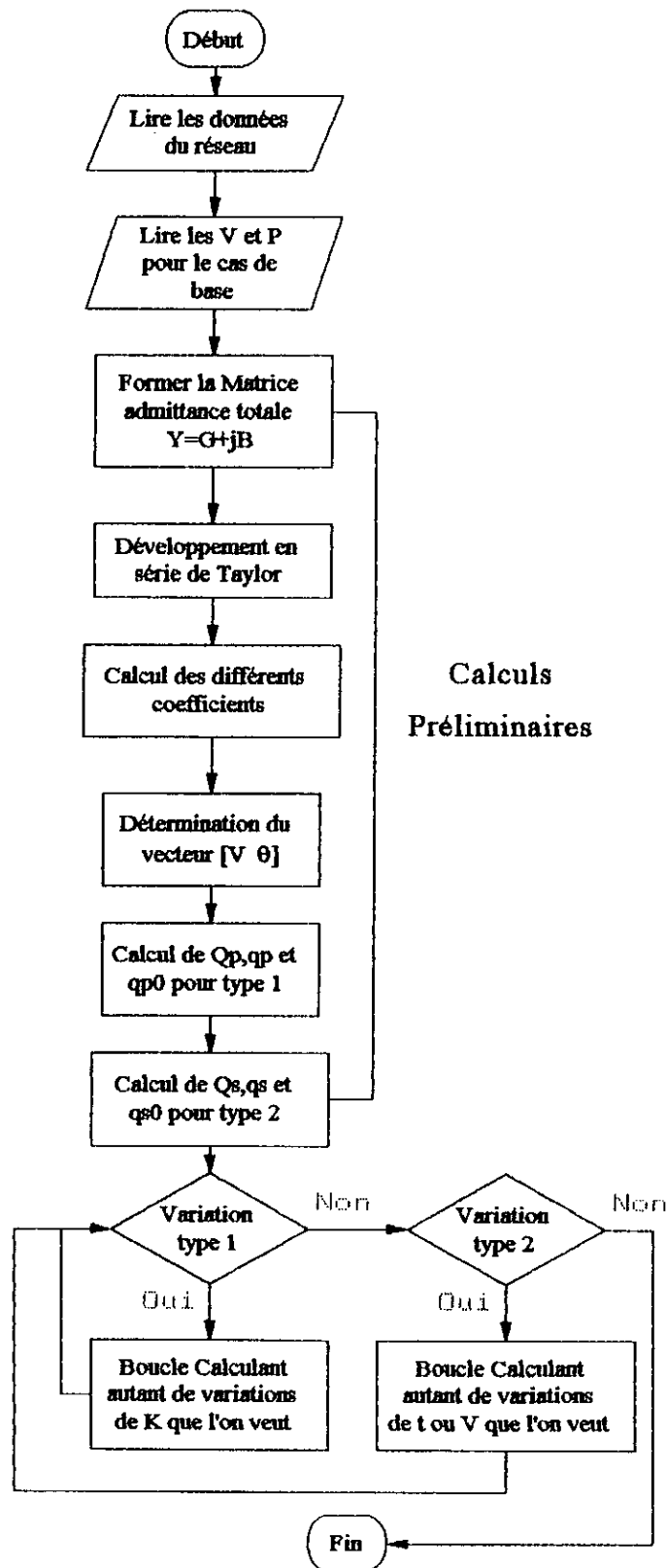
Pour ce faire, le programme doit lire pour un réseau donné, les résultats obtenus avec l'écoulement de puissance classique ( $V$ ,  $P_g$ ,  $P_l$  et  $\theta$ ) dans le cas de base. Il fonctionnera suivant l'organigramme donné ci-dessous.

### III.3 Validation de la F.G.P

Pour valider les deux types de F.G.P, nous disposons de trois modèles de réseaux (5 noeuds, 14 noeuds, 30 noeuds). Nous allons faire varier les variables secondaires et primaires. Ensuite nous comparons les pertes obtenues avec celles déterminées par un calcul d'écoulement de puissance classique par la méthode de Newton-Raphson.

Nous calculerons alors, l'erreur relative commise par la F.G.P (l'écoulement de puissance classique étant pris comme référence). Pour cela, l'erreur relative  $\varepsilon$  est définie par :

$$\varepsilon (\%) = \frac{(\text{Pertes par la FGP}) - (\text{Pertes par le LF})}{(\text{Pertes par le LF})}$$



**Organigramme de la  
Formule Généralisée des Pertes**

### III.3.1 Variation globale de la charge

La F.G.P type 1 nous permet de connaître les pertes dans un réseau quand la charge varie de la même manière au niveau de tous les noeuds. On définit ainsi,  $K$ , comme étant le coefficient multiplicatif de toutes les charges. La variation de  $K$  se fera entre la moitié de la charge à deux fois, c'est à dire de 0.5 à 2 .

#### III.3.1.1 Réseau à 5 noeuds

La variation de la charge donne une courbe dont l'allure est une branche parabolique, comme montré dans la figure (III-1). Pour une variation de  $K$  allant de 0.5 à 2, les pertes varient grandement; en effet le rapport entre les plus petites pertes et les plus grandes est de dix. Cela s'explique aisément, du fait que l'on augmente les puissances simultanément dans tous les noeuds du réseau.

Néanmoins, la courbe de la F.G.P a la même allure et on obtient une très bonne erreur relative, notamment dans le domaine [0.5 1.2] où l'erreur relative est inférieure à 1,5 % . On remarque d'ailleurs que les deux courbes se détachent à partir de  $K > 1.2$ , la courbe de la F.G.P restant légèrement au-dessous.

#### III.3.1.2 Réseau à 14 noeuds (IEEE 14 Bus system)

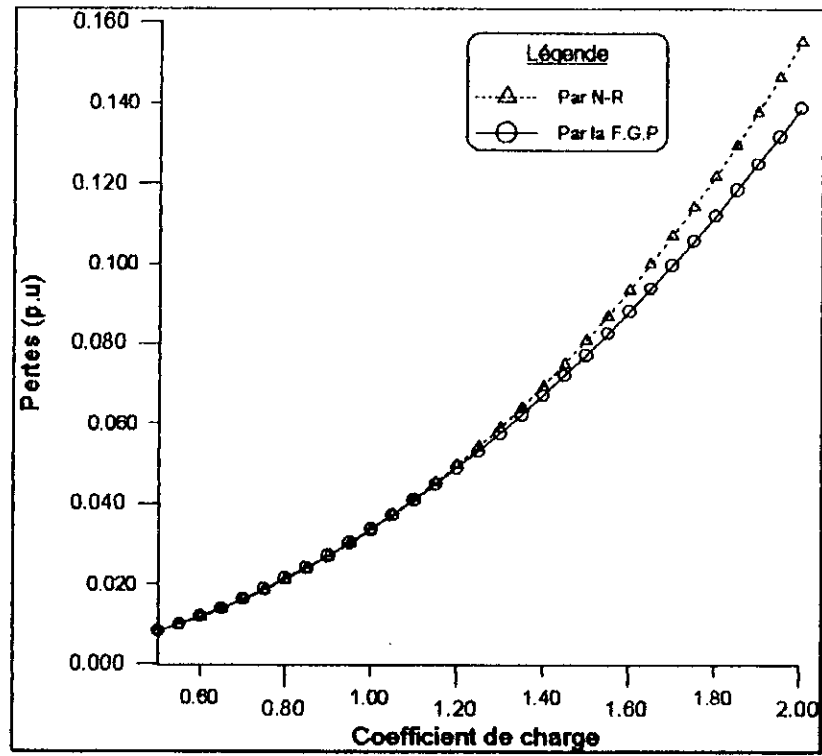
Là encore les courbes concordent (voir figure (III-2)), cependant l'erreur relative commise est plus importante et la plage de variation, donnant de bons résultats, est plus restreinte. Les deux courbes s'entrecoupent et génèrent une erreur oscillatoire importante.

#### III.3.1.3 Réseau à 30 noeuds (IEEE 30 Bus system)

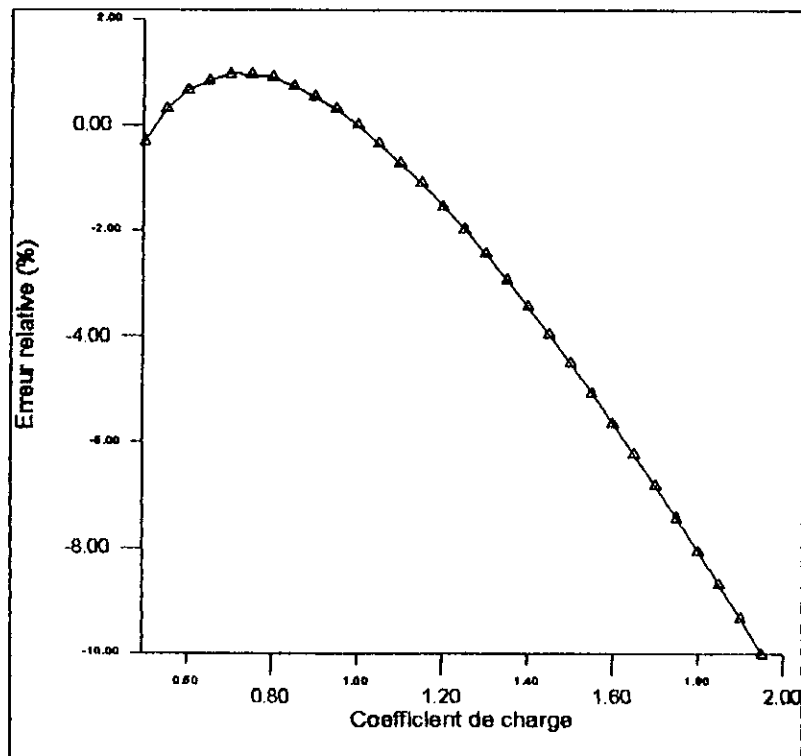
Les courbes ont pratiquement la même allure que pour le réseau 14 noeuds (figure (III-3)). Mais ici, la plage s'élargit, notamment pour  $K > 1$ , [0.9 1.15]

#### III.3.1.4 Interprétation des résultats et conclusion

La variation de  $K$  autour de 1 (entre 0.5 et 2) entraîne une très grande variation des pertes. Ceci était prévisible car on augmente toutes les puissances simultanément et par conséquent, les pertes augmentent grandement. On remarque



**Figure III-1.a: Variation des pertes en fonction de  $K$   
Réseau à 5 Noeuds**



**Figure III-1.b: Variation de l'erreur relative en fonction de  $K$   
Réseau à 5 Noeuds**

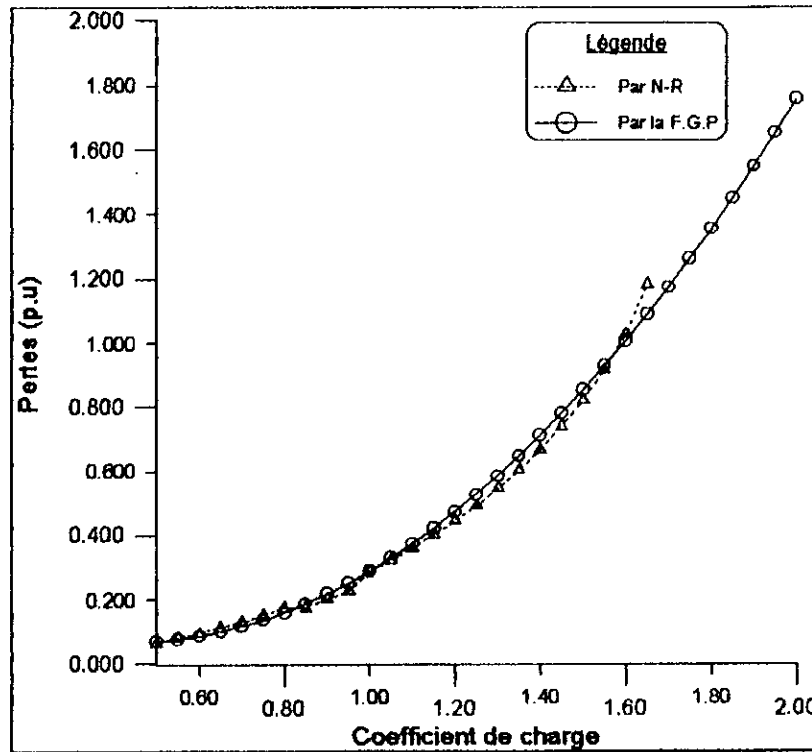


Figure III-2.a: Variation des pertes en fonction de  $K$   
Réseau à 14 Noeuds

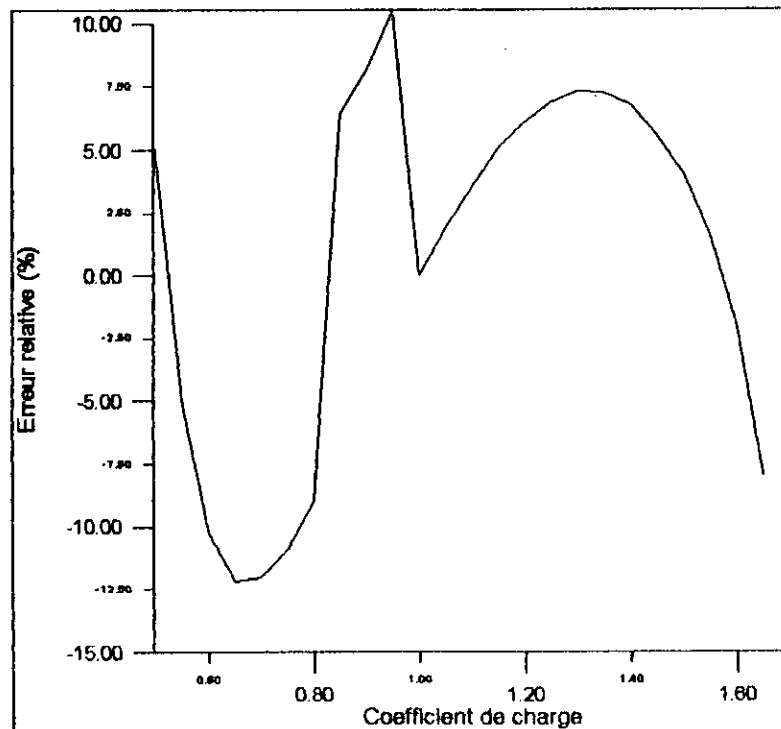
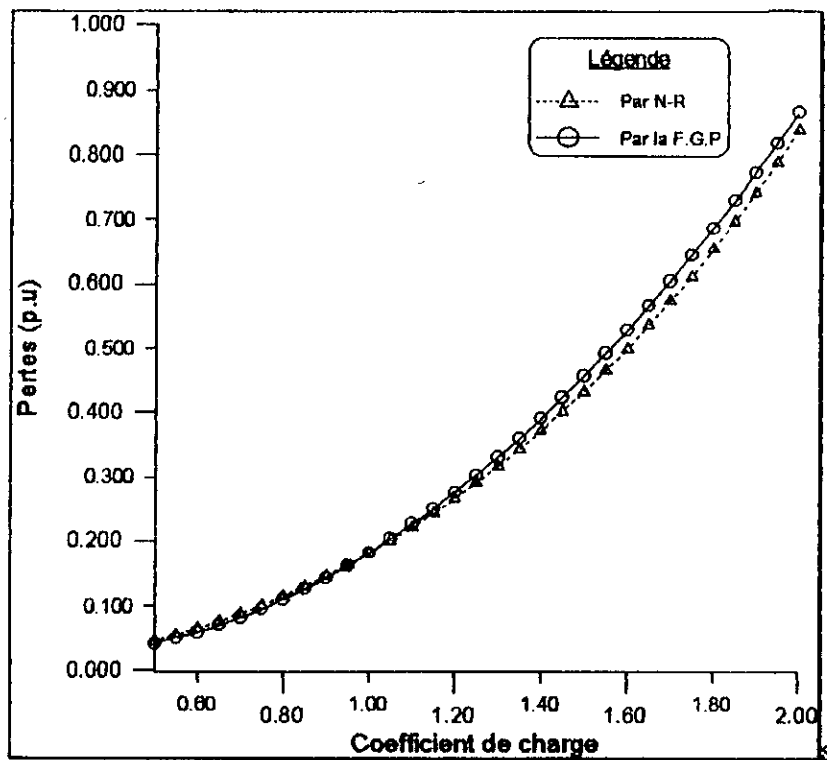
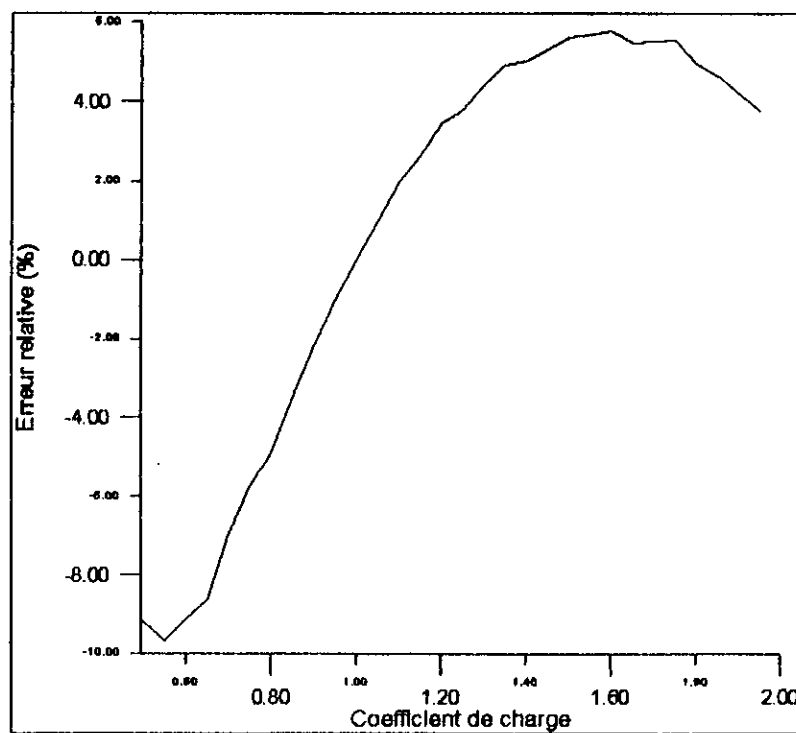


Figure III-2.b: Variation de l'erreur relative en fonction de  $K$   
Réseau à 14 Noeuds



**Figure III-3.a: Variation des pertes en fonction de  $K$   
Réseau à 30 Noeuds**



**Figure III-3.b: Variation de l'erreur relative en fonction de  $K$   
Réseau à 30 Noeuds**

ainsi, que pour les différents modèles de réseaux considérés, les pertes ont à peu près le même taux d'augmentation (passant de 1 pour  $K=0.5$  à 10 pour  $K=1.5$ ).

Le fait d'augmenter la charge jusqu'à 100% ( $K=2$ ), entraîne une très grande variation des pertes, et ainsi une erreur relative très importante car la topologie du réseau change. En effet, pour le réseau IEEE 14 BUS, nous n'avons pas pu dépasser  $K=1.65$ , car au-delà une divergence apparaît au niveau du programme d'écoulement de puissance. Pour ce cas spécial, nous avons essayé plusieurs méthodes de convergence: Newton-Raphson, Fast Decoupled Load Flow, Gauss-Seidel, mais sans résultats.

Néanmoins, on constate que les résultats obtenus par la formule des pertes, s'approchent bien des résultats obtenus par l'écoulement de puissance classique avec une erreur relativement faible. En effet, dans les trois (3) réseaux, on peut se permettre une certaine variation de  $K$  selon l'erreur relative tolérée.

### III.3.2 Variation de l'amplitude de tension $V_g$ aux noeuds PV

La Formule Généralisée des Pertes de type 2 nous permet de connaître les pertes en fonction de la variation d'amplitude de tension au niveau des noeuds PV autour d'un point de fonctionnement nominal.

Comme l'amplitude des tensions dans le réseau est proche de 1 p.u, nous allons faire varier la tension autour de 1, soit entre 0.95 et 1.05 ce qui est une marge de tolérance généralement admise.

#### III.3.2.1 Réseau à 5 noeuds

La courbe a une allure parabolique (voir figure III-4). Pour une variation de  $V_g$  de  $\pm 5\%$  les pertes varient du simple au double. La variation de la tension au noeud 2, engendre une augmentation relativement importante, ce qui s'explique par l'interconnexion de ce réseau. En effet le noeud 2 est connecté à tous les autres noeuds et de ce fait, la variation de sa tension se répercute grandement sur les pertes.

Toutefois, la courbe de la F.G.P colle bien à celle obtenue par la méthode classique; et ce pour la variation de  $V_g$  dans les trois noeuds générateurs, l'erreur relative n'excédant pas les 1 %.

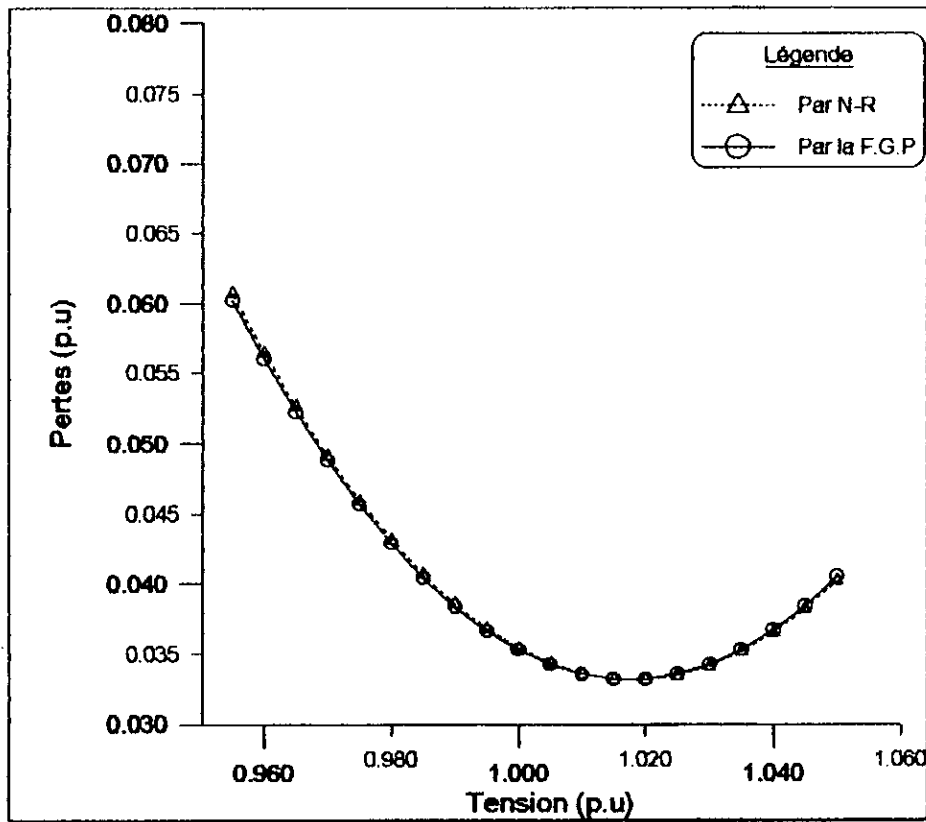


Figure III-4.a: Variation des pertes en fonction de V au noeud 1 Réseau à 5 Noeuds

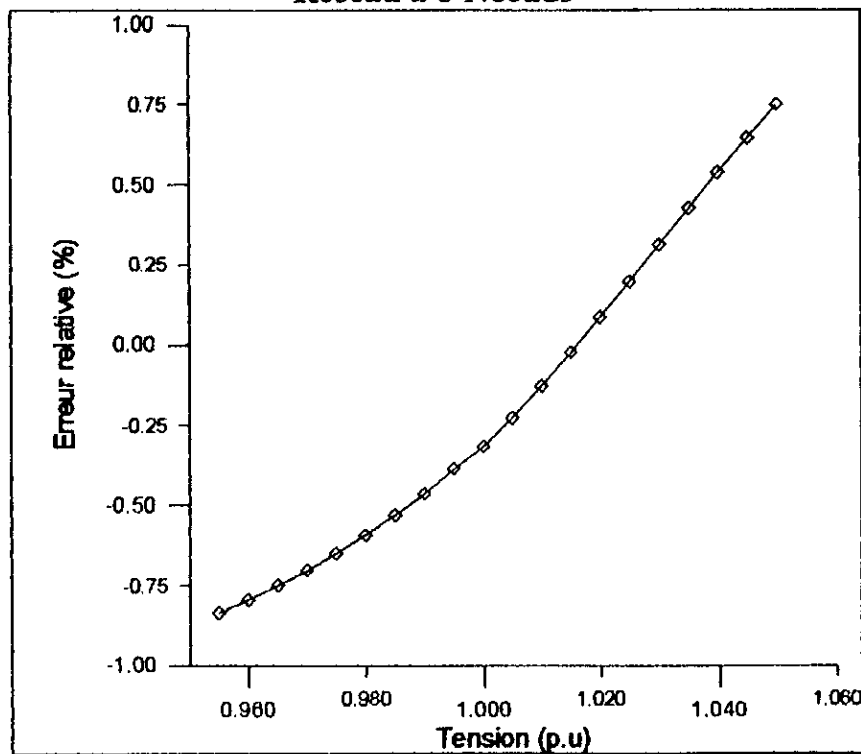


Figure III-4.b: Variation de l'erreur relative en fonction de V au noeud 1 Réseau à 5 Noeuds



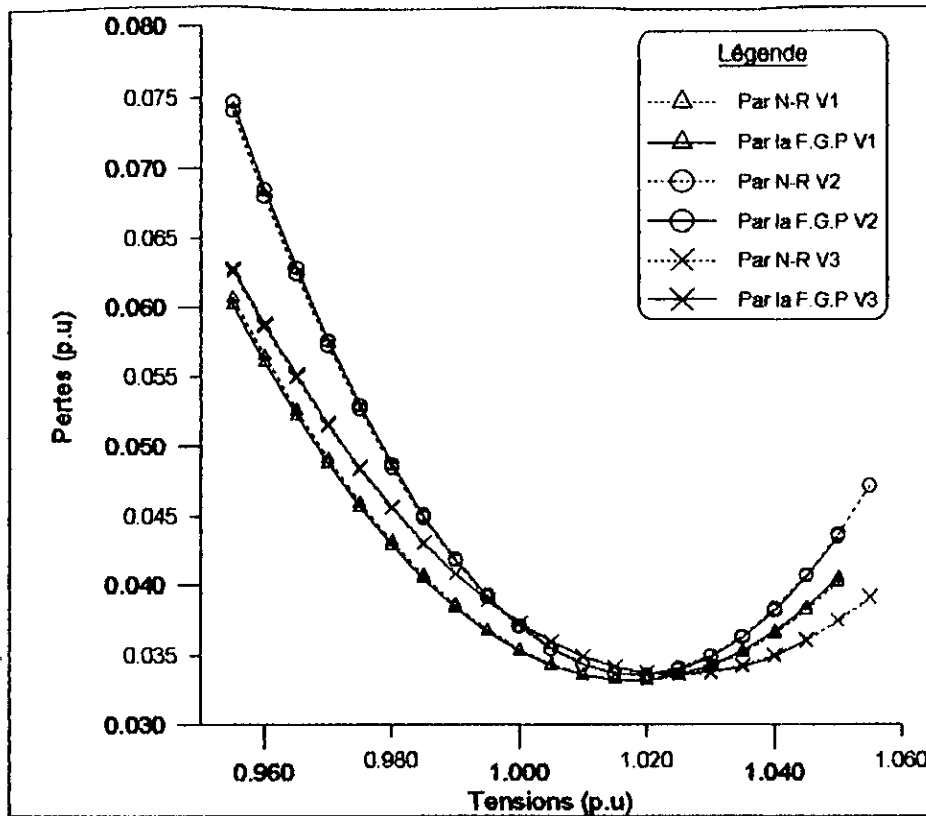


Figure III-5.a: Variation des pertes en fonction de V en différents noeuds Réseau à 5 Noeuds

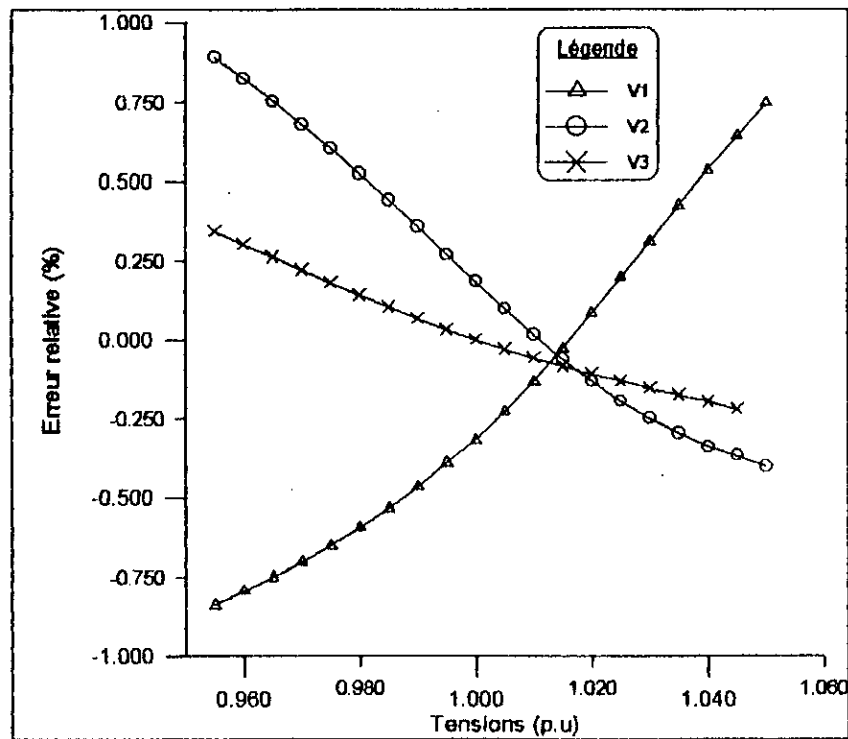


Figure III-5.b: Variation de l'erreur relative en fonction de V en différents noeuds Réseau à 5 Noeuds

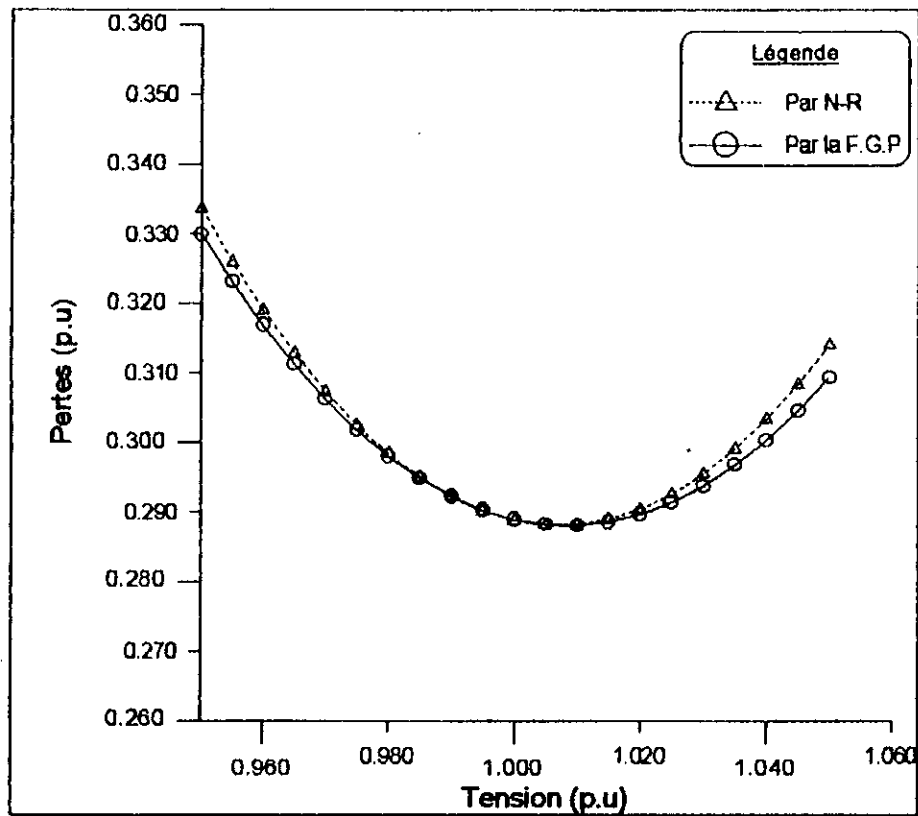


Figure III-6.a: Variation des pertes en fonction de V au noeud 4 Réseau à 14 Noeuds

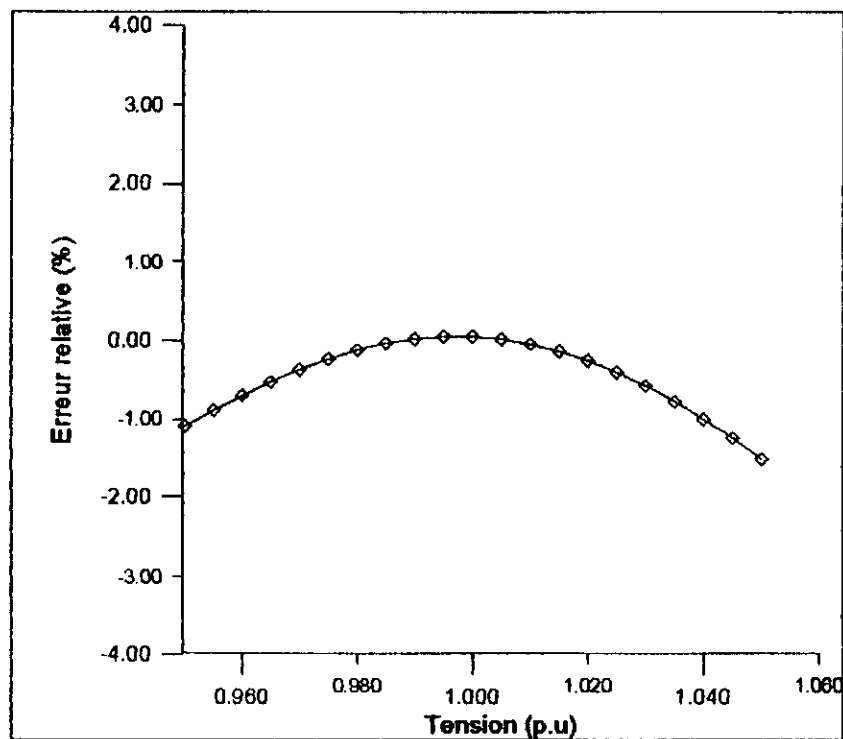


Figure III-6.b: Variation de l'erreur relative en fonction de V au noeud 4 Réseau à 14 Noeuds

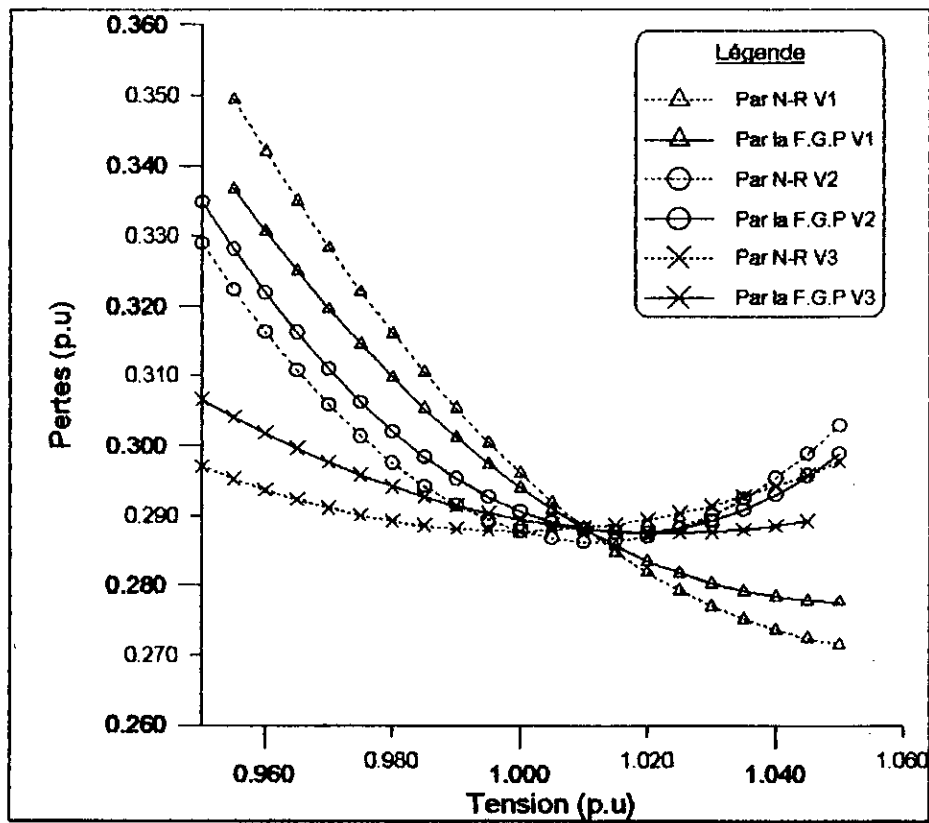


Figure III-7.a: Variation des pertes en fonction de V en différents noeuds Réseau à 14 Noeuds

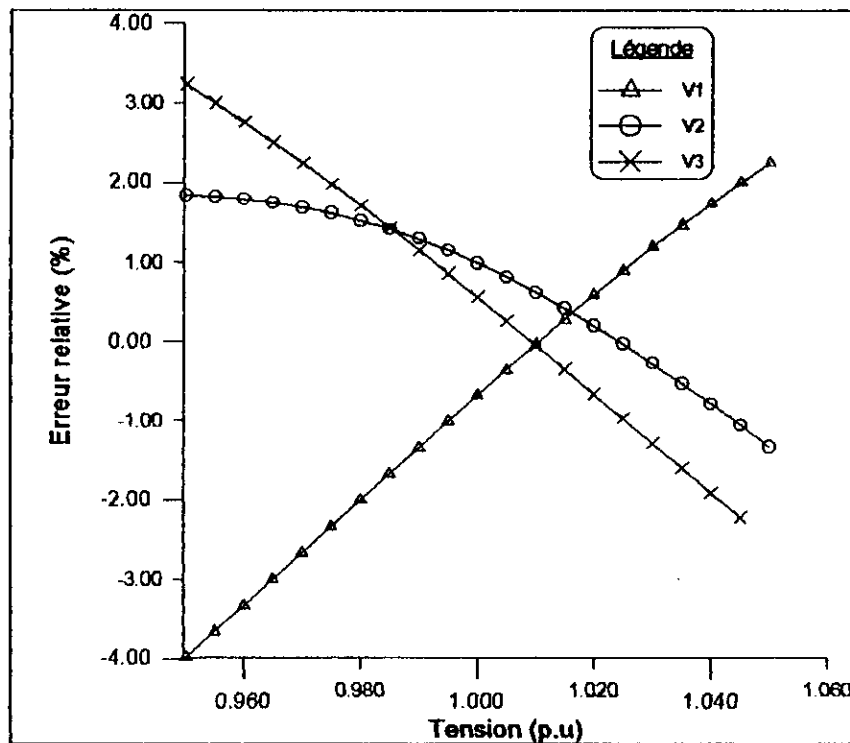


Figure III-7.b: Variation de l'erreur relative en fonction de V en différents noeuds Réseau à 14 Noeuds

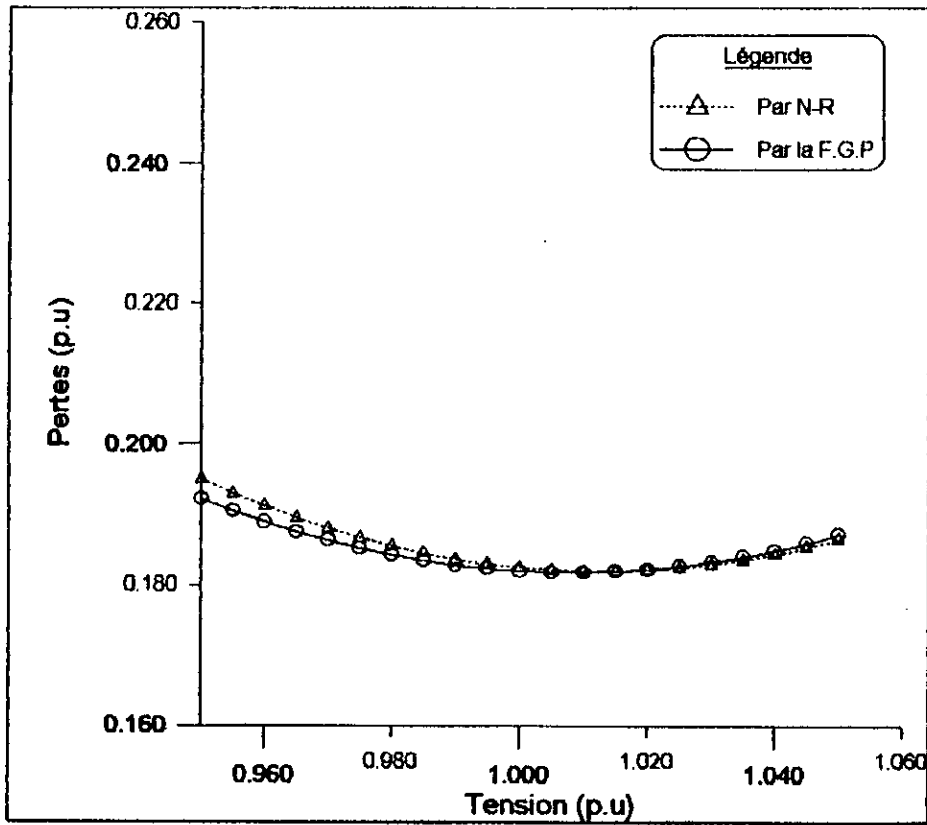


Figure III-8.a: Variation des pertes en fonction de V au noeud 5 Réseau à 30 Noeuds

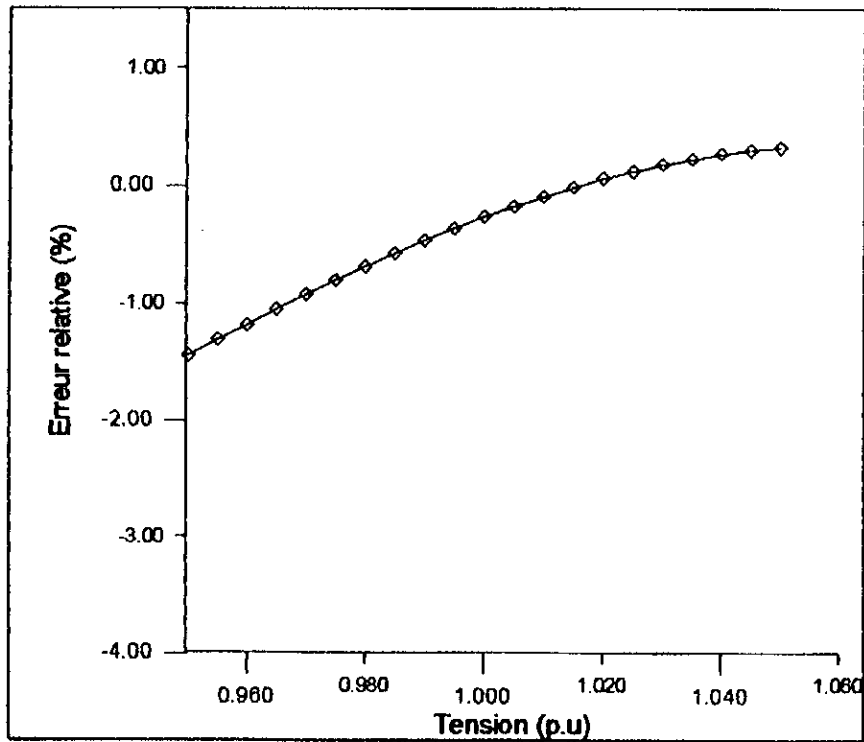


Figure III-8.b: Variation de l'erreur relative en fonction de V au noeud 1 Réseau à 30 Noeuds

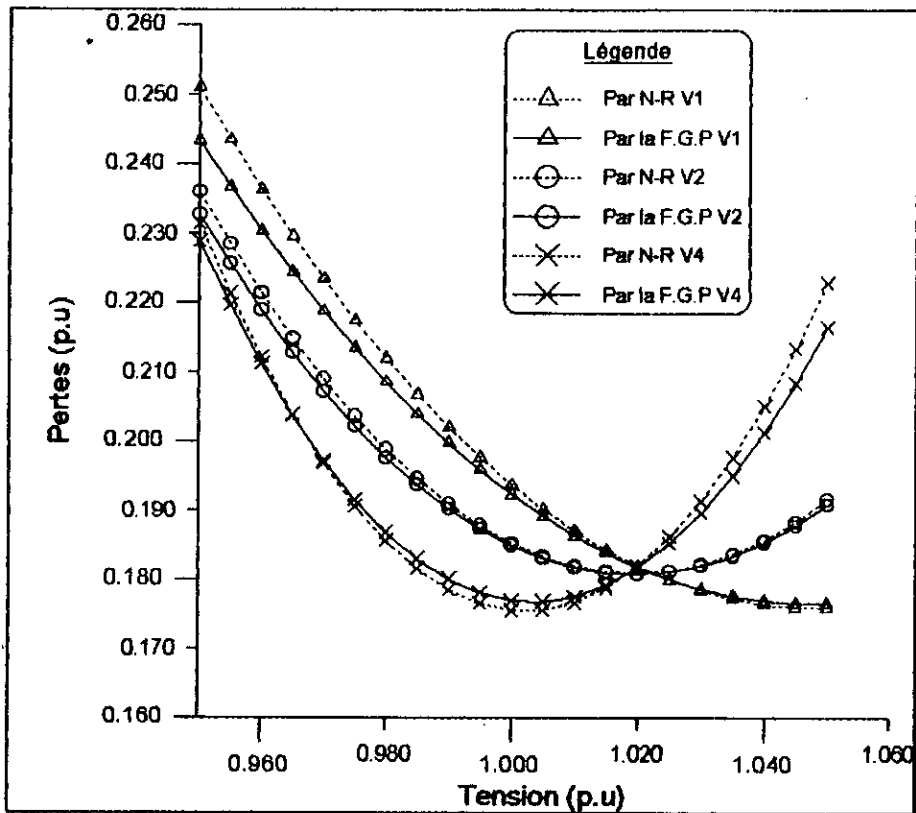


Figure III-9.a: Variation des pertes en fonction de V en différents noeuds Réseau à 30 Noeuds

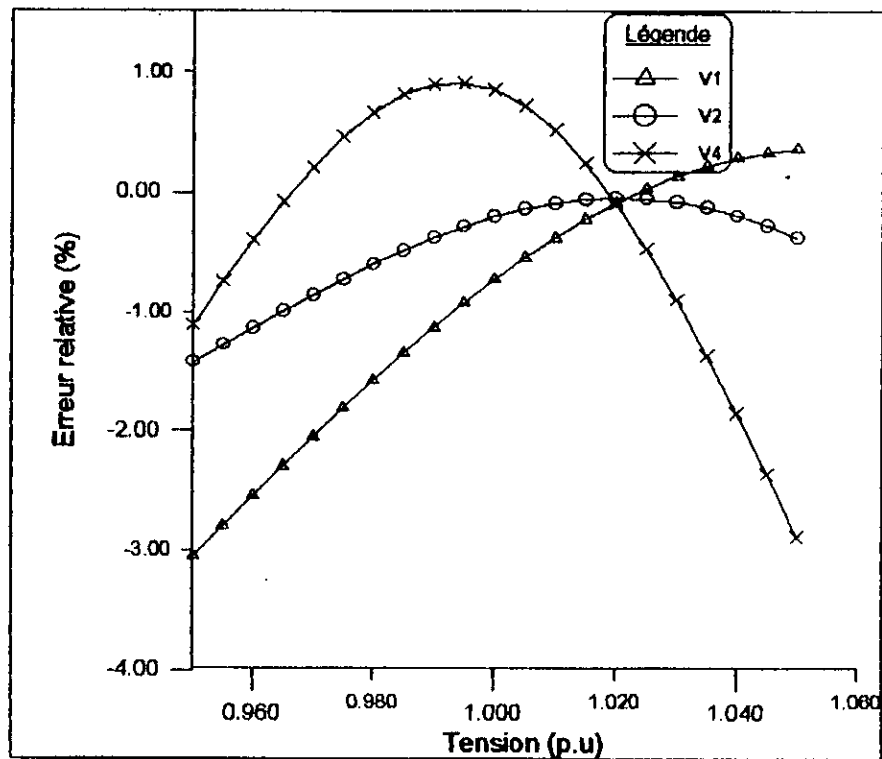


Figure III-9.b: Variation de l'erreur relative en fonction de V en différents noeuds Réseau à 30 Noeuds

### III.3.2.2 Réseau à 14 noeuds

Dans ce cas, la variation de  $V_g$  n'entraîne pas un grand taux de variation des pertes (voir figure III-5). Ceci est dû à la topologie du réseau. Mais l'erreur relative est assez grande par rapport au réseau 5 noeuds, elle reste cependant inférieure à 4 %.

### III.3.2.3 Réseau à 30 noeuds

La variation de  $V_g$  entraîne un taux de variation plus grand mais des valeurs extrêmes moins importantes que pour le réseau 14 noeuds. L'erreur relative est d'ailleurs plus faible (inférieure à 3 %).

### III.3.2.4 Interprétation des résultats et conclusion

D'après les résultats obtenus, nous en déduisons que plus le réseau est interconnecté, plus la variation de la tension au niveau de l'un de ses noeuds engendre une grande variation des pertes. Toutefois, la F.G.P donne de très bons résultats et correspondent avec un bon degré de précision à ceux donnés par la méthode de Newton-Raphson.

Nous remarquons que les courbes des pertes aux différents noeuds, s'entrecoupent en un même point. Ce point correspond à la tension de base du noeud qui crée le plus de variation dans les pertes.

## III.3.2 Variation de la prise de réglage $t$

Notre modélisation, nous impose de connaître les valeurs des constantes  $K_R$  et  $K_I$  propres aux transformateurs. Cependant dans les réseaux IEEE cette information n'est pas fournie, elle est en principe donnée par le constructeur. De ce fait, nous avons été contraints de procéder par tâtonnement pour déterminer ces valeurs.

Comme les transformateurs des réseaux IEEE étudiés sont des transformateurs d'amplitude, nous avons pris  $K_I = 0$ .

En pratique, le rapport de transformation  $a$  varie généralement de 0.95 à 1.05. Pour  $K_R = 0.5$ , cela correspond à une variation de  $t$  de -0.1 à 0.1.

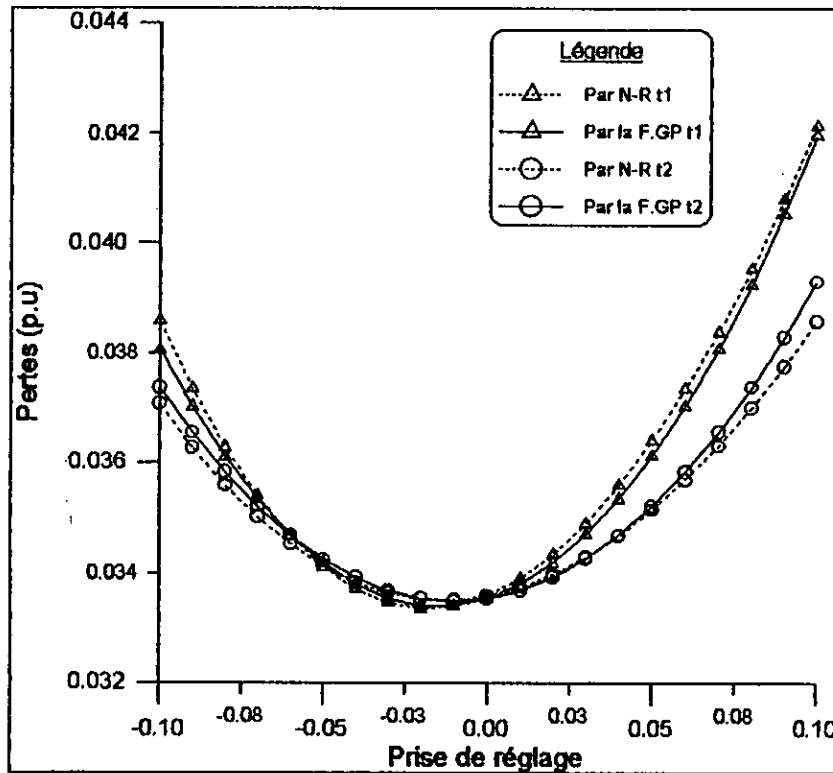


Figure III-10.a: Variation des pertes en fonction de  $t$  en différents noeuds Réseau à 5 Noeuds

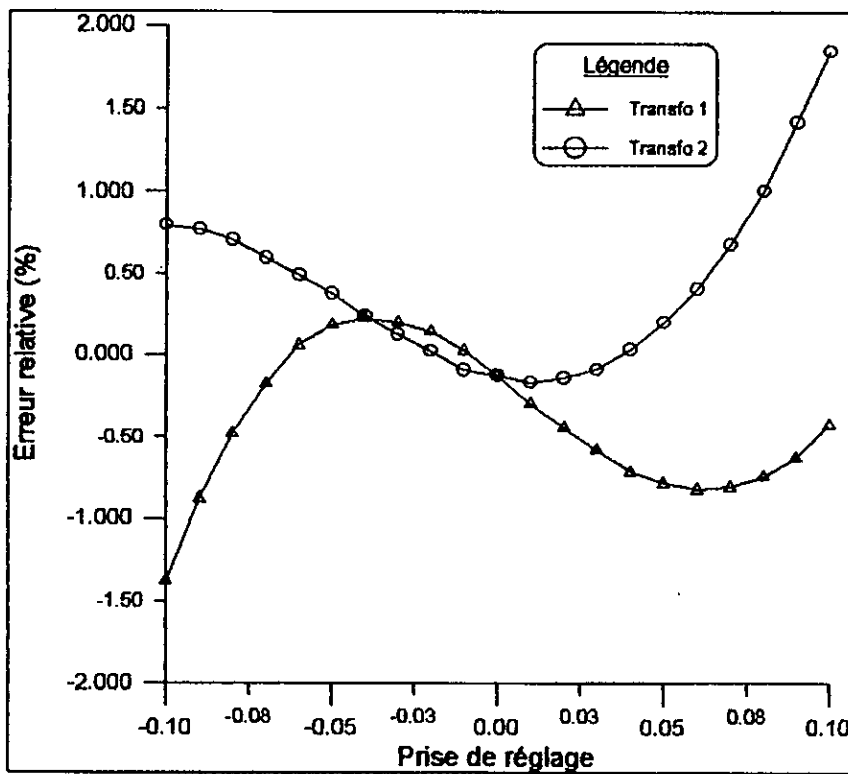


Figure III-10.b: Variation de l'erreur relative en fonction de  $t$  en différents noeuds Réseau à 5 Noeuds

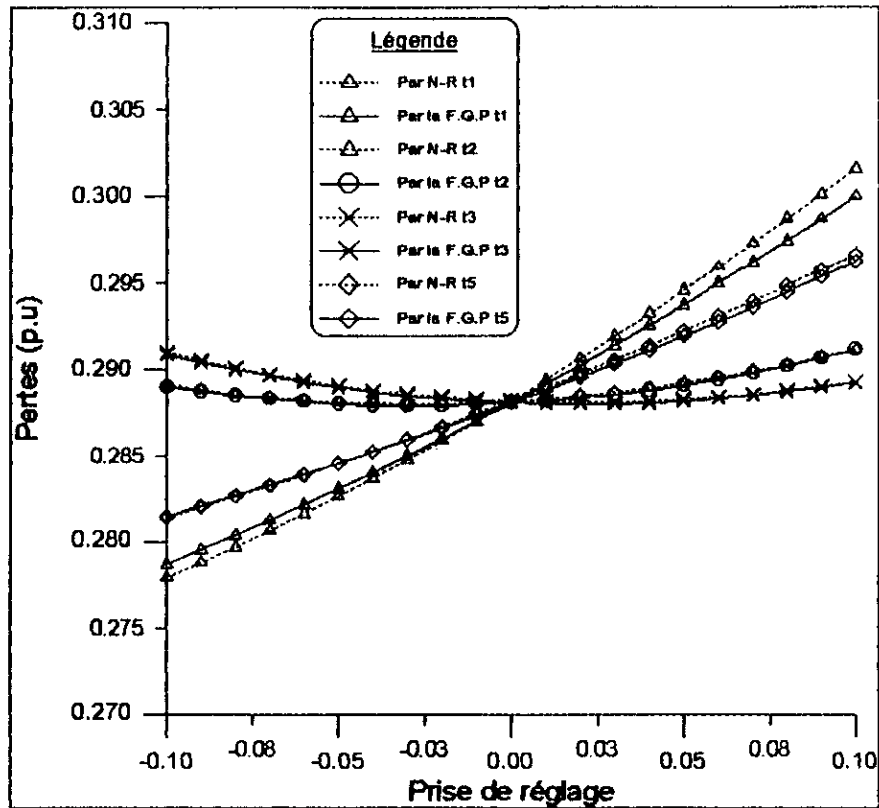


Figure III-11.a: Variation des pertes en fonction de  $t$  en différents noeuds Réseau à 14 Noeuds

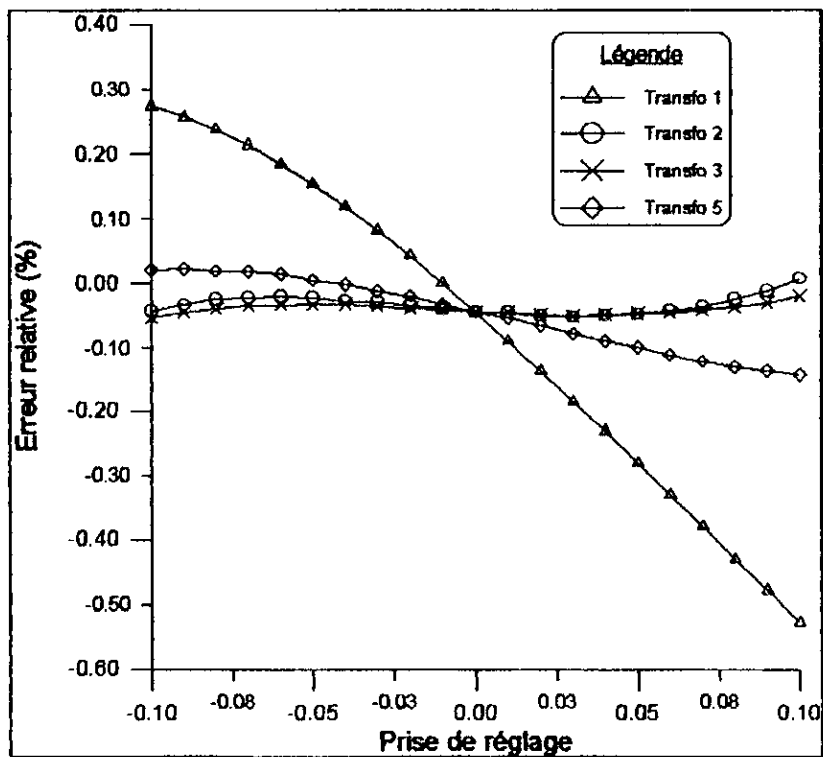


Figure III-11.b: Variation de l'erreur relative en fonction de  $t$  en différents noeuds Réseau à 14 Noeuds



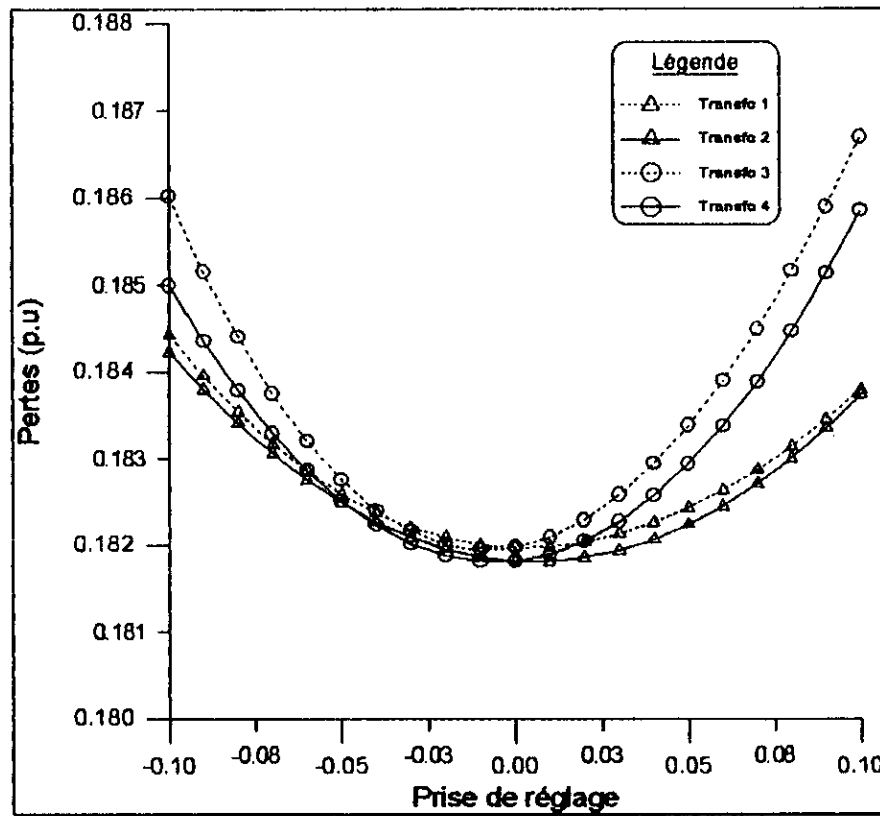


Figure III-12.a: Variation des pertes en fonction de  $t$  en différents noeuds Réseau à 30 Noeuds

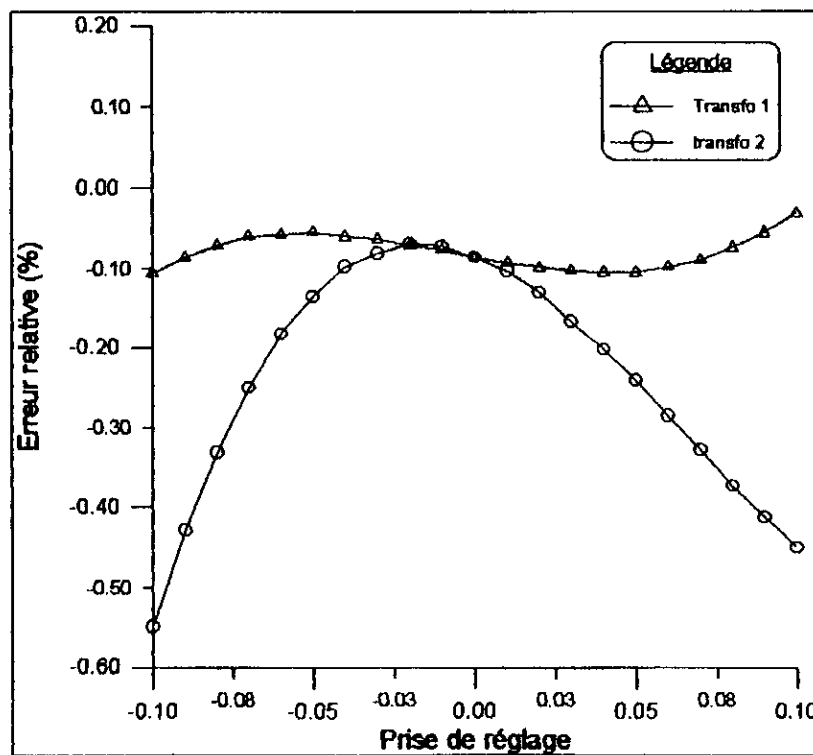


Figure III-12.b: Variation de l'erreur relative en fonction de  $t$  en différents noeuds Réseau à 30 Noeuds

## Interprétation des résultats et conclusion

Les pertes, causées par la variation de  $t$  dans les trois réseaux, ne varient pas beaucoup. Cela est dû à la topologie de ces réseaux (interconnexion). En effet on remarque que le taux de variation dans le réseau 5 noeuds est supérieur au taux de variation dans le système IEEE 14 noeuds qui lui-même est supérieur à celui du réseau IEEE 30 noeuds. Cela correspond à la hiérarchie d'interconnexion (IEEE 5 > IEEE 14 > IEEE 30).

L'intersection de toutes les courbes correspond au cas de base ( $t=0$ )

L'erreur relative commise par la F.G.P est relativement petite (inférieure à 1.5 %)

### III.4 Temps d'exécution

Dans le cadre de travail, un de nos principaux objectifs était d'avoir une formule qui permet d'évaluer les pertes avec un *maximum de précision* et un *minimum de temps de calcul*, en vue d'une utilisation en temps réel. La Formule Généralisée des Pertes se prête très bien à cela.

Avec la méthode prise comme référence : Newton-Raphson, nous devons pour chaque variation de l'un des paramètres de contrôle, tout recalculer (Jacobien, inverse du Jacobien, ...), et dans un processus itératif. Alors qu'avec la Formule Généralisée des Pertes, on ne calcule qu'une seule fois l'écoulement de puissance correspondant au cas de base, puis les coefficients de la F.G.P, *sans aucune itération*.

A titre d'exemple (réseau 5 noeuds), pour avoir les pertes correspondant à une variation de  $V_g$  entre 0.95 et 1.05 avec un pas de 0.05, soit 21 points; il nous a fallu exécuter 21 fois le programme d'écoulement de puissance. Si en moyenne chaque point est obtenu après 3 itérations, on calcule 63 (21 x 3) fois la matrice Jacobiennes et son inverse.

Par contre, dans la F.G.P type 2, on ne calcule qu'une seule fois l'écoulement de puissance pour le cas de base, et une fois calculées, les pertes sont déduites presque instantanément avec un nombre de points aussi grand que voulu autour du point de fonctionnement.

Nous présentons ci-dessous quelques tableaux qui illustrent l'efficacité de la F.G.P par rapport au calcul classique d'écoulement de puissance. Les temps ainsi obtenus sont valables pour les trois variations ( $K$ ,  $V_g$  et  $t$ ).

Pour des raisons pratiques, nous allons estimer le temps effectué par l'écoulement de puissance classique avec la Méthode de Newton-Raphson. Il suffit pour cela, de connaître la durée d'une seule itération pour avoir le temps total nécessaire pour la convergence d'un point donné (en connaissant le nombre d'itérations).

Donc, on donne pour chaque réseau, le nombre moyen d'itérations pour converger. Le temps total *approximatif* est obtenu en multipliant le nombre d'itérations par le nombre de points voulus par le temps d'une seule itération.

Cette estimation est légitime, du fait qu'elle sous-évalue le temps total. Car si le réseau varie peu pour les différentes variations de  $V_g$  et  $t$ , on remarque que pour une variation de  $K$ , le nombre d'itérations croît quand  $K$  augmente (la topologie du réseau étant modifiée), ce qui n'est pas le cas dans la F.G.P. Toutefois, les temps obtenus avec la F.G.P, quand à eux, sont calculés d'une manière beaucoup plus précise, ceci est dû à leur durée (n'excèdent pas 1 mn)

**RESEAU 5 NOEUDS**

Chaque point du calcul d'écoulement de puissance 'LF' est donné en moyenne par 3 itérations.

	temps (sec) : LF	temps (sec) : F.G.P
Temps de chargement des équations		0.11
Temps par itération	0.01832	
<b>21 pts</b>	$0.01832 * 21 * 3 \text{itér}$	0
Temps total	1.154	0.11
<b>210 pts</b>	$0.01832 * 210 * 3 \text{itér}$	0.11
Temps total	11.54	0.22
<b>21000 pts</b>	$0.01832 * 21000 * 3 \text{itér}$	10
Temps total	1154	10.11

**Tableau III-1 Temps obtenus en fonction du nombre de points Réseau 5 noeuds**

**RESEAU 14 NOEUDS**

Chaque point du calcul d'écoulement de puissance 'LF' est donné en moyenne par 4 itérations.

	Temps (sec) : LF	Temps (sec) : F.G.P
Temps de chargement des équations		3.13
Temps par itération	0.11	
<b>21 pts</b>	$0.11 * 21 * 4 \text{itér}$	0
Temps total	9.24	3.13
<b>210 pts</b>	$0.11 * 210 * 4 \text{itér}$	0.16
Temps total	92.4	3.29
<b>21000 pts</b>	$0.11 * 21000 * 4 \text{itér}$	18.24
Temps total	9240	21.37

**Tableau III-2 Temps obtenus en fonction du nombre de points Réseau 14 noeuds**

**RESEAU 30 NOEUDS**

Chaque point du calcul d'écoulement de puissance 'LF' est donné en moyenne par 5 itérations.

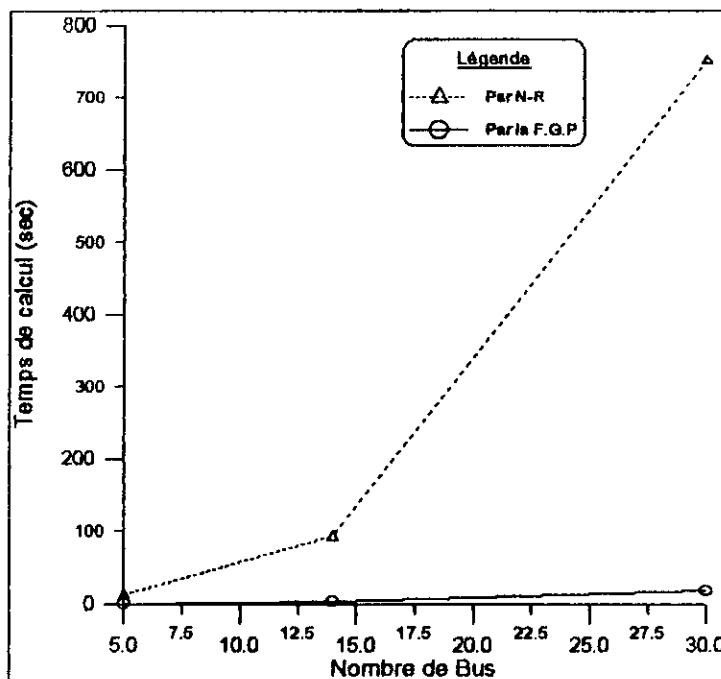
	Temps (sec) : LF	Temps (sec) : F.G.P
Temps de chargement des équations		15.38
Temps par itération	0.71429	
<b>21 pts</b>	$0.71429 * 21 * 5$ itér	0.03
Temps total	75	15.41
<b>210 pts</b>	$0.71429 * 210 * 5$ itér	2.47
Temps total	750	17.85
<b>21000 pts</b>	$0.71429 * 21000 * 5$ itér	24.37
Temps total	75000	39.75

**Tableau III-3 Temps obtenus en fonction du nombre de points  
Réseau 30 noeuds**

D'après les tableaux présentés précédemment, nous constatons effectivement la rapidité de la Formule Généralisée des pertes.

Nous remarquons que le temps de calcul, en fonction du nombre de points d'essais ainsi qu'en fonction de la grandeur du réseau, augmente beaucoup plus rapidement avec la méthode de Newton-Raphson qu'avec la F.G.P. Ce qui illustre tout l'intérêt de cette dernière, pour une utilisation sur de grands réseaux et avec beaucoup de fluctuations, pour un fonctionnement en temps réel.

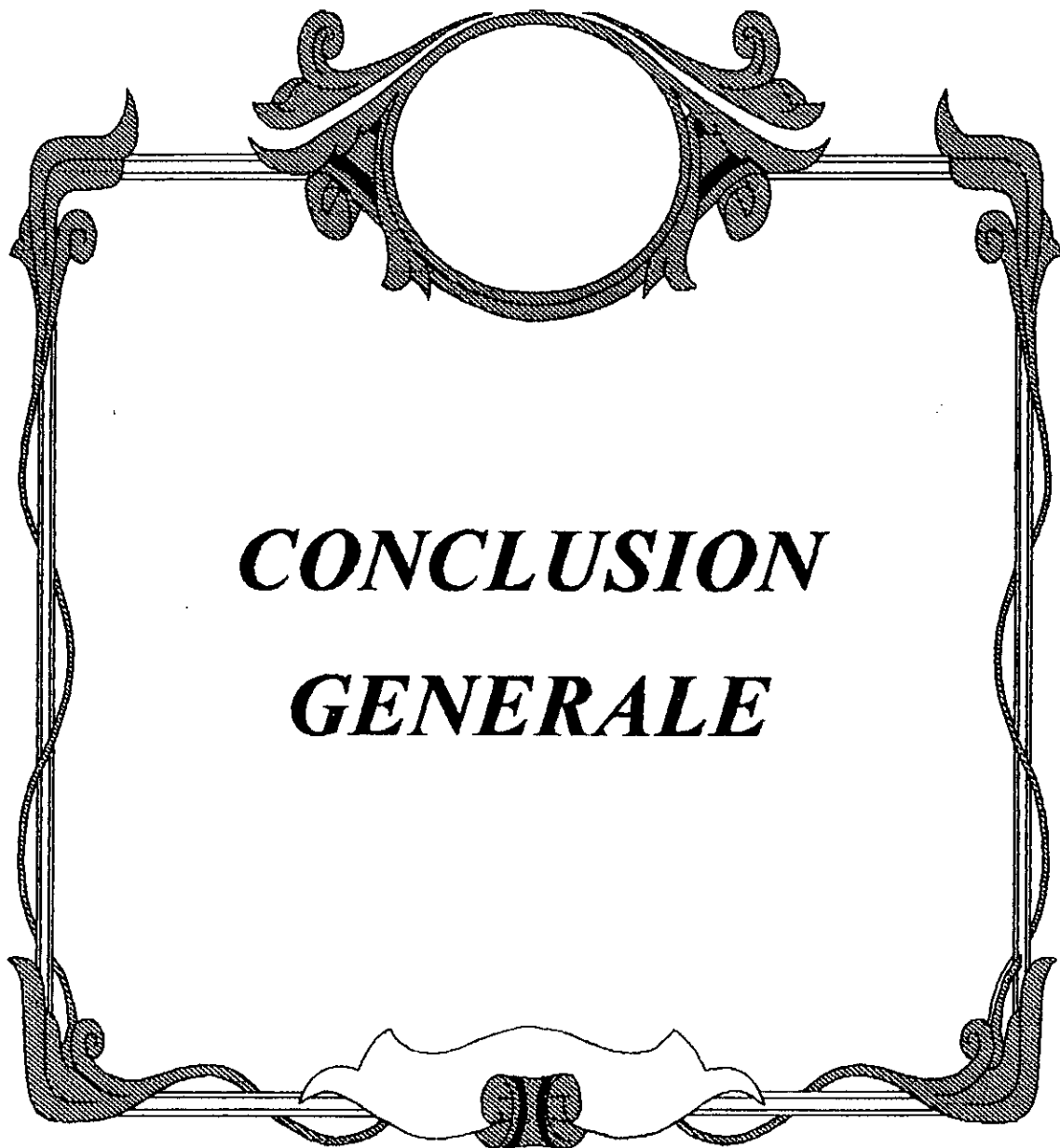
Il est maintenant indéniable que la F.G.P est plus rapide que la méthode de Newton-Raphson. Cependant, la courbe la plus intéressante à établir serait que pour un même nombre de points (210 pts par exemple), nous ayons une variation du temps de calcul en fonction des différents réseaux. Malheureusement nous n'avons considéré que trois modèles de réseaux. Comme cela on aurait mieux constaté l'efficacité de la F.G.P pour les grands réseaux.



**Figure III-13 Variation du temps de calcul en fonction du nombre de noeuds**

Le cas où l'on teste 210 points, montre déjà des écarts importants entre les deux méthodes. Bien que le cas où on a 21000 points, ne soit pas rencontré sur des intervalles de variation des paramètres aussi petits. Il montre bien que pour de très nombreuses variations des différents paramètres autour du cas de base, la F.G.P. surclasse la méthode classique de Newton-Raphson (40 sec pour la première contre 20 heures pour la seconde).

Ces résultats s'expliquent par le fait qu'avec la méthode de Newton-Raphson on refait tous les calculs pour chaque point; alors que pour la Formule Généralisée des Pertes, on calcule d'abord les coefficients (matrices) (un temps très souvent supérieur au temps d'une itération par N-R), mais on se rattrape sur le nombre de points voulu. Ainsi, il suffit de multiplier ces matrices dont les dimensions sont inférieures à celles du Jacobien (voir équations (II.75) et (II.80)).



***CONCLUSION***  
***GENERALE***

Dans ce présent travail, nous avons présenté la Formule Généralisée des Pertes sous ses deux formes :

La F.G.P type 1: décrite en fonction des puissances générées. Dans une plage pratique de variation de  $K$ , elle donne de bons résultats. Néanmoins, pour de très grandes variations de charges, la Formule Généralisée des Pertes n'est plus valable car la topologie du réseau change.

La F.G.P type 2: décrite en fonction de l'amplitude des tensions générées et des prises de réglage des transformateurs. Cependant, l'hypothèse faite sur  $V_g$  (doit être proche de 1 p.u), nous restreint le domaine de variation.

Les résultats obtenus, lors de la simulation, sont très encourageants car l'erreur relative entre les pertes exactes calculées par l'écoulement de puissance classique de Newton-Raphson et celles calculées par la Formule Généralisée des Pertes reste globalement acceptable.

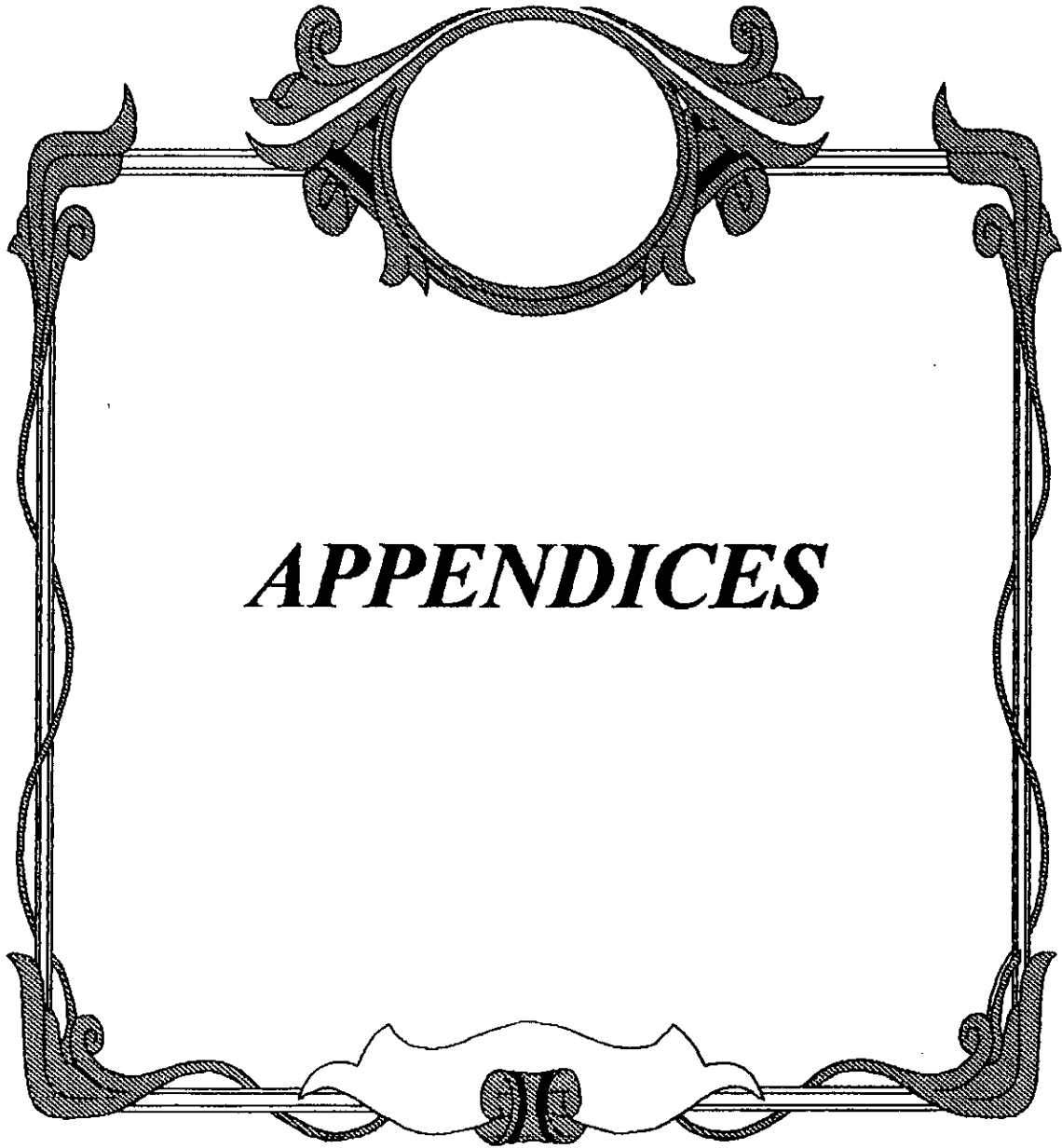
En fait, notre souci majeur était de mettre en évidence l'efficacité de cette formulation; ce qui a été effectivement démontrée. La Formule Généralisée des Pertes exprime ainsi, à notre avis, le *meilleur compromis* entre temps d'exécution et erreur commise. Et donc, elle pourrait être adaptée sur des modèles de réseaux en vue d'une utilisation dynamique (en temps réel) du calcul d'écoulement de puissance (Optimal Load Flow).

A terme, elle pourrait être utilisée dans les problèmes d'optimisation des pertes. Et réduire ainsi, d'une manière considérable les temps de calcul.

En utilisant des techniques de programmation plus avancées, telles que la *sparsité*; on pourra utiliser la Formule Généralisée des Pertes dans les *dispatching* économiques pour évaluer les pertes sur des réseaux réels. Pour cela, il suffit de



**calculer en premier lieu les coefficients des deux formules et par la suite, on déduira les pertes issues de n'importe quelle variation autour du point de fonctionnement.**



***APPENDICES***

## Appendice I

Pour le réseau 5 noeuds suivant :

### Caractéristiques des lignes

Noeud initial	Noeud final	$R_{SL0}$ (p.u)	$X_{SL0}$ (p.u)	$B_{SL0}$ (p.u)
1	2	0.020	0.060	0.030
1	3	0.080	0.240	0.025
2	3	0.060	0.180	0.020
2	4	0.060	0.180	0.020
2	5	0.040	0.120	0.015
3	4	0.010	0.000	0.000
4	5	0.080	0.000	0.000

### Caractéristiques des transformateurs

Noeud initial	Noeud final	$R_{SL0}$ (p.u)	$X_{SL0}$ (p.u)	$T_0$	$K_R$	$K_I$
3	4	0.0000	0.0360	0.00	0.30	0.00
4	5	0.0000	0.2432	0.00	0.30	0.00

### Tension et puissance au niveau de chaque noeud

Noeud	$V_{Mag}$ (p.u)	Delta (deg)	$P_g$ (p.u)	$Q_g$ (p.u)	$P_l$ (p.u)	$Q_l$ (p.u)
1	1.0100	0.0000	-0.1671	-0.2310	0.0000	0.0000
2	1.0200	0.0764	0.6000	0.9852	0.0000	0.0000
3	1.0250	1.1410	0.6500	0.7155	0.0000	0.0000
4	0.9948	0.6498	0.0000	0.0000	-0.1200	-0.6000
5	0.9049	-2.7818	0.0000	0.0000	-0.9000	-0.9000

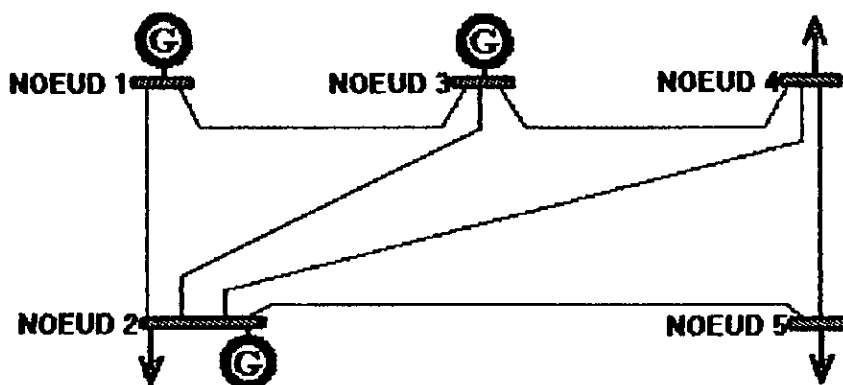


Figure 1 : Schéma du Réseau 5 Noeuds

## Appendice II

Pour le réseau IEEE 14 noeuds suivant :

### Caractéristiques des lignes

Noeud initial	Noeud final	$R_{SL0}$ (p.u)	$X_{SL0}$ (p.u)	$B_{SL0}$ (p.u)
1	2	0.01938	0.05917	0.02640
2	3	0.04699	0.19797	0.02190
3	4	0.06701	0.17103	0.01730
2	4	0.05811	0.17632	0.01870
2	5	0.05695	0.17388	0.01700
4	5	0.01335	0.04211	0.00640
1	5	0.05403	0.22304	0.02460
9	10	0.03181	0.08450	0.00000
10	11	0.08205	0.19207	0.00000
6	11	0.09498	0.19890	0.00000
9	14	0.12711	0.27038	0.00000
13	14	0.17093	0.34802	0.00000
12	13	0.22092	0.19988	0.00000
6	12	0.12291	0.25581	0.00000
6	13	0.06615	0.13027	0.00000
5	6	0.10000	0.00000	0.00000
4	7	0.10000	0.00000	0.00000
7	9	0.10000	0.00000	0.00000
7	8	0.10000	0.00000	0.00000
4	9	0.10000	0.00000	0.00000

### Caractéristiques des transformateurs

Noeud initial	Noeud final	$R_{SL0}$ (p.u)	$X_{SL0}$ (p.u)	$T_0$	$K_R$	$K_I$
5	6	0.00	0.25202	0.00	0.500	0.000
4	7	0.00	0.20912	0.00	0.500	0.000
7	9	0.00	0.11001	0.00	0.500	0.000
7	8	0.00	0.17615	0.00	0.500	0.000
4	9	0.00	0.55618	0.00	0.500	0.000

**Tension et puissance au niveau de chaque noeud**

Noeud	$V_{Mag}$ (p.u)	Delta (deg)	$P_g$ (p.u)	$Q_g$ (p.u)	$P_l$ (p.u)	$Q_l$ (p.u)
1	1.01000	0.00000	2.47817	-0.82492	0.0000	0.0000
2	1.02500	-6.20417	0.40000	0.82320	-0.2170	-0.1270
3	1.01000	-14.53990	0.00000	0.39170	-0.9420	-0.1900
4	1.01000	-12.08588	0.00000	0.89843	-0.1120	-0.0750
5	1.00000	-10.61402	0.00000	0.12157	0.0000	0.0000
6	0.86131	-20.87582	0.00000	0.00000	-0.4780	-0.0390
7	0.92578	-17.03838	0.00000	0.00000	-0.0760	-0.0160
8	0.92578	-17.03838	0.00000	0.00000	0.0000	0.0000
9	0.87095	-19.10563	0.00000	0.00000	-0.2950	-0.1660
10	0.86057	-19.84913	0.00000	0.00000	-0.0900	-0.0580
11	0.85720	-20.55231	0.00000	0.00000	-0.0350	-0.0180
12	0.84428	-21.97741	0.00000	0.00000	-0.0610	-0.0160
13	0.84107	-21.91949	0.00000	0.00000	-0.1350	-0.0580
14	0.83546	-21.83583	0.00000	0.00000	-0.1490	-0.0500

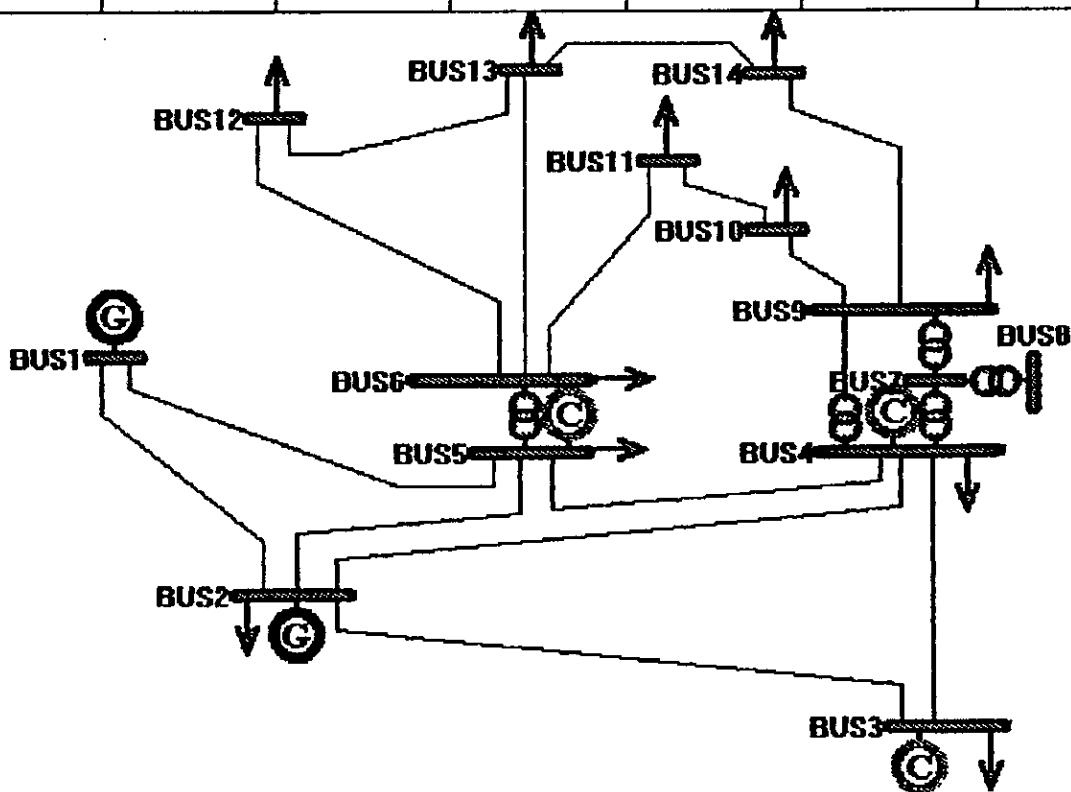


Figure 2 : Schéma du Réseau IEEE 14 Noeuds

### Appendice III

Pour le réseau IEEE 30 noeuds suivant :

#### Caractéristiques des lignes

Noeud initial	Noeud final	$R_{SLO}$ (p.u)	$X_{SLO}$ (p.u)	$B_{SLO}$ (p.u)
1	2	0.01920	0.05750	0.02640
1	3	0.04520	0.18520	0.02040
2	4	0.05700	0.17370	0.01840
3	4	0.01320	0.03790	0.00420
2	5	0.04720	0.19830	0.02090
2	6	0.05810	0.17630	0.01870
4	6	0.01190	0.04140	0.00450
5	7	0.04600	0.11600	0.01020
6	7	0.02670	0.08200	0.00850
6	8	0.01200	0.04200	0.00450
6	9	0.00000	0.20800	0.00000
6	10	0.00000	0.55600	0.00000
6	28	0.01690	0.05990	0.00650
8	28	0.06360	0.20000	0.02140
9	11	0.00000	0.20800	0.00000
9	10	0.00000	0.11000	0.00000
4	12	0.00000	0.25600	0.00000
12	13	0.00000	0.14000	0.00000
12	14	0.12310	0.25590	0.00000
12	15	0.06620	0.13040	0.00000

Noeud initial	Noeud final	$R_{SL0}$ (p.u)	$X_{SL0}$ (p.u)	$B_{SL0}$ (p.u)
12	16	0.09450	0.19870	0.00000
14	15	0.22100	0.19970	0.00000
16	17	0.08240	0.19230	0.00000
15	18	0.10700	0.21850	0.00000
18	19	0.06390	0.12920	0.00000
19	20	0.03400	0.06800	0.00000
10	20	0.09360	0.20900	0.00000
10	17	0.03240	0.08450	0.00000
10	21	0.03480	0.07490	0.00000
10	22	0.07270	0.14990	0.00000
21	22	0.01160	0.02360	0.00000
15	23	0.01000	0.20200	0.00000
22	24	0.11500	0.17900	0.00000
23	24	0.13200	0.27000	0.00000
24	25	0.18850	0.32920	0.00000
25	26	0.25440	0.38000	0.00000
25	27	0.10930	0.20870	0.00000
28	27	0.00000	0.39600	0.00000
27	29	0.21980	0.41530	0.00000
27	30	0.32020	0.60270	0.00000
29	30	0.23990	0.45330	0.00000

### Caractéristiques des transformateurs

Noeud initial	Noeud final	$R_{SL0}$ (p.u)	$X_{SL0}$ (p.u)	$T_0$	$K_R$	$K_I$
12	14	0.1231	0.25590	0.00	0.500	0.000
10	21	0.03480	0.07490	0.00	0.500	0.000

### Tension et puissance au niveau de chaque noeud

Noeud	$V_{Mag}$ (p.u)	Delta (deg)	$P_g$ (p.u)	$Q_g$ (p.u)	$P_l$ (p.u)	$Q_l$ (p.u)
1	1.02000	0.00000	2.61798	-0.40073	0.0000	0.0000
2	1.01000	-5.06581	0.40000	0.00947	-0.2170	-0.1270
3	1.01000	-11.87416	0.00000	0.18161	-0.9440	-0.1900

4	1.02000	-12.35588	0.00000	1.72725	-0.3000	-0.3000
5	1.01000	-8.61312	0.00000	0.00053	0.0000	-0.0000
6	0.99828	-12.05217	0.00000	0.22363	0.0000	0.0000
7	0.94887	-10.70287	0.00000	0.00000	-0.0240	-0.0120
8	0.92475	-12.31591	0.00000	0.00000	-0.0760	-0.0160
9	0.94887	-16.85027	0.00000	0.00000	0.0000	0.0000
10	0.94314	-19.59204	0.00000	0.00000	-0.2280	-0.1090
11	0.93172	-16.85027	0.00000	0.00000	0.0000	0.0000
12	0.92595	-19.34868	0.00000	0.00000	-0.0580	-0.0200
13	0.92107	-20.37109	0.00000	0.00000	-0.1120	-0.0750
14	0.92739	-20.35572	0.00000	0.00000	-0.0620	-0.0160
15	0.91958	-20.34235	0.00000	0.00000	-0.0820	-0.0250
16	0.90861	-19.79685	0.00000	0.00000	-0.0350	-0.0180
17	0.90477	-19.91745	0.00000	0.00000	-0.0900	-0.0580
18	0.90888	-20.96556	0.00000	0.00000	-0.0320	-0.0090
19	0.91180	-21.09152	0.00000	0.00000	-0.0950	-0.0340
20	0.90888	-20.78783	0.00000	0.00000	-0.0220	-0.0070
21	0.91180	-20.08735	0.00000	0.00000	-0.1750	-0.1120
22	0.91275	-20.04656	0.00000	0.00000	0.0000	0.0000
23	0.91005	-20.49210	0.00000	0.00000	-0.0320	-0.0160
24	0.90477	-20.24571	0.00000	0.00000	-0.0870	-0.0670

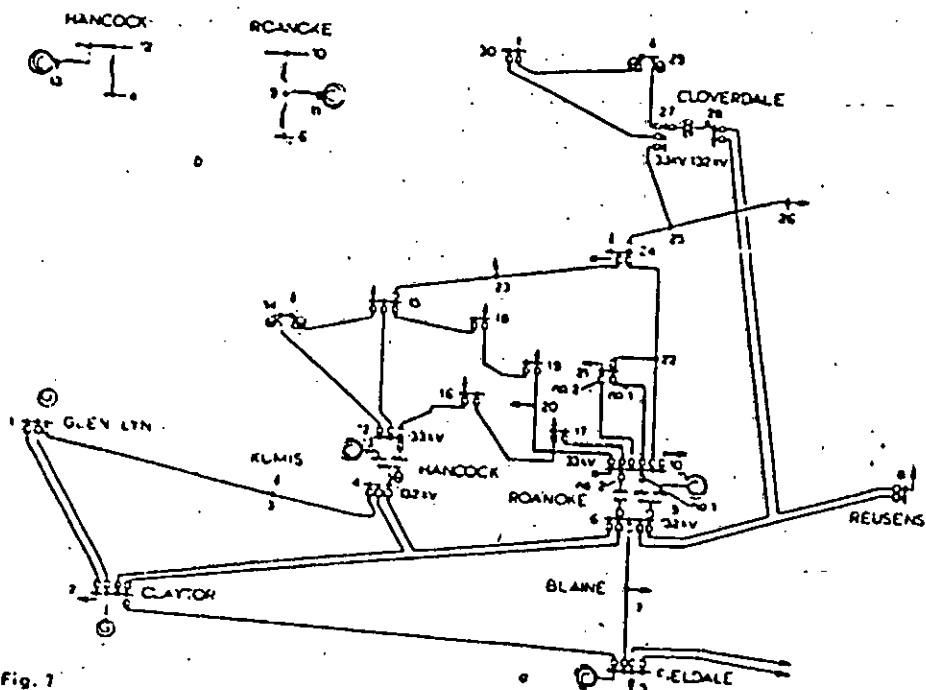


Fig. 1  
AEP 30 bus test system



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1]- A. Semlyen and G.X. Luo, "Losses in Power Systems Networks", *CAN. ELECT. ENG. J.*, Vol. 13 No. 1, 1988, pp. 8-16.
- [2] H.H. Happ, "Optimal Power Dispatch -a Comprehensive Survey", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-96, May/June 1977, pp. 841-850.
- [3] H.W. Dommel and W.F. Tinney, "Optimal Power Flow Solutions", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-87, October 1968, pp.1866-1876.
- [4] R.C. Burchett, H.H. Happ and K.A. Wirgau, "Large Scale Optimal Power Flow", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-101, October 1982, pp. 3722-3732.
- [5] W.F. Tinney and C.E. Hart, "Power Flow Solution by Newton's Method", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-86, November 1967, pp. 1449-1460.
- [6]- G.T. Heydt, *Computer Analysis Methods for Power Systems*, MacMillan Publishing Company, New York.
- [7] O.I. Elgerd, *Electric Energy Systems Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1971.
- [8]- B.M. Weedy, *Electric Power Systems*, John Wiley & Sons, Third Edition Revised.
- [9]- A.J. Wood and B.F. Woollenberg, *Power Generation Power and Control*, John Wiley & Sons, 1984.
- [10]-A. Jennings, *Matrix Computation for Engineers and Scientists*, John Wiley & Sons, 1980.
- [11]-L.L. Freris and A.M. Sasson, "Investigation of the Load Flow problem", *PROC. IEE*, Vol. 115, No. 10, October 1968, pp 1459-1470