

2/96

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE



PROJET DE FIN D'ETUDE

*Pour l'obtention d'un diplôme
d'ingénieur d'État en Électronique*

THÈME

**CONCEPTION ET CONTRÔLE D'UN GYROSCOPE
A TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ ~~DANS~~ POUR
LA NAVIGATION AÉRIENNE**

Proposé par:

Dr. N.LOUAM

Étudié par:

Mohamed BOUKHALFA
Khaled MESSAOUDI

Dirigé par:

Dr. N.LOUAM

Promotion : Juin 1996

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - El Harrach - Alger

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DÉPARTEMENT D'ÉLECTRONIQUE



*Pour l'obtention d'un diplôme
d'ingénieur d'État en Électronique*

THÈME

**CONCEPTION ET CONTRÔLE D'UN GYROSCOPE
A TROIS DEGRÉS DE LIBERTÉ DANS
LA NAVIGATION AÉRIENNE**

Proposé par:

Dr. N.LOUAM

Étudié par:

Mohamed BOUKHALFA
Khaled MESSAOUDI

Dirigé par:

Dr. N.LOUAM

Promotion : Juin 1996

E.N.P. 10, Avenue Hacén Badi - El Harrach - Alger



DEDICACE

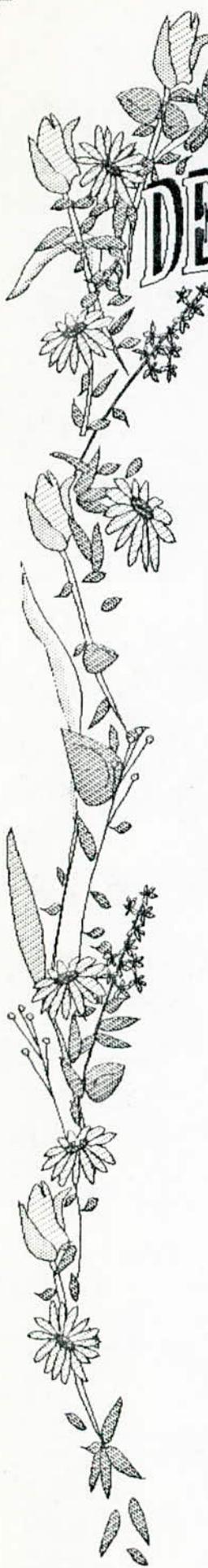
Je dédie ce modeste travail à:

- * *Ma chère grand-mère*
- * *La source de ma réussite : mes très chers parents.*
- * *Mes très chères sœurs: Sabah, F. Zohra, Amina.*
- * *Mon très cher frère : Kamel.*
- * *Mes proches préférés qui m'ont toujours soutenus :
Salim, Abderahim, Hakim, Ghania, Assia, et à
toute la famille Semmana.*
- * *La mémoire de Hacene*
- * *Mon ami et frère Khaled.*

Et à toute personne qui m'est chère.

Mohamed





DEDICACE

Je dédie ce travail :

A ma très chère mère, faible témoignage de mon affection et mon profond dévouement pour tous ses sacrifices.

A mon très cher père, qui a toujours su me conseiller et m'encourager, lui la source de ma réussite.

A mes frères et sœurs.

A toute la famille.

A tous mes amis.

A tous ceux qui me sont chers .

Khaled



Remerciements

Nous tenons à remercier notre enseignant et promoteur D^r N. LOUAM, qui par ses cours, nous avons pu faire une partie de ce travail, et par ses conseils, et orientations, nous avons pu traverser certaines difficultés des autres parties.

Nous exprimons notre reconnaissance envers l'association scientifique Fodhil SKENDER de Médéa, en particulier A. Hamid et K. Ahmed, pour leur complaisance.

Nous remercions, aussi le personnel de la bibliothèque pour leur compétence et leur serviabilité.

Toute notre gratitude pour l'aide de S. LABIOD, et aux encouragements de A et K. MOUAFKI.

Nos derniers remerciements vont à tous ceux qui nous ont si patiemment apporté leur soutien et encouragement, et qui ont mis à notre disposition tout moyen pour achever ce travail.

Khaled & Mohamed.

ملخص

يرمي هذا العمل في مرحلته الاولى الى وضع نموذج رياضي لجهاز "الجيروسكوب" ذي ثلاث درجات للحرية، المستعمل في الملاحة الجوية. من أجل التحكم في هذا الجهاز، قمنا بتطبيق طريقتين : طريقة التحكم بعودة الحالة و تقنية التحكم الامثل. المحاكاة على جهاز الحاسوب تبين أن التحكم الامثل يعطي أكثر كفاءات.

Résumé

Notre étude est consacrée en premier lieu, à établir un modèle mathématique décrivant un gyroscope à trois degrés de liberté utilisé dans la navigation aérienne.

Dans le but de contrôler cet appareil, deux méthodes de commande sont appliquées au système après l'avoir linéarisé :

La méthode de placement de pôles et la technique de la commande optimale.

Les simulations faites sur ordinateur montrent que la deuxième méthode donne plus de performances.

Abstract

This work, in first, is devoted to establish a mathematical model describing a gyroscope with three degrees of freedom, used in aerial navigation.

Two technics of control, were applied to our system after being linearized, which are poles placement and optimal control.

Computer simulations showed that the second technic gives more of performances.

SOMMAIRE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Introduction	1
<u>Chapitre I: Modélisation</u>	6
I.1. Introduction	7
I.2 Gyroscopie expérimentale	7
I.2.1 Caractéristiques mécaniques	8
I.3 Modèles théoriques du gyroscope	8
I.4 Définitions	9
I.5 Rappel sur le mouvement de rotation	9
I.6 Phénomènes gyroscopiques	10
I.6.1 Effets gyroscopiques	11
I.7 Approximation gyroscopique	12
I.8 Méthode d'étude et mise en équations du système	12
I.8.1 Gyroscope à deux degrés de liberté	15
I.9 Conclusion	16
<u>Chapitre II: Théorie du bouclage non linéaire</u>	17
II.1 Introduction	18
II.2 Système Mono-Entrée / Mono-Sortie	18
II.2.1 Notion du degré relatif	18
II.2.2 Forme normale	19
II.2.3 Linéarisation exacte par retour d'état statique	23
II.3 Système Multi-Entrées / Multi-Sorties	25
II.3.1 Notion du degré relatif vectoriel	26
II.3.2 Forme normale	26
II.3.3 Linéarisation exacte par retour d'état statique	27
II.4 Conclusion	31

Chapitre III: Linéarisation exacte et commande du gyroscope	32
III.1 Introduction	33
III.2 Linéarisation exacte	33
III.2.1 Modèle du gyroscope	33
III.2.2 Degré relatif vectoriel	34
III.2.3 Commande linéarisante	37
III.3 Commande par placement de pôles	40
III.3.1 Détermination des gains	41
III.4 Résultats de la simulation	47
III.5 Conclusion	56
Chapitre IV: Commande optimale	57
IV.1 Introduction	58
IV.2 Optimisation dynamique par l'approche de Pontryaguin	58
IV.3 Problème de la commande optimale linéaire	59
IV.4 Minimisation du critère	60
IV.5 Problème de régulation	62
IV.6 Degré de stabilité α dans la commande optimale	63
IV.7 Choix des matrices de pondération	64
IV.7.1 Méthode des pénalités	64
IV.7.2 Méthode de Bryson	65
IV.8 Commande optimale du gyroscope à trois degrés de liberté	66
IV.9 Simulation numérique	66
IV.10 Double optimisation	72
IV.11 Conclusion	77
Conclusion générale	78
Annexes	80
Bibliographie	87

INTRODUCTION

En 1810 Bohnenberger inventa le premier gyroscope que le physicien français Foucault utilisa en 1852 pour démontrer la rotation de la terre; c'est lui qui inventa le mot gyroscope (du grec gyros « révolution » et skopein « voir »)[1].

Les progrès réalisés, depuis des années, sur le gyroscope sont considérables, car sa conception se basait sur les phénomènes classiques et même son contrôle était déjà un problème technologique à la moitié de ce siècle [9].

La grande réussite des missions interplanétaires a fait un peu oublier que dans la navigation spatiale on n'a plus besoin de pilote, mais plutôt d'un guide, en l'occurrence la toupie gyroscopique. Sans cette dernière, l'avion dans la brume serait dans la même situation qu'un aveugle au guidon d'une moto [2].

Ce dispositif est assimilé à une masse de révolution tournant à grande vitesse autour de son axe.

Un tel mouvement peut être bien vu par l'exemple d'un joueur de foot-ball, qui à partir du corner tire le ballon vers le gardien. Si on suit la trajectoire, on verra qu'elle est un arc d'un grand cercle, donc le ballon tourne autour d'un point qui est le centre du cercle, en même temps, il tourne autour de son axe à une vitesse angulaire plus grande que celle autour du premier point.

Un mouvement analogue anime l'axe de la terre, car celle-ci n'ayant pas une forme absolument sphérique et son axe incliné. Les résultantes des forces d'attraction du soleil et de la lune ne passent pas par le centre d'inertie de la terre et engendrent par rapport à ce centre des moments cinétiques [3].

Généralement, on appelle gyroscope tout appareil qui permet d'identifier la rotation absolue de son boîtier par rapport à l'espace absolu.

Selon Foucault, c'est un appareil comportant un rotor tournant à grande vitesse et capable de mettre en évidence la rotation absolue de son boîtier.

Les différentes formes du gyroscope utilisées en pratique sont:

1- Gyroscope avec suspension à cardan (Fig. 1). La toupie est montée dans un cadre portant deux tourillons, lesquels viennent se loger dans un deuxième cadre également pourvu de deux tourillons, et ceux-ci à leur tour prennent place dans un troisième cadre lié au support.

2- Gyroscope flottant (Fig. 2). La toupie est enfermée dans un carter étanche, puis l'ensemble du gyroscope avec ses cadres de suspension est plongé dans un liquide de forte densité. Ce type est largement utilisé dans l'aviation [2].

3- Gyroscope à suspension dynamique (Fig. 3). Sa toupie a la forme d'un champignon et elle est reliée au boîtier de l'appareil par un joint de Hooke, composé d'un anneau intermédiaire et de deux barres de torsion encastrées à chacune de leurs extrémités.

Ce type est d'usage courant surtout sur les avions de combat.

4- Gyroscope à bille suspendue (Fig. 4). Sa toupie tient toute seule en l'air dans son boîtier, enfermée (dans le boîtier), électrisée et subit de tous les côtés une attraction qui la fait flotter à égale distance des parois. Un champ magnétique tournant, fourni par des bobinages, met la bille en rotation très rapide. Ce type est utilisé dans les avions stratégiques.

5- Gyroscope Laser (Fig. 5). Il fait appel aux propriétés de l'optique. Il est constitué d'un oscillateur optique émettant deux ondes progressives parcourant en sens inverses un chemin optique de forme triangulaire. Il est entré en service sur les avions de transport civil [4].

6- Gyroscope à résonance magnétique nucléaire (R.M.N.). Actuellement, c'est un instrument de laboratoire basé sur l'application des ondes électromagnétiques sur des atomes.

Introduction.

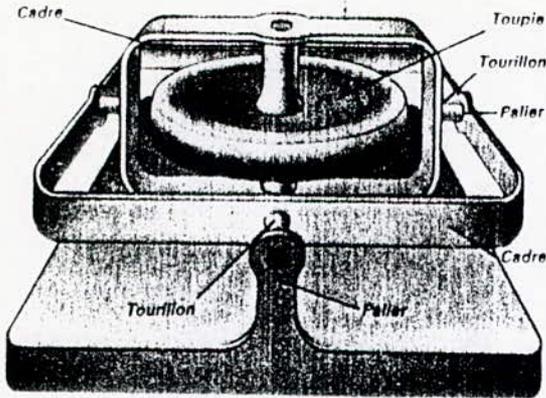


Fig 1. « Gyroscope - suspension à cardan »

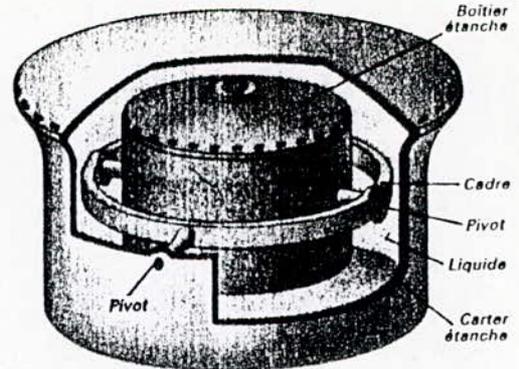


Fig 2. « Gyroscope flottant »

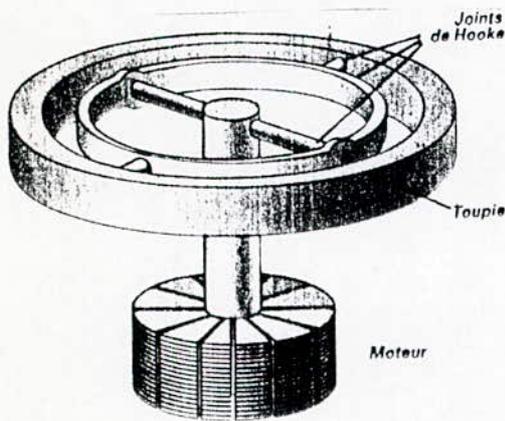


Fig 3. « Gyroscope à suspension dynamique »

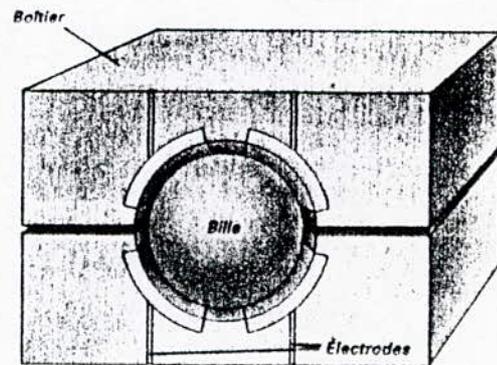


Fig 4. « Gyroscope à bille suspendue »

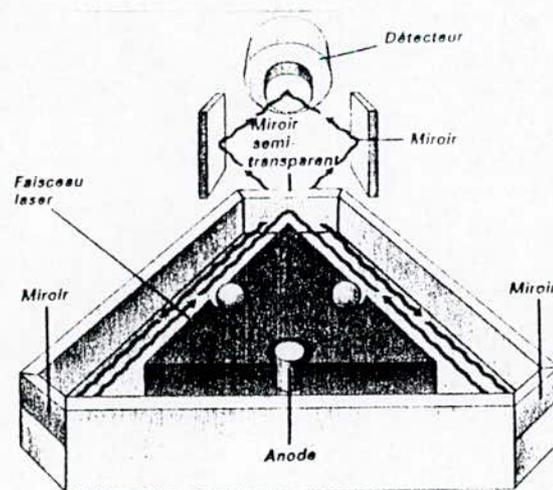


Fig 5. « Gyromètre à Laser »

Au premier chapitre, nous établissons le modèle théorique du gyroscope à trois degrés de liberté qui présente un système non linéaire, en se basant sur les phénomènes physiques (précession, nutation), les lois de la rotation (moments cinétiques) et les caractéristiques mécaniques vues en gyroskopie expérimentale.

Dans le deuxième chapitre nous présentons la théorie de la commande linéarisante, en faisant appel aux concepts théoriques de la géométrie différentielle (forme normale, linéarisation exacte par retour d'état).

Au troisième chapitre, elle est appliquée au modèle du gyroscope à trois degrés de liberté, une linéarisation exacte par retour d'état statique, suivie d'une commande par placement de pôles. Une simulation numérique est présentée à la fin.

Le quatrième chapitre met en lumière la théorie de la commande optimale linéaire dans le cas des systèmes continus. Une simulation numérique et une comparaison des résultats avec ceux obtenus au chapitre précédent concluront notre travail.

CHAPITRE I

Modélisation

1.1/ Introduction:

Pour établir les équations décrivant le modèle gyroscopique, il est nécessaire de connaître ses caractéristiques mécaniques, d'introduire des définitions concernant le mouvement de cet appareil, une interprétation physique aux phénomènes de précession et de nutation, ainsi on justifiera les approximations utilisées.

1.2/ Gyroscopie expérimentale:

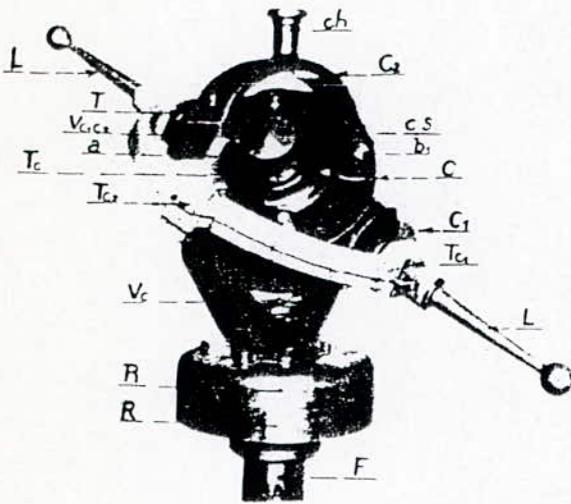


Fig. 1.1. Groupe gyroscopique.

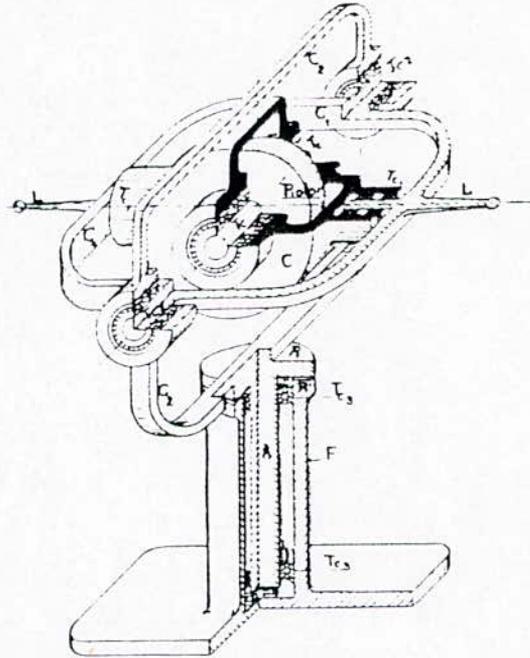


Fig.1.2. Vue perspective.

- $T_c, T_{c1}, T_{c2}, T_{c3}$ désignent un système de tourillons.
- C_1 et C_2 deux cadres assurent la suspension.
- C : boîtier - Carter.
- L : Levier radial qui permet de provoquer certains mouvements angulaires.
- F : Bâti - support.

Le cadre vertical C_2 porte deux verrous d'immobilisation.

a- Verrou d'immobilisation du carter c , (V_c);

b- Double verrou qui assujettit le cadre horizontal au cadre vertical, (V_{C1C2}).

Le premier verrou permet de supprimer deux degrés de liberté, le second permet de supprimer un seul degré de liberté.

- C_s : champignon sphérique du rotor.

La rotation du rotor est entretenue par un moteur électrique.

1.2.1/ Caractéristiques mécaniques:

- Vitesse du moteur est d'environ 3000 tr / mn;
- moment d'inertie du rotor : 10^3 N.m.s^2 ;
- moment d'inertie du système rotor - carter autour de l'axe Tc_1 : $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$;
- moment d'inertie du système rotor - carter - cadre horizontal autour de l'axe Tc_2 : $4.8 \cdot 10^{-3} \text{ N.m.s}^2$;
- moment d'inertie autour de l'axe vertical : $12.5 \cdot 10^3 \text{ N.m.s}^2$;
- couple de frottements des cadres horizontaux et verticaux : $0.25 \cdot 10^3 \text{ N.m}$.

Remarques:

- Ce gyroscope comporte généralement un détecteur d'écart angulaire, un détecteur pour la mesure des vitesses et un dispositif d'amortissement visqueux.
- Dans la navigation aérienne, on trouve le gyroscope de verticale (mesurant un déplacement angulaire par rapport à la verticale) et le gyroscope directionnel (indicateur de déplacement angulaire azimutal d'un véhicule volant). Ces deux sont à deux degrés de liberté.
- Tout gyroscope monté sur cadrans cherche à maintenir sa position fixe dans l'espace absolu (stable) [6].

1.3 / Modèles théoriques du gyroscope:

La modélisation de ce dispositif (gyroscope) consiste à trouver les équations mathématiques régissant son mouvement, en se basant sur des phénomènes physiques et des définitions conventionnellement introduites pour sa conception. Notre travail consiste alors à trouver un modèle mathématique pour un gyroscope à trois degrés de liberté dont le schéma de principe simplifié est donné en (Fig1.3) où on note:

- un boîtier B;
 - un axe de cardan extérieur E;
 - un anneau de cardan extérieur AE tournant d'un angle θ_E par rapport à B;
 - un axe de cardan intérieur I perpendiculaire à E;
 - un anneau de cardan intérieur AI, parfois appelé carter, tournant d'un angle θ_I par rapport à AE;
 - un rotor (toupie) t d'axe Δ perpendiculaire à I.
- Les éléments : B, AI, AE, et t sont assimilés à des solides.

Remarque:

On ne considère pas ici le moteur électrique et les détecteurs d'écarts, car notre étude repose seulement sur le mouvement des éléments cités précédemment.

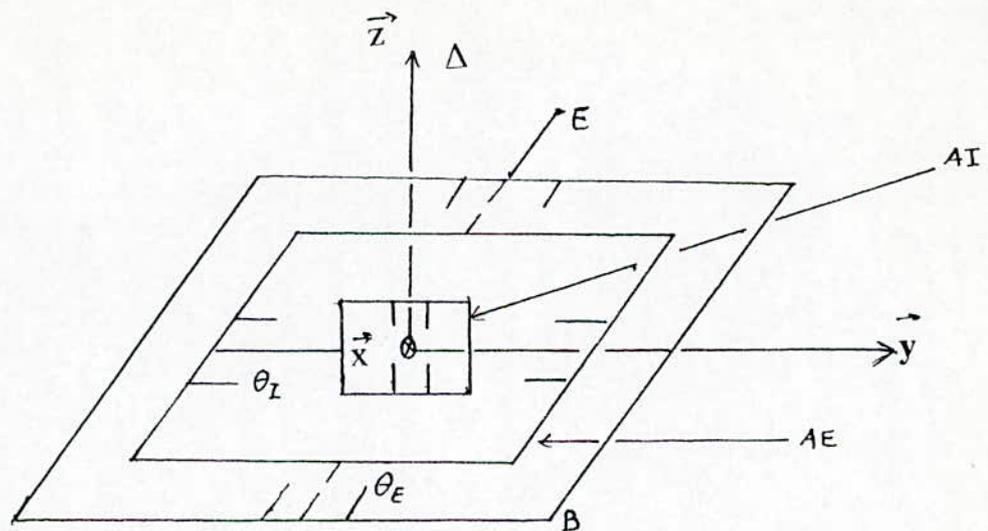


Fig. 1.3 : Représentation schématique.

1.4/ Définitions conventionnelles:

Définition 1:

Le gyroscope est dit en configuration canonique lorsqu'il vérifie la condition: $\Delta \perp AE$ [4].

Définition 2:

Le gyroscope est dit en configuration interdite lorsqu'il vérifie la condition : $\Delta // AE$ [4].

1.5/ Rappel sur le mouvement de rotation:

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un système mécanique (par rapport à un point fixe ou au centre d'inertie du système) est égale au moment résultant par rapport au même point de toutes les forces extérieures appliquées au système [3].

C'est-à-dire:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\tau}$$

Sachant que pour un solide parfait tournant à une vitesse angulaire ω et de moment d'inertie J par rapport à un axe déterminé on a:

$$\vec{H} = J\omega$$

Dans un système de coordonnées rigidement lié au solide, l'équation de mouvement est de la forme [3]:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{\tau} - \vec{\omega} \wedge \vec{H} \quad (1.1)$$

1.6/ Phénomènes gyroscopiques, précession et nutation:

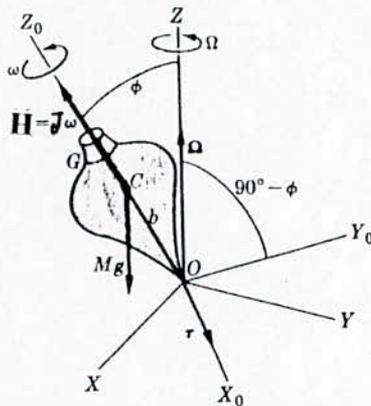


Fig. 1.4: Gyroscope soumis à un moment extérieur.

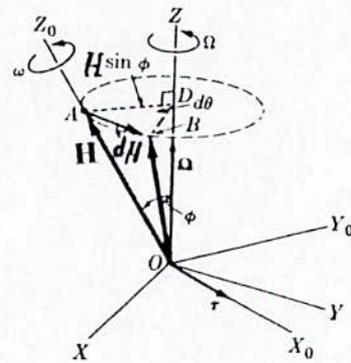


Fig.1.5: Précession de l'axe du gyroscope

Considérons une toupie (Fig. 1.4) soumise à un moment extérieur $\vec{\tau}$, On a:

$$\tau = M \cdot g \cdot b \cdot \sin \phi \quad (1.2)$$

où: $b=OC$, et C est le centre d'inertie.

Pendant un intervalle dt , \vec{H} passe de $O\vec{A}$ à $O\vec{B}$.

Donc $A\vec{B} = d\vec{H}$.

L'extrémité de \vec{H} décrit autour de Z un cercle de rayon $A\vec{D} = O\vec{A} \sin \phi = \vec{H} \sin \phi$ et pendant dt le rayon AD se déplace de $d\theta$.

La vitesse angulaire de précession Ω est définie comme la vitesse à laquelle l'axe OZ_0 du corps tourne autour de l'axe OZ fixe; d'où:

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{d\theta}{dt} \\ \text{et } |d\vec{H}| &= AD \cdot d\theta = H \sin(\phi) \cdot (\Omega \cdot dt) = \tau \cdot dt \\ \Rightarrow \Omega \cdot H \cdot \sin \phi &= \tau \end{aligned} \quad (1.3)$$

De (1.2) et (1.3) on obtient:

$$\Omega = \frac{M \cdot g \cdot b}{J\omega}$$

d'où on peut écrire:

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{H} = \vec{\tau}$$

Ces résultats ne sont valables que pour ω très grande par rapport à Ω . Car si le corps a une précession autour de OZ , il a aussi un moment cinétique autour de cet axe, par conséquent, le moment cinétique total n'est pas $J\omega$; car la vitesse angulaire résultante est $(\Omega + \omega)$. Cela donc est valable pour une précession lente[7].

En général, l'angle ϕ ne reste pas constant, mais oscille entre deux valeurs fixes, de sorte que l'extrémité de \vec{H} tout en décrivant un mouvement de précession autour de Z , oscille entre deux cercles C et C' (Fig. 1.6). Ce mouvement vibratoire de Z_0 est appelé nutation [7].

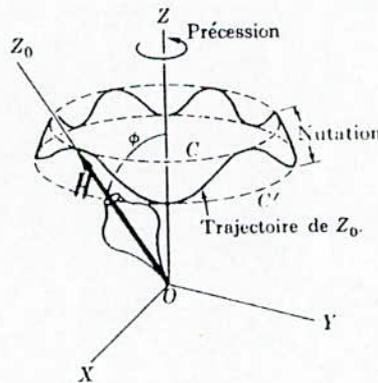


Fig. 1.6: Nutation de l'axe du gyroscope.

1.6.1/ Effets gyroscopiques:

Lorsque l'axe de rotation passant par « O » change de direction, il se produit une rotation du gyroscope par rapport aux axes des (x) et des (y) et les moments cinétiques par rapport à ces axes ne sont pas nuls [8].

Au démarrage de la toupie, les oscillations de nutation doivent être amorties rapidement et l'appareil est en configuration canonique. Par contre, au freinage, une dérive tend à rapprocher l'appareil de la configuration interdite [5].

Remarque:

La nutation a une faible contribution au moment cinétique total que la précession [7].

1.7/ Approximation gyroscopique:

Considérons une toupie de révolution, d'axe Δ , suspendue d'une manière arbitraire (par anneau), comme le montre la figure 1.3 et nous lui attachons un trièdre central principal d'inertie défini par un trièdre orthonormé:

$$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \quad \text{avec } \bar{z} // \Delta$$

Soient ω_{xt} , ω_{yt} , ω_{zt} les composantes de la rotation absolue instantanée de la toupie « t » sur $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ et \vec{H} le moment cinétique de « t ».

Nous avons:

$$\vec{\omega}_t = \omega_{xt} \bar{x} + \omega_{yt} \bar{y} + \omega_{zt} \bar{z}$$

$$\vec{H} = J_x \omega_{xt} \bar{x} + J_y \omega_{yt} \bar{y} + J_z \omega_{zt} \bar{z}$$

Où : J_x , J_y et J_z sont les moments principaux d'inertie de « t » par rapport à $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, ($J_x = J_y$ dans le cas où « t » est de révolution par rapport à Δ).

Les structures pratiquement adoptées pour les toupies conduisent à des moments d'inertie du même ordre de grandeur. Par ailleurs les conditions d'utilisation des gyroscopes impliquent les inégalités suivantes:

$$|\omega_{yt}| \ll |\omega_{zt}| \quad \text{et} \quad |\omega_{xt}| \ll |\omega_{zt}|.$$

En effet, ω_{zt} représente la rotation propre de « t » de l'ordre de plusieurs centaines de tours par seconde, alors que ω_{xt} et ω_{yt} sont des composantes de rotation instantanée de Δ , généralement de l'ordre de quelques degrés par minute à quelques degrés par heure [4].

Donc:

$$|J_x \omega_{xt}|, |J_y \omega_{yt}| \ll |J_z \omega_{zt}|.$$

L'approximation gyroscopique consiste à négliger donc $|\vec{H}_x|$ et $|\vec{H}_y|$ devant $|\vec{H}_z|$, ce qui conduit à admettre que $\vec{H} // \Delta$.

1.8/ Méthode d'étude et mise en équation du système:

Considérons maintenant un gyroscope en configuration canonique et appliquons un couple constant à AI (ou AE) suivant I (ou E). Nous constatons alors que Δ est essentiellement animé d'un lent mouvement de rotation autour de E (ou I), c'est la précession.

Si le couple est dû à un frottement, la rotation est appelée dérive.

Par application d'un petit choc à (AE) ou (AI), il en résulte des oscillations de AE et AI de fréquence pouvant dépasser 100 Hz [5]. Ce sont les nutations.

Appliquons, la relation (1.1) et la projetons dans le trièdre $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ supposé précédemment. On obtient le système d'équations d'Euler:

$$\begin{cases} J_x \frac{d\omega_{xt}}{dt} + (J_z - J_y)\omega_{yt} \cdot \omega_{zt} = \tau_x \\ J_y \frac{d\omega_{yt}}{dt} + (J_x - J_z)\omega_{xt} \cdot \omega_{zt} = \tau_y \\ J_z \frac{d\omega_{zt}}{dt} + (J_y - J_x)\omega_{yt} \cdot \omega_{xt} = \tau_z \end{cases}$$

où : τ_x , τ_y et τ_z sont les composantes du vecteur couple.

Ces équations décrivent l'évolution des composantes du vecteur vitesse angulaire dans le temps. Ces composantes sont réponses aux composantes du vecteur couple.

La grandeur du mouvement de la toupie autour de x, y et z relatif au boîtier du gyroscope est très petite (souvent une fraction de degré). Pour cela, le gyroscope doit être couplé autour des axes du plan normal aux axes de rotation. Ce couple est une mesure de la vitesse angulaire du boîtier [9].

Le système d'équations d'Euler sera donc modifié en tenant compte du mouvement relatif de la toupie au boîtier qui est très petit. On pose alors [9].

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \omega_{xt} - \omega_{xE} \\ \dot{\delta}_y = \omega_{yt} - \omega_{yE} \\ \dot{\delta}_z = \omega_{zt} - \omega_{zE} \end{cases} \quad (1.4)$$

Où : ω_{xE} , ω_{yE} et ω_{zE} sont les vitesses angulaires extérieures que le gyroscope mesure.

Ces écarts angulaires sont mesurés par un détecteur d'écart « pick - off » (un petit appareil magnétique sensible, localisé dans le boîtier et capable de mesurer des petits déplacements).

Le contrôle des couples qui nécessite à conduire les écarts (δ_x , δ_y et δ_z) à zéro, peut être aussi fait magnétiquement [9].

Une fois les écarts sont nuls alors:

$$\omega_{xt} = \omega_{xE}, \omega_{yt} = \omega_{yE}, \omega_{zt} = \omega_{zE},$$

et si ces vitesses sont supposées constantes, les équations d'Euler seront simplifiées comme suit:

$$\begin{cases} H_z \omega_{yE} - H_y \omega_{zE} \approx \tau_x \\ H_x \omega_{zE} - H_z \omega_{xE} \approx \tau_y \\ H_y \omega_{xE} - H_x \omega_{yE} \approx \tau_z \end{cases}$$

Si H_x , H_y et H_z sont des termes constants du gyroscope. Le couple appliqué à l'entrée sera proportionnel aux composantes de la vitesse angulaire.

Mais pratiquement, les équations d'Euler sont idéalisées, le couple moteur produit des couples de frottements inévitables existant même dans des meilleurs instruments. Alors, on se trouve contraint par les couples générés à l'intérieur de l'appareil (gyroscope) autres que le couple de contrôle actif. Citons par exemple le couple d'amortissement visqueux et le couple de rappel élastique; le premier étant proportionnel à la dérivée de l'écart angulaire par rapport au temps, le second est proportionnel à l'écart angulaire seulement, ce qui permettra décrire le nouveau système qui est réel, en lui associant le système (1.4).

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \omega_{xt} - \omega_{xE} \\ \dot{\delta}_y = \omega_{yt} - \omega_{yE} \\ \dot{\delta}_z = \omega_{zt} - \omega_{zE} \\ \dot{\omega}_{xt} = -\frac{(J_z - J_y)}{J_x} \omega_{yt} \omega_{zt} - \frac{B}{J_x} (\omega_{xt} - \omega_{xE}) - \frac{K_D}{J_x} \delta_x - \frac{K_\phi}{J_x} \delta_y + \frac{\tau_x}{J_x} \\ \dot{\omega}_{yt} = -\frac{(J_x - J_z)}{J_y} \omega_{xt} \omega_{zt} - \frac{B}{J_y} (\omega_{yt} - \omega_{yE}) - \frac{K_D}{J_y} \delta_y + \frac{K_\phi}{J_y} \delta_x + \frac{\tau_y}{J_y} \\ \dot{\omega}_{zt} = -\frac{(J_x - J_y)}{J_z} \omega_{yt} \omega_{xt} - \frac{B}{J_z} (\omega_{zt} - \omega_{zE}) + \frac{\tau_z}{J_z} \end{cases} \quad (1.5)$$

où: B , K_D et K_ϕ sont des termes constants (paramètres physiques du gyroscope) souvent données par le constructeur expérimentalement). Dans le cas idéal, K_D et K_ϕ sont nuls.

Donc le système (1.5) est à six équations régissant le gyroscope à trois degrés de liberté (cas qui est très général), la sortie δ_z pour un couple constant de l'ordre de 10^{-2} N.m (Fig (1.7)) diverge à cause du couple de frottement.

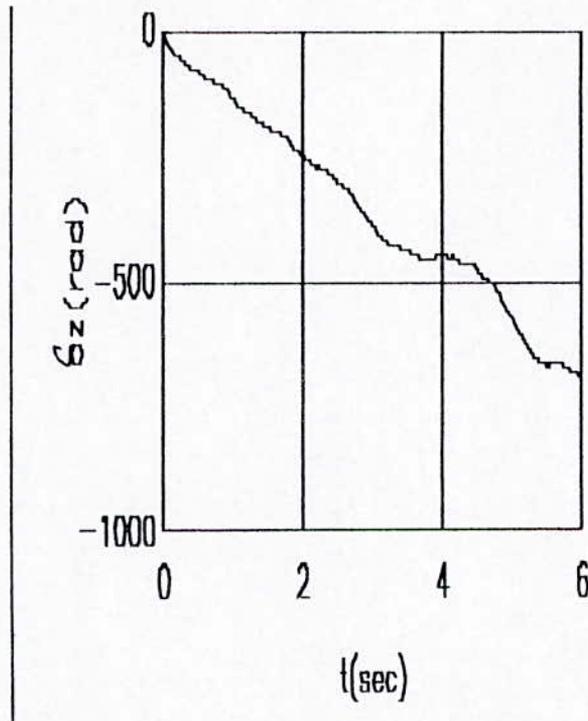


Fig. 1.7: réponse du système à un couple constant.

1.8.1/ Gyroscope à deux degrés de liberté:

Pour ce type, on suppose que la toupie est à révolution suivant Δ ou z , donc l'axe z est un axe de symétrie, de plus on assure que τ_z est nul ce qui donnera : ω_{zt} constante.

$$D'où: H_z = J_z \omega_z = \text{constante} = H$$

Et en posant: $J_x = J_y = J_d$ on obtient un système à quatre équations (en tenant compte aussi des termes dus aux frottements).

$$\begin{cases} \dot{\delta}_x = \omega_{xt} - \omega_{xE} \\ \dot{\delta}_y = \omega_{yt} - \omega_{yE} \\ \dot{\omega}_{xt} = \frac{H}{J_d} \omega_{yt} - \frac{B}{J_d} (\omega_{xt} - \omega_{xE}) - \frac{K_D}{J_d} \delta_x - \frac{K_\phi}{J_d} \delta_y + \frac{\tau_x}{J_d} \\ \dot{\omega}_{yt} = \frac{H}{J_d} \omega_{xt} - \frac{B}{J_d} (\omega_{yt} - \omega_{yE}) - \frac{K_D}{J_d} \delta_y + \frac{K_\phi}{J_d} \delta_x + \frac{\tau_y}{J_d} \end{cases}$$

1.9/Conclusion:

Pour le cas du gyroscope à trois degrés de liberté, on a obtenu un système non linéaire (termes couplés), ce qui nécessitera l'appel à une méthode de linéarisation qui fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE II

*Théorie du bouclage non
linéaire*

II .1/ Introduction :

Ces dernières années plusieurs travaux ont été consacrés pour la commande des systèmes non linéaires. Les notions de base utilisées sont inspirées de la géométrie différentielle . [10]

Nous présentons dans ce chapitre les concepts de degré relatif, de forme normale et de linéarisation exacte par retour d'état statique dans le cas des systèmes mono-entrée / mono-sortie (SISO).

Par la suite nous étendons les résultats pour les systèmes multi-entrées/ multi-sorties(MIMO).

II . 2/ Systèmes mono-entrée / mono-sortie :

Soit un système non linéaire, correspondant à la classe définie par :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Où \mathbf{x} est le vecteur d'état, \mathbf{u} le vecteur de commande, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ des champs de vecteurs et $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ une fonction analytique .

Ils sont définis dans un voisinage de \mathbf{x}_0 de \mathbb{R}^n , où $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ sont supposées être infiniment différentiables.

Notre but, alors, est d'établir les lois de commandes par bouclage linéarisant le système (2.1) dans le cas mono-entrée / mono-sortie (**siso**).

II.2.1 / Notion de degré relatif :

Définition :

Un système de la forme (2.1) est dit de degré relatif en un point \mathbf{x}_0 si :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^k \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \\ \forall \mathbf{x} \text{ au voisinage de } \mathbf{x}_0 \text{ et } \forall k < r-1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{L}_{\mathbf{g}} \mathbf{L}_{\mathbf{f}}^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$$

où $\mathbf{L}_{\mathbf{f}} \mathbf{h}(\mathbf{x})$ est la dérivée dite de LIE de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ selon le champ de vecteurs \mathbf{f} [Annexe A].

Le degré relatif d'un système non linéaire, représente en d'autres termes le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pour faire apparaître explicitement l'entrée. En effet, la première dérivée du système donne :

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

Si le degré relatif du système est supérieur à 1 , pour tout \mathbf{x} au voisinage de \mathbf{x}_0 , nous avons $\mathbf{L}_g \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$, et la deuxième dérivée de y conduit à :

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{\partial(\mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial(\mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \cdot \mathbf{L}_f \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Encore une fois, si le degré relatif est supérieur à 2, pour tout \mathbf{x} au voisinage de \mathbf{x}_0

Alors:

$$\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$$

d'où:

$$\ddot{y} = \mathbf{L}_f^2 \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

En étendant le raisonnement à l'ordre k ($k < r$), nous obtenons:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{L}_f^k \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

Et finalement, nous aboutissons à :

$$\mathbf{y}^{(r)} = \mathbf{L}_f^r \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$$

où :

$$\mathbf{L}_g \mathbf{L}_f^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

II.2.2/ Forme normale :

On peut mettre les systèmes non linéaires sous une forme canonique appelée forme normale, se basant sur une transformation de coordonnées non linéaire autour d'un point définie par [10] :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \phi_1(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\
 Z_2 &= \phi_2(\mathbf{x}) = L_r \mathbf{h}(\mathbf{x}) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 Z_r &= \phi_r(\mathbf{x}) = L_r^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x})
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Si le degré relatif est inférieur à l'ordre n du système, nous pouvons trouver $n-r$ fonction $\phi_{r+1}, \dots, \phi_n$ telles que l'application $\phi(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}), \dots, \phi_n(\mathbf{x})]^T$ soit un difféomorphisme [Annexe A]. Ainsi, la représentation du système dans les nouvelles coordonnées se déduit facilement.

Les dérivées successives des équations (2.3) donnent :

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ_1}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = L_r \mathbf{h}(\mathbf{x}) = Z_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 \frac{dZ_{r-1}}{dt} &= \frac{\partial (L_r^{r-2} \mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = L_r^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) = Z_r \\
 \frac{dZ_r}{dt} &= L_r^r \mathbf{h}(\mathbf{x}) + L_g L_r^{r-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

Avec la transformation inverse $\mathbf{x} = \phi^{-1}(\mathbf{z})$ qui permet d'aboutir à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ_r}{dt} &= \mathbf{b}(\mathbf{Z}) + \mathbf{a}(\mathbf{Z}) \cdot \mathbf{u} \\
 \text{où:} \\
 \mathbf{a}(\mathbf{Z}) &= L_g L_r^{r-1} \mathbf{h}(\phi^{-1}(\mathbf{Z})) \\
 \mathbf{b}(\mathbf{Z}) &= L_r^r \mathbf{h}(\phi^{-1}(\mathbf{Z}))
 \end{aligned}$$

Remarque :

Le coefficient $\mathbf{a}(\mathbf{z})$ doit être non nul au voisinage de $\mathbf{z}_0 = \phi(\mathbf{x}_0)$ [10].

En posant:

$$q_i = L_f \phi_i (\phi^{-1}(z)) \text{ et } p_i = L_g \phi_i (\phi^{-1}(z)) \text{ pour tout } r+1 \leq i \leq n,$$

nous obtenons pour les n-r équations différentielles restantes:

$$\frac{dZ_i}{dt} = q_i(Z) + p_i(Z) \cdot u$$

Finalement, la représentation du système dans l'espace d'état, relativement aux nouvelles coordonnées est :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= Z_3 \\ &\dots \\ \dot{Z}_{r-1} &= Z_r \\ \dot{Z}_r &= b(Z) + a(Z) \cdot u \\ \dot{Z}_{r+1} &= q_{r+1}(Z) + p_{r+1}(Z) \cdot u \\ &\dots \\ \dot{Z}_n &= q_n(Z) + p_n(Z) \cdot u \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dans le cas où $p_i = L_g \phi_i(x) = 0$, pour tout x au voisinage de x_0 et pour tout $r+1 \leq i \leq n$, les équations (2.4) se déduisent à :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= Z_3 \\ &\dots \\ \dot{Z}_{r-1} &= Z_r \\ \dot{Z}_r &= b(Z) + a(Z) \cdot u \\ \dot{Z}_{r+1} &= q_{r+1}(Z) \\ &\dots \\ \dot{Z}_n &= q_n(Z) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Le système d'équations (2.5) représente la forme normale du système d'équations non linéaire (2.1). Il peut être illustré par le schéma bloc de la figure suivante :

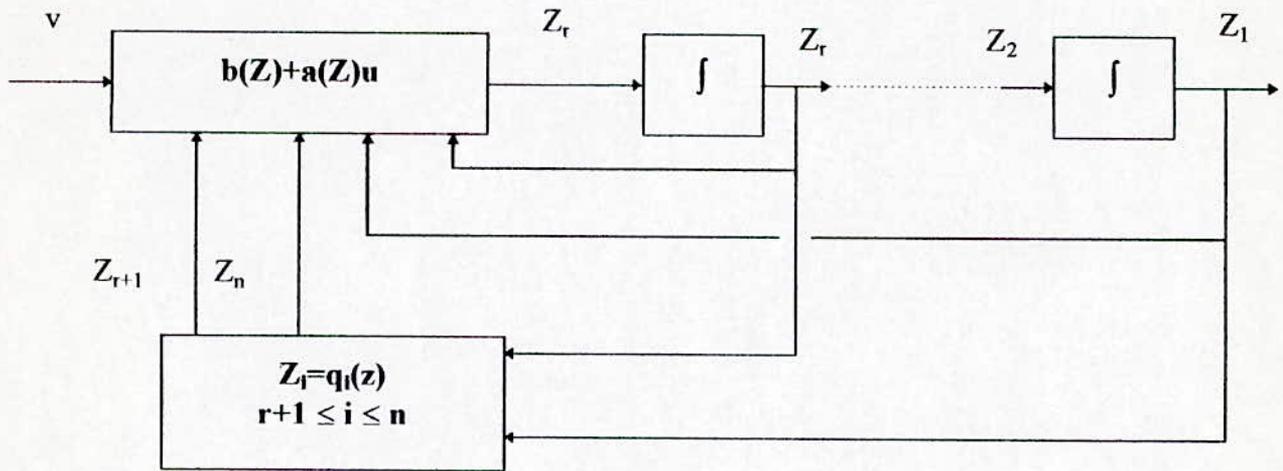


Fig. 2.1: Forme normale.

D'après ce schéma, nous constatons que la sortie est directement donnée par

$$y=h(x)=Z_1$$

II.2.3/ Linéarisation exacte par retour d'état statique:

Dans le but de linéariser le système, considérons une structure de commande par retour d'état (Fig. 2.2), définie par la loi de commande u de la forme [10]:

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (2.6)$$

v est la commande du nouveau système obtenu par bouclage (schéma bloc de la figure 2.2).

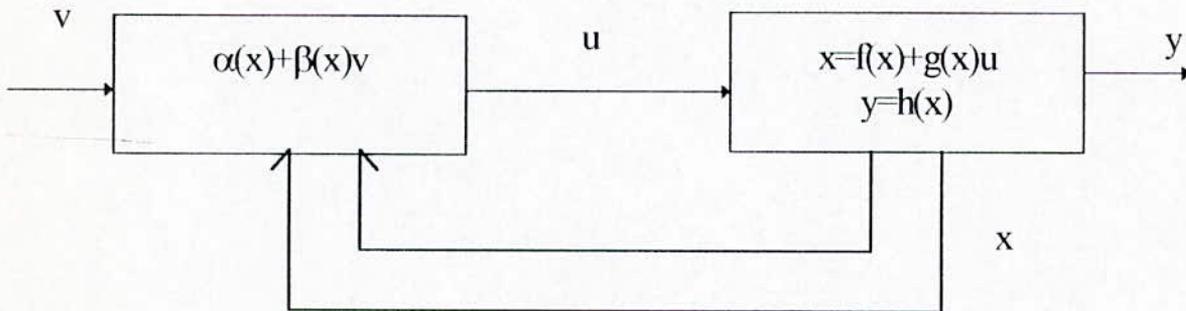


Fig. 2.2: Retour d'état statique.

En remplaçant la commande u ainsi définie dans le système d'équations (2.1) nous obtenons:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ qui caractérisent la commande u sont définies dans un ouvert de \mathbb{R}^n . $\beta(x)$ est supposée non nulle pour tout x défini dans cet ouvert.

La linéarisation exacte du système (2.1) n'est possible que si le degré relatif r est exactement égale à la dimension n du système considéré ($r = n$). La transformation de coordonnées qui nous permet d'obtenir la forme normale est donnée par:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_r h(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ L_r^{n-1} h(x) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Comme $r = n$, aucune fonction additionnelle n'est nécessaire pour compléter le difféomorphisme. Ainsi, le système est décrit par les équations suivantes:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= Z_3 \\ &\dots \\ \dot{Z}_{n-1} &= Z_n \\ \dot{Z}_n &= \mathbf{b}(Z) + \mathbf{a}(Z) \cdot \mathbf{u}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Où $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$ et $Z_0 = \phi(x_0)$. Ainsi, en tout Z au voisinage de Z_0 , la fonction $\mathbf{a}(Z)$ est non nulle.

Par ailleurs, si nous choisissons $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ de façon que la loi de commande (2.6) soit:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\mathbf{a}(Z)} (-\mathbf{b}(Z) + \mathbf{v})\tag{2.10}$$

Le système en boucle fermée résultant (Fig. 2.3) est régi par les équations différentielles linéaires suivantes:

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= Z_3 \\ &\dots \\ \dot{Z}_{n-1} &= Z_n \\ \dot{Z}_n &= \mathbf{v}\end{aligned}\tag{2.11}$$

Ainsi, le système obtenu par retour d'état statique à partir des équations (2.9) est linéaire et commandable. La forme (2.11) ainsi obtenue est appelée forme canonique de Brunowsky.

L'écriture sous la forme condensée donne:

$$\dot{Z} = \mathbf{AZ} + \mathbf{bv}\tag{2.12}$$

Où la matrice d'état A et le vecteur de commande b sont données par:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r \times r} \quad ; \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{r \times 1}$$

Le système peut être représenté par le diagramme bloc de la figure 2.3 suivante:

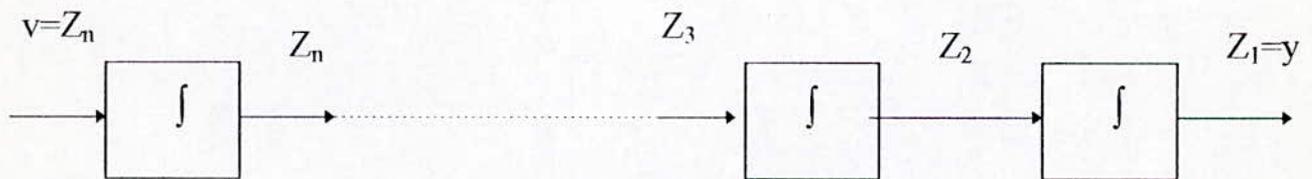


Fig. 2.3: Linéarisation exacte.

Enfin, nous pouvons conclure qu'un système non linéaire de degré relatif $r=n$ en un point x_0 , peut être transformé en un système linéaire et commandable en un point $Z_0=\phi(x_0)$

II.3/ Système multi-entrées / multi-sorties:

On considère un système multi-entrées / multi-sorties qui possède un nombre égale d'entrées et de sorties dont la forme condensée s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \\ y_1 &= h_1(x) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y_m &= h_m(x) \end{aligned} \tag{2.13}$$

où $f(x)$, $g_1(x), \dots, g_m(x)$ sont des champs de vecteurs et $h_1(x), \dots, h_m(x)$ des fonctions analytiques définies au voisinage de x_0 de \mathbb{R}^n .

II .3.1/ Notion de degré relatif vectoriel :

• **Définition:**

Le système de la forme de (2.13) est dit ^{de} degré relatif vectoriel $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ au point x_0 si :

$$1/ \quad L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad (2.14)$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq m$, quelque soit $k \leq r_i$ et pour tout x au voisinage de x_0 .

2/ **La matrice carrée :**

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

est non singulière au voisinage de $x=x_0$

Remarque:

Le degré relatif r_i de la $i^{\text{ème}}$ sortie, représente le nombre de fois qu'il faut dériver $y_i(t)$ pour faire apparaître au moins une sortie u_i ($1 \leq i \leq m$).

II.3.2/ forme normale :

On suppose que le degré relatif vectoriel $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$ associé au système (2.13) vérifie la condition

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_m \leq n \quad (2.16)$$

Et on considère la transformation de coordonnées suivante:

$$\begin{aligned} Z_1^1 &= \phi_1^1(x) = h_1(x) \\ Z_2^1 &= \phi_2^1(x) = L_f h_1(x) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ Z_n^1 &= \phi_n^1(x) = L_f^{r_1-1} h_1(x) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $1 \leq i \leq m$. A condition que le champs de vecteurs $\{g_1, \dots, g_m\}$ forme une base et nous pouvons choisir les $(n-r)$ fonctions manquantes $\phi_{r+1}(x), \dots, \phi_{n-1}(x), \phi_n(x)$ de manière à avoir [10]:

$$L_{g_i} \phi_1(x) = 0 \quad (2.18)$$

pour $r+1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$.

Si on fait un calcul analogue à celui développé pour les systèmes SISO, on aboutit à la représentation du système dans les nouvelles coordonnées. Pour le premier ensemble d'équations ($i=1$) nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_1^1}{dt} &= Z_2^1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \frac{dZ_{r-1}^1}{dt} &= Z_r^1 \\ \frac{dZ_r^1}{dt} &= L_r^1 h_1(\phi^{-1}(Z)) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_r^1 h_1(\phi^{-1}(Z)) \cdot u_j \end{aligned} \quad (2.19)$$

II .3.3/ Linéarisation exacte par retour d'état statique :

On considère la loi de commande définie par :

$$u_i = \alpha_i(x) + \sum_{j=1}^m \beta_{ij}(x) v_j \quad (2.20)$$

où α_i et β_{ij} pour $1 \leq i, j \leq m$ sont des fonctions continues définies dans un ouvert de R^n , et v_1, \dots, v_m sont les nouvelles entrées du système ainsi bouclé .

L'introduction de la commande (2.20) avec le système (2.13) donne un système en boucle fermée ayant une structure définie par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \mathbf{g}_j(\mathbf{x})\beta_{ji}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_j \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{h}_1(\mathbf{x}) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{h}_m(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.21}$$

La loi de commande (2.20) peut être exprimée sous une forme condensée comme suit :

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}) \mathbf{v} \tag{2.22}$$

où:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} ; \quad \beta(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \beta_{11}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \beta_{1m}(\mathbf{x}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{m1}(\mathbf{x}) & \cdot & \cdot & \beta_{mm}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

Ce qui donne pour le système (2.21) la forme condensée suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{2.23}$$

La matrice $\beta(\mathbf{x})$ est supposée non singulière pour tout \mathbf{x} au voisinage de \mathbf{x}_0 [10]. La loi de commande (2.22) est appelée retour d'état statique régulier .

Linéarisation exacte :

Pour pouvoir linéariser exactement par bouclage le système (2.13), le degré relatif vectoriel qui lui est associé doit obéir à la condition suivante :

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \dots + \mathbf{r}_m = \mathbf{n} \tag{2.24}$$

Dans ce but , considérons la transformation de coordonnées au voisinage de x_0 qui nous permet d'aboutir à la forme normale :

$$\phi_k^i(x) = L_r^{k-1} h_i(x) = Z_k^i \quad (2.25)$$

pour $1 \leq k \leq r_i$ et $1 \leq i \leq m$.

Ainsi, dans les nouvelles coordonnées le système sera décrit par m ensembles d'équations de la forme :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1^i &= \dot{Z}_2^i \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \dot{Z}_{r_i-1}^i &= \dot{Z}_{r_i}^i \\ \dot{Z}_{r_i}^i &= b_i(Z) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(Z) u_j(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

pour $1 \leq i \leq m$.

Par ailleurs, aucune fonction additionnelle n'est nécessaire étant donné que $r_1 + \dots + r_m = n$.

D'autre part, si nous choisissons $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ de façon que la loi de commande (2.22) devient :

$$u = A^{-1}(Z)[-b(Z) + v] \quad (2.27)$$

Le système en boucle fermée résultant est caractérisé par m ensembles d'équations de la forme :

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_1^i &= \dot{Z}_2^i \\
 &\vdots \\
 \dot{Z}_{r_i-1}^i &= \dot{Z}_{r_i}^i \\
 \dot{Z}_{r_i}^i &= v_i
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

pour $1 \leq i \leq m$.

Le système d'équations (2.28) est linéaire, découplé et commandable. Cette forme est appelée forme canonique de Brunowsky.

Sa forme condensée est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \dot{Z} &= AZ + Bv \\
 Y &= CZ
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

où $A_i = \text{diag}(A)$, $B_i = \text{diag}(B)$ et $C_i = \text{diag}(C)$ pour $1 \leq i \leq m$ et

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i} ; \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{r_i \times 1} ; \quad C_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times r_i}$$

II.4/ Conclusion :

Dans ce chapitre , nous avons présenté certaines bases de la commande par retour d'état statique qui s'applique à une classe de système non linéaires .

Il est présenté aussi certains concepts et notions qui sont propres à ce genre de commandes , tel la notion de degré relatif et le concept de la linéarisation exacte par retour d'état.

Par la suite, ces types de commandes seront appliqués à un gyroscope à trois degrés de liberté qui présente un modèle non linéaire.

CHAPITRE III

*Linéarisation exacte et commande du
gyroscope*

III.1 / Introduction :

Dans ce chapitre, il est présenté la commande linéarisante d'un gyroscope à trois degrés de liberté basée sur les concepts développés dans le deuxième chapitre.

Après détermination du degré relatif vectoriel, le système est mis sous la forme normale et la commande qui linéarise et découple le système est synthétisée.

Par la suite, nous appliquons au système ainsi linéarisé et découplé une commande par placement de pôles .

Enfin nous terminons le chapitre par une simulation numérique des résultats obtenus.

III.2 / Linéarisation exacte:

III.2.1/ Modèle du gyroscope :

Le système donné par les équations différentielles (1.5) peut être écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_4 - \omega_{xE} \\
 \dot{x}_2 &= x_5 - \omega_{yE} \\
 \dot{x}_3 &= x_6 - \omega_{zE} \\
 \dot{x}_4 &= -\frac{(J_z - J_y)}{J_x} x_5 x_6 - \frac{B}{J_x} x_4 - \frac{K_D}{J_x} x_1 - \frac{K_\phi}{J_x} x_2 + \frac{B}{J_x} \omega_{xE} + \frac{\tau_x}{J_x} \\
 \dot{x}_5 &= -\frac{(J_x - J_z)}{J_y} x_4 x_6 - \frac{B}{J_y} x_5 - \frac{K_D}{J_y} x_2 - \frac{K_\phi}{J_y} x_1 + \frac{B}{J_y} \omega_{yE} + \frac{\tau_y}{J_y} \\
 \dot{x}_6 &= -\frac{(J_y - J_x)}{J_z} x_4 x_5 - \frac{B}{J_z} x_6 + \frac{B}{J_z} \omega_{zE} + \frac{\tau_z}{J_z}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les sorties sont:

$$h_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_2$$

$$h_3(\mathbf{x}) = x_3$$

Pour simplifier les calculs, nous utilisons les notations suivantes:

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{x}) &= x_4 - \omega_{xE} \\
 f_2(\mathbf{x}) &= x_5 - \omega_{yE} \\
 f_3(\mathbf{x}) &= x_6 - \omega_{zE} \\
 f_4(\mathbf{x}) &= -\frac{(J_z - J_y)}{J_x} x_5 x_6 - \frac{B}{J_x} x_4 - \frac{K_D}{J_x} x_1 - \frac{K\phi}{J_x} x_2 + \frac{B}{J_x} \omega_{xE} \\
 f_5(\mathbf{x}) &= -\frac{(J_x - J_z)}{J_y} x_4 x_6 - \frac{B}{J_y} x_5 - \frac{K_D}{J_y} x_2 - \frac{K\phi}{J_y} x_1 + \frac{B}{J_y} \omega_{yE} \\
 f_6(\mathbf{x}) &= -\frac{(J_y - J_x)}{J_z} x_4 x_6 - \frac{B}{J_z} x_6 + \frac{B}{J_z} \omega_{zE}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

et

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

III.2.2/ Degré relatif vectoriel :

Nous savons que le degré relatif d'un système correspond au nombre de fois qu'il faut dériver une sortie pour faire apparaître explicitement au moins une entrée du système .

Dans ce but, considérons chacune des sorties du système (3.1) et calculons leurs dérivées successives jusqu'à faire apparaître au moins une entrée .

1^{ère} sortie: $h_1(x)=x_1$

$$\frac{dh_1(x)}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = f_1(x)$$

$$\frac{d^2h_1(x)}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{dx_4}{dt} = f_4(x) + \frac{\tau_x}{J_x}$$

Ainsi, le degré relatif correspondant à la première sortie $h_1(x) = x_1$ est égale à 2 ($r_1=2$).

2^{ème} sortie: $h_2(x)=x_2$

$$\frac{dh_2(x)}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = f_2(x)$$

$$\frac{d^2h_2(x)}{dt^2} = \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{dx_5}{dt} = f_5(x) + \frac{\tau_y}{J_y}$$

Le degré relatif correspondant à la deuxième sortie $h_2(x) = x_2$ est égale à 2 ($r_2=2$).

3^{ème} sortie: $h_3(x)=x_3$

$$\frac{dh_3(x)}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = f_3(x)$$

$$\frac{d^2h_3(x)}{dt^2} = \frac{d^2x_3}{dt^2} = \frac{dx_6}{dt} = f_6(x) + \frac{\tau_z}{J_z}$$

Le degré relatif correspondant à la troisième sortie $h_3(x) = x_3$ est aussi égale à 2 ($r_3 = 2$).

Alors, comme le degré relatif vectoriel vérifie la condition (2.24) i.e. $r_1+r_2+r_3 = n = 6$, nous pouvons conclure qu'il est possible de linéariser exactement le système (3.1) au moyen d'une transformation de coordonnées et d'un bouclage non linéaire.

Dans le but d'exprimer le système donné par les équations différentielles (3.1) sous forme normale, considérons la transformation de coordonnées non linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= h_1(x) = x_1 \\
 Z_2 &= L_r h_1(x) = f_1(x) \\
 Z_3 &= h_2(x) = x_2 \\
 Z_4 &= L_r h_2(x) = f_2(x) \\
 Z_5 &= h_3(x) = x_3 \\
 Z_6 &= L_r h_3(x) = f_3(x)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

La transformation inverse de coordonnées s'écrit alors:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= Z_1 \\
 X_2 &= Z_3 \\
 X_3 &= Z_5 \\
 X_4 &= Z_2 + \omega_{xE} \\
 X_5 &= Z_4 + \omega_{yE} \\
 X_6 &= Z_6 + \omega_{zE}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

A partir de (3.4) nous aboutissons à la forme normale du système (3.1):

$$\begin{aligned}
 \dot{Z}_1 &= Z_2 \\
 \dot{Z}_2 &= f_4(x) + \left. \frac{\tau_x}{J_x} \right|_{x=\phi^{-1}(Z)} \\
 \dot{Z}_3 &= Z_4 \\
 \dot{Z}_4 &= f_5(x) + \left. \frac{\tau_y}{J_y} \right|_{x=\phi^{-1}(Z)} \\
 \dot{Z}_5 &= Z_6 \\
 \dot{Z}_6 &= f_6(x) + \left. \frac{\tau_z}{J_z} \right|_{x=\phi^{-1}(Z)}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

où $x = \phi^{-1}(z)$ est la transformation de coordonnées inverse donnée par (3.5).

Par ailleurs, la matrice de découplage est donnée par :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_r h_1(x) & L_{g_2} L_r h_1(x) & L_{g_3} L_r h_1(x) \\ L_{g_1} L_r h_2(x) & L_{g_2} L_r h_2(x) & L_{g_3} L_r h_2(x) \\ L_{g_1} L_r h_3(x) & L_{g_2} L_r h_3(x) & L_{g_3} L_r h_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Elle est non singulière.

D'un autre coté la matrice de découplage inverse est donnée par :

$$A^{-1}(x) = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

III.2.3 / Commande linéarisante :

Finalement, à partir de la matrice donnée par (3.8), nous pouvons synthétiser la commande qui linéarise et découple le système (schéma bloc de la figure 3.1):

$$u = -A^{-1}(x) \begin{bmatrix} L_r^2 h_1(x) \\ L_r^2 h_2(x) \\ L_r^2 h_3(x) \end{bmatrix} + A^{-1}(x) \cdot v \quad (3.9)$$

avec:

$$\begin{aligned} L_r^2 h_1(x) &= f_4(x) \\ L_r^2 h_2(x) &= f_5(x) \\ L_r^2 h_3(x) &= f_6(x) \end{aligned} \quad (3.10)$$

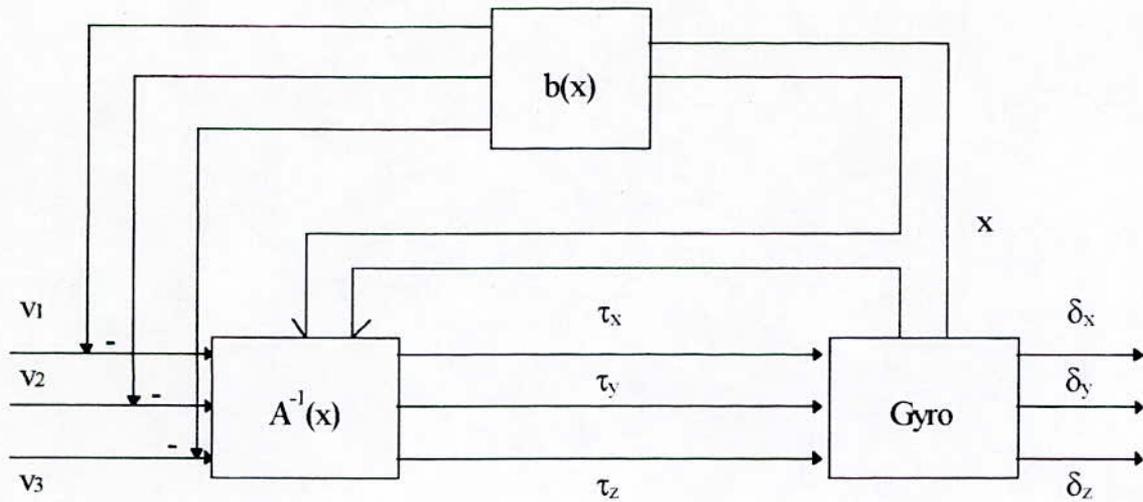


Fig. 3.1: Structure de la commande par bouclage statique

Ainsi, à partir de (3.9) et (3.10) la commande u s'écrit d'une manière plus explicite:

$$U = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} J_x f_4(x) \\ J_y f_5(x) \\ J_z f_6(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_x v_1 \\ J_y v_2 \\ J_z v_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Son application au système (3.1), donné sous sa forme normale (3.6) nous fait aboutir au système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= v_1 \\ \dot{Z}_3 &= Z_4 \\ \dot{Z}_4 &= v_2 \\ \dot{Z}_5 &= Z_6 \\ \dot{Z}_6 &= v_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le système ainsi obtenu est constitué de trois sous-systèmes linéaires et découplés.

La forme (3.12) appelée forme canonique de Brunowsky est donnée sous forme matricielle par :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Z}$$

Cette forme correspond au schéma bloc de la figure 3.2.

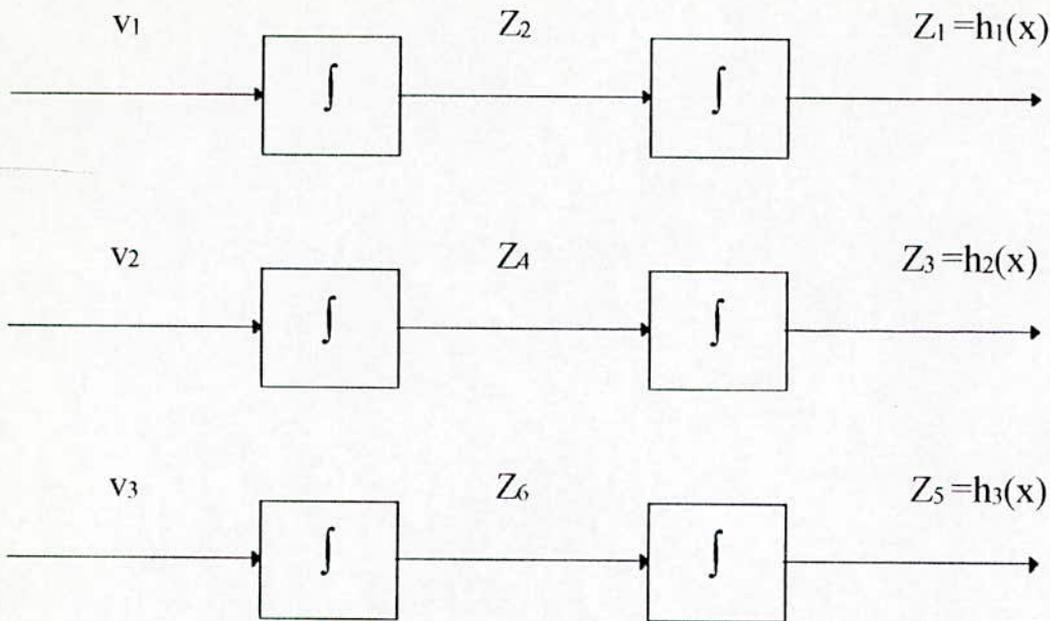


Fig. 3.2: Système linéarisé et découplé.

III.3 / Commande par placement de pôles :

La technique de commande par placement de pôles consiste à imposer une dynamique désirée au système au moyen d'un retour d'état linéaire en imposant aux pôles (du système en boucle formée) une localisation dans la partie gauche du plan complexe afin d'assurer la stabilité du système, ainsi qu'une réponse rapide et bien amortie [11].

Le retour d'état dans l'espace de Brunowsky linéaire est donné par :

$$v = -KZ + Kw \quad (3.14)$$

où K_w représente le vecteur de référence .

Ainsi, le système en boucle fermée est donné par l'équation d'état suivante:

$$\dot{Z} = (A - BK)Z + BK_w \quad (3.15)$$

III.3.1/ Détermination des gains :

Soit l'équation d'état donné par (3.15) , on pose :

$$A_c = A - BK$$

où A_c est la matrice d'état en boucle fermée

L'équation caractéristique du système en boucle fermée est de la forme :

$$|SI - A_c| = S^k + \bar{a}_1 S^{k-1} + \dots + \bar{a}_k$$

Si le système en boucle ouverte a la forme compagne donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & 0 & \dots & -a_{k-1} & -a_k \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Les gains du système en boucle fermée sont donnés par[9]:

$$K = [(QW)^T]^{-1}(\bar{a} - a) \quad (3.17)$$

appelée formule de Bass-Gura

où:

$$\bar{a}_i = K_i + a_i$$

$$Q = [B, AB, \dots, A^{k-1}B]$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k-1} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{k-2} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

avec

Q : Matrice de test de contrôlabilité

W : Matrice triangulaire de Toeplitz

\bar{a}_i : Les coefficients désirés de l'équation caractéristique en boucle fermée

a_i : Les coefficients de l'équation caractéristique en boucle ouverte .

Le système donné par (3.13) est composé de trois sous-systèmes chacun a la forme compane .

Pour le premier sous-système :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Son équation caractéristique en boucle ouverte est :

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 \quad \text{d'où} \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de test de contrôlabilité **Q** et la matrice **W** sont données respectivement par :

$$Q = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d'où:

$$QW = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (QW)^T$$

et

$$[(QW)^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où le vecteur gain désiré de la formule de Bass-Gura est:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 \\ K_1 \end{bmatrix}$$

Et l'équation caractéristique du sous-système en boucle fermée est

$$|SI - A_c| = S^2 + K_2S + K_1 \quad (3.18)$$

En établissant les mêmes démarches pour les deux autres sous-systèmes, on aboutit au schéma bloc suivant :

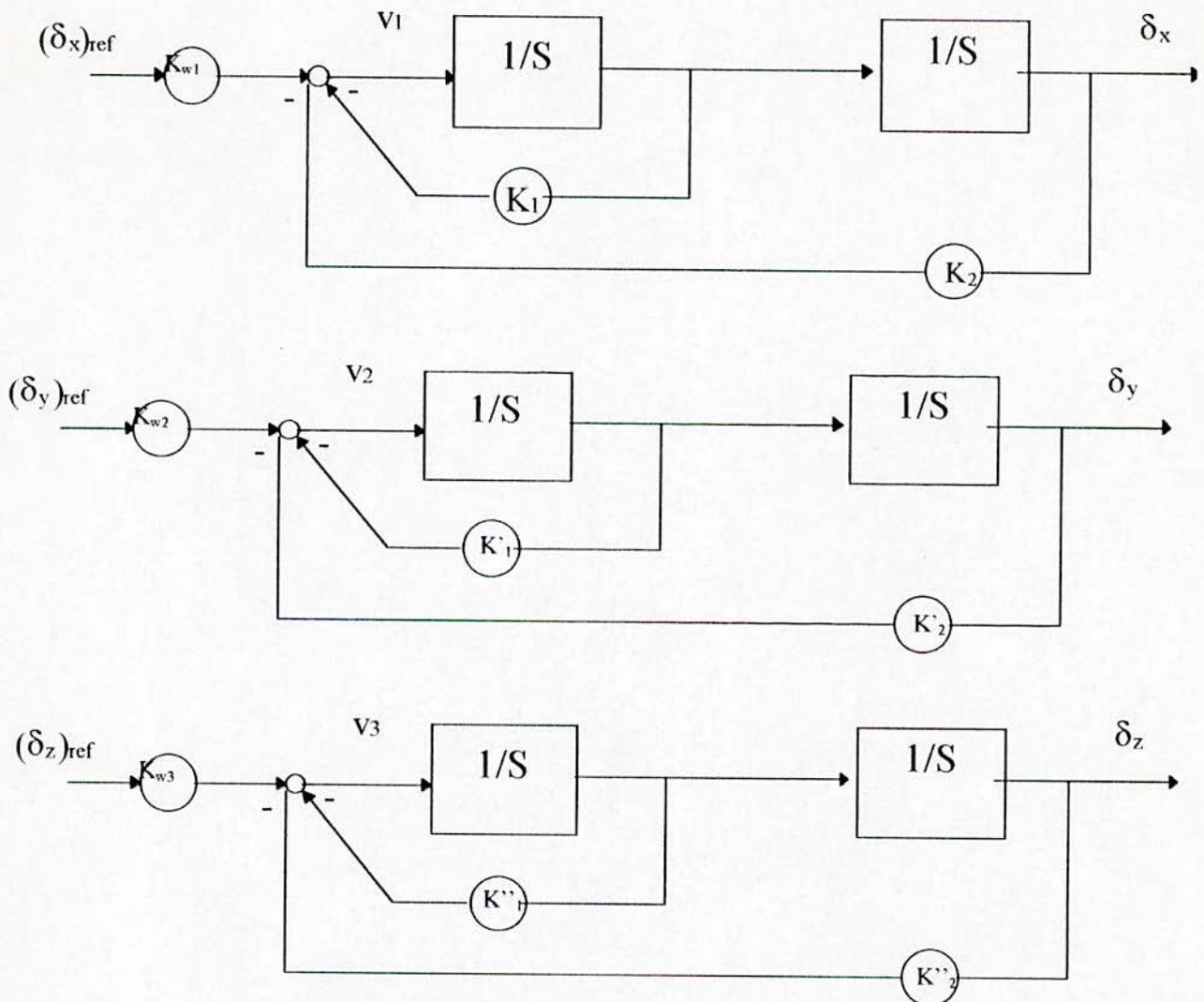


Fig. 3.3: Technique de commande par retour d'état linéaire.

Donc, la dynamique du système est imposée par les pôles de la nouvelle matrice d'état $\mathbf{Ac} = \mathbf{A} - \mathbf{Bk}$ (de système boucle fermée).

Par ailleurs, la matrice de transfert en boucle fermée correspondante peut être déduite facilement du schéma bloc de la figure (3.3).

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_{w1}}{K_1 + K_2 S + S^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{w2}}{K'_1 + K'_2 S + S^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{w3}}{K''_1 + K''_2 S + S^2} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Soit P_1 et P_2 les pôles du premier sous système donc:

$$K_1 + K_2 S + S^2 = (S - P_1)(S - P_2) = S^2 + (-P_1 - P_2)S + P_1 P_2$$

Et les coefficients $K_1, K_2, K'_1, K'_2, K''_1, K''_2$ sont donnés après identification par:

$$\begin{aligned} K_1 &= P_1 P_2 & K'_1 &= P_3 P_4 & K''_1 &= P_5 P_6 \\ K_2 &= -(P_1 + P_2) & K'_2 &= -(P_3 + P_4) & K''_2 &= -(P_5 + P_6) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Avec P_1 à P_6 des pôles imposés aux trois sous systèmes dans l'espace de Brunowsky et K_{w1}, K_{w2} et K_{w3} sont les coefficients d'intervention des consignes.

Le schéma bloc global de cette commande peut être représenté par la figure suivante:

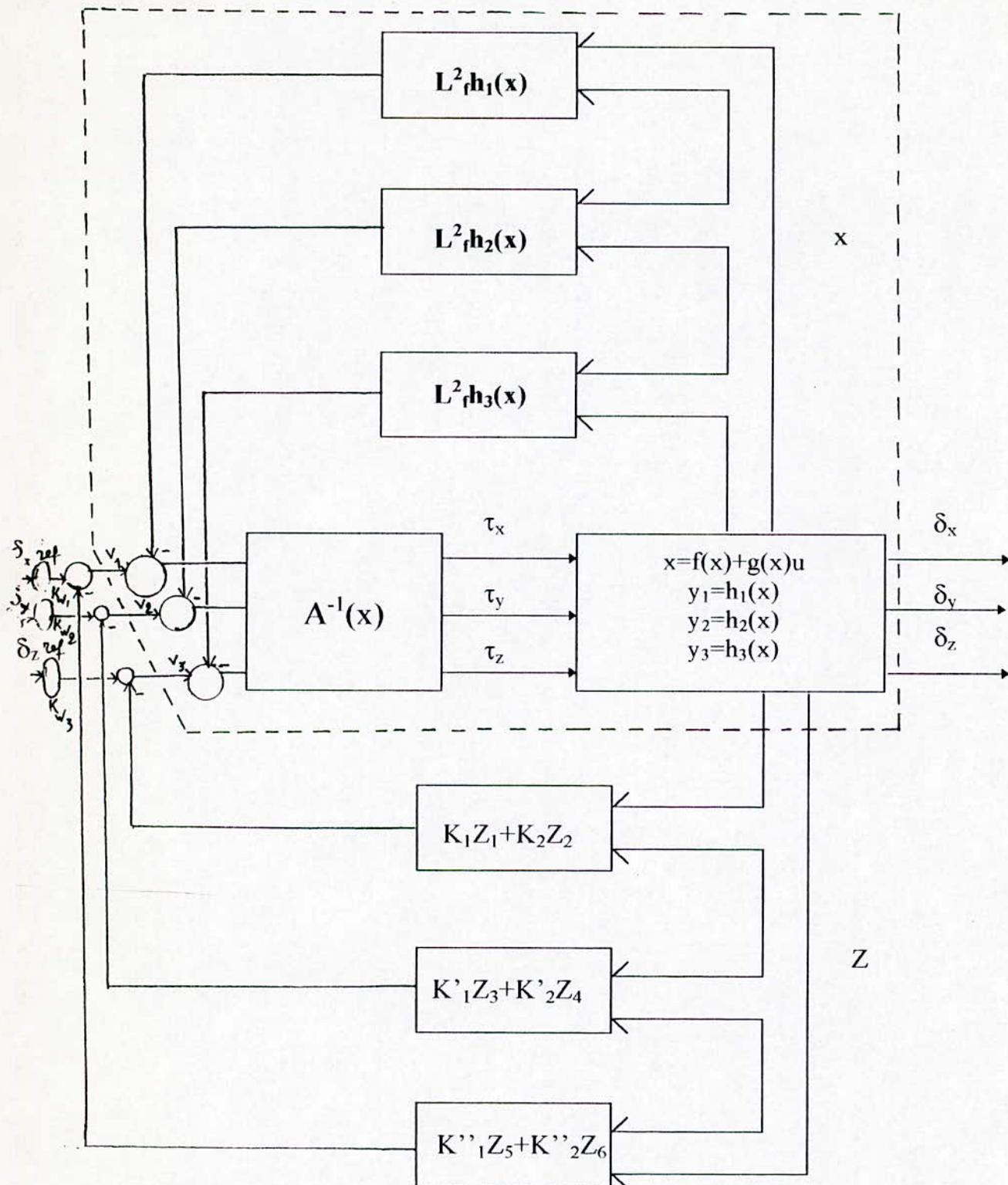


Fig.3.4: Schéma global de la commande

III.4 / Résultats de la simulation numérique :

Dans le cadre d'une simulation numérique sur ordinateur et en vue d'examiner les performances du système de commande en boucle fermée du gyroscope à trois degrés de liberté nous considérons le cas de deux situations pratiques habituelles .

D'abord on suppose que le gyroscope prend une certaine direction voulue, et on étudiera la réponse du système à cette action .

Dans la seconde situation on suppose la présence d'une perturbation extérieure passagère de faible intensité et on examinera comment l'appareil, grâce à son système de commande, revient à sa première position d'équilibre .

A / 1 ère Situation :

Dans ce cas l'utilisateur (pilote dans un avion) provoque un certain input sur l'élévateur du système de commande et on étudiera la réponse du système à cet input qui est une action constante et continue dans le temps, c'est-à-dire un input de type échelon .

L'application de la technique de placement de pôles nécessite en premier lieu que les pôles du système en boucle fermée souhaités soient connus.

Le choix des pôles doit prendre en compte le comportement dynamique désiré (l'amortissement et le temps de réponse) .

Pour cela, l'approche expérimentale par essai et erreur est souvent employée .

On suppose dans ce cas une entrée échelon d'une variation fixe de 0,2 rad .

Trois choix sont établis :

- Pour les pôles: $P_{1,2} = P_{3,4} = P_{5,6} = -1 \pm 10j$, les résultats de la simulation numérique par la figure 3.5.

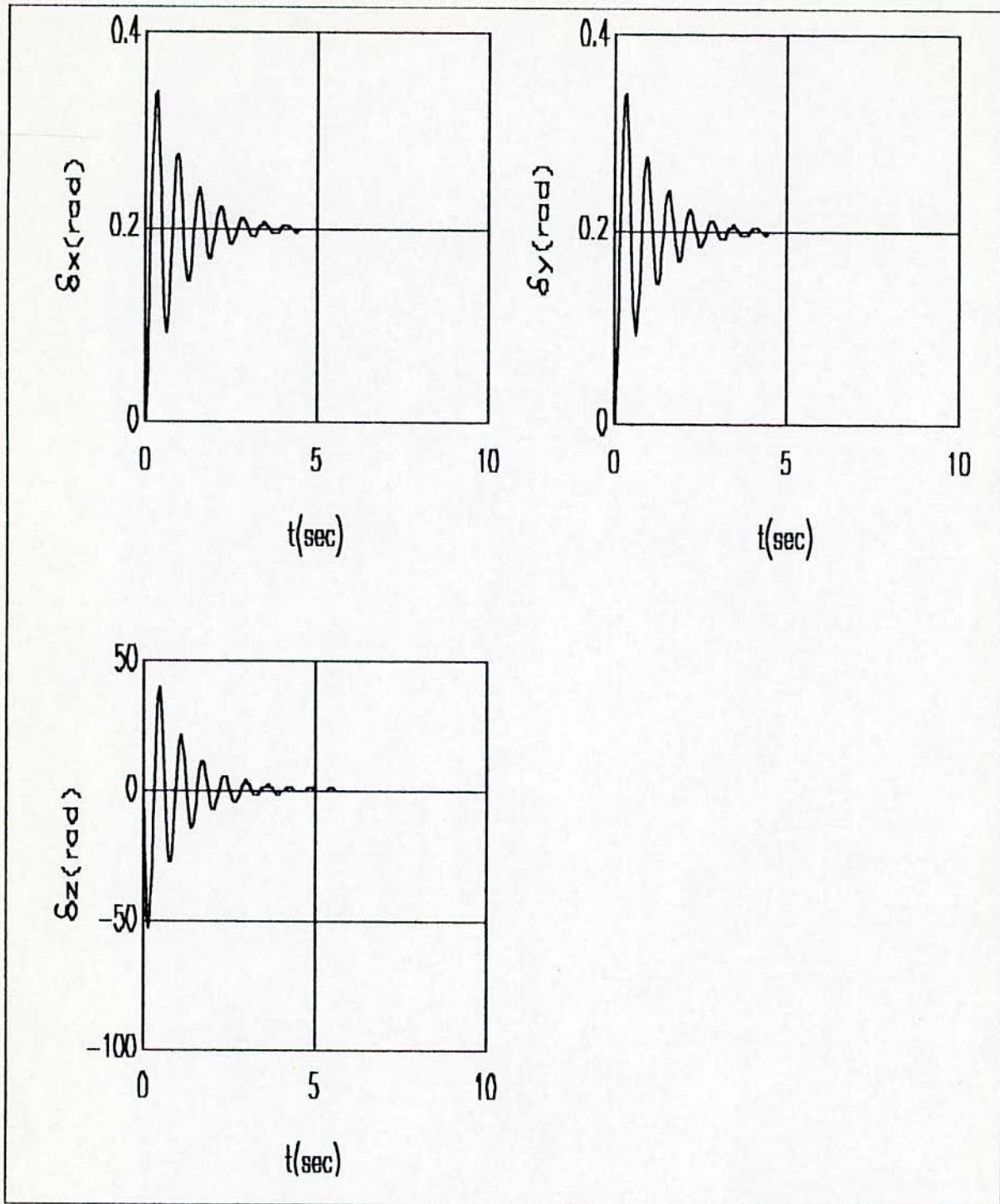
En analysant cette figure, on peut voir qu'on a des oscillations importantes. On remarque également que les trois états du système se stabilisent autour de 0.2 rad. après des régimes transitoires chacun de durée égale à 5 sec. à peu près, avec une erreur permanente nulle.

- Pour les pôles: $P_{1,2}=P_{3,4}=P_{5,6} = -1 \pm 0.2j$, les résultats de la simulation sont donnés dans la figure 3.6.

Dans ce choix, on voit bien que les oscillations importantes du premier choix sont fortement réduites. Mais le temps de réponse a augmenté un peu, c'est-à-dire, égale à 6 sec. pour δ_x et δ_y et 7 sec. pour δ_z , et les trois états tendent vers 0.2 rad. avec des erreurs permanentes presque nulles.

- Pour le troisième choix: $P_{1,2}=P_{3,4}=P_{5,6} = -10 \pm 10j$, les résultats de la simulation donnés dans la figure 3.7 montrent une grande amélioration. Les oscillations sont presque nulles avec un temps de réponse égale à 0.7 sec.

On remarque dans ce cas que les pôles sont placés sur la ligne d'amortissement relatif optimal (le coefficient d'amortissement ξ égal à 0.707).



**Fig. 3.5: Réponse à un échelon ($K_{W1} = K_{W2} = K_{W3} = 0.2$)
pour des pôles égaux $(-1 \pm 10j)$**

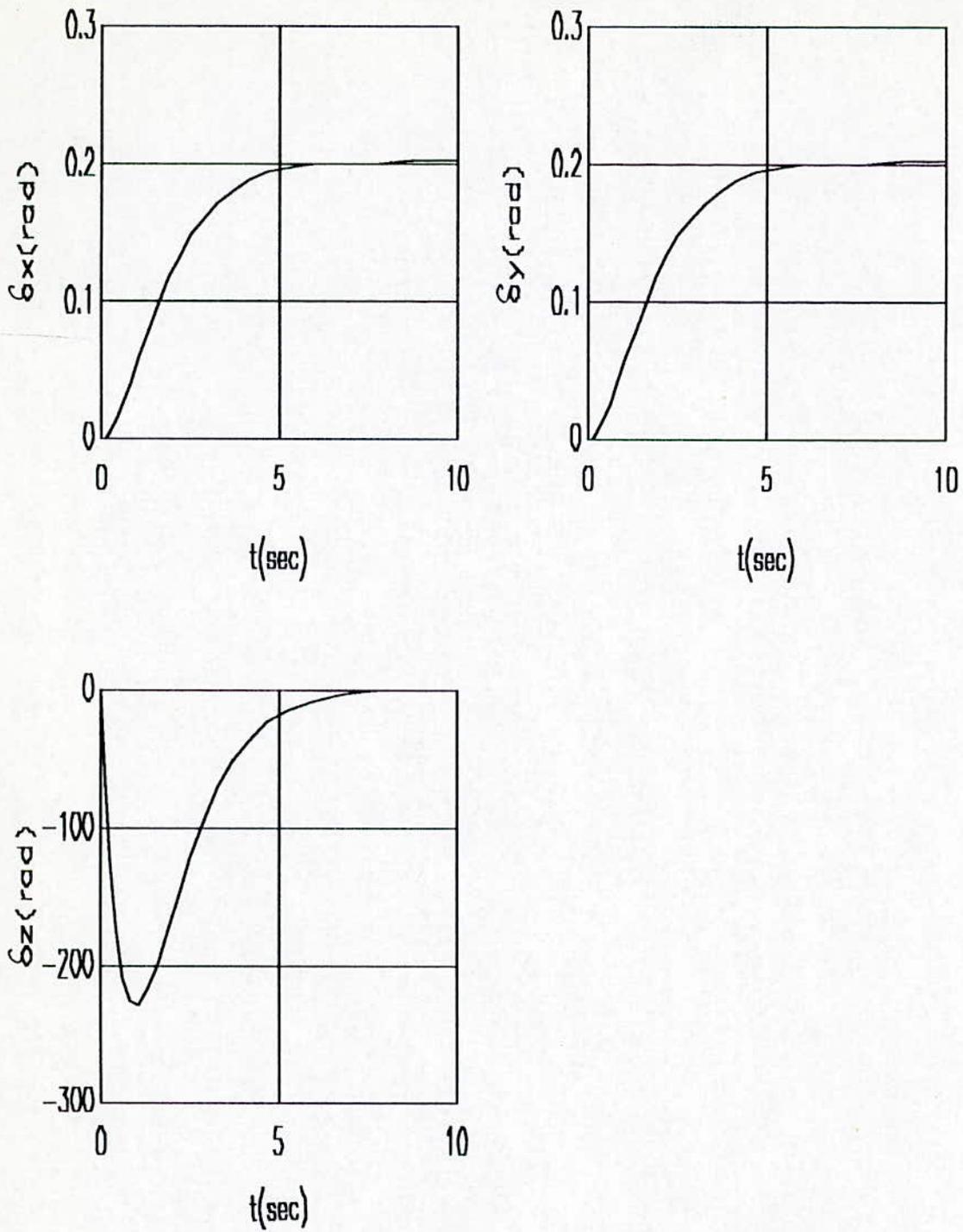


Fig. 3.6: Réponse à un échelon ($K_{w1} = K_{w2} = K_{w3} = 0.2$) pour des pôles égaux $(-1 \pm 0.2j)$

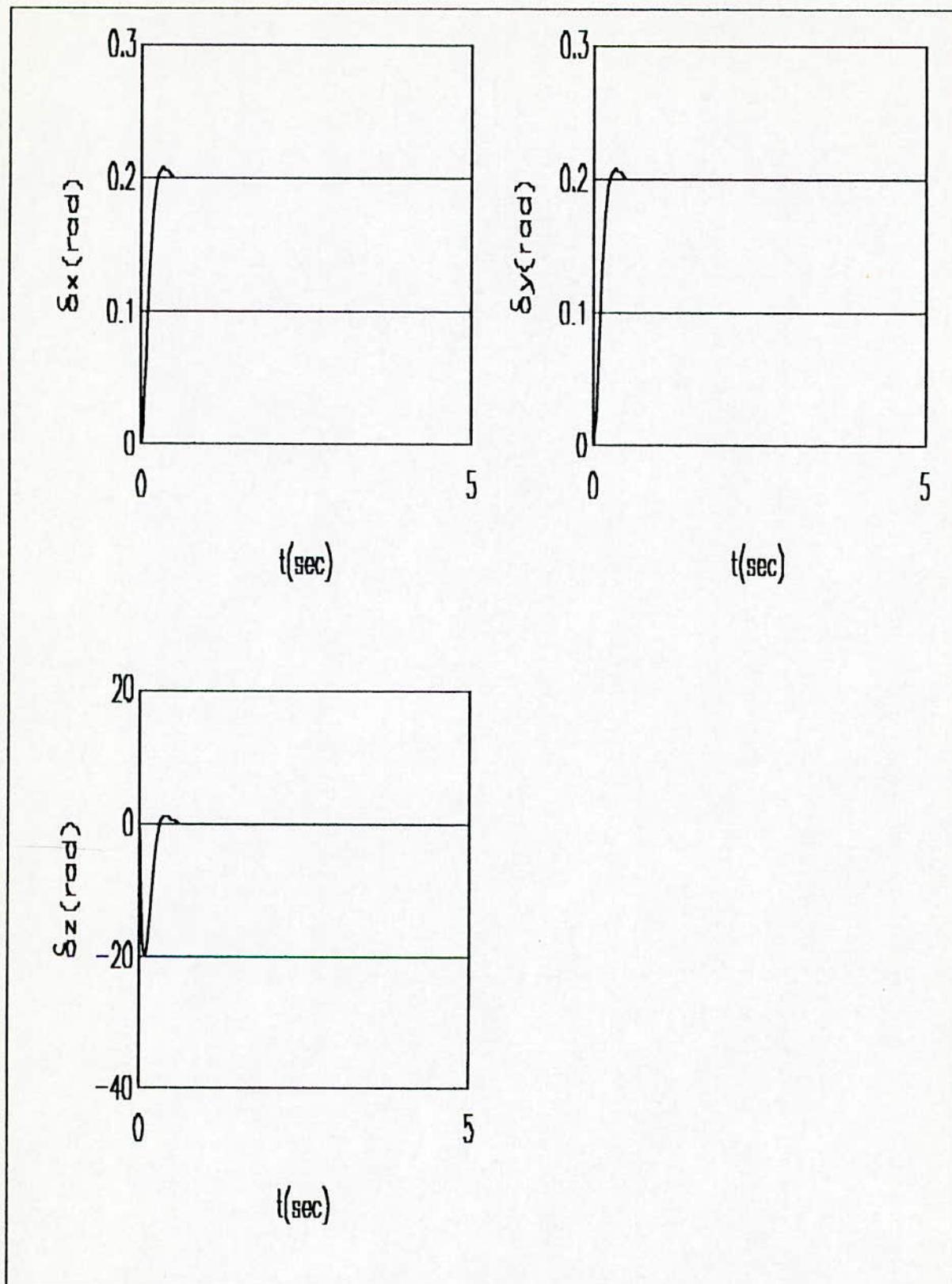


Fig. 3.7: Réponse à un échelon ($K_{w1} = K_{w2} = K_{w3} = 0.2$) pour des pôles égaux ($-10 \pm 10j$)

B/ 2 ème situation:

Dans ce cas, on suppose que la perturbation extérieure est de type impulsion puisqu'elle est passagère. Ce cas revient à étudier la réponse du système en boucle fermée avec les conditions initiales des états ayant les mêmes intensités x_0 que les perturbations auxquelles sont soumis les états x de l'appareil à l'instant t_0 .

Pour cela, on choisit

$$x_0 = [0.0523 \ 0.0523 \ 0.0872 \ 0 \ 0 \ 0]^T \text{ (perturbations maximales).}$$

Un choix de pôles identique à celui de la première situation donne:

- Pour les pôles: $P_{1,2}=P_{3,4}=P_{5,6} = -1 \pm 10j$, les courbes données par la figure 3.8 montrent que le gyroscope se stabilise (les écarts angulaires tendent vers zéro) après un régime transitoire de durée égale à 5 sec.

- Pour les pôles: $P_{1,2}=P_{3,4}=P_{5,6} = -1 \pm 0.2j$, la figure 3.9 montre que les états δ_x et δ_y se stabilisent après 4 sec. et 7 sec. pour δ_z autour de zéro, donc une réponse lente, mais des oscillations fortement réduites par rapport au choix précédent.

L'inconvénient réside dans le choix de pôles auprès de l'origine.

- Une bonne amélioration est remarquée dans la figure 3.10 pour les pôles: $P_{1,2}=P_{3,4}=P_{5,6} = -10 \pm 10j$, d'une part, en temps de réponse, les états se stabilisent autour de zéro après 0.6 sec.

D'autres part, pas d'oscillations, mais un dépassement de faible amplitude n'influent pas sur la stabilité du gyroscope; sauf si d'autres perturbations insistantes se présentent au système.

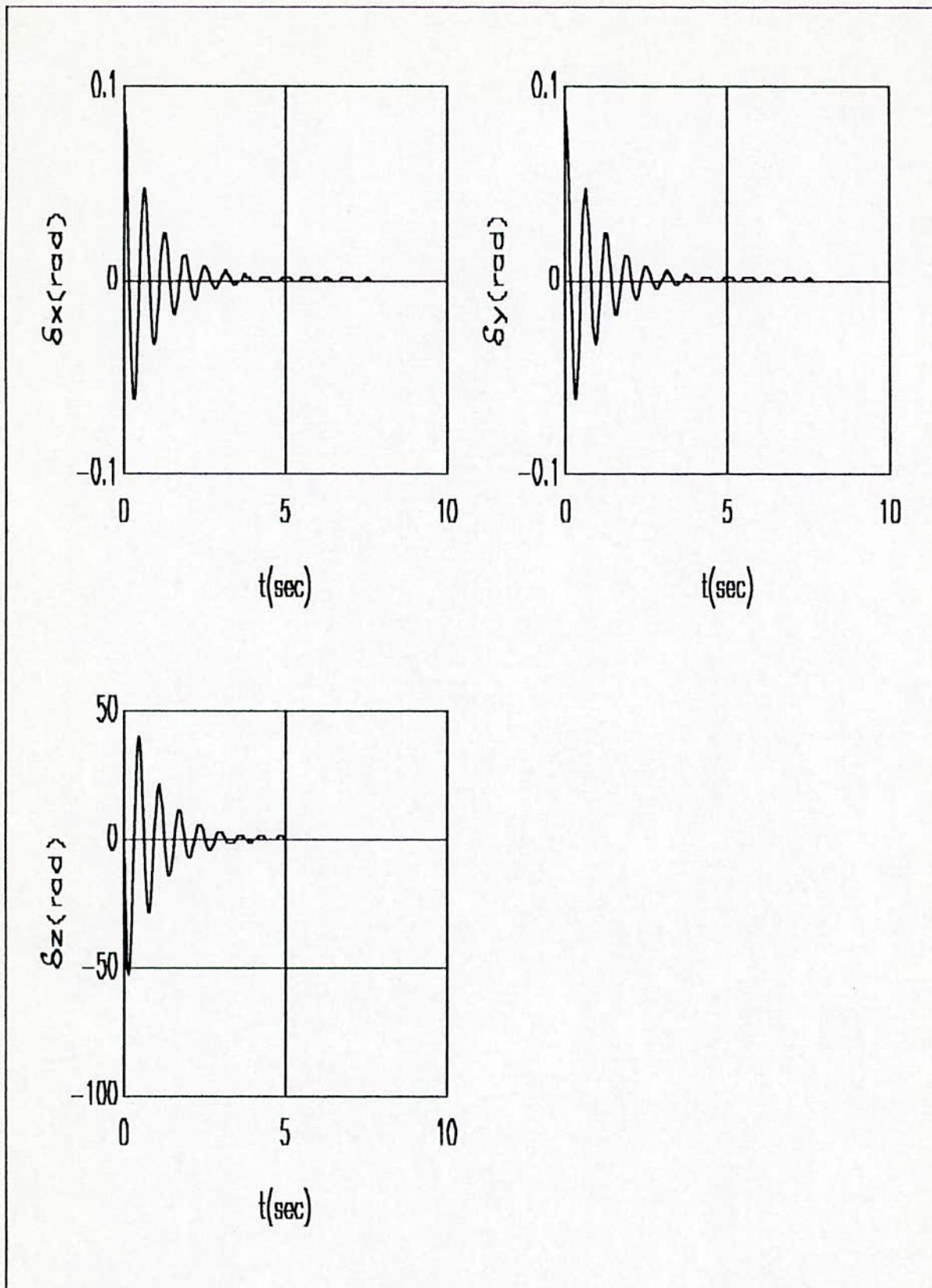


Fig. 3.8: Réponse impulsionnelle pour des pôles égaux $(-1 \pm 10j)$

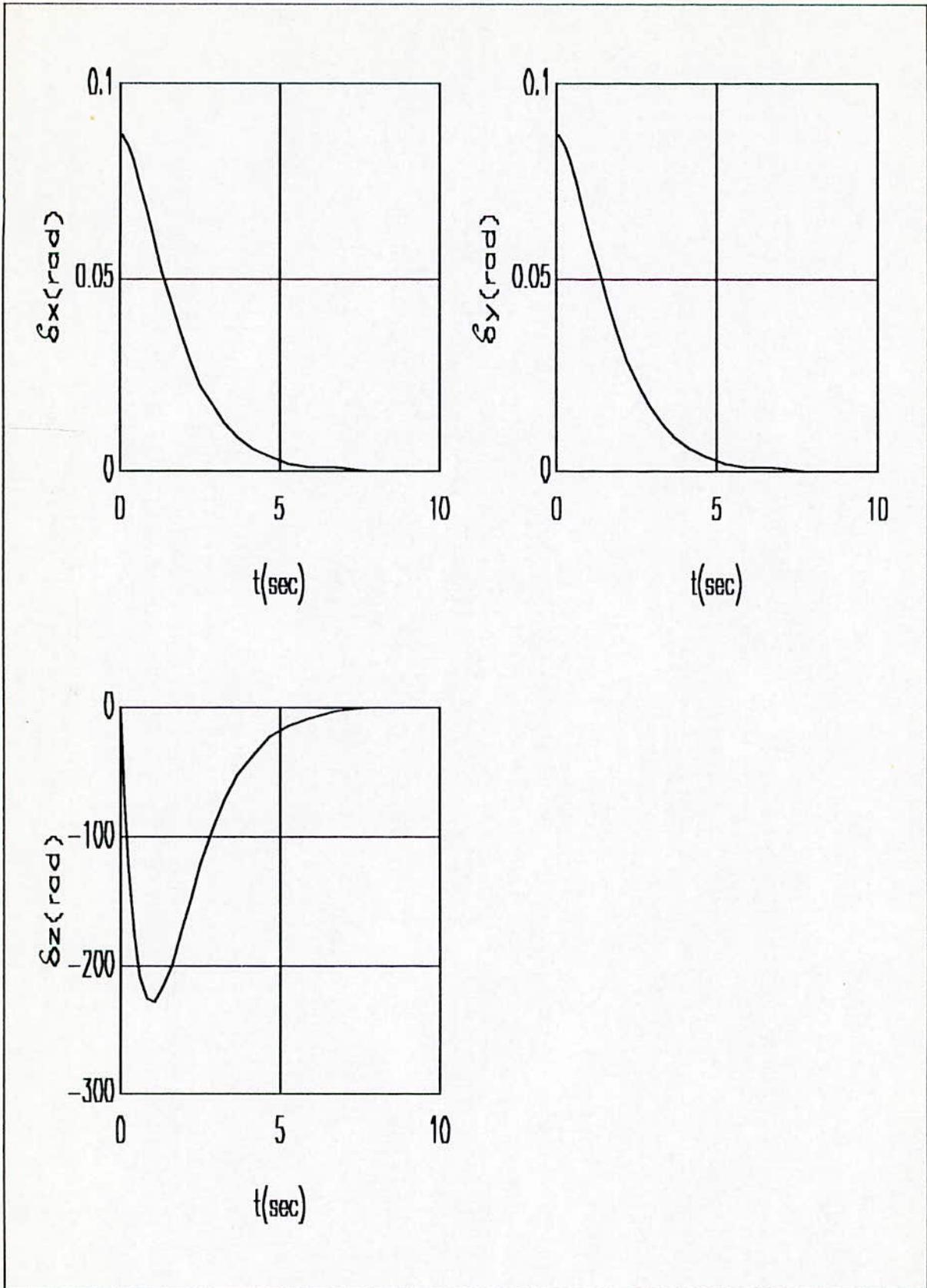


Fig. 3.9: Réponse impulsionnelle pour des pôles égaux $(-1 \pm 0.2j)$

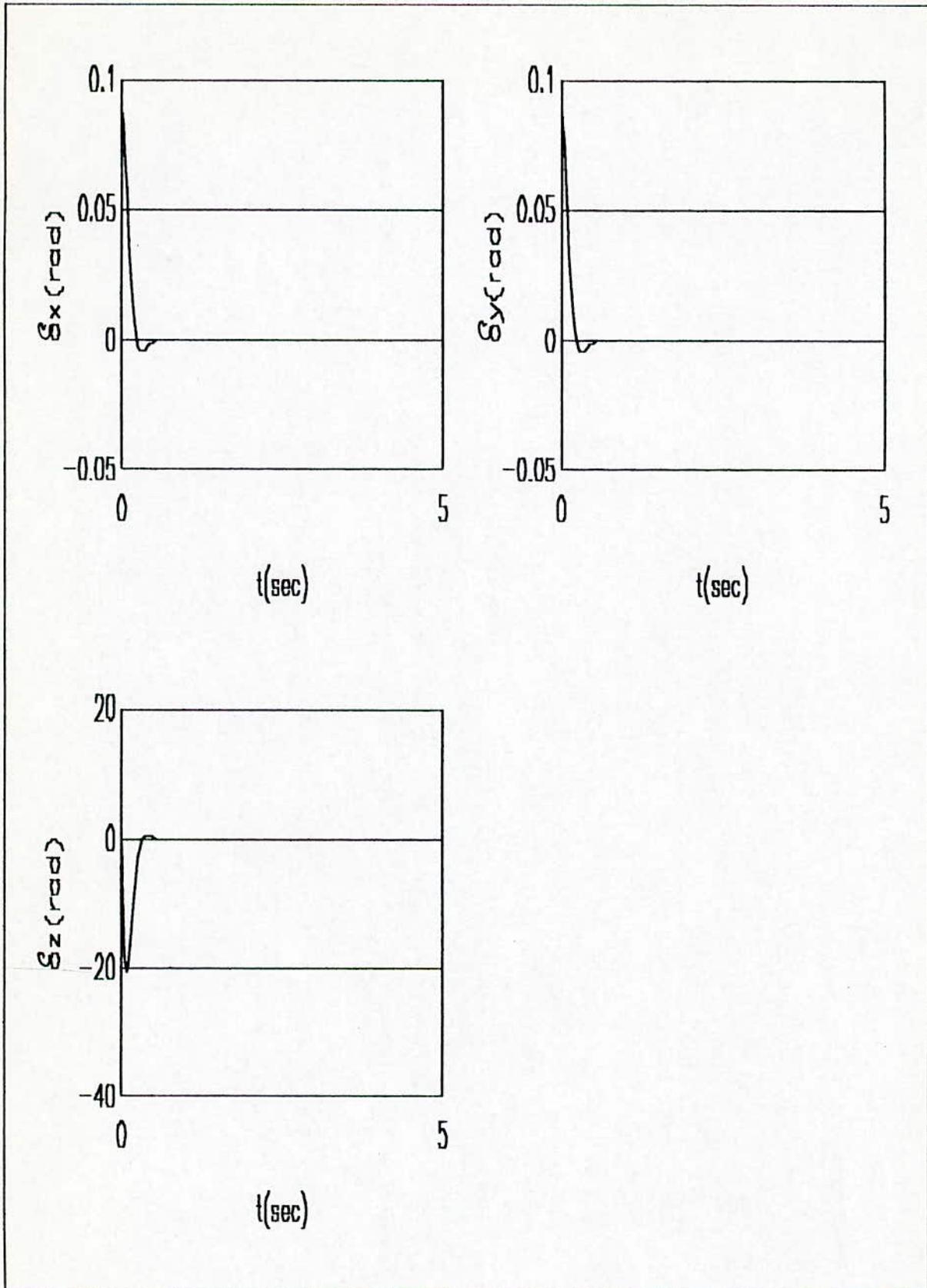


Fig. 3.9: Réponse impulsionnelle pour des pôles égaux $(-10 \pm 10.0j)$

III.5 / Conclusion:

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la technique de linéarisation exacte par retour d'état statique et difféomorphisme suivie d'un placement de pôles à un gyroscope à trois degrés de liberté.

Les résultats de la simulation numérique montrent que la stratégie adoptée donne des performances acceptables.

En effet, le troisième choix des pôles présente de bonnes performances relativement aux deux autres choix.

A la recherche de meilleures performances, on va appliquer dans le prochain chapitre la technique de la commande optimale.

CHAPITRE IV

Commande optimale

IV.1 / Introduction :

Parmi les raisons pour chercher une commande optimale, est que face à des problèmes où on ne possède aucune information à priori sur les emplacements des pôles qui conduisent à un comportement performant, on aura besoin d'une méthode préliminaire de conception. Cela est permis avec la technique de la commande optimale.

La commande optimale est une technique de synthèse moderne, s'appuyant sur des outils mathématiques très puissants [9], appliquée à des systèmes de commande linéaire dans le domaine temporel.

En effet, elle permet d'aboutir à des performances meilleures du système à contrôler, en imposant un critère dit de performance, qui répond aux exigences du concepteur.

En outre, dans l'optimisation de la performance du système, le principe du minimum de Pontryaguin (cas des systèmes continus) et la programmation dynamique de Bellman (cas des systèmes discrets) sont mieux préférés que les techniques de Wiener- Hopf [12].

IV. 2 / Optimisation dynamique par l'approche de Pontryaguin :

Soit le système donné par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

où : \mathbf{x} est un vecteur d'état,
 \mathbf{u} est une commande.

Soit le critère :

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}(t)) = \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$$

Pontryaguin a utilisé le Hamiltonien [13] :

$$\mathbf{H} = \mathbf{L} + \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{x}} \tag{4.1}$$

où \mathbf{p} est un vecteur appelé le co-état et \mathbf{L} appelé le Lagrangien.

Il s'est intéressé à trouver u^* minimisant J , donc on vérifie :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u^*) = 0 \quad \text{et} \quad J(u) - J(u^*) \geq 0 .$$

En remplaçant L tiré de (4.1) on trouve :

$$J - J^* = \int_{t_0}^{t_f} (H - H^*) dt + \int_{t_0}^{t_f} p^T (\dot{x}^* - \dot{x}) dt .$$

Il est montré dans [16] qu'il existe un réel ε et deux fonctions $\eta(t)$ et $\psi(t)$ tels que :

$$\Delta u = u - u^* = \varepsilon \eta(t) \quad \text{et} \quad \Delta x = x - x^* = \varepsilon \psi(t)$$

En appliquant un développement de Taylor sur H , on aboutit à :

$$J - J^* = \varepsilon \left\{ \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{p}^T \right) \psi(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H^*}{\partial u} \eta(t) dt \right\}$$

Dans le cas où t_f et $x(t_f)$ sont fixes, trois conditions nécessaires vérifiant l'optimalité sont données par:

$$\begin{cases} \frac{\partial H^*}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial H^*}{\partial x} = -\dot{p}^T \\ \frac{\partial H^*}{\partial p} = \dot{x} \end{cases}$$

IV. 3 / Problème de la commande optimale linéaire:

On s'intéresse dans cette section au problème d'optimisation des systèmes dynamiques.

Soit le système dynamique linéaire de la forme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y &= C x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

où :

- x : vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$
- u : vecteur de commande de dimension $(m \times 1)$
- A : matrice d'état du système de dimension $(n \times n)$

B : matrice de commande de dimension (n x m)

C : matrice d'observation de dimension (m x n).

L'objectif est de trouver une commande linéaire [14] de la forme :

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (4.3)$$

où **G** est la matrice des gains appropriée .

En général, le critère produit une mesure par laquelle on amène les variables du système à des valeurs désirées. Il est souvent choisi quadratique, pour assurer une commande linéaire [15].

Ce critère de performance est dit aussi fonction de coût [9] et donné par :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{e}(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{e}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt$$

avec: (4.4)

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t).$$

où:

Q et **R** : des matrices de pondération souvent choisies symétriques positive semi-définie et positive définie respectivement [9] .

Le terme $\mathbf{e}^T(t_f)$ représente le coût final [16], où **F** est une matrice symétrique souvent positive semi-définie.

t_0 est le temps initial et t_f est le temps final, ($t_f - t_0$) représente la durée de contrôle.

Notons que ce critère est utilisé pour un problème déterministe si la connaissance des conditions initiales du système $\mathbf{x}(t_0)$ détermine complètement l'évolution de l'état dans le temps [12]

IV. 4 / Minimisation du critère :

La minimisation du critère donné par (4.4) revient à trouver la commande \mathbf{u}^* qui vérifie la condition suivante , en supposant qu'on connaît $\dot{\mathbf{J}}_{\min}$ [16]:

$$\min_{\mathbf{u}} \{ \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \} = 0$$

En utilisant le gradient:

$$\nabla_{\mathbf{u}} \{ \mathbf{J}_t + \mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \} = 0$$

on obtient:

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_x^T \quad (4.5)$$

J_t et J_x sont les dérivées partielles par rapport à t et x respectivement.

Donc u^* vérifie:

$$\mathbf{J}_t + \mathbf{J}_x \mathbf{A} \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{J}_x \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} = 0 \quad (4.6)$$

Puisque le critère J a une forme quadratique, c'est à dire dans le cas général, $J(t, x)$ s'écrit de la forme:

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x} - \mathbf{g}^T(t) \mathbf{x} + \varphi(t) \quad (4.7)$$

où $k(t)$, $g(t)$ et $\varphi(t)$ sont des paramètres à déterminer. De (4.7) on obtient :

$$\mathbf{J}_t = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \dot{\mathbf{K}} \mathbf{x} - \dot{\mathbf{g}}^T \mathbf{x} + \dot{\varphi} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{J}_x = \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{g} \quad (4.9)$$

En injectant les expressions (4.8) et (4.9) dans (4.6) on tire les équations suivantes :

$$\dot{\mathbf{K}} + \mathbf{A}^T \mathbf{K} + \mathbf{K} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} - \mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} = 0 \quad (4.10)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{g} - \mathbf{A}^T \mathbf{g} - \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} - \dot{\mathbf{g}} = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{\varphi} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{g} = 0 \quad (4.12)$$

C'est un système d'équations différentielles du premier ordre de variables k , g et φ , sa résolution requiert des conditions aux limites données dans [16] par :

$$\mathbf{K}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{F} \mathbf{C}$$

$$\mathbf{g}^T(t_f) = \mathbf{r}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{C}$$

$$\varphi(t_f) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T(t_f) \mathbf{F} \mathbf{r}(t_f)$$

Une fois, k et g sont déterminées, la forme de la commande optimale sera donnée par :

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{J}_x^T = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T [\mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{g}] \quad (4.13)$$

$\mathbf{k}(t)$ est symétrique positive définie, solution de l'équation (4.10) de type Riccati.

Pour un problème de poursuite, la trajectoire $r(t)$ est non nulle et est considérée comme une référence à suivre par l'état, et le critère devra minimiser l'erreur $e(t)$.

Quand $(t_f - t_0)$ est fini la solution est généralisée par (4.13) où $g(t)$ est un vecteur d'anticipation [16] satisfaisant l'équation (4.11).

Dans le cas où le coût final est nul, la condition aux limites $g(t_f)$ est aussi nulle.

Si la durée de la commande est infinie, le critère (4.4) pour ce problème de poursuite diverge pour n'importe quel choix de la loi de commande, et la minimisation est mal définie [17].

IV.5 / Problème de régulation :

Le problème de régulation linéaire quadratique (L.Q.R), concerne l'optimisation de J donné par (4.4) avec $r(t)$ nulle pour un système d'équation d'état donné par (4.2) avec C prise égale à la matrice identité.

Par conséquent, si $r(t)$ est nulle, $g(t)$ sera aussi nulle, et la commande optimale \mathbf{u}^* se réduit à :

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = -\mathbf{G} \mathbf{x} \quad (4.14)$$

En effet, la matrice des gains sera définie par:

$$\mathbf{G} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}.$$

Les résultats de la commande optimale exigent l'accessibilité de tous les états du système au feed-back, et le système résultant donné par la figure (4.1) possède des propriétés désirables, telles que la stabilité asymptotique et la bonne tolérance des paramètres du système [18].

Pour A , B , Q et R données la détermination de G devient un problème d'analyse numérique.

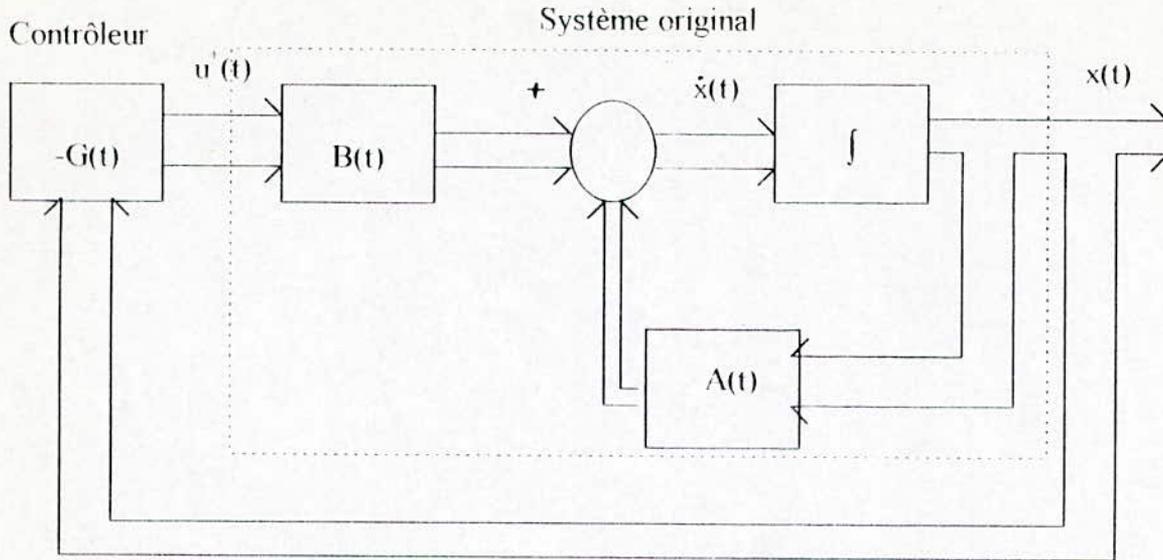


Fig. 4.1: Schéma de Feed-Back de la commande optimale pour un problème de régulation linéaire.

En régime permanent (i.e. $t_f \rightarrow \infty$), si le système est contrôlable et observable [Annexe B], et particulièrement s'il est stationnaire (i.e. A, B, Q et R constantes) la variation de $k(t)$ par rapport au temps tend à s'annuler [9] ($K(t) \rightarrow 0$), on obtient alors l'équation algébrique de type Riccati :

$$A^T \dot{K} + K A - K B R^{-1} B^T K + Q = 0$$

Et la valeur minimale du critère de performance est donnée dans [9] par :

$$J^* (t) = \frac{1}{2} x^T(t) K x(t)$$

IV.6/ Degré de stabilité α dans la commande optimale :

Si la limite inférieure de stabilité est fixée à un degré relatif α , on effectuera un changement de variables en posant :

$$\hat{x} (t) = e^{\alpha t} x(t)$$

$$\hat{u} (t) = e^{\alpha t} u(t)$$

Le critère de performance sera modifié , soit :

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} e^{2\alpha t} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \alpha e^{\alpha t} \mathbf{x}(t) + e^{\alpha t} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= (\alpha \cdot \mathbf{I} + \mathbf{A}) \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}}(t) \end{aligned}$$

Ainsi, en boucle fermée et pour $\hat{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{G} \hat{\mathbf{x}}$:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{B}\mathbf{G}) \hat{\mathbf{x}} \quad (4.21)$$

où:

$$\hat{\mathbf{A}} = \alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}$$

IV.7 / Choix des matrices de pondération :

Il existe dans la littérature de la commande optimale quadratique plusieurs approches et méthodes pour la détermination des éléments des matrices de pondération Q et R .

Parmi ces méthodes on trouve : la méthode de pénalités et la technique adoptée par Bryson.

IV.7.1 / Méthode de pénalités :

Cette méthode consiste à choisir des variables q_i , qui correspondent à des variables physiques significatives . La fonction coût est choisie comme une somme pondérée avec ces variables. Un poids élevé entraîne une réponse avec une impulsion faible et un poids faible correspond à une réponse grande . Ainsi, la réponse du système à des perturbations typiques est évaluée :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_m \end{bmatrix}$$

avec:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2 + p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2 + \dots + p_m u_m^2) dt \quad (4.22)$$

Les pénalités sont choisies de telle sorte que le système ait le comportement désiré.

IV.7.2 / Méthode de Bryson :

Cette règle consiste à choisir les éléments diagonaux des matrices de pondération comme étant l'inverse du carré de la variation maximale permise des états et des inputs:

$$\mathbf{x}_{\max} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{0n} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u}_{\max} = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{0m} \end{bmatrix}$$

Le critère de performance prend la forme :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{x_1}{x_{01}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n}{x_{0n}} \right)^2 + \left(\frac{u_1}{u_{01}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u_m}{u_{0m}} \right)^2 \right\} dt \quad (4.23)$$

Et les matrices de pondération seront:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{01}^2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{02}^2} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{1}{x_{0n}^2} \end{bmatrix} ; \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{u_{01}^2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{u_{02}^2} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \frac{1}{u_{0m}^2} \end{bmatrix} .$$

IV.8 / Commande optimale du gyroscope à trois degrés de liberté :

Comme nous l'avons déjà dit , on cherche souvent à obtenir un vecteur de commande optimale à partir d'un critère quadratique, afin d'obtenir une structure en boucle fermée capable de s'opposer aux perturbations extérieures .

Vu que les systèmes physiques ont en général une constante de temps assez grande, et que le système est stationnaire, la commande à horizon infini convient mieux que celle à horizon fini, ainsi, le temps de calcul sera réduit.

Le critère à minimiser prendra la forme :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

où Q et R les matrices de pondération . Elles seront calculées par la méthode de Bryson explicitée précédemment, dont les variations maximales admissibles des variables d'état et de commande dépendent de la mécanique du gyroscope.

Ces coefficients de pondération ont pour rôle de borner les variations des variables d'état et de la commande.

La synthèse de commande en boucle fermée se fait en calculant le gain optimal de retour G tel que :

$$u(t) = - G x (t)$$

IV. 9 / Simulation numérique :

Pour établir le critère de performance , on obéit au cahier de charges qui consiste à :

- Maintenir les écarts angulaires proches de zéro.
- Des couples (inputs) constants.

Puisque notre système est découplé en trois sous-systèmes indépendants, dont chacun vérifie les conditions de contrôlabilité et d'observabilité [annexe B], on appliquera la procédure d'optimisation pour chaque sous-système.

- Pour le premier sous-système, le critère s'écrit :

$$J_1 = \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\delta_x}{\delta_{0x}} \right)^2 + \left(\frac{v_1}{v_{01}} \right)^2 \right\} dt .$$

Les matrices de pondération seront:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{0x}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad R_1 = \frac{1}{v_{01}^2} ,$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta_{0x} &= \max (\delta_x) = 0.0523 \text{ rad} \\ v_{01} &= \max (v_1) = 10 \text{ sec}^{-2} \end{aligned}$$

D'après les données numériques ci-dessus , la solution de l'équation algébrique de Riccati donne le vecteur gain :

$$G_1 = [191.0811 \quad 19.5490]$$

d'où la matrice du premier sous-système en boucle fermée est :

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -191.0811 & -19.5490 \end{bmatrix} .$$

Les valeurs propres de cette matrice (pôles du sous-système en boucle fermée) sont :

$$P_{1,2} = -9.7745 \pm j 9.7745$$

- Pour le deuxième sous-système, le critère sera :

$$J_2 = \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\delta_y}{\delta_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{v_2}{v_{02}} \right)^2 \right\} dt ,$$

Et puisque : $\delta_{0y} = \delta_{0x}$ et $v_{01} = v_{02}$,on trouve les mêmes résultats du premier sous-système :

$$P_{3,4} = -9.7745 \pm j 9.7745$$

- Pour le troisième sous-système, le critère s'écrit :

$$J_3 = \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{\delta_{0z}}{\delta_{0z}} \right)^2 + \left(\frac{v_3}{v_{03}} \right)^2 \right\} dt$$

Les matrices de pondérations seront:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{0z}^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \frac{1}{v_{03}^2},$$

avec : $\delta_{0z} = \max(\delta_z) = 0.0523 \text{ rad}$,

et $v_{03} = \max(v_3) = 22.36 \text{ sec}^{-2}$.

En suivant la même procédure on trouve :

$$G_3 = [427.2704 \quad 29.2325]$$

$$A_{c3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -427.2704 & -29.2325 \end{bmatrix}$$

et

$$P_{5,6} = -14.6163 \pm j 14.6163$$

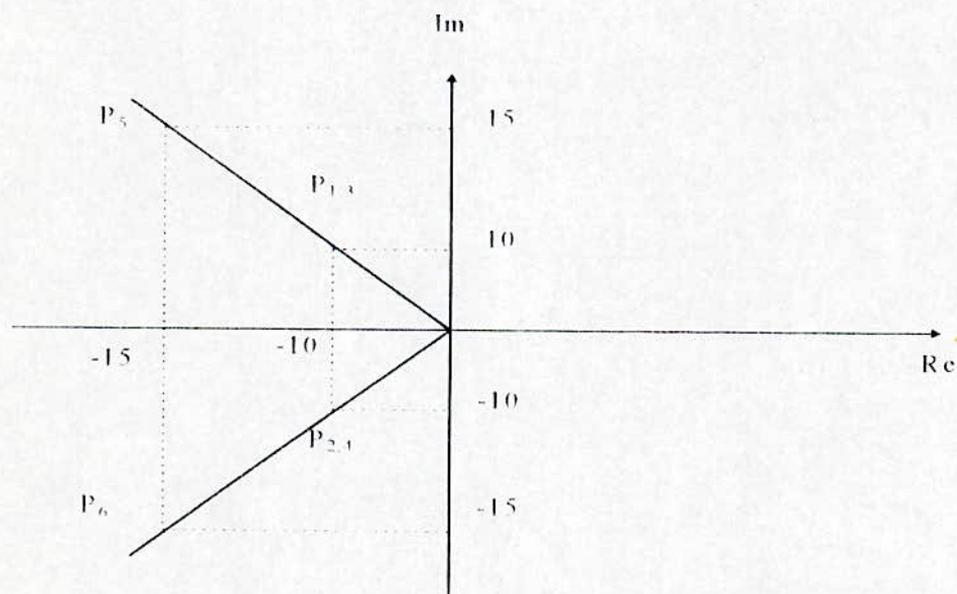


Fig (4.2) : Représentation des pôles dans le plan complexe (Lieu d'Evans)

- Réponse du système à un échelon :

Dans ce cas, et pour les mêmes conditions de travail choisies dans le chapitre précédent (chap. III), c.à.d pour une entrée échelon égale à 0,2 rad.

La simulation des résultats numériques obtenus ci-dessus, nous donne Fig.(4.3).

En analysant cette figure, on peut voir que les trois états du système se stabilisent autour de 0.2 rad. après un régime transitoire de durée égale à 0.5 sec.

Pour δ_x et δ_y , et égale à 0.4 sec. pour δ_z , avec une erreur permanente de l'ordre de 9.10^{-3} rad. et un dépassement d'amplitude faible .

- Réponse impulsionnelle :

Le gyroscope doit se stabiliser sans l'intervention de l'utilisateur.

Aussi, la commande qui réalise cette stabilité est calculée automatiquement.

La commande ainsi calculée , est représentée par Fig. (4.4) pour le vecteur de perturbation

$$x_0 = [0.0523 \quad 0.0523 \quad 0.0872 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Cette commande fait varier les écarts angulaires pour atteindre la position zéro pendant une durée de 0.5 sec. avec une erreur statique nulle .

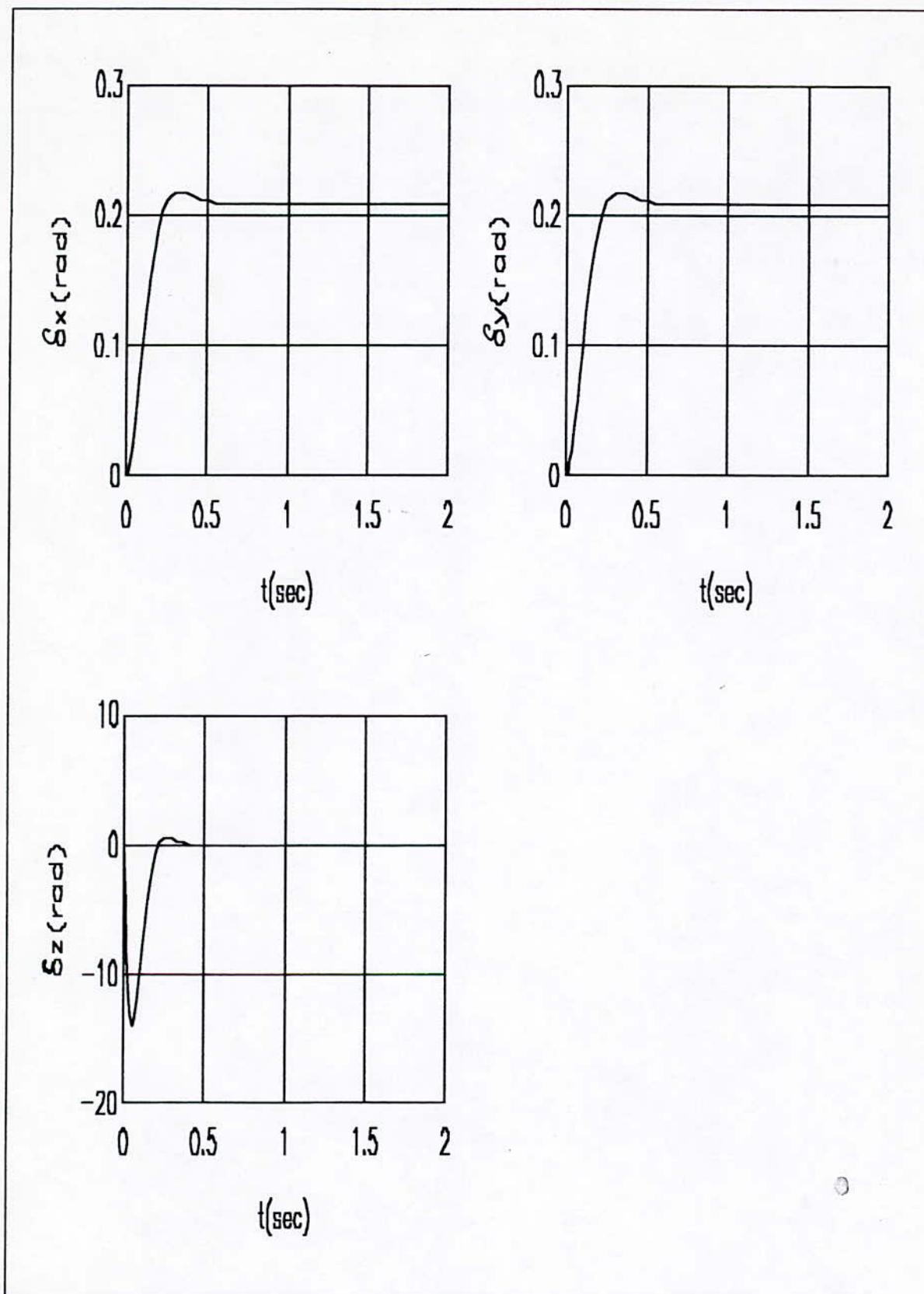


Fig. 4.3: Réponse à un échelon.

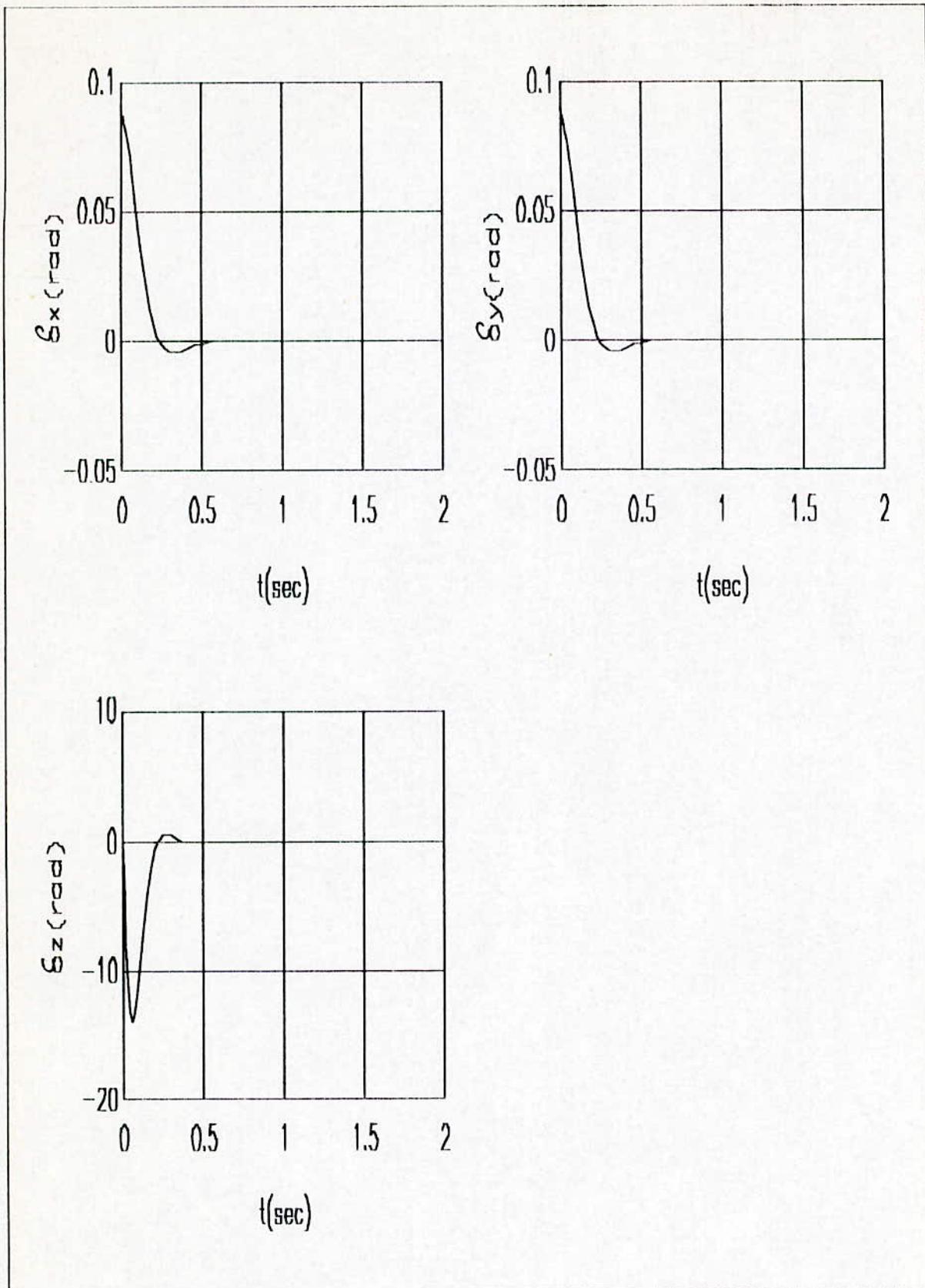


Fig. 4.4: Réponse impulsionnelle.

IV.10/ Double optimisation :

Souvent, nous n'avons pas un cahier des charges bien spécifié, c.à.d. que le choix des matrices de pondération n'est pas fixe. Selon [9, 4] on a les données suivantes :

$$6 \text{ sec}^{-2} \leq v_{1,2 \text{ max}} \leq 14 \text{ sec}^{-2}$$

et

$$18 \text{ sec}^{-2} \leq v_{3 \text{ max}} \leq 26 \text{ sec}^{-2}$$

- des écarts angulaires max entre 2° et 4° .

Pour cela, on effectue plusieurs essais puis on sélectionne celui qui donne la valeur J_{\min} la plus petite.

Rappelons que :

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_0^T \mathbf{K} \mathbf{x}_0$$

où: \mathbf{x}_0 : le vecteur d'état initial ,

\mathbf{K} : la solution de l'équation algébrique de Riccati .

Pour les deux premiers sous-systèmes

$$\mathbf{Q}_{1,2} = \begin{bmatrix} q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{R}_{1,2} = r_{1,2}$$

ou:

$$q_{1,2} = \frac{1}{8 \delta_{1v}} = \frac{1}{8 \delta_{2v}} \quad \text{et} \quad r_{1,2} = \frac{1}{v_{10}^2} = \frac{1}{v_{20}^2}$$

On a obtenu les résultats suivants, montrés sur le tableau (4.1) après variation de $q_{1,2}$ et $r_{1,2}$.

$q_{1,2}^* \backslash r_{1,2}^*$	821.5343	525.7819	365.1263	268.2561	205.3835	J_{min}
0.0278	0.3369	0.2411	0.1834	0.1455	0.1191	
0.0156	0.2916	0.2086	0.1587	0.1260	0.1031	
0.0100	0.2609	0.1867	0.1420	0.1127	0.0922	
0.0069	0.2378	0.1702	0.1294	0.1027	0.0841	
0.0051	0.2205	0.1578	0.1200	0.0952	0.0780	
J_{min}						

Tableau (4.1)

D'où , on tire la plus petite valeur de J_{min} qui correspond aux valeurs :

$$q_{1,2} = 205.3835,$$

$$r_{1,2} = 0.0051$$

Ce qui donne:

$$G_1 = G_2 = [200.6770 \quad 20.0338]$$

$$A_{c1} = A_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200.6770 & -20.0338 \end{bmatrix},$$

et

$$P_{1,2} = P_{3,4} = -10.0169 \pm j 10.0169 .$$

De même façon pour le troisième sous-système , on a obtenu les résultats présentés sur le tableau (4.2) suivant:

$q_{1,2}^* \backslash r_{1,2}^*$	821.5343	525.7819	365.1263	268.2561	205.3835	J_{min}
0.0030	0.0695	0.0497	0.0378	0.0300	0.0246	
0.0025	0.0664	0.0475	0.0361	0.0287	0.0235	
0.0020	0.0628	0.0449	0.0342	0.0261	0.0222	
0.0017	0.0603	0.0431	0.0328	0.0260	0.0213	
0.0015	0.0584	0.0418	0.0318	0.0252	0.0207	
J_{min}						

Tableau 4.2

La plus petite valeur de J_{\min} correspond alors aux valeurs:

$$\begin{aligned} q_3 &= 205.3835 \\ r_3 &= 0.0015 \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\mathbf{G}_3 = [370.0302 \quad 27.2041]$$

$$\mathbf{A}_{c3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -370.0302 & -27.2041 \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{P}_{5,6} = -13.6021 \pm j 13.6020$.

En exploitant ces résultats pour les deux situations du gyroscope, on remarque d'après les figures (4.6) et (4.7) une amélioration sur les performances du système par rapport aux résultats précédents.

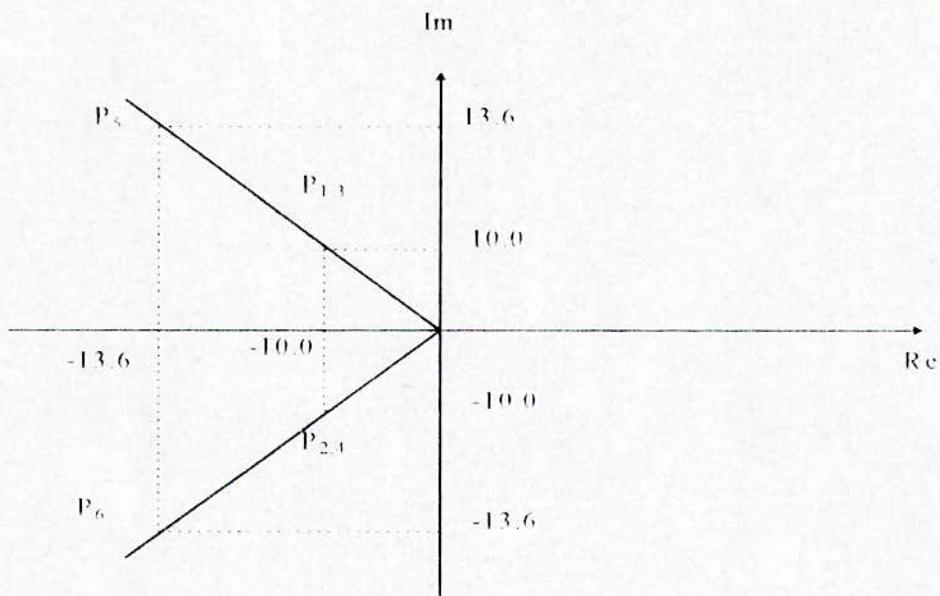


Fig. 4.5: Représentation des pôles dans le plan complexe.

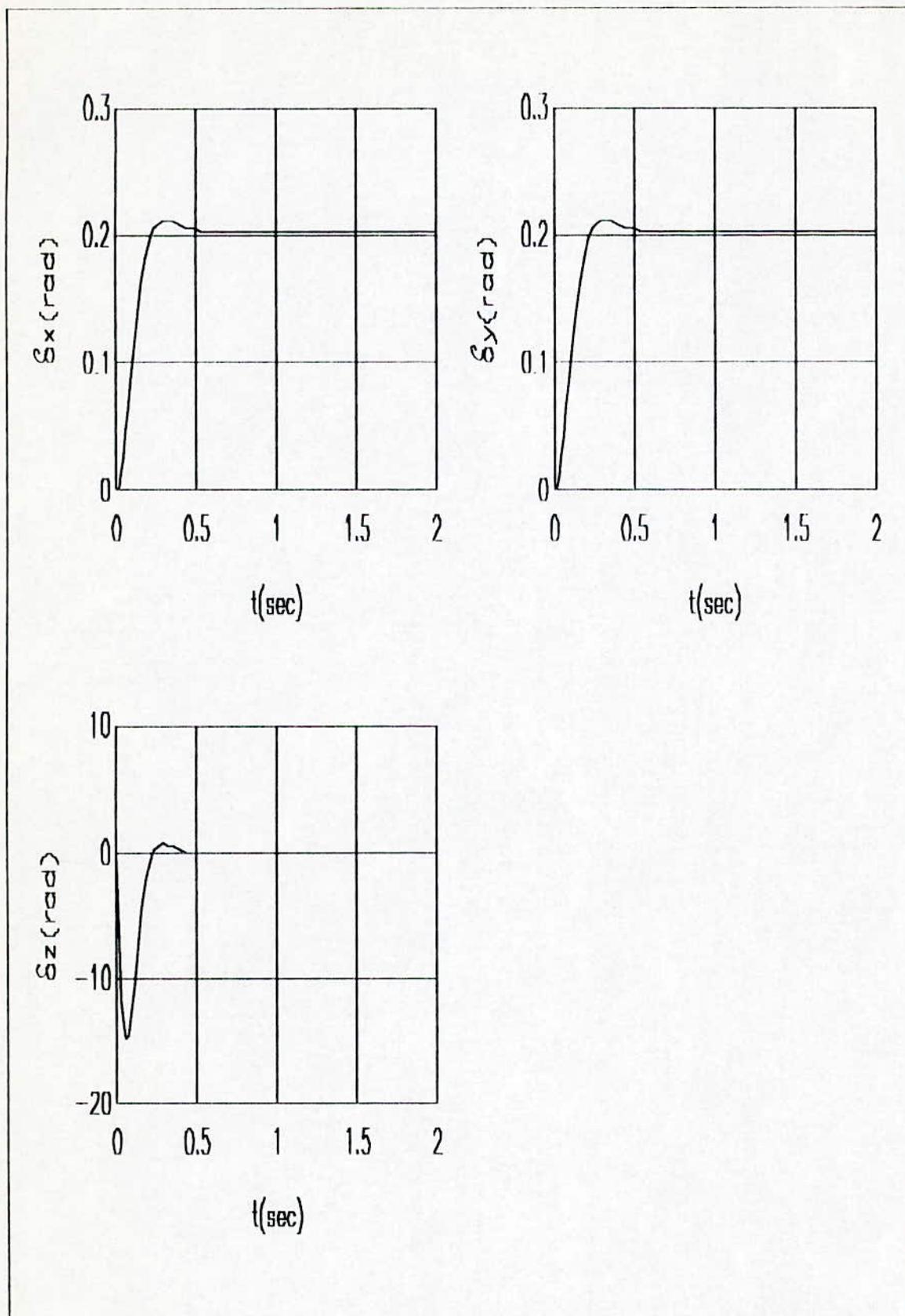


Fig. 4.6: Réponse à un échelon.

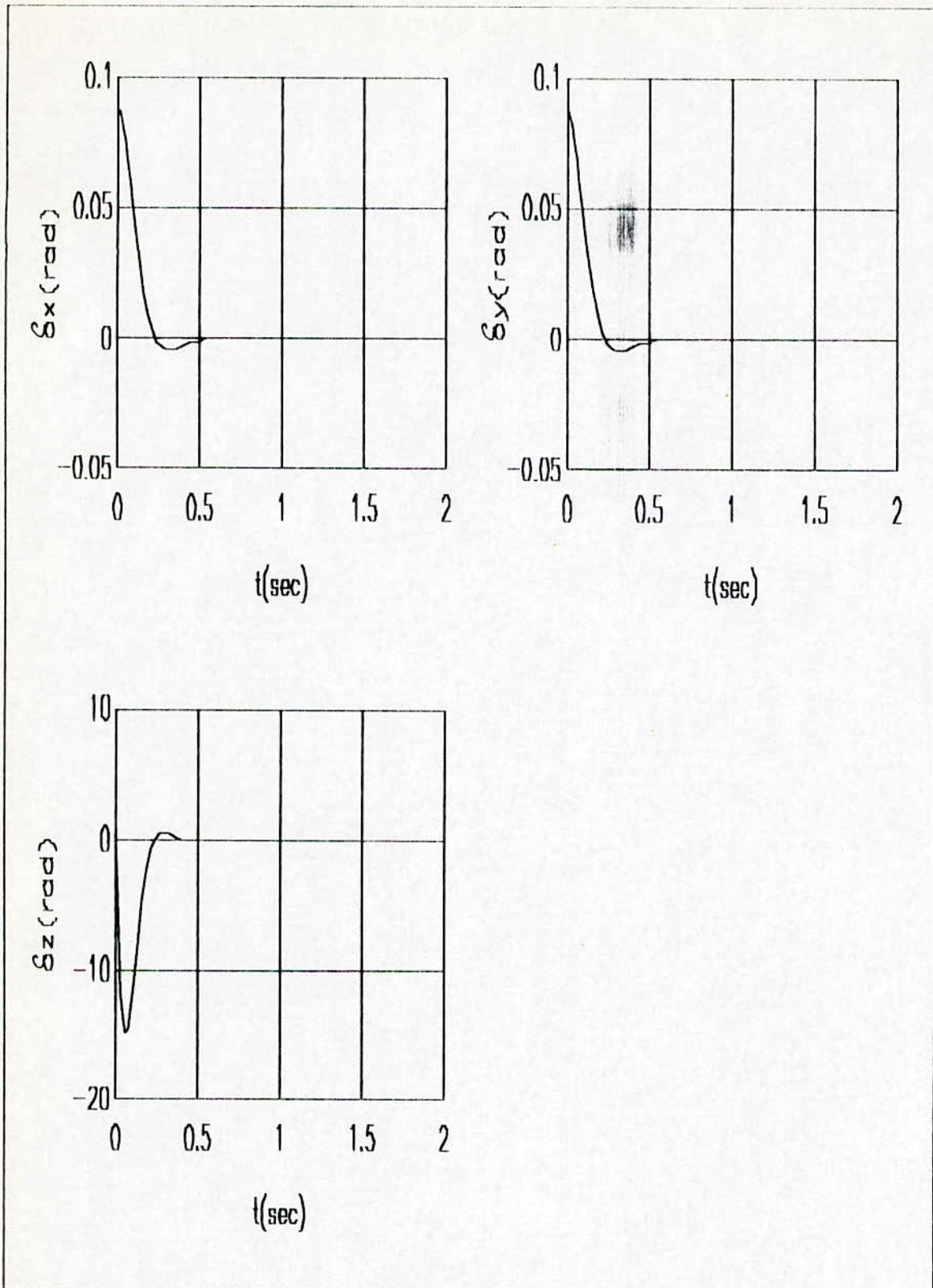


Fig. 4.7: Réponse impulsionnelle.

IV.11/ Conclusion:

Par application de la commande optimale au gyroscope , les résultats de la simulation numérique montrent que plusieurs caractéristiques souhaitées ont été obtenues en particulier une augmentation de la stabilité , réduction des temps de réponse augmentation du facteur d'amortissement...

Lors de l'action d'une perturbation ,les états du système seront perturbés ,et la commande entre en action en annulant les effets de cette dernière .Les états tendent vers un régime stationnaire après un régime très bien amorti.

A la fin de ce chapitre nous avons appliqué une double optimisation au système par un choix convenable des matrices de pondération en effectuant plusieurs essais.

CONCLUSION GENERALE

Après avoir établi un modèle d'un gyroscope à trois degrés de liberté, nous avons appliqué certaines techniques de commande non linéaire par une linéarisation exacte et un découplage E/S.

La technique de placement de pôles en boucle fermée, en vu de la détermination des gains de retour, a fixé certaines performances de la stabilité du système (dépassement, amortissement, temps de réponse...), sans tenir compte de l'énergie nécessaire à mettre en oeuvre ou de la réalisabilité physique. Cependant, si inversement, la conception doit ce faire dans un cadre de compromis entre les exigences voulues, l'emploi de la technique de la commande optimale devient nécessaire. Cette dernière, nous a permis de concevoir un système de commande linéaire répondant à ces exigences tout en tenant compte du coût de performance [12].

Il reste néanmoins, de nombreuses directions dans lesquelles cette étude peut être développée, pour améliorer encore les performances et les facilités d'utilisation.

Notons que le domaine d'application du gyroscope est très vaste, et que le problème traité auparavant constitue une partie des problèmes existant dans ce champ d'activité.

Enfin, nous tenons à remarquer que cette étude peut être étendue en traitant le problème de poursuite avec un modèle incluant un terme qui traduit les perturbations.

ANNEXES

Soit le système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u$$

Les champs de vecteurs f et g associés à ce système sont donnés par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec:

$$f(x) = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T, g(x) = [g_1, \dots, g_n]^T, X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

A - 1 / Dérivée de Lie :

Considérons une fonction $T(x)$ et le champ de vecteurs f , nous appellerons dérivée de Lie de $T(x)$ suivant le champ de vecteurs f l'expression suivante :

$$L_f T(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T(x)}{\partial x_i} f_{i1}(x)$$

La dérivation de cette dernière expression suivant le champ de vecteurs g donne :

$$L_g L_f T(x) = \frac{\partial (L_f T(x))}{\partial x_i} g(x)$$

Ainsi, si $T(x)$ est différencié k fois suivant le champ de vecteur f , par récurrence :

$$L_f^k T(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} T(x))}{\partial x} f(x),$$

avec:

$$L_f^0 T(x) = T(x)$$

A - 2 / Crochet de Lie :

Une notion qui est aussi importante, est celle du crochet de Lie ou produit de Lie. Il est défini par :

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

où :

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La combinaison des champs de vecteurs trouvé par crochet de Lie avec le champ de vecteurs f donne un nouveau champ de vecteurs.

La répétition de cette opération plusieurs fois aboutit à d autres champs de vecteurs :

$$[f, [f, \dots, [f, g]]](x)$$

Pour éviter les confusions nous optons pour la notation suivante :

$$\text{ad}_f^k g(x) = [f, \text{ad}_f^{k-1} g](x)$$

avec:

$$k \geq 1 \quad \text{et} \quad \text{ad}_f^0 g(x) = g(x)$$

Propriétés :

Le crochet de Lie de champs de vecteurs est caractérisé par les propriétés suivantes :

(1) - Soient f_1, f_2, g_1 , et g_2 des champs de vecteurs et r_1 et r_2 des nombres réels, alors:

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2, g_1] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_2, g_1]$$

$$[f_1, r_1 g_1 + r_2 g_2] = r_1 [f_1, g_1] + r_2 [f_1, g_2]$$

(2) - Commutativité

$$[f, g] = -[g, f]$$

(3) - Identité de Jacobi : soient f, g et p des champs de vecteurs, alors :

$$[f, [g, p]] + [g, [p, f]] + [p, [f, g]] = 0$$

(4) - Soient $\Gamma(x)$ et $\lambda(x)$ des fonctions réelles, f un champ de vecteurs :

$$L_{f\Gamma}\lambda(x) = (L_f\lambda(x)) \Gamma(x)$$

(5) - Soient f, g des champs de vecteurs et α une fonction réelle :

$$L_{[f,g]}\alpha(x) = L_f L_g \alpha(x) - L_g L_f \alpha(x)$$

(6) - Si f est un champ de vecteurs et α une fonction réelle, alors :

$$L_f d\alpha(x) = dL_f \alpha(x)$$

avec :

$$d\alpha(x) = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \right]$$

A - 3 / Difféomorphisme :

Par analogie aux système linéaire, nous pouvons transformer un système non linéaire au moyen d'un changement de coordonnées non linéaire de la forme :

$$z = \phi(x)$$

où $\phi(x)$ est une fonction vectorielle donnée par:

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix},$$

qui possède les propriétés suivantes :

- $\phi(x)$ est une application bijective
- $\phi(x)$ et $\phi^{-1}(x)$ sont les applications différentiables .

Si ces deux propriétés sont vérifiées pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ alors $\phi(x)$ est un difféomorphisme global sur \mathbb{R}^n .

Par contre, si le Jacobien de $\phi(x)$ évalué au point $x = x_0$ est non nul alors $\phi(x)$ est un difféomorphisme local .

R.E .Kalman est le premier qui a introduit les concepts sont la base de la théorie moderne de la commande optimale .

B - 1 / Contrôlabilité :

Soit le système G en boucle ouverte représenté par (Fig. B)

où : u est la commande ,
y est la sortie .



Fig. B

Ce système est contrôlable si chaque variable d'état de G peut être affectée par l'entrée u [19] . Si une ou plusieurs variables d'état ne sont pas affectés par u, elles ne peuvent pas être commandées , et le système n'est pas complètement contrôlable .

B - 2 / Condition de contrôlabilité :

Soit le système linéaire défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{ B.1 }$$

x (t₀) : condition initiale donnée

où A , B et C sont des matrices de dimensions n x n , n x m et r x m respectivement.

u , x et y des vecteurs de dimensions , m x 1 , n x 1 , et r x 1 respectivement

La solution de ce problème est donnée dans [15] par :

$$x(t) = \phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau)B.u(\tau)d\tau , \quad t \geq t_0 \tag{B.2}$$

où $\phi(t)$ est la fonction de transition

Si on désire un état final $x(t_f) = 0$, et par application des propriétés de Φ et du résultat du théorème de Cayley-Hamilton [19] on aboutit à :

$$x(t_0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_{t_0}^{t_f} \alpha_k(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau$$

avec :

$$\Phi(t) = e^{A t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \quad (B.4)$$

et α_k est une fonction scalaire.

L'équation (B.3) peut être écrite sous forme matricielle :

$$x(t_0) = - L \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$$

où : $L = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B]$, matrice de test de contrôlabilité

$$\text{et : } p_k = \int_{t_0}^{t_f} \alpha_k(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau$$

Une solution existe à l'équation (B.3) pour mener $x(t_f)$ à zéro, si les vecteurs colonnes de L sont linéairement indépendants. Cas particulier où u est un scalaire, L devra être non singulière.

Le système est donc complètement contrôlable si les n vecteurs colonnes sont indépendants linéairement.

B - 3 / Concept d'observabilité :

Le système G représenté dans (Fig. B) est observable si chaque variable d'état de G affecte quelque sorties de y [19].

Il est souvent désirable de déterminer une information observant les états du système basée sur les mesures de y . Cependant, si on ne peut pas observer une ou plusieurs états par les mesures de y , donc le système n'est pas complètement observable.

B - 4 / Condition d'observabilité :

Pour le même système défini par (B.1), en utilisant sa solution donnée par (B.2) on obtient :

$$y(t) = C \Phi(t-t_0) x(t_0) + C \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) B u(\tau) d\tau \quad (B.5)$$

L'observabilité de $x(t_0)$ dépend du terme :

$$C \Phi(t-t_0) x(t_0) ,$$

Alors pour une commande nulle et utilisant (B.4) on trouve :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (t-t_0) C A^k x(t_0) .$$

Cette dernière équation indique que si $y(t)$ est connue durant $(t_f - t_0)$, donc $x(t_0)$ est uniquement déterminée, de cette équation, si $x(t_0)$ est une combinaison linéaire de $(C_k A^k)^T$ pour : $k = 0 \dots n-1$ et $l = 1 \dots m$,

On pose alors :

$$U = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$$

appelée matrice de test d'observabilité .

On dit que le système est complètement observable si les n vecteurs colonnes sont linéairement indépendants .

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: Alpha encyclopédie.(1970), N° 125. PARIS.
- [2]: De La Taille R.(1983). Navigation, article extrait de **Science et Vie**. Excelesior Publications, S.A. Paris.
- [3]: Strelcov S. (1978). Mécanique. MIR, Moscou.
- [4]: Radix J.C. (1988). Mécanique des gyroscopes, et mesures en navigation. Techniques de l'ingénieur. (Références A270 et R1940), Paris.
- [5]: Radix J.C.(1972). Techniques inertielles, mesures gyro-accelérometriques localisation, stabilisation.Masson, Paris.
- [6]: Tenot A.(1964). Gyroscopie théorique et expérimentale. Application au guidage des engins, à la marine et à l'aéronautique (tome IV). Librairie scientifique et technique, Paris.
- [7]: Alonso M et Finn E.J(1970). Physique générale (tome I), Addison-Wesley Publishing Company, Inc, Philippines.
- [8]: Timoshenko S et Young D.J.H.(1962). Mécanique de l'ingénieur, Mc Graw-Hill Book company, Inc, New york.
- [9]: Friedland B.(1987). Control system design(An introduction to state space methods). Mc Graw-Hill company, Inc, New york.
- [10]: Isidori A.(1980). Non linear control systems, An introduction, 2nd Edition, Springer Verlag.
- [11]: Nibouche M.(1994). Application de commandes non lineaires au moteur asynchrone, thèse de Magister, ENP, Alger.
- [12]: Louam N.(1995). An overview of Algerian Journal Of Technologie(JOT), série B, volume 11 N° 1, Publication Internationale de l'ENP, Alger.
- [13]: Naslin P.(1969). Théorie de la commande et conduite optimale, Dunod, Paris.
- [14]: Kirk D.E.(1970). Optimal control theory (An introduction), Prentice-Hall Inc, Englewood cliffs, New Jersey.

Bibliographie.

- [15]: D'Azzo J.J et Houpis C.H.(1981). Linear control system Analysis and design (conventional and modern), Mc Graw-Hill company, New york.
- [16]: Louam N, (1996), Cours d'automatique de post-graduation,ENP, Alger.
- [17]: Athans M et Falb P.L, (1966). Optimal control (An introduction to the theory and its applications), Mc Graw-Hill book company, New york.
- [18]: Kuo B.C, (1980). Digital control systems, Holt-Saunders International editions.
- [19]: Shinnars S.M.(1978).Modern control system theory and applications. Addison Wesley Publishing Company, Inc, Philippines.