

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

D.E.R de Génie Electrique et Informatique

Filière : Electronique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Electronique*

Thème

**EVALUATION DES TCM
MULTIDIMENSIONNELLES ET
MULTIPLES.**

Proposé et Dirigé par :
M. Z. TERRA

Etudié par :
AMOURI Rafik
TRIDI Mourad

Promotion : juin 1999

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Ecole Nationale Polytechnique

D.E.R de Génie Electrique et Informatique

Filière : Electronique



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

*Pour l'obtention du diplôme d'ingénieur d'état
en Electronique*

Thème

**EVALUATION DES TCM
MULTIDIMENSIONNELLES ET
MULTIPLES.**

Proposé et Dirigé par :
M. Z. TERRA

Etudié par :
AMOURI Rafik
TRIDI Mourad

Promotion : juin 1999

E.N.P. 10, AVENUE HASSEN BADI - EL-HARRACH - ALGER

ملخص:

هذا العمل يستعرض تحسين TCM التي تدمج المواثمة مع مشفرة القناة, ولهذا نستعمل TCM متعددة الأبعاد و TCM المضاعفة في هذا الإطار قمنا بتقدير TCM متعددة الأبعاد و TCM المضاعفة, وذلك بحساب احتمال حادث خطأ و التدفق المقطع ومعامل الإتساع .

Résumé :

Ce travail expose l'amélioration de la MCT qui combine la modulation et le codage du canal, pour ce but nous utilisons la TCM multidimensionnelle et la MCT multiple. Dans ce cadre, nous avons évalué les performances des systèmes à MCT multidimensionnelle et la MCT multiple en estimant la probabilité d'erreur par bit, le débit de coupure et le facteur d'expansion.

Mots-clés : Modulation codée en treille multidimensionnelle, treille multiple, codeurs convolutif, Lattice, coset, distance limite, débit, débit de coupure, probabilité d'erreur par bit.

Abstract :

This work expose the evaluation of the TCM who combines the modulation and the of channel coding, for this purpose we use the multidimensionnel TCM and the multiple TCM. In this context, we evaluate the performances of the systems using multidimensionnel TCM and multiple TCM, by esteeming the bit error probability, the cuttof-rate and expansion factor.

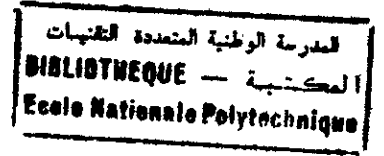
Key words : Multidimensionnel trellis coded modulation, multiple trellis, covolutive encoder, lattice, coset, free distance, rate, cuttof-rate.

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEDICACES

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :



- á mes très chers parents pour leur soutien durant toutes mes études .
- á mon frère Hakim.
- á mes sœurs.
- á toute ma famille.
- á tous mes amis.

Mourad

Je dédie ce modeste travail :

- á mes très chers parents pour leur soutien durant toutes mes études .
- á mon frère Mohammed.
- á ma sœurs et mes frères.
- á toute ma famille.
- á tous mes amis.

Rafik

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

REMERCIEMENT

Remerciement

المدرسة الوطنية المتعددة التخصصات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

Ce travail à été effectué au sein du laboratoire de traitement de signal du département de Génie Electrique et Informatique sous la direction de Monsieur Z.TERRA chargé de cour à l'ENP.

Nous tenons à lui exprimé notre profonde gratitude et nos sincères remerciements pour son soutien et son aide sans réserve qu'il nous a apporté par ces précieux conseils et par sa méthode de travail très organisée .

Nos remerciements s'adressent à tout les enseignants qui ont contribués à notre formation.

Nous finissons en saluant la promotion d'électronique de 1999.

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

SOMMAIRE

SOMMAIRE

Introduction.....1

Chapitre I . TCM multidimensionnelle

1.1. Introduction .. 3

1.2. TCM multidimensionnelle basée sur les Lattices.....4

 1.2.1 la partition d'ensemble de signaux multidimensionnelle.....4

 1.2.3 les exemples de constellation du Lattice par TCM.....5

1.3. configurations TCM de Calderbank-Sloane basées sur les Lattices.....7

1.4. Groupes d'alphabets.....10

 1.4.1. Partition d'ensemble d'un GA.....11

1.5. Construction de Ginzburg.....12

 1.5.1 Principe de base de la construction de Ginzburg.....12

 1.5.2 Conception des configurations TCM.....16

1.6. Construction de Wei17

 1.6.1. Principe de base de la technique de Wei.....17

 1.6.2.Implementation de la technique de Wei18

 1.6.3. Conception des configurations18

 1.6.4. La partition de constellation à 8 dimension19

 1.6.5. Conception du codeur.....20

 1.6.6. Conception d'un décodeur.....23

1.7 Conclusion.....24

Chapitre II . La multiple TCM

2.1. Introduction26

2.2. Principe de la TCM26

2.3. MTCM à deux états.....28

 2.3.1. Cas de la QPSK.....28

2.3.2 Cas de la M-AM.....	30
2.3.3. Procédure de mapping pour la MTCM à deux états	31
2.3.4. Evaluation de la distance limite d_{free}	34
2.4. Généralisation de la MTCM	35
2.4.1. La méthode de Partition d'ensemble.....	35
2.4.2. L'ensemble mapping et l'évaluation de la distance limite d_{free}	43
2.5. La représentation analytique de la MTCM	50
2.6. Conclusion	56

Chapitre III . Evaluation des performances de la modulation codée en treillis multiple

3.1. Introduction	57
3.2. Calcul de la distance limite d_{free}	57
3.3. Calcul du débit de coupure (cutoff rate) de la MTCM.....	59
3.3.1 Calcul de la performance de la MTCM	59
3.4. Probabilité d'erreur par bit	62
Interprétations des résultats.....	63
Conclusion	65

Conclusion générale	66
Bibliographie	67
Annexe :.....	69

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
المكتبة — BIBLIOTHEQUE
Ecole Nationale Polytechnique

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION

La tâche de la conception d'un système de communication est de réaliser un système efficace et raisonnable pour la transmission d'information à partir d'une source à un débit et un niveau de fiabilité acceptable.

Les critères importants lors d'une conception sont : la puissance du signal transmis, la bande passante du canal, la probabilité d'erreur par bit transmis.

La modulation codée en treillis est la combinaison du codage et la modulation pour améliorer la qualité d'un système de transmission numérique sans augmenter la puissance transmise ou la bande passante. Pour améliorer la performance d'une configuration TCM basée sur une constellation donnée, le nombre d'états doit être augmenté et quand ce nombre dépasse une certaine valeur, le gain du codage croît lentement. Comment augmenter le gain du codage ?

La motivation à utiliser des signaux dans un espace multidimensionnel pour la transmission numérique date aux travaux de Shannon. Dans ces analyses célèbres, il reconnaît que la performance de la constellation des signaux utilisés pour transmettre une information numérique dans un canal AWGN peut être améliorée en augmentant la dimension de l'ensemble des signaux. En particulier quand la dimension atteint l'infini, la performance tend vers la limite théorique de Shannon.

Pratiquement, quand la dimension augmente, nous avons plus d'espace pour accommoder les signaux et donc la distance entre les points messages augmente et donc une décroissance de la probabilité d'erreur.

Le but de notre projet de fin d'études est fixé par le cahier de charge proposé et qui consiste à évaluer la TCM multidimensionnelle et multiple relativement avec les autres configurations à savoir les TCMs conventionnelles et modulation non codée.

Le travail réalisé est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre présente des généralités sur la TCM multidimensionnelle où nous évoquons les différentes constructions et leurs techniques : la construction basée sur les Lattices, la construction de Calderbank et Mazo, la construction basée sur les groupes d'alphabets, la construction de Ginzburg et la construction de Wei.

Le deuxième chapitre traite des généralités sur la TCM multiple où nous définissons un nouveau critère d'évaluation le throughput. Nous évoquons ses différentes représentations et

différentes méthodes de partition pour le cas de la modulation 8-PSK avec différentes valeurs de multiplicité $k=2, 3, 4$ et différents nombre d'états. Nous illustrons quelques applications pour plus de compréhension. Enfin, nous exposons une méthode analytique avec quelques exemples d'applications.

Le dernier chapitre est consacré à l'évaluation des performances de la MTCM, en fonction de leurs paramètres : la distance limite d_{free} , le débit de coupure (cutoff rate) et la probabilité d'erreur par bit. On a utilisé le langage MATLAB pour la programmation de ces paramètres.

Un annexe contenant le détail de la théorie de la probabilité d'erreur et l'algorithme de Viterbi est donné.

CHAPITRE 1

Chapitre 1

la TCM multidimensionnelle

1.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est d'introduire l'espace multidimensionnel dans la configuration TCM. L'utilisation des signaux dans un espace multidimensionnel pour la transmission numérique date aux travaux de Shannon. D'après ses études, la performance de la constellation des signaux utilisés pour transmettre une information numérique, peut être améliorée en augmentant la dimension de l'ensemble des signaux.

Ce chapitre présente des techniques de la TCM multidimensionnelle où nous évoquons ses différentes constructions:

- Construction basée sur les lattices.
- Construction de Calderbank et Mazo.
- Construction basée sur les groupes d'alphabets.
- Construction de Ginzburg.
- Construction de Wei .

Nous comparons ces techniques de constructions avec les TCMs conventionnelles et la modulation non codée.

1.2.La TCM multidimensionnelle basée sur les lattices [5], [6], [1]

1.2.1.La partition d'ensemble de signaux multidimensionnels [8]

En premier lieu, nous formalisons le concept de la partition, ce traitement est nécessaire parce qu'avec des ensembles de signaux multidimensionnels, il n'est pas possible de se relier aux figures simples pour décrire le procédé de la partition.

Soit la constellation H, nous obtenons sa partition en la divisant en une famille Γ de sous ensembles. Au niveau L de la partition de H nous avons la séquence de partition $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_L$.

L'intradistance δ_i est la distance entre les éléments du sous ensemble est définie comme la distance minimum entre les signaux appartenant à Γ_i :

$$\delta_i = \min(a, b) \Big|_{\substack{a \neq b \\ a, b \in \varphi}} \quad \text{où } \varphi \in \Gamma_i \quad (1.1)$$

L'interdistance est la distance entre les sous ensembles, c'est la distance minimum entre les éléments de deux sous constellations différentes au même niveau de la partition.

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \min d(a, b) \quad (1.2)$$

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma_i$$

Où le minimum est pris sur tout les signaux a , b choisit de différentes sous constellations Γ_i .

1.2.2.Rappel sur les lattices :

Le lattice Λ est un ensemble fermé muni des opérations d'additions et de multiplications sur des entiers. Le lattice Λ à N dimensions est un ensemble de points ou de vecteurs de m dimensions selon la forme :

$$X = U_1 \cdot I_1 + \dots + U_N \cdot I_N \quad (1.3)$$

avec :

X : est un vecteur de dimension m.

U_i : des entiers.

$I_k, k=1,2,\dots,N$:des vecteurs linéairement indépendant dans un espace réel euclidien R^m ($m \geq N$). Les vecteurs I_k forment une base pour le lattice Λ

$$I_1 = (i_{11}, \dots, i_{1m})$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$I_N = (i_{N1}, \dots, i_{Nm}) \quad (1.4)$$

La matrice génératrice de Λ est :

$$M = \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

soient deux lattices Λ et Λ' et si l'un est équivalent de l'autre on écrit :

$$\Lambda \approx \Lambda'$$

soit d_{\min} est une distance minimale entre deux points dans le lattice . le nombre τ est définie comme le nombre de points adjacents du lattice localisés à la distance distance d_{\min} .

-Trasformation du lattice :

On donne le lattice Λ avec le vecteur x un nouveau lattice peut se générer avec les opérations suivantes :

- démultiplication : si r est un nombre alors $r\Lambda$ est le lattice du vecteur rx .
- Transformation orthogonale : si T est la transformation scalaire orthogonal de \mathbb{R}^n alors $T\Lambda$ est le lattice avec des vecteurs Tx
- produit direct : le n -fois produit direct de Λ par lui même, c'est a dire l'ensemble de tous les n -tuples (x_1, x_2, \dots, x_n) ou chaque $x_i \in \Lambda$, est un lattice résultant noté par Λ^n

-Le lattice Z^n :

L'ensemble Z^n formé de tout n -tuples(fois) ayant des coordonnées entières est appelé lattice cubique, sa matrice génératrice est la matrice unité de dimension $n \times n$. La distance minimale d_{\min} entre deux points du lattice est égale à 1. Le nombre τ de points des lattices adjacent localisés à une distance d_{\min} est égal à $2n$.

-Structure algébrique du lattice:

Le lattice Λ est un groupe, soit Λ' un sous lattice de Λ qui forme un sous-groupe, en conséquence Λ' provoque une partition de Λ en ses sous-ensembles les quels sont Λ' et ses cosets.

1.2.3.Les exemples de constellation du lattice par TCM :

Nous considérons quelques exemples simples de constellations basés sur les lattices en conjonction avec les configurations TCM.

Le premier exemple à traiter est basé sur l'utilisation des signaux à 4 dimensions,

Les configurations de modulations à 4D peuvent être générer en transmettant deux signaux à deux dimensions indépendants sur les deux pairs de dimensions.

La figure1.1 montre des constellations à deux dimensions avec 2^m points qui sont des sous-ensembles du lattice Z^2 .

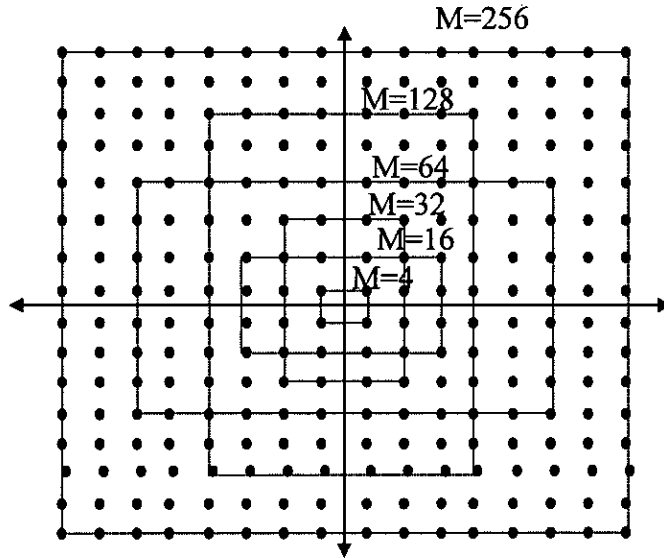


Figure 1.1: Constellation à deux dimensions comme des sous ensembles du lattice Z^2

Exemple 1 :

Soit le codeur en treillis à deux états, et 2 bits par symbole voir la figure 1.2

- | | |
|--------------|---------------|
| $C_0 = 1000$ | $C_4 = -1000$ |
| $C_1 = 0100$ | $C_5 = 0-100$ |
| $C_2 = 0010$ | $C_6 = 00-10$ |
| $C_3 = 0000$ | $C_7 = 000-1$ |

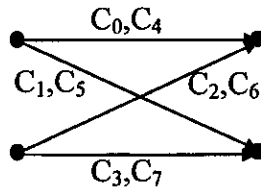


Figure 1.2 : Codeur à 2 états avec 2 bits/symboles et signaux à 4D

Nous assignons des symboles d'un ensemble octal aux 8 branches du treillis.

La distance entre transition parallèle est $d^2=4$, la distance d'un événement d'erreur de longueur 2 est

$d^2 = 4$, l'énergie moyenne par symbole est 1 donc $\frac{d_{free}^2}{E} = 4$.

En comparant cet configuration TCM avec la modulation 2-PSK non codée (2 bits par 4D) où

$\frac{d_{min}^2}{E} = 2$ qui montre un gain de codage asymptotique de 3dB.

Exemple 1. 2 :

Considérons le codeur en treillis à 4 états en transmettant 3 bits par symboles schématisés par la figure 1.3, le carré de la distance entre sous ensembles est 16, le carré de la distance entre «éléments du sous ensemble est 8, le carré de la distance de l'événement d'erreur de longueur 2 est

12. Le rapport $\frac{d_{free}^2}{E} = \frac{12}{4} = 3$ correspondant à une occupation d'énergie de 9, l'efficacité de la bande passante est 0.75.

En comparant cette configuration avec les signaux 4x4 non codés, nous aurons une amélioration dans l'efficacité d'énergie de $10 \log(9/4) = 3,6$ dB.

Une conception similaire montre qu'avec un codeur à 8 états nous aurons un gain dans l'efficacité d'énergie sur la modulation à 16 signaux non codées de 4,8dB.

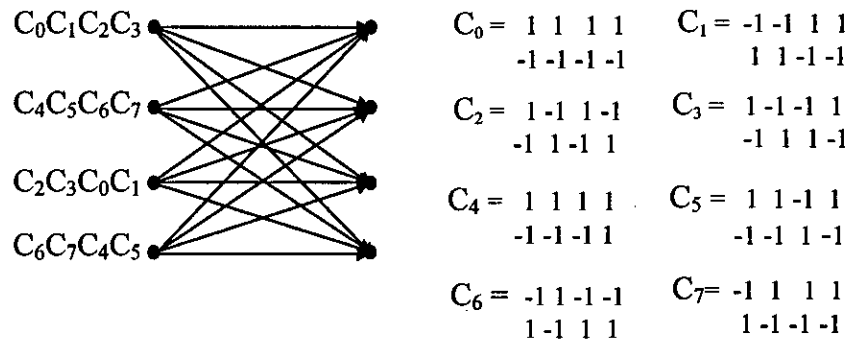


Figure 1.3 : Codeur à 4 états avec 3 bits/symboles et 4 signaux à 4D.

1.3. Configurations TCM de Calderbank - Sloane basées sur les lattices [16] :

Ces configurations sont basées sur un nouveau concept de codeur convolutif généralisés où ces sorties sont les cosets du lattice.

Le sous lattice $\Lambda' \subseteq \Lambda$ est obtenu en appliquant un endomorphisme R à Λ qui modifie les distances par un facteur de \sqrt{m} . le nombre de cosets de Λ' dans Λ est $m^{N/2}$.

La figure 1.4 montre un codeur en treillis ayant K entrées constituées de deux blocs :

- un codeur convolutif ayant K_1 entrées et un symbole de sortie choisis de la partition Λ/Λ' .
- un bloc de sélection

Le symbole de sortie dépend du bloc d'entrées de taille K_1 et des blocs v précédents. Soit \mathfrak{S} l'ensemble des cosets possibles qui se produisent comme sorties du codeur.

La constellation de signaux ayant $M = |\mathfrak{S}| \cdot q^{K_2}$ points de Λ partitionnées en q^{K_2} points dans chaque coset de \mathfrak{S} . Les K_1 bits d'entrées du codeur convolutif produisent le coset Λ' dans Λ où les K_2 bits servent à sélectionner un des q^{K_2} points dans le coset, cette configuration a un rendement $K \cdot \log_2 q$ bits/symbole où $K = K_1 + K_2$.

Soit v le nombre d'éléments mémoire de ce codeur, le nombre d'états dans le codeur est q^v . Les branches sont étiquetées avec les symboles de sorties, c'est à dire par les codes de Λ' , il y a q^{K_1} branches émanantes de chaque état.

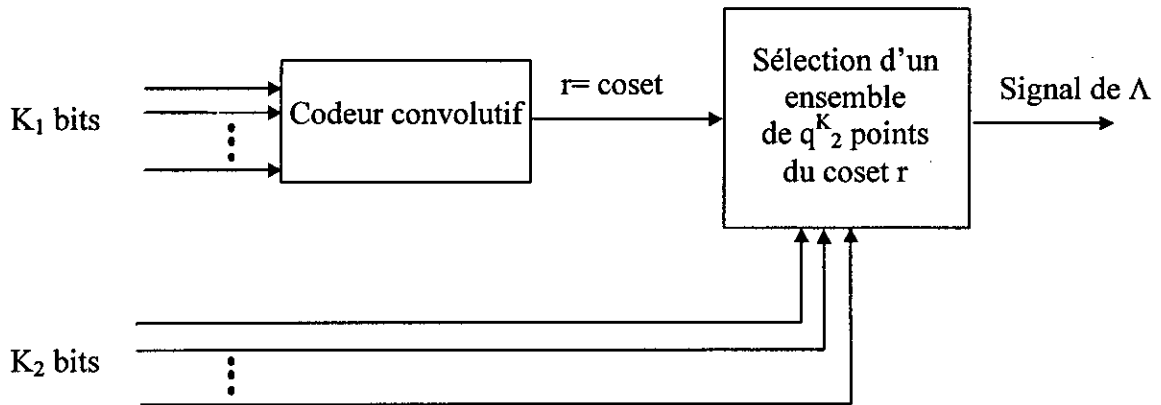


Figure 1.4 : Codeur de calderbank et Sloane

Le gain de codage est calculé avec référence à une configuration non codée utilisant des constellations basées sur le lattice Z^n .

Le codeur convolutif linéaire est décrit par la matrice génératrice :

$$G = \left[g_{vK_1}, \dots, g_{v_1} \mid \dots \mid g_{1K_1}, \dots, g_{11} \mid g_{0K_1}, \dots, g_{01} \right] \tag{1.6}$$

Ces entrées sont les éléments de Λ/Λ .

Les symboles de la source via le canal sont étiquetés par u_{ij} avec $u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0K_1}$ est le bloc d'entrée courant, $u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1K_1}$ le bloc précédent.

La sortie courante est le coset :

$$r = \sum_{i=0}^v \sum_{j=1}^{K_1} u_{ij} \cdot g_{ij} \tag{1.7}$$

Exemple 1.3 :

Nous considérons $N=2$ et la partition $Z^2/4Z^2$. Ici $m=16$ donc nous obtenons 16 cosets décrit dans le tableau 1.1 :

Représentation des cosets	étiquette des points	représentation des cosets	étiquette des points
(0 , 0)	3	(0 , 2)	11
(1 , 0)	0	(1 , 2)	8
(2 , 0)	1	(2 , 2)	9
(-1 , 0)	2	(-1 , 2)	10
(0 , -1)	7	(0 , 1)	15
(1 , -1)	4	(1 , 1)	12
(2 , -1)	5	(2 , 1)	13
(-1 , -1)	6	(-1 , 1)	14

La figure 1.5 montre la constellation avec 64 points utilisés en conjonction avec cette partition. Chaque coset a 4 points et l'énergie moyenne de la constellation est 10,25 . Soit une source quaternaire ($q = 4, K_1 = K_2 = 1$) nous obtenons un débit de 2 bits/dimension.

La matrice génératrice du codeur convolutif est :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

où les cosets sont représentés dans les colonnes du tableau 1.1.

Le coset de sortie à l'instant j est :

$$\Lambda + G.u_j \quad (1.9)$$

où $u_j = (u_{(j-2)}, u_{(j-1)}, u_j)^T$

Le carré de la distance entre les cosets est 16 tandis que le carré de la distance minimum de l'événement d'erreur est 12 donc :

$$d_{free}^2 = 12$$

En comparaison avec la constellation 16 QAM non codée avec le même débit nous obtenons un gain de codage asymptotique :

$$G = 10 \cdot \log \left(\frac{12/10,25}{4/10} \right)$$

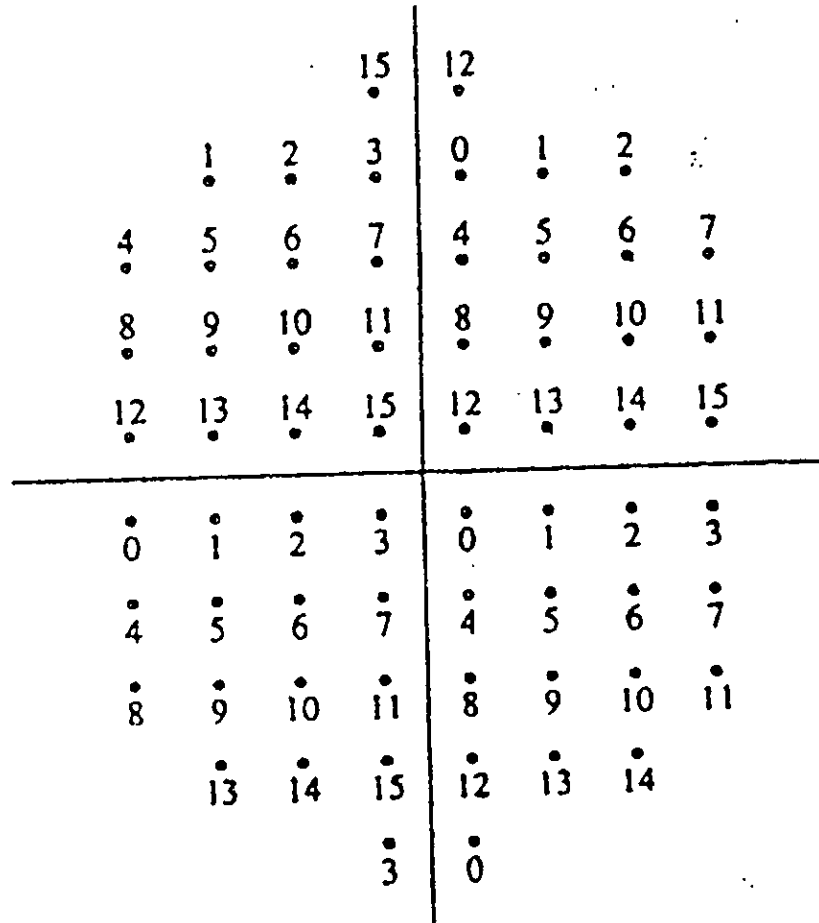


Figure 1.5 : Constellation avec 64 points pour $Z^2/4Z^2$.

1.4. Groupes d'alphabets [15] :

Le problème de base avec les signaux multidimensionnels est la partition d'ensemble, cette procédure requise dans la conception des configurations TCM peut être difficile si l'ensemble de signaux n'est pas doté d'une structure particulière.

Nous considérons une classe spéciale des ensembles de signaux ayant des propriétés dont lesquelles la partition d'ensemble est faite en utilisant des techniques algébriques. Cette classe est basée sur le concept de «codes groupes» pour un canal gaussien introduit par Slepian et aussi inclus les signaux qui sont générés par les codes de Slepian qui ont plus d'un niveau d'énergie, elle offre un grand degré de symétrie et une structure algébrique. Les groupes d'alphabets sont générés de la manière suivante:

Considérons un ensemble de K vecteurs de dimension N tel que $X = [X_1, X_2, \dots, X_K]$ appelés ensemble initial et L matrices orthogonales de dimensions $N \times N$ S_1, S_2, \dots, S_L qui forment un groupe fini Ψ . L'ensemble de vecteurs $[\Psi_{X_1}, \Psi_{X_2}, \dots, \Psi_{X_K}]$ obtenus de l'action de Ψ sur l'ensemble initial est appelé groupe d'alphabet (GA).

Définitions:

-Un GA est dit séparable si les vecteurs de l'ensemble initial sont transformés par Ψ en ensembles de vecteurs disjoints ou coïncidents, c'est à dire l'intersection des ensembles ψ_{x_j} et ψ_{x_k} est soit vide (pour $j \neq k$) ou égal à ψ_{x_j} lui-même (pour $j = k$).

-Un GA est dit régulier si le nombre de vecteurs dans chaque sous-alphabet $x_j, j = 1, \dots, K$ ne dépend pas de j tel que chaque vecteur de l'ensemble initial est transformé au même nombre de vecteurs distincts.

- Un GA régulier est appelé solide si chaque ensemble Ψ_{x_j} contient exactement L vecteurs distincts. En conséquence, il découle qu'un nombre M de vecteurs dans un GA est un multiple de K , si le GA est solide.

Nous considérons un exemple dont lequel nous montrons que la M-PSK asymétrique, un ensemble de signaux à deux dimensions avec un niveau d'énergie peut être générer comme un GA.

-Nous choisissons un vecteur initial $X = (\cos \theta, \sin \theta)$ où θ est une constante donnée et l'entier $M=2^m$.

-nous considérons le groupe de matrices de dimension 2×2 orthogonales de la forme

$$R^i \cdot T^j \quad i = 0, \dots, M-1 \quad j = 1, 2$$

Avec:

$$R = \begin{bmatrix} +\cos\frac{2.\Pi}{M} & +\sin\frac{2.\Pi}{M} \\ -\sin\frac{2.\Pi}{M} & +\cos\frac{2.\Pi}{M} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

L'effet de R sur le vecteur à deux dimensions est de le tourner par un angle $\frac{2.\Pi}{M}$ et T change ces composants. Ce groupe a $2M$ éléments donne un alphabet séparable de M ou $2M$ vecteurs, selon le choix du vecteur initial. Cet alphabet est régulier s'il a $2M$ éléments.

Un alphabet à 4D et un niveaux d'énergie :

Considérons le groupe de matrices qui agit sur un vecteur initial à 4D par permutation de ces éléments et en remplaçant un ou plusieurs d'entre eux par leurs signes opposés.

Ce groupe a $2!2^4$ éléments. Si le vecteur initial est $x = (a,a,a,0)$ l'alphabet résultant à $M=32$ vecteurs distincts à énergie unitaire comme le montre le tableau 1.2

a	a	a	0	a	a	0	a	a	0	a	a	0	a	a	a
0	-a	a	a	-a	a	-a	0	a	a	0	-a	-a	0	-a	a
a	0	-a	-a	0	-a	-a	a	-a	a	a	0	-a	a	0	-a
a	-a	0	-a	-a	0	a	a	0	-a	a	-a	a	a	-a	0
-a	-a	-a	0	-a	-a	0	-a	-a	0	-a	-a	0	-a	-a	-a
0	a	-a	-a	a	-a	a	0	-a	-a	0	a	a	0	a	-a
-a	0	a	-a	0	a	a	-a	a	-a	-a	0	a	-a	0	a
-a	a	0	a	a	0	-a	-a	0	a	-a	a	-a	-a	a	0

1.2 : GA et ces 4 sous ensembles

1.4.1.Partition d'ensemble d'un GA:

Pour concevoir des configurations TCM basées sur le GA, nous devons partitionner la constellation en sous-ensembles de même cardinal et exhibent des distances similaires pour produire une symétrie maximum, une configuration TCM efficace exhibe une symétrie large.

Choisissons une partition GA en m sous ensembles $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots, \mathfrak{S}_m$, pour chaque sous ensemble, nous définissons un ensemble formé de toutes les distances entre deux vecteurs dans \mathfrak{S}_i où $i=1, \dots, m$. Pour chaque deux sous ensemble distincts $\mathfrak{S}_i, \mathfrak{S}_j$ nous définissons un ensemble formé de tout les distances euclidiennes entre un vecteur de \mathfrak{S}_i et un vecteur de \mathfrak{S}_j . La partition de GA est appelée «équitable» si tout les sous ensembles sont distincts et contiennent le même nombre de vecteurs et possèdent la même distance entre leurs éléments.

Pour générer un ensemble équitale de GA, considérons le groupe Ψ générant le GA et assumons que chaque ensemble Ψ_x , contenant exactement L vecteurs distincts. Prenons un de ces sous-groupes dite H et la partition de Ψ en cosets de H .

Si les cosets de H sont appliqués à l'ensemble initial de GA, cette procédure résulte en une partition équitale de GA.

On considère un exemple dont lequel le GA est basé sur le groupe Ψ de matrices qui permute les éléments de 4 vecteurs et en les remplaçant par leur négatives. Le tableau 1.2 illustre une partition équitale de cet alphabet en 4 sous-ensembles chacun comporte 8 vecteurs. La partition est obtenue de la façon suivante :

Soit la matrice orthogonale D dont son effet sur un vecteur est de chiffrer ces éléments par une position.

L'ensemble H est alors :

$$H = \{D^0, D^1, D^2, D^3, D^4, D^5, D^6, D^7\} \quad (1.11)$$

H est un sous-groupe cyclique normal et ces cosets gênèrent la partition équitale.

La distance minimum entre vecteurs dans le GA est $2.a^2$ alors que la distance entre les éléments d'un sous ensemble est $6.a^2$. En choisissant un codeur en treillis à 4 états avec $K=4$ comme le montre la figure 1.6

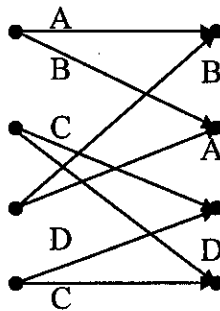


Figure 1.6 : Configuration TCM à 4 états pour le GA .

Le calcul montre que:

$$\frac{dfree^2}{E} = 6.a^2 \text{ et un gain de 3dB par rapport à la modulation 4-PSK non codée.}$$

1.5.La construction de Ginzburg [7] :

Ginzburg a décrit une construction de signaux multidimensionnels, qui nous permet de concevoir des signaux qui ont une distance minimale arbitraire, et une structure régulière en combinant des signaux élémentaires et en utilisant des caractéristiques algébriques des codes bloc, la construction de Ginzburg permet de convertir les schémas complexes entre les bits source et les signaux de N- dimensions en des simples schémas qui implique des constellations de dimension

plus basses qui se donne à une méthode de décodage sub-optimum soumise à une structure parallèle.

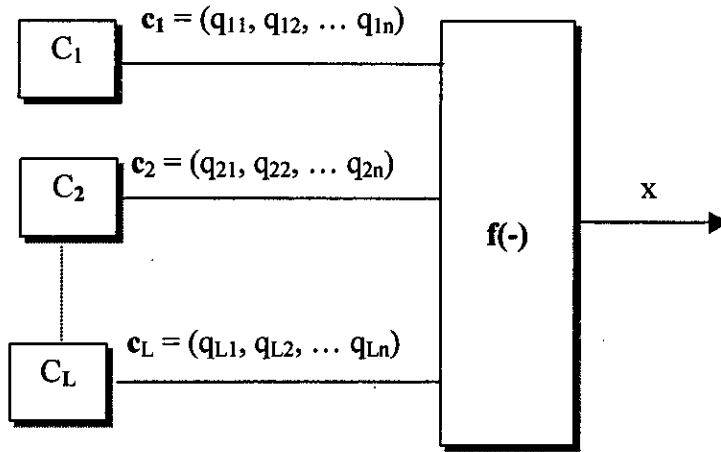


Figure 1.7 : Construction de Ginzburg

La figure 1.7 montre une construction de L- étage, les L codeurs de bloc C_1, C_2, \dots, C_L acceptent les symboles sources et L blocs résultants.

$$c_i = (q_{i1} ; q_{i2} ; \dots ; q_{in}) \tag{1.12}$$

avec : $i = 1 \dots L$

de n symboles chacun, Les symboles de C_i sont choisis à partir d'un alphabet de M_i éléments, le signal de sortie x dépend de L n- tuples, c'est à dire de :

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{L1} & \dots & q_{Ln} \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

On peut écrire x sous forme de l'un des trois formes suivantes :

$$x = f(Q)$$

$$x = f(c_1 \dots c_L)$$

$$x = (F(q_1), F(q_2), \dots, F(q_n))$$

Où les mots codes $c_i, i = 1 \dots L$, sont les lignes de la matrice Q et $q_j, j = 1 \dots n$, sont les colonnes, chaque composante de x , appelé un signal élémentaire, est une fonction d'un vecteur q_j appliqué comme étiquette du signal élémentaire. Les signaux élémentaires $F(q_j)$ sont choisis à partir d'un ensemble de $M = M_1 \dots M_L$ éléments. Le mapping F est obtenu avec l'objectif d'agrandir la distance minimale euclidienne entre 2 signaux élémentaires (messages) qui dépend seulement de la différence entre ses étiquettes. Pour cet objectif dans l'ensemble A on définit un système de L partition. Chaque classe de $\ell^{ème}$ partition inclus M_L classe de $(\ell-1)^{ème}$ partition de façon qu'on a $M_1 M_2 \dots M_L$ signaux élémentaires. Si q_{ij} sont choisis dans l'ensemble $\{0, \dots, M_\ell-1\}, \ell = 1 \dots L$, alors

quel que soit le L-tuplet $(q_{1j} \dots q_{Lj})$ définit une valeur unique du $j^{\text{ème}}$ signal élémentaire $F(q_{1j} \dots q_{Lj})$, voir (fig.1.8). α }.

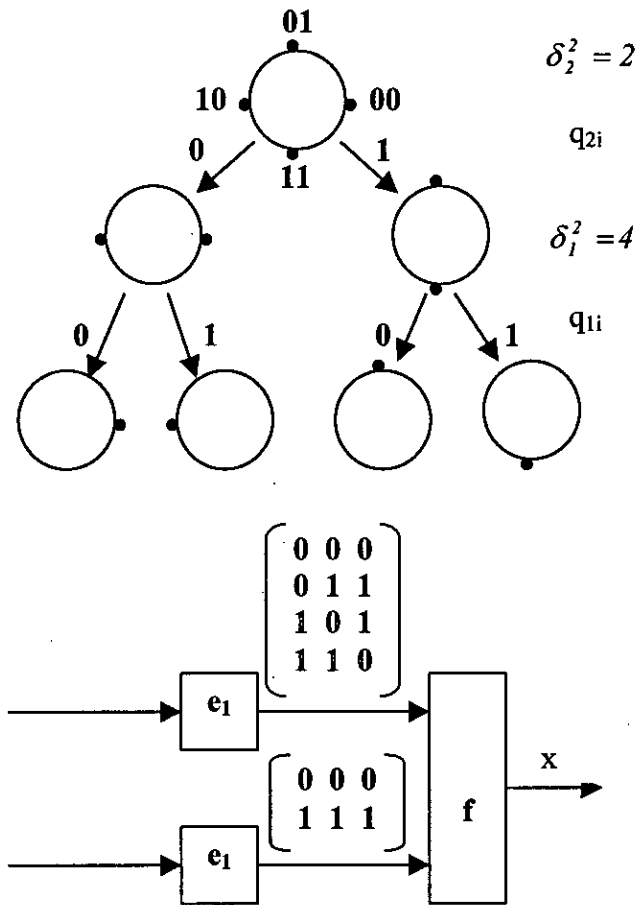


Figure 1.8a :Construction de Ginzburg avec L = 2 and M₁ = M₂ = 2

On associe avec le $\ell^{\text{ème}}$ niveau la distance euclidienne minimale parmi des signaux dans la classe. celle-ci est exprimée par δ_ℓ , du moment qu'une classe d'un niveau postérieur peut contenir une classe d'un niveau précédent avec

$$\delta_{\ell-1} \geq \delta_\ell$$

Si $\delta_{\ell-1} = \delta_\ell$ alors 2 niveaux peuvent être combinés en négligeant la $(\ell-1)^{\text{ème}}$ partition. Par conséquent, on doit admettre que :

$$\delta_1 > \delta_2 \dots > \delta_L. \tag{1.13}$$

l'ensemble des signaux obtenus avec cette construction a un nombre de dimension

$$N = nv \tag{1.14}$$

Où v est la dimensionalité des signaux élémentaires. Le nombre des signaux de v dimension est M, ce pendant le nombre total des signaux élémentaires de N-dimension est égal au produit de nombre des mots de code dans C₁,....., C_L. la distance euclidienne minimale dans cet alphabet, d_{\min}^2 satisfait :

$$d_{\min}^2 \geq \min (\delta_1^2 d_1^H, \delta_2^2 d_2^H, \dots \delta_L^2 d_L^H). \tag{1.15}$$

où $d_1^H \dots d_L^H$ sont les distances minimales de Hamming des L bloc du code $C_1 \dots C_L$.

pour prouver (1.15), on considère la distance entre les 2 signaux $x' = (x'_1 \dots x'_n) = f(Q')$ et

$x'' = (x''_1 \dots x''_n) = f(Q'')$ où $x'_i = F(q'_i)$ et $x''_i = F(q''_i)$, pour $x' \neq x''$ et ainsi que $Q' \neq Q''$, il existe au moins un ℓ et un i sachant que $q_{\ell i}' \neq q_{\ell i}''$, désignons par λ la valeur la plus large de ℓ .

$$\lambda = \max\{\ell : q_{\ell i}' \neq q_{\ell i}'', 1 \leq \ell \leq L, 1 \leq i \leq n\} \quad (1.16)$$

δ_λ est la distance non nul la plus petite entre les signaux élémentaires (messages) qui apparaissent

entre x' et x'' et n'importe qu'elle de ces distance est plus grande ou égal à $\delta_\lambda \delta(q'_{\lambda i}, q''_{\lambda i})$ où

$\delta(q'_{\lambda i}, q''_{\lambda i})$ est le delta de Kronecker a partir de la nous avons à partir de ce qui précède:

$$d^2(x', x'') \geq \delta_\lambda^2 \sum_{i=1}^n \delta(q'_{\lambda i}, q''_{\lambda i}) \geq \delta_\lambda^2 d_\lambda^H \quad (1.17)$$

Du moment où les signaux de A pour $q'_{\lambda i} \neq q''_{\lambda i}$ correspondent à des mots différents du code du λ^{iem} niveau et du fait qu'un λ existe pour toute paire de signaux différents de A, la relation (1.15) découle la dernière inégalité.

Si la distance euclidienne minimale (DEM) d_{min}^2 est spécifiée donc il est conseillé de prendre la distance minimale de Hamming du code qui seront :

$$d_\ell^H = \lceil d_{min}^2 / \delta_c^2 \rceil, \quad \ell = 1 \dots L \quad (1.18)$$

Où $\lceil X \rceil$ est l'entier le plus petit non inférieure à x .

Pour illustrer la construction de Ginzburg nous donnons l'exemple suivant:

On considère une construction de Ginzburg avec $L = 2$ et une constellation élémentaire 4-PSK, cette constellation a $\delta_2^2 = 2$ et $\delta_1^2 = 4$ (fig. 1.8a) choisie comme C_2 le code de répétition binaire (3.1) (qui a 2 mots code et $d_2^H = 3$) et comme C_1 le code de vérification binaire (3.2) (qui a 4 mots de code et $d_1^H = 2$) les composantes de x_n sont des nombres complexes choisi de l'ensemble $\{\pm 1, \pm j\}$ représentent les signaux 4-PSK. Les signaux résultants de cette construction est de dimensions 6, il a 8 signaux (fig. 1.8b) et ses DEM carrée est limité au dessus par $\min\{4.2, 3.2\} = 6$. La correspondance entre les entrés du mapper, la construction et les signaux est représentée comme suit :

00	00	00	$\rightarrow x_1 = (1,1,1)$	01	01	01	$\rightarrow x_5 = (j,j,j)$
00	10	10	$\rightarrow x_2 = (1,-1,-1)$	01	11	11	$\rightarrow x_6 = (j,-j,-j)$
10	00	10	$\rightarrow x_3 = (-1,1,-1)$	11	01	11	$\rightarrow x_7 = (-j,j,-j)$

10 10 00 → $x_4 = (-1, -1, 1)$

11 11 01 → $x_8 = (-j, -j, j)$

Puisque on a trouvé par le calcul direct la valeur exacte de la distance minimale carrée est de 6.

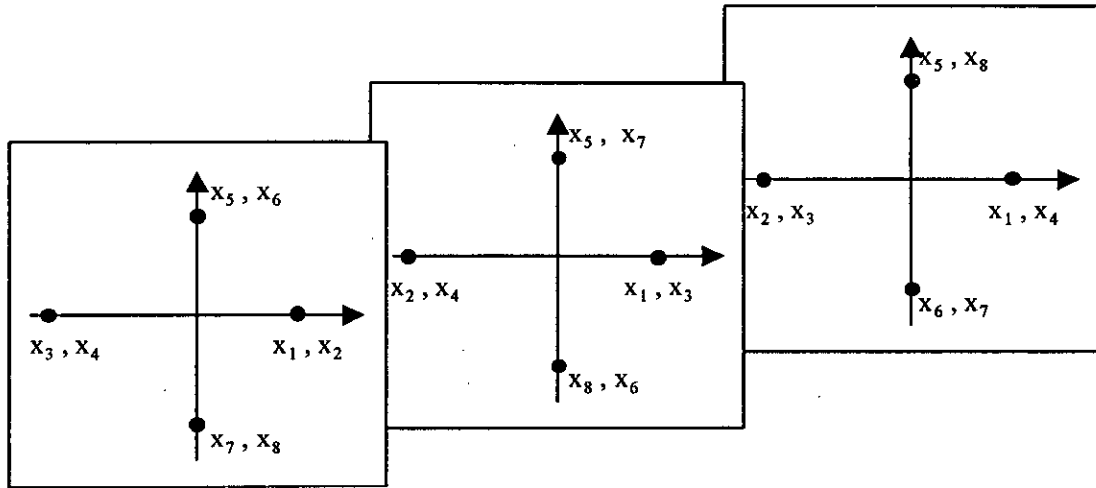


Figure 1.8.b : Constellation de six dimensions avec 8 signaux généré par la construction de Guinzburg. ou $L=2$ et la constellation élémentaire de la 4-PSK

1.5.1. Configuration des schémas TCM :

Un guide général pour la conception du schéma TCM et qui est utilisé en conjonction avec les signaux multidimensionnels est donné comme suit. Supposer qu'on a m' sous constellations de m'' signaux dans chacune pour un total $M = m' m''$ signaux, on suppose que la distance minimal au carré (c'est-à-dire la distance parmi les signaux de la même sous constellation, est D^2 , et l'interdisante minimal au carré (c'est-à-dire la distance parmi les signaux des différentes sous constellation) est d^2 , alors un schéma TCM peut être trouvé avec un taux de $r/r+1$, $m'/2$ états et sa distance libre au carré est limité inférieurement par

$$d_{free}^2 \geq \min(2d^2, D^2) \tag{1.19}$$

En effet, si $m' m'' / 2$ signaux sont associés avec chaque nœud du treille nous réalisons le taux désiré pour le schéma TCM, cela est obtenu en associant à chaque nœud d'un treille connecté $m'/2$ sous constellation de m'' signal dans chacune.

Si une transition parallèle détermine la distance libre alors $d_{free}^2 = D^2$, sinon un événement d'erreur avec la longueur 2 va gérer une distance libre carré au moins de d^2 .

Si une large distance libre carrée est désirée on a besoin de réduire la connectivité de treillis on augmente le nombre d'états. En doublant le nombre d'états de $m'/2$ à m' , nous pouvons augmenter par 1, la largeur minimale d'un événement d'erreur un transfert convenable de sous constellation au branche peut être obtenu, une distance libre au carré $3d^2$ sera réaliser.

1.6. Construction de Wei [4] :

1.6.1. Principe de base de la construction de Wei :

Cette construction est due à Wei, elle génère un alphabet à $2.N$ dimensions par l'utilisation d'une constellation à 2 dimensions dans chacun des N intervalles bauds voisins et l'ajout d'un bit de redondance dans chaque N intervalles.

Pour une constellation à deux dimensions, 2^{Q+1} signaux doit être utilisés pour transmettre Q bits par baud avec un système TCM de rendement $m/(m+1)$. Si nous choisissons d'utiliser des signaux à $2.N$ dimensions nous devons utiliser une constellation à $2^{N.Q+1}$ signaux.

En effet, au lieu d'ajouter un bit de redondance chaque pair de dimension, nous l'ajoutons à chaque N pairs. Pour des valeurs large de $(N.Q+1)$ et en présence de canal de transmission où les distorsions linéaires et non linéaires sont présentes, il est important de construire la constellation de la manière suivante:

- Le mapping entre les $(N.Q+1)$ bits et les signaux peut être convertis en N mappings simples à 2 dimensions.
- La taille du mapper à 2 dimensions est gardée aussi petite que possible.
- La puissance moyenne transmise doit être aussi petite que possible.

Dans cette technique, Nous avons besoin de transmettre des nombres de bits non entiers par intervalle de signification, spécifiquement, $N.Q+1$ bits par N intervalles ce qui donne $Q + \frac{1}{N}$ bits par intervalle.

Nous allons voir le concept de conception de Wei, dans l'exemple suivant soit à transmettre $n + \frac{1}{2}$ bits par intervalle ($N=2$, $Q = n$) alors :

- Nous utilisons une constellation contenant $\left(1 + \frac{1}{2}\right).2^n$ signaux où 2^n signaux interne sont issus du lattice régulière à deux dimensions et un additionnel de $\frac{1}{2}.2^n$ signaux externes qui sont issus du même lattice et ayant une énergie aussi petite que possible.
- Les bits entrants sont groupés en blocs de $(2.n+1)$ bits et sont envoyés en deux intervalles successifs comme suit :

- Un bit dans le bloc détermine à chaque fois, si tout signal externe est d'être utilisé.
- Si non, les $2.n$ bits qui restent sont utilisés pour sélectionner deux signaux internes.
- Si un bit additionnel sélectionne l'un des deux signaux à être un signal extérieur, $(n-1)$ bits sélectionnent lequel est le signal externe.
- Les n bits qui restent sélectionnent le signal interne pour le second symbole.

1.6.2.Implementation de la technique de Wei :

Pour implémenter la technique décrite ci dessus dans une constellation à $2.N$ dimensions contenant $2^{N.Q+1}$ signaux, nous procédons de la manière suivante :

- Commençons de la constellation rectangulaire à deux dimensions ayant $\left(1 + \frac{1}{N}\right)2^Q$ signaux.
- Partageons cette constellation en deux groupes, un groupe intérieur contenant 2^Q signaux et un groupe extérieur ayant $\frac{1}{N}2^Q$ signaux, ce groupe est sélectionné de la constellation original tel que sa puissance moyenne est conservé aussi petite que possible.
- La constellation de $2^{N.Q+1}$ signaux est construite par concaténation de N constellations à deux dimensions et en excluant les signaux à $2.N$ dimensions correspondantent aux plus d'un signal externe à deux dimensions.

1.6.3.Conception Des Configurations :

Dans cette configuration, nous décrivons la conception d'un système TCM qui transmet 19200 bits/s avec un débit de 2743 bauds, alors ça nécessite 7 bits/baud.

Si nous utilisons une constellation à 8 dimensions c'est à dire $N=4$ donc nous transmettons $7 \times 4 + 1 = 29$ bits dans chaque quatre bauds ou 7.5 bits/baud, alors la constellation doit inclure $2^{N.Q+1} = 2^{29}$ signaux (un chiffre très grand), en utilisant la technique de Wei :

La constellation à deux dimensions inclus $\left(1 + \frac{1}{4}\right)2^7 = 160$ signaux au lieu d'utiliser $2^{7+1} = 256$ signaux. si un bit de redondance est ajouté dans chaque intervalle, l'utilisation des signaux multidimensionnels produira un gain additionnel et une réduction de la puissance moyenne utilisée dans la transmission.

la figure 1.9 illustre la constellation à 2D contenant les 160 signaux, le groupe interne possède 128 signaux ainsi que le groupe externe contient 32 signaux. La constellation à 8D est formée par concaténation de 4 constellations à 2D contenant 160 signaux et en excluant les signaux à 8D correspondant au plus d'un signal extérieur à 2D

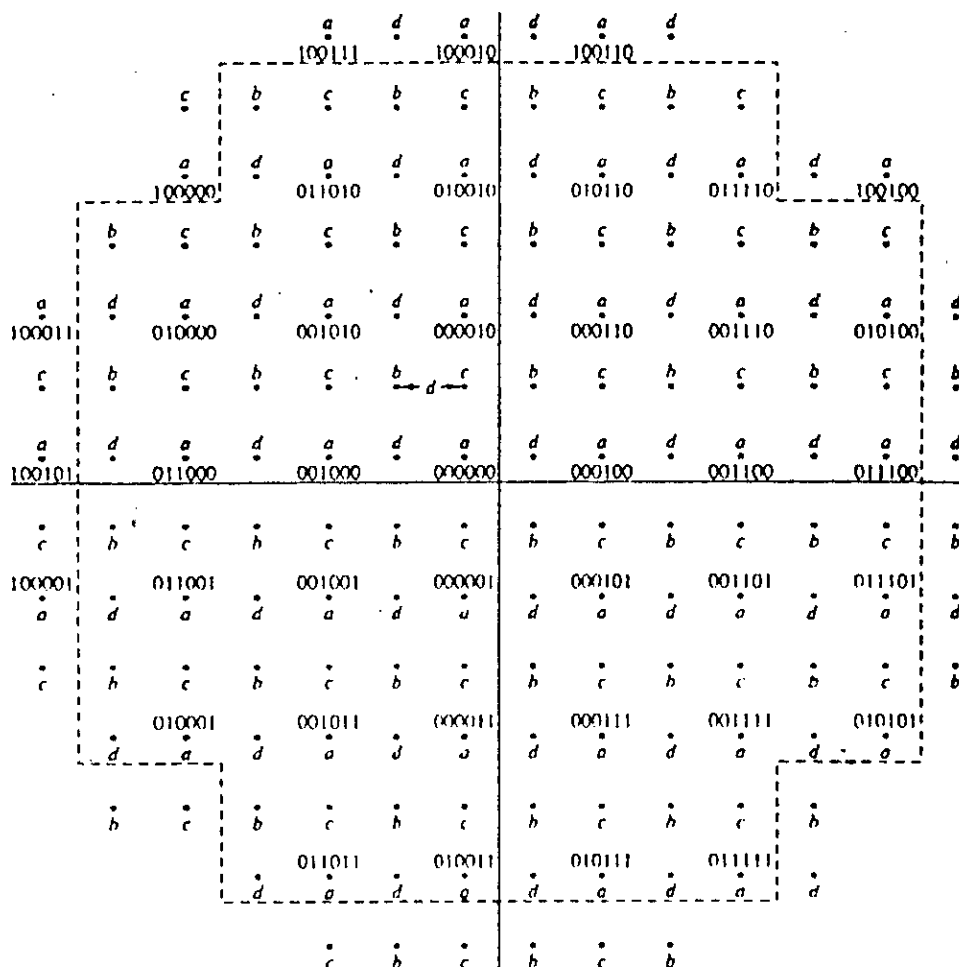


Figure 1.9 : Constellation à 2 dimensions de 160-signal.

1.6.4 La partition de la constellation à 8D :

Considérons la partition de la constellation résultante à 8D, Cette partition doit avoir une structure hiérarchique de façon à rendre le décodage à maximum de vraisemblance faisable. Si nous choisissons un codeur de rendement $\frac{3}{4}$ pour la configuration TCM, la partition de la constellation à 8D dont d^2 est la distance minimale carrée (MSD) est $4d^2$ où d^2 est le MSD de la constellation originale.

La partition est faite selon les étapes suivantes :

- La partition de la constellation à 2D en quatre sous constellation A,B,C,D à deux dimensions comme le montre la figure 1.9 . Chaque sous constellation inclue 40 signaux, 32 sont internes et 8 sont externes.

- Nous définissons 16 types à 4D par concaténation de deux constellations à 2D c'est à dire (A,A),(A,B),.....(D,D) . Le MSD de chaque type est $4.d^2$ et chaque type inclue 1600signaux.
- Nous groupons ces 16 types en 8 sous constellations à 4d, que nous notons 0,1,.....,7 . Le groupage est fait de façon à maintenir le MSD de chaque sous constellation à $4d^2$. Chaque sous constellation a 3200 signaux, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
 &0: (A,A) \cup (B,B) \\
 &1: (C,C) \cup (D,D) \\
 &2: (A,B) \cup (B,A) \\
 &3: (C,D) \cup (D,C) \\
 &4: (A,C) \cup (B,D) \\
 &5: (C,B) \cup (D,A) \\
 &6: (A,D) \cup (B,C) \\
 &7: (C,A) \cup (D,B)
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

- Ensuite, nous formons 64 types à 8D par concaténation de deux constellations : (0,0) ,(0,1),....,(7,7) où chaque type comporte $10,24 \times 10^6$ signal .
- on groupe ces 64 types à 8D en 16 sous-constellations à 8D avec un $MSD=4.d^2$ comme le montre le tableau 1.3

Y0 _n	Sous constellations à 8D	I1 _n	I2 _n	I3 _n	Types à huit dimensions			
					(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)
0	0	0	0	0	(0,0)	(1,1)	(2,2)	(3,3)
0	1	0	0	1	(0,1)	(1,0)	(2,3)	(3,2)
0	2	0	1	0	(0,2)	(1,3)	(2,0)	(3,1)
0	3	0	1	1	(0,3)	(1,2)	(2,1)	(3,0)
0	4	1	0	0	(4,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)
0	5	1	0	1	(4,5)	(5,4)	(6,7)	(7,6)
0	6	1	1	0	(4,6)	(5,7)	(6,4)	(7,5)
0	7	1	1	1	(4,7)	(5,6)	(6,5)	(7,4)
1	8	0	0	0	(0,4)	(1,5)	(2,6)	(3,7)
1	9	0	0	1	(0,5)	(1,4)	(2,7)	(3,6)
1	10	0	1	0	(0,6)	(1,7)	(2,4)	(3,5)
1	11	0	1	1	(0,7)	(1,6)	(2,5)	(3,4)
1	12	1	0	0	(4,0)	(5,1)	(6,2)	(7,3)
1	13	1	0	1	(4,1)	(5,0)	(6,3)	(7,2)
1	14	1	1	0	(4,2)	(5,3)	(6,0)	(7,1)
1	15	1	1	1	(4,3)	(5,2)	(6,1)	(7,0)

Tableau 1.3 : 16 sous constellations d'une constellation à 8D

1.6.5.Conception du codeur :

Soit le codeur à 64 états de rendement $\frac{3}{4}$ basé sur une constellation à huit dimensions possédant 2^{29} signaux schématisés dans la figure 1.9. La constellation à huit dimensions est

partitionnée en 16 sous ensembles comme le montre le tableau 1.3 qui produit l'association des 4 bits $Y_{0_n}, I_{1_n}, I_{2_n}, I_{3_n}$ avec des sous constellations à 8 dimensions .

Le carré de la distance minimum (MSD) entre deux séquences à huit dimensions est $4.d^2$ qui implique un gain de codage de 5,4dB par rapport aux signaux non codés .

Réellement 6dB découle de la croissance de la distance tandis que l'expansion d'alphabet coûte 0.6dB.

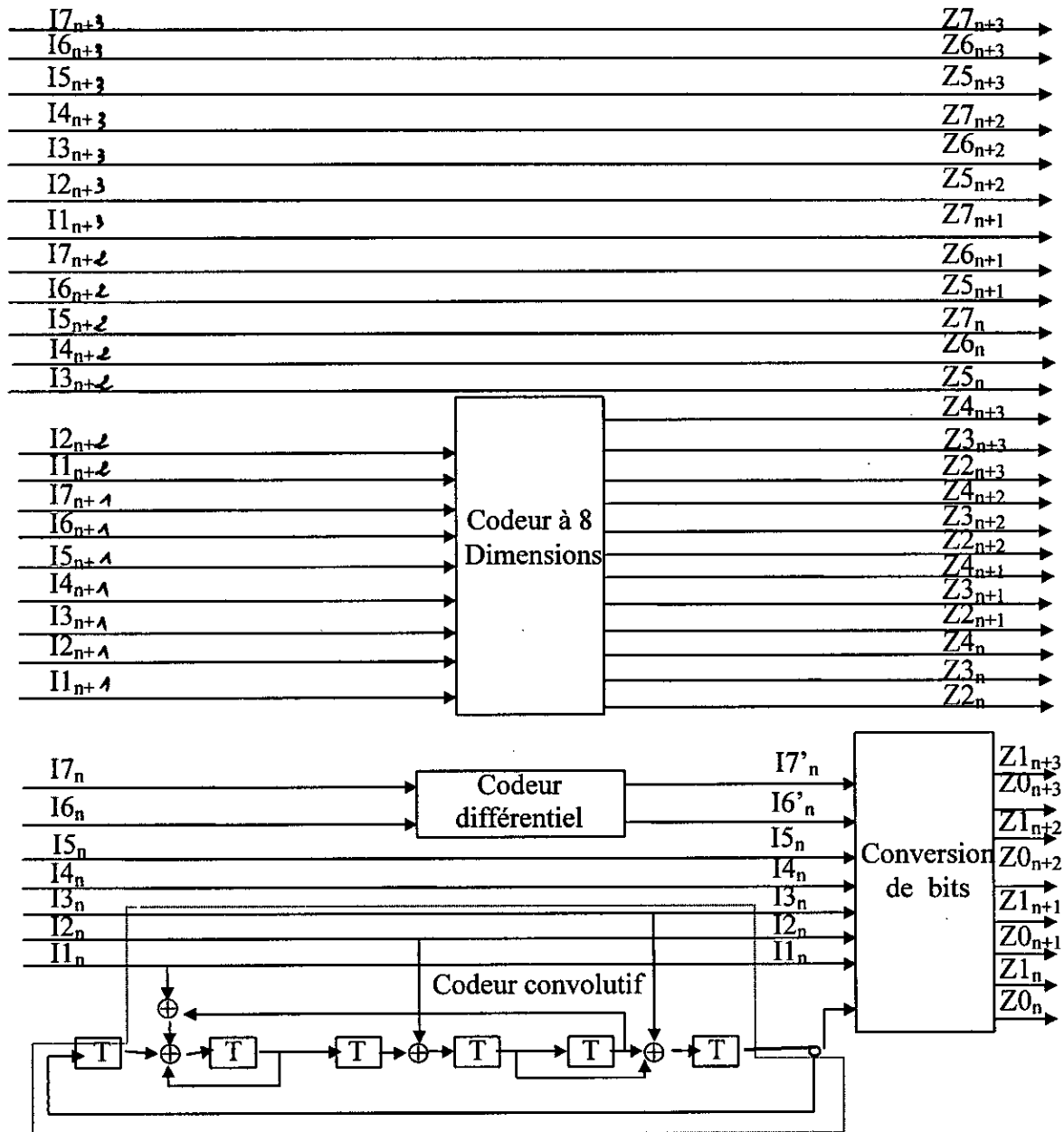


Figure1.10 : Codeur à 64 états avec une constellation à 8 D

Pour appliquer les 4 bits de sorties du codeur convolutif et les 25 bits non codés en constellation à 8 dimensions , nous utilisons le bloc « conversion de bits » et un bloc « codeur » pour convertir les 29 bits en quatre groupes chacun possède huit bits que nous notons Z_{2p} , Z_{3p} , Z_{4p} , Z_{5p} , Z_{6p} , Z_{7p} , Z_{0p} , Z_{1p} où $p = n, n+1, n+2, n+3$, chaque groupe est utilisé pour adresser la même table du mapping à deux dimensions afin d'obtenir un signal à deux dimensions . Le signal à huit dimensions qui correspond à ces quartes signaux à deux dimensions est sélectionné pour être transmis.

Le mapping à deux dimensions est basé sur la constellation illustrée dans la figure 1.9 ainsi que sur le tableau 1.4.

Sous constellation à 2D	Z_{0p}	Z_{1p}
A	0	0
B	0	1
C	1	0
D	1	1

Tableau 1.4 : La correspondance entre les bits Z_{0p} , Z_{1p} et les 4 sous constellations à 2D

Dans la figure 1.9 six bits sont associés à chaque groupe de quatre signaux , le bloc « conversion de bits » est décrit par les tableaux 3 et 4 .

Y_{0n}	I_{1n}	I_{2n}	I_{3n}	Sous types à 8D
0	0	0	0	(A A A A)
0	0	0	1	(A A C C)
0	0	1	0	(A A A B)
0	0	1	1	(A A C D)
0	1	0	0	(A C A C)
0	1	0	1	(A C C B)
0	1	1	0	(A C A D)
0	1	1	1	(A C C A)
1	0	0	0	(A A A C)
1	0	0	1	(A A C B)
1	0	1	0	(A A A D)
1	0	1	1	(A A C A)
1	1	0	0	(A C A A)
1	1	0	1	(A C C C)
1	1	1	0	(A C A B)
1	1	1	1	(A C C D)

Tableau 1.5 : Sélection des sous types à 8D

Tableau 1.6.a

$I_{1_{n+1}}$	$I_{2_{n+2}}$	$I_{3_{n+1}}$	Z_{2_n}	Z_{3_n}	Z_{4_n}	$Z_{2_{n+1}}$	$Z_{3_{n+1}}$	$Z_{4_{n+1}}$
0	X	x	0	$I_{2_{n+1}}$	$I_{3_{n+1}}$	0	$I_{4_{n+1}}$	$I_{5_{n+1}}$
1	0	0	1	0	0	0	$I_{4_{n+1}}$	$I_{5_{n+1}}$
1	0	1	0	$I_{4_{n+1}}$	$I_{5_{n+1}}$	1	0	0
1	1	0	0	$I_{4_{n+1}}$	$I_{5_{n+1}}$	0	$I_{6_{n+1}}$	$I_{7_{n+1}}$
1	1	1	0	$I_{4_{n+1}}$	$I_{5_{n+1}}$	0	$I_{6_{n+1}}$	$I_{7_{n+1}}$

Tableau 1.6.b

$I_{1_{n+1}}$	$I_{2_{n+2}}$	$I_{3_{n+1}}$	$Z_{2_{n+2}}$	$Z_{3_{n+2}}$	$Z_{4_{n+2}}$	$Z_{2_{n+3}}$	$Z_{3_{n+3}}$	$Z_{4_{n+3}}$
0	X	x	0	$I_{6_{n+1}}$	$I_{7_{n+1}}$	0	$I_{1_{n+2}}$	$I_{2_{n+2}}$
1	0	0	0	$I_{6_{n+1}}$	$I_{7_{n+1}}$	0	$I_{1_{n+2}}$	$I_{2_{n+2}}$
1	0	1	0	$I_{6_{n+1}}$	$I_{7_{n+1}}$	0	$I_{1_{n+2}}$	$I_{2_{n+2}}$
1	1	0	1	0	0	0	$I_{1_{n+2}}$	$I_{2_{n+2}}$
1	1	1	0	I_1	I_2	1	0	0

Tableau 1.6 : Table de codage pour le codeur à 8D

Le bloc codeur a 9 bits d'entrées et génère 4 groupes, chacun possède 3 bits de sélection, chaque bit dans le groupe est utilisé pour sélectionner un groupe interne ou externe de signaux dans un sous-ensemble à 2D correspondant aux sous-types à 8D précédemment sélectionnés.

Ce codeur génère deux bits de sortie $I7'_n$, $I6'_n$ qui sont exprimés en fonction des deux bits d'entrées $I7_n$, $I6_n$ et des bits de sortis précédents sous la forme :

$$I6'_n I7'_n = (I6'_{n-4} . I7'_{n-4} + I6_n I7_n) \bmod 4$$

1.6.6. Conception du décodeur :

L'étape préliminaire dans l'application de l'algorithme de Viterbi est de déterminer le signal X_i de la constellation multidimensionnelle qui correspond à une branche dans le treillis au signal reçu Z_i , la distance euclidienne entre X_i et Z_i est utilisée comme valeur métrique pour cette branche. En vue dans les constellation multidimensionnelle le signal X_i doit être partitionné en des sous-constellations de dimensions plus basse, et cette partition est obtenue de la manière suivante : Etant donné les 4 groupes de signaux associés à Z_i , le décodeur détermine le signal à deux dimensions parmi les 160 signaux de chaque groupe qui correspond à Z_i , les constellations à deux dimensions et calcule sa valeur métrique associée.

Ensuite, le décodeur détermine le signal à 4D dans chaque type parmi les 16 types à 4D qui correspond au signal du 4D reçu (le signal à 4D correspond aux premier et second signal à 2D de Z_i), et calcule son métrique associé. Les métriques types à 4D sont obtenus par addition des sous-constellations à 2D. Le décodeur compare par la suite les deux métriques à 4D aux paires types à 4D dans chaque sous-constellation à 4D.

Le plus petit métrique à 4D devient le métrique à 4D associé avec cette sous-constellation à 4D et le signal à 4D associé avec le plus petit métrique à 4D est le signal à 4D dans la sous-constellation à 4D qui correspond au premier signal à 4D reçu, le même processus est répété pour le deuxième à 4D reçu.

Le décodeur détermine ensuite le signal à 8D correspondant dans chacun des 64 types à 8D et calcule ces métriques associées. Le type métrique à 8D pour le type à 8D est obtenu en additionnant les deux sous-ensembles à 4D.

Finalement, le décodeur compare les quatre types métriques à 8D correspondant aux quartes types à 8D à l'intérieur de chaque sous-constellation à 8D .

L'algorithme de décodage pour le codeur à 64 états est illustré dans la figure 1.11

1.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté des généralités et des principes de base de la TCM multidimensionnelle, nous avons donné quatre bases de la TCM multidimensionnel, la TCM multidimensionnel basée sur les lattices (comme application la configuration de Calderbank-Sloane), sur le GA (groupe d'alphabet) , la construction de Ginzburg , et sur la construction de Wei.

Nous avons traité quelques exemples montrant les quatre techniques de base ainsi par la comparaison avec la TCM à 2D non codée.

- L'application des lattices dans la TCM multidimensionnelle est simple à implémenter à cause de la forme algébrique du lattice.
- Les GA ont un grand degré de symétrie et une structure algébrique, ont donné des bonnes résultats par rapport à la modulation non codée .
- La réalisation de la construction de Ginzburg en conjonction avec la PSK a donné un gain de codage important par rapport à la modulation PSK non codée.
- Le but de l'utilisation de la construction de Wei est de réduire l'expansion des signaux due à la TCM conventionnel.

En plus des propriétés de chacune des quatre techniques de base présentées ci-dessus, nous avons démontré qu'une mesure asymptotique de la performance du gain d'un système TCM multidimensionnelle est la comparaison de la distance euclidienne d_{free} du codeur en treillis relatifs à la distance minimum de la modulation non codée et la réduction de l'expansion des signaux par rapport à la TCM conventionnelle, Cette performance de mesure est une indication de la réduction maximum dans l'énergie du bit sur bruit $\frac{E_b}{N_0}$ requis.

Le but du prochain chapitre sera l'étude et la conception des configurations et les treilles de multiple TCM.

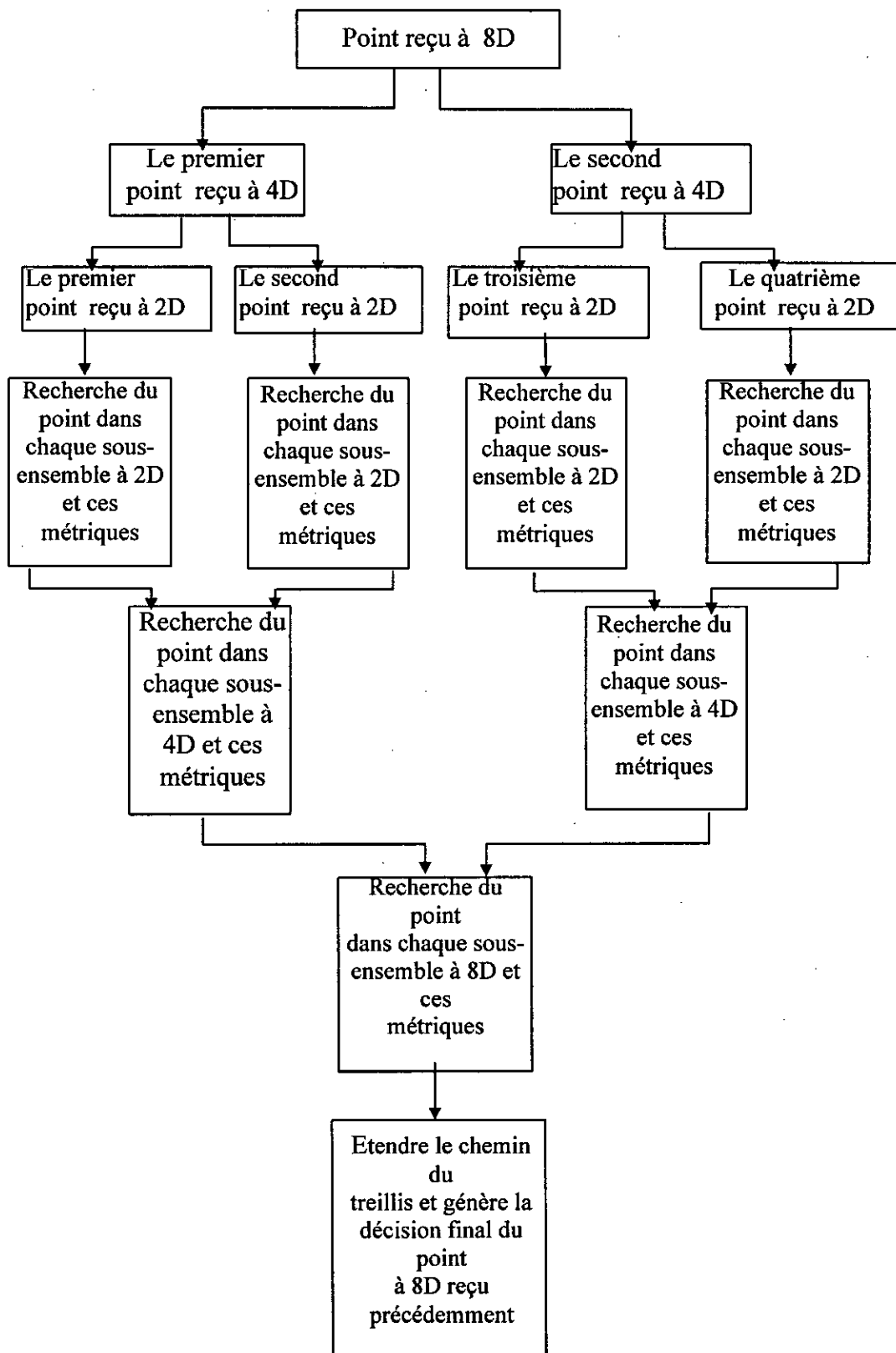


Figure 1.11 : Algorithme de décodage de Viterbi pour le codeur à 64 états

CHAPITRE 2

Chapitre 2 la TCM multiple

2-1 Introduction :

La TCM multiple est introduite pour améliorer la qualité d'un système de transmission numérique sans augmenter la puissance transmise ou la bande passante et contourner les inconvénients dus à l'utilisation de la TCM classique .

Dans ce chapitre, nous allons commencer par donner :

- Le principe de base de cette nouvelle configuration en définissant un nouveau critère d'évaluation, le throughput r .
- La procédure de calcul de la distance d_{free} et méthode de partition d'ensemble en s'appuyant sur des exemples traitant différents cas possible.

Nous verrons par la suite la méthode analytique, nous clôturons ce chapitre avec des exemples de conceptions d'émetteurs.

2.2.Principe de base de la MTCM [11] [1]

La MTCM est implémentée dans sa forme la plus générale par :

- Un codeur avec b bits binaires à l'entrée (input) et s bits binaires à la sortie.
- Un mapper et un modulateur M-aire qui appliquent ces s symboles en $k.M$ -aire symboles de chaque intervalle de transmission (voir figure 2.1)

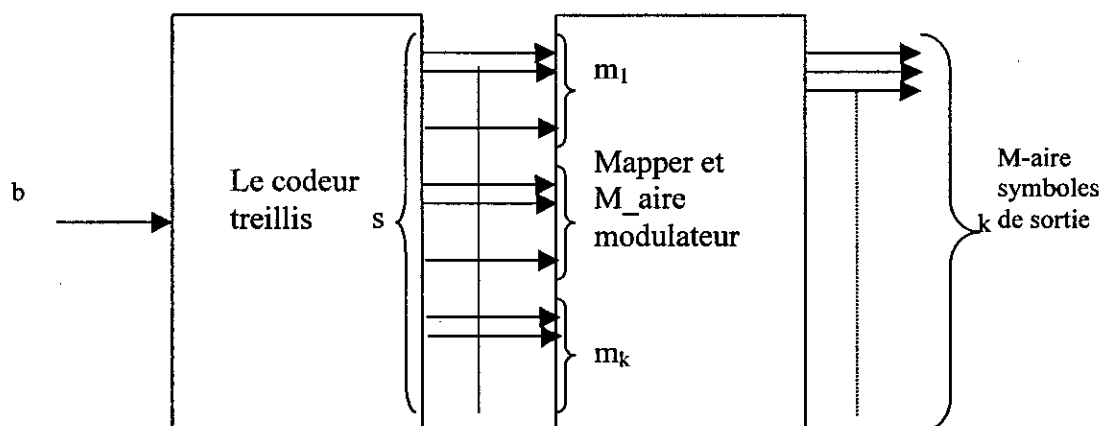


Figure 2.1 : Emetteur de la MTCM Généralisé

Le paramètre k est considéré comme le multiplicateur (multiplicity) du code du moment qu'il représente le nombre de symboles M -aire attribués à chaque branche du diagramme du treillis.

Le cas $k=1$ correspond au schéma original d'Ungerboeck considéré comme TCM conventionnelle.

Pour reproduire un tel résultat, nous partageons les symboles s binaires de sortie (output) du codeur en k groupes contenant $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ symboles à travers une application (mapping), dont les symboles de sortie sont M_i -aire où $M_i = 2^{m_i}$, $i=1, 2, \dots, k$.

les paramètres de transmission sont ainsi contraints par la relation suivante :

$$s = \sum_{i=1}^k m_i = \sum_{i=1}^k \log_2 M_i = \log_2 \prod_{i=1}^k M_i \quad (2.1)$$

Pour le cas spécial où toutes les tailles d'alphabets M -aire sont égales, C'est à dire : $M_1=M_2=\dots=M_k=M$, La relation (2.1) se simplifiée à la suivante :

$$S = k \log_2 M \quad (2.2)$$

Pour l'émetteur de la figure 2.1, on définit le throughput (rendement) comme le rapport bit rate sur la bande passante de transmission.

$$r = b/k \quad \text{bit/s/Hz}$$

la throughput r dépend donc du choix de b et k , qui peut être ou pas un nombre entier .

puisque b n'est pas exigé d'être un multiple de nombre entier de la multiplicité k , le rapport b/s n'est pas contraint d'être le rapport des entiers adjacents comme suggérés dans la configuration originale d'Ungerboeck.

Il est intéressant de noter que le throughput de la MTCM n'a pas d'équivalent pour la modulation non codé en contre partie. Ainsi, dans ces cas, la notion d'expansion de la bande passante unité des schémas codés en treillis relatifs aux schémas non codée n'a aucun sens.

La relation (2.1) peut être réécrite comme une contrainte entre la multiplicité, le throughput et la taille de l'alphabet comme suit. puisque le rapport b/s doit être inférieur à l'unité(ou, équivalent à $b+1 \leq s$), en utilisant (2.1) et le fait que $b=rk$, nous avons :

$$2^{rk+l} \leq \prod M_i \quad (2.3)$$

C'est intéressant de noter que la relation (2.3) caractérise l'émetteur de la MTCM, dans le cas où M_i n'est pas nécessairement une puissance entière de 2.

Une spécification supplémentaire de la technique de la MTCM générale, qui est en réalité une originalité proposée par Divsalar et Simon [11] correspond au cas où $b = m k$ et $s = (m+1)k$, avec k groupes de $(m+1)$ symboles, chacun est appliqué dans un symbole M -aire choisi à partir d'un alphabet de taille 2^{m+1} . Dans ce cas, mk bits entrent dans le codeur et k M -aire symboles quittent le modulateur, ainsi le trougthput est m bits/s/Hz et résulte dans une expension de la bande passante unité relative à une modulation non codée à 2^m points signal.

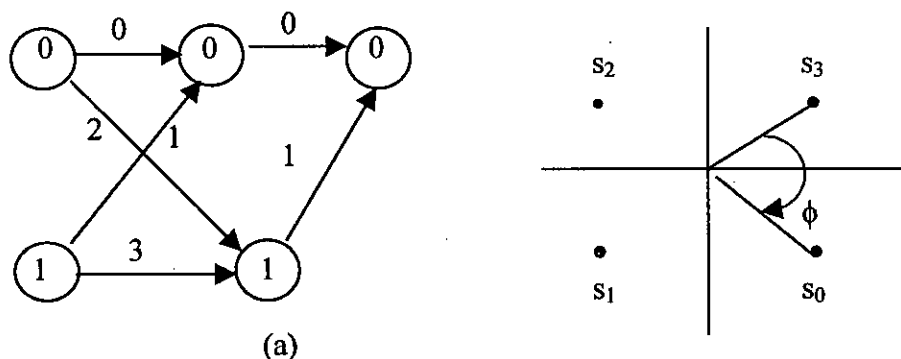
2.3.MTCM a deux états [1]

Pour illustrer le principe de la MTCM évoqué ci-dessus, nous commençons avec un codeur à 2 états et des modulations QPSK et 4-AM.

3.3.1.Cas de la QPSK.

La figure 2.2(a) montre un diagramme en treillis à 2 états pour un débit conventionnel de $\frac{1}{2}$ modulé en QPSK en treillis

La figure 1.2 (b) représente un diagramme en treillis multiple correspondant pour la même modulation codée.



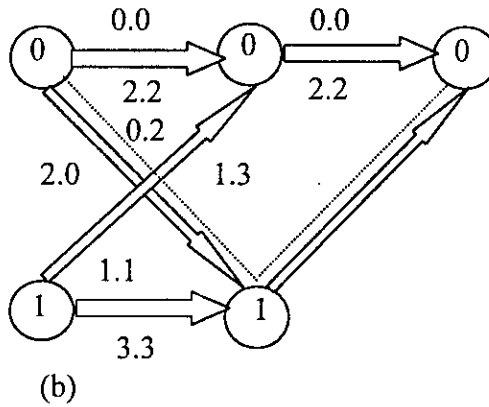


Figure 2.2.(a) le diagramme treillis pour le rapport conditionnel ½ treillis code QPSK.

(b) Le digramme de treillis pour le débit 2/4 multiple treillis code QPSK, K=2.

Dans la figure 2.2(b), nous avons :

- .m=1
- .k=2
- .b=2

il y a $2^{mk}=4$ branches émanantes de chaque état. Puisqu'il y a seulement deux états dans le diagramme , ceci implique qu'il doit y avoir deux branches parallèles entre chaque paire d'états. Aussi, puisque $k=2$, nous avons ainsi deux symboles de sortie QPSK assignés à chaque branche.

L'assignation des deux symboles à chaque branche est faite pour maximiser la distance euclidienne minimale du chemin correspondant dans le treillis à une réception correcte des symboles transmis et celui correspondant au chemin d'évènement d' erreur .

La figure 2.2(b) illustre les assignations appropriés des paires de symboles QPSK r pour chaque branche dans le diagramme de treillis. Sans perte de généralité, nous assumons la génération d'une séquence de tous zéros comme une séquence de bits transmis avec les symboles tout zéros de sortie QPSK.

Ainsi, le chemin d'évènement d'erreur de longueur égale à 1,c'est à dire le chemin parallèle entre les états zéro successives, produit une distance carrée euclidienne suivante :

$$d^2 = 2 d^2(0,0) = 2(4) = 8 \quad (2.4)$$

où $d^2(i, j)$ dénote la distance carrée euclidienne entre les symboles QPSK s_i et s_j .

Pour le chemin d'événement d'erreur de longueur égale à 2 (illustré par des pointillés sur la figure 2.2(b)) nous remarquons que la distance carrée euclidienne est :

$$d^2 = d^2(0,0) + d^2(0,2) + d^2(0,1) + d^2(0,3) \quad (2.5)$$

$$= 0 + 4 + 4\sin^2\phi/2 + 4\cos^2\phi/4 = 8.$$

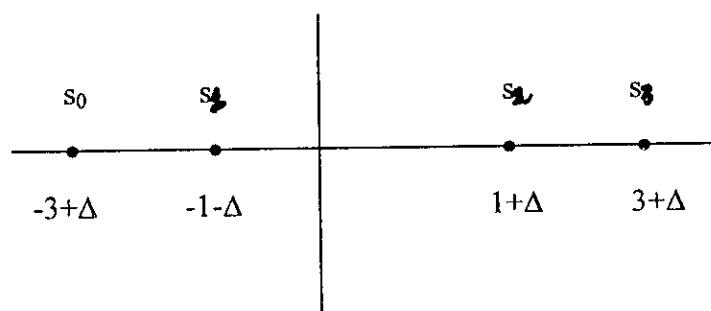
Cette distance est indépendante de l'angle ϕ . Ce qui permet de choisir $\phi = \pi/2$ correspondante au QPSK symétrique. Nous retenons ainsi un taux de modulation 2/4 QPSK codé en treillis qui atteint une distance euclidienne limite égale à 8.

Dans la TCM conventionnelle, la valeur de d_{free} est de 6 pour le QPSK symétrique et de 8 pour la QPSK asymétrique.

2.3.2. Cas de la MLAM :

La figure 2.3 est le diagramme treillis à deux états pour un débit conventionnel de $1/2$ à modulation 4-AM codée en treillis. le diagramme en treillis approprié pour le taux 2/4 multiple du codage en treillis de la modulation 4-AM symétrique (distance entre deux points signaux adjacents) est identique à celui de la figure 2.2(b), avec la compréhension que les assignations de branches correspondent maintenant à celui de deux symboles 4-AM par branche. Si nous assumons que la séquence de tous zéros 4-AM est transmise, l'événement d'erreur de la longueur 1 correspond au chemin entre deux états zéros successives, produit distance euclidienne carrée normalisée :

$$d^2 = \frac{d^2((0,0)(2,2))}{E_{av}} = \frac{2(4)^2}{5} = 6.4 \quad (2.6a)$$



4-AM asymétrique

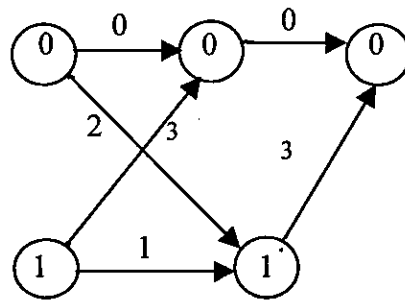


Figure 2.3 : Le diagramme de treillis pour le taux conventionnel $\frac{1}{2}$ treillis codé 4-AM distance.

Pour le chemin de l'évènement d'erreur de longueur 2, la distance euclidienne est donnée par l'expression suivante :

$$d^2 = \frac{d^2((0,0), (0,2)) + d^2((2,2), (1,3))}{5} = \frac{(4)^2 + 2(2)^2}{5} = 4.8 \quad (2.6b)$$

Ainsi, le minimum de la ~~libre~~ distance ^{limite} carrée est le plus de ces deux dernières valeurs (2.6a) et (2.6b).

$$d^2_{\text{free}} = 4.8$$

La distance minimale carrée d'une modulation 2-AM non codée a une valeur de 4. Nous obtenons un gain relatif de 0.792 dB. La TCM conventionnelle de débit $\frac{1}{2}$ et une 4-AM codée en treillis ne réalise aucun gain relatif à la modulation non codée 2-AM. Ainsi, pour une multiplicité de 2, la MTCM a produit un avantage.

2.3.3 La procédure de mapping sur la MTCM à 2 états [1] [12]

La constellation des points signaux est partitionnée en deux sous-constellations, comme le montre la figure 2.4. chacune avec une distance maximale entre les autres points signaux. Les signaux dans la partition 1 sont assignés aux transitions provenant de l'état 0, et les signaux dans la partie 2 sont assignés aux transitions provenant de l'état 1.

Pour une MTCM de multiplicité k , il y a 2^{mk-1} chemins parallèles entre états semblables « 0 » et « 0 » ou « 1 » et « 1 » et le même nombre de chemins entre les états non semblables « 0 » et « 1 » ou « 1 » et « 0 ».

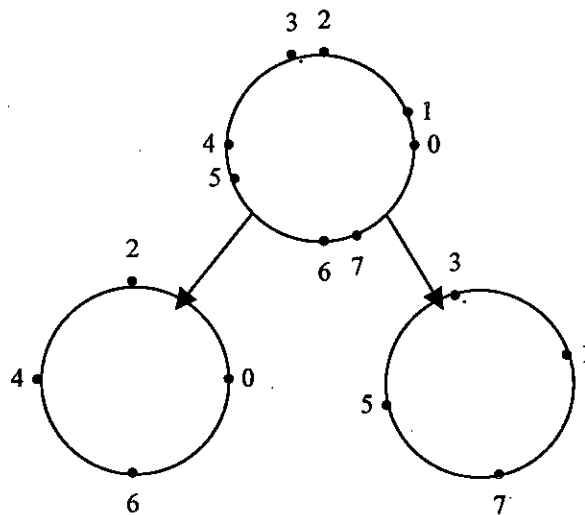


Figure 2.4 : la constellation d'ensemble pour le 8_PSK.

Pour la transition entre états semblables, on affecte à chaque chemin parallèle une séquence de k symboles choisis d'une partition fixée (de 2^m points) tel que la distance minimale carrée entre deux de ces chemins parallèles soit égale au double de la distance minimale carrée entre les points dans chaque partition, c'est à dire :

$$\begin{aligned} 8\sin^2(\pi/2) & \quad \text{pour M-PSK} \\ 32/[(2^{2m+2}-1)/3] & \quad \text{pour M-AM.} \end{aligned}$$

Le reste 2^{mk+1} k -tuples formés à partir des symboles dans la même partition, ils sont affectés aux chemins parallèles correspondants à une transition à un état différent.

La distance minimale carrée entre toutes les paires de chemins parallèles entre états différents sera le double de la distance minimale carrée entre les points dans la partition. Cependant, la distance minimale carrée parmi toutes les paires de chemins constituants d'un chemin entre les états semblables et un chemin entre les états différents tout deux originaires du même état, est seulement égale à la distance minimale carrée entre les points dans la partition, c'est à dire :

$$\begin{aligned} 4\sin^2(\pi/2^m) & \quad \text{pour la M-PSK} \\ 16/[(2^{2m+1}-1)/3] & \quad \text{pour la M-AM.} \end{aligned}$$

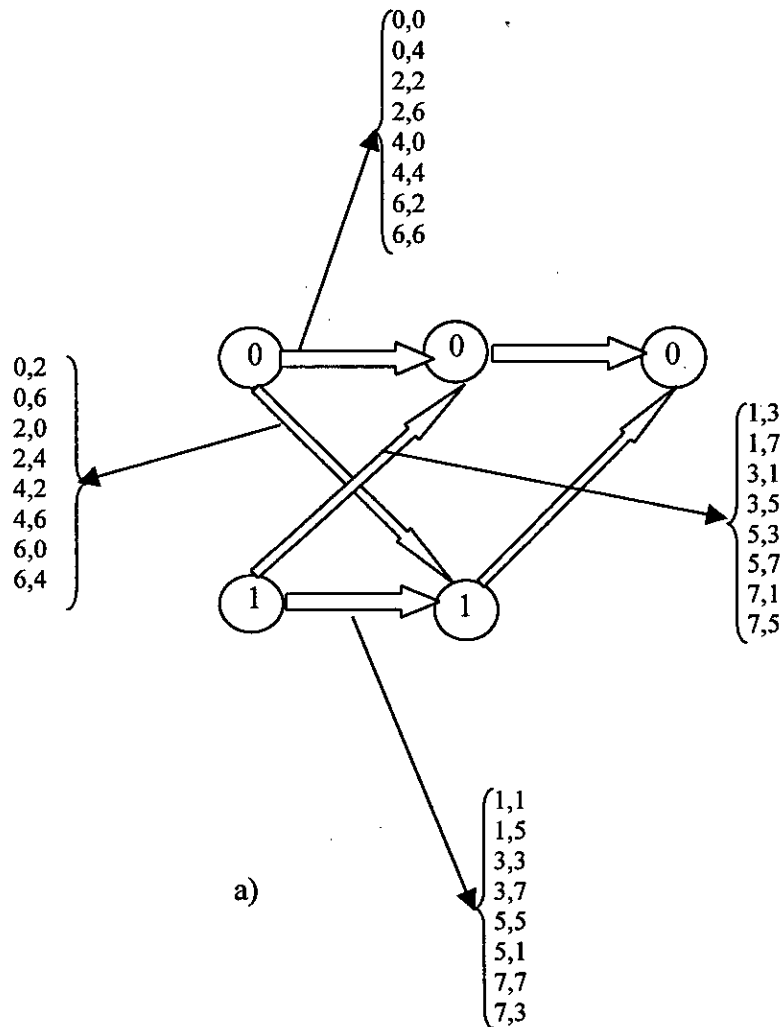
On note que la distance discutée ci-dessus est indépendante de la multiplicité k .

L'endroit où multiplicité du treillis k a son influence, est dans la considération de la distance minimale carrée entre toutes les paires de chemins constitués d'un chemin entre les états semblables et entre les états différents où les deux chemins originaires de deux états différents. Avec les k -tuples affectés ci-dessus. La distance minimale carrée est k fois la distance minimale carrée entre des points dans une partition et des points dans une autres, c'est à dire :

$$d^2_1 = 4k \sin^2 \pi / 2^{m+1} \quad \text{pour la M-PSK}$$

$$d^2_1 = 4k / [(2^{2m+2} - 1) / 3] \quad \text{pour la M-AM}$$

la figure 2.5 illustre la procédure générale de mapping



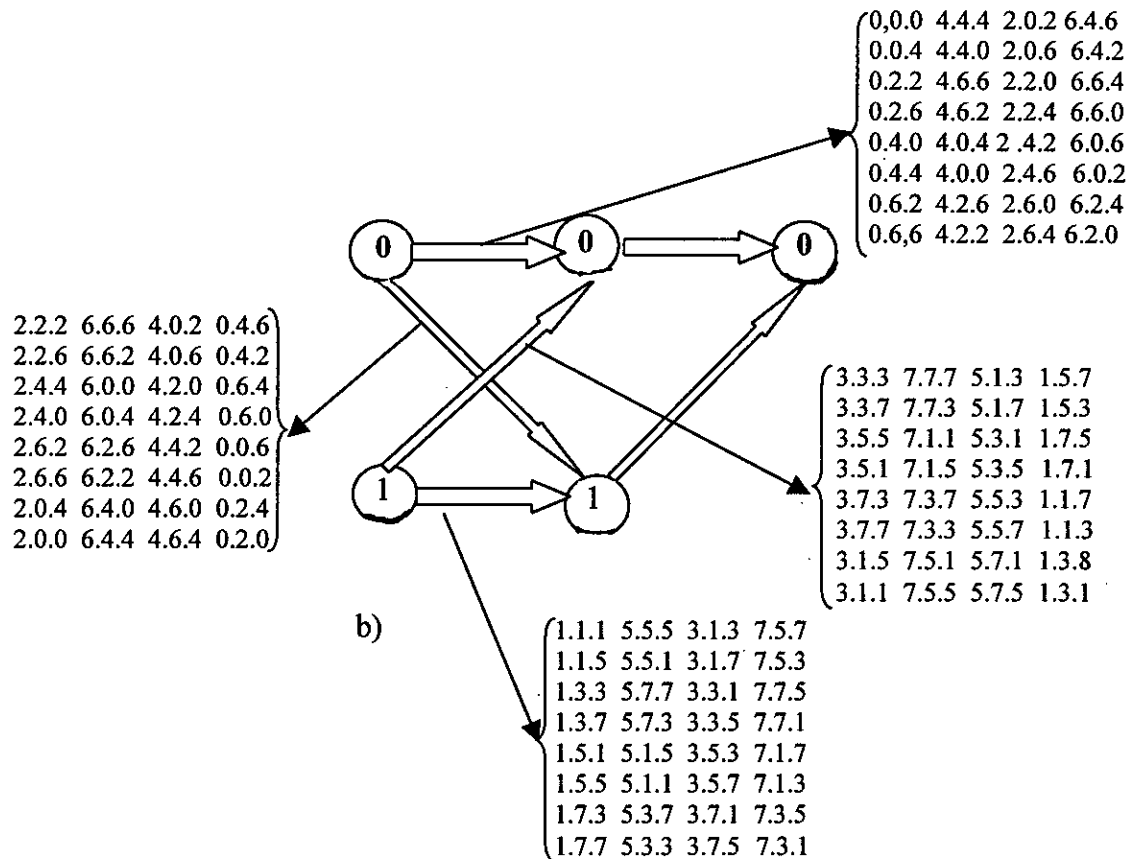


Figure 2.5 : a) Diagramme a deux états pour le taux 2/3 codé 8 PSK et 8 AM, k=2.
 b) Diagramme a deux états pour le taux 2/3 codé 8 PSK et 8 AM, k=3.

2.3.4 L'évaluation de la libre distance limite d_{free} :

Si une des constructions de treillis à deux états basée sur la procédure du mapping ci-dessus, la distance minimale carrée pour un chemin d'évènement d'erreur de longueur 1 est la distance minimale carrée parmi les transitions parallèles entre les états semblables, c'est à dire :

$$d_1^2 = 8 \sin^2(\pi/2^m) \quad \text{pour M.PSK}$$

$$d_1^2 = 32 / [(2^{2m+2} - 1) / 3] \quad \text{pour le M-AM.}$$

Pour le chemin d'évènement d'erreur de longueur 2 (voir exemple de la figure 2.2(b)), la distance minimale carrée est composée de deux parties :

- La première partie correspond à la distance minimale carrée entre deux chemins provenant de la même état , l'un se termine dans un état semblable et l'autre dans un état différent. Ceci est donnée par :

$$4 \sin^2(\pi/2^m) \quad \text{pour la M-PSK}$$

$$32/[(2^{2m+1}-1)/3] \quad \text{pour la M-AM.}$$

- La deuxième partie correspond à la distance minimale carrée entre deux chemins qui originaires de deux états différents et terminent dans le même état. Cela est donné par :

$$4k \sin^2(\pi/2^{2m+1}) \quad \text{pour M-PSK}$$

$$4k/[(2^{2m+2}-1)/3] \quad \text{pour M-AM.}$$

Ainsi, la distance carrée minimale pour le chemin d'événement d'erreur de la longueur 2 est égale à :

$$d_2^2 = 4 \sin^2(\pi/2^m) + 4k \sin^2(\pi/2^{m+1}) \quad \text{pour M-PSK}$$

$$d_2^2 = (16+4k)/[(2^{2m+1}-1)/3] \quad \text{pour M-AM}$$

Enfin, la distance carrée limite d_{free} pour un codage en treillis multiple à deux états est la plus faible des deux valeurs d_1^2 et d_2^2 .

$$d_{\text{free}}^2 = \begin{cases} \min \left\{ \left\{ 8 \sin^2\left(\frac{\pi}{2^m}\right), 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2^m}\right) + 4k \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right) \right\} \dots \text{pour M-PSK} \right. \\ \left. \min \left\{ \frac{32}{(2^{2m+2}-1)/3}, \frac{16+4k}{(2^{2m+2}-1)/3} \right\} \dots \text{pour M-AM} \right. \end{cases} \quad (2.8)$$

2.4 Généralisation de la MTCM [13]

Nous considérons ici le cas de la MTCM illustrée par la figure 2.1 ou le throughput r n'est pas spécifié à un nombre entier. Nous discutons la méthode générale de partitionnement d'ensembles pour cette technique, nous illustrons le mapping de ces ensembles et l'évaluation de la distance euclidienne limite d_{free} pour un certain nombre d'exemples correspondants aux treillis avec plus de deux états.

2.4.1. la méthode de partition d'ensemble:

Nous décrivons la méthode de partitionnement d'ensemble pour générer des ensembles de signaux de k-tuples de symboles M-PSK à être assignés aux branches du diagramme de treillis. La méthode serait expliquée en détail pour le cas $M=8$ et $k=2, 3, 4$. Un examen d'arguments donnés va indiquer clairement la procédure pour les autres valeurs de M .

Partition d'ensemble pour $k=2$, 8-PSK .

Le point de début est de définir l'ensemble :

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

qui représente un ensemble de deux 2-tuples (couples) avec une distance carrée euclidienne maximale entre eux donnée par $d^2(A_0)=8$.

On définit ensuite l'ensemble :

$$A_1 = A_0 + [0 \ 4] = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

où l'addition est effectuée modulo 8. Cet ensemble a aussi la distance carrée euclidienne maximale entre ses deux 2-tuples égale à 8.

Le niveau de partition supérieur suivant est commencé par l'union de A_0 et A_1 .

$$B_0 = A_0 \cup A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

la distance carrée minimale entre 2-tuples de B_0 est $d^2_{\min}=4$. Le prochain ensemble approprié à ce niveau de partition est :

$$B_1 = B_0 + [2 \ 2] = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \\ 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

qui a aussi une distance carrée minimale entre ses deux tuples égale à 4.

Pour le niveau de partition supérieure suivant. On prend l'union de B_0 et B_1 :

$$C_0 = B_0 \cup B_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \\ 6 & 6 \\ 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

qui maintient la distance carrée minimale entre ses 2-tuples égalant à 4. Pour obtenir le niveau supérieure suivant, en premier, on forme $C_1 = C_0 + [0 \ 2]$ où $d_{\min}^2(C_1)=4$ et après, on prend l'union de C_0 et C_1 , on trouve le résultat suivant :

$$D_0 = C_0 \cup C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

qui a un cardinal égale à 16 et $d_{\min}^2(D_1)=2$. Notons que l'addition de $[2 \ 0]$, $[0 \ 6]$ ou $[6 \ 0]$ plutôt de $[0 \ 2]$ à C_0 génère un ensemble identique à C_1 .

Finalement on génère l'ensemble suivant :

$$D_1 = D_0 + [1 \ 1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 1 \\ 7 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

qui a aussi cardinal de 16 et $d_{\min}^2(D_1)=2$.

Pour concevoir une MTCM avec, par exemple :

- throughput $b/k=4/2=2$.
- un taux 4/6 treillis codé 8 PSK.

On a besoin de quatre ensembles chacun avec un cardinal égale à 8.. on commence par le niveau de partition le plus haut avec C_0 , C_1 et après on génère les deux ensembles additionnels suivants :

$$C_2 = C_0 + [1 \ 1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \\ 5 & 1 \\ 3 & 3 \\ 7 & 7 \\ 3 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad C_3 = C_1 + [1 \ 1] = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 1 & 7 \\ 5 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

On note que :

- $d_{\min}^2(C_i) = 4$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.
- la distance minimale entre un deux couples en C_i et un 2-couples en C_j , $i \neq j$ est $d_{\min}^2(C_i, C_j) = 2$.

De façon similaire, pour concevoir une MTCM, avec :

- throughput $b/k = 5/2 = 2.5$.
- 8-PSK codée en treillis.
- un taux $5/6$.

Nous avons besoin pour commencer quatre ensembles chacun ayant un cardinal égale à 16. Les ensembles appropriés sont D_0 et D_1 et les deux ensembles engendrés sont :

$$D_2 = D_0 + [0 \ 1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad D_3 = D_1 + [0 \ 1] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Partition d'ensemble pour $k=3$, 8-PSK

Nous commençons comme pour la partition précédente, en utilisant 3-tuples :

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

La distance carrée entre ces deux 3-tuples est $d^2(A_0) = 12$. on forme ensuite les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + [0 \ 0 \ 4] \\ A_2 &= A_0 + [0 \ 4 \ 0] \\ A_3 &= A_0 + [4 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ces ensembles ont tous la même distance carrée entre leurs propres 3-tuples égale à celle de A_0 .

Le premier ensemble sur le niveau de partition supérieur suivant est formé à partir de l'union de ces ensembles de (2.19) et (2.20) :

$$B_0 = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

La distance minimale entre 3-tuples de B_0 est $d_{\min}^2(B_0) = 4$ et l'ensemble a un cardinal égal à 8. Les ensembles restants sur ce niveau de partition contenant des symboles de nombres pairs sont donnés par :

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 + [0 \ 2 \ 2] \\ B_2 &= B_0 + [2 \ 0 \ 2] \\ B_3 &= B_0 + [2 \ 2 \ 0] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Et ont le même cardinal et la distance minimale carré entre leurs membres comme B_0 .

Pour le prochain haut niveau de séparation en commençant avec l'union des ensembles de (2.21) et (2.22).

$$C_0 = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0 & 2 & 2,2 & 0 & 2,2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4,4 & 6 & 6,6 & 4 & 6,6 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0,0 & 2 & 2,2 & 0 & 6,2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0,4 & 6 & 6,6 & 4 & 2,6 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0,0 & 6 & 6,2 & 4 & 2,2 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 4,4 & 2 & 2,6 & 0 & 6,6 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0,4 & 2 & 2,6 & 0 & 2,6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4,0 & 6 & 6,2 & 4 & 6,2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Cet ensemble a un cardinal égale à 32 et $d_{\min}^2(C_0) = 4$. Nous pouvons générer C_1 de manière similaire:

$$C_1 = C_0 + [0 \ 0 \ 2] \quad (2.24)$$

Le niveau de partition supérieur suivant se réalise par :

$$D_0 = C_0 \cup C_1 \quad (2.25)$$

L'ensemble D_0 a un cardinal de 64 et une distance minimale carrée entre ses 3-tuples de $d_{\min}^2(D_0) = 2$.

Pour générer les ensembles avec les symboles impairs sur ce niveau, nous commençons avec l'ensemble suivant :

$$E_0 = D_0 + [1 \ 1 \ 1] \quad (2.26)$$

Et ainsi pour le prochain niveau supérieur de partition.

$$F_0 = E_0 \cup D_0 \quad (2.27)$$

L'ensemble E_0 a la même distance minimale entre ses 3-tuples que D_0 , cependant $d_{\min}^2(F_0) = 1.75$ et a un cardinal égal à 128.

Pour concevoir une MTCM avec, par exemple:

- Un throughput de $b/k = 6/3 = 2$.

- treillis codé 8-PSK.
- Un taux de 6/9.

nous avons besoin pour commencer de quatre ensembles chacun ayant un cardinal de 32. Pour cela, nous pouvons utiliser C_0 , C_1 et les deux ensembles additionnels :

$$\begin{cases} C_2 = C_0 + [1 & 1 & 1] \\ C_3 = C_1 + [1 & 1 & 1] \end{cases} \quad (2.28)$$

Pour ces ensembles on a $d_{\min}^2(C_i)=4$, avec $i=0, 1, 2, 3$. Et une interdistance carrée minimale $d_{\min}^2(C_0, C_1)=2$ et $d_{\min}^2(C_0, C_2)=1.75$.

De façon similaire, pour concevoir une MTCM, avec :

- un throughput de $b/k=7/3$.
- 8-PSK codé en treillis.
- un taux de 7/9.

On a besoin de quatre ensembles chacun ayant un cardinal de 64. nous pouvons utiliser D_0 et les trois ensembles additionnels :

$$\begin{cases} D_1 = D_0 + [0 & 1 & 1] \\ D_2 = D_0 + [1 & 0 & 1] \\ D_3 = D_0 + [1 & 1 & 0] \end{cases} \quad (2.29)$$

Ces ensembles ont une $d_{\min}^2=2$.

Finalement, pour concevoir une MTCM, avec :

- un throughput de 8/3.
- 8-PSK codé en treillis.
- un taux de 8/9.

On commence avec F_0 et on génère les trois ensembles suivants :

$$\begin{cases} F_1 = F_0 + [0 & 0 & 1] \\ F_2 = F_0 + [0 & 1 & 0] \\ F_3 = F_0 + [1 & 0 & 0] \end{cases} \quad (2.30)$$

Tous ayant un cardinal égale à 128 et $d_{\min}^2(F_i)=1.75$, $i=0, 1, 2, 3$.

L'ensemble de partition pour $k=4$, 8-PSK.

Les détails de cette méthode sont présentés dans le tableau 2.1.

	Ensemble de signaux	Cardinal d'ensemble	Inter et intra distances entre ensembles
1	$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ $A_1 = A_0 + [0\ 0\ 4\ 4]$ $A_2 = A_0 + [0\ 4\ 0\ 4]$ $A_3 = A_0 + [4\ 0\ 0\ 4]$ $A_{i+4} = A_i + [2\ 2\ 2\ 2]$ $i=0, 1, 2, 3.$	2 2 2 2 2	$d^2(A_i) = 16$ $d^2(A_i, A_j) = 8$ $i \neq j = 0, 1, 2, \dots, 7.$
2	$B_0 = \bigcup_{i=0}^7 A_i$ $B_1 = B_0 + [0\ 0\ 2\ 2]$ $B_2 = B_0 + [0\ 2\ 0\ 2]$ $B_3 = B_0 + [2\ 0\ 0\ 2]$ $B_{i+4} = B_0 + [0\ 0\ 0\ 4]$ $i=0, 1, 2, 3.$ $B_{0i} = B_1$ $B_{1i} = B_1 + [1\ 1\ 1\ 1]$ $i=0, 1, 2, 3, \dots, 7$ $B_{2i} = B_{0i} + [0\ 0\ 0\ 2]$ $B_{3i} = B_{1i} + [0\ 0\ 0\ 2]$ $i=0, 1, 2, 3, \dots, 7.$	16 16 16 16 16 16 16 16 16	$d^2(B_{mi}) = 8$ $d^2(B_{mi}, B_{mj}) = 4$ $m = 0, 1, 2, 3.$ $i \neq j = 0, 1, 2, \dots, 7.$ $d^2(B_{mi}, B_{(m-1)j}) = 4(2 - \sqrt{2})$ $m = 0, 2.$ $i, j = 0, 1, 2, \dots, 7.$ $d^2(B_{mi}, B_{(m-2)j}) = 2$ $m, n = 0, 1$ $i, j = 0, 1, 2, \dots, 7.$
3	$C_0 = \bigcup_{i=0}^7 B_i$ $C_1 = C_0 + [1\ 1\ 1\ 1]$ $C_{i+2} = C_i + [0\ 0\ 0\ 2]$ $i=0, 1.$ $C_{i+4} = C_i + [0\ 0\ 1\ 1]$ $i=0, 1, 2, 3.$	128 128 128 128	$d^2(C_i) = 4$ $d^2(C_i, C_{i-1}) = 4(2 - \sqrt{2})$ $i = 0, 2.$ $d^2(C_i, C_{i-2}) = 2$ $i, j = 0, 1.$ $d^2(C_i, C_{j-4}) = 2(2 - \sqrt{2})$ $i, j = 0, 1, 2, 3.$
4	$D_0 = C_0 \cup C_1$ $D_1 = C_2 \cup C_3$ $D_{i+2} = D_i + [0\ 0\ 1\ 1]$ $D_{i+4} = D_i + [0\ 1\ 0\ 1]$ $D_{i+6} = D_i + [1\ 0\ 0\ 1]$ $i = 0, 1.$	256 256 256 256 256	$d^2(D_i) = 4(2 - \sqrt{2})$ $d^2(D_i, D_{i-1}) = 2$ $i = 0, 2, 4, 6.$ $d^2(D_i, D_{j-m}) = 2(2 - \sqrt{2})$ $m = 2, 4, 6.$ $i, j = 0, 1, 2, \dots, 7.$
5	$E_0 = D_0 \cup D_1$ $E_1 = E_0 + [0\ 0\ 1\ 1]$ $E_2 = E_0 + [0\ 1\ 0\ 1]$ $E_3 = E_0 + [1\ 0\ 0\ 1]$ $E_{i+4} = E_i + [0\ 0\ 0\ 1]$ $i = 0, 1, 2, 3.$	512 512 512 512 512	$d^2(E_i) = 2$ $i = 0, 1, 2, \dots, 7.$ $d^2(E_{i+m}, E_{j-m}) = 2(2 - \sqrt{2})$ $i, j = 0, 1, 2, 3.$ $m = 0, 4.$ $d^2(E_i, E_{j+4}) = 2 - \sqrt{2}$ $i, j = 0, 1, 2, 3.$

Tableau 2.1 : La méthode de la partition d'ensemble pour k=4.

2.4.2. L'ensemble mapping et l'évaluation de la distance limite carrée [1]

Pour le cas général de la MTCM et un nombre arbitraire d'états, il n'est pas facile de trouver une expression simple de d_{free} . Nous évaluons la distance libre carrée par la considération de plusieurs différentes structures de treillis dérivées à partir de la méthode de l'ensemble de partitionnement décrite ci-dessus, nous allons interpréter plusieurs exemples.

Exemples :

Exemples 2.1:

Considérant un codeur avec :

- $b=3, s=6$.
- un taux de multiplicité $k=2$
- des symboles binaire 8-PSK à la sortie.
- un throughput $r=b/k=1.5$.

Le nombre minimum d'état pour le treillis doit être 8. Ainsi, on commence par ce cas spécifique.

Treillis a huit états

Nous devons assigner une paire ($k=2$) de symboles 8-PSK à chaque branche du treillis de façon à maximiser la distance limite du codeur. Pour l'ensemble des signaux de 8-PSK de la figure 2.4, on définit

les ensembles suivants (pairs de symboles de 8-PSK) :

$$\begin{aligned}
 A_0=00 \quad A_4=22 \quad B_0=02 \quad B_4=20 \\
 A_1=44 \quad A_5=66 \quad B_1=66 \quad B_5=46 \\
 A_2=04 \quad A_6=26 \quad B_2=06 \quad B_6=24 \\
 A_3=40 \quad A_7=62 \quad B_3=42 \quad B_7=60
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

Ces ensembles ont les distances carrées minimales euclidiennes suivantes :

$$\begin{aligned}
 d_{\min}^2(A_i, A_j) &= 4 \\
 d_{\min}^2(B_i, B_j) &= 4 \\
 d_{\min}^2(A_i, B_j) &= 2
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

On attribue les A_i pour les chemins quittant les états énumérés impairs, à chaque fois, on fait une permutation des attributs de un, et les B_i pour les chemins quittant les états énumérés pairs avec la même permutation (figure 2.6), lorsque cela est fait, la distance minimale du chemin serait de longueur 2 et la distance limite du code est :

$$d^2_{free} = d^2_{\min}(A_i, A_j) + d^2_{\min}(A_i, B_j) = 4 + 2 = 6 \quad (2.33)$$

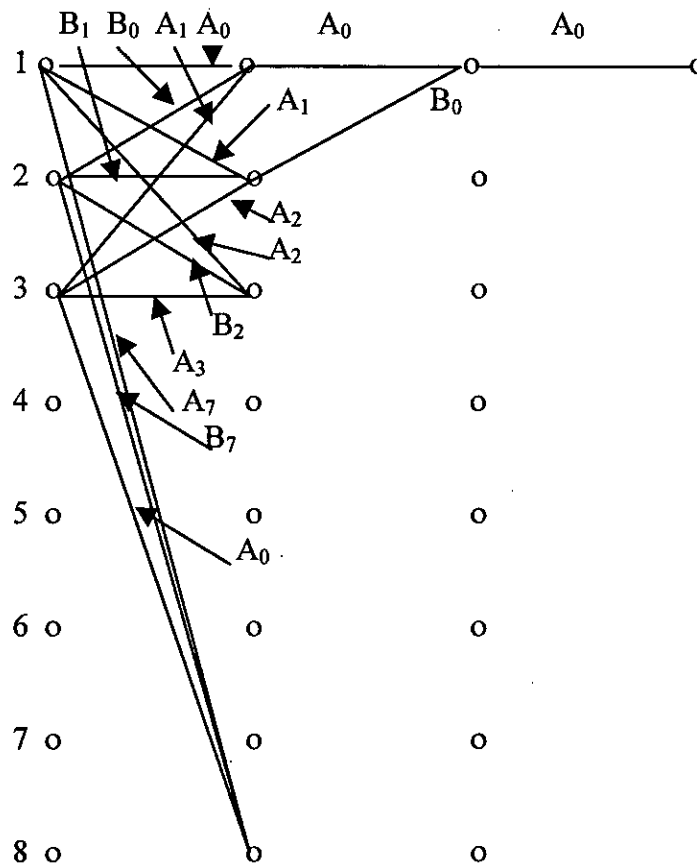


Figure 2.6 : diagramme de treillis a 8 états.

Treillis a 16 états.

On prend toujours les chemins non parallèles entre états mais on utilise pour chaque état de transition la moitié connectée du nombre total d'états du treillis. En particulier, en faisant comme précédemment, on attribue les A_i pour les chemins quittant les états énumérés impairs et les B_i pour les chemins quittant les états énumérés pairs (figure 2.7), le chemin de distance minimale est de longueur 2 et la distance limite carré est :

$$d^2_{free} = d^2_{\min}(A_i, A_j) + d^2_{\min}(A_i, A_j) = 4 + 4 = 8 \quad (2.34)$$

Ceci est comparé avec les valeurs de $d_{\text{free}}^2 = 14.0$ et $d_{\text{free}}^2 = 5.172$ pour les 16 états avec un taux conventionnel de $\frac{1}{2}$ QPSK codé en treillis. Et un taux de $\frac{2}{3}$ 8-PSK codé en treillis respectivement.

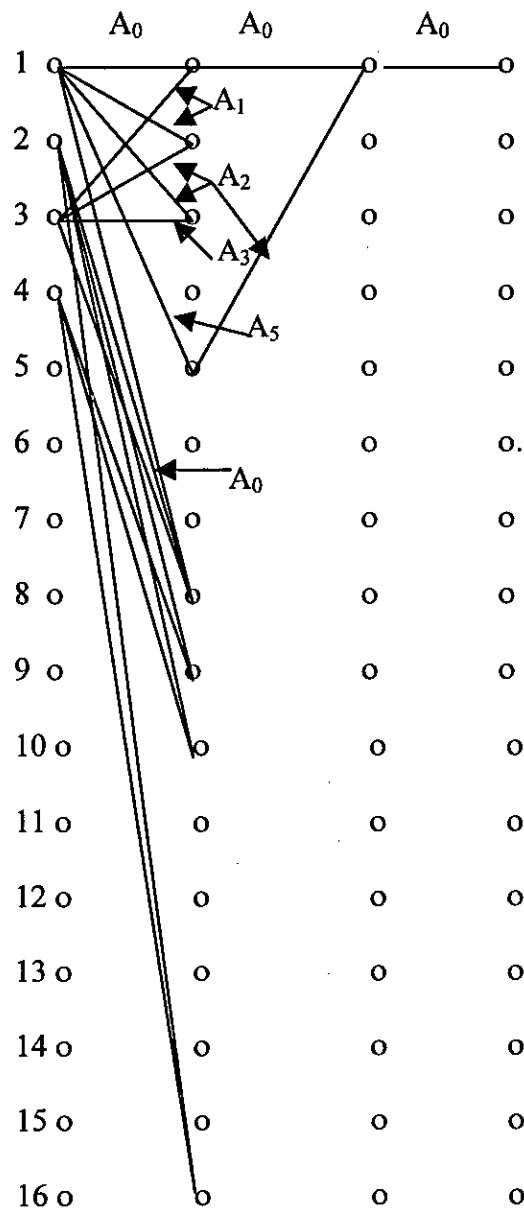


figure 2.7 : treillis a 16 états.

Exemple 2.2 :

La distance limite de la MTCM de l'exemple 2.1 peut être augmentée en définissant les ensembles de mapping tels que les transitions entre états contiennent des chemins parallèles. En particulier, nous définissons les états contenant deux éléments par les ensembles suivants :

$$\begin{array}{cccc}
 C_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & D_0 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & E_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} & F_0 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} \\
 C_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & E_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & F_1 = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\
 C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} & D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & E_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{vmatrix} & F_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \\
 C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & E_3 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} & F_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}
 \end{array} \quad (2.36)$$

Ces ensembles ont les distances euclidiennes carrées suivantes :

$$\begin{cases}
 d^2(C_i, C_j) |_{i \neq j} = d^2(D_i, D_j) |_{i \neq j} = d^2(E_i, E_j) |_{i \neq j} = d^2(F_i, F_j) |_{i \neq j} = 4 \\
 d^2_{\min}(C_i, D_j) = d^2_{\min}(E_i, F_j) = 2 \\
 d^2(C_i) = d^2(D_i) = d^2(E_i) = d^2(F_i) = 8
 \end{cases} \quad (2.36)$$

Remarque :

- $d^2(X_i)$ indique la distance euclidienne carrée entre deux éléments de même ensemble.
- $d^2(X_i, Y_j)$ est la distance euclidienne carrée entre un élément de X_i et un élément de l'ensemble Y_j .
- $d^2_{\min}(X_i, Y_j)$ est la distance euclidienne minimale entre un élément de l'ensemble X_i et un autre de l'ensemble Y_j .

Treillis a quatre états :

Considérant un treillis a quatre états de la figure 2.8 où l'ensemble C_i est attribué aux chemins quittant les états 1 et 3, l'ensemble D_i est attribué aux chemins quittant les états 2 et 4.

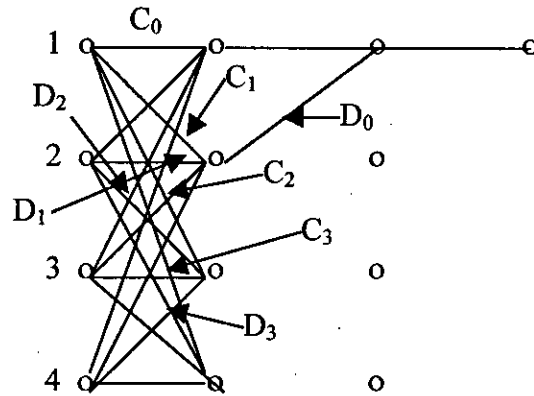


Figure 2.8 : Treillis a quatre états.

On trouve une distance limite carrée d_{free}^2 égale à :

$$d_{free}^2 = d^2(C_i, C_j) |_{i \neq j} + d_{min}^2(C_i, D_j) = 4 + 2 = 6 \quad (2.37)$$

Puisque cette distance est plus petite que la distance carrée entre chemins parallèles $d^2=8$, donc, nous pouvons déduire qu'en utilisant des chemins parallèles entre transition, nous sommes capable d'atteindre une distance limite plus large avec seulement quatre états que nous avons atteint auparavant en utilisant huit états(exemple 2.1).

Treillis a huit états.

Ici, on a un treillis à moitié connecté (figure 2.9) avec les C_i sont attribués aux états énumérés impairs et les D_j aux états énumérés pairs.

. Encore, le chemin de distance minimale est de longueur 2 et atteint :

$$d^2(C_i, C_j) |_{i \neq j} + d_{min}^2(C_i, C_j) = 4 + 4 = 8 \quad (2.38)$$

Puisque, ceci est identique à la distance carrée entre des chemins parallèles, donc, nous avons $d_{free}^2=8$, qui est identique à ce accomplie avec 16 états et les transitions non parallèles dans exemple 2.1. Comme la distance limite maximale est limitée à la distance entre transition parallèle, nous ne pouvons pas obtenir une amélioration en allant au de la de 16 états.

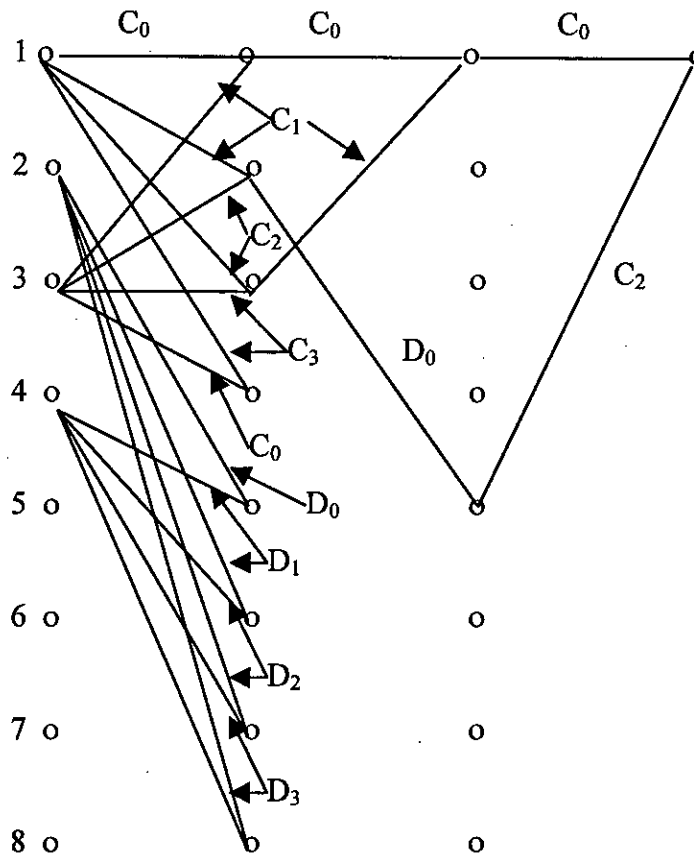


Figure 2.9 : treillis a quatre états pour l'exemple 2.4.

Exemple 2.3 :

Soit un codeur en treillis avec les caractéristiques suivantes :

- $b=7, s=12$
- des symboles binaires de sortie sont modulés avec une modulation 8-PSK de multiplicité $k=4$.
- un throughput de $b/k=1.75$.

On a maintenant 128 transitions pour chaque état. Le premier cas que nous considérant est le treillis a quatre états qui implique un nombre de chemins (path) parallèles de 16.

Treillis a huit états.

En accord avec ce qui a été évoqué ci-dessus, nous devons attribuer 16 4-tuples de symboles 8-PSK à chaque branche du treillis de façon à maximiser la distance limite du code. Nous pouvons utiliser le diagramme de treillis de la figure 2.6, mais, en premier, nous devons définir et attribuer les ensembles de 8-PSK 4-tuples. La construction de ces ensembles est disposée dans le tableau 2.2 suivant :

$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$,	$A_1 = A_0 + [0 \ 0 \ 4 \ 4]$
$A_2 = A_0 + [0 \ 4 \ 0 \ 4]$,	$A_3 = A_0 + [4 \ 0 \ 0 \ 4]$
$B_0 = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B_1 = B_0 + [2 \ 2 \ 2 \ 2]$	
$C_0 = B_0 \cup B_1$,	$C_1 = C_0 + [0 \ 0 \ 0 \ 4]$
$C_2 = C_0 + [0 \ 0 \ 2 \ 2]$,	$C_3 = C_0 + [0 \ 0 \ 2 \ 6]$
$C_4 = C_0 + [2 \ 0 \ 0 \ 2]$,	$C_5 = C_0 + [2 \ 0 \ 0 \ 6]$
$C_6 = C_0 + [0 \ 2 \ 0 \ 2]$,	$C_7 = C_0 + [0 \ 2 \ 0 \ 6]$

Tableau 2.2

Ces ensembles ont les distances euclidiennes limites suivantes :

$$\begin{cases} d^2_{\min}(C_i) = d^2_{\min}(E_i) = 8 \\ d^2_{\min}(C_i, C_j) |_{i \neq j} = d^2_{\min}(E_i, E_j) |_{i \neq j} = 4 \\ d^2_{\min}(C_i, E_j) = 4(2 - \sqrt{2}) = 2.8 \end{cases} \quad (2.39)$$

Si nous remplaçons les branches du treillis attribuées à A_i et B_i de la figure 2.6 par C_i et E_i respectivement, on aura une distance entre chemins parallèles de 8 et une distance limite est déterminé par la distance minimale du chemin de longueur 2 :

$$d^2_{\text{free}} = d^2_{\min}(C_i, C_j) |_{i \neq j} + d^2_{\min}(E_i, E_j) |_{i \neq j} = 4 + 4(2 - \sqrt{2}) = 6.343 \quad (2.40)$$

Treillis a 16 états.

En utilisant la moitié connectée du treillis de la figure 7.7 et en remplaçant encore les branches attribuées à A_i et B_i par C_i et E_i respectivement, la distance minimale du chemin de longueur 8 a une distance euclidienne carrée suivante :

$$d^2 = d^2_{\min}(C_i, C_j) |_{i \neq j} + d^2_{\min}(E_i, E_j) |_{i \neq j} = 4 + 4 = 8 \quad (2.41)$$

puisque d^2 est égale à la distance carrée minimale entre chemins parallèles, la distance carrée limite est égale à 8.

Exemple 2.4 :

Dans cet exemple, on considère un treillis a quatre états de paramètres suivants :

- $b=6$,
- un taux de multiplicité $k = 4$.
- un throughput de 1.5,

Son diagramme est illustré dans la figure 2.10, les ensembles C_i énumérés impairs sont attribués aux branches quittant les états 2 et 4.

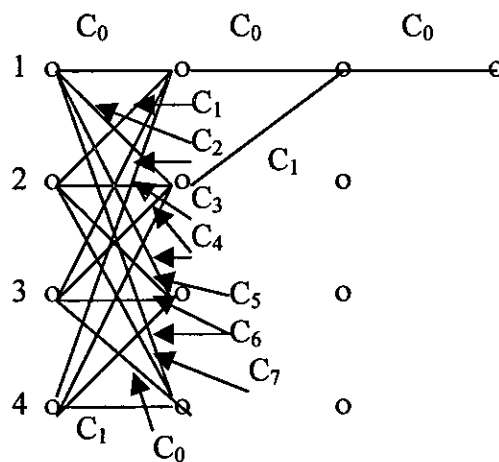


Figure 2.10 : treillis a quatre états.

Le chemin de distance minimale du chemin est de longueur 2 et atteint une distance carrée égale à 8, qui est égale à la distance carrée entre branches parallèles. Ainsi $d_{\text{free}}^2 = 8$, d'où nous pouvons atteindre avec quatre états seulement et un rapport de multiplicité 4 la performance équivalente à ce qui nécessite huit états quand le rapport de multiplicité est de 2 (exemple 2.2). encore une fois, en allant à un plus grand nombre d'états, nous aurons aucun gain profit, puisque la distance limite entre branches parallèles a déjà été atteinte.

2.5. La représentation analytique de la MTCM [12]

Pour généraliser la représentation analytique de manière à l'appliquer à la MTCM, en premier, nous représentons un bref aperçu pour TCM conventionnel ($k=1$) et après, on déduit comment une telle description est associée pour chacun des k éléments dans le k -tuples attribués aux branches du treillis dans la MTCM.

Soit $\{b_i\}$ une suite de séquence de valeurs variables (± 1) et $\{a_i\}$ une séquence d'entrée du codeur ayant pour valeurs 0, 1, $\{a_i\}$ est accordé à $\{b_i\}$ par la transformation linéaire suivante :

$$b_j = 1 - 2a_i .$$

La sortie du modulateur $x(b_1, b_2, \dots, b_n)$ peut être écrite pour la TCM conventionnel comme suit :

$$x(b_1, b_2, \dots, b_n) = d_0 + \sum_{i=1}^n d_i b_i + \sum_{i,j=1}^n d_{ij} b_i b_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ k>j>1}}^n d_{ijk} b_i b_j b_k + \dots + d_{1\dots n} b_1 b_2 \dots b_n \quad (2.43)$$

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2^n})$ est une colonne de vecteurs de longueur 2^n où ces composantes représentent 2^n valeurs $x(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Soit $d = (d_0, d_1, \dots, d_n, d_{12}, d_{13}, \dots, d_{1\dots n})$ une colonne de vecteur de 2^n longueurs de composantes inconnues. Finalement, soit B est une matrice de $2^n \times 2^n$ où chaque ligne représente les 2^n valeurs prises par tous les produits de b_i . En terme de ces définitions, l'équation (2.10) peut être écrite sous la forme d'une matrice :

$$x = Bd \quad (2.44)$$

Si B est un vecteur correspondant a un produit particulier de b_i , alors, le coefficient correspondant à ce produit dans le developpement de (2.43) est simplement obtenu par l'équation suivante :

$$d = \frac{1}{2^n} B^T x \quad (2.45)$$

ceci est la transformation de Hadamard du vecteur x

Pour appliquer la description analytique à la MTCM, nous observons qu'une représentation telle que (2.43) est appropriée pour chacun des k symboles de sortie (output) le long de toute branche du treillis. Ainsi, $x^{(i)}$ signifié la i^{eme} sortie du modulateur (output) correspondante a une séquence d'entrée particulière de longueur b , la représentation de la matrice (2.44) est approprie aux vecteurs associés $x^{(i)}$ et produit un vecteur $d^{(i)}$ en accord avec l'équation (2.45) où $n=b+v$. L'ensemble des vecteurs $\{d^{(i)}\}$ décrit complètement le code en treillis multiple.

Soit à titre d'exemple un treillis multiple de taux 2/4 codé en 4-AM a deux états comme le montre la figure 2.2(b), avec $b=2$, $v=1$ et $n=3$, l'équation (2.43) se simplifiée à:

$$X(b_1, b_2, b_3) = d_1 b_1 + d_2 b_2 + d_3 b_3 + d_{12} b_1 b_2 + d_{13} b_1 b_3 + d_{23} b_2 b_3 + d_{123} b_1 b_2 b_3 \quad (2.46)$$

b_3 dénote l'état précédente et b_1 l'état actuel. Notons que ni l'état précédente et ni l'état actuel dépend de b_2 . à partir de la figure 2.2(b), en remplaçant les états 0 et 1 par 1 et -1 respectivement en accord avec la relation qui lie a_i et b_i et la constellation du signal de la figure 2.3 pour une modulation symétrique, nous avons :

$$\begin{array}{ll}
 x^{(1)}(1, 1, 1) = -3 & x^{(2)}(1, 1, 1) = -3 \\
 x^{(1)}(1, -1, 1) = 1 & x^{(2)}(1, -1, 1) = 1 \\
 x^{(1)}(-1, 1, 1) = -3 & x^{(2)}(-1, 1, 1) = 1 \\
 x^{(1)}(-1, -1, 1) = 1 & x^{(2)}(-1, -1, 1) = -3 \\
 x^{(1)}(1, 1, -1) = -1 & x^{(2)}(-1, 1, -1) = -1 \\
 x^{(1)}(-1, -1, -1) = 3 & x^{(2)}(-1, -1, -1) = 3 \\
 x^{(1)}(1, 1, -1) = -1 & x^{(2)}(1, 1, -1) = 3 \\
 x^{(1)}(1, -1, -1) = 3 & x^{(2)}(1, -1, -1) = -1
 \end{array} \quad (2.47)$$

en utilisant (2.45), l'expression de (2.47) peut être mise sous une forme matricielle :

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{23} \\ d_{123} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

et

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

on résout le système pour déterminer les éléments $d^{(i)}$, $i=1,2$. On utilise la seconde et la troisième colonnes de B pour $d^{(1)}$ et la troisième et la septième colonne de B pour $d^{(2)}$, par exemple, nous devons avoir les résultats suivants :

$$d_2^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{array} = -2$$

(2.50a)

$$d_3^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{array} = -1 \quad (2.50a)$$

$$d_3^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{array} = -1$$

(2.50b)

$$d_{123}^{(1)} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = -2$$

l'application de l'équation (2.45) pour les colonnes restantes de B donne des valeurs nulles pour tous les autres d. Ainsi le treillis de la figure 2.2(b) est représenté par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -2b_2 - b_3 \\ x^{(2)} &= -b_3 - 2b_1b_2b_3 \end{aligned} \tag{2.51}$$

par le biais de l'équation (2.51), on peut concevoir un émetteur qui combine en même temps modulation et codage (voir figure 2.11).

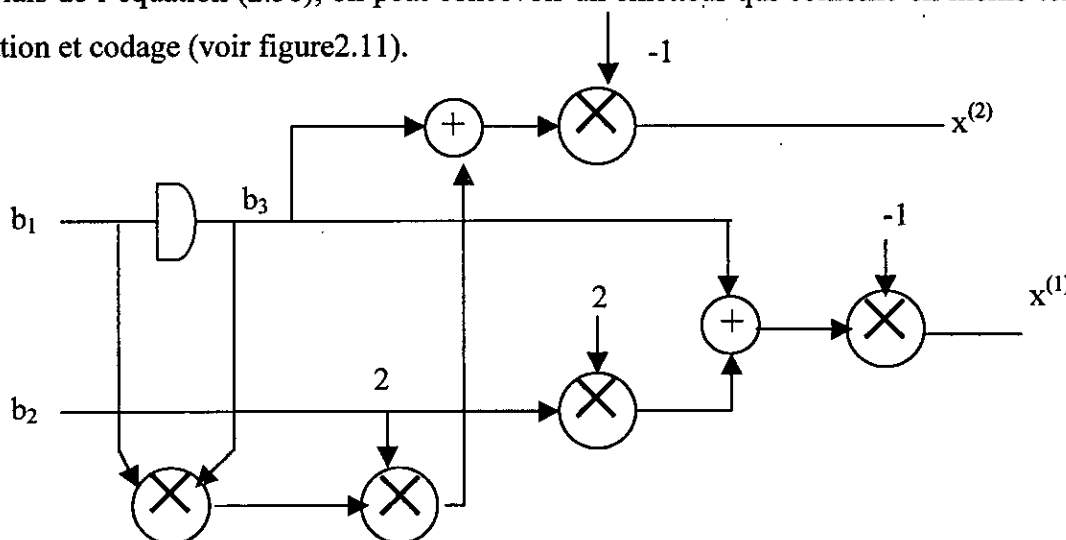


Figure 2.11 : Emetteur de débit 2/4 modulé en 4-AM codé en multiple treillis.

Prenons encore un second exemple. En considérant le cas d'un treillis à deux états avec un débit de 2/4 QPSK codée en treillis . Une fois encore $n=3$, l'équation (2.46) définit la relation entre l'entrée et la sortie du codeur. le symbole x représente dans ce cas la phase au lieu de l'amplitude, la sortie y est donnée par la notation complexe suivante : $y = e^{jx}$. le diagramme de treillis de la figure 2.2(b) est approprié avec le signal de constellation de la figure 2.2(a) avec ($\phi = 0$). En particulier, on a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 x^{(1)}(1, 1, 1) &= -\pi/4 & x^{(2)}(1, 1, 1) &= -\pi/4 \\
 x^{(1)}(1, -1, 1) &= 3\pi/4 & x^{(2)}(1, -1, 1) &= 3\pi/4 \\
 x^{(1)}(-1, 1, 1) &= -\pi/4 & x^{(2)}(-1, 1, 1) &= 3\pi/4 \\
 x^{(1)}(-1, -1, 1) &= 3\pi/4 & x^{(2)}(-1, -1, 1) &= -\pi/4 \\
 x^{(1)}(-1, 1, -1) &= \pi/4 & x^{(2)}(-1, 1, -1) &= \pi/4 \\
 x^{(1)}(-1, -1, -1) &= -3\pi/4 & x^{(2)}(-1, -1, -1) &= -3\pi/4 \\
 x^{(1)}(1, 1, -1) &= \pi/4 & x^{(2)}(1, 1, -1) &= -3\pi/4 \\
 x^{(1)}(1, -1, -1) &= -3\pi/4 & x^{(2)}(1, -1, -1) &= \pi/4
 \end{aligned}
 \tag{2.52}$$

En mettant l'équation(2.49) sous forme de vecteur et en utilisant la matrice (2.49) et on résout l'équation (2.45) en remplaçant par d_i , on trouve les résultats désirés :

$$\begin{cases}
 X^{(1)} = \pi/4 (b_3 - 2 b_2 b_3) \\
 X^{(2)} = \pi/4 (b_3 - 2 b_1 b_2)
 \end{cases}
 \tag{2.53}$$

La figure 2.12 ci-dessous est l'implémentation de l'émetteur caractérisé par les équations(2.53), où le modulateur est utilisé pour convertir x à y en accord avec les équations trouvées précédemment :

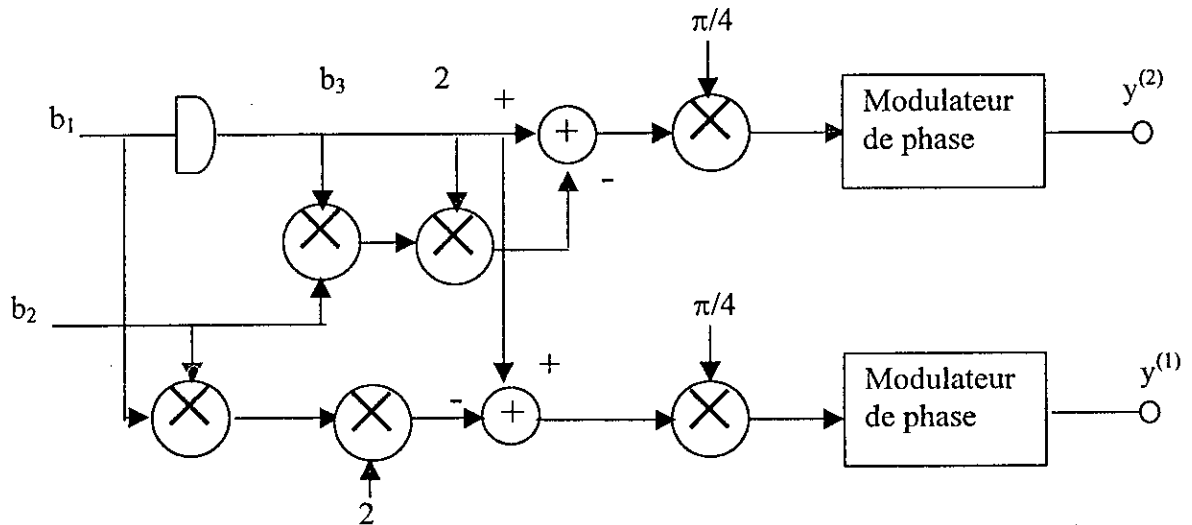


Figure 2.12 : L'implémentation d'émetteur de débit 2/4 modulé en QPSK codé en multiple treillis.

Conclusion :

Dans ce chapitre, Nous avons présenté des généralités et des principes de base de la MTCM, Nous avons donné trois méthodes de réalisation de la MTCM, la généralisation de la MTCM, la représentation de Divsalar et Silmon et la représentation analytique, cette dernière est plus simple à implémenter par rapport aux deux premières.

Nous avons traité quelques exemples montrant les 3 représentations, en donnant les partitions d'ensemble et les schémas des codeurs.

Nous avons démontré qu'une mesure asymptotique de la performance du gain d'un système MTCM est la comparaison de la distance euclidienne d_{free} du codeur en treillis relative à la distance d_{free} de la TCM conventionnelle et à la distance minimale de la modulation non codée.

Cette performance de mesure est une indication de la réduction dans l'énergie du bit sur bruit $\frac{E_b}{N_0}$ requis.

Le but du prochain chapitre sera les calculs et les interprétations des résultats de la MTCM.

CHAPITRE 3

Chapitre 3

Evaluation des performances de la modulation codée en treillis multiple

3-1 Introduction :

Dans ce chapitre de calcul, nous traitons la modulation codée en treillis multiple. Nous effectuons des mesures de la distance limite d_{free} , le débit de coupure cutoff rate R_0 et probabilités par bit pour la modulation codée en treillis multiple la MTCM.

Ces mesures seront comparées avec les résultats de la TCM conventionnelle et la modulation non codée.

Dans notre calcul, nous allons utilisé le langage MATLAB sous Windows.

3.2 Calcul de la distance limite d_{free} :

la distance limite carrée d'un codage en treillis multiple est exprimée par la relation [1]:

$$d_{free}^2 = \begin{cases} \min \left\{ 8 \sin^2\left(\frac{\pi}{2^m}\right), 4k \sin^2\left(\frac{\pi}{2^m}\right) + 4k \sin^2\left(\frac{\pi}{2^{m+1}}\right) \right\} & \text{pour } M - PSK \\ \min \left\{ \frac{32}{(2^{2m+2} - 1)/3}, \frac{16 + 4k}{(2^{2m+2} - 1)/3} \right\} & \text{pour } M - AM \end{cases} \quad (3.1)$$

le premier et le second termes dans la relation (3.1) représentent la distance minimale carrée d_1 d'un chemin de longueur d'événement 1, et d_2 d'un chemin d'événement d'erreur de longueur 2.

-Influence de la multiplicité k :

Pour situer la valeur limite de k pour laquelle il n'est pas d'amélioration dans le d_{free} . Nous cherchons la valeur de k en fonction de m . nous exprimons le nombre entier k le plus grand possible pour que $d_1^2 > d_2^2$. A partir des résultats précédents, nous obtenons la valeur limite de k :

$$K_{max} = \begin{cases} |2(1 + \cos(\pi/2^m))| \leq 4 & \text{pour } M\text{-PSK} \\ 4 & \text{pour } M\text{-AM} \end{cases} \quad (3.2)$$

A partir de (3.2), nous pouvons faire les constatations suivantes :

- pour M-PSK, une valeur de $m=1$ produit $k_{max}=2$. et pour $m > 1$ $k_{max} = 4$
- Pour le M-AM nous avons $k_{max} = 4$ pour tout les $m \geq 1$.

Un programme de calcul de la distance d_{free}^2 est réalisé en langage MATLAB. Les résultats obtenus par ce calcul sont donnés dans les tableaux 2.1 et 2.2 pour la M-PSK et M-AM respectivement.

d_{free}^2	m	k	Gain relative pour la TCM conventionnelle (K=1) (DB)	Gain relatif pour une modulation non codée 2^n -PSK (DB)
6.0	1	1	0.0	1.76
8.0	1	2	1.25	3.01
2.586	2	1	0.0	1.116
3.172	2	2	0.887	2.003
3.757	2	3	1.623	2.739
4.0	2	4	1.895	3.01
0.738	3	1	0.0	1.00
0.8903	3	2	0.814	1.814
1.0425	3	3	1.50	2.50
1.172	3	4	2.01	3.01

Tableau 3.1 : La distance limite minimale carrée de la modulation M-PSK codée en treillis multiple à deux états.

d_{free}^2	n	k	Gain relatif pour la TCM conventionnelle (K=1) (DB)	Gain relatif pour la modulation non codée 2^n -AM (DB)
4.0	1	1	0.0	0.0
4.8	1	2	0.792	0.792
5.6	1	3	1.461	1.461
6.4	1	4	2.041	2.041
20/21	2	1	0.0	0.757
24/21	2	2	0.792	1.549
28/21	2	3	1.461	2.218
32/21	2	4	2.041	2.798
20/85	3	1	0.0	0.918
24/85	3	2	0.792	1.71
28/85	3	3	1.461	2.379
32/85	3	4	2.041	2.959

Tableau 3.2 : La distance limite minimale carrée de la modulation M-AM codé en treillis multiple à deux états.

Dans les tableaux 3.1 et 3.2, les valeurs de d_{free} sont données pour les modulations M-PSK et M-AM codées en multiple treillis ainsi que leur gain relatif en dB par rapport à la TCM conventionnelle.

Nous rappelons que ces gains relatifs en dB a la TCM conventionnelle et modulation non codée sont donnés par :

$$G_1 = \frac{d_{free}^2}{d_{free}^2} \quad (3.3)$$

$$G_2 = \frac{d_{free}^2}{d_{min}^2} \quad (3.4)$$

où :

- d_{free}^2 est la distance carrée libre de la MTCM.
- d_{free}^2 est la distance carrée libre de la TCM.
- d_{min}^2 est la distance minimale de la constellation non codée.

Interprétation des résultats des tableaux :

L'analyse des résultats données dans les tableaux 3.1 et 3.2, permet de faire les constatations suivantes :

- La MTCM apporte un gain relatif par rapport à la TCM conventionnelle et la modulation non codée.
- Ce gain varie selon les paramètres k et m , on note un gain maximum de 2.01dB par rapport à la modulation conventionnelle codée en treillis et de 3.01dB par rapport à la modulation non codée dans le cas de la M-PSK.
- Un gain maximum est atteint, de valeur 2.041dB par rapport à la modulation codée en treillis conventionnel, et de 2.959dB par rapport à la modulation non codée dans le cas de la M-AM.

3.3 Calcul du débit de coupure (cuttoff rate) de la MTCM :

Le débit de coupure est un critère d'évaluation de la performance d'un système de communication. Il a sens seulement dans un canal discret, il est défini comme étant l'intersection de la droite de la tangente de la fonction de distorsion $E(R)$ au point où la dérivée est égale à -1 avec l'axe des abscisses (le débit R), (Voir figure 3.1).

Où :

- $E(R)$ représente la distorsion du canal.

- R est un débit exprime en nombre de bit par second.

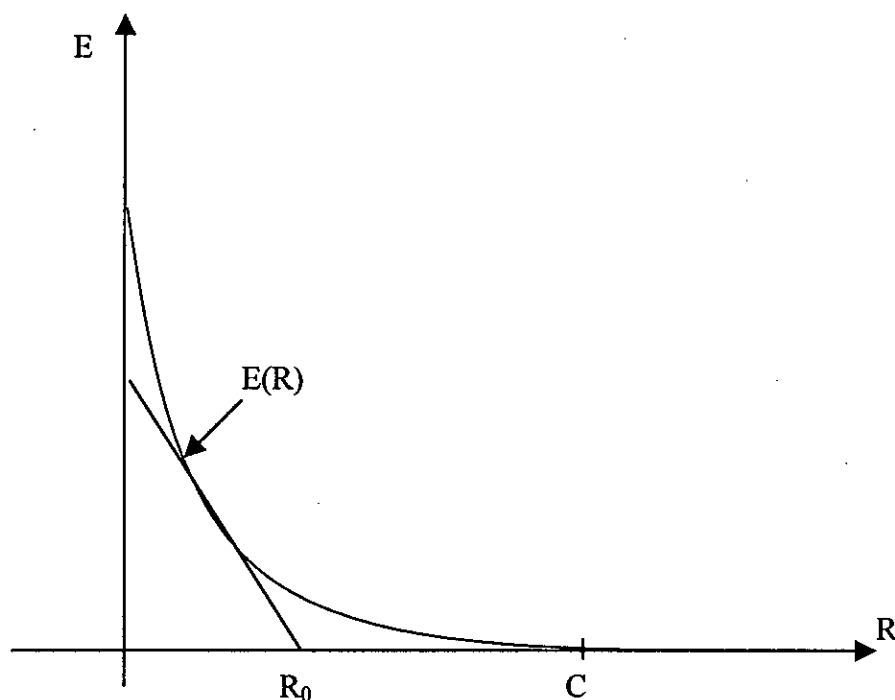


Figure 3.1 : La fonction $E(R)$ pour un canal discret et son cutoff.

Lorsqu'un signal vectoriel $(s_i)_{i=1}^M$ est transmis à travers un canal gaussien, avec des probabilités $(q_i)_{i=1}^M$, l'expression générale de R_0 est donnée par :

$$R_0 = -\log_2 \left(\min \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M q_i q_j e^{-|s_i - s_j|^2 / 4N_0} \right) \quad (3.3)$$

En pratique, le cutoff R_0 peut être interprété comme étant la borne supérieure du débit R , ce R_0 est toujours inférieur à la capacité de canal C .

3.3.1 Le calcul du cutoff pour la MTCM :

A partir de la relation (3.3), pour la modulation M-PSK et un canal discret, R_0 est donné par la relation suivante :

$$R_0 = \log_2(M) + \log_2 \left[1 + \sum_{i=1}^{M-1} Z^4 \sin^2(i\pi/M) \right] \quad (3.4)$$

avec :

- Z est le paramètre de Bhattacharyya défini en fonction de E_s/N_0 par :

$$Z = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{E_s}{N_0}\right) = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{bE_b}{kN_0}\right) \quad (3.5)$$

- E_s représente l'énergie d'un signal de canal M-aire.

Dans le cas de la MTCM, Ce paramètre R_0 se coïncide avec le throughput (bit/s/Hz). Un programme a été réalisé pour le calcul de ce paramètre R_0 en fonction du rapport signal sur bruit est illustrée dans la figure (3.2). les points qui sont identifiés sur cette figure correspondent aux différentes configurations de la MTCM donnée dans le tableau 3.3 :

Points	b	k	Nombre d'états
A	1	1	16
B	1	1	8
C	2	1	2
D	2	1	16
E	2	2	2
F	12	4	2
G	9	4	4
H	10	4	2
I	5	2	2
J	11	4	8
K	11	4	2
L	7	2	2
M	7	2	8

Tableau 3.3

. L'analyse de la figure 3.2 permet de constater que :

R_0 dépend un nombre d'états du codeur, le taux de multiplicité k et du rapport signal sur bruit

- Plus le nombre d'états est faible et plus le rapport signal sur bruit nécessaire pour maintenir le cutoff au niveau du throughput est important. On prend comme exemple, les point L($b=7$, $k=2$, 2 états) et M($b=7$, $k=2$, 8 états), on voit bien que le rapport E_s/N_0 de la configuration représentée par le point L ($RSB_0 \approx 19.5\text{dB}$) est plus important que celui représentée par le point M ($RSB_0 \approx 17\text{dB}$), ce dernier RSB_0 est la petite valeur du rapport signal sur bruit qui donne une valeur maximal du R_0 .
- Plus on augmente le taux de multiplicité k , le rapport signal sur bruit nécessaire (RSB_0) diminue, on prend comme un autre exemple, les points C ($b=2$, $k=1$, 2

états) et $E(b=2, k=2, 2 \text{ états})$ qui nécessite un E_s/N_0 de ($RSB_0 \approx 7.5\text{dB}$) et ($\approx 10\text{dB}$) respectivement

- Plus on augmente le taux de multiplicité k de tel sorte que le throughput (b/k) reste invariant et plus le rapport signal sur bruit nécessaire diminue, on prend comme un autre exemple, les points $H=(b=10, k=4, 2 \text{ états})$ et $I=(b=5, k=2, 2 \text{ états})$ qui nécessite un E_s/N_0 de ($\approx 13\text{dB}$) et ($\approx 14\text{dB}$) respectivement

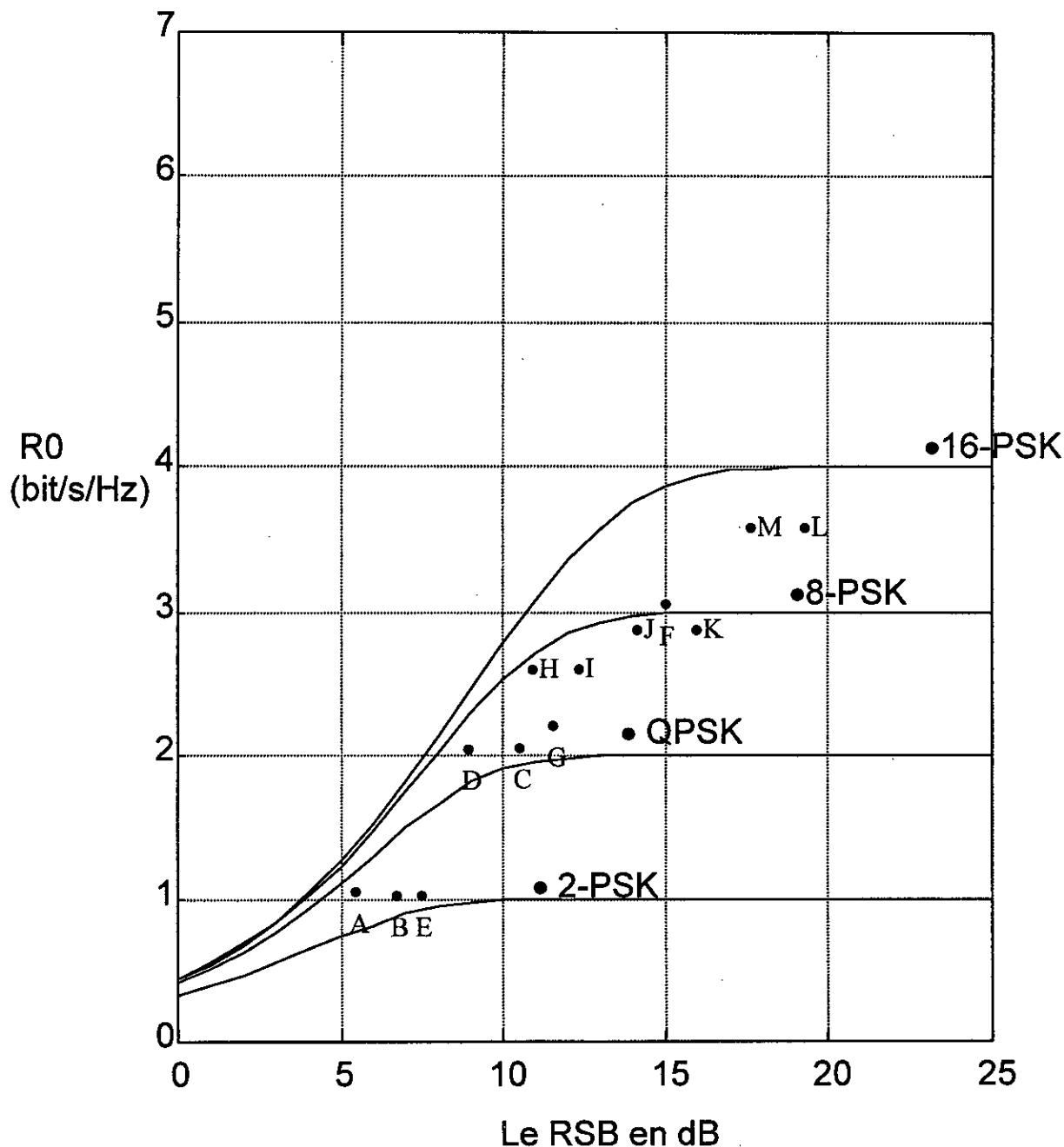


Figure 3.2 : la comparaison du rate cutoff de la modulation M-PSK avec le throughput de la même modulation codée en treillis multiple.

3.3 Probabilité d'erreur par bit :

Ce paramètre est considéré comme une mesure importante de qualité des systèmes de communication. Par analogie avec la probabilité d'erreur de la TCM conventionnelle, on peut déterminer la borne supérieure de la probabilité d'erreur de la MTCM (voir annexe):

$$P_b \leq \frac{1}{2b} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{bE_b}{kN_0} \frac{d_{free}^2}{4}} \right) Z^{-d_{free}^2} \frac{\partial}{\partial I} T(D,I) \Big|_{I=1, D=Z} \quad (3.6)$$

où

- Z est le paramètre Bhattacharya définie par la relation (3.5) :

avec E_s est l'énergie par symbole du code treillis et $T(D,I)$ est la fonction de transfert du diagramme de super état (super-state) du treillis multiple.

Considérant comme exemple un système de treillis multiple avec rendement de 2/4 modulé en QPSK comme dans la figure 2.2b, son diagramme d'état est illustré dans la figure 3.3 et son diagramme de super état équivalent est illustré dans la figure 3.4. Dans la figure 3.3, les branches sont désignées par les bits d'entrée et les paires symboles de QPSK. Les branches de la figure 3.4 sont désignées par un gain de la forme suivante :

$$G = \sum \frac{1}{b} I^\Omega D^{\delta^2} \quad (3.7)$$

- I est un indice.
- Ω est la distance de Hamming entre les séquences de bits d'entrée.
- δ^2 est la distance euclidienne carrée entre les symboles M-PSK de sortie correspondants à la transition entre les super-états. L'équation (3.7) montre une possibilité d'existence de chemins parallèles dans le diagramme de treillis.

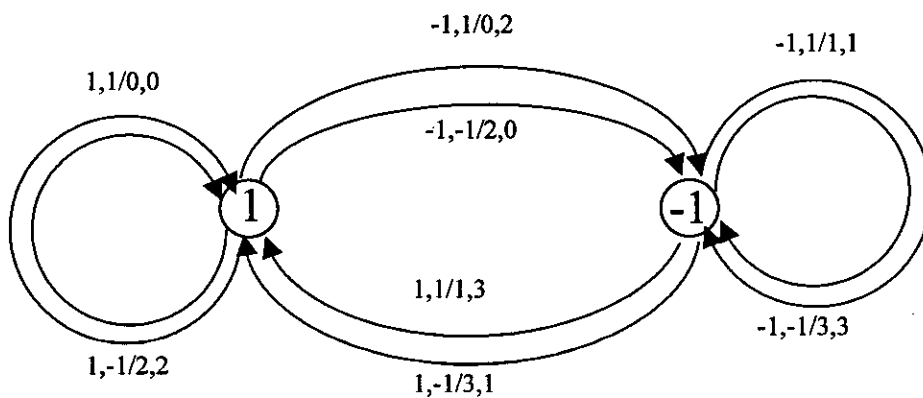


Figure 3.3 :Diagramme d'état pour un treillis multiple modulé en QPSK avec un rendement de 2/4.

La fonction de transfert de la figure 3.4 est déduite facilement de cette façon :

$$T(D,I) = \frac{(2I + 2I^2 + I^3)D^8 - (I^2 + I^3)D^{12}}{1 - (I + I^2)D^4} \quad (3.8)$$

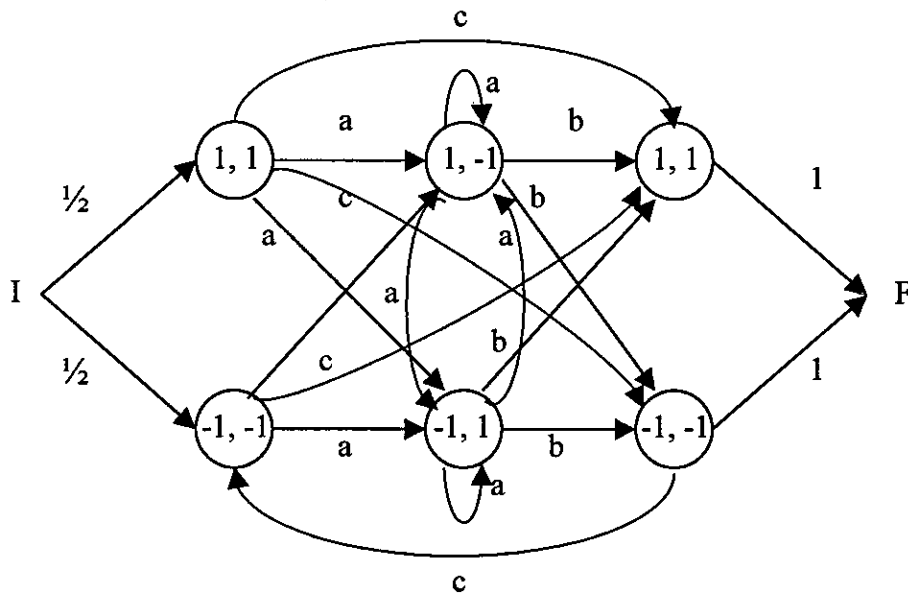


Figure 3.4 : Diagramme des supers états de la figure 3.3.

En accord avec l'équation (3.8) en déduit :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} (I + I^2) D^4 \\ b &= \frac{1}{2} (1 + I) D^4 \\ c &= \frac{1}{2} I D^8 \end{aligned} \quad (3.9)$$

en substituant l'équation (3.8) dans l'équation (3.5), on trouve une expression plus simple de la borne supérieures de la probabilité d'erreur par bit P_b .

$$P_b \leq \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right) \frac{9 - 8Z^4 + 4Z^8}{9(1 - 2Z^4)^2} \quad (3.10)$$

Un programme de calcul et de traçage de la probabilité d'erreur par bit est réalisé. Ce qui a permis de tracer la figure 3.5

interprétations des calculs :

la figure 3.5 illustre les bornes supérieures de différentes configurations de modulations :

- QPSK non codée.
- QPSK asymétrique codée en treillis conventionnel.
- QPSK symétrique codée en treillis conventionnel.

- QPSK symétrique codée en treillis multiple.

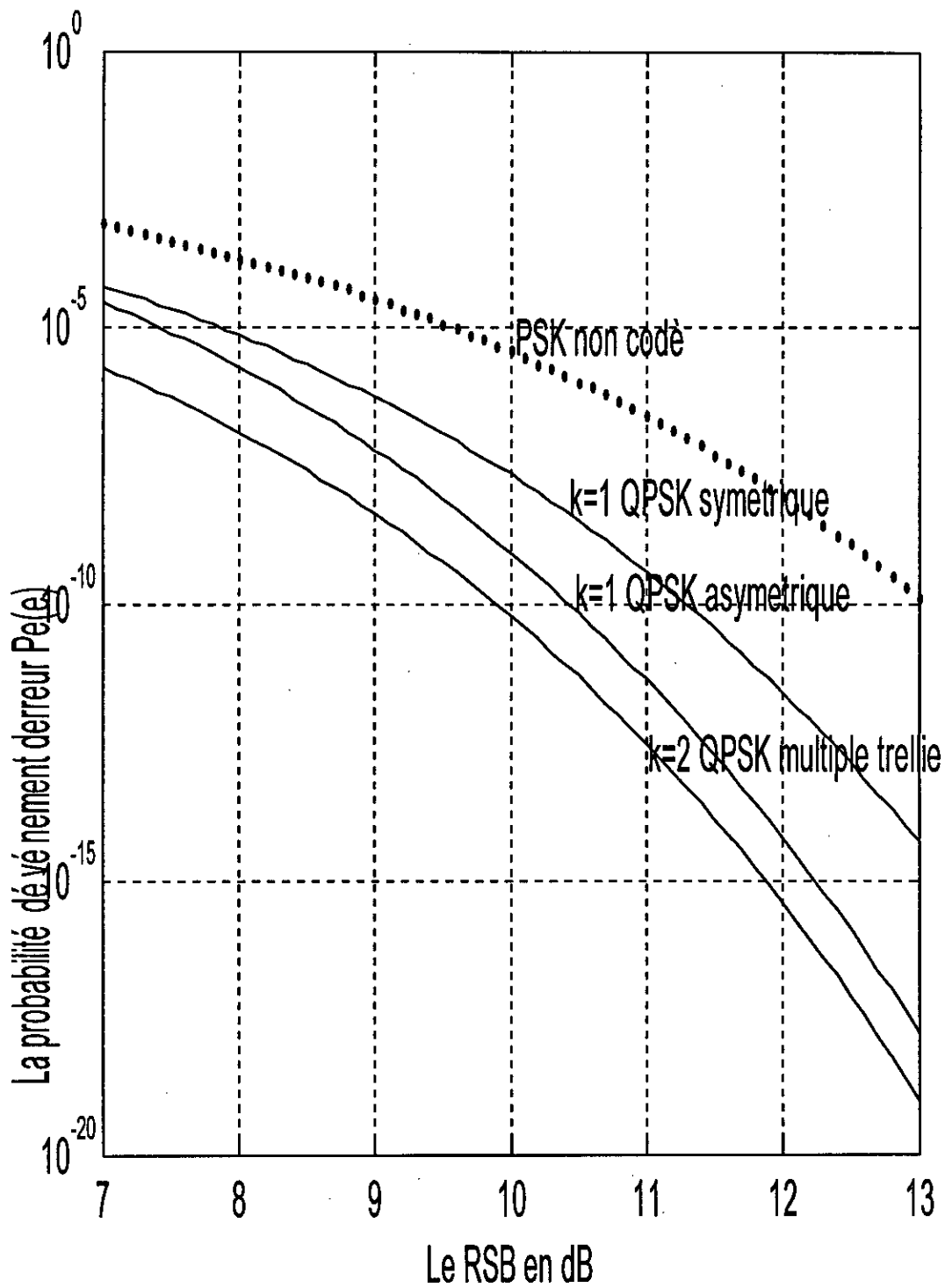


Figure 3.5 : les bornes supérieures de la probabilité d'erreur pour différentes configurations de la modulation M-PSK.

L'analyse de la figure permet de faire les constatations suivantes :

- La borne supérieure de la probabilité d'erreur par bit de la modulation QPSK codée en treillis multiples est inférieure aux autres configurations, d'où la MTCM a un grand avantage de réduire la probabilité d'erreur dans les systèmes de communication numérique.
- Pour un rapport signal sur bruit de 10dB, on constate que la borne supérieure de la probabilité d'erreur est inférieure à 10^{-10} pour la configuration MTCM, pour les autres configurations, cette valeur est la plus importante, elle est supérieure de 10^{-9} .
- Pour avoir une borne de la probabilité d'erreur de 10^{-6} , on a besoin un rapport signal sur bruit de 7.2dB pour le MTCM. C'est une valeur très intéressante, En la comparant avec les autres configurations citées précédemment.

Conclusion :

Le calcul de différents paramètres essentiels d'évaluation de la performance de la MTCM nous permet de conclure que cette configuration est beaucoup plus adaptée que celle de la TCM conventionnelle dans la transmission des informations numériques avec un minimum d'erreurs et de puissance.

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GENERALE

Le travail présenté dans ce mémoire concerne la modulation codée en treillis et la multiple. IL a englobé deux parties : une théorique et l'autre calcul et interprétation.

La première partie présente les théories de base des différentes constructions de la TCM multidimensionnelle et de la multiple TCM avec des exemples d'applications comparés avec les TCMs conventionnelles et la modulation non codée.

Nous avons réalisé, dans la partie calcul, des programmes permettant le calcul de : la distance limite d_{free} pour les modulations M-PSK et M-AM et différentes valeurs de la multiplicité k , du débit de coupure (cutoff rate) pour différentes configurations de la MTCM, et la probabilité d'erreur par bit pour la modulation QPSK.

Les résultats obtenus permettent de faire les constatations suivantes :

- Un espace avec une large dimension augmente la distance entre signaux et en conséquence une distance euclidienne d_{min}^2 large.
 - Les TCM à deux dimensions utilisent une constellation de $2^{(m+1)}$ points pour transmettre m bits d'information par symbole et cette expansion d'alphabet coûte 3 dB. Les TCMs multidimensionnelles ont pour but de réduire cette perte, en réduisant le facteur d'expansion d'alphabet
 - Les constellations multidimensionnelles produisent une grande flexibilité dans la réalisation des taux d'information.
 - Si N signaux à deux dimensions sont envoyés dans un intervalle de temps de durée T et chaque signal à une durée $\left(\frac{T}{N}\right)$ nous obtenons alors une constellation à $2.N$ dimensions.
 - Symétries inhérentes, peuvent être dérivées d'une structure algébrique.
 - Descriptions faciles de la procédure de la partition d'ensemble.
 - Des propriétés structurées qui simplifient la procédure de décodage.
 - La MTCM apporte un gain relatif par rapport à la TCM conventionnelle et la modulation non codée.
 - L'augmentation de la multiplicité k de la MTCM permet une réduction du rapport signal sur bruit.
 - L'augmentation de k apporte une réduction du nombre d'états et qui facilite la procédure de la détection.
-

- La MTCM réduit la probabilité d'erreur par bit dans les systèmes de communications utilisant la QPSK.

Ces résultats ont permis également de dégager une certaine limite : si $k > 4$, il n'y a pas d'amélioration en termes de gain de codage.

La TCM multidimensionnelle est adoptée par le C.C.I.T.T, et implémentée dans la réalisation des modems 14.4 kbits/s.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

- [1] E. Biglieri, D. Divsalar, P.J. McLane and M.K. Simon, « Introduction to Trellis Coded Modulation with Applications », Macmillan Publishing Company, New York, 1991.
- [2] A.R. Calderbank and J. Mazo, « A New Description of Trellis Codes », *IEEE Trans. On Information Theory*, Vol.IT-30, pp. 784-791, Novem, 1984.
- [3] H. Sari, « Transmission des Signaux Numériques, » *Techniques de l'Ingénieur, Traité Electronique*, E 7100, 1996.
- [4] L. F. Wei, « Trellis-Coded Modulation with Multidimensional Constellations, » *IEEE Trans. on Information Theory*, Vol. IT-33, July 1987.
- [5] G. D. Forney, « Coset codes. Part I :Introduction and géométrical classification ». *IEEE Trans. Inf. Théory*. Vol.34, No.5.pp. 1123-1187. Sept. 1988.
- [6] S. G. Wilson and N. J. A. Sleeper. « Four-dimensional modulation and coding an lternate to fréquence reuse », Technical report. Communications system Laboratory, Univercity of Verginia. Charlottesville . VA . sept 1983.
- [7] V . V . Ginsburg, « Multidimensional signals for contunious channel. » *Probl . Inf . Transmission*, vol. 23, No. 2. Pp. 62-63. Jan.-Mar. 1984.
- [8] G. D. Forney. « Efficient modulation for band-limited channel. ». *IEEE Select. Areas Commun . Vol .SAC-2.No.5.pp.632-647,Sept.1984.*
- [9] F.Abrishamakar and E . Beglieri. « suboptimum detection of treillis coded CPM for transmissionion on bandwidth-and power-limited chnannels.» to appear.*IEEE .Trans. Commun.*
- [10]S.Benededetto, E. Biglieri and V. Castellani. « digital transmission théory ». prentice-hall. Englewood cliffs. New York. 1987.
- [11] D.Divsalar and M.K. Simon, « multiple treillis codee modulation (MTCM) », JPL publication 86-44, pasadena, calif, NOV , 15, 1986.
- [12] D.Divsalar and M.K. Simon, « multiple treillis codee modulation (MTCM) », *IEEE Trans, Commun.*, VOL. 36, No, 4, pp.410-419, Apr. 1988.
- [13] D.Divsalar and M.K. Simon, « Generalized multiple treillis codee modulation»,ICC'87 Conf. Rec., Seattle, Wash., pp.20.3.1-20.3.7, Jun 7-10, 1987.
- [14] G. Ungerboeck, « Trellis-Coded Modulation with Redundant Signal Sets Part I: Introduction, » *IEEE Communication Magazine*, Vol. 25, pp.5-11, Feb 1987.

- [15]. D.Slepian, "Group codes for the Gaussian channel. " *Bell Syst. Tech. J.* pp 575-602.
Apr. 1968
- [16]. A. R.CALDERBANK et N.J.A SLOANE « New trellis codes based on lattices and cosets. " *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol . IT-33. No. 2.pp. 177-195. Mar 1987.

ANNEXE

ANNEXE

Rappel sur la probabilité d'erreur et l'algorithme de Viterbi

a.1 La borne supérieure de la probabilité d'erreur : [1]

Considérons le modèle d'Ungerboeck de rendement $m/(m+1)$ selon la figure a.1 :

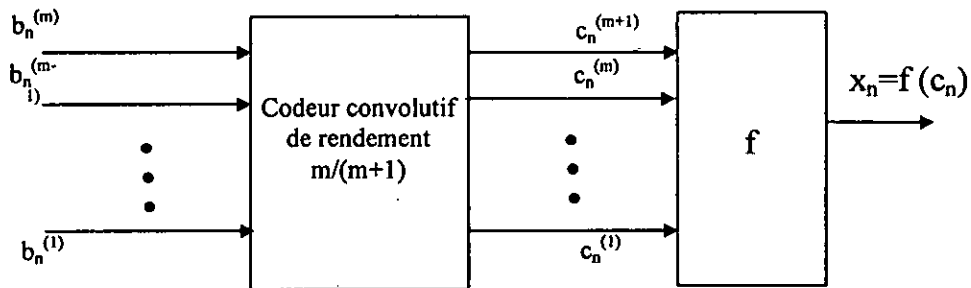


Figure a.1 : Modèle d'Ungerboeck

Un événement d'erreur défini ci-dessus est décrit par deux séquences de longueur L de symboles codés qui sont $[c_K, c_{K+1}, \dots, c_{K+L-1}]$ et $[c'_K, c'_{K+1}, \dots, c'_{K+L-1}]$ tels que :

$$c'_K = c_K \oplus e_K, \dots, c'_{K+L-1} = c_{K+L-1} \oplus e_{K+L-1}$$

où $e_i, i = K, \dots, K+L-1$, forment une séquence d'erreur binaire.

Soient X'_L et X_L deux séquences de symboles de longueur L , quand le démodulateur à maximum de vraisemblance décide en faveur de la séquence erronée X'_L au lieu de la séquence correcte X_L dans ce cas un événement d'erreur apparaît.

La probabilité d'erreur est obtenue en sommant sur tout $L, L=1, 2, \dots$, les probabilités d'événements d'erreurs, le principe d'union annonce que :

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{X_L} \sum_{X'_L \neq X_L} P[X_L] \cdot P[X_L \rightarrow X'_L] \quad \dots (a.1)$$

Puisqu'il ya une correspondance entre x_n et c_n la formule de la probabilité d'erreur devient :

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{C_L} P[C_L] \cdot \sum_{C'_L \neq C_L} P[C_L \neq C'_L] \quad \dots (a.2)$$

La transmission est faite dans un canal (AWGN) où le bruit possède une densité spectrale ($N_0/2$) et la détection est à maximum de vraisemblance, $P(C_L \rightarrow C'_L)$ peut être borné selon la limite de Bhattacharia et l'expression de la $P(e)$ devient :

$$P(e) \leq \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{E_L \neq 0} W[E_L] \quad \dots (a.3)$$

avec $(E_L) = \sum_{C_L} P(C_L) \cdot Z^{\|f(C_L) - f(C_L \oplus E_L)\|^2}$ et $Z = \exp\left(\frac{-1}{4 \cdot N_0}\right)$

L'équation (a.3) montre que $P(e)$ est bornée par une somme sur les événements d'erreurs possibles en fonction du vecteur E_L qui cause les événements d'erreurs. Pour évaluer $P(e)$ il suffit d'énumérer ces vecteurs d'erreurs ceci est fait en utilisant la fonction de transfert du diagramme d'état d'erreur .

a.1.1 La matrice d'erreur : [1]

La matrice d'erreur $G(e_i)$ est défini comme suit :

L'entrée p, q de $G(e_i)$ est zéro si aucune transition de l'état p vers l'état q n'est possible

$$[G(e_i)]_{p,q} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{C_{p \rightarrow q}} D^{\|f[C_{p \rightarrow q}] - f[C_{p \rightarrow q} \oplus e_i]\|^2} \quad \dots (a.4)$$

$C_{p \rightarrow q}$ est le vecteur généré par la transition de l'état p vers l'état q .

$$(E_L) = \frac{1}{N} \cdot I^T \cdot \prod_{n=1}^L G(e_n) \cdot I \quad \dots (a.5)$$

I est un vecteur de dimension ($N \times 1$) contenant des 1, les éléments p, q de la matrice $\prod_{n=1}^L G(e_n)$ énumère les distances euclidiennes entraînés dans la transition de l'état p vers l'état q en L étapes.

Nous observons que les vecteurs erreurs e_1, e_2, \dots, e_L dans la séquence ne sont pas indépendants.

Pour le calcul de $P(e)$ nous avons besoin d'un modèle prenant en compte leur dépendance. Cette tâche sera accomplie par la description des connections entre les vecteurs le long du diagramme d'état.

Le diagramme d'état d'erreur a une structure déterminée seulement par le code linéaire convolutif et diffère du diagramme d'état de code seulement dans la dénomination de ces états et l'étiquetage des branches.

a.1.2 La fonction de transfert et probabilité d'erreur : [1]

Nous avons :

$P(e) \leq T(D) \Big|_{D=e^{-1/N_0}}$ où $T(D)$ est la fonction de transfert du diagramme d'état d'erreur définie par la formule :

$$T(D) = \frac{1}{N} \cdot I^T \cdot G \cdot I \quad \dots (a.6)$$

où $G = \sum_{L=1}^{\infty} \sum_{E_L \neq 0} \prod_{n=1}^L G(e_n)$ est la matrice fonction de transfert du diagramme d'état d'erreur.

Exemple a.1 :

Considérons la configuration TCM où son diagramme en treillis est donné par la figure a.2 :

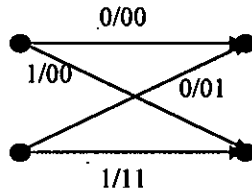


Figure a.2 : Diagramme en treillis à 4 états

Le diagramme d'état d'erreur est donné par la figure a.3 :

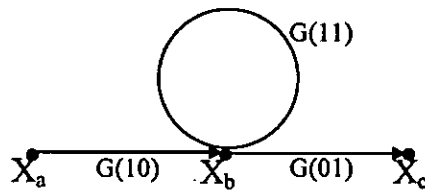


Figure a.3 : Diagramme d'état d'erreur

$$\begin{aligned} X_a &= G(10) \cdot X_a + G(11) \cdot X_b \\ X_c &= X_b \cdot G(01) \end{aligned} \quad \dots (a.7)$$

Alors :

$$G = \frac{X_c}{X_a} = G(10) \cdot [I_2 - G(11)]^{-1} \cdot G(01) \quad \dots (a.8)$$

I_2 est la matrice unité de dimension (2x2)

La matrice d'état d'erreur $G(e_2 e_1)$ s'écrit:

$$G(e_2 e_1) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} D^{|f(00)-f(e_2 e_1)|^2} D^{|f(10)-f(\bar{e}_2 e_1)|^2} \\ D^{|f(01)-f(e_2 \bar{e}_1)|^2} D^{|f(11)-f(\bar{e}_2 e_1)|^2} \end{bmatrix} \quad \dots (a.9)$$

Si on considère la modulation 4-PSK :

$f(00) = 1$, $f(01) = j$, $f(10) = -1$, $f(11) = -j$

Le calcul de la fonction transfert $T(D)$ donne :

$$T(D) = \frac{D^6}{1 - D^2}$$

La probabilité d'erreur $P(e)$ est bornée selon la formule :

$$P(e) \leq \frac{e^{-\frac{3}{2.N_0}}}{1 - e^{-\frac{1}{2.N_0}}} \quad \dots (a.10)$$

a.2 Algorithme de Viterbi :

Pour la présentation de l'algorithme de Viterbi, nous considérons la modulation 4-PSK avec un codeur à 4 états où la représentation en treillis est la figure suivant :

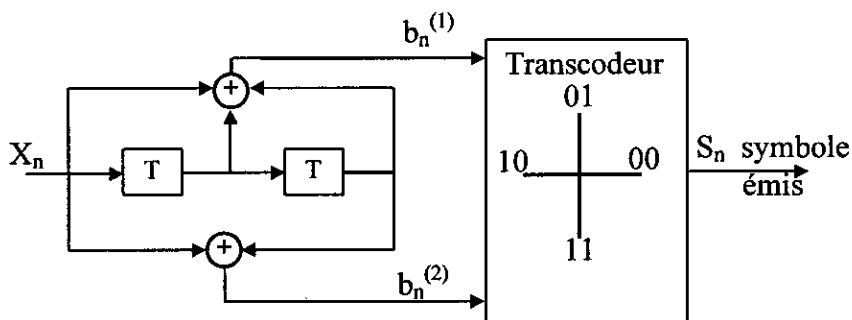


Figure a.4 : Codeur en treillis à modulation 4-PSK

Le décodage à maximum de vraisemblance consiste à choisir le chemin correspondant à la séquence des symboles qui diffère de la séquence reçue en une distance euclidienne minimale.

L'algorithme peut être divisé en deux parties :

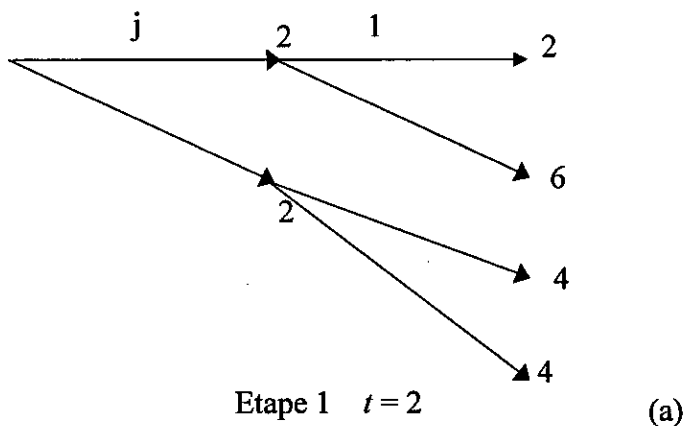
- la première s'étend du début du treillis jusqu'au niveau $t = K - 1$, où K est la longueur de contrainte. Le décodage consiste à attribuer une distance nulle à l'état initial, et à chaque autre état σ , atteint par la transition d'un état σ' , un carré de distance, qui est la somme des carrés de la distance à l'état σ' et la distance de transition. La distance de transition à un niveau t du treillis entre deux états σ et σ' , est la distance euclidienne entre le symbole correspondant à cette transition du codeur et le symbole de la séquence reçue.

- La deuxième partie s'étend du niveau $t = K$ jusqu'au niveau $t = [L/m] + K - 1$ où L est la largeur du message et de m le nombre des entrées du codeur.

Le décodage consiste à choisir la branche pour laquelle la distance au noeud σ sera minimale et éliminer toutes les autres. La branche choisie est appelée *survivant*. Si le choix de plusieurs branches donnera la même distance minimale au noeud σ , alors peu importe, on choisira une de ces branches. Cette opération est répétée avec tous les 2^v états, et cela pour tous les niveaux de cette partie. A la fin de cette partie nous obtiendrons 2^v chemins, desquels le décodeur choisira celui qui a la distance la plus proche, au sens d'Euclid de la séquence émise.

En résumé, l'algorithme de Viterbi peut être mis en œuvre de façon commode à partir de diagramme en treillis en appliquant les règles suivantes :

1. A partir du $K^{\text{ème}}$ étape (niveau) du diagramme où 2^m branches arrivent à chaque état, calculer pour chacun des états, la distance euclidienne de chacun des 2^m chemins qui arrivent à l'état. Pour chaque état, conserver le chemin dont la distance euclidienne est la plus faible, (le *survivant*) et éliminer les autres.
2. Répéter l'opération pour chaque étape t du treillis tant que $t \leq [L/m] + K - 1$.
3. Choisir le chemin dont la distance euclidienne est la plus petite et éliminer tous les autres.



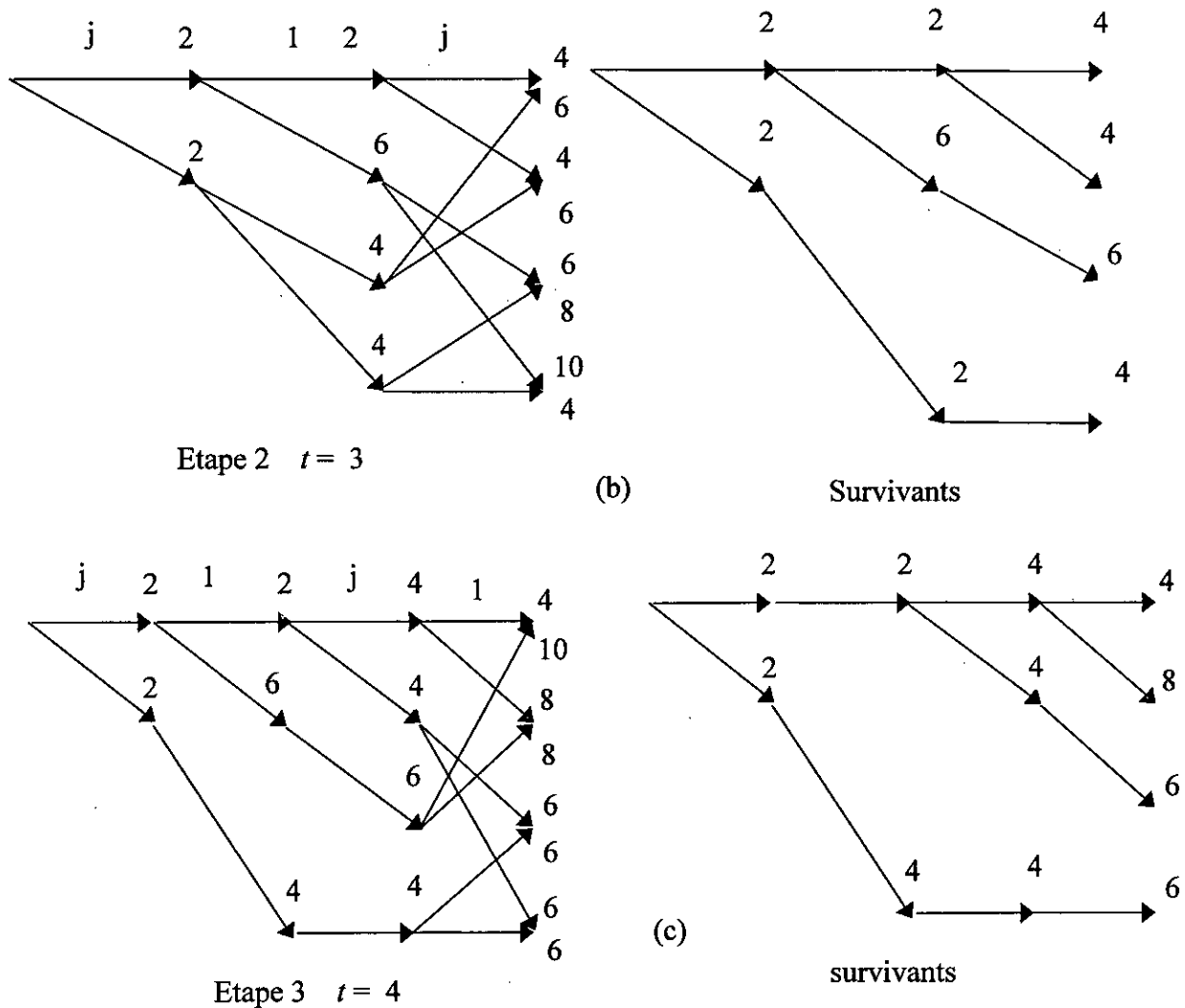


Figure a.5 : Exemple de décodage utilisant l'algorithme de Viterbi

En notant, qu'il est nécessaire de stocker 2^v chemins jusqu'à la fin, où la décision sera prise, on se rend compte que le décodeur devient très complexe et nécessite une capacité mémoire importante pour une longueur de contrainte importante.

Toutefois, lorsqu'on examine les différents survivants à une étape t , on remarque qu'avec une grande probabilité, ils ont tous le même passé entre les étapes 0 et $t-dp$ où dp est la profondeur de décision.

On peut par conséquent décider définitivement à l'étape t toutes les données émises jusqu'à l'étape $t-dp$. Comme règle empirique, on peut fixer le paramètre dp égal à 5 ou 6 fois le nombre d'états du décodeur. Avec ces valeurs les performances du décodeur sont quasiment les mêmes que lorsque la décision se fait en fin de la séquence.

Cette stratégie permet de réduire la complexité du décodeur et le retard de décision .
La complexité d'un décodeur de Viterbi est proportionnelle au nombre d'états de treillis.

Celui-ci croît exponentiellement avec la longueur de contrainte. Pour cette raison les codes utilisés en pratique ont une longueur de contrainte inférieure à 10.

Exemple :

Soit le codeur de la figure a.4, ce codeur génère une séquence de n symboles égaux à 1, laquelle après transmission à travers le canal donne la séquence reçue $(j \ 1 \ j \ 1)$ comprenant deux erreurs. La figure a.5a montre la première partie de décodage. La distance euclidienne à chaque état y est indiquée.

Les figures a.5 b et a.5. c montrent la deuxième partie, chacune de ces figures compte deux treillis, dans celui de gauche où à conserver tous les chemins aboutissant à chaque nœud , tandis que dans celui de droite on a gardé que les survivants.

Le chemin conservé après la décision finale est celui dont l'erreur cumulée est la plus petite , c'est à dire le chemin $(a \ a \ a \ a)$ (a : c'est l'état 00) correspondant à la séquence des 1.

ABREVIATION :

M-PSK : Modulation de phase des signaux discrets présentés dans un espace à 2D avec une forme circulaire, la lettre M désigne le nombre des signaux sur le cercle (la constellation).

Pour $M = Q$, on a une source à quatre signaux ($M = 4$).

M-AM : Modulation d'amplitude des signaux discrets présentée sur un axe, la lettre M désigne le nombre des signaux sur l'axe.

M-QAM : est une combinaison des deux types de modulation PSK et AM a une forme rectangulaire.