



Ecole Nationale Supérieure Polytechnique  
DÉPARTEMENT D'ELECTRONIQUE  
MÉMOIRE DE MAGISTER EN ELECTRONIQUE

Ecole Doctorale : Génie Electrique/Electronique  
Option : Systèmes de Télécommunications

Présenté par :  
HAMOUDA Cherif  
Ingénieur d'Etat en Electronique, ENSP

**THÈME**

---

---

**Estimation de canal très sélectif en temps  
et en fréquence pour les systèmes OFDM**

---

---

Soutenue le 03/11/2009 devant le jury composé de:

M. HADDADI	Professeur à l'ENP	Président
Z. TERRA	Chargé de Cours à l'ENSP	Rapporteur
H. BOUSBIA- SALAH	Maitre de conférences à l'ENSP	Examineur
M.O. TAGHI	Chargé de Cours à l'ENSP	Examineur

2009

ENSP, Hacén Badi, B.P.182, El-Harrach, 16200 Alger  
Tel: 021.52.53.01-03, Fax: 021.52.29.73 www.enp.edu.dz.

## ملخص

يتوجب على أجهزة الاتصالات اللاسلكية المستقبلية اقتراح خدمات تتطلب تبادل المعلومات بتدفق عالٍ، وذلك مع حركية أكثر للمستعملين. لأجل ذلك وجب تقديم تقنيات جديدة لمعالجة الإشارات. تعتبر تقنية OFDM واحدة من ضمن هذه التقنيات، وهي تكون حالياً محورا هاما للبحث في مجال الاتصالات. هذه التقنية التي تعتمد علي مبدأ تعامد المرشحات لا تحتاج إلي تعادل لكن تحتاج إلي تقدير الاستجابة الترددية للقناة وهذا لكل عنصر منتقل.

في هذه المذكرة سنقوم باقتراح طرق من اجل تقدير قناة اتصال انتقائي جدا في الزمن والتردد وهذا باستعمال معيار Maximum a Posteriori الذي يعالج الإشارة المستقبلية مجموعة بمجموعة. هذه الخوارزميات تعتمد علي نموذج للقناة الذي يعالج الإشارة المستقبلية مجموعة بمجموعة. هذه الخوارزميات تعتمد علي نموذج للقناة المحصل عن طريق التحليل العمودي لمصفوفة الترابط للقناة وهذا حسب نظرية التحليل العمودي لكرامن لوف. وسنقوم بتقديم نتائج هذه الطرق الجديدة ونقارنها مع الطرق القديمة. وذلك عن طريق تحليل منحنيات معدل الخطأ الثنائي بدلالة معدل ال SNR.

مفاتيح: Maximum a Posteriori, OFDM, SNR

## Résumé

L'orientation des télécommunications vers les hauts-débits fait de la technique de modulation OFDM l'un des centres d'intérêts privilégiés de la recherche actuelle. Cette technique basée sur le principe d'orthogonalité des "filtres" réalisant la modulation ne nécessite pas d'égalisation à proprement parler, mais requiert une estimation de la réponse fréquentielle du canal pour chaque symbole transmis.

Nous proposons dans ce travail des méthodes d'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence basés sur le critère du Maximum à Posteriori traitant le signal reçu par blocs. Ces algorithmes reposent sur un modèle de canal obtenu suivant la décomposition orthogonale de la matrice d'autocorrélation du canal selon le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève. Nous présenterons également les performances de ces nouvelles techniques comparées à celles de méthodes classiques d'estimation de canal ainsi que la robustesse de ces techniques à l'erreur d'estimation des statistiques du canal.

**Mots clés :** Maximum a Posteriori, OFDM, SNR

## Abstract

High bit rates services focusing in the telecommunications domain are leading to an increasing interest for OFDM modulation in actual research. This technique is based on orthogonal modulating filters and doesn't need the use of an equalizer, but it requires the estimation of the channel frequency response for each transmitted symbol. Today's propagation contexts met in high bit rate mobile communications may be really tough to precisely estimate.

In this thesis, we propose some channel estimation methods for highly frequency and time selective channels, based on the Maximum a Posteriori criteria, processing block by block the received signal. These algorithms use a channel model based on the orthogonal decomposition of the autocorrelation matrix of the channel obtained by means of the Karhunen-Loève orthogonal expansion theorem. We also present these new techniques

performance compared to classical channel estimators and the robustness of those methods to an error on the channel statistics.

**Key words:** Maximum a Posteriori, OFDM, SNR

# *Remerciements*

*Nous tenons à remercier tout d'abord le **Dieu** le tout puissant et maître de l'univers qui nous a donné la force nécessaire, la forte volonté et la patience afin d'accomplir ce travail.*

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements et ma gratitude à mon promoteur Monsieur Z. TERRA, pour ses conseils précieux, remarques et critiques pertinentes et patience infinie.

Je tiens chaleureusement à remercier monsieur M. HADDADI pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, ainsi que les membres de jury monsieur M.O. TAGHI et H. BOUSBIA-SALAH pour m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury.

Enfin j'exprime ma profonde reconnaissance à tous les enseignants et les encadreurs qui ont contribué à ma formation.

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, qui m'ont encouragé,  
aidés et soutenus, pour qu'enfin je puisse aboutir ce thème de  
magister. Comme je le dédie à :

Mes frères : Abbas, Nouredine, Nadir, Yazid, Omar, Badro, Zakaria.

Mes sœurs : Nassima, Nadia, Sabah, Chafia et bien sur ma petite sœur

Romaissa.

A mes amis et collègues.

Tous ceux qui connaissent Cherif de près ou de loin.

# Table de matière

<b>introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1 : Système et modèles</b> .....	3
1.1 Introduction .....	3
1.2 Etude d'un Emetteur OFDM .....	3
1.2.1 Conversion série-parallèle .....	4
1.2.2 Mapping .....	4
1.2.3 L'IFFT .....	4
1.2.4 Insertion de l'Intervalle de garde.....	5
1.2.5 Modulation Radio Fréquence .....	6
1.3 Récepteur OFDM .....	7
1.3.1 La suppression de l'intervalle de garde .....	7
1.3.2 FFT .....	7
1.3.3 Le demapping .....	7
1.4 Canal radio mobile .....	7
1.4.1 Caractéristiques du canal radio mobile.....	8
a. Propagation multi-trajet.....	8
b. Effet Doppler.....	8
c. Évanouissement (Fading) .....	9
d. Pertes dues à la distance ou Path Loss.....	9
1.4.2 Modélisation du canal radio mobile .....	10
1.4.3 Statistiques de fading du canal .....	12
1.4.4 Interférence Inter-symboles (ISI) et Inter-canal (ICI) .....	13
1.4.5 Modélisation d'un canal multi-porteuse .....	14
1.4.6 Diversité et Sélectivité.....	14
a. Notion de sélectivité .....	15
b. Notion de diversité .....	15
1.5 Modélisation de la chaîne étudiée .....	19
1.5.1 Caractéristiques du signal transmis .....	19
1.5.2 Modélisation du signal reçu .....	21
1.5.3 Représentation du canal de propagation.....	23
1.6 Les codes convolutifs .....	25
1.6.1 Catégories de codes convolutifs .....	25
a. Code convolutif systématique (systematic convolutional codes) .....	25
b. Code convolutif non systématique (NCS : non systematic convolutional codes) .....	26
c. Code convolutif récurrents (Recursive Convolutional Code).....	27

d. Code convolutif non récursifs .....	27
1.6.2 Representation des codes convolutifs.....	28
1.6.3 Treillis .....	31
1.6.4 Décodage des codeurs convolutifs .....	32
1.7 Conclusion.....	32
<b>Chapitre 2 : Estimation de canal semi-aveugle au sens du Maximum a Posteriori .....</b>	<b>33</b>
2.1. Introduction .....	33
2.2 État de l'art.....	33
2.2.1. Estimation de canal au sens du critère des moindres carrés (MC) .....	35
2.2.2 L'estimateur MC modifié (MC-M).....	35
2.2.3 Estimation de canal par le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM).....	36
2.2.4 L'estimateur EQMM modifié (EQMM-M) .....	37
2.2.5 Estimation de canal par filtrage de Kalmann .....	39
2.2.6 Estimations de canal avec retour de décision .....	40
2.2.7 L'interpolation .....	40
a. Interpolation linéaire (LI) .....	41
b. Interpolation du second ordre (SOI).....	41
c. Interpolation par splines cubiques (SCI) .....	41
d. Interpolation passe-bas (LPI) .....	41
e. Interpolation par filtrage dans un domaine de transformation.....	41
f. Domaine de transformation obtenu par la TFD bidimensionnelle .....	42
g. Autres domaines de transformation.....	42
2.3 Estimation de canal itérative basée sur le critère du Maximum a Posteriori.....	43
2.3.1 Formulation du problème au sens du Maximum a Posteriori .....	43
2.3.2 L'algorithme « Expectation – Maximization » .....	44
2.3.3 Expression analytique de l'estimateur .....	46
2.3.4 Cas particuliers .....	47
2.4 Résultats .....	47
2.4.1 Algorithmes de comparaison.....	47
a. Algorithme de comparaison MC-1 .....	48
b. Algorithme de comparaison MC-2.....	49
c. Estimation de canal par la FFT bidimensionnelle EC-FFT-2D .....	52
2.4.2 Contexte des simulations.....	54
a. Signal émis .....	54
b. Combinaison des estimations sur chaque branche de diversité .....	54

c. Les Paramètres de l'estimateur .....	54
2.4.3 Résultats de simulation.....	55
2.5 Conclusion.....	59
<b>Chapitre 3 : Turbo estimation de canal avec initialisation optimisée .....</b>	<b>60</b>
3.1 Turbo estimation de canal .....	60
3.1.1 Contexte .....	60
3.1.2 Principe de l'algorithme de Bahl .....	61
3.1.3 Écriture modifiée de l'algorithme de Bahl.....	61
3.1.4 Principe de turbo-estimation de canal .....	63
3.2 Turbo estimateur simple .....	66
3.3 Turbo estimation de canal avec initialisation optimisée .....	70
3.3.1 Estimation de canal basée sur l'innovation : Prédiction Linéaire .....	71
3.3.2 Estimation de canal exploitant la base orthonormale étendue.....	72
3.3.3 Construction simplifiée de la base orthonormale étendue.....	74
3.3.4 Turbo Estimation avec conditions initiales optimisées .....	74
3.4 Conclusion.....	78
<b>conclusion .....</b>	<b>79</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>80</b>

## Liste des figures

Fig. 1.1 :	Un système de transmission OFDM .....	4
Fig. 1.2 :	Constellations 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM.....	5
Fig. 1.3:	Principe du préfixe cyclique.....	6
Fig. 1.4 :	Schéma de modulation ou transposition fréquentielle dans un système OFDM.....	6
Fig. 1.5 :	La propagation multi-trajet variable dans le temps.....	8
Fig. 1.6 :	Schéma représentatif de l'effet Doppler.....	9
Fig. 1.7 :	Les catégories de fading en fonction de la distance.....	10
Fig. 1.8 :	La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert variables dans le temps.....	11
Fig. 1.9 :	Un exemple de classification du canal en fonction de la sélectivité.....	16
Fig. 1.10 :	Organigramme récapitulatif de la diversité et la sélectivité.....	17
Fig. 1.11 :	différent types de canaux selon la sélectivité (produit $B_d T_m$ ).....	19
Fig. 1.12 :	Chaîne du système étudié.....	20
Fig. 1.13 :	Exemple de bloc temps-fréquence.....	21
Fig.1.14:	Représentation schématique des ensembles d'indexation.....	22
Fig. 1.15:	valeurs propres cumulées pour les canaux de propagation à $B_d T_m = 1/64^2, 1/32^2, 1/16^2, 1/8^2$ .....	25
Fig. 1.16 :	circuit de code convolutif systématique de mémoire d'ordre 3 et de rendement 1/2.....	26
Fl. 1.17 :	circuit de code convolutif non systématique de mémoire d'ordre 3 et de rendement 1/2	27
Fig. 1.18 :	codeur convolutif systématique récursif (RSC) de mémoire d'ordre 2 et de rendement 1/2 .....	27
Fig. 1.19 :	codeurs convolutif systématiques récursifs (5,7).....	29
Fig. 1.20 :	entrées/ sorties du codeur convolutif systématique récursif (5,7).....	30
Fig. 1.21 :	diagramme des états correspondant à la figure 1.18.....	30

Fig. 1.22 :	treillis élémentaire.....	31
Fig. 1.23 :	représentation en treillis.....	32
Fig. 2.1 :	Schéma-bloc d'un estimateur de canal modifié de rang $p$ .....	38
Fig. 2.2 :	principe des méthodes avec retour de décision.....	40
Fig. 2.3 :	Principe des méthodes d'interpolation par TFD.....	42
Fig. 2.4 :	Norme du canal fourni par la méthode MC-1.....	48
Fig. 2.5 :	Norme du canal fourni par la méthode MC-2.....	49
Fig. 2.6 :	Obtention de la fonction de diffusion.....	52
Fig. 2.7 :	Schéma de l'algorithme d'estimation de canal par la FFT bidimensionnelle.....	53
Fig. 2.8 :	Bloc temps-fréquence considéré dans les simulations.....	54
Fig. 2.9 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1$ .....	55
Fig. 2.10 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 2$ .....	55
Fig. 2.11 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 4$ .....	56
Fig. 2.12 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/32^2$ .....	56
Fig. 2.13 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/16^2$ .....	57
Fig. 2.14 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/8^2$ et $L = 1$ .....	57
Fig. 2.15 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/8^2$ et $L = 2$ .....	58
Fig. 2.16 :	Taux d'erreur binaire en fonction du $E_b/N_0$ pour $B_d T_m = 1/8^2$ et $L = 4$ .....	58
Fig. 3.1 :	Schéma-bloc du turbo-estimateur.....	64
Fig. 3.2 :	Modulation MDP-4 codé en treillis.....	64
Fig. 3.3 :	Première phase de l'entrelacement : remplissage du bloc.....	65
Fig. 3.4 :	Exemple de fonctionnement de l'entrelaceur.....	65
Fig. 3.5 :	Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_d T_m = 1/64^2$ .....	66
Fig. 3.6 :	Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_d T_m = 1/32^2$ .....	67

Fig. 3.7 :	Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_d T_m = 1/16^2$ .....	67
Fig. 3.8 :	Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_d T_m = 1/8^2$ .....	68
Fig. 3.9 :	Comparaison des performances du turbo-estimateur et des algorithmes de référence pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1$ .....	69
Fig. 3.10 :	Comparaison des performances d'algorithme EM sans et avec codage pour $B_d T_m = 1/32^2$ .....	69
Fig. 3.11 :	Comparaison des performances d'algorithme EM sans et avec codage pour $B_d T_m = 1/16^2$ .....	70
Fig. 3.12 :	Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement .....	75
Fig.3.13 :	Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/64^2$ .....	76
Fig.3.14 :	Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/32^2$ .....	76
Fig.3.15 :	Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/16^2$ .....	77
Fig. 3.16 :	Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d \cdot T_m = 1/8^2$ .....	77

## Liste des notations

$a_{mn}$	Symbole de données MDP de l'alphabet $\Omega$ à la position $(m, n)$ du bloc temps-fréquence
$a_{\delta(k)}$	Symbole de données MDP de l'alphabet à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$a_n$	Vecteur des symboles de données du $n^{\text{ème}}$ symbole OFDM
$A_{\delta(k)}$	Symbole de données normalisé à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$A$	Vecteur des symboles de données normalisés du bloc temps-fréquence
$B_d$	Largeur de la bande Doppler du canal
$B_{lk}$	Vecteur propre numéro $k$ de la matrice $F_l$
$c_{mn}$	Facteur de gain du canal à la position $(m, n)$ du bloc temps-fréquence
$c_{mn}^l$	Facteur de gain du canal vu par la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité à la position $(m, n)$ du bloc temps-fréquence
$c_{\delta(k)}^l$	Facteur de gain du canal vu par la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$c_n$	Vecteur des facteurs de gain du canal correspondant au $n^{\text{ème}}$ symbole reçu
$C_{\delta(k)}^l$	Facteur de gain normalisé du canal vu par la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$C^l$	Vecteur des facteurs de gain normalisés du canal vu par la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité du bloc temps-fréquence
$E_{mn}$	Énergie du symbole émis à la position $(m, n)$ du bloc temps-fréquence
$F$	Espacement fréquentiel entre deux symboles adjacents du bloc temps-fréquence
$F_l$	Matrice d'autocorrélation du canal vu par la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité
$F_{\delta(k)}$	L'innovation
$G_{lk}$	Variable Gaussienne centrée de variance $\Gamma_{lk}$ - représentation du canal de propagation
$J_0(\cdot)$	Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0
$K$	Nombre de porteuses du système OFDM
$L$	Nombre de branches de diversité en réception du système
$\check{L}$	la prédiction linéaire au sens de l'erreur quadratique moyenne minimum du vecteur $C$
$N_0$	Variance du bruit de canal
$N_D$	Nombre de symboles de données du bloc temps-fréquence
$N_P$	Nombre de symboles pilotes du bloc temps-fréquence
$N_{mn}^l$	Échantillon du bruit reçu à la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité à la position $(m, n)$ du bloc

	temps-fréquence
$N_{\delta(k)}^l$	Échantillon du bruit reçu à la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps fréquence
$R_{mn}^l$	Échantillon du signal reçu sur la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité à la position $(m, n)$ du bloc temps-fréquence
$R^l$	Vecteur des échantillons d'un bloc temps-fréquence reçus sur la $l^{\text{ème}}$ branche de diversité
$R_p$	vecteur signal reçu $R$ aux échantillons correspondants aux symboles pilotes
$s(t)$	Signal OFDM
$S_D$	Ensemble bidimensionnel des positions des symboles de données dans le bloc temps-fréquence
$S_P$	Ensemble bidimensionnel des positions des symboles pilotes dans le bloc temps-fréquence
$T$	Longueur d'un symbole OFDM - espacement temporel entre deux symboles adjacents du bloc temps-fréquence
$T_m$	Étalement des retards du canal à trajets multiples
$T_{pc}$	Longueur du préfixe cyclique
$T_s$	Longueur d'un symbole MDP de l'alphabet
$W$	Largeur de bande du système OFDM
$y_{mn}$	Échantillon du signal reçu à la position $(m, n)$ du bloc temps-fréquence
$y_n$	Vecteur des échantillons du $n^{\text{ème}}$ symbole OFDM reçus
$\gamma(\tau; t)$	Réponse impulsionnelle continue du canal de propagation
$\gamma_n(\tau)$	Réponse impulsionnelle du canal de propagation correspondant au $n^{\text{ème}}$ symbole reçu
$\gamma_n$	Vecteur des échantillons de la réponse impulsionnelle du canal correspondant au $n^{\text{ème}}$ symbole reçu
$\Gamma_{lk}$	Valeur propre numéro $k$ de la matrice de corrélation $F_l$
$\delta(k)$	Fonction d'indexation de $\{k\}_{k=0}^{N-1}$ vers l'ensemble bidimensionnel $S_D \cup S_D$
$\delta_p(k)$	Fonction d'indexation de $\{k\}_{k=0}^{N_p-1}$ vers l'ensemble bidimensionnel $S_P$
$\delta_D(k)$	Fonction d'indexation de $\{k\}_{k=0}^{N_D-1}$ vers l'ensemble bidimensionnel $S_D$
$\theta_{\delta(k)}$	La variance de l'innovation $F$
$\Phi(\Delta f, \Delta t)$	Fonction d'autocorrélation temps-fréquence du canal
$\Omega$	Alphabet d'une Modulation de Phase (MDP)

## Introduction générale

Les technologies de l'information et de la communication évoluent avec les besoins et les exigences du temps. Elles sont actuellement caractérisées par l'éclosion de techniques visant à améliorer de façon notable les performances des réseaux de communication offrant le transport de plus grandes capacités et de meilleures qualités. Dans les pays les plus avancés, les opérateurs doivent pouvoir offrir de nouveaux services pour générer plus de revenus étant donné qu'ils ont déjà atteint un taux satisfaisant de télé densité. Ces services sont généralement liés par anticipation aux besoins des clients. Aux nombres de services on peut citer l'internet, la téléconsultation, le téléenseignement, la visioconférence, les règlements en ligne, la vidéo à la demande, la télévision su mobile, la visiophonie,...

Tous ces besoins on été, au cours des vingt dernières années, à l'origine de la résurgence des systèmes multiporteuses OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). Cette technique, apparue à la fin des années 60 [1] a peu été exploitée avant les années 90. Ses qualités intrinsèques l'ont amené à être utilisée dans les normes de diffusion numérique de programmes radio (Digital Audio Broadcasting : DAB) [2] et télévisés (Digital Video Broadcasting : DVB) [3], pour la transmission de données à hauts débits sur lignes bifilaires (Asynchronous Digital Subscriber Line : ADSL) ainsi que pour des systèmes hauts-débits de type HIPERLAN (HIGH PERformances Local Area Network).

Aujourd'hui, la préoccupation grandissante des télécommunications pour les hauts débits fait de la technique OFDM l'un des centres d'intérêt privilégié de la recherche actuelle. Tous les problèmes inhérents à la méthode OFDM dans les contextes de transmission mobiles et hauts débits sont étudiés : synchronisation temporelle, synchronisation fréquentielle, égalisation et estimation de canal.

Les systèmes OFDM sont fondés sur le principe d'orthogonalité des filtres réalisant la modulation. Ces méthodes fonctionnent intrinsèquement par bloc, la modulation d'un bloc de symboles étant réalisée le plus souvent par une Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI). L'introduction d'un intervalle de garde de durée supérieure à l'étalement des retards du canal, permet d'éliminer l'Interférence Entre Symbole (IES) générée lors du passage dans

le canal. L'égalisation en est donc simplifiée, mais nécessite toujours une estimation de la réponse fréquentielle du canal pour chaque symbole OFDM.

L'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence suppose avant tout d'avoir un modèle bidimensionnel pour le système OFDM ainsi que pour le canal de propagation considéré. C'est l'objectif du premier chapitre, où nous avons présenté le modèle en treillis temps-fréquence du signal OFDM, ainsi qu'une modélisation originale du canal basé sur la décomposition de Karhunen-Loève [4].

Le deuxième chapitre présente un nouvel estimateur itératif de canal très sélectif en temps et en fréquence, utilisant l'algorithme EM. Cet estimateur traite le signal reçu par bloc temps fréquence comprenant tout ou partie des porteuses de plusieurs symboles OFDM. Dans cette partie, les symboles seront supposés non codés et le vecteur d'initialisation est non optimisé. C'est pourquoi le troisième chapitre se consacrera au traitement de blocs temps-fréquence composés de symboles codés (turbo-estimation de canal) avec et sans vecteur d'initialisation optimisé.

## Chapitre 1

# Systeme et modèles

Dans ce premier chapitre, nous nous attacherons à présenter les principales modélisations des systèmes utilisant la technique OFDM en tant que modulation (voir fig.1.1), ainsi qu'une représentation originale du canal de propagation. Nous fixerons également les principales notations utilisées dans ce document.

### 1.1 Introduction

Historiquement, les premières techniques multiporteuses ont vu le jour à l'ère des communications analogiques. Ces méthodes ont donc tout d'abord fait l'objet de représentations continues, caractérisées par des fonctions orthogonales continues. Le modulateur et le démodulateur étaient alors des bancs de filtres théoriquement orthogonaux, mais la réalisation de filtres analogiques parfaitement orthogonaux est rigoureusement impossible et s'en approcher est donc très coûteux.

Cette représentation a donc progressivement été remplacée par une modélisation discrète des éléments de ces systèmes. Aujourd'hui, les transformées orthogonales les plus couramment utilisées dans les systèmes OFDM sont la Transformée de Fourier Discrète Inverse et sa transformée duale, la Transformée de Fourier Discrète, préférées pour leur faible complexité et leur facilité de mise en œuvre.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre plus particulièrement à une modélisation plus globale du principe de transmission OFDM en considérant l'existence d'un treillis bidimensionnel dans le plan temps-fréquence sur lequel sont émis les symboles d'information et nous introduirons une nouvelle modélisation du canal basée sur le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève. Enfin nous introduirons les codes convolutifs où nous l'utiliserons ultérieurement dans le chapitre des turbo estimateurs.

### 1.2 Etude d'un Emetteur OFDM [5]

À l'émetteur, une conversion série/parallèle est appliquée à la séquence d'information en série divisée en blocs. Après, chaque bloc est mappé à travers une constellation. Ensuite, une modulation aux  $E$  sous porteuses parallèles dans le domaine fréquentiel. Les valeurs complexes résultantes sont converties par une IFFT de taille  $N \geq E$  du domaine fréquentiel vers le domaine

temporel. Le préfixe cyclique (ou l'intervalle de garde) est alors ajouté à chaque symbole avant la conversion numériques-analogique et puis la transmission.

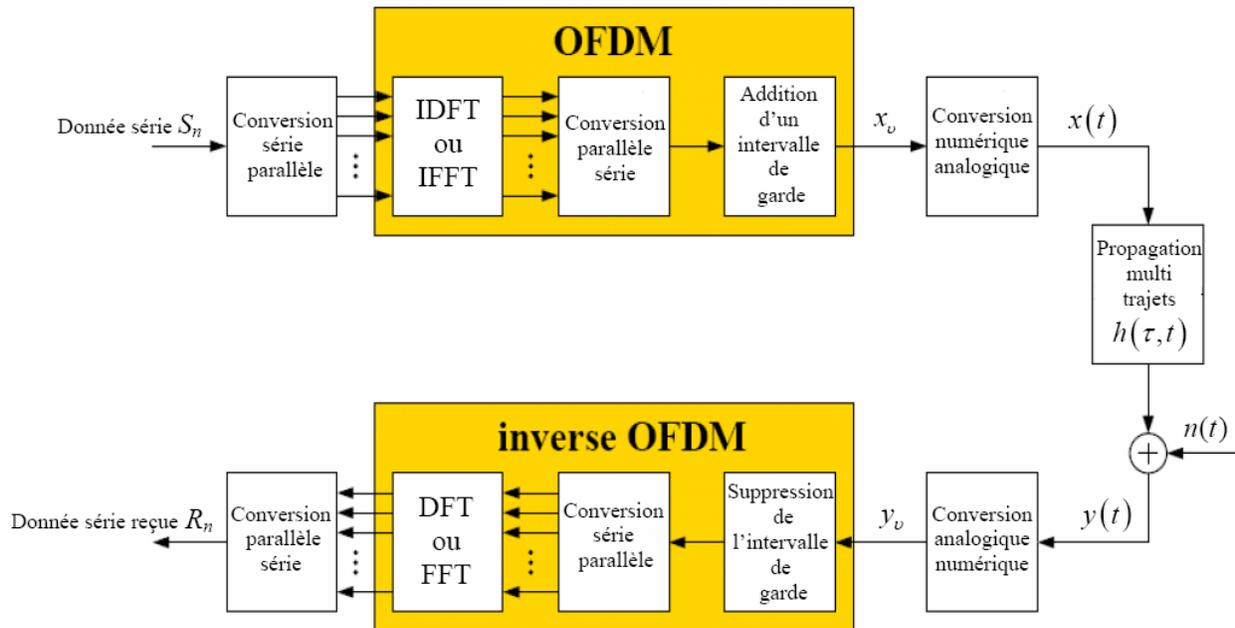


Fig. 1.1 : Un système de transmission OFDM

### 1. 2.1 Conversion série-parallèle

Les données à transmettre sont sous forme d'une séquence d'information série. La conversion consiste à convertir cette dernière en sous séquences parallèles. Cette étape est nécessaire pour transmettre un nombre important d'information par un seul symbole OFDM. Le nombre de bits transmis dans chaque symbole OFDM dépend des schémas de modulations utilisées et du nombre des sous porteuses utilisées.

### 1.2. 2 Mapping

On subdivise la séquence d'information en sous blocs de R bits. On utilisera une modulation E-QAM (E-ary Quadrature Amplitude Modulation). La taille E de la constellation est donnée par  $E = 2^R$ . Chaque R bits est représenté par un signal correspondant à un point de la constellation. Ce point peut être représenté par un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont notées respectivement I et Q. La Figure 1.2 montre 3 constellations : 4-QAM, 16-QAM et la 64-QAM. Chaque constellation est bâtie sur le même modèle, à savoir que les parties réelles et imaginaires des symboles prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $(\mp v; \mp 3v; \mp 5v; \dots)$ .

### 1.2.3 L'IFFT

Après l'étape du mapping au domaine fréquentiel, avant l'application de l'IFFT, chaque échantillon de l'IFFT correspond à une seule sous porteuse. L'IFFT est utilisé pour convertir ce

signal au domaine temporel. Le  $k^{ième}$  symbole signal module une sous porteuse de fréquence  $f_k$ . La fréquence, en bande de base, de chaque sous porteuse est un multiple de l'inverse de la durée du symbole OFDM, ce qui implique que chaque sous porteuse a un nombre entier de période par symbole OFDM. Cette propriété entraîne la vérification de la condition d'orthogonalité entre les sous porteuses. Ainsi, lorsque l'échantillonnage est effectué précisément à la fréquence  $f_k$  d'une sous-porteuse, il n'y a aucune interférence avec les autres sous-porteuses. Ceci permet d'obtenir ainsi une occupation optimale du spectre.

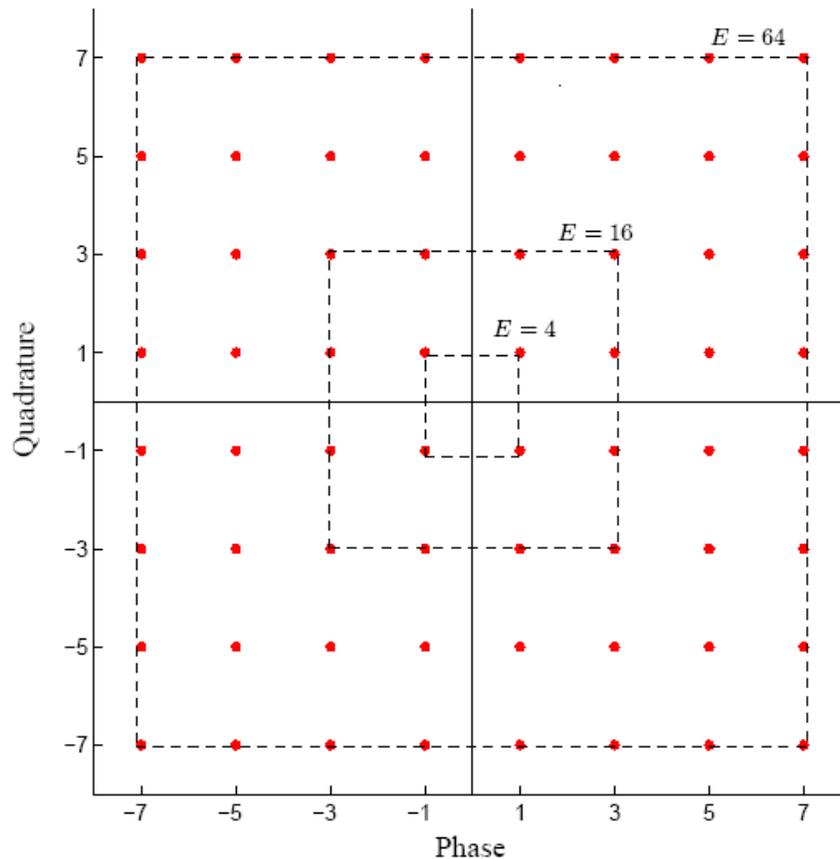


Fig. 1.2 Constellations 4-QAM, 16-QAM, 64-QAM

#### 1.2.4 Insertion de l'Intervalle de garde

Le préfixe est constitué des derniers échantillons  $[x(N - \nu), \dots, x(N - 1)]$  du symbole OFDM. Ainsi, les différentes répliques du symbole ont un nombre entier de cycles dans l'intervalle de l'IFFT et les sous-porteuses n'interfèrent plus.

L'ajout de ce temps de garde  $T_g$  a pour but d'éliminer l'ISI qui subsiste malgré l'orthogonalité des porteuses. Pour que cet intervalle de garde soit efficace, sa durée doit être au moins égale à l'écho non négligeable le plus long (celui qui a le retard maximal) des canaux sélectifs en fréquence (voir fig.1.3). Entre la période symbole, la période utile et l'intervalle de garde s'instaurent donc la relation (1.1):

$$T_s = T_u + T_g \tag{1.1}$$

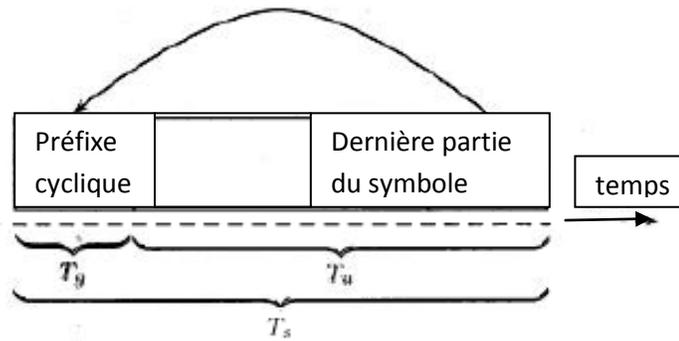


Fig. 1.3 Principe du préfixe cyclique

où  $T_g$  est la durée de l'intervalle de garde ajouté et  $T_u$  est la durée initiale du symbole généré par l'IFFT. La longueur de l'intervalle de garde est :

$$v \geq \left\lceil \frac{\tau_{max} N_c}{T_s} \right\rceil \tag{1.2}$$

où  $N_c$  est le nombre de sous porteuses

En plus de la protection du signal OFDM contre l'ISI, l'intervalle de garde assure également la protection contre les effets du décalage temporel entre le récepteur et l'émetteur.

### 1.2.5 Modulation Radio Fréquence

L'autre possibilité est d'effectuer une transposition en fréquence, permettant ainsi de moduler respectivement une porteuse en phase et une porteuse en quadrature, par les parties réelle et imaginaire de la trame OFDM (voir figure 1.4).

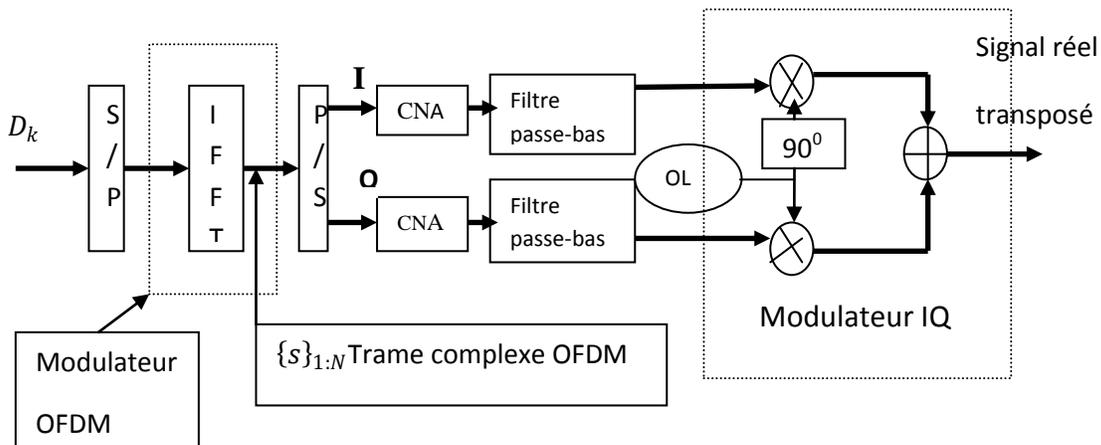


Fig. 1.4 Schéma de modulation ou transposition fréquentielle dans un système OFDM

A la sortie du module assurant l'IFFT, on sépare les parties réelles I et imaginaires Q des signaux OFDM, et on effectue ensuite une conversion parallèle série. Ces données numériques sont converties en données analogiques (CNA) et ensuite traversent un filtre passe bas. Le spectre OFDM est transposé autour de la fréquence de l'oscillateur local par le modulateur (I, Q). La modulation radio fréquence (RF) est donc implémentée grâce à des techniques analogiques classiques.

### **1.3 Récepteur OFDM [5]**

Au récepteur, après conversion analogique-numérique et suppression du préfixe cyclique, une FFT de taille N agit pour traduire le symbole OFDM reçu en des signaux d'information de données complexes. Les opérations de décodage et de demapping sont utilisées pour récupérer le flux des données transmises.

On suppose que le signal est synchronisé, ce qui implique que le début de chaque paquet et la fréquence d'échantillonnage sont corrects.

#### **1.3.1 La suppression de l'intervalle de garde**

Cette étape consiste à supprimer la copie du symbole qui était ajouté à l'émission pour éliminer les interférences entre symboles.

#### **1.3.2 FFT**

Le signal parvenu au bloc de la FFT après suppression de l'intervalle de garde, ce bloc convertit le symbole OFDM en des signaux d'information. Il réalise l'opération inverse de l'IFFT.

#### **1.3.3 Le demapping**

Le demapping n'est que l'opération inverse du Mapping c'est à dire correspondre à un vecteur (I, Q) un ensemble de bits selon le map ou la constellation utilisée à l'émission.

### **1.4 Canal radio mobile**

Le canal de propagation décrit le support physique de la transmission. Il peut être invariant dans le temps, par exemple dans le cas d'une transmission sur câble, ou variant dans le temps (cas d'une transmission dans un canal radio mobile). La variation dans le temps de ce dernier est due essentiellement à la propagation par trajets multiples et à la mobilité du récepteur [6] (voir figure 1.5), et elle constitue la caractéristique principale du canal radio mobile. En plus de la variation dans le temps, le canal radio mobile souffre de plusieurs imperfections comme l'évanouissement, l'interférence, l'effet Doppler et l'effet de masque.

Par conséquent, un modèle précis de canal décrivant le comportement de la propagation d'onde dans différents environnements (tels que mobile/fixe et indoor/outdoor) est nécessaire.

Ceci peut permettre, par des simulations, d'estimer et de valider l'exécution d'un arrangement donné de transmission.

### 1.4.1 Caractéristiques du canal radio mobile

Dans le canal radio mobile (voir figure 1.5), le signal transmis souffre de différents effets, qui sont caractérisés comme suit :

- La propagation multi-trajet,
- L'effet Doppler,
- L'évanouissement (Fading),
- Les pertes dues à la distance ou Path Loss.

#### a) Propagation multi-trajet

La propagation multi-trajet se produit par suite de réflexion, dispersion et de diffraction de l'onde électromagnétique transmise à travers différents obstacles. Ainsi, à la réception beaucoup de signaux arrivent de différentes directions avec des retards, des atténuations et des phases diverses. La superposition de ces derniers donne des variations d'amplitude et de phase du signal reçu, qui rend difficile la récupération du signal d'information d'origine [7].

#### b) Effet Doppler

L'effet Doppler est le décalage de la fréquence  $f_c$ , du signal transmis, à la réception d'une quantité  $f_D$  qui est donnée par la fréquence Doppler [6] :

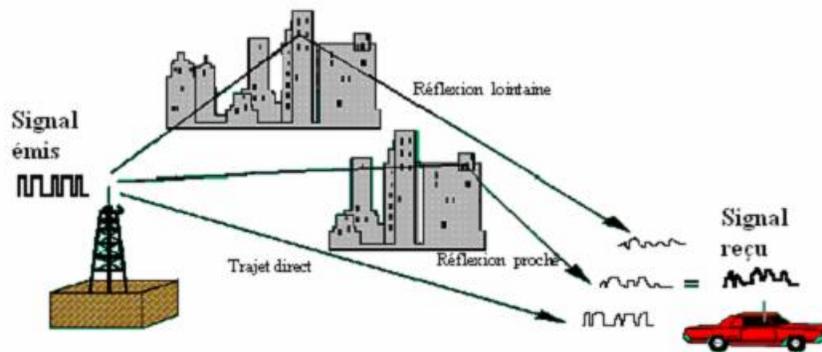


Fig 1.5 : La propagation multi-trajet variable dans le temps

$$f_D = \frac{vf_c \cos(\alpha)}{c} \quad (1.3)$$

où :

$v$  est la vitesse de déplacement du récepteur.

$c$  est la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans l'air,  $c=3.10^8 m/s$ .

$\alpha$  est l'angle entre  $\vec{v}$  (vitesse de déplacement) et  $\vec{k}$  (direction de propagation du champ), (voir figure 1.6). Le décalage de la fréquence est dû à la variation d'amplitude et de phase du signal reçu, qui est le résultat de déplacement des objets dans le canal radio [7]. Le maximum de la fréquence Doppler détermine la variation dans le temps du canal radio mobile (voir section 1.4.2), il est donné par [6] :

$$f_{Dmax} = \frac{vf_c}{c} \quad (1.4)$$

### c) *Évanouissement (Fading)*

C'est la variation de la puissance du signal en fonction du temps ou de la distance. On peut distinguer deux types de fading [8] :

#### *Fading à court terme*

Ce sont les fluctuations de la puissance du signal reçu sur un intervalle de temps ou un déplacement suffisamment petit (voir Figure 1.7). Il est causé par le multi-trajet, l'effet Doppler et la bande passante du signal émis. Le fading à court terme apparait en moyenne dans le temps à une fréquence égale à deux fois la fréquence de Doppler.

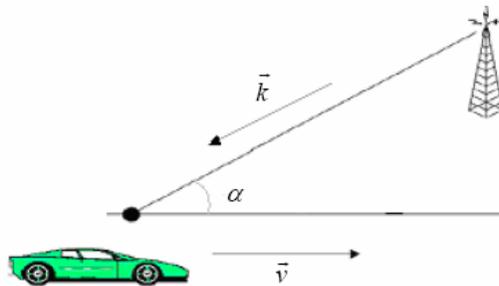


Fig. 1.6 Schéma représentatif de l'effet Doppler

#### *Fading à long terme*

C'est les fluctuations de la puissance du signal reçu mesurée sur un déplacement de plusieurs dizaines de longueurs d'onde ou sur un intervalle de temps suffisamment grand (voir Figure 1.7), il est appelé aussi "Log-Normal fading" ou bien "Shadowing". Il est dû principalement à l'effet de masque par des obstacles (collines, forêts, immeubles, ...) [8].

### d) *Pertes dues à la distance ou Path Loss [9]*

Elles dépendent de plusieurs facteurs comme la fréquence et la hauteur de l'émetteur. En effet, pour les basses fréquences, les pertes sont plus faibles. Ainsi comme la puissance d'émission du mobile est plus faible que celle de la base, le mobile émettra sur une fréquence

plus basse appelée canaux montants en opposition aux canaux descendants. Les pertes sont plus faibles quand l'émetteur est plus haut. De plus à partir d'une certaine distance apparaît un point de rupture (break point), au-delà duquel l'atténuation est plus élevée avec la distance.

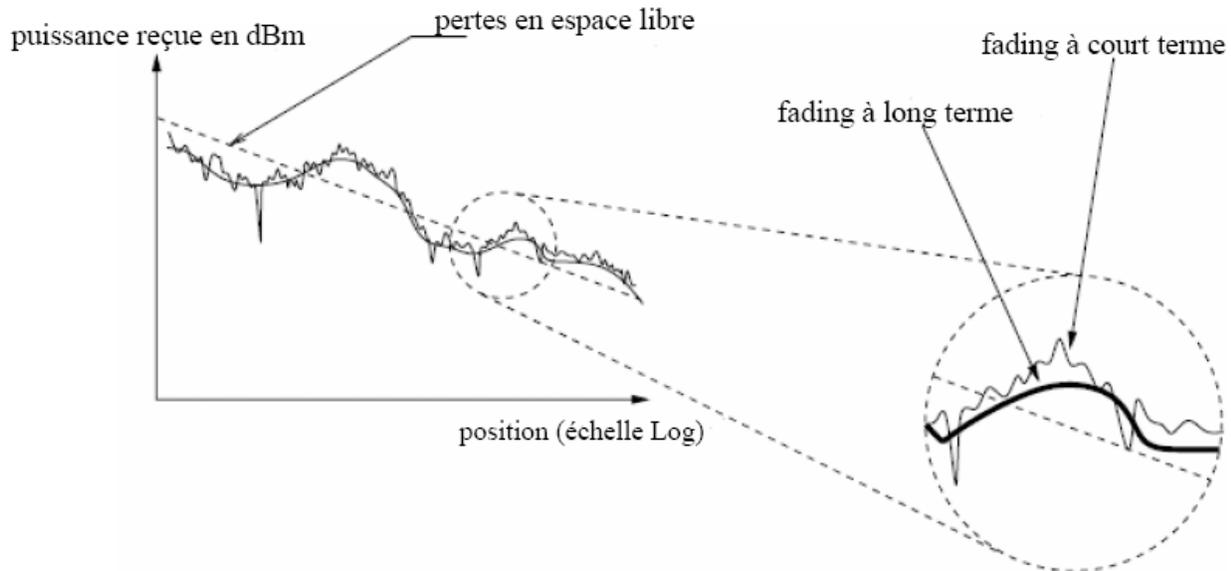


Fig. 1.7 : Les catégories de fading en fonction de la distance

### 1.4.2 Modélisation du canal radio mobile

Le canal radio mobile peut être caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $c(t, \tau)$ , ou par sa fonction de transfert  $C(f, t)$ , qui sont variables dans le temps, où  $C(f, t)$  est la transformée de Fourier de  $c(t, \tau)$  [7]. La réponse impulsionnelle représente la réponse du canal au temps  $t$ , à une impulsion appliquée au temps  $t - \tau$ . On suppose que le canal radio mobile est un processus aléatoire stationnaire au sens large, c.-à-d., le canal a une statistique d'évanouissement (fading) qui reste constante dans de courtes périodes de temps ou distances spatiales. La réponse impulsionnelle du canal radio mobile se compose de plusieurs impulsions dispersées à travers  $N_p$  trajets différents. Elle est donnée par [7]:

$$c(t, \tau) = \sum_{p=0}^{N_p-1} a_p e^{j(2\pi f_{D,p}t + \phi_p)} \delta(\tau - \tau_p) \quad (1.5)$$

où :

$$\delta(\tau - \tau_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \tau_p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.6)$$

et  $a_p$ ,  $f_{D,p}$ ,  $\phi_p$  et  $\tau_p$  sont respectivement l'amplitude, la fréquence Doppler, la phase et le retard de propagation, associés au trajet  $p$ ,  $p=0,1, \dots, N_p - 1$ . La fonction de transfert du canal est [7] :

$$C(f, t) = \sum_{p=0}^{N_p-1} a_p e^{j(2\pi(f_{D,p}t - f\tau_p) + \phi_p)} \quad (1.7)$$

Les retards sont mesurés par rapport au premier signal détecté à la réception. La fréquence de Doppler dans les équations (1.3) et (1.4) est donnée par :

$$f_{D,p} = \frac{vf_c \cos(\alpha_p)}{c} \quad (1.8)$$

où  $\alpha_p$  est l'angle d'incidence associé au trajet  $p$ .

La figure 1.8 représente un exemple de la réponse impulsionnelle, et la fonction de transfert du canal.

Sous l'hypothèse que le canal est stationnaire au sens large (SWS chanel) et que  $c(\tau_1, t)$  et  $c(\tau_2, t)$  sont incorrélés pour  $\tau_1$  différent de  $\tau_2$  (Uncorrelated Scattering US), on définit la densité spectrale de puissance croisée (the delay cross-power spectral density) par [10] :

$$\rho(\tau, \Delta t) = \frac{1}{2} E\{c(\tau, t)c^*(\tau, t + \Delta t)\} \quad (1.9)$$

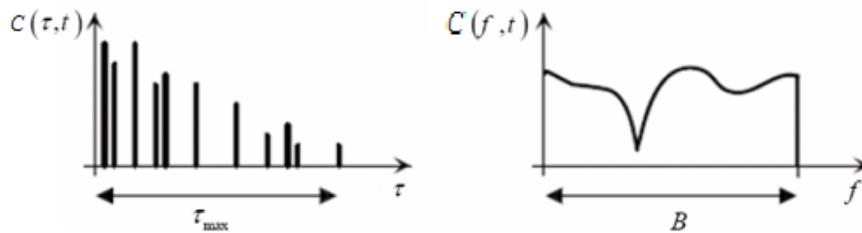


Fig. 1.8 La réponse impulsionnelle et la fonction de transfert variables dans le temps

où :  $E\{.\}$  c'est l'opérateur de l'espérance mathématique.

La transformé de Fourier de  $\rho(\tau, \Delta t)$  dans la direction du temps, donne la fonction de diffusion (Scattering function) retard-Doppler  $S(\tau, f_D)$ , qui est donné par [10].

$$S(\tau, f_D) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\tau, \Delta t) e^{-j2\pi f_D(\Delta t)} d(\Delta t) \quad (1.10)$$

La densité spectrale de puissance des retards  $\rho(\tau)$ , qui caractérise la **sélectivité fréquentielle** du canal radio mobile, donne la puissance moyenne de sortie du canal en fonction du retard  $\tau$  [7].  $\rho(\tau)$  est donnée par [11] :

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau, f_D) d(f_D) \quad (1.11)$$

Le retard moyenne  $\bar{\tau}$ , la dispersion des retards (ou le retard de Root Mean square)  $\tau_{RMS}$  et l'étalement des retards (ou le retard maximal)  $\tau_{max}$  sont des paramètres qui caractérisent la densité spectrale de puissance des retards [11].

Le retard moyen est donné par [7]:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{p=0}^{N_p-1} \tau_p \Omega_p}{\sum_{p=0}^{N_p-1} \Omega_p} \quad (1.12)$$

où :

$$\Omega_p = |a_p|^2 \quad (1.13)$$

$\Omega_p$  est la puissance du trajet  $p$ . Le retard  $\tau_{RMS}$  est défini par [7] :

$$\tau_{RMS} = \sqrt{\frac{\sum_{p=0}^{N_p-1} \tau_p^2 \Omega_p}{\sum_{p=0}^{N_p-1} \Omega_p} - \bar{\tau}^2} \quad (1.14)$$

De la même façon, La densité spectrale de puissance de Doppler  $S(f_D)$  caractérise la **variation temporelle** du canal, et donne la puissance moyenne de sortie en fonction de la fréquence  $f_D$  [11].  $S(f_D)$  est donné par :

$$S(f_D) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tau, f_D) d(\tau) \quad (1.15)$$

La dispersion de fréquence est quantifiée par  $f_{D \max}$  et  $f_{D \text{ spread}}$  [7]. Doppler spread ( $f_{D \text{ spread}}$ ) est la bande passante de la densité spectrale de puissance de Doppler, et prend des valeurs dans l'intervalle :

$$f_{D \text{ spread}} \leq 2|f_{D \max}| \quad (1.16)$$

### 1.4.3 Statistiques de fading du canal [11]

Les statistiques du processus de fading qui caractérisent le canal sont très importantes pour la détermination des paramètres de son modèle. Une approche simple et employée souvent est obtenue à partir de la supposition qu'il y a un grand nombre d'ondes dispersées dans le canal, qui contribuent au signal reçu. L'application du théorème de la limite centrale mène à un processus gaussien complexe pour la réponse impulsionnelle du canal.

En l'absence de la ligne de vue (LOS : Ligne Of Sight) ou d'un composant dominant, le processus est de moyenne nulle. L'amplitude de la fonction de transfert du canal :

$$a = a(f, t) = |C(f, t)| \quad (1.17)$$

est une variable aléatoire, qui suit une distribution de Rayleigh donnée par (1.18) :

$$p(a) = \frac{2a}{\Omega} e^{-a^2/\Omega} \quad (1.18)$$

où,  $\Omega = E\{a^2\}$  est la puissance moyenne. La phase est uniformément distribuée dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

Dans le cas du canal multi-trajet qui contient une ligne de vue (LOS) ou une composante dominante, la réponse impulsionnelle du canal ne peut plus être modélisée à moyenne nulle. Sous la supposition d'un processus gaussien complexe pour la réponse impulsionnelle du canal, l'amplitude de la fonction de transfert suit une distribution de Rice donnée par :

$$p(a) = \frac{2a}{\Omega} e^{(-a^2/\Omega + K_{Rice})} I_0 \left( 2a \sqrt{\frac{K_{Rice}}{\Omega}} \right) \quad (1.19)$$

Le facteur de Rice  $K_{Rice}$  est déterminé par le rapport de la puissance de LOS sur la puissance des signaux dispersés.  $I_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0. La phase est uniformément distribuée dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

#### 1.4.4 Interférence Inter-symboles (ISI) et Inter-canal (ICI) [7]

La dispersion des retards (The delay spread) peut causer l'interférence inter-symbole (ISI), quand les symboles d'information adjacents interfèrent entre eux à cause de différents retards en différents trajets de propagation. Le nombre de symboles interférés dans un système de modulation mono-porteuse (single-carrier) est donné par la relation (1.20) :

$$N_{ISI,mono-porteuse} = \frac{\tau_{max}}{T_d} \quad (1.20)$$

Pour les applications à débit élevé avec une durée de symbole très courte  $T_d < \tau_{max}$  l'effet d'ISI et la complexité de récepteur peuvent augmenter de manière significative. Cet effet peut être contrarié par différentes mesures telles que l'égalisation dans le domaine temporel ou fréquentiel. Dans les systèmes d'étalement de spectre, les récepteurs Rake avec plusieurs doigts (arms) sont utilisés pour réduire l'effet d'ISI par exploitation de la diversité multi trajets tel que chaque doigt est adapté aux différents trajets de propagation.

Si  $T_d \gg \tau_{max}$  l'effet d'ISI est négligeable. Cet effet est exploité dans la transmission multi-porteuse ou la durée d'un symbole augmente avec le nombre de sous-porteuses  $N_c$ , ce qui permet de diminuer le nombre d'ISI par la relation (1.21):

$$N_{ISI,mono-porteuse} = \frac{\tau_{max}}{NT_d} \quad (1.21)$$

Le maximum d'étalement Doppler dans les applications radio mobile qui utilisent la modulation mono-porteuse est généralement plus faible que la distance entre les canaux adjacents, donc dans ce cas l'étalement n'est pas un problème.

Pour les systèmes de modulation multi-porteuse l'espace entre les sous-canaux  $F_S$  devient très petit, donc l'effet Doppler peut causer d'ICI significatif, ce qui dégrade les performances du système. Donc, à la réception on est obligée d'utiliser des récepteurs complexes tel que le récepteur Rake dans le domaine fréquentiel. Pour éviter l'ICI il faut vérifier la condition (1.22):

$$F_S \gg f_{D \max} \quad (1.22)$$

Après vérification des conditions (1.20), (1.21) on peut éliminer l'ISI et l'ICI résiduel par utilisation d'un intervalle de garde (voir section 1.2.4).

#### 1.4.5 Modélisation d'un canal multi-porteuse [7]

Les systèmes multi-porteuses peuvent être simulés dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Les pré-conditions d'implémentation d'un modèle dans le domaine fréquentiel sont :

- L'absence d'ISI et d'ICI.
- Avoir pour chaque sous-porteuse un Fading non sélectif en fréquence.
- L'invariance dans le temps pendant un symbole OFDM.

La fonction de transfert de canal discrète adapté aux signaux multi-porteuse résulte en :

$$\begin{aligned} C_{n,i} = C(nF_S, iT_S) &= \sum_{p=0}^{N_p-1} a_p e^{j(2\pi(f_{D,p}iT_S - nF_S\tau_p) + \phi_p)} \\ &= a_{n,i} e^{j(\phi_{n,i})} \end{aligned} \quad (1.23)$$

où la fonction de transfert continue  $C(f, t)$  est échantillonnée dans le temps à des périodes de  $T_s$  et en fréquence à des espaces de  $F_S$ .

#### 1.4.6 Diversité et Sélectivité [8]

Alors que les trajets multiples sont à l'origine d'une *sélectivité fréquentielle* et d'un *étalement des retards*, l'effet Doppler provoque une *sélectivité temporelle* et un *étalement fréquentielle*. Pour assurer une qualité de transmission suffisante, les systèmes doivent être résistants aux trajets multiples mais aussi peut sensibles à l'effet Doppler. Les conséquences de ces deux phénomènes sur la qualité de transmission vont dépendre des propriétés de sélectivité et de diversité du canal.

Avant d'étudier la diversité et la sélectivité du canal radio mobile il faut définir la bande et le temps de cohérence :

**La bande de cohérence**  $(\Delta f)_c$  d'un canal radio mobile est la bande de fréquence sur laquelle les caractéristiques de propagation d'un signal sont corrélées, et elle peut être approximée par (1.24):

$$(\Delta f)_c \approx \frac{1}{\tau_{max}} \quad (1.24)$$

**Le temps de cohérence**  $(\Delta t)_c$  est la durée sur laquelle les caractéristiques du canal radio mobile peuvent être considérés comme invariants, et elle peut être approximée par (1.25):

$$(\Delta t)_c \approx \frac{1}{2f_{D\ max}} \quad (1.25)$$

### a. Notion de sélectivité

La notion de sélectivité du canal est définie à partir du rapport entre la bande occupée par le signal et la bande de cohérence, et du rapport entre la durée d'un symbole et le temps de cohérence. Quatre cas de figure peuvent se présenter :

$B < (\Delta f)_c \Leftrightarrow T_s > \tau_{RMS}$ : si la bande occupée par le signal est inférieure à la bande de cohérence du canal, les fréquences du spectre du signal subissent la même atténuation ou amplification (voir figure 1.9). Dans ce cas, les évanouissements fréquentiels sont dits *évanouissements plats* (flat fading) et le canal est alors *non-sélectif en fréquence*.

$B > (\Delta f)_c \Leftrightarrow T_s < \tau_{RMS}$ : si la bande occupée par le signal est supérieure à la bande de cohérence du canal, les évanouissements fréquentiels n'atténuent que certaines composantes du spectre du signal (voir figure 1.9). L'étalement des retards étant supérieur à la durée d'un symbole, il se produit alors des interférences inter-symboles (ISI). Le canal de propagation est alors *sélectif en fréquence*.

$T_s < (\Delta t)_c \Leftrightarrow B > 2f_{D\ max}$  : lorsque l'étalement Doppler (Doppler spread) est inférieure à la bande occupée par le signal, le canal de propagation est dit à *évanouissement lent* (ou slow fading). Dans ce cas la réponse impulsionnelle reste constante sur plusieurs symboles consécutifs. Le canal est alors *non-sélectif en temps*.

$T_s > (\Delta t)_c \Leftrightarrow B < 2f_{D\ max}$  : par opposition au cas précédent, si la bande fréquentielle du signal est inférieure à l'étalement Doppler du canal, le canal de propagation est dit à *évanouissement rapide* (fast fading). Le canal est alors *sélectif en temps*.

### b. Notion de diversité

A partir de la bande de cohérence et du temps de cohérence du canal, il est aussi possible d'estimer l'ordre de diversité du système. La diversité se définit par la présence en réception de plusieurs répliques indépendantes d'une même information. Ainsi si une réplique donnée subit un fort fading, les autres signaux sont vraisemblablement moins atténués. Il existe de nombreuses formes de diversité. Parmi celles-ci, on distingue par exemple, les diversités spatiales, temporelles, fréquentielles, de trajet, ... etc. Pour notre étude, seules les notions de diversité temporelle et fréquentielle sont abordées.

La plus simple à mettre en œuvre, la diversité temporelle consiste à répéter la même information à des moments différents afin de créer une redondance. Ainsi, lorsque la séparation entre deux trames successives portant la même information est supérieure au temps de cohérence du canal, on considère que la diversité temporelle est exploitée. Ainsi en notant  $T_{Trame}$  la durée d'une trame constituée d'un ensemble de symboles, l'ordre de diversité temporelle  $D_t$  sur cette trame est approché par l'expression suivant :

$$D_t = \frac{T_{Trame}}{(\Delta t)_c} \quad (1.26)$$

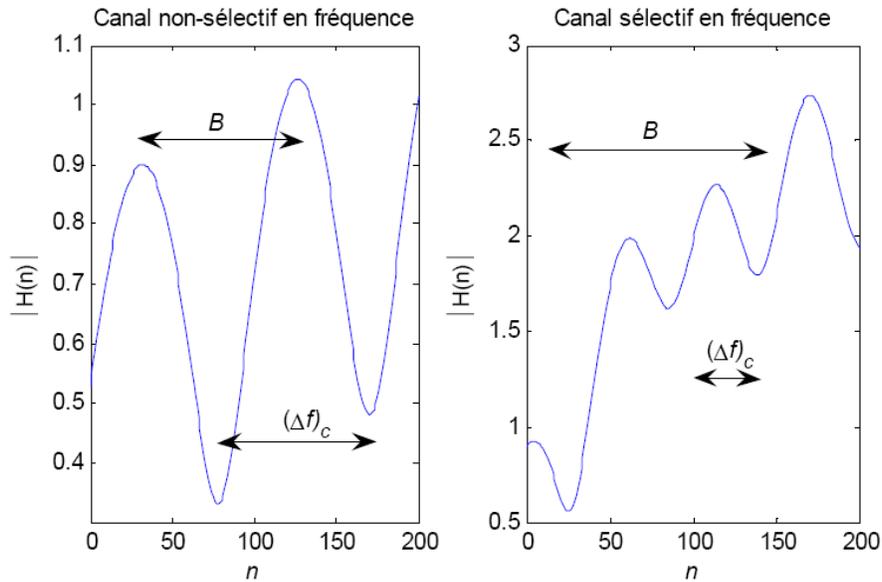


Fig. 1.9 Un exemple de classification du canal en fonction de la sélectivité

De même, la diversité fréquentielle consiste à transmettre simultanément la même information sur plusieurs fréquences différentes. On considère que cette dernière est exploitée lorsque la séparation entre deux fréquences successives portant la même information est supérieure à la bande de cohérence du canal. Ainsi, pour un système de largeur de bande  $B$ , l'ordre de diversité fréquentielle  $D_f$  est approché par :

$$D_f = \frac{B}{(\Delta f)_c} \quad (1.27)$$

Les systèmes qui exploitent les deux diversités temporelle et fréquentielle peuvent atteindre un ordre de diversité global qui est donné par :

$$D_0 = D_f D_t \quad (1.28)$$

La figure 1.10 donne un résumé pour tout les cas possible de sélectivité et de diversité, ainsi que le fading correspondant.

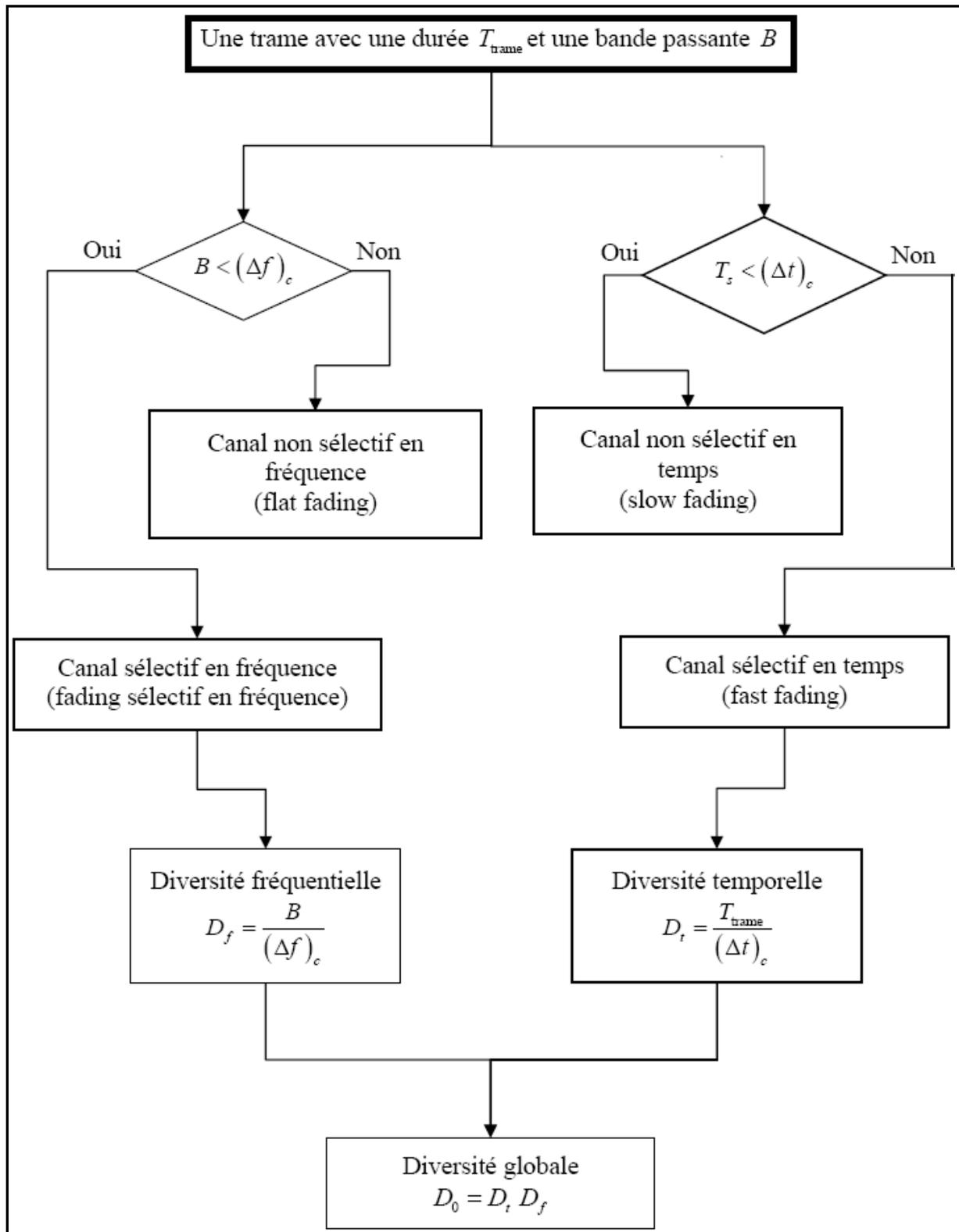


Fig. 1.10 Organigramme récapitulatif de la diversité et la sélectivité

A la réception l'enveloppe de la fonction d'autocorrélation de deux fonctions séparées dans le temps par  $\Delta t$  et en fréquence par  $\Delta f$  est donnée par [12] :

$$\phi(\Delta f, \Delta t) = \frac{J_0(\pi \cdot B_d \cdot \Delta t)}{1 + j2\pi \cdot \Delta f \cdot T_m} \quad (1.29)$$

où

$J_0(\cdot)$  représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.

$B_d = 2 \cdot f_{dmax}$  : étalement Doppler

$T_m = \tau_{RMS}$  : la dispersion des retards

Un canal de propagation, comme nous l'avons déjà affirmé, peut être caractérisé [12] par son paramètre étalement doppler  $B_d$  et étalement de retard  $T_m$ . Nous avons choisi de prendre comme paramètre le produit  $B_d T_m$ . Mais à une valeur de produit  $B_d T_m$  fixé correspondent une infinité de valeurs pour  $B_d$  et  $T_m$ , faisant varier la sélectivité en temps et en fréquence du canal. Il est bien évident que dans la réalité il n'est pas possible de fixer les paramètres du canal cependant, dans un souci de ne pas favoriser l'une ou l'autre des dimensions sélectives du canal (en temps ou en fréquence), nous avons choisit de fixer le rapport  $B_d/T_m$  de telle façon que les variations en temps et en fréquence se déroule selon les même règles statistiques. C'est-à-dire que la variance des retards  $\tau$  et la variance de fréquence doppler  $\gamma$  soient égales.

Le détail de ces calculs est donné en annexe *D* et mène à la relation :  $B_d = 2\sqrt{2}T_m$

ce qui devient, si l'on pose  $B_d T_m = \alpha$  à :

$$B_d = \sqrt{2\alpha\sqrt{2}} \quad T_m = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}} \quad (1.30)$$

La figure 1.11 donne un exemple de réalisations de chacun des canaux utilisés dans les simulations présentes plus avant. Ces canaux vérifient la relation entre donnée ci-dessous. On vérifie bien que les variations temporelles et fréquentielles sont homogènes. Sur de tels blocs, nous considérerons que les canaux de paramètre  $B_d T_m = 1/8^2$  et  $1/16^2$  sont très sélectifs, le canal  $B_d T_m = 1/32^2$  est moyennement sélectif et le canal  $B_d T_m = 1/64^2$  est faiblement sélectif.

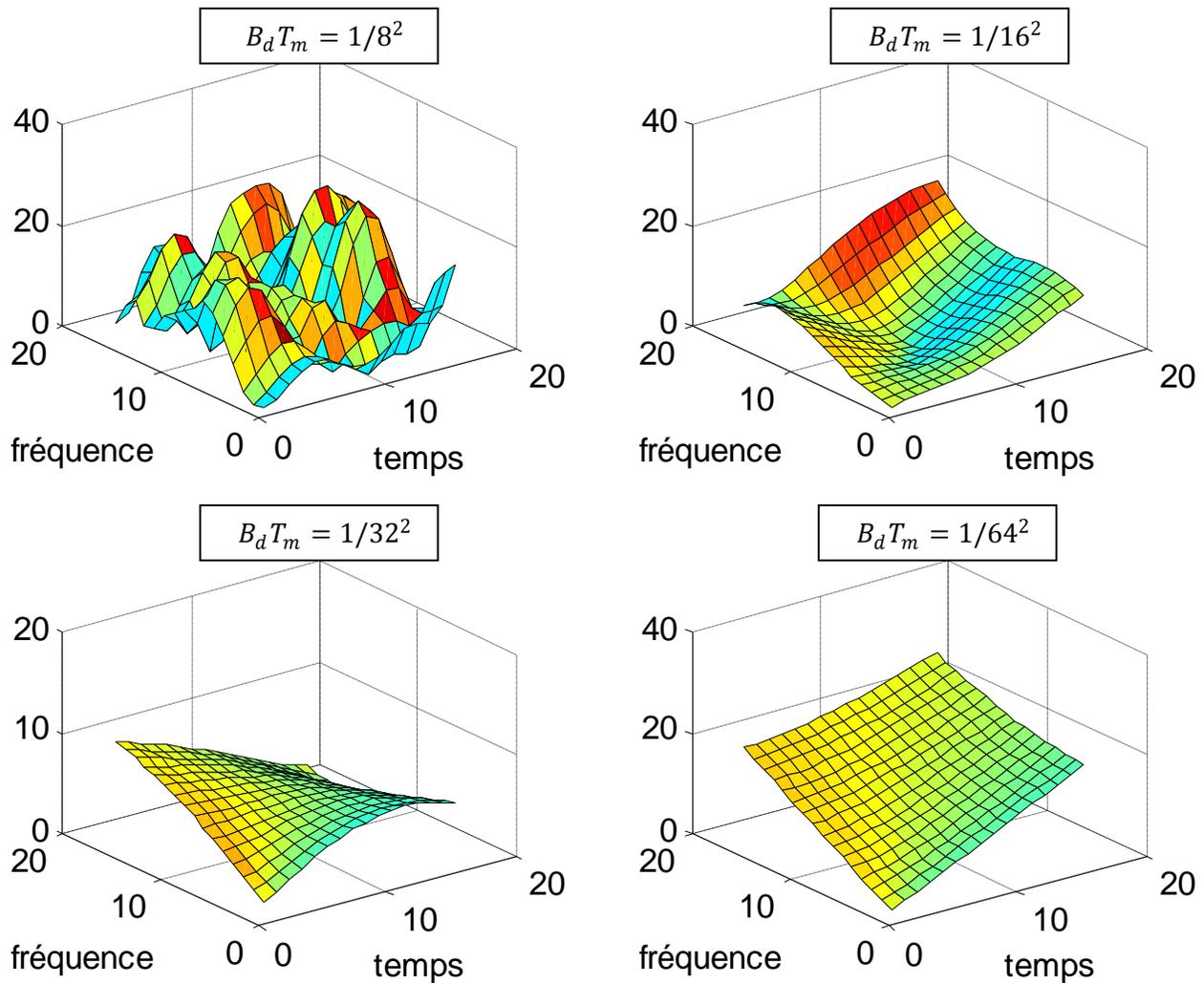


Fig. 1.11 différent types de canaux selon la sélectivité (produit  $B_d T_m$ )

## 1.5 Modélisation de la chaîne étudiée

La chaîne présentée dans la figure 1.12 est la chaîne complète considérée dans ce mémoire. Pourtant, dans certaines parties, certains blocs comme le codeur et l'entrelaceur ne seront pas pris en compte.

### 1.5.1 Caractéristiques du signal transmis

Les techniques d'estimation que nous proposerons plus loin traitent le signal reçu bloc temps fréquence par bloc temps-fréquence. Nous verrons que la taille de ce bloc ne dépend pas nécessairement du nombre de porteuses du système OFDM et peut prendre en compte tout ou partie d'un ou plusieurs symboles OFDM. Sa forme et sa taille sont donc libres, de manière à s'adapter au système.

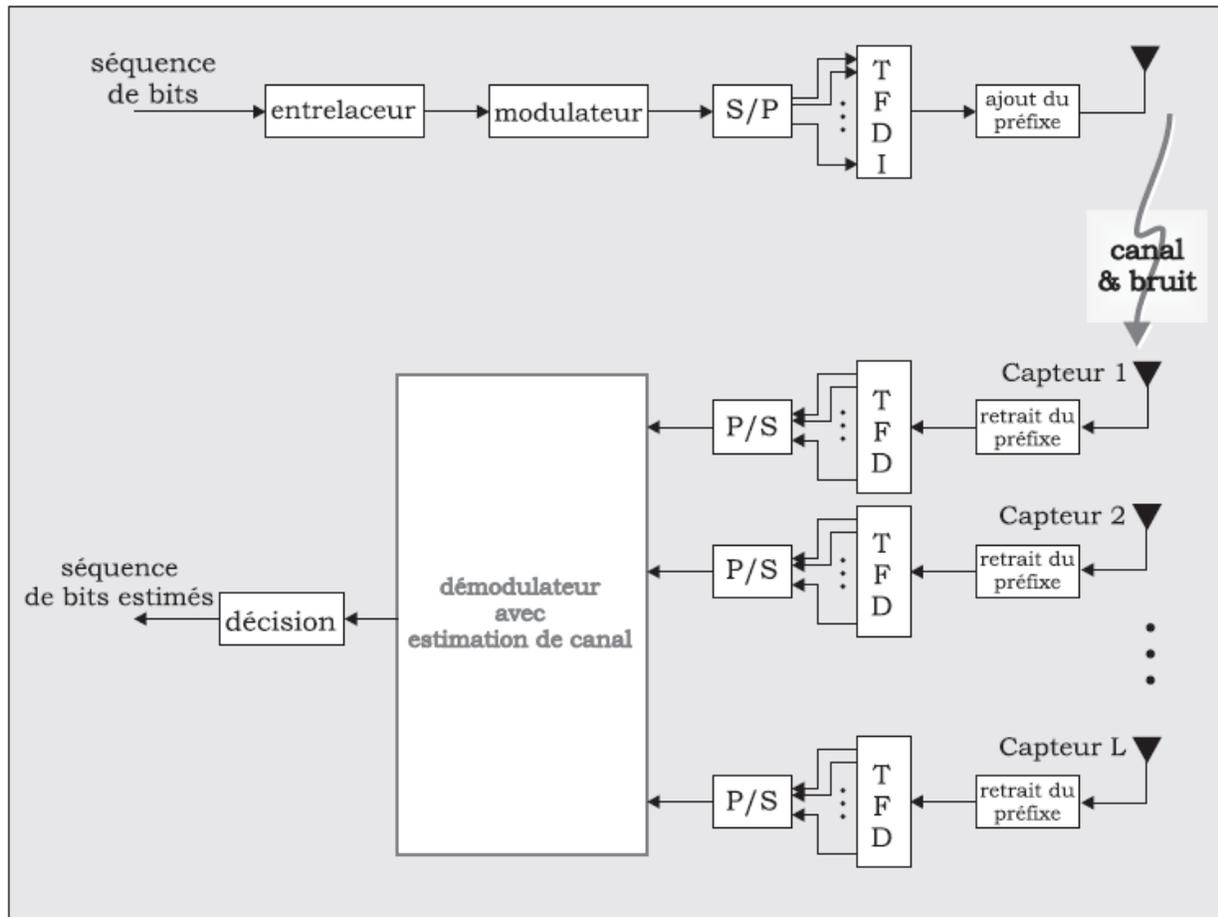


Fig. 1.12 : Chaîne du système étudié.

Chacun de ces blocs, de dimensions  $n_s \times n_p$ ,  $n_s$  étant le nombre de symboles OFDM et  $n_p$  le nombre de porteuses appartenant au bloc, est composé de  $N = n_s \times n_p$  symboles  $\{a_{mn}\}$  d'énergie  $\{E_{mn}\}$  et de position bidimensionnelle  $(mF, nT)$  où  $F$  et  $T$  sont respectivement l'espacement en fréquence et en temps entre deux symboles adjacents. Il contient  $N_D$  symboles de données indexés dans l'ensemble  $S_D$  et  $N_P$  symboles pilotes indexés dans l'ensemble  $S_P$ . On considérera dans la suite de ce mémoire que les symboles appartiennent à un alphabet d'une modulation de phase (MDP). En effet, nous verrons que l'hypothèse de symboles à enveloppe constante est nécessaire pour les nouvelles méthodes d'estimation de canal présentées dans ce mémoire.

En règle générale, les récepteurs classiques utilisent des symboles pilotes de plus forte puissance que les symboles de donnée. Cette différence de puissance permet, certes, d'estimer le canal avec plus de précision, mais risque d'introduire des interférences au niveau de la porteuse elle-même et par conséquent de réduire la capacité du système OFDM dans un contexte de réutilisation de fréquence. L'estimation de canal selon les techniques présentées dans ce mémoire permet de réaliser une estimation de canal optimale quelle que soit la valeur de la puissance des symboles pilotes.

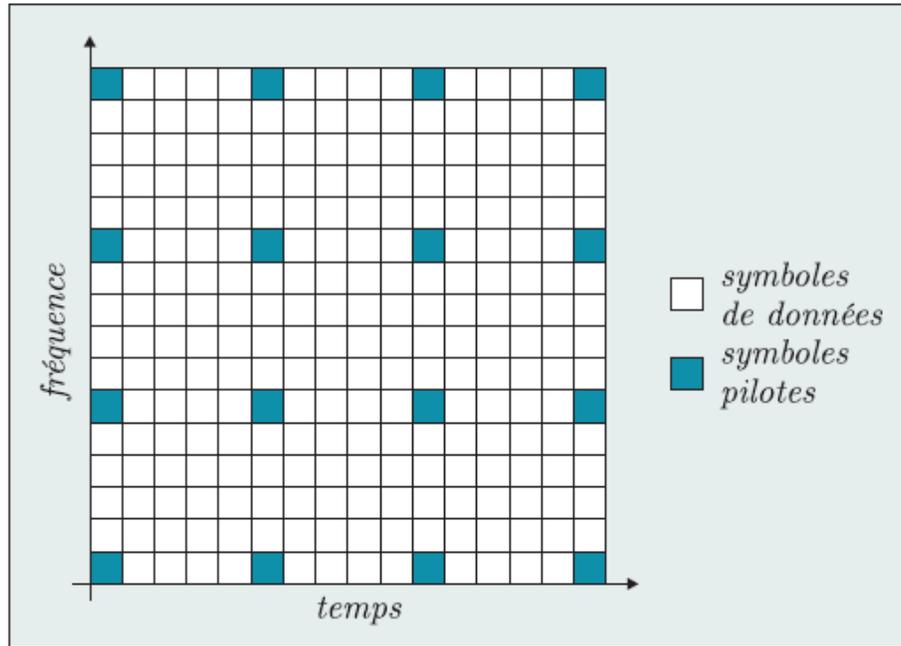


Fig. 1.13 Exemple de bloc temps-fréquence

### 1.5.2 Modélisation du signal reçu

Comme nous l'avons défini, le récepteur traite le signal reçu par bloc temps-fréquence. Ce signal est reçu sur un réseau de  $L$  capteurs décorrélés spatialement, créant  $L$  branches de diversité. Sur chacune des branches de diversité, le signal reçu est en premier lieu démodulé par la transformée de Fourier discrète. On suppose que le signal en sortie de la  $l^{\text{ème}}$  branche de diversité associé au symbole  $a_{mn}$  s'écrit :

$$R_{mn}^l = c_{mn}^l a_{mn} + N_{mn}^l \quad (1.31)$$

où  $c_{mn}^l$  est le facteur de gain du canal discret de la  $l^{\text{ème}}$  branche vu par le symbole  $a_{mn}$  et  $N_{mn}^l$  est un bruit blanc Gaussien additif complexe de variance  $N_0$ . Les facteurs de gains sont indépendants d'une branche de diversité à l'autre, mais corrélés entre eux en temps et en fréquence sur une même branche.

Pour des raisons de notation, nous introduisons les fonctions d'indexation suivantes (fig. 1.14) :

- $\delta(k) = [m(k), n(k)]$  entre l'ensemble monodimensionnel  $\{k\}_{k=0}^N$  et l'ensemble bidimensionnel  $S_P \cup S_D$ ,
- $\delta_D(k) = [m(k), n(k)]$  entre l'ensemble monodimensionnel  $\{k\}_{k=0}^{N_D-1}$  et l'ensemble bidimensionnel  $S_D$ ,
- $\delta_P(k) = [m(k), n(k)]$  entre l'ensemble monodimensionnel  $\{k\}_{k=0}^{N_P-1}$  et l'ensemble bidimensionnel  $S_P$ .

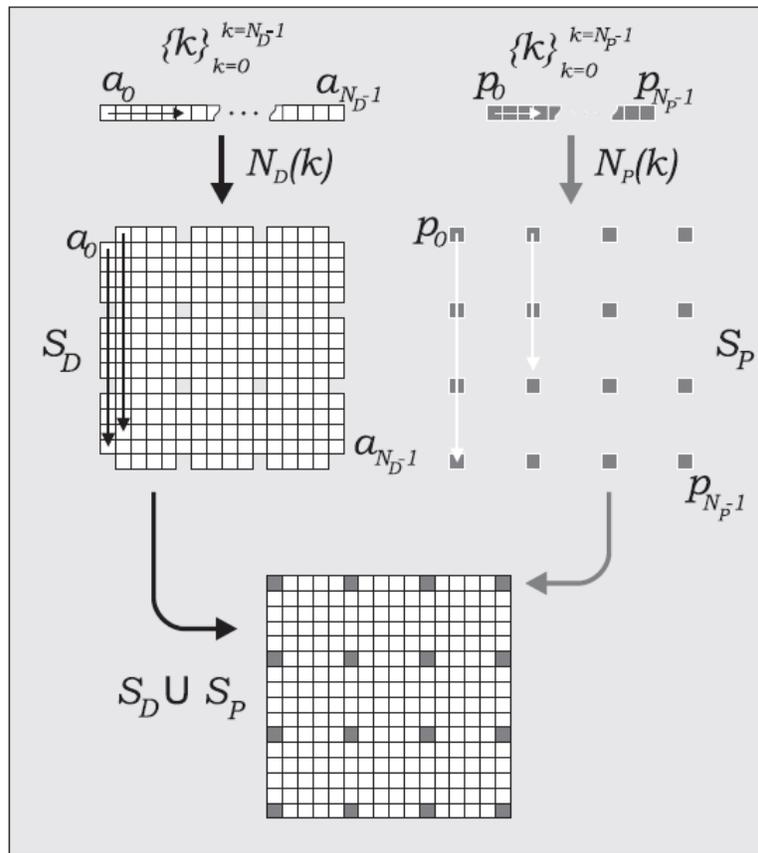


Fig. 1.14 Représentation schématique des ensembles d'indexation

Soit  $(.)^T$  l'opérateur de transposition, écrivons le vecteur signal en sortie du filtre adapté de la  $l^{\text{ème}}$  branche de diversité :

$$R^l = [R_{\delta(0)}^l, \dots, R_{\delta(N-1)}^l]^T \quad (1.32)$$

Pour s'affranchir de la dépendance de l'amplitude de chaque symbole  $a_{mn}$  de  $\Omega$  par rapport au couple d'indices  $(m, n)$ , nous définissons le vecteur normalisé du bloc transmis :

$$A^l = [A_{\delta(0)}^l, \dots, A_{\delta(N-1)}^l]^T \quad (1.33)$$

Avec  $A_{\delta(k)}^l = a_{\delta(k)} / |a_{\delta(k)}|$ . Sur cette base, il est possible de réécrire les composantes du vecteur reçu sur la  $l^{\text{ème}}$  branche de diversité :

$$R_{mn}^l = C_{mn}^l A_{mn} + N_{mn}^l \quad (1.34)$$

où  $C_{mn}^l$  est la  $d^{\text{ème}}$  composante du vecteur

$$C^l = [ |a_{\delta(0)}| c_{\delta(0)}^l, \dots, |a_{\delta(N-1)}| c_{\delta(N-1)}^l ]^T \quad (1.35)$$

des facteurs de gain normalisés du canal discret multiplicatif équivalent sur la  $l^{\text{ème}}$  branche.

### 1.5.3 Représentation du canal de propagation

Pour réaliser une estimation de canal semi aveugle au sens de maximum a posteriori, nous avons besoin d'une représentation précise du canal. Notre représentation est basée sur une version discrète du théorème d'extension orthogonale de karhunen-Loève [4]. Pour une question de clarté, nous considérerons que les trajets du canal obéissent tous à des atténuations de Rayleigh.

Alors le vecteur représentant le canal – observé au  $l^{\text{ème}}$  capteur lors de la transmission d'un bloc de données temps-fréquence – peut s'exprimer sous la forme [4]:

$$C_l = \sum_{k=0}^{N-1} G_{lk} B_{lk} \quad (1.36)$$

où les  $\{B_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$  sont les vecteurs propres normalisés de la matrice d'autocorrélation  $F_l = E[C_l C_l^{*T}]$  de  $C_l$  et les  $\{G_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$  sont des coefficients Gaussiens complexes indépendants et centrés. Les variances de ces coefficients, que l'on supposera par la suite classés dans l'ordre décroissant, sont égales aux valeurs propres  $\{\Gamma_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$  de la matrice hermitienne  $F_l$ . Les systèmes  $\{B_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$  variant de 0 à  $L-1$  forment  $L$  bases orthonormales de l'espace canonique complexe à  $N$  dimensions.

En effet, d'après le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève et puisque le canal de propagation sur chacune des branches de diversité forme un processus stochastique, il est possible d'écrire le vecteur  $C_l$  représentant le canal observé par une branche réceptrice lors de la transmission d'un bloc temps-fréquence par l'équation (1.36). Les vecteurs  $\{G_l\}_{l=0}^{L-1}$ , où  $G_l = (G_{l0}, G_{l1}, \dots, G_{lN-1})^T$ , sont notre représentation du canal discret vu en sortie de la  $l^{\text{ème}}$  antenne de réception. Nous savons que l'enveloppe du canal est de Rayleigh, c'est-à-dire que chaque facteur de gain  $C_{\delta(k)}^l$  est Gaussien complexe et centré. Les vecteurs propres de la matrice de corrélation sont par définition également Gaussiens complexes et centrés. Donc d'après (1.36) les  $\{G_{lk}\}_{l=0, k=0}^{L-1, N-1}$  sont donc des variables complexes Gaussiennes de variance  $\Gamma_{lk}$ . D'où  $Re[G_{lk}]$  et  $Im[G_{lk}]$  sont des variables Gaussiennes de variance  $\Gamma_{lk}/2$  ou en déduit que

$$\begin{aligned} p(G_{lk}) &= p(Re[G_{lk}]) \times p(Im[G_{lk}]) = \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma_{lk}}} e^{-\frac{|Re[G_{lk}]|^2}{\Gamma_{lk}}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma_{lk}}} e^{-\frac{|Im[G_{lk}]|^2}{\Gamma_{lk}}} \\ &= \frac{1}{\pi\Gamma_{lk}} e^{-\frac{|G_{lk}|^2}{\Gamma_{lk}}} \end{aligned} \quad (1.37)$$

D'où la fonction de densité de probabilité du vecteur  $G_l$  est régie par l'expression (1.38):

$$P(G_l) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\pi \Gamma_{lk}} e^{-\frac{|G_{lk}|^2}{\Gamma_{lk}}} \quad (1.38)$$

Quand le récepteur a la connaissance exacte des caractéristiques du canal évanescent à multitrajets, le  $(p, q)^{ème}$  element de la matrice hermitienne  $F_l$  correspondant à la  $l^{ème}$  branche de diversité est explicitement donnée par :

$$F_{pq}^l = \sqrt{E_{\delta(p)} E_{\delta(q)}} \phi^l \left( (m(p) - m(q))F, (n(p) - n(q))T \right) \quad (1.39)$$

En pratique, les statistiques du canal de propagation ne sont pas précisément connues du récepteur, mais les paramètres  $B_d$  et  $T_m$  peuvent y être estimés par des techniques que nous n'aborderons pas dans ce mémoire.

### *simplification de la représentation du canal*

L'utilisation du modèle de canal telle que défini dans les paragraphes précédents peut amener à des traitements très complexes. En effet, le canal observé sur une branche de diversité est représenté par autant de vecteurs propres que le nombre  $N$  de symboles formant un bloc traité.

$$C_l = \sum_{k=0}^{N-1} G_{lk} B_{lk}$$

Cependant, nous savons que les paramètres  $\{G_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$  sont des variables aléatoires Gaussiennes de variance  $\{\Gamma_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$  ceci signifie que lorsque la valeur propre associée au vecteur propre est faible, le vecteur propre  $B_k$  ne contribue que faiblement à la représentation du canal  $C_l$ .

Les simulations que nous présenterons par la suite ont été réalisées pour des canaux dont nous avons choisi les paramètres tels que leur produit vaut  $1/64^2$ ,  $1/32^2$ ,  $1/16^2$ ,  $1/8^2$ . La figure 1.15 représente les valeurs cumulées des 50 premières valeurs propres des matrices d'autocorrélation de chacun de ces canaux. Cette figure nous montre que pour représenter le canal à 99.99% de sa puissance, il est suffisant de ne prendre en compte qu'un nombre limité de valeurs propres représenté dans le tableau 1.1:

$B_d T_m$	Nombre de valeurs propres
$1/64^2$	3
$1/32^2$	6
$1/16^2$	13
$1/8^2$	33

Tab 1.1 : nombre de valeurs propres suffisantes pour représenter le canal à 99.99% de sa puissance.

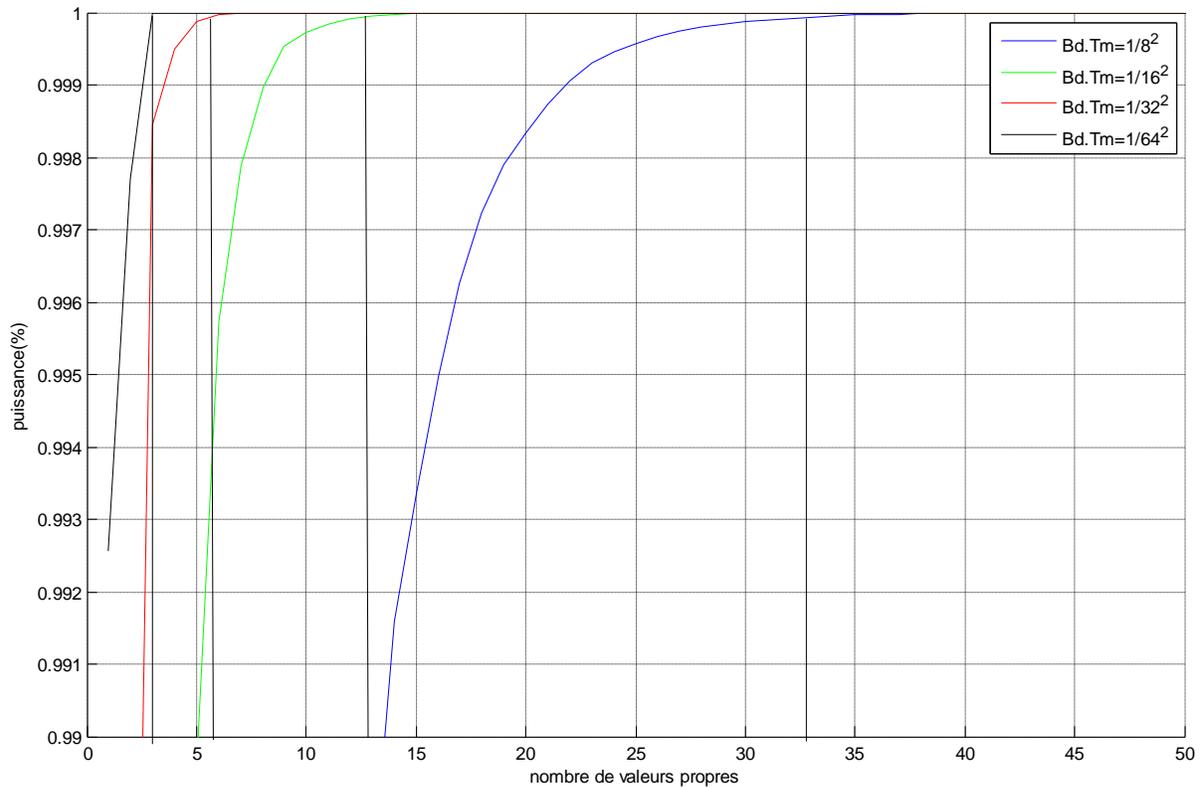


Fig. 1.15 valeurs propres cumulées pour les canaux de propagation à  $B_d T_m = 1/64^2, 1/32^2, 1/16^2, 1/8^2$ .

Il est donc très simple de simplifier le modèle du canal et ainsi de minimiser la complexité des techniques d'estimation de canal basées sur la représentation en vecteurs propres du canal que nous allons aborder dans la suite de ce mémoire.

## 1.6 Les codes convolutifs [13]

Les codes convolutifs sont des codes qui ont l'avantage d'améliorer les performances du système par un gain de codage. Ils consistent à introduire dans une chaîne binaire, ou de symbole à transmettre, une forme de redondance logique pour réduire les effets de bruit. C'est une logique combinatoire constituée de générateurs linéaires de fonctions algébriques.

### 1.6.1 Catégories de codes convolutifs

Un codeur convolutif est constitué de registre à décalage binaires, il y a plusieurs catégories de codes convolutifs.

#### a. Code convolutif systématique (*systematic convolutional codes*)

Les codes convolutifs systématiques dont les mots de code présentent la structure suivante :

$$C = [m_1 y_1 m_2 y_2 m_3 y_3 \dots m_i y_i \dots] \quad (1.40)$$

où  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_i, \dots$  représentent les symboles du message de source et  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_i, \dots$  les symboles utilisés pour le contrôle. On peut constater à chaque fois que l'un des bits de sortie est identique au bit d'entrée.

**Exemple :** Pour la figure 1.16  $m_i$  est identique à la source et

$$y_i = m_i + m_{i-1} + m_{i-3} \quad (1.41)$$

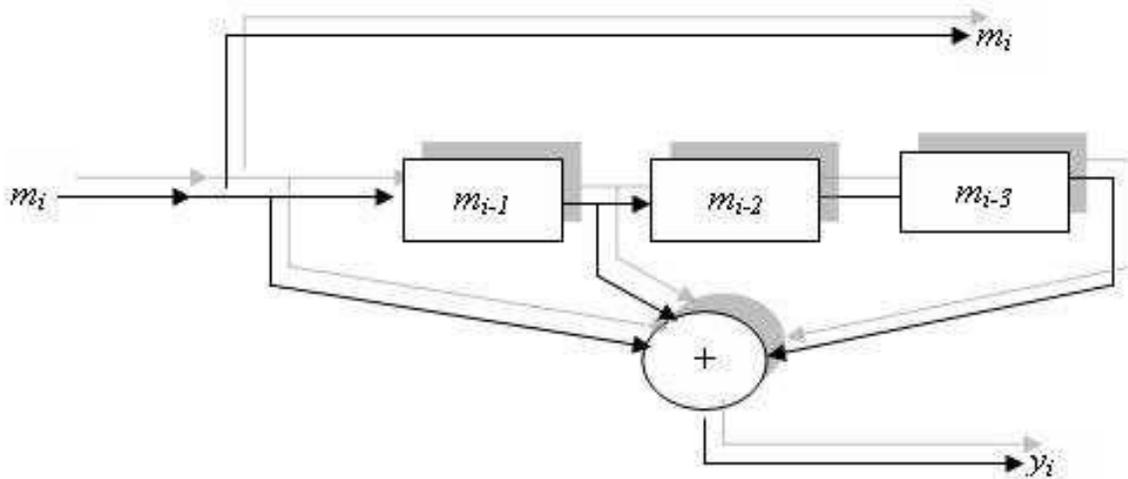


Fig. 1.16 circuit de code convolutif systématique de mémoire d'ordre 3 et de rendement 1/2.

**b. Code convolutif non systématique (NCS : non systematic convolutional codes)**

Les codes convolutifs non systématiques sont caractérisés par un mélange entre les symboles du message de source et les symboles de contrôles. Le mot de code a dans ce cas la structure suivante :

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_i \ \dots] \quad (1.42)$$

Les codes convolutifs présentent l'avantage en comparaison avec les codes systématiques de fournir plus d'information sur les bits du message au travers de plusieurs bits ou symboles codés. Ce qui facilite à priori d'avantage la correction des erreurs. Cependant, en pratique, on constate que les codes non systématiques ont les mêmes performances que les codes systématiques.

**Exemple :** Pour la figure 1.17 le code est donné par :

$$\begin{cases} c_{i,1} = m_i + m_{i-2} \\ c_{i,2} = m_i + m_{i-1} + m_{i-2} \end{cases} \quad (1.43)$$

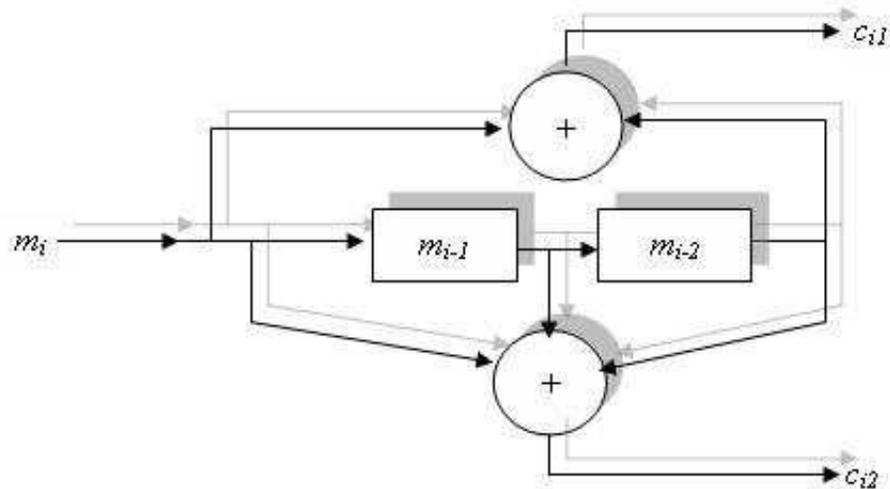


Fig. 1.17 circuit de code convolutif non systématique de mémoire d'ordre 3 et de rendement 1/2.

### c. Code convolutif récursifs (Recursive Convolutional Code)

Dans un codeur récursif, la séquence qui passe dans les registres à décalage est alimentée par le contenu de ces registres. Dans le cadre des études sur les turbo-code, les codes systématiques récursifs utilisés en concaténation parallèle présentent la particularité de pouvoir atteindre la limite de Shannon, nous en donnons un exemple dans la figure 1.18

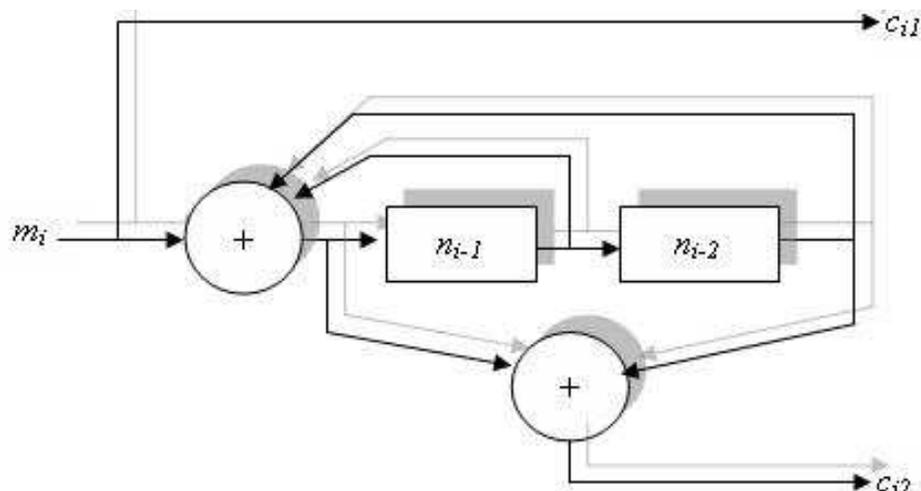


Fig. 1.18 codeur convolutif systématique récursif (RSC) de mémoire d'ordre 2 et de rendement 1/2

### d. Code convolutif non récursifs

Dans un codeur convolutif non récursif, la séquence qui alimente les registres à décalage est fonction essentiellement des bits issus de la source.

### 1.6.2 Representation des codes convolutifs

Plusieurs méthodes sont utilisées pour représenter les codes convolutifs. On peut les regrouper en deux. Il s'agit de la forme algébrique utilisant le polynôme générateur ou de la matrice génératrice ou encore de la forme graphique et enfin de la représentation en treillis.

Si le message de la source est noté  $m$  et le message codé  $c$ , l'opération de codage revient au produit de convolution.

$$c = m * g \quad (1.44)$$

où  $g$  est appelé polynôme générateur du code.

Un code peut donc être caractérisé par un polynôme qui engendre le mot codé. Il est baptisé polynôme générateur et noté  $g(x)$ . Le plus souvent, le message codé est obtenu par le produit entre le polynôme associé au message et le polynôme générateur.

Ceci s'applique généralement lorsqu'il s'agit d'une convolution discrète. Dans certain cas comme celui des codes systématiques, le code peut s'obtenir par le reste d'une division.

On exprime le message binaire de taille  $K$  à l'entrée du codeur sous la forme d'un polynôme de degré  $K-1$

$$m(D) = m_0 + m_1D + m_2D^2 + \dots + m_jD^j + \dots + m_{K-1}D^{K-1} \quad (1.45)$$

Pour un codeur  $(N, K)$  où  $N$  désigne la taille de l'information codée, le degré du polynôme générateur est  $M=N-K$ , soit :

$$g(D) = g_0 + g_1D + g_2D^2 + \dots + g_jD^j + \dots + g_{N-K-1}D^{N-K-1} \quad (1.46)$$

Le message codé des bits suivant s'obtient par  $K$  décalages à chaque fois du polynôme générateur au fur et à mesure à l'entrée des bits

$$\begin{aligned} g &= g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{N-K-1} \ 0 \dots 0 \\ &= 0 \ \dots 0 \ g_0 \ g_1 \ \dots \ g_{N-K-1} \ 0 \ \dots 0 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (1.47)$$

On peut également passer à la forme matricielle en assimilant  $m$  et  $g$  à des matrices.

$$\begin{aligned} m &= [m_0, m_1, m_2, \dots, m_{K-1}] \\ g &= [g_0, g_1, \dots, g_{N-K-1}] \end{aligned} \quad (1.48)$$

Pour une séquence donnée la matrice génératrice équivalente à (1.47) se présente sous forme.

$$\begin{pmatrix} g_0 & g_1 \dots g_{N-K-1} & 0 & \dots \\ 0 \dots & g_1 \dots g_{N-K-1} & g_{N-K-1} & 0 \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & g_{N-K-1} \end{pmatrix} \tag{1.49}$$

La forme graphique comprend les schémas de circuits déjà utilisés aussi dans les figure 1.15, figure 1.16 et figure 1.17 puis le diagramme des états de transition et la représentation en treillis qui sera développée dans la sous section suivante. Nous allons juste donner un exemple pour le diagramme des états de transition d'un codeur convolutif dans ce paragraphe. Le cas du treillis fera l'objet du paragraphe suivant.

Considérons le codeur convolutif systématique récursif (5.7) de la figure 1.19.

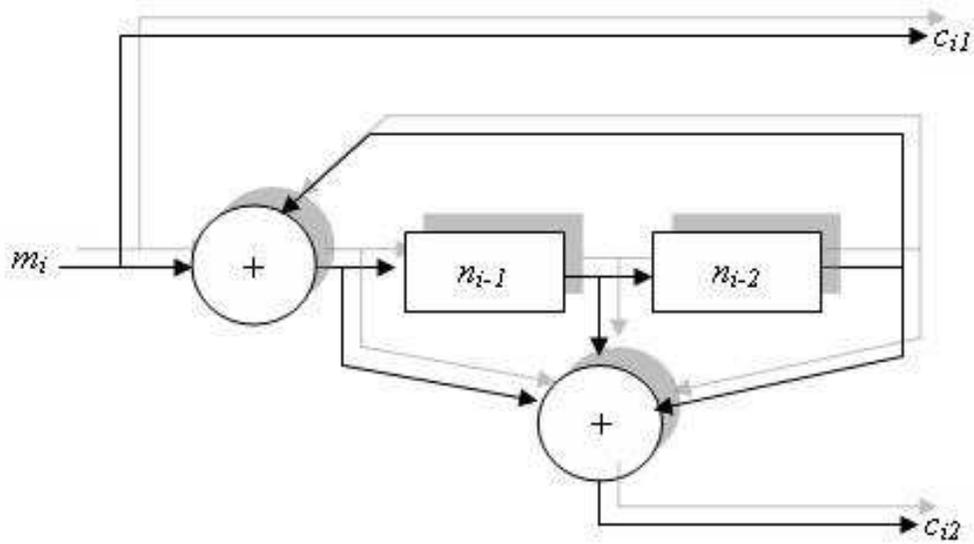


Fig. 1.19 codeurs convolutif systématiques récursifs (5,7)

Les valeurs prises par  $n_{i-1}$  et  $n_{i-2}$  révèlent l'état courant du codeur

$$\begin{cases} c_{i,1} = m_i \\ c_{i,2} = (m_i + n_{i-2}) + n_{i-1} + n_{i-2} \end{cases} \tag{1.50}$$

On peut résumer le comportement du codeur par la figure (1.20) :

$S_i = 00$			$S_i = 01$		
$C_{i,1}$	$S_{i+1}$	$C_{i,2}$	$C_{i,1}$	$S_{i+1}$	$C_{i,2}$
0	00	0	0	10	0
1	10	1	1	00	1

$S_i = 10$			$S_i = 00$		
$C_{i,1}$	$S_{i+1}$	$C_{i,2}$	$C_{i,1}$	$S_{i+1}$	$C_{i,2}$
0	01	1	0	11	1
1	11	0	1	01	0

Fig. 1.20 entrées/ sorties du codeur convolutif systématique récursif (5,7)

Ces différents comportements sont aussi résumés par le diagramme suivant appelé diagramme des états.

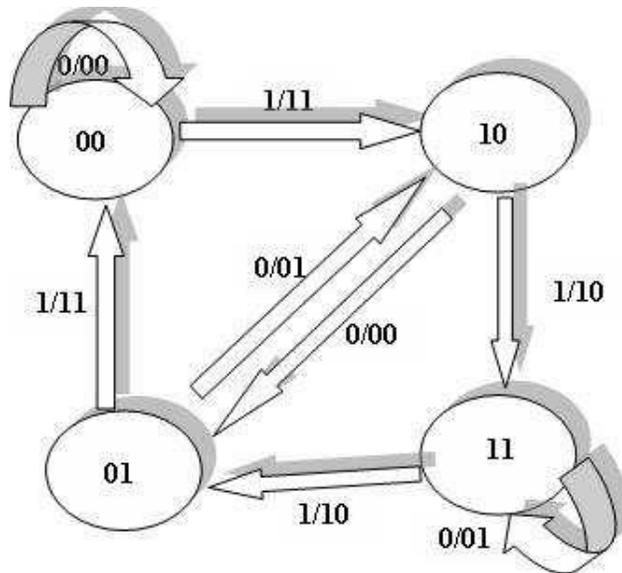


Fig. 1.21 diagramme des états correspondant à la figure 1.19

Ces différentes représentations sont complémentaires d'un point de vue illustration mais de toutes, la représentation en treillis qui tient compte du temps de fonctionnement périodique du codeur est la plus utilisée. La performance de ces codes est généralement déterminée par leurs complexités et le nombre de séquences permettant un écart appréciable en termes de distance euclidienne. Nous allons présenter dans la suite le treillis général utilisé dans les systèmes SISO appelés communément modulation codées en treillis ou treillis-coded modulation (TCM).

### 1.6.3 Treillis

Plusieurs codeurs convolutifs représentés par le treillis figurent dans la littérature. On y associe le diagramme des états. Pour représenter le code en treillis ou faire son diagramme des états, on a recours à la logique combinatoire et les différents états possibles du codeur sont déterminés par les bits à l'entrée du codeur et par l'état de ce même codeur à l'instant d'échantillonnage précédent. A chaque fois, l'état du codeur change en fonction des bits qui entrent. Ce sont ces bits qui déterminent le nouvel état du codeur. Ainsi le codage de la figure 1.19 peut être illustré par ce treillis élémentaire (fig. 1.22).

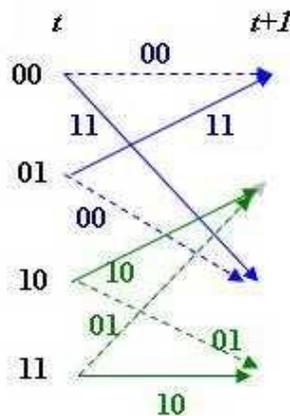


Fig. 1. 22 treillis élémentaire

Les lignes caractérisent les différents états possibles du codeur et les segments correspondent aux transitions d'états et chaque transition est accompagnée d'une émission de symboles ou de bits spécifiques à la configuration des symboles à l'entrée. Dans la représentation ci-dessus, les pointillés correspondent à la présence d'un bit 0 à l'entrée du codeur alors que le trait plein représente le bit 1 à l'entrée du codeur. Les différents symboles émis sont utilisés de manière équitable. Dans le souci de garantir l'efficacité du codeur, il est préférable que les transitions issue d'un même état ou celles qui aboutissent à un même état aient des séquences aussi différents que possible. Cela permettra d'accroître la distance euclidienne entre celles-ci. L'encodage toujours commence par l'état 0 dans la plupart des schémas proposés. Il se termine aussi par cet état dans le souci d'augmenter toujours les performances du codeur. Toutefois on peut se passer de la contrainte de terminer dans l'état tout à zéro pour éviter les bits supplémentaires qu'il faudrait introduire dans le système pour ramener le codeur à l'état tout à zéro.

Pour obtenir l'ensemble des séquences codées possibles dans une transmission comportant  $X$  bits ou symboles, on a recours à une représentation en arbre qui est un assemblage des treillis élémentaires.

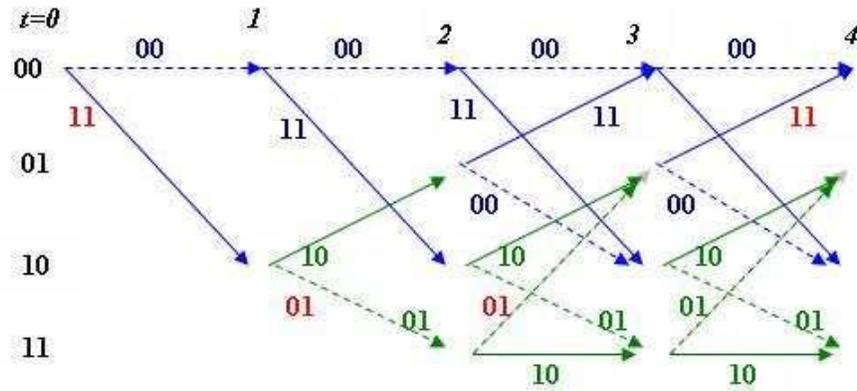


Fig. 1.23 représentation en treillis

Supposons que le codage en treillis comporte  $I$  états,  $2^I$  branches émanant de chaque état. La modulation utilisée a une efficacité spectrale d'ordre  $n$ .

La séquence codée correspondant au train binaire 1 0 0 1 peut être facilement identifiée sur la figure sachant que le codeur est systématique, le premier bit correspond toujours au bit d'information. La séquence codée serait : 11 01 01 11.

#### 1.6.4 Décodage des codeurs convolutifs

Le décodage se fait en utilisant l'algorithme de viterbi ou un décodeur MAP [13] pour apporter quelques corrections aux symboles estimés sur la base du maximum de vraisemblance ou autre méthode jugée opportune. Dans notre travail on utilise l'algorithme de Bahl [14], ce dernier permet de réaliser l'opération d'égalisation et de décodage conjointement.

### 1.7 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté les modèles classiques d'un signal OFDM. Nous nous intéresserons particulièrement dans la suite de ce mémoire à une modélisation en "treillis" du signal OFDM, permettant de considérer le signal OFDM reçu par blocs temps-fréquence de symboles, chaque symboles étant affecté par un canal multiplicatif et par un bruit additif.

Nous avons introduit une nouvelle modélisation du canal de propagation basée sur la décomposition orthogonale de Karhunen-Loève de la matrice d'autocorrélation du canal permet de représenter un canal de propagation de manière très simple et grâce à un nombre relativement peu élevé de paramètres. Nous avons présenté encore les codes convolutifs qui seront étudié par la suite dans le troisième chapitre.

Dans le chapitre suivant, nous présentons une technique d'estimation de canal semi-aveugle basée sur le modèle aux vecteurs propres du canal.

## Chapitre 2

# Estimation de canal semi-aveugle au sens du Maximum a Posteriori

## 2.1. Introduction

Le canal de propagation vu par le récepteur peut non seulement varier de manière significative d'un bloc temps-fréquence à l'autre, mais également à l'intérieur d'un bloc lui-même. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur.

D'un point de vue physique, le caractère variable du canal peut être caractérisé, comme nous l'avons déjà vu, par le produit  $B_d.T_m$ . Plus ce produit est grand, plus le canal varie rapidement dans les domaines temporel et fréquentiel. De plus, d'un symbole à l'autre le canal est corrélé. Ceci proscrie l'utilisation du critère du maximum de vraisemblance, puisque sa mise en œuvre dans un tel problème reviendrait à réaliser une estimation du canal symbole par symbole qui ne tiendrait pas compte de la corrélation du canal entre deux symboles adjacents. Le critère du maximum a posteriori permet de tenir compte de cette corrélation, nous baserons notre estimation de canal sur ce critère.

## 2.2 État de l'art

Dans cette section, nous allons décrire les méthodes d'estimation de canal existantes dans des contextes OFDM. Ces méthodes peuvent être simplifiées par l'utilisation de modulations différentielles.

Une modulation numérique peut être qualifiée de différentielle ou de cohérente. L'utilisation d'une modulation différentielle permet de se passer d'estimer le canal puisque l'information est codée dans la différence de phase entre deux symboles consécutifs. Cette technique est couramment utilisée dans les systèmes sans fil puisqu'elle réduit considérablement la complexité du récepteur ne comportant pas d'estimateur de canal. La modulation différentielle par déplacement de phase (Differential Phase Shift Keying : DPSK) est utilisée dans la norme européenne Digital Audio Broadcast (DAB) [2]. Cette simplicité n'est évidemment pas dépourvue d'inconvénients, en effet la différence entre une modulation différentielle et une modulation cohérente en termes de performances est de l'ordre de 3 dB en canal Gaussien [15] et les modulations différentielles classiques ne permettent pas l'utilisation de constellations multi-amplitude. Bien qu'en général, ces méthodes n'en comportent pas, elles peuvent tirer parti de l'aide apportée par un estimateur de canal [15]. Il existe une alternative intéressante aux modulations cohérentes et différentielles classiques : les

modulations différentielles par déplacement d'amplitude et de phase (Differential Amplitude and Phase Shift Keying : DAPSK) [16], [17], [18], [19]. Elles présentent une efficacité spectrale bien supérieure aux modulations de phase classiques (MDP) puisque l'amplitude des symboles subit également un codage différentiel. Les modulations cohérentes permettent l'utilisation de constellations arbitraires et sont un choix évident pour les systèmes filaires où le canal ne varie que très peu avec le temps. Dans les systèmes sans-fil, l'efficacité spectrale des modulations cohérentes en font un choix intéressant lorsque le débit est très élevé, comme dans la norme digital video broadcast (DVB) [3], [20].

La conception d'un estimateur de canal repose fondamentalement sur deux problèmes :

- la quantité des symboles pilotes devant être transmise,
- la complexité de l'estimateur devant poursuivre correctement le canal.

Ces deux problèmes sont bien évidemment liés puisque les performances de l'estimateur dépendent de la quantité d'information pilote émise. Cependant, quelques méthodes récemment apparues n'utilisent aucune information pilote. Ces méthodes dites aveugles se basent sur l'utilisation de la cyclostationarité introduite par le préfixe cyclique [21], [22], [23], ou sur la méthode sous-espace [24] initiée dans [25]. Une dernière méthode proposée dans [26] réalise l'estimation aveugle de canal au sens du critère du Maximum de Vraisemblance sans aucune information sur les caractéristiques statistiques du canal.

La littérature contient aujourd'hui un grand nombre d'article portant sur les techniques semi-aveugle, utilisant des symboles pilotes multiplexés au signal transmis. Les symboles pilotes permettent d'obtenir par interpolation une estimation du canal sur l'ensemble des symboles transmis. Cette technique est appelée Modulation Assistée par des Symboles Pilotes (Pilot-Symbol Assisted Modulation - PSAM) et a été introduite pour des systèmes mono-porteuse par Moher et Lodge [27] puis analysée par Cavers [28]. Puisque, en OFDM, chaque sous-porteuse est soumise à un évanouissement non sélectif, la méthode PSAM peut être généralisée aux deux dimensions (temps-fréquence), où les pilotes sont placés à certaines positions du treillis OFDM temps-fréquence. L'estimation de canal est alors réalisée par une interpolation bidimensionnelle. Hoëher propose d'utiliser des filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) [29] pour cette interpolation et de séparer l'utilisation des corrélations temporelles et fréquentielles du canal. Cela représente un bon compromis entre la complexité et les performances. L'espacement des symboles pilotes pour la méthode PSAM pour des systèmes mono-porteuse a été étudié dans [28]. L'espacement optimal est proche du rythme d'échantillonnage de Nyquist, c'est à dire l'inverse de la largeur de bande de la fonction de covariance du canal. Ce résultat se généralise aux deux dimensions pour le treillis temps-fréquence de l'OFDM.

Utiliser une répartition dense des symboles pilotes dans la méthode PSAM signifie que le canal est sur-échantillonné, ceci implique que les méthodes d'estimation à réduction de rang [30] peuvent être efficaces. Ce type d'estimateur à faible complexité projette les échantillons observés sur un espace de plus faible dimension et réalise l'estimation dans ce sous-espace. En sur-échantillonnant le canal, en plaçant les symboles pilotes proches les uns des autres, les

observations se trouvent essentiellement dans un sous-espace et les estimateurs à réduction de rang sont très efficaces.

Dans ce qui suit, nous allons présenter des estimateurs de canal utilisant une information pilote. La littérature s'est beaucoup étoffée depuis une vingtaine d'années concernant l'estimation de canal pour les systèmes OFDM. L'ensemble des méthodes présentées ci-après ne constitue pas un état de l'art exhaustif mais représente l'ensemble des grandes familles d'estimateurs de canal. Toutes les grandes techniques et critères d'estimation ont été utilisés pour l'estimation de canal OFDM. Nous verrons cependant que très peu de ces techniques se sont soucies de prendre en compte à la fois les sélectivités temporelle et fréquentielle du canal de propagation.

### 2.2.1. Estimation de canal au sens du critère des moindres carrés (MC)

La méthode d'estimation de canal la plus simple, lorsque les symboles émis sont connus, est l'estimation au sens des Moindres Carrés. Dans ce cas, le facteur de gain du canal s'exprime simplement par (2.1)

$$\hat{c}_{MC}(k, l) = \frac{y_{k,l}}{a_{k,l}} \quad (2.1)$$

$y_{k,l}$  étant l'échantillon du  $l^{\text{ème}}$  symbole OFDM reçu sur la  $k^{\text{ème}}$  porteuse, et  $a_{k,l}$  le symbole émis (pilote ou démodulé) correspondant. On rencontre deux grandes familles d'estimateurs basés sur les MC dans la littérature. La première est composée d'estimateurs avec retour de décision (ces méthodes sont présentées dans le paragraphe des estimateurs avec retour de décision), la deuxième famille d'estimateurs MC concerne des systèmes pour lesquels l'information pilote est répartie dans l'ensemble de l'espace temps-fréquence du signal OFDM. Ce type d'estimateurs réalise une interpolation soit fréquentielle [31], [32], soit bidimensionnelle [33] de l'estimation MC réalisée au niveau des symboles pilotes à l'ensemble des symboles de donnée.

### 2.2.2 L'estimateur MC modifié (MC-M)

Nous étudions, dans cette partie, une méthode pour améliorer la précision de l'estimateur à moindres carrés (MC).

L'estimateur de canal MC a une structure très simple. Cependant, il souffre d'une grande dégradation dans la précision de l'estimation comparée à l'estimateur de canal par le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM). Cette méthode transfère la réponse impulsionnelle du canal à partir du domaine fréquentiel au domaine temporel et approxime les trajets multiples de faible énergie par des zéros. La méthode utilisée aide à supprimer l'influence de bruit et à améliorer la précision de l'estimation [34, 35, 36].

La méthode proposée dans cette section est basée sur le fait que la plupart des composants significatifs des trajets dans la réponse impulsionnelle discrète du canal sont concentrés sur un intervalle de temps qui est beaucoup plus petit que la longueur de la trame OFDM. Puisque le bruit AWGN est identiquement distribué sur toute la bande, les composants qui ont une grande énergie sont plus fiables que ceux avec une faible énergie. Par

conséquent, exclure les trajets non-fiables aidera à améliorer la précision de l'estimation. Nous récapitulons cette méthode dans les étapes suivantes :

1. Estimer initialement le canal grâce à l'information pilote, comme mentionné dans la section précédente.
2. Obtenir la réponse impulsionnelle discrète du canal dans le domaine temporel  $\hat{c}(n)$ , par la transformée de Fourier inverse (IFFT).
3. Ignorer les trajets dont les retards excèdent le plus grand retard de canal, ce qui peut être exprimé comme :

$$\hat{c}(n) = \begin{cases} \hat{c}(n) & n \leq \tau_{max} \\ 0 & n > \tau_{max} \end{cases} \quad (2.2)$$

4. Estimer le canal au domaine fréquentiel par l'application de la transformée de Fourier FFT sur le signal  $\hat{c}(n)$ .

### 2.2.3 Estimation de canal par le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM)

L'estimateur linéaire à erreur quadratique moyenne minimale (EQMM) minimise l'erreur quadratique moyenne entre le canal réel et estimé en utilisant la corrélation fréquentielle du canal. Ceci est réalisé par une transformation linéaire optimale appliquée à l'estimateur MC décrit dans la section précédente.

Le critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Minimale est très souvent rencontré dans la littérature concernant l'estimation de canal pour des systèmes OFDM. Ce critère est utilisé pour deux grandes familles d'estimateurs. La première concerne l'application la plus connue du critère EQMM, le filtrage de Wiener. Les estimateurs de la deuxième famille réalisent un filtrage passe-bas au sens de l'EQMM dans un domaine de transformation obtenu par transformée de Fourier. Dans ce paragraphe, nous ne présentons que les techniques basées sur l'EQMM directes.

L'estimateur linéaire optimal pour les systèmes OFDM au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) est le filtre de Wiener 2-D (temps-fréquence) [37], [38]. La complexité de cet estimateur est souvent trop grande pour une utilisation pratique. Des estimateurs sous-optimaux de plus faible complexité ont, par conséquent, été présentés dans la littérature [39], [40]. Il existe deux classes d'estimateurs, les estimateurs bidimensionnels et les estimateurs séparables. L'utilisation de filtres séparables est une méthode courante pour réduire la complexité en termes de traitement de signal multi-dimensionnel [41]. Ici, les atténuations du canal estimées au sens des moindres carrés (MC) sont notées par (2.1) :

$$\hat{c}_{MC}(k, l) = \frac{y_{k,l}}{a_{k,l}}$$

où  $y$  est le vecteur des données reçues et  $X$  le vecteur des symboles transmis. L'estimation finale des facteurs de gain du canal est réalisée par combinaison linéaire des  $\hat{c}_{MC}(k, l)$ , où les coefficients de la combinaison linéaire dépendent de la structure de l'estimateur. L'estimateur au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne minimale linéaire  $\hat{c}_{EQMM}$  est donné par la relation (2.3) [42] :

$$\hat{c}_{EQMM} = R_{cc} (R_{cc} + \sigma_n^2 (X^H X)^{-1})^{-1} \hat{c}_{MC} \quad (2.3)$$

où  $R_{cc}$  est la matrice d'autocovariance de canal

L'estimateur EQMM donne de meilleure performance par rapport à l'estimateur MC particulièrement dans le cas de faibles SNR. L'inconvénient principal de cet estimateur est qu'il a une complexité très élevée. L'évaluation de l'inverse de  $R_{cc}$  et de  $XX^H$ ; implique l'inversion de matrices de dimension  $N \times N$  qui complique le calcul de cet estimateur chaque fois que les données dans  $X$  changent.

#### 2.2.4 L'estimateur EQMM modifié (EQMM-M)

La complexité de l'estimateur EQMM peut être encore réduite en utilisant la décomposition en valeur singulière de la matrice d'autocorrélation  $R_{cc}$ . Par conséquent nous pouvons appliquer une réduction de rang et utiliser seulement les éléments les plus significatifs de  $R_{cc}$ . Cette simplification aura lieu aux dépens d'une petite réduction de performance.

Les estimateurs EQMM modifiés sont largement étudiés [43, 44, 45] pour réduire la complexité qui caractérise les modèles EQMM. Parmi eux, on s'intéresse à l'estimateur EQMM utilisant la décomposition en valeur singulière, qui combine les deux techniques de simplification suivantes :

1. La première simplification est de remplacer le terme  $(XX^H)^{-1}$  dans l'équation (2.3) avec son espérance  $E\{(XX^H)^{-1}\}$ . Assumant la même constellation de signal sur toutes les sous-porteuses et tous les points de la constellation équiprobables, on a :

$$E\{(XX^H)^{-1}\} = E\left\{\left|\frac{1}{X_k}\right|^2\right\} I_N \quad (2.4)$$

Définissant le rapport SNR moyen par :

$$\bar{\gamma} = \frac{E\{|X_k|^2\}}{\sigma_n^2} \quad (2.5)$$

Alors, dans l'équation (2.3) on peut faire l'approximation suivante :

$$\sigma_n^2 (XX^H)^{-1} \approx \frac{\beta}{\bar{\gamma}} I_N \quad (2.6)$$

où  $\beta$  est une constante qui dépend de la constellation du signal. Elle est donnée par :

$$\beta = \frac{E\{|X_k|^2\}}{E\{|1/X_k|^2\}} \quad (2.7)$$

2. La deuxième simplification consiste en l'utilisation de la décomposition en valeur Singulière SVD de la matrice  $R_{cc}$  :

$$R_{cc} = UDU^H \quad (2.8)$$

où  $U$  est une matrice unitaire contenant les vecteurs singuliers et  $D$  est une matrice diagonale contenant les valeurs singulières,  $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_{N-1} \geq 0$ . Sur sa diagonale.

Combinant les techniques de simplification précédentes, l'estimateur EQMM modifié est expliqué comme suit (fig.2.1 avec  $\hat{c}_{EQMM-M} = \hat{h}_i$ ). Le système détermine d'abord le rang de la matrice exigé par l'estimateur, dénoté par  $p$ , qui ne devrait pas être plus petit que  $L$ . Puis, on doit connaître la constellation du signal, la variance de bruit et la matrice d'autocovariance de canal  $R_{cc}$ .

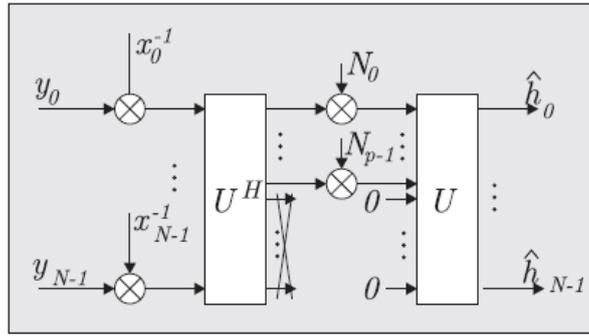


Fig. 2.1 - Schéma-bloc d'un estimateur de canal modifié de rang  $p$ .

Au récepteur, on calcule  $\beta, \bar{\gamma}$ , la matrice unitaire  $U$ , et les valeurs singulières  $d_k$ . On obtient ainsi une matrice diagonale  $D$  de taille  $N \times N$ , ses éléments sont donnés par :

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{d_k}{d_k + (\beta/\bar{\gamma})} & k = 0, 1, \dots, p-1 \\ 0 & k = p, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Par la prise en compte des  $p$  premières valeurs singulières correspondant aux valeurs les plus significatives de  $R_{cc}$ , la meilleure approximation de rang  $p$  de l'estimateur est :

$$\hat{c}_{EQMM-M} = UD_p U^H \hat{c}_{MC} \quad (2.10)$$

où  $D_p$  est une matrice de dimension  $p \times p$  donnée par le coin gauche supérieur de la matrice  $D$ . L'estimateur EQMM-M peut être interprété comme suit : d'abord projetant l'estimateur MC sur un sous-espace de petite dimension (aussi petit que  $L$ ). La complexité de l'estimateur EQMM-M est inférieure à celle de l'estimateur EQMM. Cependant, cet estimateur présente des erreurs dues à la partie du canal ignorée par le sous-espace choisi.

### 2.2.5 Estimation de canal par filtrage de Kalmann

Quelques techniques rencontrées dans la littérature se basent sur le filtrage de Kalmann. La première d'entre elle est proposée par Tufvesson et Maseng [47]. Il s'agit d'un filtrage de Kalmann classique estimant les paramètres du canal modélisé comme un processus auto-régressif (AR). Ce processus AR est utilisé pour représenter les variations des coefficients du canal d'un instant à l'autre. L'ensemble des fonctions de transfert à un instant donné s'écrivent :

$$\begin{aligned} c(k+1) &= \phi c(k) + v(k) \\ y(k) &= M(k)c(k) + e(k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

La matrice  $\phi$  est une matrice  $N \times N$  d'éléments

$$e^{-k_{AR} 2\pi f_d T_s} \quad (2.12)$$

Définissant le processus AR.  $T_s$  est la durée symbole incluant le temps de garde ou préfixe cyclique. La matrice de covariance du bruit blanc  $v(k)$  est  $R_1$ . Le vecteur  $y(k)$  contient la fonction de transfert mesurée,  $M(k)$  est un vecteur d'observation avec des 1 aux positions mesurées à l'instant  $k$  et  $e(k)$  est un bruit de mesure de matrice de covariance  $R_2$ . Le paramètre  $k_{AR}$  du processus est choisi pour ajuster la mémoire du modèle de canal. Les équations typiques de filtrage de Kalmann deviennent :

Condition initial :

$$\begin{aligned} P(0/-1) &= \delta I \\ \hat{c}(0/-1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Pour  $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned} \hat{c}(k/k-1) &= \phi \hat{c}(k-1) \\ p(k/k-1) &= \phi P(k-1)\phi^T + R_1 \\ K(k) &= p(k/k-1)M^T [M P(k/k-1)M^T + R_2]^{-1} \\ \hat{c}(k/k) &= \hat{c}(k/k-1) + K(k)[y(k) - M(k)\hat{c}(k/k-1)] \\ P(k/k) &= [I - K(k)M(k)]P(k/k-1) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$K(k)$  étant le vecteur filtre de Kalmann,  $P(k/k-1)$  la matrice de covariance de la prediction d'erreur et  $P(k/k)$  la matrice de covariance de l'estimation de l'erreur.

Deux autres méthodes [48], [49] utilisant le filtrage de Kalmann existent et sont présentées dans le paragraphe suivant, elles sont avant tous des méthodes d'estimation à retour de décision.

### 2.2.6 Estimations de canal avec retour de décision

Si le canal est slow fading, l'estimation de canal pour un bloc est utilisée pour égaliser le symbole OFDM suivant.

La plupart des techniques d'estimation avec retour de décision sont basées sur le critère MC. Le processus itératif de ces méthodes est initialisé par l'estimation d'un symbole OFDM contenant uniquement de l'information pilote, fournissant au récepteur une estimation MC du canal sur l'ensemble des porteuses. Cette première estimation est utilisée comme initialisation de l'estimateur à retour de décision utilisant cette estimation initiale pour égaliser le symbole OFDM suivant. Intervient alors un décodeur correcteur d'erreur [50] – pouvant être un décodeur SOVA [51] – permettant de décoder les données en fournissant une information sur la fiabilité des données décodées. Ceci permet d'évaluer à nouveau l'estimation du canal par la même technique des Moindres Carrés après recodage et remise en forme des données décodées.

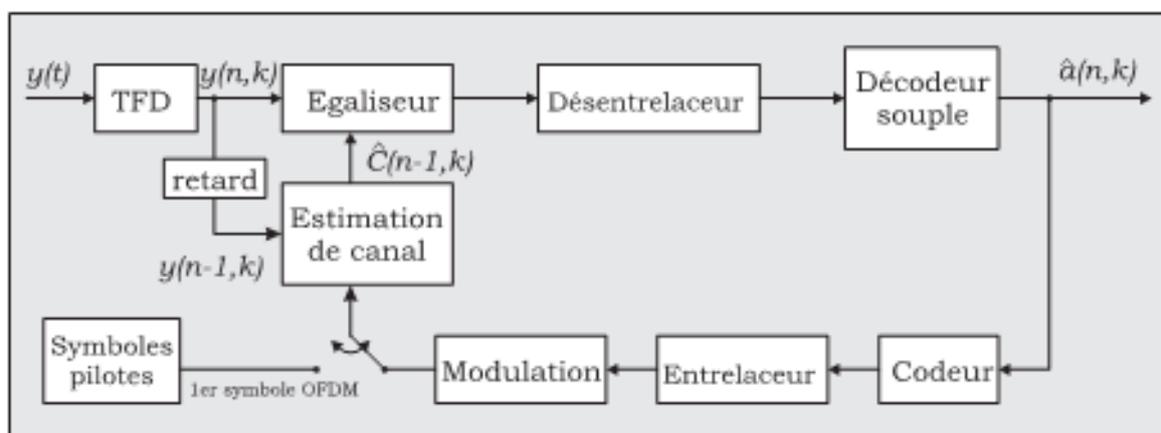


Fig.2.2 : principe des méthodes avec retour de décision

Le même procédé est utilisé dans [52] où l'estimation de canal est réalisée au sens des critères Zero-Forcing ou EQMM ou bien par un filtrage de Kalman [48]. Bullumulla [49] a également développé une méthode d'estimation de canal à retour de décision basée sur le critère du MAP dans laquelle les probabilités à posteriori sont calculées grâce au filtrage de Kalman.

Estimation de canal avec retour de décision suppose que les décisions sont correctes, pour les canaux fast-fading cette méthode provoque des pertes dans l'estimation.

### 2.2.7 L'interpolation

Dans l'estimation de canal basée sur le deuxième et troisième cas d'arrangement des pilotes, une technique efficace d'interpolation est nécessaire afin d'estimer le canal aux sous-porteuses de données en utilisant l'information sur le canal aux sous-porteuses pilotes.

L'interpolation est utilisée pour estimer le canal aux sous-porteuses de données, où le vecteur  $\hat{c}^{(p)}$  de longueur  $N_p$  est interpolé pour donner un vecteur  $\hat{c}$  de longueur  $N$  ( $N_p =$

$N/K_f$ ), sans utiliser la connaissance additionnelle des statistiques de canal. Les méthodes de l'interpolation sont récapitulées dans ce qui suit.

### a. Interpolation linéaire (LI)

L'interpolation linéaire a été étudiée dans et s'avère meilleure que l'interpolation par segments constants. La méthode LI utilisée pour estimer le canal aux sous-porteuses de données entre deux sous-porteuses pilotes  $\hat{c}^{(p)}(m)$  et  $\hat{c}^{(p)}(m+1)$  est donnée par :

$$\hat{c}(mk_f + l) = \hat{c}^{(p)}(m) + \frac{l}{K_f} (\hat{c}^{(p)}(m+1) - \hat{c}^{(p)}(m)), \quad 0 \leq l \leq K_f \quad (2.15)$$

### b. Interpolation du second ordre (SOI)

La méthode SOI s'exécute mieux que la méthode LI, où l'estimation de canal aux sous-porteuses de données est obtenue par la combinaison linéaire des trois estimations des sous-porteuses pilotes adjacentes. Le canal estimé par l'interpolation de second ordre est donné par :

$$\hat{c}(mk_f + l) = k_1 \hat{c}_p(m-1) + k_0 \hat{c}_p(m) + k_{-1} \hat{c}_p(m+1) \quad (2.16)$$

où

$$\begin{cases} k_1 = \alpha(\alpha - 1)/2, \\ k_0 = -(\alpha - 1)(\alpha + 1), \\ k_{-1} = \alpha(\alpha + 1)/2, \\ \alpha = \frac{l}{N}. \end{cases} \quad (2.17)$$

### c. Interpolation par splines cubiques (SCI)

La méthode SCI produit un polynôme continu entre les points de données (la fonction *spline* dans Matlab). Dans, il est démontré que l'interpolation par splines cubiques s'exécute mieux que l'interpolation linéaire, ce qui est également confirmé par nos résultats de simulation.

### d. Interpolation passe-bas (LPI)

La méthode LPI s'exécute en insérant des zéros dans la séquence originale  $\hat{C}^{(p)}$  et puis en appliquant un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie (FIR) (la fonction *interp* dans Matlab), qui permet aux données originales de passer sans changement. Cette méthode minimise l'erreur quadratique moyenne entre les points interpolés.

### e. Interpolation par filtrage dans un domaine de transformation

Ces techniques transforment le signal reçu ou bien une estimation préalable MC ou EQMM du canal vers un domaine intermédiaire dans lequel est réalisé un filtrage (fig.2.3 avec  $\hat{c}_i = \hat{h}_i$ ). La majorité des articles traitant de ce sujet utilisent la transformée de Fourier inverse pour créer leur domaine de transformation.

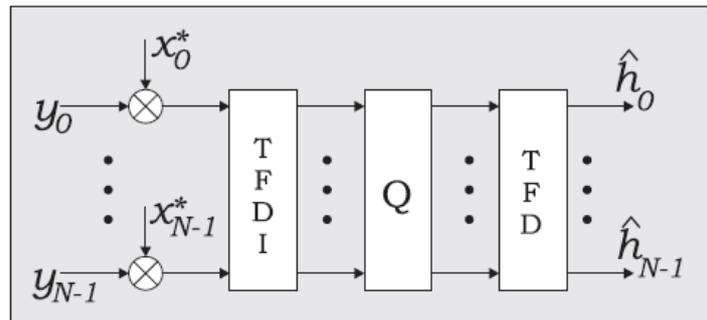


Fig.2.3 : Principe des méthodes d'interpolation par TFD

### *f. Domaine de transformation obtenu par la TFD bidimensionnelle*

Le principe de cette méthode est que le filtrage est réalisé dans l'espace de transformation à deux dimensions.

### *g. Autres domaines de transformation*

Zhao et Huang proposent d'utiliser le duo TFDI/TFD pour générer un espace de transformation, mais cet espace est obtenu dans [53] en utilisant tout d'abord la transformée de Fourier discrète. Ceci donne naissance à une représentation du canal dans un nouveau domaine de transformation qui est filtrée selon la puissance obtenue sur les pseudo-fréquences observées puis transformée à nouveau par la transformée de Fourier inverse.

Une autre méthode est basée sur le fait qu'un signal OFDM peut être généré par la transformée de Hadamard, ainsi l'estimation de canal peut être réalisée de manière similaire aux techniques basées sur la TFD, mais en utilisant la transformée de Hadamard.

## 2.3 Estimation de canal itérative basée sur le critère du Maximum a Posteriori

Dans le chapitre précédant, nous avons développé un nouveau modèle pour le canal de propagation, permettant de le représenter simplement. Nous nous baserons sur ce modèle pour l'estimation du canal et nous considérerons que les paramètres  $B_d$  et  $T_m$  sont connus du récepteur. Dans ce cas de figure, le critère semblant le plus approprié pour l'estimation des paramètres  $G_{lk}$  du canal est celui du Maximum a Posteriori.

### 2.3.1 Formulation du problème au sens du Maximum a Posteriori [54]

Les composantes du vecteur reçu sur la  $l^{\text{ème}}$  branche de diversité  $R_{mn}^l$  sont données par la relation (1.34) :

$$R_{mn}^l = C_{mn}^l A_{mn} + N_{mn}^l$$

Le vecteur représentant le canal – observé au  $l^{\text{ème}}$  capteur lors de la transmission d'un bloc de données temps-fréquence – peut s'exprimer par la relation (1.36) comme :

$$C_l = \sum_{k=0}^{N-1} G_{lk} B_{lk}$$

Le critère du Maximum a Posteriori est le plus adapté à l'estimation semi-aveugle du canal multi-trajets à évanouissements discret vu en sortie des branches de diversité lorsque les expressions des fonctions de densité de probabilité  $p(G^l)$  des paramètres du canal sont connues du récepteur. Pour l'estimation des caractéristiques du canal, certains symboles transmis sont fixés (symboles pilotes).

Le vecteur  $A$  normalisé correspondant à l'émission d'un bloc temps-fréquence est donc caractérisé par sa probabilité d'émission a priori  $p(A)$ : Étant donné le vecteur  $A$  transmis et la représentation du canal discret  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$ , et en considérant que le bruit est indépendant sur chacune des  $L$  branches de diversité du récepteur, on peut décrire les vecteurs  $\{R^l\}_{l=0}^{L-1}$  par la fonction de densité de probabilité conditionnelle :

$$p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1} | A, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) = \prod_{l=0}^{L-1} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \left| R_k^l - A \sum_{m=0}^{N-1} G_m^l B_{mk} \right|^2\right) \quad (2.18)$$

où  $B_{mk}$  est la  $k^{\text{ème}}$  composante du  $m^{\text{ème}}$  vecteur de la base orthonormale  $\{B_m\}_{m=0}^{N-1}$ . L'estimée au sens du Maximum a Posteriori  $\{\hat{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$  du canal multi-trajets discret  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$  correspondant au bloc temps-fréquence reçu est donnée par (2.19) :

$$\{\hat{G}^l\}_{l=0}^{L-1} = \arg_{\{G^l\}_{l=0}^{L-1}} \max p(\{G^l\}_{l=0}^{L-1} | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}) \quad (2.19)$$

Cette technique d'estimation maximise la fonction de densité de probabilité conditionnelle a posteriori  $p(\{G^l\}_{l=0}^{L-1} | \{R^l\}_{l=0}^{L-1})$ . Résoudre directement cette équation est

inextricable. La solution peut être atteinte itérativement en mettant en œuvre l'algorithme EM (Expectation Maximization).

Dans la grande majorité des méthodes basées sur l'EM dans la littérature, l'algorithme EM est combiné au critère du Maximum de Vraisemblance (Maximum Likelihood : ML). Nous l'utiliserons pour résoudre un problème posé au sens du critère du Maximum a Posteriori.

### 2.3.2 L'algorithme « Expectation – Maximization »

L'algorithme EM est connu des statisticiens depuis longtemps, il a largement été présenté et analysé dans les travaux de Dempster, Laird, Rubin [54] et Wu [55]. Hors du contexte statistique, l'algorithme EM a été mis en œuvre par Snyder [56] pour l'estimation au sens du maximum de vraisemblance de la concentration de radioactivité dans la tomographie d'émission des positrons, ainsi que par Feder [57] pour extraire des estimées de paramètres provenant de signaux superposés. L'algorithme EM a fait l'objet de nombreuses études appliquées dans le domaine des systèmes de communication dont les principaux sont Poor [58], Kaleb [59], Georgiades et al. [60] [61][62], Zabin et al. [63], Modestino [64], Lavielle [65] et Moulines.

Dans notre problème, l'algorithme EM estime itérativement les  $L$  vecteurs  $\{\hat{G}^l\}_{l=0}^{L-1}$  de telle façon de garantir à chaque itération une croissance monotone de la fonction de densité de probabilité conditionnelle  $p(\{G^l\}_{l=0}^{L-1} | \{R^l\}_{l=0}^{L-1})$ . Cette croissance monotone est réalisée via la maximisation de la fonction auxiliaire, basée sur la mesure de Kullback-Leibler, dépendant des paramètres courants  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$  et des nouveaux paramètres  $\{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1}$  :

$$Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1}) = \sum_A \left[ (\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) (\log p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1})) \right] \quad (2.20)$$

où la somme est réalisée sur tous les vecteurs de données susceptibles d'être transmis sur le bloc temps-fréquence considéré.

Les deux théorèmes suivant sont fondamentaux pour expliquer le comportement général de l'algorithme EM :

1. La croissance de la fonction auxiliaire implique la croissance de la probabilité a posteriori (voir l'annexe A) :

$$Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1}) \geq Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) \quad (2.21)$$

implique que

$$p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}) \geq p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \quad (2.22)$$

L'inégalité est stricte à moins que, quels que soient les symboles composant le vecteur signal émis  $A$ ,

$$p\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}\right) = p\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right) \quad (2.23)$$

2. Un paramètre  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$  est un point critique de  $p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1})$  si et seulement s'il est un point fixe de  $Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1})$  (voir l'annexe A).

Etant donnés les  $L$  vecteurs reçus  $\{R^l\}_{l=0}^{L-1}$  ; l'algorithme EM est initialisé avec une première estimation  $\{G^{l(0)}\}_{l=0}^{L-1}$  des vecteurs  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$ . L'évolution de l'estimation  $\{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}$  à la nouvelle estimation  $\{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}$  est effectuée via la fonction auxiliaire  $Q$  suivant les deux phases suivantes:

1. Phase Expectation : Calcul de  $Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1})$ ,  $\{G^l\}$  étant fixé et  $\{G^l\}$  variable.
  2. Phase Maximization : Recherche de la nouvelle estimation  $\{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}$  qui maximise la fonction  $Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1})$  en fonction de  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$ .
- Le premier théorème (2.21) garantit donc que les ré-estimées  $\{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}$  et  $\{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}$  ont pour propriété :

$$p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}) \geq p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \quad (2.24)$$

De plus, il peut être montré [66] que sous certaines conditions,  $Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1})$  la fonction auxiliaire, possède un maximum global unique, dépendant de  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$  et que ce maximum est le seul et unique point critique, où un point critique de  $Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1})$  est caractérisé par (2.25) :

$$\nabla Q(\{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) = 0 \quad (2.25)$$

$\nabla$  représentant le vecteur gradient.

- Le deuxième théorème garantit que la séquence d'estimées produit une croissance monotone de  $p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1})$  jusqu'à ce que les estimées atteignent un point critique de cette probabilité. La ré-estimation itérative continue jusqu'à ce que la probabilité  $p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1})$  obtenue à la  $D^{\text{ème}}$  itération atteigne un seuil.

En général, la fonction auxiliaire présente plusieurs maxima globaux. Ceci mène à une ambiguïté dans l'estimation au Maximum a Posteriori des facteurs de gain du canal multi-trajet discret. Ce problème peut être évité par l'utilisation de symboles connus du récepteur. Quoi qu'il en soit, ceci est insuffisant, puisque la fonction auxiliaire présente aussi plusieurs maxima locaux pouvant être atteints par l'algorithme EM au lieu du maximum global. Pour s'affranchir de ce deuxième problème, l'estimation initiale  $\{G^{l(0)}\}_{l=0}^{L-1}$  doit être calculée avec beaucoup de soin en utilisant des symboles connus du récepteur : les symboles pilotes.

### 2.3.3 Expression analytique de l'estimateur

Soit  $\Omega$  l'alphabet dans lequel chaque symbole normalisé du bloc temps-fréquence prend sa valeur. L'expression de la même composante de l'estimation  $\{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}$  correspondant à la  $l^{\text{ème}}$  branche de diversité est explicitement donnée par (voir annexe B) :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \sum_{k=0}^{N-1} R_k^l \left( \sum_{A \in \Omega} A p(A_k = A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \right)^* B_{mk}^* \quad (2.26)$$

où le facteur  $w_m^l$  répond à la définition suivante (voir annexe B) :

$$w_m^l = \frac{1}{1 + N_0/\Gamma_m^l} \quad (2.27)$$

Les coefficients de pondération  $w_m^l$  dépendent de la  $m^{\text{ème}}$  valeur propre de la matrice de covariance hermitienne  $F^l$  (qui prend en compte la puissance moyenne  $\phi^l(0)$  du  $l^{\text{ème}}$  trajet ainsi que l'étalement Doppler  $B_d$  et les énergies transmises  $E_{\delta(k)}$ ,  $\delta(k) \in S_p \cup S_D$  associées aux symboles de donnée et aux symboles pilotes) et de la variance du bruit  $N_0$ . On définit  $D_{\delta(k)}$  la valeur prise par le symbole pilote  $A_{\delta(k)}$ ,  $\delta(k) \in S_p$ . Puisque tous les symboles pilotes sont connus du récepteur, on a :

$$p(A_{\delta(k)} = D_{\delta(k)} | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) = 0 \text{ Pour } \delta(k) \in S_p \quad (2.28)$$

En conséquence, l'expression de  $G_m^{l(d+1)}$  précédente peut se ré-écrire :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left( \sum_{\delta(k) \in S_D} R_{\delta(k)}^l \left( \sum_{A \in \Omega} A p(A_k = A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \right)^* B_{mk}^* \right. \\ \left. + \sum_{\delta(k) \in S_p} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)} B_{\delta(k)m}^* \right) \quad (2.29)$$

Au démarrage de l'algorithme EM, le récepteur n'a aucune connaissance des valeurs des données transmises dans un bloc temps-fréquence. En conséquence, pour la détermination de l'initialisation  $\{G^{l(0)}\}_{l=0}^{L-1}$ , il peut utiliser les probabilités conditionnelles uniformes

$$p(A_k = A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \quad (2.30)$$

pour chacun des symboles inconnus. C'est pourquoi, la  $m^{\text{ème}}$  composante de l'initialisation correspondant au  $l^{\text{ème}}$  capteur est explicitement donnée par (2.31) :

$$G_m^{l(0)} = w_m^l \sum_{\delta(k) \in S_p} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)}^* B_{\delta(k)m}^* \quad (2.31)$$

Cette relation étant, au passage, vraie pour n'importe quel type de modulation et ne nécessite pas l'hypothèse enveloppe constante sur la modulation employée.

### 2.3.4 Cas particuliers

En utilisant la loi de Bayes, il est possible de transformer l'expression précédente de  $G_m^{l(d+1)}$ . Pour une modulation MDP-2 (voir annexe C) on a :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left( \sum_{\delta(k) \in S_D} R_{\delta(k)}^l \tanh \left[ \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right\} \right] B_{\delta(k)m}^* + \sum_{\delta(k) \in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)}^* B_{\delta(k)m}^* \right) \quad (2.32)$$

et pour une modulation MDP-4 (voir annexe C) on a :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left( \sum_{\delta(k) \in S_D} R_k^l \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh \left[ \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right\} \right] + \frac{j}{\sqrt{2}} \tanh \left[ \sqrt{2} \operatorname{Im} \left\{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right\} \right] \right)^* B_{\delta(k)m}^* + \sum_{\delta(k) \in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)}^* B_{\delta(k)m}^* \right) \quad (2.33)$$

où  $\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}$  est défini par (voir annexe C):

$$\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)}^l \left( \sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m} \right)^* \quad (2.34)$$

## 2.4 Résultats

Les résultats que nous présentons dans cette section ont été obtenus par des simulations de la méthode EM dans plusieurs contextes de propagations. Nous avons comparé notre algorithme à trois méthodes d'estimation de canal rencontrées dans les littératures.

### 2.4.1 Algorithmes de comparaison

Trois méthodes ont été choisies pour comparer les performances de notre algorithme à celles des méthodes connues et classiquement utilisées. Nous avons tenu à comparer notre algorithme d'estimation de canal à des méthodes bloc, pouvant donc fonctionner de manière bidimensionnelle et ne pas utiliser des méthodes réalisant seulement une interpolation temporelle fréquentielle.

Les deux premières méthodes élues sont basées sur le critère des moindres carrés (MC) et réalisent une interpolation linéaire de l'information fournie par les symboles pilotes contenus dans le bloc temps-fréquence traité. La troisième méthode est moins classique et repose sur le principe du filtrage dans un domaine de transformation, ici créé par la transformée de Fourier.

### a. Algorithme de comparaison MC-1

L'algorithme MC-1 utilise l'estimation MC du canal au niveau des symboles pilotes pour réaliser une interpolation bidimensionnelle sur l'ensemble des symboles de donnée en considérant que le canal peut être assimilé à un plan constant sur chacun des blocs temps-fréquence considérés. Le canal est modélisé par le polynôme de degré 0 suivant :

$$f_{MC-1}(m, n) = \alpha \quad (2.35)$$

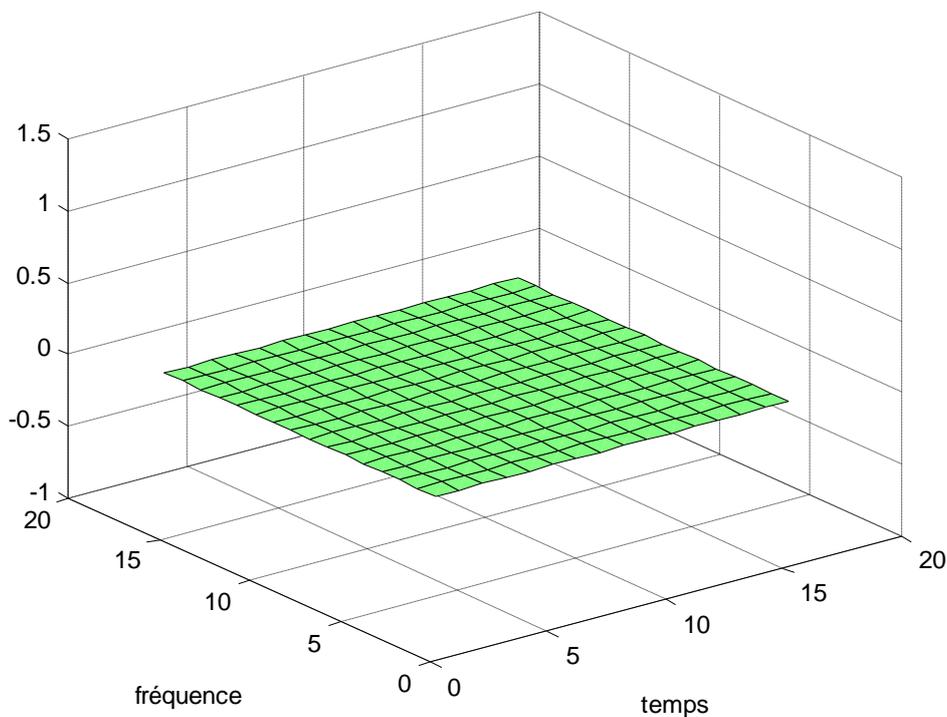


Fig. 2.4 : Norme du canal fourni par la méthode MC-1

Dans un premier temps, le canal est estimé au sens des MC au niveau des symboles pilotes et on note  $\hat{c}_{MC}(m_p, n_p)$  l'estimation du canal correspondant au  $p^{\text{ème}}$  symbole pilote et

$$\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) = \frac{y_{m_p n_p}}{a_{m_p n_p}} \quad (2.36)$$

Le critère des moindres carrés est utilisé une seconde fois pour réaliser une interpolation aux symboles de donnée. Le critère s'écrit

$$\min[MC1] = \min \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - f_{MC-1}(m_p, n_p))^2 \right] \quad (2.37)$$

On obtient :

$$\min[MC1] = \min \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - \alpha)^2 \right] \quad (2.38)$$

L'expression est dérivée par rapport au paramètre du canal  $\alpha$  et égalée à zéro

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} MC1 = 0 \quad (2.39)$$

Nous obtenons le paramètre  $\alpha$  par les calculs suivants :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} MC1 = \sum_{p=0}^{N_p-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \alpha^2 + \hat{c}_{MC}(m_p, n_p)^2 - 2\alpha \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) \right) \quad (2.40)$$

alors

$$\frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (2\alpha - 2 \hat{c}_{MC}(m_p, n_p)) = 0 \quad (2.41)$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) \quad (2.42)$$

Le canal est alors égal à  $\alpha$  sur tout le bloc temps-fréquence

### **b. Algorithme de comparaison MC-2**

Le deuxième estimateur consiste en une extension de la méthode MC-1 à un polynôme du premier degré :

$$f_{MC-2} = \alpha m + \beta n + \gamma \quad (2.43)$$

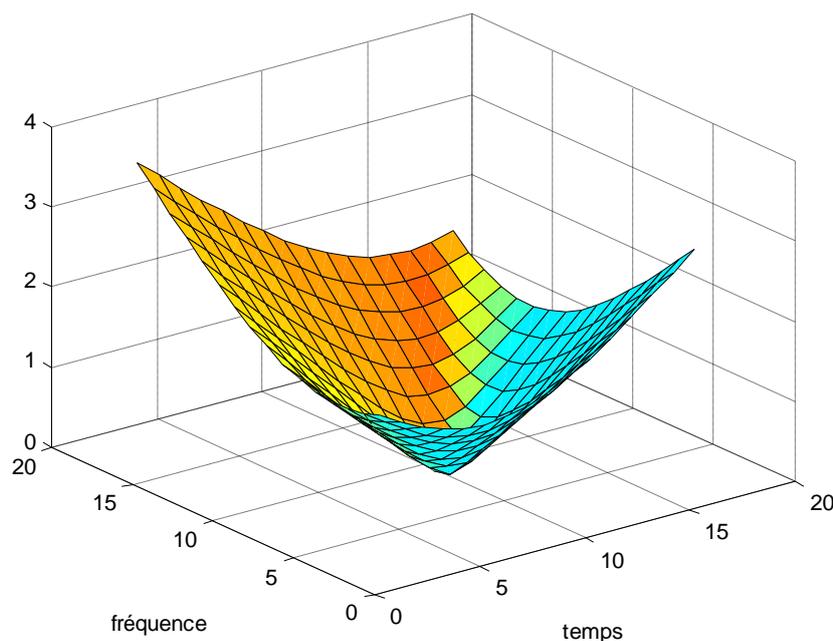


Fig.2.5 : Norme du canal fourni par la méthode MC-2

Le critère des MC devient

$$\begin{aligned}
\min[MC2] &= \min \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} \left( \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - f_{MC-2}(m_p, n_p) \right)^2 \right] \\
&= \min \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} \left( \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - \alpha m + \beta n + \gamma \right)^2 \right] \\
\min[MC2] &= \min \left[ \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} \left( \hat{c}_{MC}(m_p, n_p)^2 + \alpha^2 m_p^2 + \beta^2 n_p^2 + \gamma^2 - 2\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\alpha m_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - 2\beta n_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - 2\gamma \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - 2\alpha\beta m_p n_p \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\alpha\gamma m_p - 2\beta\gamma n_p \right) \right] \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Les paramètres  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont obtenus grâce aux dérivées partielles par rapport à eux-même :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\alpha} MC2 &= \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (2\alpha m_p^2 - 2m_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - 2\beta m_p n_p - 2\gamma m_p) \\
&= \frac{2\alpha}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (m_p^2) - \frac{2}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (m_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p)) - \frac{2\beta}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (m_p n_p) - \frac{2\gamma}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (m_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\beta} MC2 &= \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (2\beta n_p^2 - 2n_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - 2\alpha m_p n_p - 2\gamma n_p) \\
&= \frac{2\beta}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (n_p^2) - \frac{2}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (n_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p)) - \frac{2\alpha}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (m_p n_p) - \frac{2\gamma}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (n_p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\gamma} MC2 &= \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} (2\gamma - 2\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - 2\alpha m_p - 2\beta n_p) \\
&= 2\gamma - \frac{2}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - \frac{2\alpha}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} m_p - \frac{2\beta}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} n_p \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Pour simplifier la lecture de la suite, notons

$$\begin{aligned}
\Sigma_c &= \sum_{p=0}^{N_p-1} \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) & \Sigma_m &= \sum_{p=0}^{N_p-1} m_p & \Sigma_n &= \sum_{p=0}^{N_p-1} n_p \\
\Sigma_{m^2} &= \sum_{p=0}^{N_p-1} m_p^2 & \Sigma_{n^2} &= \sum_{p=0}^{N_p-1} n_p^2 & \Sigma_{mc} &= \sum_{p=0}^{N_p-1} m_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) \\
\Sigma_{nc} &= \sum_{p=0}^{N_p-1} n_p \hat{c}_{MC}(m_p, n_p) & \Sigma_{mn} &= \sum_{p=0}^{N_p-1} m_p n_p
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Les équations

$$\frac{d}{d\alpha} MC2 = \frac{d}{d\beta} MC2 = \frac{d}{d\gamma} MC2 = 0 \tag{2.47}$$

deviennent

$$\begin{aligned}
\alpha \Sigma_{m^2} - \Sigma_{mc} - \beta \Sigma_{mn} - \gamma \Sigma_m &= 0 \\
\beta \Sigma_{m^2} - \Sigma_{nc} - \alpha \Sigma_{mn} - \gamma \Sigma_n &= 0 \\
\gamma N_p - \Sigma_c - \alpha \Sigma_m - \beta \Sigma_n &= 0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Posons encore

$$\begin{aligned}
k_\alpha &= N_p \Sigma_{m^2} - (\Sigma_m)^2 \\
k_\beta &= N_p \Sigma_{n^2} - (\Sigma_n)^2 \\
k_\gamma &= N_p \Sigma_{mn} - \Sigma_m \Sigma_n \\
k_\mu &= N_p \Sigma_{mc} - \Sigma_m \Sigma_c \\
k_\nu &= N_p \Sigma_{nc} - (\Sigma_n)^2
\end{aligned} \tag{2.49}$$

et les valeurs des paramètres  $(\alpha, \beta, \gamma)$  du polynôme  $f_{MC-2} = \alpha m + \beta n + \gamma$  se calculent grâce aux équations :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{k_\beta k_\alpha - k_\gamma k_\nu}{k_\alpha k_\beta - k_\gamma^2} \\
\beta &= \frac{k_\alpha k_\nu - k_\gamma k_\mu}{k_\alpha k_\beta - k_\gamma^2} \\
\gamma &= \frac{\Sigma_c - \alpha \Sigma_m - \beta \Sigma_n}{N_p}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

*c. Estimation de canal par la FFT bidimensionnelle EC-FFT-2D*

Nous avons vu plus haut que le canal de propagation radio mobile peut être caractérisé par sa fonction de diffusion. On peut obtenir cette fonction en réalisant une transformée de Fourier discrète inverse (TFDI) du canal de propagation observé sur la trame pour y accéder (voir fig.2.6).

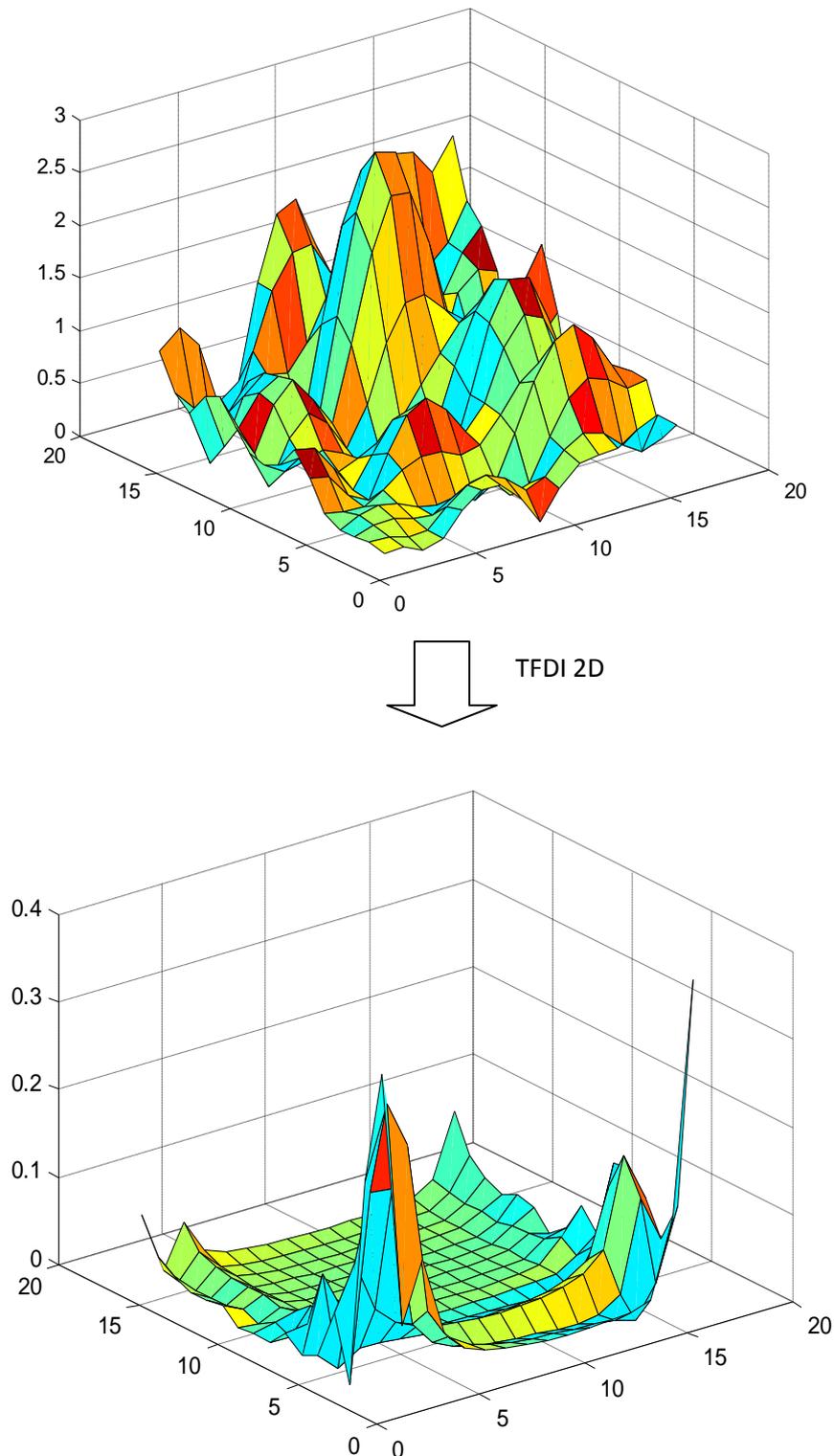


Fig.2.6 Obtention de la fonction de diffusion

Avant l'interpolation, nous ne sommes en possession que d'une version échantillonnée du canal. Dans le domaine de transformation (par TFDI bidimensionnelle inverse), on observera donc une répétition de la fonction de diffusion. C'est pourquoi, de la même façon qu'en traitement de signal classique, on cherche à reconstruire la fonction de diffusion principale, en filtrant les composantes grâce à un filtre passe-bande dont on déterminera la taille à partir d'une fonction de diffusion complète. Vous filtrerez donc le résultat de la TFDI 2D grâce à ce filtre (en utilisant une technique de masque) et vous repasserez dans le domaine du canal en faisant une TFD 2D du signal transformé filtré. Cette dernière opération réalise automatiquement l'interpolation à l'ensemble des positions de la trame temps-fréquence (voir fig.2.7).

Considérons les canaux correspondant à  $B_d T_m = 1/16^2$  et  $B_d T_m = 1/64^2$ : La taille du filtre est choisie en fonction des fonctions de diffusion du canal et du canal échantillonné aux positions des symboles pilotes.

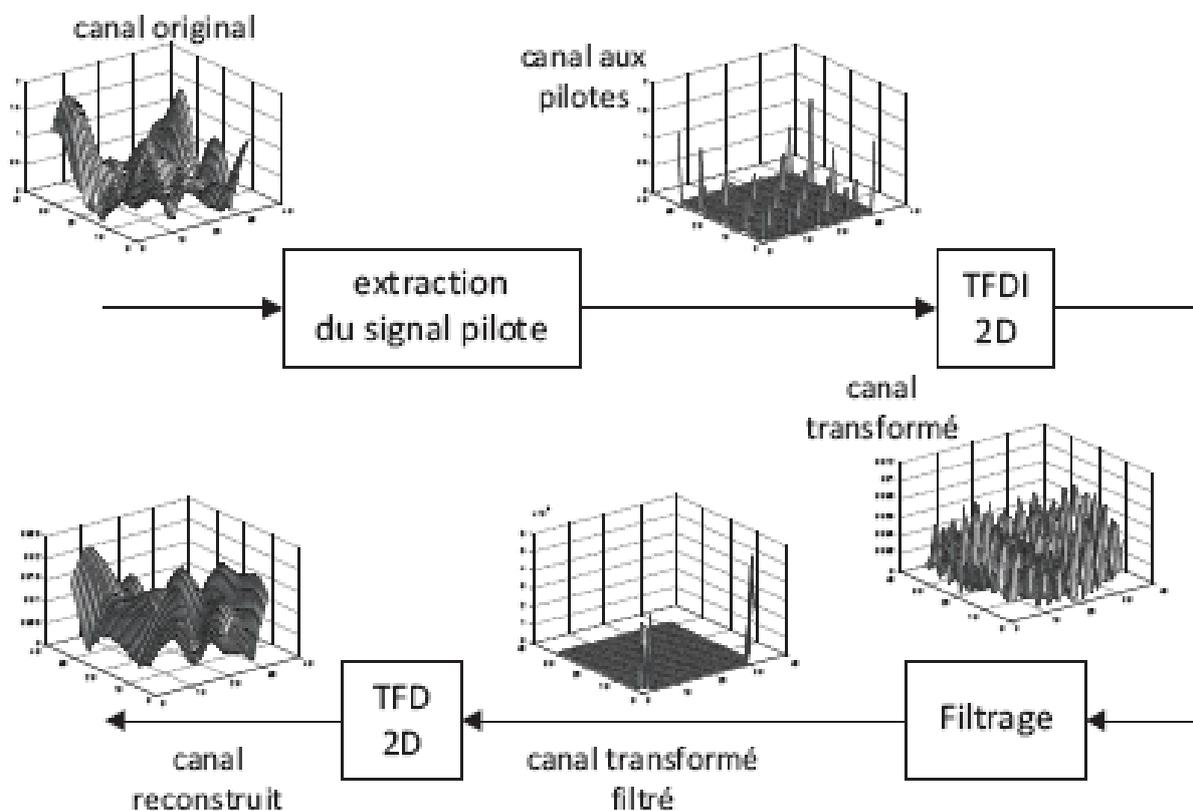


Fig. 2.7 : Schéma de l'algorithme d'estimation de canal par la FFT bidimensionnelle

## 2.4.2 Contexte des simulations

### a. Signal émis

Nous avons arbitrairement choisi de réaliser nos simulations à partir de blocs de dimension  $16 \times 16$ . Ainsi, les blocs temps-fréquence considérés possèdent 16 porteuses et 16 symboles OFDM. La répartition des symboles pilotes dans ce bloc ainsi que leur quantité est également arbitraire (voir fig.2.8).

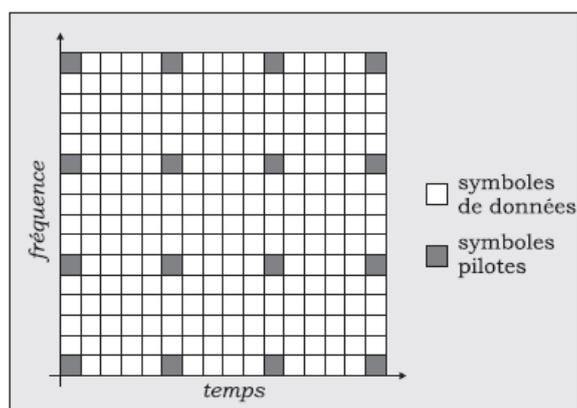


Fig. 2.8 : Bloc temps-fréquence considéré dans les simulations

Les symboles remplissant chaque bloc temps-fréquence appartiennent à l'alphabet d'une MDP-2 ( $\Omega = \{-1,1\}$ ). Le récepteur possèdera 1, 2 ou 4 branches de diversité.

### b. Combinaison des estimations sur chaque branche de diversité

Dans toutes les méthodes de comparaison, l'estimation de canal est réalisée séparément sur chacune des branches de diversité. La diversité est exploitée par combinaison optimale des branches de diversité. Les sorties souples sont donc estimées par (2.51) :

$$\lambda_{\delta(k)} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)} \hat{C}_{\delta(k)}^{l*} \quad (2.51)$$

### c. Les Paramètres de l'estimateur

Dans les simulations que nous présentons ici, nous avons fixé le nombre d'itérations de l'algorithme à  $D = 5$  pour les canaux à  $B_d T_m = 1/16^2$ ,  $1/32^2$  et  $1/64^2$  : En effet, ce nombre d'itération est suffisant dans ces contextes de propagation pour que l'algorithme converge. Cependant, cette valeur n'est plus suffisante lorsque nous nous plaçons dans le contexte de propagation défini par le canal très sélectif en temps et en fréquence à  $B_d T_m = 1/8^2$  : Nous avons déterminé que dans ce cas de figure, l'algorithme nécessite  $D = 15$  itérations.

De plus, nous avons choisi de réaliser nos simulations dans le cas où les modèles utilisés pour la génération et l'estimation du canal sont identiques. C'est à dire que les bases de vecteurs propres utilisées pour la génération et l'estimation du canal de propagation sont les mêmes.

### 2.4.3 Résultats de simulation

Nous avons comparé les performances obtenues par notre algorithme à celles fournies par les trois méthodes de comparaison ainsi qu'à un estimateur avec parfaite connaissance du canal.

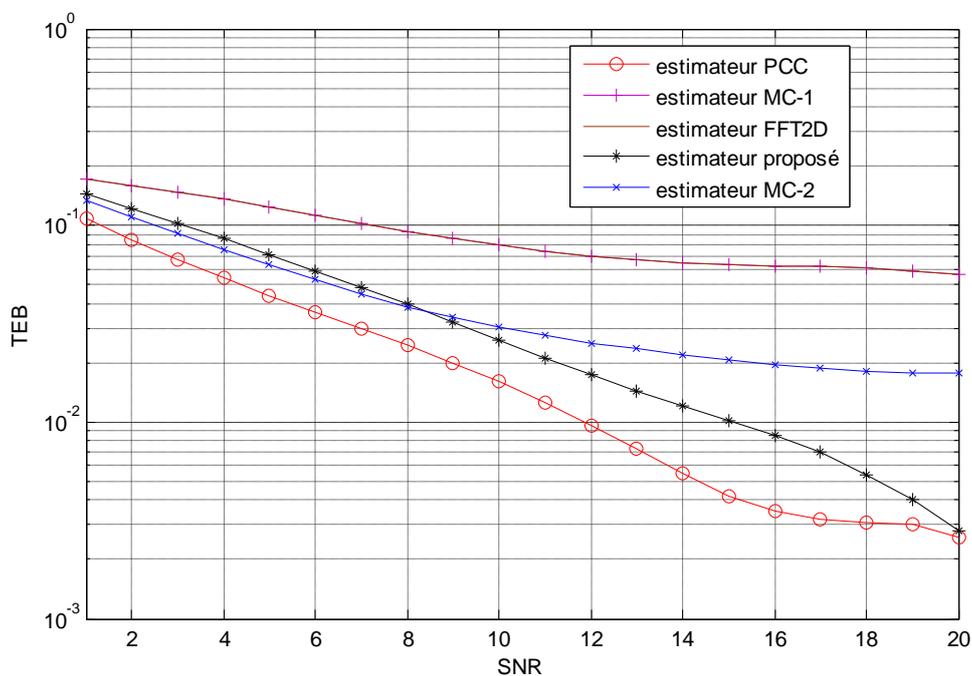


Fig. 2.9 Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/64^2$  et  $L = 1$

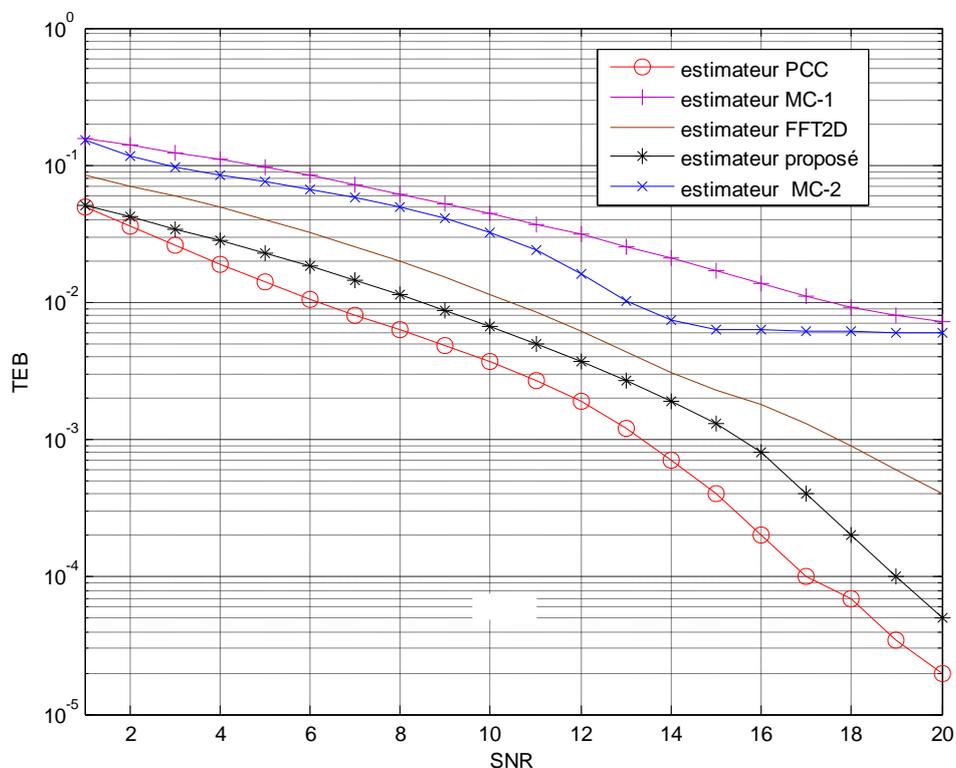


Fig. 2.10 Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/64^2$  et  $L = 2$

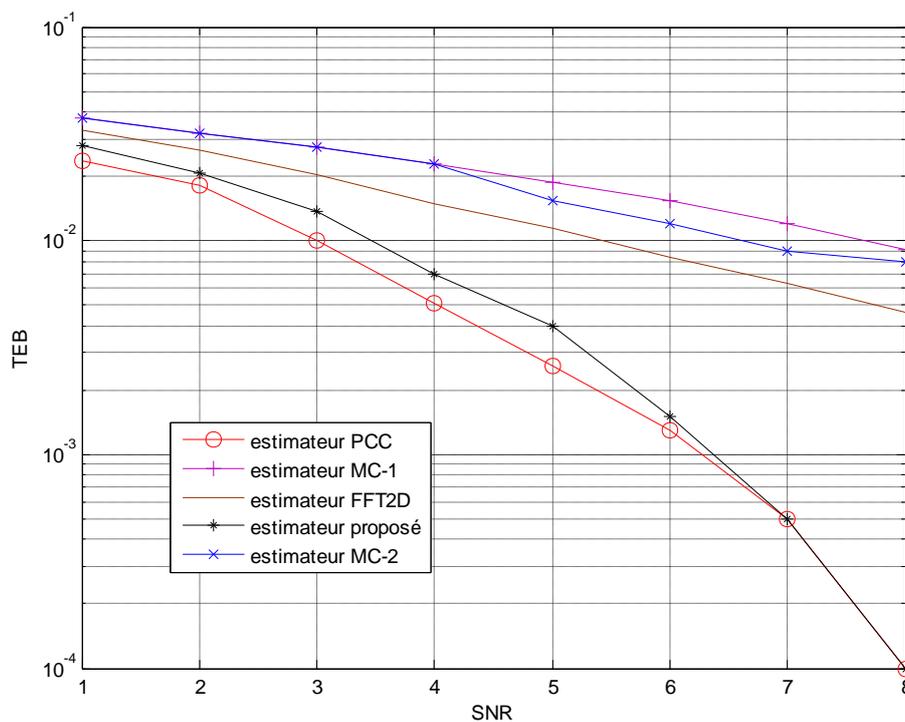


Fig. 2.11 Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/64^2$  et  $L = 4$

Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 montrent la comparaison de notre estimateur mentionné sur les figures ‘‘estimateur proposé’’ avec les autres méthodes de comparaison, dans le cas d'un canal avec  $B_d T_m = 1/64^2$ . Nous constatons que notre méthode présente les meilleures performances par rapport à ces méthodes. Nous constatons également que dès que le nombre de branches augmentent le taux d'erreur binaire s'améliore considérablement.

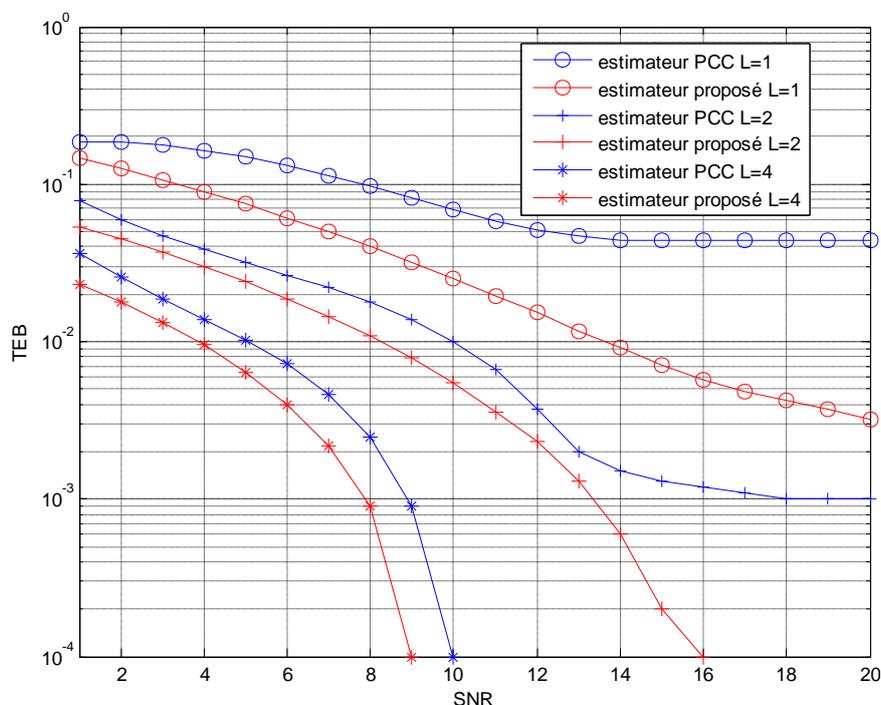


Fig.2.12 : Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/32^2$

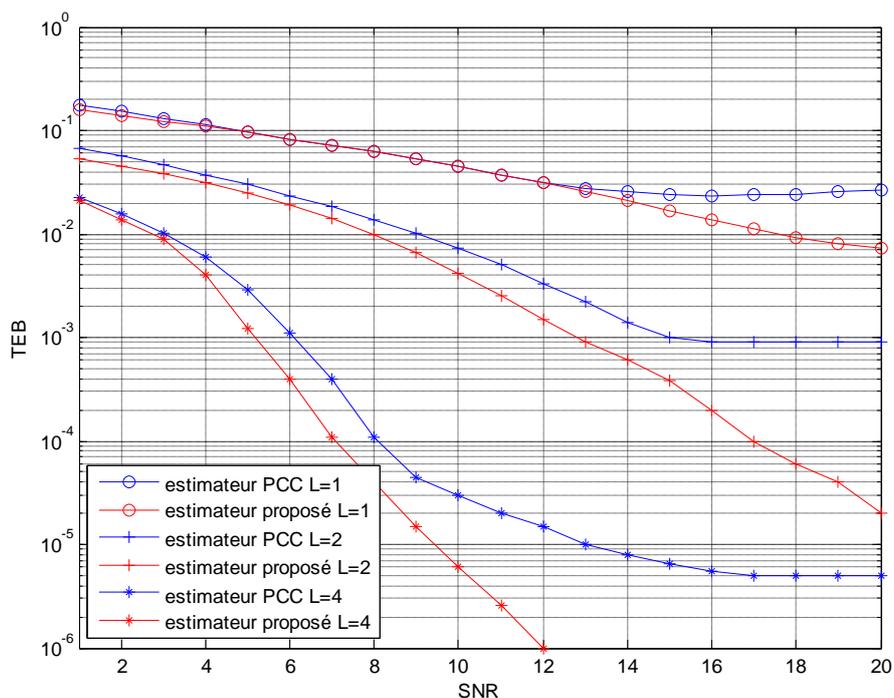


Fig. 2.13 : Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/16^2$

Les figures 2.12 et 2.13 représentent les performances de notre estimateur mentionné sur les figures "estimateur proposé" pour les canaux de  $B_d T_m = 1/32^2$  et  $1/16^2$  et pour le nombre de récepteur  $L=1,2$  et  $4$ . Au vu de ces figures, nous pouvons apprécier l'importance du paramètre  $L$  de diversité. Mais ces figures prouvent également que cette méthode présente un défaut majeur : son initialisation. Celle-ci ne semble pas suffisamment précise pour permettre à l'algorithme EM de converger correctement pour des valeurs de SNR élevées.

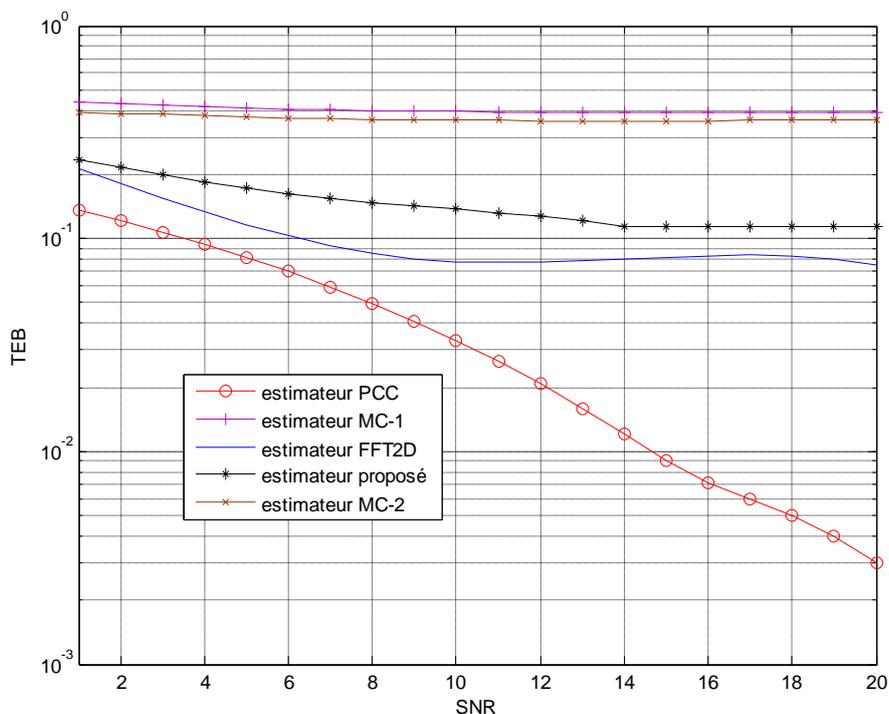


Fig. 2.14 Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/8^2$  et  $L = 1$

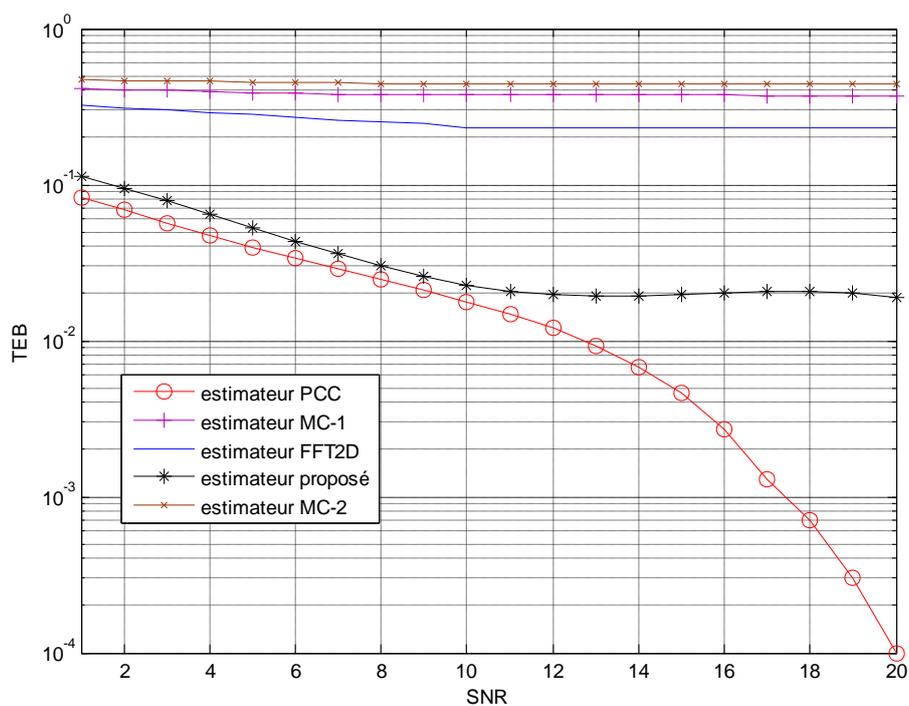


Fig. 2.15 Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/8^2$  et  $L = 2$

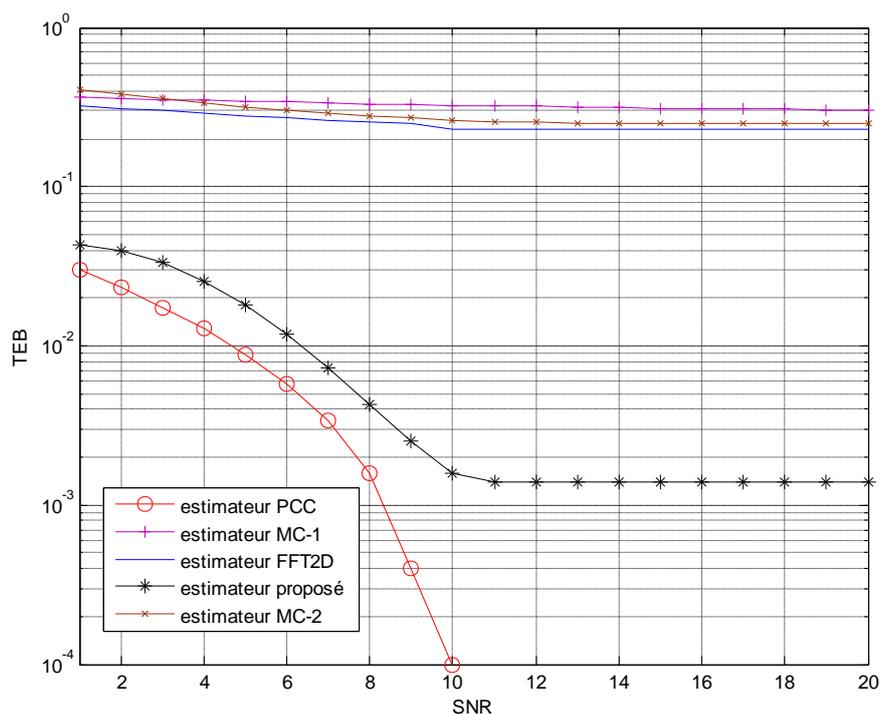


Fig. 2.16 Taux d'erreur binaire en fonction du  $E_b/N_0$  pour  $B_d T_m = 1/8^2$  et  $L = 4$

Les figures 2.14, 2.15 et 2.16 montrent cette comparaison dans le cas d'un canal avec  $B_d T_m = 1/8^2$ . On observe que pour les fortes valeurs de RSB; notre méthode présente une saturation dans tous les cas de diversité pour les SNR entre 10 et 12 dB. Cependant, malgré cette constatation, nous notons que les performances restent meilleures que les techniques de comparaison.

### Interprétation des résultats

- Les méthodes basées sur le critère MC donnent nécessairement de mauvais résultats car, par définition, elles recherchent un canal dont le modèle ne correspond pas à sa réalité.
- La méthode basée sur la TFD-2D, dont le modèle de canal dépend du filtrage dans l'espace de transformation, diverge également. Le canal est trop variable en temps et en fréquence et le filtrage réalisé n'arrive pas à contenir la contribution de la fonction de diffusion centrale. Le filtrage récupère les interventions de plusieurs fonctions de diffusion décalées et ne peut donc représenter correctement le canal. On pourrait imaginer de réaliser un filtrage moins "large" mais on ne représenterait alors qu'une partie.
- Quand le canal devient très sélectif l'algorithme EM présente une saturation pour les valeurs de SNR élevé et cela parce que l'algorithme EM converge vers un maximum local et l'absence du bruit ne lui permet plus de sortir de ce maximum local pour converger vers le maximum global.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode d'estimation de canal présentant une forte sélectivité en temps et en fréquence pour les systèmes de type OFDM, pour des données non codées. Cette méthode présente de très bonnes performances par rapport aux techniques classiques de la littérature.

Cependant, pour lutter plus efficacement contre les sélectivités du canal, il est d'usage d'utiliser un codeur canal et pour lutter contre la saturation il faut utiliser un vecteur initial bien précis. Dans le chapitre suivant, le signal OFDM sera obtenu à partir d'une modulation numérique codée en treillis. Pour pouvoir comparer les nouvelles performances aux résultats obtenus au chapitre précédent, nous utiliserons une modulation MDP-4 codée en treillis de rendement 1/2. La méthode proposée dans le chapitre suivant réalise le décodage conjointement à l'estimation de canal et cela pour le vecteur d'initialisation optimisé et non optimisé.

## Chapitre 3

# Turbo estimation de canal avec initialisation optimisée

Dans ce chapitre, nous présentons deux types d'estimation EM basés sur les turbos codes. Le premier type d'estimation utilise des turbos codes simples. Le deuxième type utilise toujours des turbos codes simples mais avec initialisation améliorée. Nous comparons les résultats obtenues par ces estimateurs avec ceux obtenues par la méthode avec parfaite connaissance du canal (PCC).

### 3.1 Turbo estimation de canal

Récemment, il a été montré que la mise en œuvre d'algorithmes itératifs tels que le turbo-décodage [4], [3] permet une amélioration conséquente de la structure du codage canal. Le principe de décodage des turbo-codes a été étendu à une forme itérative de l'égalisation et décodage conjoint [18], [57]. Cette méthode a été nommée turbo-égalisation et fournit déjà des résultats prometteurs.

Dans cette partie, nous étudierons une extension de l'algorithme proposé dans la partie précédente en considérant que l'ensemble de symboles émis dans un bloc est codé. Nous appelons cette technique turbo estimation de canal. Le récepteur ainsi obtenu réalisera donc un décodage conjointement à l'estimation de canal itérative. Les codes utilisés pourront être des codes convolutifs ou des modulations codées en treillis.

#### 3.1.1 Contexte

Le signal reçu sera exprimé par la relation (1.34) suivante :

$$R_{\delta(k)}^l = C_{\delta(k)}^l A_{\delta(k)} + N_{\delta(k)}^l$$

La différence avec la relation donnée dans la partie 2.3.1 est que les symboles  $A_{\delta(k)}$ ;  $k \in [0, N_D - 1]$  sont, dans ce cas, issus d'un codage en treillis ou d'un codage convolutif [24]. Les symboles de données, indexés dans l'ensemble  $N_D$  peuvent être également entrelacés au sein du bloc temps-fréquence.

Nous avons établi dans la partie 2.3.3 que l'estimée au sens du MAP du canal s'écrit par la relation 2.26 :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \sum_{k=0}^{N-1} R_k^l \left( \sum_{A \in \Omega} A p \left( A_k = A \left| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right. \right) \right)^* B_{mk}^*$$

Puisqu'à présent, les données sont codées, alors le calcul de la probabilité a posteriori

$$p\left(A_k = A \left| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right.\right)$$

peut être réalisé de manière optimale par l'algorithme de Bahl [1].

### 3.1.2 Principe de l'algorithme de Bahl

L'algorithme de Bahl est fondé sur le caractère Markovien des séquences codées émises. D'après [63], on peut modéliser un codeur de type convolutif ou en treillis par une source de Markov, dont les états représentent le contenu des registres du codeur et les transitions entre états (ou branches) les symboles en sortie du codeur. Appelons  $S_k$  l'état du codeur à l'instant  $k$ ; la transition entre l'état  $k - 1$  et l'état  $k$  est gouvernée par la probabilité de transition :

$$p_k(S_k = m | S_{k-1} = m') \quad (3.1)$$

et les sorties du codeur sont définies par les probabilités :

$$q(A|m, m') = P(A_k = A | S_{k-1} = m', S_k = m) \quad (3.2)$$

L'algorithme de Bahl permet de calculer les probabilités de transition entre les états  $m'$  et  $m$   $\sigma_k(m', m)$

$$\sigma_k(m', m) = P(S_{k-1} = m', S_k = m, R_{1,k}) \quad (3.3)$$

( $S_k$  Représentant l'état du codeur à l'instant  $k$  et  $R_{1,k}$  les échantillons du signal reçu entre les instants 1 et  $k$ ); ainsi que les probabilités de se trouver dans un état  $m$  à un instant  $k$ ,  $\lambda_k(m)$

$$\lambda_k(m) = P(S_k = m, R_{1,k}) \quad (3.4)$$

Connaissant le signal reçu, ces calculs se font récursivement dans les sens forward et backward. Il est donc nécessaire que chaque séquence émise par le codeur soit contrainte par des conditions initiales et finales connues. Par convention, le codeur doit commencer et terminer une séquence émise dans l'état 0. Les probabilités  $p\left(A_k = A \left| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right.\right)$  dont notre algorithme a besoin sont des probabilités conditionnelles. Nous dérivons de [1] une écriture adaptée à notre problème.

### 3.1.3 Écriture modifiée de l'algorithme de Bahl

Notre estimateur de canal a besoin de la connaissance de la probabilité conditionnelle

$$p\left(A_k = A \left| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right.\right) \quad (3.5)$$

Cette probabilité peut être obtenue à partir d'une version modifiée de  $\sigma_k(m', m)$ : On définit :

$$\sigma_k(m', m) = p\left(S_{k-1} = m', S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right.\right) \quad (3.6)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}\sigma_k(m', m) &= p\left(S_{k-1} = m', S_k = m \left| \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \times \\ &\quad \sigma_k(m', m) = p\left(\{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)\end{aligned}\quad (3.7)$$

$p\left(\{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)$  étant constant sur un bloc donné. L'utilisation de l'algorithme de Bahl ne nécessite pas le calcul de cette constante, puisque nous savons que la somme des probabilités  $\sigma_k(m', m)$  sur toutes les transitions possibles d'une section du treillis est égale à 1. Il suffit donc de normaliser  $\sigma_k(m', m)$  :

Soit  $\phi_A$  l'ensemble des transitions  $\sigma_k(m', m)$  étiquetées par le symbole  $A$ . On peut alors écrire

$$p\left(A_k = A \left| \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) = \sum_{(m', m) \in \phi_A} \sigma_k(m', m) \quad (3.8)$$

Le calcul des  $\lambda_k(m)$  et des  $\sigma_k(m', m)$  est réalisé en définissant les probabilités suivantes [1] :

$$\begin{aligned}\alpha_k(m) &= p\left(S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \\ \beta_k(m) &= p\left(\{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| S_k = m, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \\ \gamma_k(m) &= p\left(S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| S_{k-1} = m', \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Nous redéfinissons la probabilité  $\lambda_k(m)$  par :

$$\begin{aligned}\lambda_k(m) &= p\left(S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \\ &= p\left(S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \times \\ &\quad p\left(S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| S_{k-1} = m', \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \times \\ &\quad p\left(\{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| S_k = m, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)\end{aligned}\quad (3.10)$$

C'est-à-dire

$$\sigma_k(m', m) = \alpha_{k-1}(m') \gamma_k(m', m) \beta_k(m) \quad (3.11)$$

De plus, on peut définir des relations de récurrence pour les  $\alpha_k(m)$ , les  $\beta_k(m)$ , et les  $\gamma_k(m)$ ,  $M$  représentant le nombre d'états du treillis :

$$\alpha_k(m) = \sum_{m'=1}^{M-1} p\left(S_{k-1} = m', S_k = m, \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \left| \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m'=1}^{M-1} p \left( S_{k-1} = m', \{R_{\delta_D(l), \delta_D(N_D)}^l\}_{l=0}^{L-1} \mid \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right) \times \\
&p \left( S_k = m, \{R_{\delta_D(k)}^l\}_{l=0}^{L-1} \mid S_{k-1} = m', \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right)
\end{aligned} \quad (3.12)$$

et pour finir :

$$\beta_k(m) = \sum_{m'=0}^{M-1} \beta_{k+1}(m') \gamma_{k+1}(m, m') \quad (3.13)$$

Enfin, les probabilités  $\gamma_k(m, m')$  s'écrivent

$$\begin{aligned}
\gamma_k(m, m') &= \sum_{A \in \Omega} p(S_k = m \mid S_{k-1} = m') \cdot p(A_k = A \mid S_{k-1} = m', S_k = m) \\
&\times p \left( \{R_k^l\}_{l=0}^{L-1} \mid A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right)
\end{aligned} \quad (3.14)$$

c'est-à-dire

$$\gamma_k(m, m') = \sum_{A \in \Omega} p(m \mid m') \cdot q_k(A \mid m', m) \times p \left( \{R_k^l\}_{l=0}^{L-1}, A_k = A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right) \quad (3.15)$$

Les éléments  $p(\{R_k^l\}_{l=0}^{L-1}, A_k = A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1})$  sont calculés directement à partir du signal reçu  $\{R_k^l\}_{l=0}^{L-1}$  et des paramètres  $\{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}$  à savoir

$$\begin{aligned}
&p \left( \{R_k^l\}_{l=0}^{L-1}, A_k = A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right) \\
&= \exp \left( -\frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left( \sum_{l=0}^{L-1} R_k^l \left( A \sum_{n=0}^{N-1} G_n^{(d)} B_{nk} \right)^* \right) \right)
\end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.1.4 Principe de turbo-estimation de canal

Le principe de l'estimation dans ce cas est strictement le même que dans le chapitre précédent, à la différence près que les probabilités conditionnelles  $p(A_k = A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1})$  sont obtenues par la mise en œuvre de l'algorithme de Bahl et que les données sont entrelacées.

Dans un premier temps, l'estimateur réalise une première estimation du canal uniquement à partir des symboles pilotes. Cette première estimation de canal est désentrelacée pour correspondre à l'ordre de la séquence binaire émise, il en est de même pour le signal reçu. L'algorithme de Bahl calcule les probabilités conditionnelles, qui permettent de réaliser une nouvelle estimation du canal. Cette estimation est ensuite réutilisée comme initialisation de la partie itérative (fig. 3.1).

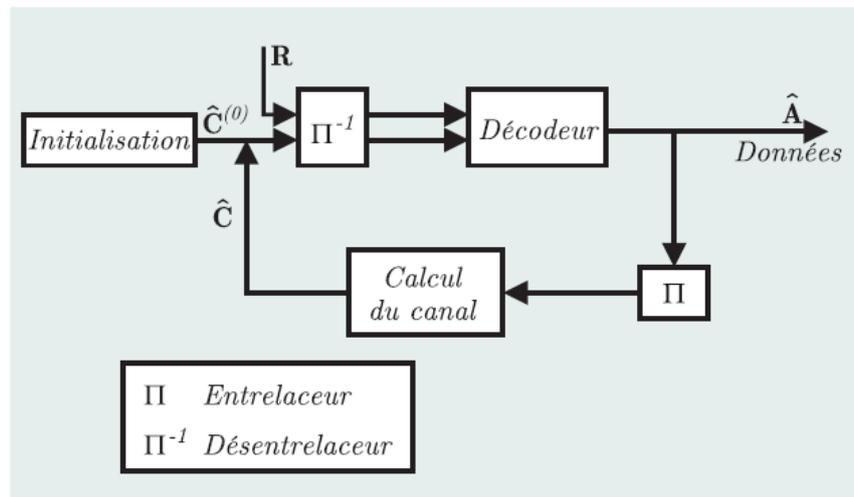


Fig. 3.1 Schéma-bloc du turbo-estimateur

### Modulation codée en treillis

Les simulations présentées ici sont, comme dans le deuxième chapitre, basées sur un système OFDM à 16 porteuses. Chaque bloc temps-fréquence est composé de 16 symboles OFDM dans leur intégralité. Les données sont ici obtenues par une modulation codée en treillis fournissant des symboles MDP-4 (Fig. 3.2).

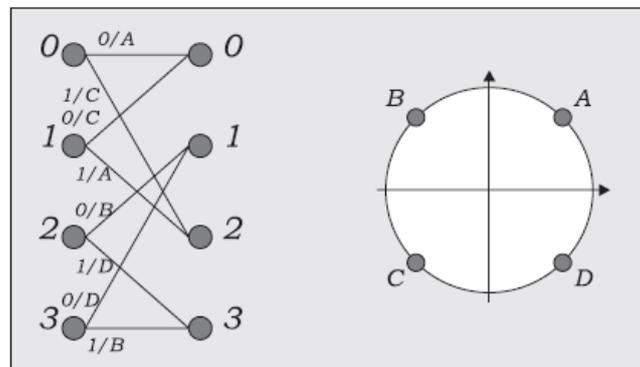


Fig. 3.2 : Modulation MDP-4 codé en treillis

### Entrelacement

Nous définissons un entrelaceur temps-fréquence basé sur le principe du "bit reversing". Ce type d'entrelaceur ne fonctionne que pour des blocs dont les dimensions sont des puissances de 2, c'est le cas des blocs que nous utilisons dans nos simulations. Etant donné que les systèmes OFDM actuels utilisent généralement des transformées de Fourier discrètes de taille égale à une puissance de 2, ce type d'entrelaceur peut facilement être utilisé dans des systèmes réels, même sur des blocs correspondant à des sous-ensembles de porteuses du système OFDM global.

Considérons un bloc de taille  $n_p \times n_s$  ( $n_p$  porteuses et  $n_s$  symboles OFDM)  $n_p$  et  $n_s$  étant des puissances de 2. L'entrelacement se déroule en plusieurs phases. La première phase consiste en un "remplissage" du bloc temps-fréquence par ses diagonales. Les  $n_p$  éléments

correspondant à un symbole OFDM sont placés dans le bloc, non plus par colonne, comme nous le faisons dans la partie précédente, mais suivant les diagonales du bloc temps-fréquence (Fig. 3.3).

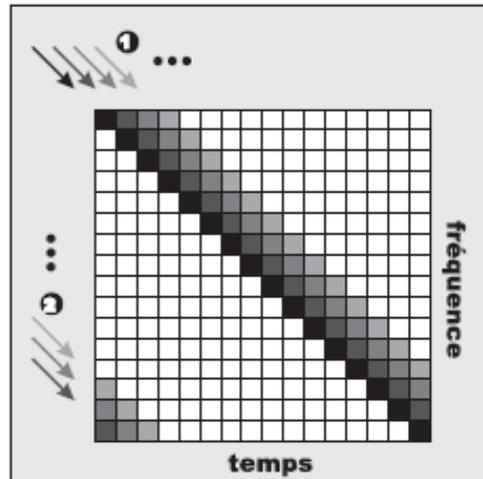


Fig. 3.3 Première phase de l'entrelacement : remplissage du bloc

La deuxième phase consiste en un entrelacement utilisant l'inversion binaire des indices "abscisses" de chaque élément du bloc, et enfin la troisième phase réalise l'entrelacement sur les indices "ordonnées" des éléments du bloc. Pour le symbole transmis à la position  $(m, n)$  du bloc temps fréquence sans entrelacement, sa position après entrelacement sera déterminée à partir des écritures binaires de  $n$  et  $m$ . Prenons un exemple pour illustrer ce mécanisme.

Par exemple considérons le bloc temps-fréquence de dimension  $16 \times 16$  utilisé dans nos simulations. Soit le symbole correspondant à la position  $(4,5)$ , ces coordonnées s'écrivent  $(0100, 0101)$  en binaire. L'entrelaceur inverse simplement cette écriture binaire pour venir placer le symbole à la position  $(1011, 1010)$ , c'est à dire  $(11, 10)$  : La figure suivante montre l'éloignement temps-fréquence apporté par cet entrelaceur à 4 symboles adjacents.

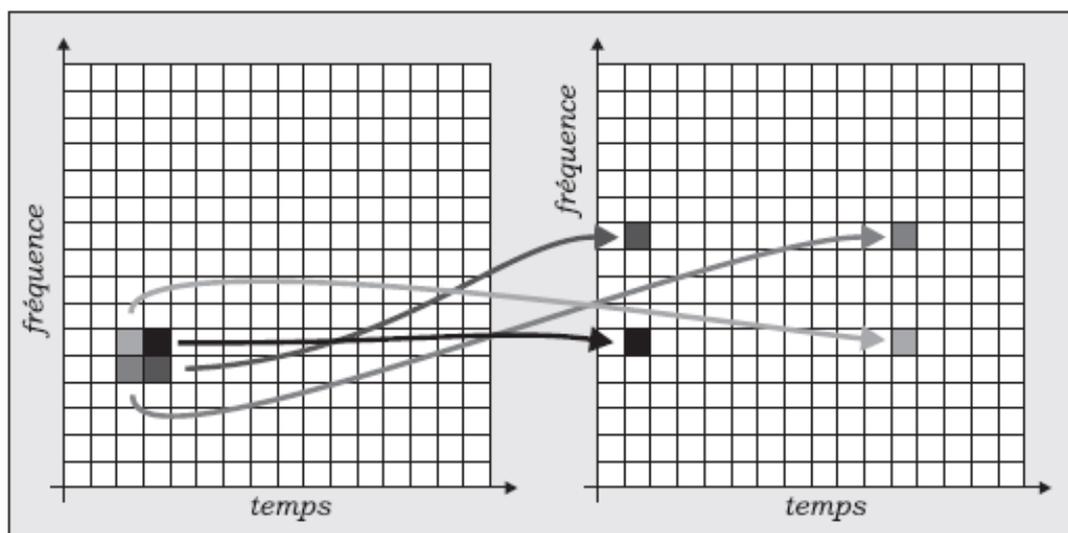


Fig. 3.4 : Exemple de fonctionnement de l'entrelaceur

### 3.2 Turbo estimateur simple

Le turbo estimateur simple utilise le principe donné par la figure 3.1 Les simulations ont été réalisées dans les mêmes contextes de propagation vue dans le deuxième chapitre. Nous avons utilisé un décodeur de viterbi pour l'estimateur hypothétique et les autres algorithmes de comparaison et l'algorithme de Bahl pour le turbo estimateur. Nous présentons les performances de l'algorithme de turbo-estimation simple de canal obtenues pour les canaux à  $B_d T_m = 1/64^2$ ,  $1/32^2$ ,  $1/16^2$  et  $1/8^2$  en comparaison avec les performances de l'estimateur hypothétique ayant une parfaite connaissance du canal (PCC).

Le tableau ci-dessus présente le taux d'erreur binaire en fonction du rapport signal sur bruit pour un SNR de 10 dB et cela pour  $B_d T_m = 1/64^2$ ,  $1/32^2$  et  $1/16^2$ .

$B_d T_m$	SNR	TEB
$1/64^2$	10	$1.3 \cdot 10^{-3}$
$1/32^2$	10	$6 \cdot 10^{-5}$
$1/16^2$	10	$10^{-5}$

On observe que plus le canal devient sélectif plus le taux d'erreur binaire diminue.

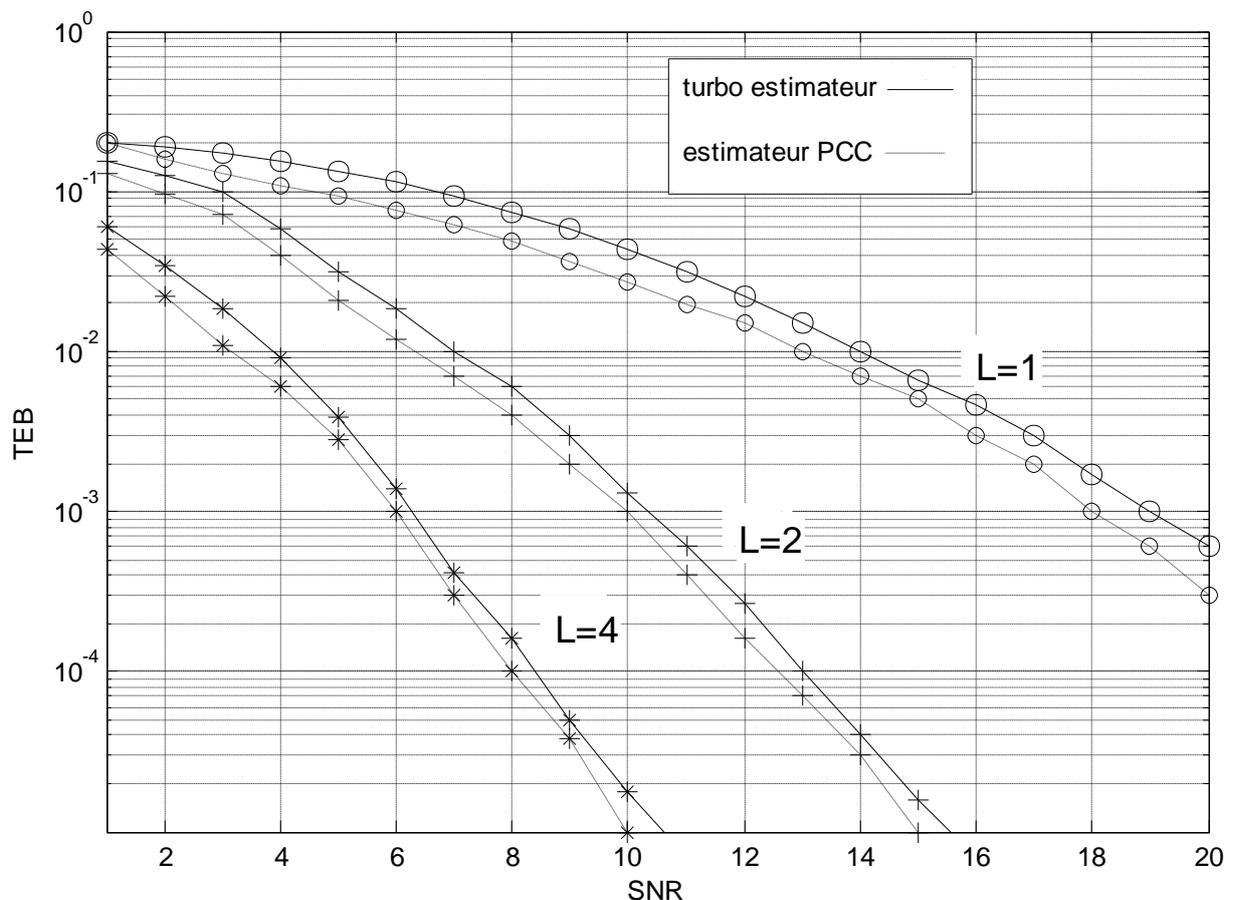


Fig.3.5 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de  $B_d T_m = 1/64^2$ , pour des ordres de diversité  $L = 1; 2$  et  $4$ .

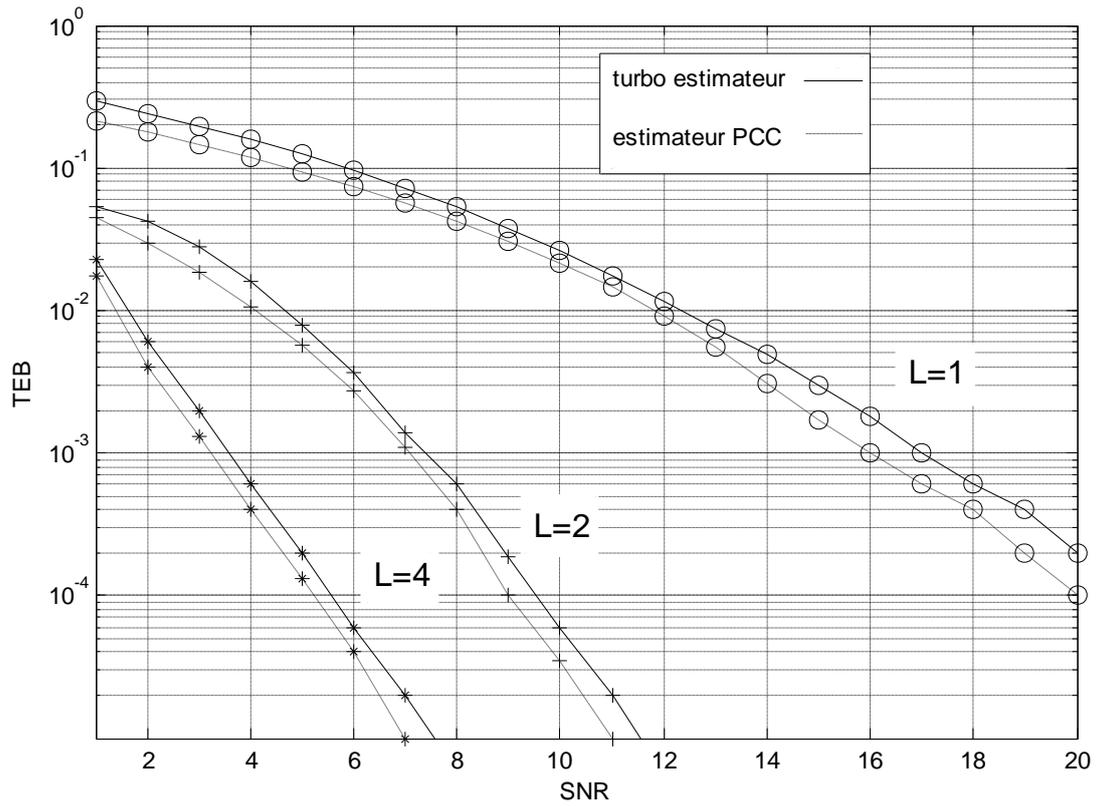


Fig. 3.6 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de  $B_d T_m = 1/32^2$ , pour des ordres de diversité  $L = 1; 2$  et  $4$ .

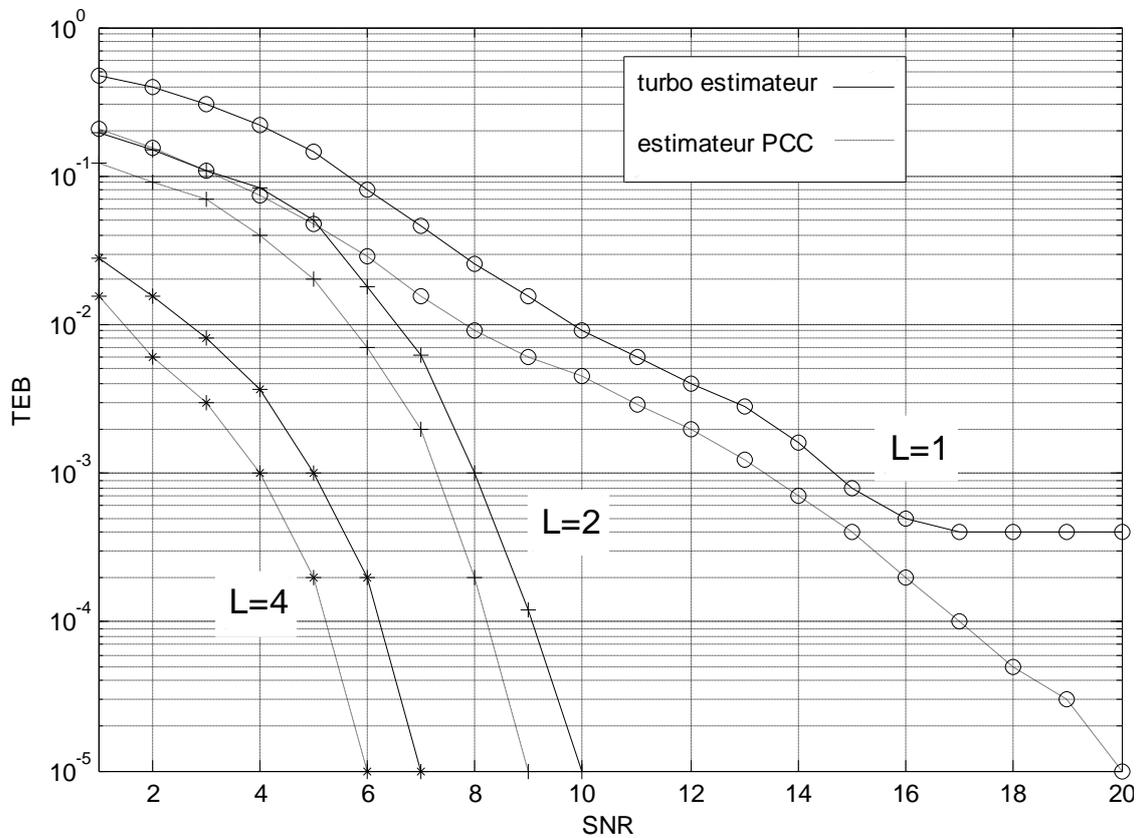


Fig.3.7 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de  $B_d T_m = 1/16^2$ , pour des ordres de diversité  $L = 1; 2$  et  $4$ .

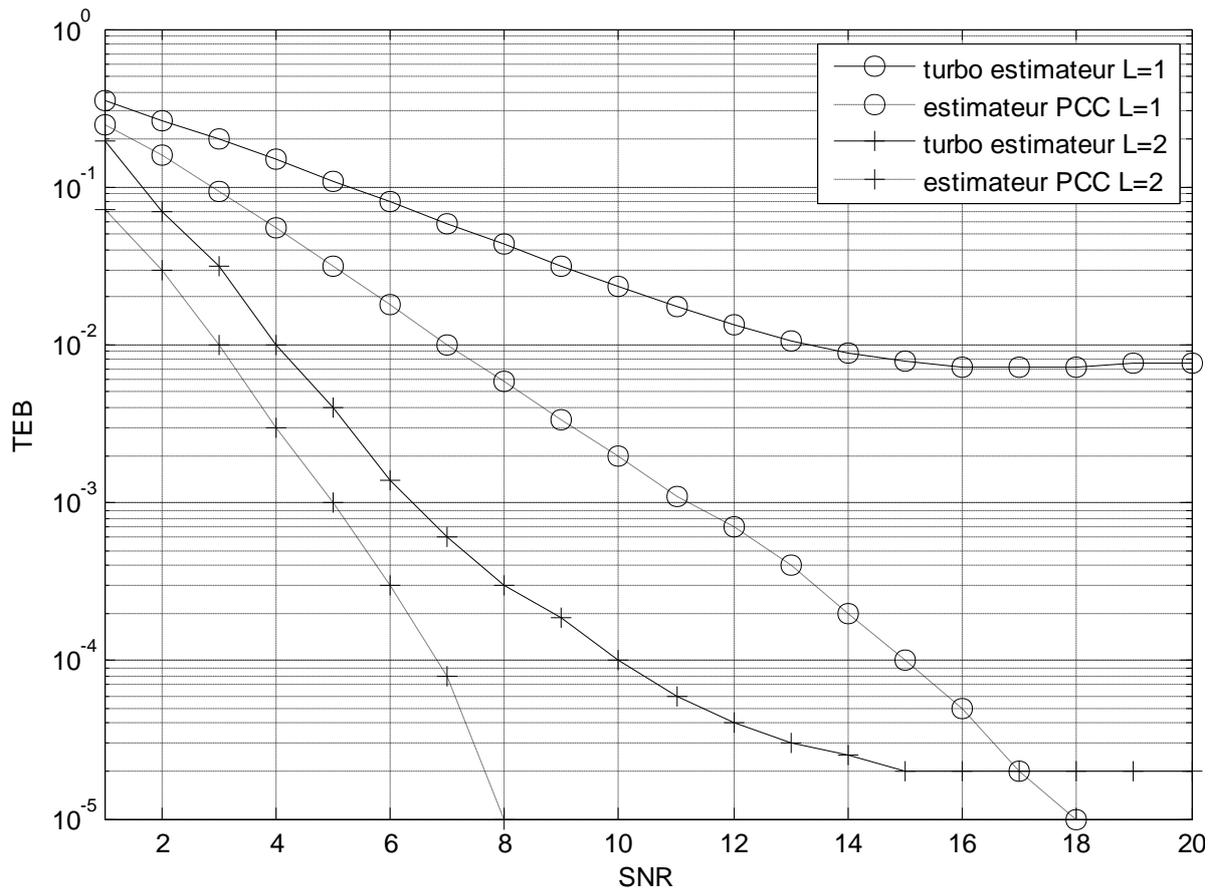


Fig. 3.8 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de  $B_d T_m = 1/8^2$ , pour des ordres de diversité  $L = 2; 4$ .

Les résultats de la simulation du turbo-estimateur simple sont représentés dans les figures 3.5 à 3.8. Ces figures représentent les performances du turbo-estimateur simple pour chaque contexte de propagation. Nous constatons que :

- Pour les deux premières figures (fig. 3.5 et 3.6), l'écart relatif entre les performances du turbo-estimateur simple et celles de l'estimateur PCC n'augmente que très faiblement. Et plus le canal devient sélectif (fig. 3.7 et 3.8), plus cette écarte augmente.
- Lorsque le canal est très variable en temps et en fréquence (fig. 3.8), pour  $B_d T_m = 1/8^2$  ; la saturation du turbo estimateur simple se repousse vers les valeurs de SNR entre 12 et 14 dB en comparant avec l'algorithme EM classique (fig.2.14, 2.15 et 2.16). Et pour  $B_d T_m = 1/16^2$  (fig. 3.7); la saturation du turbo estimateur simple pour  $L=1$  se repousse vers les valeurs de SNR au voisinage de 16 dB en comparant avec l'algorithme EM classique (fig.2.13).
- Plus le canal est sélectif en fréquence, plus il fournit théoriquement une diversité en temps et en fréquence importante.

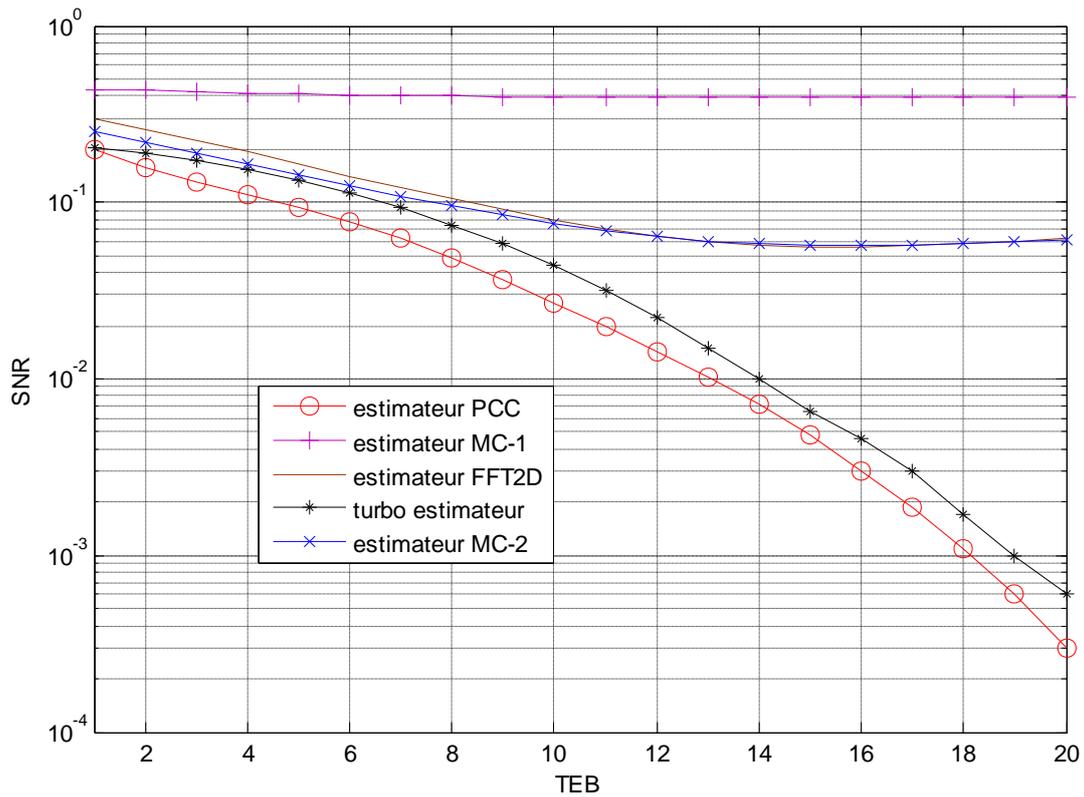


Fig. 3.9 Comparaison des performances du turbo-estimateur et des algorithmes de référence pour  $B_d T_m = 1/64^2$  et  $L = 1$

La figure 3.9 donne une comparaison des performances du turbo-estimateur avec celles des algorithmes de référence pour une diversité d'ordre  $B_d T_m = 1/64^2$  et  $L = 1$ : Bien que ce canal soit presque ‘plat’, les performances du turbo estimateur restent largement meilleures.

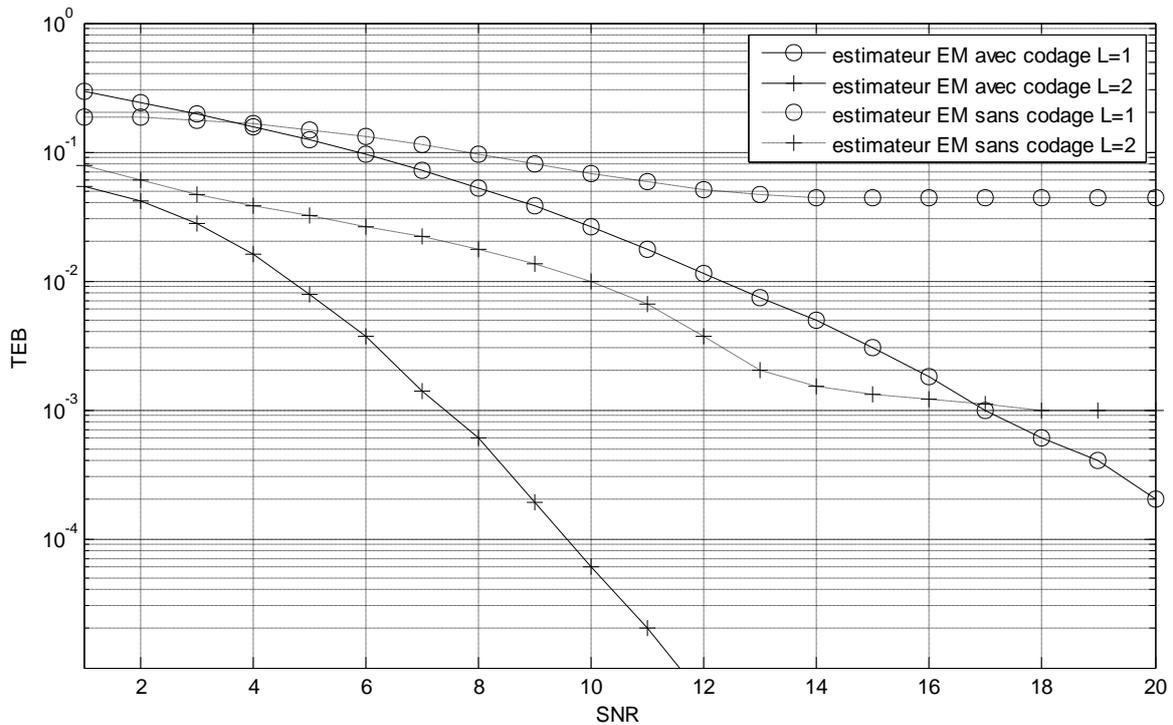


Fig. 3.10 Comparaison des performances d’algorithme EM sans et avec codage pour  $B_d T_m = 1/32^2$

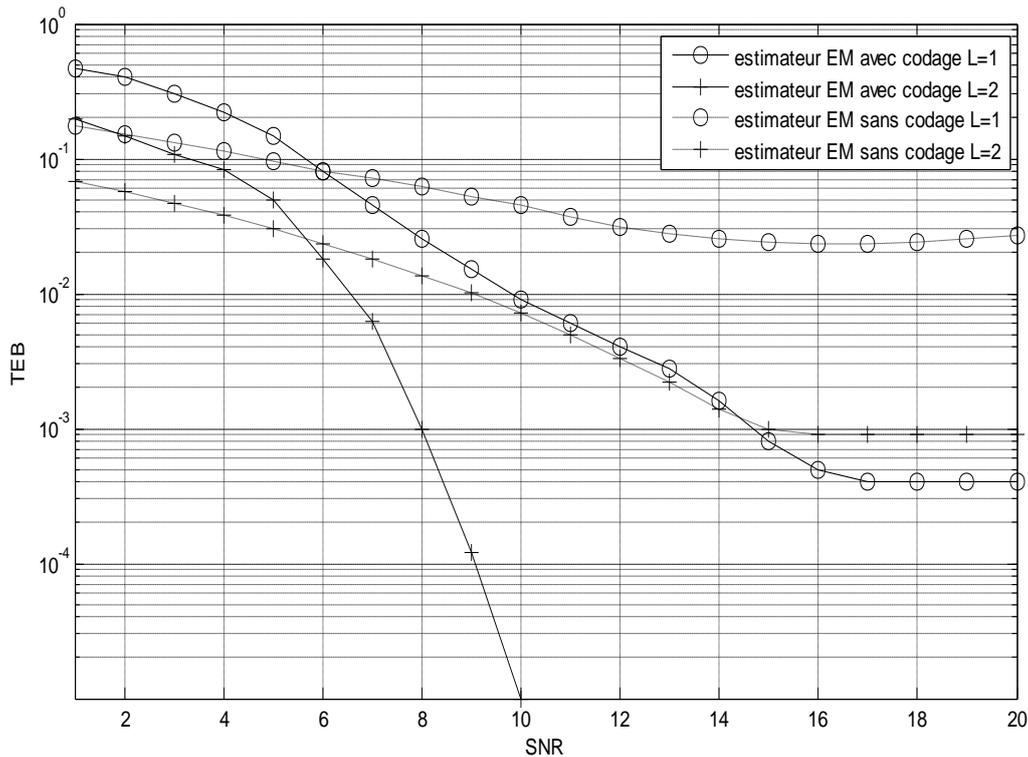


Fig. 3.11 Comparaison des performances d'algorithmes EM sans et avec codage pour  $B_d T_m = 1/16^2$

Les figures 3.10 et 3.11 donnent une comparaison des performances de l'estimateur EM avec codage (turbo-estimateur) avec celles des algorithmes EM sans codage pour  $B_d T_m = 1/32^2$  et  $1/16^2$  pour  $L = 1$  et  $2$ , nous voyons que :

- Plus le canal devient très sélectif le codage apporte des améliorations plus importantes,
- Plus la diversité spatiale augmente plus cette amélioration diminue.

Il en découle que plus le canal est mauvais plus les performances de notre turbo s'améliorent beaucoup.

### 3.3 Turbo estimation de canal avec initialisation optimisée

Nous avons vu, que comme toute technique basée sur l'algorithme E.M., d'estimation de canal est relativement sensible à l'initialisation. En effet, dans les cas où le canal reste moyennement sélectif, l'initialisation reste suffisamment "bonne" pour que l'algorithme E.M. ne tombe pas dans des maximums locaux de la fonction auxiliaire. Cependant, dès que la sélectivité devient plus forte, il est nécessaire de fournir à la partie itérative de l'algorithme une meilleure initialisation.

Remarquons que la base de vecteurs propres telle qu'elle est définie dans l'algorithme EM ne permet pas de réaliser une initialisation optimale, dans le sens où la restriction de cette base aux positions des symboles pilotes ne forme pas une base orthogonale. Il s'agit donc de construire une nouvelle base de vecteurs construite à partir des corrélations du canal aux

positions des symboles pilotes, étendue à l'ensemble des positions d'un bloc temps-fréquence grâce à la théorie de l'innovation.

Cette partie présente donc un algorithme d'estimation de canal sélectif en temps et en fréquence par bloc basé sur la prédiction linéaire et ne prenant en compte que les échantillons reçus correspondants aux symboles pilotes. Cette dernière technique, nous l'utiliserons pour résoudre le problème de l'initialisation d'algorithme EM.

### 3.3.1 Estimation de canal basée sur l'innovation : Prédiction Linéaire

Pour simplifier les notations, nous introduisons en plus de la fonction d'indexation bidimensionnelle  $\delta$ , les fonctions d'indexation  $\delta_p(k) = (m(k), n(k))$ , agissant entre l'ensemble monodimensionnel  $\{k\}_{k=0}^{N_p-1}$  et l'ensemble bidimensionnel  $S_p$  et  $\delta_D(k) = (m(k), n(k))$  entre l'ensemble monodimensionnel  $\{k\}_{k=0}^{N_D-1}$  et l'ensemble bidimensionnel  $S_D$ .

De plus, sans perte de généralité, on suppose que les valeurs prises par les symboles pilotes normalisés  $\{A_{\delta_p(k)}\}_{k=0}^{N_p-1}$  sont toutes égales à l'unité en module. Soit  $F_{\delta(k)}$  l'innovation d'un facteur de gain équivalent du canal  $C_{\delta_p(k)}$  conditionnellement à la connaissance de la restriction  $R_p = (R_{\delta_p(0)}, R_{\delta_p(1)}, \dots, R_{\delta_p(N_p-1)})^t$  du vecteur signal reçu  $R$  aux échantillons correspondants aux symboles pilotes. Puisque le canal est à évanouissements de Rayleigh et que le bruit est Gaussien, l'innovation  $F_{\delta(k)}$  comme le vecteur  $R_p$  sont Gaussiens. L'innovation  $F_{\delta(k)}$  est de ce fait indépendante du vecteur reçu  $R_p$ .

L'innovation  $F_{\delta(k)}$  et le facteur de gain du canal  $C_{\delta(k)}$  sont reliés par l'expression linéaire suivante :

$$C_{\delta(k)} = F_{\delta(k)} + \sum_{v=0}^{N_p-1} W_{\delta_p(k)v}^* R_{\delta_p(v)} = F_{\delta(k)} + W_{\delta_p(k)}^{*t} R_p, \quad \delta(k) \in S \quad (3.17)$$

où le vecteur  $W_{\delta_p(k)} = (W_{\delta_p(k),0}, W_{\delta_p(k),1}, \dots, W_{\delta_p(k),N_p-1})^*$  est donné par la relation matricielle suivante

$$W_{\delta(k)}^{*t} (H + N_0 I) = V_{\delta(k)}^{*t} \quad (3.18)$$

où  $H$  est la matrice de covariance hermitienne  $N_p \times N_p$  du canal équivalent, restreinte aux positions des symboles pilotes, dont le  $(\mu, v)$ <sup>ème</sup> élément est donné par :

$$H_{\mu v} = \sqrt{E_{\delta_p(\mu)} E_{\delta_p(v)}} \phi(p_{\delta_p(\mu)} - p_{\delta_p(v)}) \quad (3.19)$$

et  $I$  est la matrice identité  $N_p \times N_p$  et,

$$V_{\delta(k)} = (\sqrt{E_{\delta(0)} E_{\delta(k)}} \phi(p_{\delta(0)} - p_{\delta(k)}), \sqrt{E_{\delta(1)} E_{\delta(k)}} \phi(p_{\delta(1)} - p_{\delta(k)}), \dots, \sqrt{E_{\delta(N_p-1)} E_{\delta(k)}} \phi(p_{\delta(N_p-1)} - p_{\delta(k)}))^t \quad (3.20)$$

La variance  $\theta$  de l'innovation  $F$  est donnée par (annexe E) :

$$\theta_{\delta(k)} = \phi(0)E_{\delta(k)} - V_{\delta(k)}^{*t} W_{\delta(k)} \quad (3.21)$$

Soit  $\hat{C} = (\hat{C}_0, \hat{C}_1, \dots, \hat{C}_{N-1})^t$  l'estimée au sens du Maximum a Posteriori du vecteur canal équivalent  $C$ ; conditionnellement au vecteur reçu  $R_p$ . Ce vecteur est égal au vecteur de prédiction linéaire au sens du critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Minimum  $L = (L_{\delta(0)}, L_{\delta(1)}, \dots, L_{\delta(N-1)})^t$  de  $\delta(k)^{\text{ème}}$  composante (annexe F) :

$$L_{\delta(k)} = \sum_{v=0}^{N_p-1} W_{\delta(k)v}^* R_{\delta(k)} = W_{\delta(k)}^{*t} R_p \quad (3.22)$$

### 3.3.2 Estimation de canal exploitant la base orthonormale étendue

Une nouvelle base de vecteur a été définie aux positions des symboles pilotes. Pour réaliser l'interpolation de l'estimation du canal au niveau des pilotes à l'ensemble des symboles d'un bloc temps-fréquence, il est nécessaire d'étendre la base de vecteur obtenue précédemment à l'ensemble du bloc.

L'estimée au sens du MAP  $\hat{C} = L$  du vecteur canal équivalent  $C$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur reçu  $R_p$  qui dépend non seulement des caractéristiques statistiques du canal à évanouissements équivalent, mais aussi de la variance  $N_0$  du bruit blanc Gaussien additif. Afin de se débarrasser de cette dépendance du bruit blanc Gaussien dans le calcul de  $\hat{C}$ ; nous introduisons alors une nouvelle formulation de l'algorithme d'estimation de canal. Cette reformulation utilise une base orthonormale étendue  $\{B_l\}_{l=0}^{N_p-1}$ , provenant exclusivement des propriétés statistiques du canal à évanouissement équivalent. Cette base orthonormale étendue est obtenue par extension de la décomposition orthogonale de Karhunen-Loève de la restriction  $L = (C_{\delta_p(0)}, C_{\delta_p(1)}, \dots, C_{\delta_p(N-1)})^t$  du vecteur canal équivalent aux symboles pilotes.

Soit  $\check{L} = (\check{L}_{\delta(0)}, \check{L}_{\delta(1)}, \dots, \check{L}_{\delta(N-1)})^t$  la prédiction linéaire au sens de l'erreur quadratique moyenne minimum du vecteur  $C$ , conditionnellement à sa restriction  $C_p$ . La  $\delta(k)^{\text{ème}}$  composante de  $\check{L}$  est donnée par

$$\check{L}_{\delta(k)} = \sum_{v=0}^{N_p-1} \check{W}_{\delta(k),v}^* C_{\delta(v)} = \check{W}_{\delta(k)}^{*t} C_p \quad (3.23)$$

où

$$\check{W}_{\delta(k)}^{*t} H = \check{V}_{\delta(k)}^{*t} \quad (3.24)$$

D'évidence,  $\check{L}_{\delta(v)} = C_{\delta(v)}$ ,  $v = 0, 1, \dots, N_p - 1$  et par conséquent  $\check{W}_{\delta(v)}$  est le vecteur possédant un "1" à la  $v^{\text{ème}}$  position et des "0" partout ailleurs. De plus, soit  $\{B_{pl}\}_{l=0}^{N_p-1}$  la base orthonormale utilisée dans la décomposition de Karhunen-Loève de chacun des vecteurs  $C_p$  et  $R_p$ . Les vecteurs  $\{B_{pl}\}_{l=0}^{N_p-1}$  sont les vecteurs propres de la matrice de covariance

hermitienne  $H$  de valeurs propres  $\{\Gamma_l\}_{l=0}^{N_p-1}$  que l'on suppose classées dans leur ordre décroissant. Ces vecteurs propres sont déterminés à une phase arbitraire près, par :

$$HB_{pl} = \Gamma_l B_{pl} \quad (3.25)$$

La  $k^{\text{ème}}$  composante du la  $l^{\text{ème}}$  vecteur  $B_l = (B_{l,\delta(0)}, B_{l,\delta(1)}, \dots, B_{l,\delta(N-1)})^t$  de la base orthonormale étendue  $\{B_l\}_{l=0}^{N_p-1}$  est définie par

$$B_{l,\delta(k)} = \check{W}_{\delta(k)}^{*t} B_l \quad (3.26)$$

Etant données les propriétés des vecteurs  $\check{W}_{\delta(v)}$ ; nous concluons que le vecteur de la base orthonormale  $B_{pl}$  est la restriction du vecteur de la base orthonormale étendue  $B_l$  aux symboles pilotes. Plus précisément, nous avons

$$B_{pl} = (B_{l,\delta_p(0)}, B_{l,\delta_p(1)}, \dots, B_{l,\delta_p(N_p-1)})^t \quad (3.27)$$

Soit  $G = (G_0, G_1, \dots, G_{N_p-1})^t$  la décomposition de Karhunen-Loève du vecteur  $R_p$  sur la base orthonormale  $\{B_{pl}\}_{l=0}^{N_p-1}$ . Nous avons

$$R_p = \sum_{l=0}^{N_p-1} G_l B_{pl} \quad (3.28)$$

où

$$G_l = B_{pl}^{*t} R_p \quad (3.29)$$

L'estimée au sens du *MAP*  $\hat{C}$  du vecteur canal équivalent  $C$ , conditionnellement au vecteur reçu  $R_p$  est donnée sous forme matricielle par

$$\hat{C} = \sum_{l=0}^{N_p-1} w_l G_l B_l \quad (3.30)$$

où  $G_l = B_{pl}^{*t} R_p$ ,  $l = 0, 1, \dots, N_p - 1$  représente la décomposition de la restriction  $R_p$  du vecteur reçu  $R$  aux échantillons correspondant aux symboles pilotes, et les facteurs de pondération  $w_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, N_p - 1$  sont donnés par (annexe H)

$$w_l = \frac{1}{1 + N_0/\Gamma_l} \quad (3.31)$$

Cette reformulation de l'estimation de canal au sens du *MAP* nous permet de voir que la dépendance de  $C$  de la variance du bruit blanc Gaussien additif est transférée aux coefficients de pondération  $\{w_l\}_{l=0}^{N_p-1}$  qui peuvent être mis à jour facilement.

### 3.3.3 Construction simplifiée de la base orthonormale étendue

Le calcul précédent de l'extension de la base de vecteurs nécessite le calcul des  $\check{W}_{\delta(k)}^{*t}$ ,  $\delta(k) \in S_D$ . Il est possible de s'affranchir du calcul de ces vecteurs comme le montre le paragraphe suivant. Une façon de construire la base orthonormale étendue  $\{B_m\}_{m=0}^{N_p-1}$  et de déterminer la base orthonormale  $\{B_{pm}\}_{m=0}^{N_p-1}$  grâce au système (3.25), puis d'étendre chacun des vecteurs de la base  $\{B_{pm}\}_{m=0}^{N_p-1}$  par les relations

$$B_{m\delta(k)} = \check{W}_{\delta_D(k)}^{*t} B_{pm}, \delta_D(k) \in S_D \quad (3.32)$$

Cette construction requiert, pour chaque  $\delta_D(k) \in S_D$ , le calcul du vecteur  $\check{W}_{\delta(k)}^{*t}$  en utilisant la relation

$$\check{W}_{\delta(k)}^{*t} H = V_{\delta(k)}^{*t} \quad (3.33)$$

Une autre façon de construire la base orthonormale étendue, sans avoir recours au calcul des vecteurs  $\check{W}_{\delta(k)}^{*t}$ ,  $\delta(k) \in S_D$ , est d'utiliser la proposition suivante.

$$B_{m\delta(k)} = \frac{1}{\Gamma_m} V_{\delta(k)}^{*t} B_{pm}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.34)$$

où de la même façon par (annexe I) :

$$B_{m\delta(k)} = \frac{1}{\Gamma_m} \sum_{v=0}^{N_p-1} \sqrt{E_{\delta(k)} E_{\delta(v)}} \phi(p_{\delta(k)} - p_{\delta(v)}) B_{m\delta(v)}, k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.35)$$

### 3.3.4 Turbo Estimation avec conditions initiales optimisées

Cette partie a pour but de mettre en commun toutes les techniques développées plus haut dans ce mémoire. Nous avons vu dans le turbo estimateur simple (section 3.2) qu'il est possible d'utiliser les propriétés codées du signal émis pour améliorer l'estimation de canal mais cette méthode présente une certaine sensibilité par rapport aux imperfections de l'initialisation. Dans les parties 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3 nous avons vu une technique d'estimation de canal basée uniquement sur les pilotes. Cette dernière technique, nous l'utiliserons pour résoudre le problème de l'initialisation du turbo estimateur simple.

#### a. Initialisation

Comme nous l'avons précédemment vu, l'algorithme itératif présenté dans le turbo estimateur simple nécessite une initialisation précise. La base optimisée étendue est, par construction orthogonale au niveau des symboles pilotes. Elle donne, par conséquent, une estimation de canal plus précise et fournissant de meilleures performances.

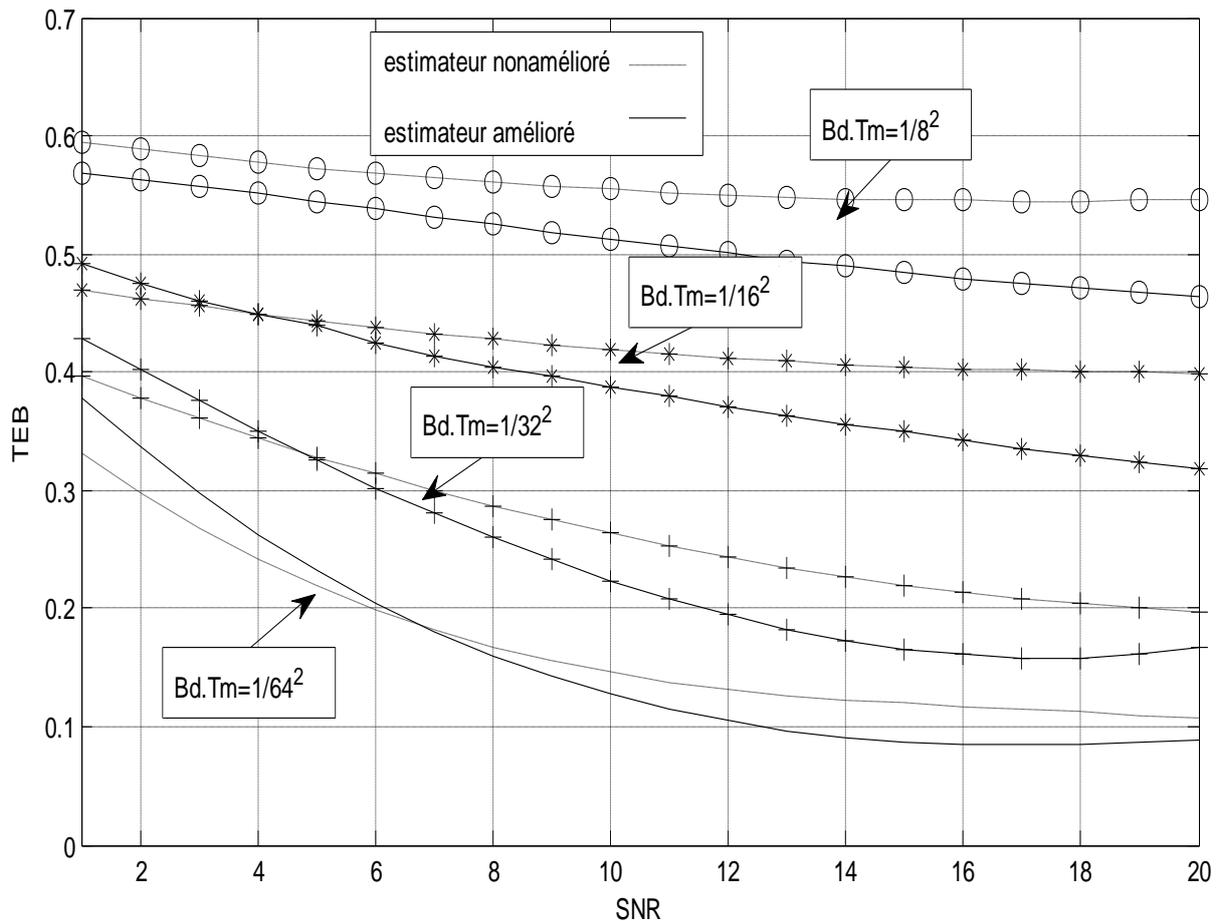


Fig. 3.12 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement (modulation MDP-4,  $L=1$ )

Le résultat de la simulation dans le cas d'un estimateur utilisant une base étendue sont représentés dans la figure 3.12. Cette dernière donne une comparaison des performances entre un estimateur utilisant cette base étendue utilisant relation 3.38 et celle utilise les vecteurs propres de la matrice d'autocorrélation du canal comme base utilisant relation 2.33. Nous constatons que :

- le nouvel estimateur fourni les meilleures performances en comparaison avec l'estimateur non-amélioré qui est l'initialisation de l'algorithme EM.
- Plus le canal devient très sélectif plus l'estimateur améliorée présente des meilleures performances relativement à l'estimateur non amélioré.

### b. Partie itérative

La base des vecteurs utilisés dans la partie itérative reste inchangée, elle utilise toujours les vecteurs propres de la matrice d'autocorrélation du canal. En effet, celle-ci est orthogonale au niveau de tous les symboles du bloc temps-fréquence, ce qui n'est pas le cas de la base optimisée étendue.

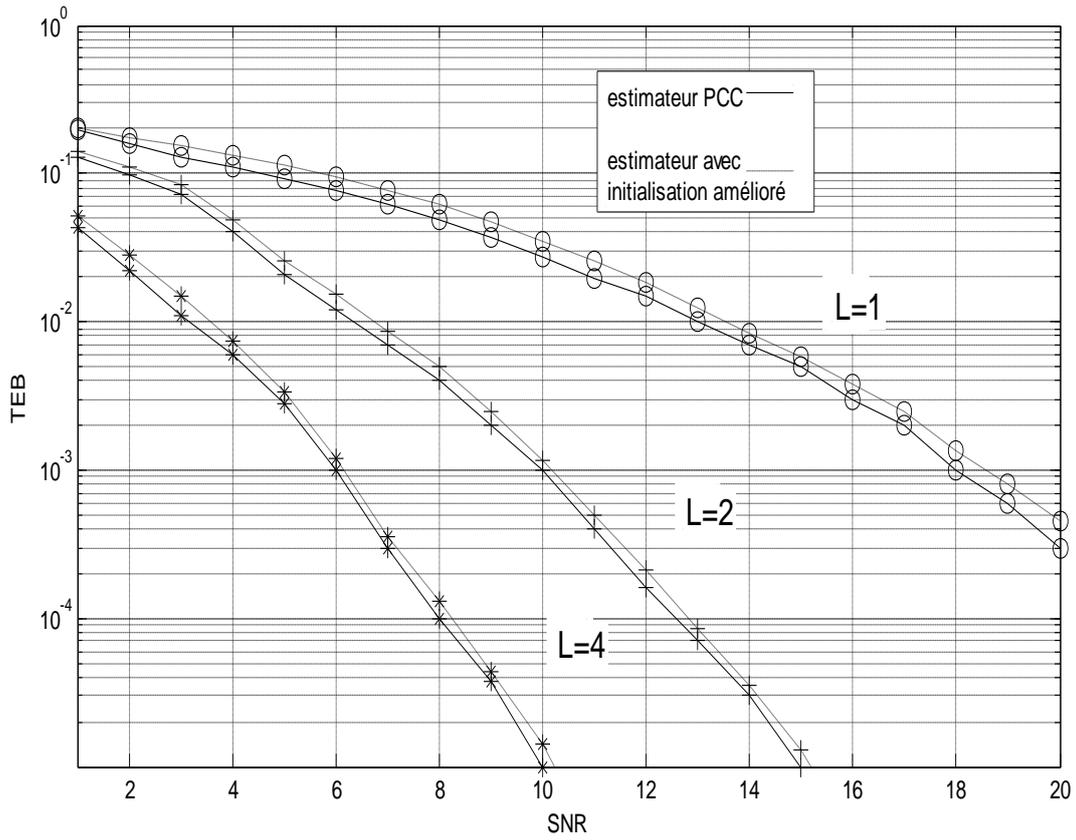


Fig. 3.13 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour  $B_d.T_m = 1/64^2$

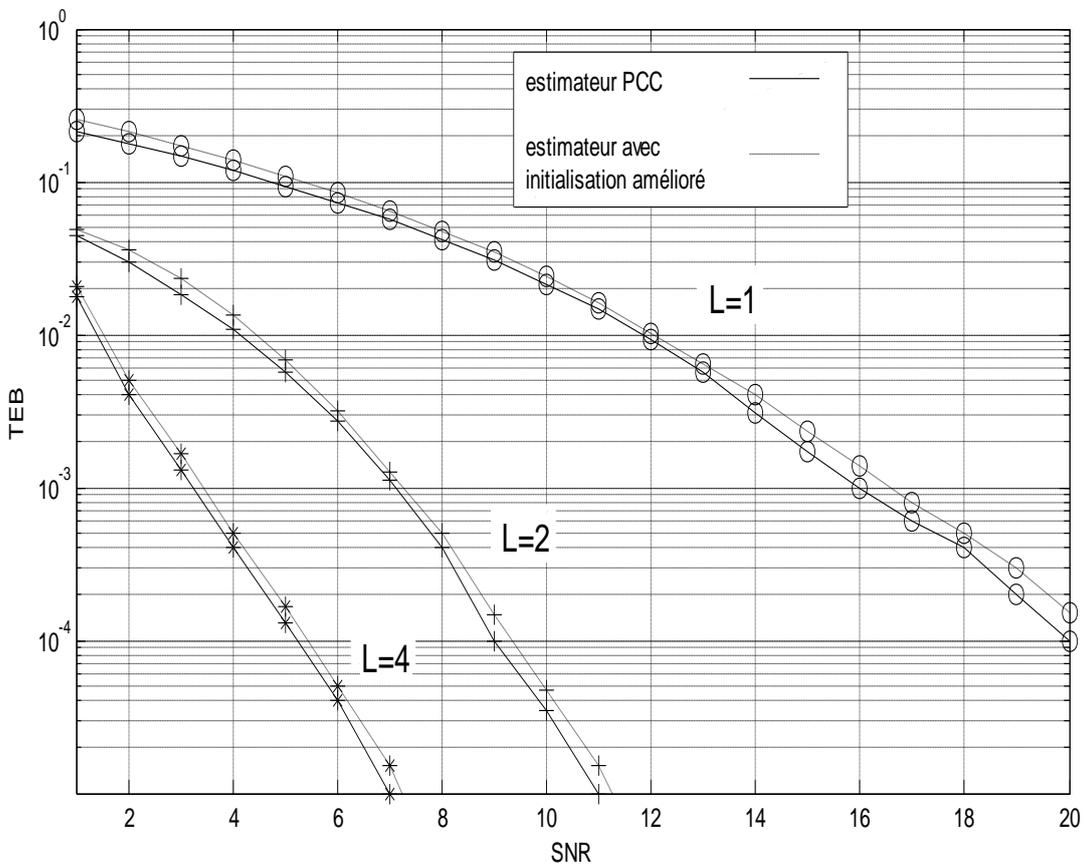


Fig. 3.14 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour  $B_d.T_m = 1/32^2$

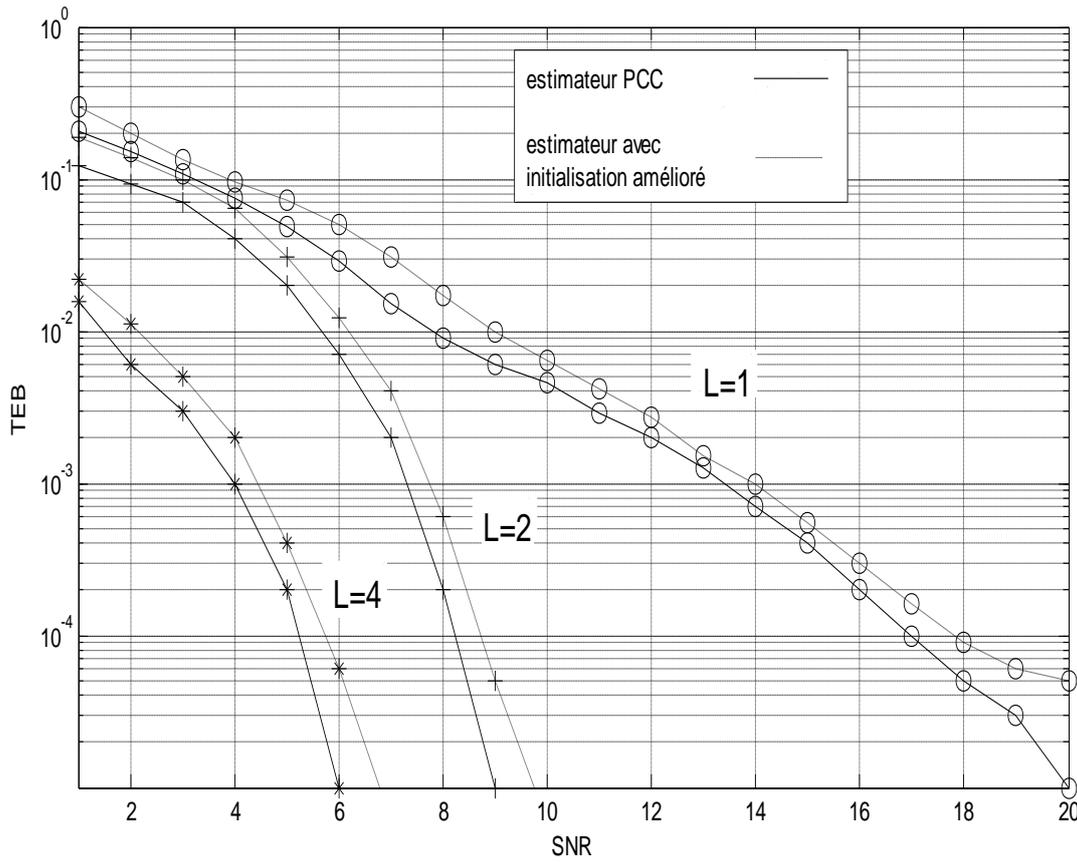


Fig. 3.15 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour  $B_d \cdot T_m = 1/16^2$

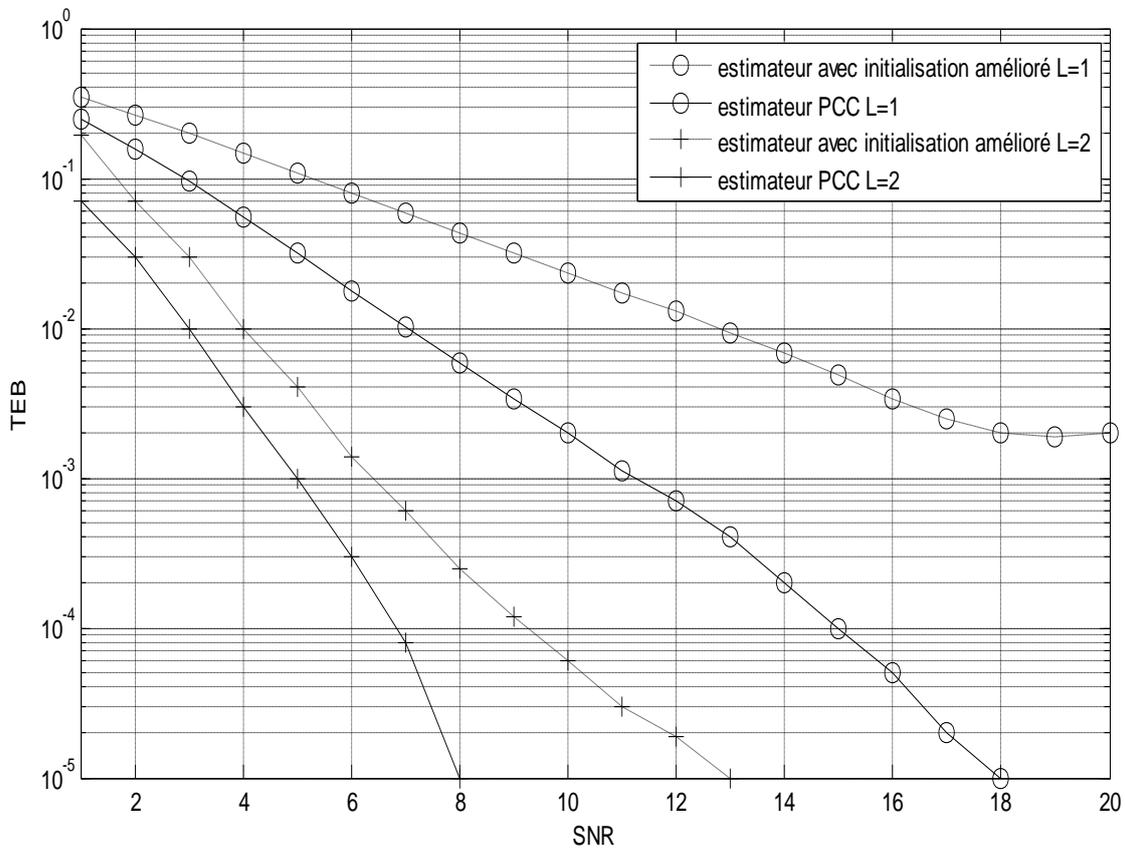


Fig. 3.16: Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour  $B_d \cdot T_m = 1/8^2$

Dans cette méthode, nous avons utilisé l'estimateur basé uniquement sur les pilotes vu dans la partie 3.3.3 comme vecteur d'initialisation du turbo estimateur. Les résultats obtenus sont présentés dans les figures 3.13 à 3.16. En analysons ces résultats comparant le turbo estimateur avec initialisation amélioré avec l'estimateur avec parfaite connaissance du canal(PCC). Nous constatons que :

- Pour le cas ou le canal est non sélectif ( $B_d.T_m = 1/64^2$  et  $1/32^2$ ) les performances de turbo estimateur avec initialisation améliorée (figure 3.13 et 3.14) reste presque les même avec celles d'estimateur avec initialisation non améliorée (figure 3.5 et 3.6).
- Pour  $B_d.T_m = 1/16^2$  les performances du turbo estimateur avec initialisation améliorée (figure 3.15) s'améliore par rapport au turbo estimateur avec initialisation non améliorée (figure 3.7) et se rapproche de l'estimateur hypothétique (PCC).
- Pour  $B_d.T_m = 1/8^2$ , les performances du turbo estimateur avec initialisation améliorée (figure 3.16) s'améliore considérablement et la saturation se repousse encore vers des valeurs de SNR plus élevé en comparaison avec le turbo estimateur avec initialisation non améliorée (figure 3.8).

### 3.3 Conclusion

Réaliser une estimation de canal avec décodage conjoint mène à l'obtention de performances encore meilleures que dans le chapitre précédent et permet avant tout d'améliorer la robustesse de l'estimateur par rapport à une erreur sur le modèle du canal. De plus, l'utilisation d'un entrelacement permet de répartir l'erreur quadratique sur le canal à l'ensemble des symboles du bloc plutôt que sur les symboles situés à la périphérie du bloc.

Cependant, comme toutes les techniques basées sur l'algorithme EM, la partie initialisation est fondamentale pour la convergence et les performances obtenues.

Le problème d'initialisation est due principalement à que la base des vecteurs propres aux positions des symboles pilotes ne forme en aucun cas une base orthogonale. La projection réalisée à l'initialisation jusqu'alors n'est donc pas une projection orthogonale et ne constitue pas un traitement optimal de l'information apportée par les symboles pilotes.

C'est pour ça dans la troisième partie de ce chapitre nous avons proposé pour résoudre ce problème une nouvelle base de vecteurs propres uniquement consacrée à l'estimation de canal au sens du Maximum a Posteriori à partir de symboles connus. Ce nouvel algorithme d'estimation de canal optimal est servi à l'initialisation de l'algorithme itératif présenté dans la deuxième partie et permet d'améliorer les performance de notre estimateur .

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté des méthodes d'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence pour des systèmes OFDM. Ces techniques sont basées sur une modélisation du canal de propagation utilisant le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève. La première méthode est un estimateur itératif de canal très sélectif en temps et en fréquence basé sur l'algorithme EM. La deuxième méthode est la même avec la première méthode à la différence que les données sont codées (turbo estimateur simple). Dans la troisième méthode nous avons étudié une nouvelle méthode d'estimation de canal n'utilisant que les symboles pilotes. Cette technique est utilisée comme l'initialisation de l'algorithme itératif de la deuxième méthode qui obtient alors une initialisation de meilleure qualité.

La première méthode fournit de bonnes performances par rapport à des algorithmes de référence basés sur le critère des moindres carrés et sur la transformée de Fourier bidimensionnelle. Mais l'initialisation de cette méthode doit être très précise et la robustesse de cet estimateur par rapport au  $B_d T_m$  peut être améliorée.

La deuxième méthode, mène à l'obtention de performances encore meilleures que dans la première méthode et permet avant tout d'améliorer la robustesse de l'estimateur par rapport à une erreur sur le modèle du canal. De plus, l'utilisation d'un entrelacement permet de répartir l'erreur quadratique sur le canal à l'ensemble des symboles du bloc plutôt que sur les symboles situés à la périphérie du bloc. Mais ces performances restent modestes lorsque le canal devient très sélectif.

La troisième méthode permet de rectifier les défauts d'initialisation de la deuxième méthode, et d'améliorer d'avantage les performances du système lorsque le canal devient très sélectif.

Les méthodes classiques offrent des résultats moins performants relativement à ces méthodes. Car les méthodes basées sur le critère MC, par définition, caractérisent un canal dont le modèle ne correspond pas à sa réalité. Le modèle de canal de la méthode basée sur la TFD-2D dépend du filtrage dans l'espace de transformation. Le canal est trop variable en temps et en fréquence et le filtrage réalisé n'arrive pas à contenir la contribution de la fonction de diffusion centrale. Le filtrage récupère les interventions de plusieurs fonctions de diffusion décalées et ne peut donc représenter correctement le canal.

En perspective nous avons considéré dans ce travail que les capteurs en réception sont décorrélés les uns des autres. Il sera intéressant d'étudier une technique de traitement d'antenne basée sur la méthode d'estimation de canal présentée dans ce mémoire en considérant les différentes branches corrélées entre elles. Les différents estimateurs de canal proposés dans ce mémoire pourront être appliqués dans la norme HIPERLAN 2 utilisée dans le projet RNRT FESTIVAL.

## Références bibliographiques

- [1] R. W. Chang. Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission. *The Bell System Tech. Journ*, pages 1775-1796, Dec. 1966.
- [2] European Telecommunications Standards Institute ETSI. Radio broadcasting systems, digital audio broadcasting (DAB) to mobile, portable and fixed receivers. In ETS 300 401, Valbonne, France, Feb. 1995.
- [3] European Telecommunications Standards Institute ETSI. Digital broadcasting for television, sound and data services. In prETS 300 744(draft version 0.0.3), Avr. 1996.
- [4] M. Bellanger. *Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif*. Masson, Paris, 1989.
- [5] K. Fazel et S. Kaiser. *Multi-Carrier and Spread Spectrum Systems*, pages 24-30. John Wiley & Sons, 2003.
- [6] H. Schulze et C. Lüders, «Theory and application of OFDM and CDMA», Wiley, G Bretagne, 2005.
- [7] S. Kaiser et K. Fazel, «Multi-carrier and spread spectrum systems», Wiley, G Bretagne, 2003.
- [8] S. Nobilet, «Etude et optimisation des techniques MC-CDMA pour les futures générations de systèmes de communication hertziennes», INSAR, France, 2003.
- [9] J.G. Remy, J. Cuegniet et C. Siben, «Systèmes de radiocommunication avec les mobiles», Eyrolles, France, 1997.
- [10] P.A. Bello, «Characterization of randomly time-variant linear channels», *IEEE Transactions on Communications Systems*, pages 360-393, Décembre, 1963.
- [11] S. Kaiser, «Multi-carrier CDMA mobile radio systems, analysis and optimization of detection, decoding and channel estimation», PhD thesis, Düsseldorf, 1998.
- [12] N. Chotikakamthorn and H. Suzuki, « On identifiability of ofdm blind channel estimation », In VTC'99. IEEE, 1999.
- [13] A.D. KORA, « architecture des systèmes multi-antennes et estimation de canal », PhD thesis, Limoges, 2007.
- [14] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate. *IEEE Trans. on Information Theory*, pages 284-287, Mar. 1974.
- [15] P. Frenger and A. Svensson. A decision directed coherent detector for ofdm. In *Vehic. Tech. Conf. VTC'96*, pages 1584\_1588, Atlanta, GA, Apr. 1996. IEEE.

- [16] V. Engels and H. Rohling. Differential modulation techniques for a 34 mbit/s radio channel using orthogonal frequency-division multiplexing. *Wireless Pers. Commun.*, 2(1-2): 29-44, 1995.
- [17] V. Engels and H. Rohling. Multilevel differential modulation techniques (64-dpsk) for multicarrier transmission systems. *Eur. Trans. Telecomm. Rel. Technol.*, 6(6): 633-640, Nov. 1995.
- [18] C. Reiners and H. Rohling. Multicarrier transmission technique in cellular mobile communications systems. In *IEEE Vehic. Technol. Conf. (VTC'94)*, pages 1645-1649, Stockholm, Sweden, Jun. 1994.
- [19] H. Rohling and R. Grünheid. Multicarrier transmission technique in mobile communication systems. In *RACE Mobile Commun. Summit*, pages 270-276, Cascais, Nov. 1995.
- [20] T. de Couasnon, R. Monnier, and J. B. Rault. OFDM for digital TV broadcasting. *Signal Proc*, 39(1-2): 1-32, Sep. 1994.
- [21] M. de Courville. Utilisation de bases orthogonales pour l'algorithmique adaptative et l'égalisation des systèmes multiporteuses. PhD thesis, Telecom Paris, Paris, France, Oct. 1996.
- [22] R. W. Heath and G. B. Giannakis. Blind channel identification for multirate precoding and OFDM systems. In *DSP'97*, 1997.
- [23] X. Cai and A. N. Akansu. A subspace method for blind channel identification in OFDM systems. *Bn IEEE*, 2000.
- [24] B. Muquet and et al. A subspace based blind and semi-blind channel identification method for OFDM systems. *IEEE*, 1999.
- [25] E. Moulines, P. Duhamel, J.F. Cardoso, and S. Mayrargue. Subspace methods for the blind identification of multichannel fir filters. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 43(2): 516-525, Feb. 1995.
- [26] N. Chotikakamthorn and H. Suzuki. On identifiability of OFDM blind channel estimation. In *VTC'99. IEEE*, 1999.
- [27] M. L. Moher and J. H. Lodge. Tcmp - a modulation and coding strategy for rician-fading channels. *IEEE Journal on Select. Areas in Commun*, 7(9): 1347-1355, Dec. 1989.
- [28] J. K. Cavers. An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels. *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, 40(4), Nov. 1991.
- [29] P. Höher. Tcm on frequency-selective land-mobile fading channels. In *Tirrenia Int. Workshop Digit. Commun.*, Tirrenia, Italy, Sep. 1991.
- [30] O. Edfors and et al. OFDM channel estimation by singular value decomposition. *IEEE Trans. on Commun*, 46(7), Jul. 1998.

- [31] A. Huang and Y. Zhao. Estimating channel response from pilot subcarriers pairs for ofdm systems. IEEE, 1997.
- [32] J.K. Moon and S. I. Choi. Performance of channel estimation methods for ofdm systems in a multipath fading channels. IEEE Trans. on Consum. Electr., 46(1) :161-170, Feb. 2000.
- [33] M.X. Chang and Y. T. Su. 2d regression channel estimation for equalizing ofdm signals. In VTC'2000. IEEE, 2000.
- [34] J.J. Van de beek, O. Edfors, M. Sandell, S.K. Wilson et O.P. Worjesson, « on channel estimation in OFDM system », IEEE vehicular technology conference, vol.2, pp.815-819, juillet 1995.
- [35] J.J. Van de beek, O. Edfors, M. Sandell, S.K. Wilson et O.P. Worjesson, « Analysis of DFT-based channel estimators for OFDM », wireless personal communication, vol. 12, N°. 1 pp. 55-70, juillet 1995.
- [36] X. Ma, H. Kobayashi et S. C. Schwartz, « EM-Based Channel Estimation Algorithms for OFDM », EURASIP Journal on Applied Signal Processing, Vol. 2004, N°. 10, pp. 1460-1477, 2004.
- [37] P. Hoëher, S. Kaiser, and P. Robertson. Two-dimensional pilot-symbol-aided channel estimation by wiener filtering. IEEE, pages 1845\_1848, 1997.
- [38] V.P. Kaasila. Performance analysis of an ofdm system using data-aided channel estimation. IEEE, 1999.
- [39] P. Hoëher. Tcm on frequency-selective land-mobile fading channels. In Tirrenia Int. Workshop Digit. Commun., Tirrenia, Italy, Sep. 1991.
- [40] G.L. Stüber and M. Russel. Terrestrial digital video broadcasting for mobile reception using ofdm. In Globecom'95, pages 2049-2053, Singapore, Nov. 1995.
- [41] D.E. Dudgeon and R. M. Mersereau. Multidimensional digital signal processing. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
- [42] L.L. Scharf. Statistical signal processing : detection, estimation, and time series analysis. Addison-Wesley, 1991.
- [43] M. Sandell, S.K. Wilson et O.P. Worjesson, « OFDM Channel estimation by Singular Value Decomposition », IEEE Transactions on Communications, vol.46, N°. 7, pp.931-939, juillet 1998.
- [44] P.Strobach, « Low-Rank Adaptive Filters », IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44, N°. 12, pp.2932-2947, décembre 1996.
- [45] O. Edfors, M. Sandell, S.K. Wilson et O.P. Worjesson, « OFDM Channel estimation by Singular Value Decomposition », IEEE Transactions on Communications, vol.46, N°. 7, pp.931-939, juillet 1998.

- [46] X. Dong, W.S. Lu, « Linear interpolation in pilot symbol assisted channel estimation for OFDM », *IEEE Trans. on wireless communication*, vol. 6, no. 5/pp1910-1920, Mar 2007
- [47] F. Tufvesson and T. Maseng, « Pilot assisted channel estimation for ofdm in mobile cellular systems. IEEE, 1997.
- [48] S.B. Bulumulla, « An adaptive diversity receiver for ofdm in fading channels », IEEE, 1998.
- [49] S.B. Bulumulla, S. A. Kassam, and S. S. Venkatesh, « A systematic approach to detecting ofdm signals in a fading channel », *IEEE Trans. on Commun.*, 48(5), May. 2000.
- [50] V. Mignone, A. Morello, and M. Visintin, « Cd3-ofdm : A new channel estimation method to improve the spectrum efficiency in digital terrestrial television systems », In *International Broadcasting Convention. IEE*, 14-18 Sep. 1995.
- [51] L. Jarbot, « Combined decoding and channel estimation of ofdm systems in mobile radio networks », IEEE, 1997.
- [52] R. F. Ormondroyd and E. A. Al-Susa, « A high efficiency channel estimation and equalization strategy for a broadband cofdm system ».
- [53] Y. Zhao and A. Huang, « A novel channel estimation method for ofdm mobile communication systems based on pilot signals and transform-domain processing », IEEE, 1997.
- [54] M. SIALA, E. JAFFROTS, « semi-Blind maximum a posteriori fast fading Channel estimation for multicarrier Systems », *GRETSI 99*, September 99, Vannes, France
- [55] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin, « Maximum-likelihood from incomplete data via the em algorithm », *J. Roy. Statist. Soc.*, 39 :1-17, 1977.
- [56] C. F. Wu, « On the convergence properties of the em algorithm », *Ann. Stat.*, 11(1) :95-103, 1983.
- [57] D. L. Snyder and M. I. Miller, « Random processes in time and space », Springer-Verlag, New York, 1991.
- [58] M. Feder and E. Weinstein, « Parameter estimation of superimposed signals using the em algorithm », *Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 36 :477-489, Apr. 1988.
- [59] H. V. Poor, « On parameter estimation in ds/ssma formats », In *Advances in Communications and Control Systems*, pages 59-70, Baton Rouge, LA, Oct. 1988.
- [60] G. K. Kaleh, « Joint decoding and phase estimation via the expectation-maximization algorithm », In *Int. Symp. on Information Theory*, San Diego, CA, Jan. 1990.
- [61] C. N. Georghiades and J. C. Han, « Optimum decoding of trellis-coded modulation in the presence of phase-errors », In *Int. Symp. on Information Theory and Its Applications (ISITA'90)*, Hawai, Nov. 1990.

- [62] C.N. Georghiades and D. L. Snyder, « The expectation-maximization for symbol unsynchronized sequence detection », IEEE Trans. Commun., 39 :54-61, Jan. 1991.
- [63] C.N. Georghiades and D. L. Snyder, « The expectation-maximization for symbol unsynchronized sequence detection », IEEE Trans. Commun., 39 :54-61, Jan. 1991.
- [64] S. M. Zabin and H. V. Poor, « Efficient estimation of class a noise parameters via the em algorithm », IEEE Trans. Inform. Theory, 37 :60-72, Jan. 1991.
- [65] J.W. Modestino, « Reduced-complexity iterative maximum-likelihood sequence estimation on channels with memory », In Int. Symp. on Inform. Theory, San Antonio, TX, Jan. 1993. IEEE.
- [66] Lavielle. Discussion of meng and van dik's paper, « The em algorithm - an old folk song to a fast new tune », J.R. Stat. Soc. B, 59(3) :556-557, 1997.
- [67] L. R. Liporace, « Maximum likelihood for multivariate observations of markov sources », IEEE Trans. on Inform. Theory, IT-28 :729-734, Sep. 1982.
- [68] E.JAFFROT, M.SIALA, « Turbo channel estimation for OFDM systems on highly time and frequency selective channels »,GRETSI, September 2000, Vannes, France
- [69] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima. « Near shannon limit error-correcting coding and decoding : Turbo-codes », In ICC'93, pages 1064-1070, Geneva, Switzerland, May 1993. IEEE.
- [70] C. Berrou and A. Glavieux. « Near optimum error correcting coding and decoding : Turbo-codes », IEEE Trans. on Commun., 44(10) :1261-1271, Oct. 1996.
- [71] C. Douillard, M. Jézéquel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux, « Iterative correction of intersymbol interference : Turbo-equalization », ETT, 6(5) :507-511, Sep.-Oct. 1995.
- [72] A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux, « Turbo-detection : a new approach to combat channel frequency selectivity. In ICC'97, Montreal, Canada, 8-12 June 1997.
- [73] M. Siala, « Maximum a posteriori fast fading channel estimation based exclusively on pilots symbols », annals of telecommunication, Springer Paris, vol 56, nov 5-10/pp 569-586, sept 2001.

## Annexe A

# Propriétés de l'algorithme EM

### A.1 Théorème 1 : Croissance des probabilités a posteriori

L'estimation au sens du MAP  $\{\hat{G}_l\}_{l=0}^{L-1}$  est donnée par l'expression (A.1) :

$$\{\hat{G}_l\}_{l=0}^{L-1} = \mathop{\text{arg}}_{\{G_l\}_{l=0}^{L-1}} \max p(\{G_l\}_{l=0}^{L-1} | \{R_l\}_{l=0}^{L-1}) \quad (\text{A.1})$$

Pour résoudre ce problème, l'algorithme EM utilise la fonction auxiliaire (A.2) :

$$Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l'\}_{l=0}^{L-1}) = \sum_A p(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G_l\}_{l=0}^{L-1}) \log p(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G_l'\}_{l=0}^{L-1}). \quad (\text{A.2})$$

Démontrons que la fonction auxiliaire induit une croissance monotone de  $p(\{G_l\}_{l=0}^{L-1} | \{R_l\}_{l=0}^{L-1})$

Pour cela, nous montrerons que  $Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l'\}_{l=0}^{L-1}) > Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l\}_{l=0}^{L-1})$ .

Pour simplifier l'écriture, notons  $Q(G, G')$  la fonction  $Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l'\}_{l=0}^{L-1})$  et  $Q(G, G)$  la fonction  $Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l\}_{l=0}^{L-1})$ .

$$Q(G, G') - Q(G, G) = \sum_A p(\{R_l\}, A, \{G_l\}) \log \frac{p(\{R_l\}, A, \{G_l'\})}{p(\{R_l\}, A, \{G_l\})} \quad (\text{A.3})$$

L'inégalité

$$\log x \leq x - 1, \text{ avec égalité si et seulement si } x = 1$$

nous permet d'aboutir à l'expression suivante

$$Q(G, G') - Q(G, G) \leq \sum_A p(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G_l\}_{l=0}^{L-1}) \left( \frac{p(\{R_l\}, A, \{G_l'\})}{p(\{R_l\}, A, \{G_l\})} - 1 \right)$$
$$Q(G, G') - Q(G, G) \leq \sum_A \left( p(\{R_l\}, A, \{G_l'\}) - p(\{R_l\}, A, \{G_l\}) \right) \quad (\text{A.4})$$

Ce qui signifie que lorsque  $Q(G, G') - Q(G, G) > 0$  alors

$$\sum_A \left( p(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G_l'\}_{l=0}^{L-1}) - p(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G_l\}_{l=0}^{L-1}) \right) > 0 \quad (\text{A.5})$$

et la fonction auxiliaire induit une croissance monotone de  $p(\{G_l\}_{l=0}^{L-1} | \{R_l\}_{l=0}^{L-1})$

## A.2 Théorème 2 : Point critique de la probabilité a posteriori

Calculons le gradient de la probabilité conjointe de  $\{R^l\}_{l=0}^{L-1}$  et  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$

$$\begin{aligned}\nabla_{GP}(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) &= \nabla_G \sum_A p(\{R^l\}, A, \{G^l\}) \\ &= \sum_A \nabla_{GP}(\{R^l\}, A, \{G^l\}) \\ &= \sum_A p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) \nabla_G \log(p(\{R^l\}, A, \{G^l\})) \\ &= \nabla_{G^l} Q(\{G^l\}, \{G^l\}) \Big|_{\{G^l\}=\{G^l\}}\end{aligned}\tag{A.6}$$

C'est à dire

$$\nabla_{GP}(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) = 0 \Leftrightarrow \nabla_{G^l} Q(\{G^l\}, \{G^l\}) \Big|_{\{G^l\}=\{G^l\}} = 0\tag{A.7}$$

$\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$  est un point critique de  $p(\{R^l\}, A, \{G^l\})$  si et seulement si il est un point fixe de  $Q(\{G^l\}, \{G^l\})$ .

## Annexe B

### Expression analytique de l'estimateur

La relation de récurrence entre  $\{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}$  et  $\{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}$  est recherchée. On calcule la nouvelle estimation  $\{G^{l(d+1)}\}_{l=0}^{L-1}$  qui maximise  $Q(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1})$  en fonction de  $\{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1}$ . Tout d'abord, on remarque que le terme logarithmique de  $Q(G, G')$  peut être exprimé par (B.1) :

$$\log \left( p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) \right) = \log p(A) + \log p(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}) + \log p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1} | A, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) \quad (\text{B.1})$$

Le premier terme de cette expression n'intervient pas dans la maximisation de  $Q(G, G')$  par rapport à  $\{G^l\}_{l=0}^{L-1}$ . Le second terme peut être exprimé explicitement :

$$\begin{aligned} \log p(\{G^l\}_{l=0}^{L-1}) &= \log \left( \prod_{l=0}^{L-1} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\pi \Gamma_k^l} \exp \left( -\frac{G_k^l}{\Gamma_k^l} \right) \right) \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left( -\log(\pi \Gamma_k^l) - \frac{G_k^l}{\Gamma_k^l} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Finalement, le dernier terme peut être ré-écrit :

$$\begin{aligned} \log p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1} | A, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) &= \log \left( \prod_{l=0}^{L-1} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\pi I_0} \exp \left( -\frac{1}{I_0} \left| R_k^l - A \sum_{m=0}^{N-1} G^l B_{mk} \right|^2 \right) \right) \\ &= -LN \log(\pi I_0) - \frac{1}{I_0} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \left| R_k^l - A \sum_{m=0}^{N-1} G^l B_{mk} \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

En remplaçant ces expressions dans celle de  $Q(G, G')$ , on obtient :

$$\begin{aligned} Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l'}\}_{l=0}^{L-1}) &= \sum_A \left( p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A, \{G^l\}_{l=0}^{L-1}) \log p(A) + \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left( -\log(\pi \Gamma_k^l) - \frac{G_k^l}{\Gamma_k^l} \right) \right. \\ &\quad \left. - LN \log(\pi I_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \left| R_k^l - A \sum_{m=0}^{N-1} G^l B_{mk} \right|^2 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1}) = C - p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{G'_l}{\Gamma_k^l} - \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in \Omega} p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, A_k = A, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) |R_k^l - A \sum_{m=0}^{N-1} G'_m B_{mk}|^2 \quad (B.5)$$

où  $C$  est un terme additif indépendant de  $\{G'_l\}_{l=0}^{L-1}$ . Pour maximiser  $Q(G, G')$  par rapport à  $\{G'_l\}_{l=0}^{L-1}$ , on dérive l'expression de  $Q(G, G')$  par rapport à  $\{G'_l\}_{l=0}^{L-1}$ . Pour cela, on représente les coefficients complexes  $\{G'_l\}_{l=0}^{L-1}$  sous forme polaire. On écrit les coefficients  $G'_l$  sous la forme suivante :

$$G'_l = \rho_k^{l'} \exp(j\theta_k^{l'}) \quad (B.6)$$

Où  $\rho_k^{l'}$  et  $\theta_k^{l'}$  sont respectivement l'amplitude et la phase de  $G'_l$  pour  $l = 0, \dots, L-1$  et  $k = 0, \dots, N-1$  les dérivées de  $Q(G, G')$  par rapport à  $\rho_k^{l'}$  et  $\theta_k^{l'}$  sont données par :

$$\frac{\partial Q(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1})}{\partial \rho_k^{l'}} = -\frac{2}{N_0} p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \left( \left(1 + \frac{I_0}{\Gamma_m^l}\right) \rho_m^{l'} - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in s_k} p(A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \operatorname{Re} \{R_k^l A^* e^{-j\theta_m^{l'}} B_{mk}^*\} \right) \quad (B.7)$$

$$= -\frac{2}{N_0} p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \left( \left(1 + \frac{I_0}{\Gamma_m^l}\right) \rho_m^{l'} - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in s_k} p(A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \operatorname{Re} \{R_k^l A^* e^{-j\theta_m^{l'}} B_{mk}^*\} \right) \quad (B.7)$$

et

$$\frac{dQ(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1})}{d\theta_k^{l'}} = -\frac{2\rho_m^{l'}}{N_0} p(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in \Omega} p(A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \operatorname{Re} \{R_k^l A^* e^{-j\theta_m^{l'}} B_{mk}^*\} \quad (B.8)$$

Pour obtenir ces expressions, on a utilisé le fait que les symboles normalisés sont constants (égaux à 1) et que les  $L$  bases  $\{B_k^l\}_{k=0}^{N-1}$ ,  $l = 0, \dots, L-1$  sont orthonormales. En égalant ces deux équations à zéro, on obtient :

$$\left(1 + \frac{N_0}{\Gamma_m^l}\right) G_m^{l(d+1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in \Omega} p\left(A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right) (R_k^l A^* B_{mk}^*) \quad (B.9)$$

on pose alors

$$w_m^l = \frac{1}{1 + N_0/\Gamma_m^l} \quad (B.10)$$

et en réordonnant l'expression précédente, on obtient finalement :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \sum_{k=0}^{N-1} R_k^l \left( \sum_{A \in \Omega} A p\left(A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right)^* \right) B_{mk}^* \quad (B.11)$$

## Annexe C

### Cas particuliers

En utilisant la relation de Bayes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \Omega} A P\left(A_{\delta(k)} = A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right) \\ = \sum_{A \in \Omega} A \frac{P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \mid A_{\delta(k)} = A\right) P(A_{\delta(k)} = A)}{P(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1})} \end{aligned} \quad (C.1)$$

Or,

$$P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right) = \sum_{A \in \Omega} P(A_{\delta(k)} = A) P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \mid A_{\delta(k)} = A\right) \quad (C.2)$$

d'où,

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \Omega} A P\left(A_{\delta(k)} = A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right) \\ = \sum_{A \in \Omega} \frac{AP\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \mid A_{\delta(k)} = A\right) P(A_{\delta(k)} = A)}{\sum_{A \in \Omega} P(A_{\delta(k)} = A) P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \mid A_{\delta(k)} = A\right) P(A_{\delta(k)} = A)} \end{aligned} \quad (C.3)$$

#### C.1 Modulation MDP-2

Dans le cas d'une modulation MDP-2, les  $A$  prennent leurs valeurs dans  $\Omega = \{-1, 1\}$  et

$$P(A_{\delta(k)} = A) = \frac{1}{2}$$

L'équation C.3 devient alors

$$\sum_{A \in \Omega} A P\left(A_{\delta(k)} = A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right)$$

$$= \sum_{A \in \Omega} \frac{P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = 1\right) - P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = -1\right)}{P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = 1\right) + P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = -1\right)} \quad (C.4)$$

De plus, le signal reçu s'écrit

$$R_{\delta(k)}^l = C_{\delta(k)}^l A_{\delta(k)} + N_{\delta(k)}^l \quad (C.5)$$

Et  $N_{\delta(k)}^l$  est un bruit Gaussien de variance  $N_0$ , La probabilité

$P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = 1\right)$  devient, d'après C.5 :

$$\begin{aligned} & P\left(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = 1\right) \\ &= \prod_{l=0}^{L-1} \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \left(R_{\delta(k)}^l - \sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} \left( (R_{\delta(k)}^l)^2 + \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^2 - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. 2\operatorname{Re}\left[R_{\delta(k)}^l \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^*\right] \right) \right) \quad (C.6) \end{aligned}$$

Finalement, dans l'expression de  $\sum_{A \in \Omega} A P\left(A_{\delta(k)} = A \middle| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right)$ , seul le terme en  $2\operatorname{Re}\left[\sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)}^l \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^*\right]$  intervient dans le calcul. Pour simplifier la lecture des expressions suivantes, nous posons

$$\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)}^l \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^* \quad (C.7)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \Omega} A P\left(A_{\delta(k)} = A \middle| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}\right) &= \frac{\exp\left(2\operatorname{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right) - \exp\left(-2\operatorname{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)}{\exp\left(2\operatorname{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right) + \exp\left(-2\operatorname{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)} \\ &= \tanh\left(2\operatorname{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right) \quad (C.8) \end{aligned}$$

En remplaçant ces probabilités dans l'expression du chapitre, nous obtenons

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left( \sum_{\delta(k) \in S_D} R_{\delta(k)}^l \tanh\left[2\operatorname{Re}\left\{\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right\}\right] B_{\delta(k)m}^* + \sum_{\delta(k) \in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)}^* B_{\delta(k)m}^* \right) \quad (C.9)$$

## C.2 Modulation MDP-4

Dans le cas d'une modulation MDP-4, les  $A$  prennent leurs valeurs dans

$$\Omega = \{e^{-3j\pi/4}, e^{-j\pi/4}, e^{j\pi/4}, e^{3j\pi/4}\}$$

et les probabilités a priori sont

$$P(A_{\delta(k)} = A) = \frac{1}{4}$$

L'équation C.3 devient alors

$$\begin{aligned} & \sum_{A \in \Omega} A P(A_{\delta(k)} = A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) \\ &= \frac{\sum_{A \in \Omega} A P(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} | A_{\delta(k)} = e^{-3j\pi/4})}{\sum_{A \in \Omega} P(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} | A_{\delta(k)} = A)} \end{aligned} \quad (C.10)$$

De plus, le signal reçu s'écrit

$$R_{\delta(k)}^l = C_{\delta(k)}^l A_{\delta(k)} + N_{\delta(k)}^l \quad (C.11)$$

Et  $N_{\delta(k)}^l$  est un bruit Gaussien de variance  $N_0$ : La probabilité

$P(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} | 1)$  devient, d'après C.5 :

$$\begin{aligned} & P(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} | A_{\delta(k)} = e^{j\pi/4}) \\ &= \prod_{l=0}^{L-1} \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \left(R_{\delta(k)}^l - e^{j\pi/4} \sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} \left( (R_{\delta(k)}^l)^2 + \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \operatorname{Re} \left[ R_{\delta(k)}^l \left( e^{j\pi/4} \sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m} \right)^* \right] \right) \right) \end{aligned} \quad (C.12)$$

Finalement, dans l'expression de  $\sum_{A \in \Omega} A P(\{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} | A_{\delta(k)} = A)$ , seul le terme en  $-2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)}^l \left( e^{j\pi/4} \sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m} \right)^* \right]$  intervient dans le calcul. De la même façon que dans la démonstration précédente, pour faciliter la lecture des expressions suivantes, nous posons

$$\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)}^l \left( \sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m} \right)^* \quad (C.13)$$

$$\sum_{A \in \Omega} A P(A_{\delta(k)} = A | \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1}) = \frac{\sum_{A \in \Omega} A \exp\left(\frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left[ A^* \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right]\right)}{\sum_{A \in \Omega} \exp\left(\frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left[ A^* \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right]\right)} \quad (C.14)$$

Le numérateur se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (1+j) \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + (1-j) \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1+j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right. \\
& \quad + (-1+j) \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \\
& \quad \left. + (-1-j) \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1+j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \right. \\
& \quad - \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \\
& \quad + j \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \\
& \quad \left. - j \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1+j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) - \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \right. \\
& \quad \times \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \\
& \quad + \frac{j}{\sqrt{2}} \left( \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) - \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \right. \\
& \quad \left. \times \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Le dénominateur se développe, pour sa part comme suit

$$\begin{aligned}
& \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) - \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (1+j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \\
& \quad - \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ (-1-j) \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \\
&= \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right) \times \\
& \quad \left( \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc l'expression du quotient

$$\begin{aligned}
& \sum_{A \in \Omega} A P \left( A_{\delta(k)} = A \mid \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) - \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right)}{\exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right)} \\
& \quad + \frac{j}{\sqrt{2}} \frac{\exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) - \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right)}{\exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right) + \exp \left( \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ -j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \right] \right)}
\end{aligned}$$

Et puisque  $Re[j \Lambda_{\delta(k)}^{(d)}] = -Im[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}]$ , en écrivant l'expression du quotient sous une forme plus réduite

$$\begin{aligned} \sum_{A \in \Omega} A P \left( A_{\delta(k)} = A \left| \{R^l\}_{l=0}^{L-1}, \{G^{l(d)}\}_{l=0}^{L-1} \right. \right) \\ = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh \left[ \sqrt{2} Re \{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \} \right] \right. \\ \left. + \frac{j}{\sqrt{2}} \tanh \left[ \sqrt{2} Im \{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \} \right] \right) \end{aligned} \quad (C.15)$$

Remplaçons à présent l'expression obtenue dans celle de  $G_m^{l(d+1)}$  et obtenons l'expression vue dans le chapitre

$$\begin{aligned} G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left( \sum_{\delta(k) \in S_D} R_{\delta(k)}^l \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \tanh \left[ \sqrt{2} Re \{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \} \right] + \frac{j}{\sqrt{2}} \tanh \left[ \sqrt{2} Im \{ \Lambda_{\delta(k)}^{(d)} \} \right] \right)^* B_{\delta(k)m}^* \right. \\ \left. + \sum_{\delta(k) \in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)}^* B_{\delta(k)m}^* \right) \end{aligned} \quad (C.16)$$

## Annexe D

# Harmonisation du canal en temps et en fréquence

L'objectif recherché dans cette annexe est de trouver la relation entre les paramètres  $B_d$  et  $T_m$  du canal tels que le canal varie "de la même façon" en temps et en fréquence, c'est à dire que les variances des fonctions de probabilité des retards et de la fréquence Doppler soient égales.

### D.1 Étalement des retards

Considérons  $c(\tau)$  la fonction de probabilité de l'étalement des retards. Notons  $C(f)$  sa transformée de Fourier

$$C(f) = \int c(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau . \quad (D.1)$$

Nous recherchons donc la valeur de la variance de  $\tau$ :  $(\overline{\tau^2} - (\tau)^2)$  pour cela, nous calculons les moments d'ordre 1 et 2 de  $\tau$ :

$$\bar{\tau} = \frac{\int c(\tau) \tau d\tau}{\int c(\tau) d\tau} \quad (D.2)$$

or

$$\overline{\tau^2} = \frac{\int c(\tau) \tau^2 d\tau}{\int c(\tau) d\tau} \quad (D.3)$$

Calcul de la moyenne

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial C(f)}{\partial f} \right|_{f=0} &= \int c(\tau) (-j2\pi\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \Big|_{f=0} \\ &= -j2\pi \int c(\tau) \tau d\tau \end{aligned} \quad (D.4)$$

c'est-à-dire

$$\int c(\tau) d\tau = -\frac{1}{j2\pi} \left. \frac{\partial C(f)}{\partial f} \right|_{f=0} \quad (D.5)$$

Nous connaissons  $C(f)$

$$C(f) = -j2\pi T_m \quad (D.6)$$

D'où

$$\int c(\tau)\tau d\tau = T_m \quad (D.7)$$

et puisque

$$\int c(\tau) d\tau = C(0)=1 \quad (D.8)$$

la moyenne de  $\tau$

$$\tau = T_m \quad (D.9)$$

### Calcul du moment d'ordre 2

De la même façon, nous avons

$$\left. \frac{\partial^2 C(f)}{\partial f^2} \right|_{f=0} = \int c(\tau) (-j2\pi\tau)^2 d\tau \quad (D.10)$$

en déduit

$$\int c(\tau) \tau^2 d\tau = -\frac{1}{(2\pi)^2} \left. \frac{\partial^2 C(f)}{\partial f^2} \right|_{f=0} \quad (D.11)$$

Or,

$$\frac{\partial^2 C(f)}{\partial f^2} = \frac{2(2\pi T_m)^2}{(1 + j2\pi T_m f)^3} \quad (D.12)$$

d'où

$$\int c(\tau) \tau^2 d\tau = 2(T_m)^2 \quad (D.13)$$

### La Variance

$$\sqrt{\text{Var}(\tau)} = \sqrt{\bar{\tau} - \tau^2} = \sqrt{2(T_m)^2 - (T_m)^2} = T_m \quad (D.14)$$

$$\sqrt{\text{Var}(\tau)} = T_m \quad (D.15)$$

## D.2 Étalement Doppler

De la même façon que dans le cas précédent, on définit  $g(\gamma)$  la fonction de densité de probabilité "en cornes" de l'étalement des fréquences Doppler. On définit sa transformée de Fourier  $G(t)$ .

$$G(t) = \int_{-B_d/2}^{B_d/2} g(\gamma) e^{-j2\pi\gamma t} d\gamma \quad (D.16)$$

La fonction  $g(\gamma)$  a pour propriété d'être normalisée

$$\int_{-B_d/2}^{B_d/2} g(\gamma) d\gamma = 1 \quad (D.17)$$

Calcul de la moyenne de  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(t) \Big|_{t=0} &= j2\pi \int_{-B_d/2}^{B_d/2} \gamma g(\gamma) d\gamma \\ &= j2\pi \bar{\gamma} \end{aligned} \quad (D.18)$$

de plus,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t) \Big|_{t=0} = \pi B_d \frac{\partial}{\partial t} J_0(t) \Big|_{t=0} = 0 \quad (D.19)$$

$\gamma$  est donc centré

$$\bar{\gamma} = 0 \quad (D.20)$$

Calcul du moment d'ordre 2 de  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t) \Big|_{t=0} &= -(2\pi)^2 \int_{-B_d/2}^{B_d/2} \gamma^2 g(\gamma) d\gamma \\ &= -(2\pi)^2 \overline{\gamma^2} \end{aligned} \quad (D.21)$$

de plus,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t) \Big|_{t=0} = (\pi B_d)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_0(t) \Big|_{t=0} \quad (D.22)$$

or

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} J_0(t) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} \quad (D.22)$$

d'où

$$\overline{\gamma^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{B_d}{2} \right)^2 \quad (D.24)$$

## La Variance

$$\begin{aligned}\sqrt{\text{Var}(\gamma)} &= \sqrt{\bar{\gamma} - \bar{\gamma}^2} \\ \sqrt{\text{Var}(\gamma)} &= \frac{B_d}{2\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{D.25}$$

### D.3 Expression de $B_d$ et $T_m$ en fonction du produit $B_d T_m$

Dans nos simulations, le canal est caractérisé par le produit  $B_d T_m$  fixé pour chacune de ces simulations. Posons alors

$$B_d T_m = \alpha\tag{D.26}$$

pour une meilleure lecture des relations qui suivent.

Nous voulons que la variance de  $\tau$  et la variance de  $\gamma$  soient égales et nous savons que  $B_d T_m = \alpha$ . Nous avons donc :

$$\frac{B_d}{2\sqrt{2}} = T_m\tag{D.27}$$

D'après D.26 et D.27, nous obtenons

$$\frac{(B_d)^2}{2\sqrt{2}} = \alpha\tag{D.28}$$

d'où

$$B_d = \sqrt{2\alpha\sqrt{2}}\tag{D.29}$$

et

$$T_m = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}}\tag{D.30}$$

ainsi sont choisies les valeurs de  $B_d$  et de  $T_m$  utilisées dans nos simulations.

## Annexe E

### Expression de la variance de l'innovation

Puisque l'innovation  $F$  est indépendante des composantes de  $R_P = (R_{\delta_P(0)}, R_{\delta_P(1)}, \dots, R_{\delta_P(N_P-1)})^t$  nous avons :

$$E[F_{\delta_P(k)} R_{\delta_P(\mu)}^*] = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, N_P - 1 \quad (\text{E.1})$$

ce qui est également vérifié pour les données.

De plus, puisque  $R_{\delta_P(k)} = C_{\delta_P(k)} A_{\delta_P(k)} + N_{\delta_P(k)}$ , nous avons

$$E[R_{\delta_P(\mu)} R_{\delta_P(\mu)}^*] = \sqrt{E_{\delta_P(v)} E_{\delta_P(\mu)}} \phi(p_{\delta_P(v)} - p_{\delta_P(\mu)}) = H_{\mu v} \quad (\text{E.2})$$

Pour  $\mu \neq v$ ,

$$E[R_{\delta_P(\mu)} R_{\delta_P(\mu)}^*] = \sqrt{E_{\delta_P(v)} E_{\delta_P(\mu)}} \phi(p_{\delta_P(v)} - p_{\delta_P(\mu)}) + N_0 = H_{\mu v} + N_0 \quad (\text{E.3})$$

Pour  $\mu = v$  et

$$E[C_{\delta(k)} R_{\delta_P(\mu)}^*] = \sqrt{E_{\delta_P(\mu)} E_{\delta(k)}} \phi^*(p_{\delta_P(\mu)} - p_{\delta(k)}) \quad (\text{E.4})$$

pour des valeurs arbitraires de  $\mu$  et  $k$ . A présent, multiplions les deux côtés de l'expression

$$C_{\delta(k)} = F_{\delta(k)} + \sum_{v=0}^{N_P-1} W_{\delta(k)v}^* R_{\delta_P(v)} \quad (\text{E.5})$$

Par  $R_{\delta_P(v)}^*$  et en en prenant l'espérance mathématique, nous obtenons

$$\sqrt{E_{\delta(\mu)} E_{\delta(k)}} \phi^*(p_{\delta(\mu)} - p_{\delta(k)}) = \sum_{v=0}^{N_P-1} W_{\delta(k)v}^* H_{\mu v} + W_{\delta(k)v}^* N_0 \quad (\text{E.6})$$

Ce qui est équivalent sous forme matricielle à :

$$W_{\delta(k)}^{*t} (H + N_0 I) = V_{\delta(k)}^{*t} \quad (\text{E.7})$$

En utilisant la relation matricielle

$$F_{\delta(k)} = C_{\delta(k)} - W_{\delta(k)}^{*t} R_P \quad (\text{E.8})$$

et sa conjuguée, et en calculant l'espérance mathématique du produit  $F_{\delta_P(k)} F_{\delta_P(k)}^* = |F_{\delta_P(k)}|^2$ , nous obtenons l'expression recherchée de la variance de l'innovation

$$\theta_{\delta(k)} = \phi(0) E_{\delta(k)} - V_{\delta(k)}^{*t} (H + N_0 I) W_{\delta(k)}. \quad (\text{E.9})$$

## Annexe F

# Identité de l'estimée MAP et de la prédiction linéaire EQMM

Le vecteur innovation  $F = (F_{\delta(0)}, F_{\delta(1)}, \dots, F_{\delta(N-1)})^t$  est un vecteur de distribution Gaussienne, centré, et indépendant du vecteur reçu  $R_p$ , de densité de probabilité  $\pi(\cdot)$ . L'estimée au sens du MAP du vecteur canal équivalent  $C$  est définie par

$$\hat{C} = \arg \max_C p(C|R_p).$$

Puisque  $C = F+L$  et puisque  $L$  dépend uniquement du vecteur reçu  $R_p$ , nous avons

$$p(C|R_p) = p(C - L|R_p) = p(F|R_p) = \pi(F) = \pi(C - L)$$

qui atteint son maximum pour  $\hat{C} = L$

## Annexe G

### Expression de l'estimée MAP à partir de la base étendue

Rappelons que la  $k^{\text{ème}}$  composante de l'estimée au sens du MAP,  $\hat{C}$ , du vecteur canal équivalent  $C$  est donnée par

$$\hat{C}_{\delta(k)} = W_{\delta(k)}^{*t} R_p . \quad (\text{G.6})$$

En utilisant la décomposition

$$R_p = \sum_{l=0}^{N_p-1} G_l B_{pl} \quad (\text{G.2})$$

de  $R_p$  sur la base orthonormale  $\{B_{pl}\}_{l=0}^{N_p-1}$ , nous obtenons

$$\hat{C}_{\delta(k)} = \sum_{l=0}^{N_p-1} G_l (W_{\delta(k)}^{*t} B_{pl}) . \quad (\text{G.3})$$

D'un autre côté, en utilisant (G.4)

$$H B_{pl} = \Gamma_l B_{pl} \quad (\text{G.4})$$

et en multipliant à droite les égalités (G.5)

$$W_{\delta(k)}^{*t} (H + N_0 I) = V_{\delta(k)}^{*t} \quad (\text{G.5})$$

et (G.6)

$$\tilde{W}_{\delta(k)}^{*t} H = V_{\delta(k)}^{*t} \quad (\text{G.6})$$

par  $B_{pl}$  et en égalant les deux termes de gauche on trouve (G.7)

$$(\Gamma_l + N_0 I) W_{\delta(k)}^{*t} B_{pl} = \Gamma_l \tilde{W}_{\delta(k)}^{*t} B_{pl} . \quad (\text{G.7})$$

En rappelant la définition (G.8)

$$B_{l\delta(k)} = \tilde{W}_{\delta(k)}^{*t} B_{pl} \quad (\text{G.8})$$

de la base orthonormale étendue  $\{B_{l\delta(k)}\}_{l=0}^{N_p-1}$ , nous obtenons finalement (G.9)

$$\hat{C}_{\delta(k)} = \sum_{l=0}^{N_p-1} w_l G_l B_{l\delta(k)} , \quad (\text{G.9})$$

où le facteur de pondération  $w_l$  est donné par (G.10)

$$w_l = \frac{1}{1 + N_0/\Gamma_l} . \quad (\text{G.10})$$

Cette relation peut être exprimée sous forme matricielle (G.11)

$$\hat{C} = \sum_{l=0}^{N_p-1} w_l G_l B_l . \quad (\text{G.11})$$

## Annexe H

### Construction simplifiée de la base étendue

En rappelant l'expression (E.1)

$$H_{\mu\nu} = \sqrt{E_{\delta_P(\mu)} E_{\delta_P(\nu)}} \phi(p_{\delta_P(\mu)} - p_{\delta_P(\nu)})$$

de la  $(\mu, \nu)^{\text{ème}}$  composante de la matrice de covariance Hermitienne, il est possible de ré-écrire la relation matricielle

$$HB_{pm} = \Gamma_m B_{pm}$$

Comme

$$B_{m\delta(\mu)} = \frac{1}{\Gamma_l} \sum_{\nu=0}^{N_p-1} \sqrt{E_{\delta_P(\mu)} - E_{\delta_P(\nu)}} \phi(p_{\delta_P(\mu)} - p_{\delta_P(\nu)}) B_{m\delta_P(\nu)}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N_p - 1 \quad (\text{H.1})$$

ou , de manière équivalente

$$B_{m\delta_P(k)} = \frac{1}{\Gamma_l} \sum_{\nu=0}^{N_p-1} \sqrt{E_{\delta_P(k)} E_{\delta_P(\nu)}} \phi(p_{\delta_P(k)} - p_{\delta_P(\nu)}) B_{m\delta_P(\nu)}, \quad \delta_P(k) \in S_P \quad (\text{H.2})$$

Pour étendre cette relation aux  $\delta_D(k) \in S_D$ , nous multiplions tout d'abord à gauche l'égalité

$$HB = \Gamma B$$

Par  $\tilde{W}_{\delta(k)}^{*t}$ , et en utilisant la définition

$$B_{m\delta(k)} = \tilde{W}_{\delta(k)}^{*t} B_{pm} \quad (\text{H.3})$$

De  $B_{l\delta(k)}$ , nous obtenons

$$\tilde{W}_{\delta(k)}^{*t} HB_{pm} = \Gamma_m B_{pm} . \quad (\text{H.4})$$

Puis, la relation

$$\tilde{W}_{\delta(k)}^{*t} H = V_{\delta(k)}^{*t} \quad (\text{H.5})$$

nous permet de terminer avec la relation matricielle

$$V_{\delta(k)}^{*t} B_{pm} = \Gamma_m B_{m\delta(k)} \quad (\text{H.6})$$

ou, de manière équivalente

$$B_{m\delta(k)} = \frac{1}{\Gamma_m} \sum_{\nu=0}^{N_p-1} \sqrt{E_{\delta_D(k)} E_{\delta_P(\nu)}} \phi(p_{\delta_D(k)} - p_{\delta_P(\nu)}) B_{m\delta_P(\nu)}, \quad k \in S_D \quad (\text{H.7})$$