

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT : ELECTRONIQUE

# PROJET DE FIN D'ETUDES

INGENIORAT D'ETAT EN ELECTRONIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

THEME

COMMANDE OPTIMALE  
PAR  
ESTIMATION D'ETAT

PROPOSE PAR :

— Dr N. LOUAM

ETUDIE PAR :

— Mr H. AMROUCHE  
— Mr A. BENDIFALLAH

DIRIGE PAR :

— Dr N. LOUAM

PROMOTION : JUILLET 1994



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique



ملخص:

يرمي هذا العمل إلى تقديم جزءا من نظرية التحكم الحديثة وبالأخص، نظرية التحكم الأمثل والترشيح على طريقة كالمان.

تطبق هذه الدراسة على موضوع إنشاء منظم ذو مدة تحكم غير منتقبة للطائرة وذلك في مجال عرضي.

المحاكات على جهاز الحاسوب تسمح برؤية أثر عملية التحكم الأمثل وكذا الترقب على تحسين كفاءات نظام التحكم.

#### Abstract:

*This work has for objectif to introduce one part of modern control theory in particular, the linear optimal control and Kalman filtering.*

*The problem of designing an optimal regulator for aircraft fighter with non finite period in stochastic approach has considered.*

*A computer simulation shows how the optimization of the control and optimisation can be achieved*

#### Résumé:

*Ce travail a pour but d'introduire une partie de la théorie de contrôle moderne et en particulier, la commande optimale linéaire et le filtrage de Kalman.*

*L'exemple qui a été considéré est celui de la synthèse d'un régulateur optimal à horizon infini d'un avion de chasse. Le problème a été traité dans un contexte stochastique.*

*Une simulation sur ordinateur a été faite pour montrer comment une optimisation des performances et de l'observation peuvent être réalisés.*

الوطن

المدرسة الوطنية المتعددة الفنون  
المكتبة — BIBLIOTHEQUE  
Ecole Nationale Polytechnique

إلى الوالدين الكريمين ...  
إلى إخواني وأخواتي ...  
إلى كل من جمعني به علاقة صداقة أو محبة أو أخوة في الله ...  
إلى كل أبناء ديني ووطني الحبيب ...

إلى هؤلاء أهدي هذا العمل

حميد محمود

أهدي هذا العمل

إلى الوالدين العزيزين ...  
إلى إخواني وأخواتي ...  
إلى جميع الأصدقاء ...  
وأخيرا إلى وطني الحبيب .

أحمد بن ضيف الله .

## REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier vivement et à exprimer notre profonde gratitude pour le Dr N.Louam qui a eu l'aimable accord de nous encadrés et de nous suivre avec ses conseils prodigués en vue de mettre en oeuvre ce travail.

Enfin, tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin pour élaborer ce mémoire trouvent ici l'expression de toute notre considération.

**TABLE DES MATIERES**

<b>INTRODUCTION</b>	1
<b>Chapitre 1: COMMANDE OPTIMALE</b>	6
1.1 Introduction	7
1.2 Formulation du problème	8
1.3 Commande optimale des systèmes continus	10
1.3.1 Problème de poursuite	11
1.3.2 Commande à horizon infini	13
1.3.3 Problème de régulation	14
1.3.3.1 Régulation à horizon fini	14
1.3.3.2 Régulation à horizon infini	14
1.4 Problème discret	16
1.4.1 Introduction	16
1.4.2 Discretisation du système	16
1.4.3 Discretisation du critère	16
1.4.4 Choix de la période d'échantillonnage	17
1.5 Commande optimale des systèmes discrets	18
1.5.1 Etat final libre	18
1.5.2 Etat final imposé	20
1.6 Choix des matrices de pondération	21
1.6.1 Méthode de Bryson	22
1.6.2 Méthode de pénalité	23
1.7 Conclusion	24
<b>Chapitre 2: ESTIMATION D'ETAT</b>	25
2.1 Introduction	26
2.2 Structure de l'observateur	27
2.3 Observateur stochastique	29
2.4 Filtre de Kalman	29
2.4.1 Introduction	29
2.4.2 Le filtre de Kalman discret	31
2.4.2.1 Modèle stochastique discret	31
2.4.2.2 Filtre de Kalman	33
2.4.2.3 Equations du filtre	34
2.4.2.4 Formes particulières du filtre	35
2.4.2.5 Filtre avec bruits corrélés	37
2.4.2.6 Filtre stationnaire	39

2.4.2.6 Filtre stationnaire	39
2.4.3 Le filtre de Kalman continu	40
2.4.3.1 Modèle stochastique continu	40
2.4.3.2 Filtre de Kalman	41
2.4.3.3 Filtre avec bruits corrélés	44
2.4.3.4 Cas des bruits gaussiens	46
2.4.3.5 Filtre stationnaire	46
2.4.4 Cas de sorties non bruitées	46
2.5 Cas des bruits colorés	53
2.6 Conclusion	55
<b>Chapitre 3: COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE</b>	<b>56</b>
3.1 Introduction	57
3.2 Systèmes continus	58
3.3 Systèmes discrets	59
3.4 Dualité commande optimale et filtrage	61
<b>Chapitre 4: MODELE DE L'AVION</b>	<b>62</b>
4.1 Introduction	63
4.2 Axes et notations	63
4.3 Surfaces de commande	65
4.4 Equations d'un corps rigide	66
4.5 L'orientation de l'avion	67
4.6 Mouvement de rotation	69
4.6.1 Vitesses angulaire	69
4.6.2 Angles de rotation	70
4.7 Mouvement de translation	71
4.7.1 Vitesses de translation	71
4.7.2 Position de l'avion	71
4.8 Forces et moments appliqués sur l'avion	72
4.8.1 Forces de gravitation	72
4.8.2 Les forces et moments aérodynamiques	72
4.9 Linéarisation du modèle	73
4.10 Modèle linéaire adopté	76
4.11 Commande automatique de l'avion	76
4.12 Capteurs de l'avion	78
4.13 Conclusion	78

<b>Chapitre 5: SYNTHESE DE LA COMMANDE DE L'AVION</b>	<b>80</b>
5.1 Introduction	81
5.2 Analyse de la dynamique	81
5.2.1 Mouvement latéral	81
5.2.2 Mouvement longitudinal	83
5.3 Commande en boucle fermée	85
5.3.1 Mouvement latéral	86
5.3.2 Mouvement longitudinal	81
5.4 Synthèse dans le cas discret	95
5.4.1 Mouvement longitudinal	95
5.4.1 Mouvement latéral	97
5.5 Conclusion	99
<b>Chapitre 6: ESTIMATION DES ETATS DE L'AVION</b>	<b>100</b>
6.1 Introduction	101
6.2 Etude de l'observabilité	101
6.2.1 Mouvement latéral	101
6.2.2 Mouvement longitudinal	101
6.3 Observation stochastique	102
6.4 Principe de séparation	105
6.5 Cas des systèmes discrets	109
6.6 Conclusion	114
<b>CONCLUSION</b>	<b>115</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>117</b>
<b>Annexe A: DISCRETISATION</b>	<b>118</b>
A.1 Discretisation du système	118
A.2 Discretisation du critère	119
A.3 Calcul des nouvelles matrices de pondération	121
<b>Annexe B: MODELE DE FILTRE REDUIT</b>	<b>123</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>125</b>



المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

---

## INTRODUCTION

L'objectif de la commande d'un processus est d'imposer à celui-ci un comportement souhaité conduisant à un asservissement de ce processus.

Certains systèmes peuvent être commandés sans la nécessité d'une information concernant le passé de l'évolution du processus, c'est le cas de la commande en boucle ouverte.

En absence de perturbations et d'erreurs de modélisation, ou lorsque le système est naturellement stable, la commande en boucle ouverte est suffisante. C'est la forme de commande la plus simple à réaliser et souvent la moins cher à implémenter.

Lorsqu'on souhaite avoir des performances spécifiques sur le comportement du système, ou bien lorsque ce dernier est instable l'exploitation de la boucle fermée s'impose. Cette structure dont les sorties ont un effet sur les entrées, permet si elle est convenablement réalisée de limiter les imperfections et les erreurs dues aux simplifications effectuées lors de la réalisation du modèle du processus, comme par exemple le choix d'un modèle linéaire pour décrire un processus non linéaire, ou l'existence d'une imprécision dans la détermination des paramètres du modèle.

La conception de commande en boucle fermée peut s'effectuer soit dans une approche fréquentielle ou une approche temporelle. Les méthodes de l'approche temporelle se basent essentiellement sur la technique d'espace d'état qui est très convenable dans l'analyse et la conception des systèmes MIMO non stationnaires.

Parmi ces dernières méthodes on cite la technique de placement des pôles qui consiste à spécifier des placements pour les pôles de la boucle fermée en vue de la détermination des gains de retour. Ces placements de pôles, en particulier vont fixer certaines performances pour le système ( vitesse, dépassement, amortissement, temps de réponse,...) mais sans tenir compte de l'énergie nécessaire à mettre en oeuvre ou la réalisabilité physique. Cependant, si inversement, la conception doit se faire dans un cadre de compromis entres, par exemple, les figures de mérite à atteindre et les moyens possibles à mettre en oeuvre l'emploi d'une technique de commande optimale devient nécessaire. Sous cette approche l'objectif est de concevoir un système de commande qui peut réaliser certaines exigences spécifiques tout en tenant compte d'un coût de performance [12].

La commande optimale résultante assure certaines propriétés recherchées comme, la stabilité asymptotique, des marges de gain et de phase convenables, et une insensibilité appréciable aux variations des paramètres du système [12].

Cette commande optimale ne peut cependant être réalisable que si tous les états du système sont complètement accessibles à la mesure. Mais, en pratique ceci n'est pas toujours le cas. Il existe des cas où on ne peut introduire des capteurs pour mesurer un état, ou bien encore on dispose des appareils de mesure qui introduisent des erreurs de mesures très considérables. Cela nous amène à trouver un algorithme (observateur) qui nous permet de reformer le vecteur d'état pour contourner ce problème.

Le problème d'observation consiste donc à construire pour un modèle déterministe du processus, un système défini par son équation d'état et dont la sortie donne une estimation de l'état réel. Cette tâche sera essentiellement réalisée sur la base des inputs et outputs du système (ce sont les seules informations disponibles au concepteur).

En pratique il est rare que le système de commande soit conçu dans un contexte déterministe. Il est plus commode d'optimiser le comportement du système pour une large classe de perturbations aléatoires connues par leurs propriétés statistiques. On note aussi que les paramètres des systèmes physiques sont rarement connus d'une façon exacte. Ils doivent être modélisés par une forme d'un processus aléatoire. De plus, l'état du système est toujours taché de bruits aléatoires de mesure.

Ainsi, pour résoudre le problème de la commande et de l'observation en présence de processus aléatoires l'utilisation de la théorie stochastique s'avère nécessaire.

Dans le cadre stochastique le problème de l'observation est remplacé par le problème de filtrage. Ce dernier consiste à déterminer, une estimation optimale du vecteur d'état pour un système sujet à des perturbations aléatoires tout en cherchant à minimiser la variance de l'erreur entre la valeur réelle de l'état et son estimation.

La conception d'un système linéaire de commande optimal à l'aide de l'estimation d'état est basé sur les résultats du principe ou théorème de séparation [10].

Ce théorème institue en particulier que le problème d'estimation d'état ( déterministe ou stochastique ) et le problème de commande peuvent être résolus séparément conformément à ce théorème.

Ainsi, la minimisation d'un critère de performance quadratique pour un système linéaire soumis à des bruits blancs est réalisée d'après ce théorème par le résultat de la commande optimale déterministe en ignorant la présence du bruit.

Les solutions des deux problèmes ( estimation d'état et commande optimale linéaire quadratique ) établies séparément de façon optimale, réunies dans une structure Régulateur-Observateur sera également optimale. Notez que cette décomposition est permise par la linéarité du problème, et par le fait que les perturbations soient blanches et centrées [10].

La théorie rappelée ci-dessus (retour d'état, commande optimale, observation, filtrage optimal, et le principe de séparation ) constitue une partie de la théorie moderne de commande linéaire. Elle est utilisée largement dans plusieurs problèmes pratiques ( synthèse de commande d'avions, missiles, navires, suspensions actives des engins mobiles,...ect ).

Notre étude porte sur la conception d'un système de commande linéaire optimal pour un avion, par application de la théorie moderne évoquée précédemment.

Plusieurs travaux ont été réalisés dans ce cadre [8] mais essentiellement basés sur les méthodes de conception classiques ( les techniques fréquentielles de Bode et de Nyquist ). Peu de travaux ont fait l'objet de conception dans le domaine temporelle [5] et encore moins en utilisant la théorie de la commande optimale.

Ainsi, notre travail consiste à concevoir par simulation un système de commande pour augmenter la stabilité de l'avion et pour réaliser un pilotage automatique. Nous avons utilisé la technique de la commande optimale linéaire quadratique en considérant que le processus évolue dans un contexte stochastique pour se rapprocher au mieux des conditions réelles de vol.

L'organisation de ce travail est la suivante:

Dans le premier chapitre on fera une introduction à la théorie de la commande optimale linéaire. On utilisera dans le cas des systèmes continus les résultats de principe du maximum de Pontryaguin, et dans le cas des systèmes discrets ceux de la programmation dynamique de Bellman.

Le deuxième chapitre traitera l'estimation d'état. On introduira en premier lieu le principe de l'observation dans le cas déterministe. On examinera après le cas stochastique et en particulier le filtre de Kalman dans ses deux versions ( continue et discrète ).

En troisième chapitre on introduira le principe de séparation et la dualité entre estimation et commande optimale linéaire quadratique.

Le chapitre quatre sera consacré au choix du modèle de l'avion. Nous donnerons un aperçu sur les équations intervenant dans la modélisation et sur le principe de commande.

Dans les chapitres cinq et six on exploitera à l'aide d'une simulation sur ordinateur les résultats de la théorie de la commande optimale linéaire quadratique et filtrage optimal au problème de la commande de l'avion.

Une conclusion générale avec remarques clôturera notre étude.

*Chapitre 1*

*Commande Optimale*

### 1.1 INTRODUCTION:

Dans la commande des systèmes dynamiques il est établi depuis fort longtemps que la technique de feedback est un outil très indispensable. Cette technique va introduire un changement dans l'emplacement des pôles du système et entraîne ainsi une modification dans la dynamique globale du système considéré (bande passante, dépassement, amortissement, ...).

A titre d'exemple la méthode de placement des pôles [10] permet de réaliser un feedback par spécification de l'emplacement des pôles du système en boucle fermée. Cette méthode de synthèse, bien qu'elle est très efficace, ne permet pas de spécifier complètement les paramètres du contrôleur pour un système de type MIMO. En effet, pour un système d'ordre  $n$  avec  $m$  entrées et dont le vecteur d'état est complètement accessible à la mesure, il existe  $(n \times m)$  paramètres à déterminer, alors qu'on a seulement  $n$  pôles à placer. Ainsi, il existe une infinité de voies conduisant aux pôles de la boucle fermée. La détermination de la ou les voies les plus appropriées parmi telles voies possibles et pour un certain objectif fixé constitue un problème de décision ou commande optimale.

Une autre raison pour chercher une commande optimale est que le concepteur face à un problème non familier et qui doit le commander, et dont il ne possède aucune information a priori sur les emplacements des pôles qui conduisent à un comportement performant aura besoin d'une méthode préliminaire de conception. Cela est permis avec la technique de la commande optimale.

Le problème général de la détermination d'une commande optimale consiste à trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois de vérifier les conditions initiales et finales données, de satisfaire diverses contraintes imposées, et d'optimiser un critère de performance choisi.

## 1.2 FORMULATION DU PROBLEME:

Le problème se forme en spécifiant le processus, le critère à optimiser, et la commande admissible [1].

## - Processus:

Soit le système dynamique linéaire d'ordre  $n$  régit par l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - Ax(t) + Bu(t) + W(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$A$  représente la matrice de dynamique du système de dimension ( $n \times n$ ).

$B$  matrice des entrées de commande de dimension ( $n \times m$ ).

$x$  représente le vecteur d'état du système ( $n \times 1$ ).

$W$  un vecteur regroupant les perturbations extérieures quelconque ( $k \times 1$ ).

$u$  le vecteur d'entrée de dimension ( $m \times 1$ ).

et l'équation de mesure:

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.2)$$

$C$  matrice d'observation de dimension ( $m \times n$ ).

$y$  le vecteur de mesure du système ( $m \times 1$ ).

## - Critère:

L'objectif de la commande optimale est de déterminer un vecteur de commande  $u(t)$  qui conduit le système à un état cible de telle façon à ce que durant le processus un critère de performance est minimisé ou maximisé (i.e optimisé).



## 1.3 COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES LINEAIRES CONTINUS:

Dans l'application du principe du maximum de Pontryaguin la solution au problème précédent d'optimisation est obtenu par la minimisation d'une certaine fonction, appelée hamiltonien qui a la forme suivante:

$$H(x, u, t, \lambda) = L(x, u, t) + \lambda^T \dot{x}(t) \quad (1.6)$$

où  $\lambda$  représente le co-état du système [2].

Pour notre problème quadratique le Hamiltonien prendra la forme:

$$H(x, u, t) = \frac{1}{2} e^T(t) Q e(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) + \lambda^T(t) [Ax(t) + Bu(t) + W(t)] \quad (1.7)$$

Les conditions nécessaires pour obtenir un extrémum pour la fonction H sont [2]:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial x} = \lambda^T \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda^T} = \dot{x} \end{cases} \quad (1.8)$$

c.à.d pour notre problème linéaire :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad (1.9)$$

et:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= C^T Q [cx(t) - \eta(t)] + A^T \lambda(t) = -\dot{\lambda}(t) \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= \dot{x} = Ax + Bu + W \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec les conditions finales [19]:

$$\lambda(t_f) = C^T F [CX(t_f) - \eta(t_f)] \quad (1.11)$$

D'après l'équation (1.9) on peut tirer la loi de commande:

$$U(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t) \quad (1.12)$$

### 1.3.1 PROBLEME DE POURSUITE ( $\eta \neq 0$ ):

L'état  $x(t)$  et le co-état  $\lambda(t)$  sont linéairement reliés par [2]:

$$\lambda(t) = P(t)x(t) - \xi(t) \quad (1.13)$$

$\xi$  et  $P$  sont des paramètres à déterminer ultérieurement.

Substituant la relation (1.13) dans l'équation dynamique (1.1) on obtient:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T \lambda(t) + W(t) \quad (1.14)$$

La dérivation par rapport au temps des deux membres de l'équation (1.13) donne:

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) - \dot{\xi}(t) \quad (1.15)$$

et d'après les équations (1.10) et (1.15) on tire:

$$\begin{aligned} & -C^T Q C x(t) + C^T Q \eta(t) + A^T [P(t)x(t) - \xi(t)] - \dot{P}(t)x(t) \\ & + P(t) \{ Ax(t) - BR^{-1}B^T [P(t)x(t) - \xi(t)] \} + P(t)W(t) - \dot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Après regroupement des termes en  $x(t)$  à part et les termes en  $\eta(t)$  à part, la relation (1.16) est satisfaite quelque soit  $x(t)$  et  $\eta(t)$  si et seulement si:

1-

$$\dot{P}(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - C^T Q C \quad (1.17)$$

avec les conditions finales:

$$P(t_f) = C^T F C$$

2-

$$\dot{\xi}(t) = -[A - BR^{-1}B^T P(t)]^T \xi(t) + p(t)W(t) - C^T Q \eta(t) \quad (1.18)$$

avec les conditions finales:

$$x(t_f) = C^T F \eta(t_f)$$

Ainsi, on voit d'après les équations (1.12) et (1.13) que la loi de commande optimale est linéaire et à la forme suivante :

$$u(t) = -R^{-1}B^T [P(t)x(t) - \xi(t)] \quad (1.19)$$

où  $P(t)$  est solution de l'équation de Riccati (1.17), et  $\xi(t)$  est la solution de l'équation différentielle (1.18), avec  $W(t)$  une perturbation déterministe.

Cette loi de commande peut être décomposée en deux parties:

- un régulateur d'état ou feedback donné par:

$$u_{REG}(t) = -R^{-1}B^T P(t)x(t)$$

- une boucle d'anticipation (Feedforward) donnée par :

$$u_{ANT}(t) = -R^{-1}B^T \xi(t)$$

Cette boucle d'anticipation va prendre en charge l'effet de la perturbation sur la réponse du système.

L'extremum de la fonction H définie par les relations (1.8) est un minimum si :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R$$

où R est définie positive .

Les équations différentielles (1.17) et (1.18) sont à résoudre pour trouver P(t) et  $\xi(t)$  pour tout t tel que  $t_0 < t < t_f$ .

En examinant la loi de commande provenant de l'équation Riccati (1.17) et la condition finale  $P(t_f) = C^T P C$  on voit que ces équations sont indépendantes de la consigne  $\eta(t)$ . Cela veut dire que la matrice symétrique P(t) est complètement spécifiée lorsque le système, le critère, et le temps  $t_f$  sont spécifiés.

### 1.3.2 COMMANDE A HORIZON INFINI :

Dans le cas où le temps de l'application de la commande ( $t_f - t_0$ ) est infini et  $\eta \neq 0$  la minimisation du critère n'a pas de sens, car ce dernier diverge pour n'importe quelle commande u choisi [12]. En effet :

$$u(t) = -R^{-1}B^T [P(t)x(t) - \xi(t)] \quad (1.20)$$

avec :

$$\dot{\xi}(t) = -A_C^T \xi(t) + P(t)W(t) - C^T Q \eta(t) \quad (1.21)$$

et:

$$A_c - A - BR^{-1}B^T P(t)$$

On démontre que la matrice  $A_c$  est stable [15] (ses pôles sont à partie réelle négative), donc la matrice  $-A_c^T$  est instable:

De ce fait  $\xi(t)$  va diverger, ce qui implique que  $u(t)$  divergera aussi, et puisque le critère a une relation directe avec  $u(t)$  par (1.5), alors ce dernier va sûrement diverger. Donc, on ne peut trouver une commande optimale pour ce cas. A ce niveau, nous signalons qu'un traitement particulier du problème est considéré dans [12].

### 1.3.3 PROBLEME DE REGULATION:

Dans ce cas  $\eta(t)$  est nulle, et si de plus on considère la régulation d'état (i.e C est une matrice identité) et les perturbations extérieures sont nulles on aura:

#### 1.3.3.1 REGULATION A HORIZON FINI:

D'après [2] :

$$\lambda(t) = P(t)x(t) \quad (1.22)$$

et de (1.12) on tire:

$$u(t) = R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (1.23)$$

avec  $P(t)$  est la matrice définie positive symétrique, solution de l'équation (1.17).

La valeur optimale du critère est donné par:

$$J = \frac{1}{2} x^T P(t) x \quad (1.24)$$

#### 1.3.3.2 REGULATION A HORIZON INFINI:

Dans le cas où le temps d'application de la commande est infini et si le système est contrôlable et observable alors une solution pour le problème existe [2]. Si de plus le système est stationnaire (A, B, C), Q et R sont constantes le deuxième membre de l'équation (1.17) tend vers zéro quand  $t_f$  tend vers

l'infini et l'équation (1.17) devient l'équation algébrique de Riccati:

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{t}} = 0$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (1.25)$$

et la loi de commande s'écrit :

$$u = -R^{-1}B^T P x(t) = -Gx(t) \quad (1.26)$$

avec: P solution de l'(EAR) et où G une matrice constante de gain.

Le revenu optimal pour ce cas est donné par:

$$J_{\min} = x^T P x \quad (1.27)$$

Posons:

$$L = -x^T P x \quad (1.28)$$

d'où:

$$\frac{dL}{dt} = -(x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x) \quad (1.29)$$

compte tenu de l'équation de Riccati (1.25) on obtient:

$$\frac{dL}{dt} = -x^T (PBR^{-1}B^T P + C^T Q C) x \quad (1.30)$$

c'est une expression définie négative. Si  $R > 0$  et  $Q > 0$  or c'est le cas de notre hypothèse, donc nous pouvons conclure que la la boucle fermée est asymptotiquement stable.

En comparant l'équation de Riccati du problème de poursuite avec celle du problème de régulation on note qu'elles sont identiques. Cela veut dire que la structure d'une boucle fermée du problème de régulation optimale est la même que celle de la structure du problème de poursuite optimale.

$[A - BR^{-1}B^T P]$  est la même. C'est-à-dire que les valeurs propres du système bouclé sont indépendantes de la référence  $\eta(t)$ .

## 1.4 PROBLEME DISCRET:

### 1.4.1 INTRODUCTION:

Les modèles d'états continus sont parfaitement adaptés pour une simulation sur un ordinateur analogique. Pour des raisons multiples; fiabilité, réduction de la complexité, facilité de réalisation, coût, ..., on préfère travailler sur des ordinateurs numériques.

Pour adapter un signal analogique à un bloc de traitement numérique (Micro-processeur, ordinateur, hardware numérique spécialisé) on doit le mettre sous une forme compatible à ce bloc; c'est l'opération d'échantillonnage suivi d'une opération de numérisation.

### 1.4.2 DISCRETISATION DU SYSTEME:

Soit le système dynamique sous sa forme continue suivante:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.31)$$

Le système discret peut être écrit de la manière suivante (Annexe A):

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1.32)$$

### 1.4.3 DISCRETISATION DU CRITERE:

La commande optimale consiste à trouver une commande  $u(t)$  tel que la fonction:

$$\begin{aligned} J = & \int_0^T (x^T(t) Qx(t) + u^T(t) Ru(t)) dt \\ & + x^T(T) Fx(T) \end{aligned} \quad (1.33)$$

le critère correspondant à (1.5) est trouvé [13] sous la forme

$$J = x^T(N) F_0 x(N) + \sum_{k=0}^{N-1} J(k) \quad (1.34)$$

avec :

$$J(k) = x^T(k) Q_0 x(k) + u^T(k) R_0 u(k) + 2x^T(k) S_0 x(k)$$

où  $Q_0$ ,  $S_0$ , et  $R_0$  sont des matrices qui sont explicitées dans l'annexe A.

On supposera encore que [1] :

$Q_0$  est définie semi-positive ;

$R_0$  est définie positive.

$F_0 = F$

#### 1.4.4 CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE:

Le choix de la période d'échantillonnage joue un rôle primordial dans la détermination des matrices du système discret. En effet, lorsque cette période est très grande, l'opération d'échantillonnage ne peut suivre l'évolution du système, (il y'a perte d'informations au cours du processus, par contre lorsque la période est trop petite, l'échantillonneur se trouve trop chargé avec des données redondantes inutilement. Donc, il faut faire un compromis entre les deux extrêmes. En pratique on choisit la fréquence d'échantillonnage selon la loi de "Thumb" [1] i.e:

$$5F_{\max} \leq F_s \leq 25F_{\max} \quad (1.35)$$

où  $F_{\max}$  est la fréquence maximum du système, ou bien on choisit la période de telle façon qu'on peut prélever trois à quatre échantillons par temps de montée de la réponse du système.



Lorsque on utilise le retour d'état, le choix de la période doit tenir compte du changement de la bande passante du système bouclé. On procède de la même manière pour la détermination, mais en prenant le système en boucle fermée.

### 1.5 COMMANDE OPTIMALE DES SYSTEMES DISCRETS:

L'équation récurrente d'optimalité entre deux instants consécutifs  $k$  et  $k+1$  a la forme [3]:

$$J^*(x(k), k) = \min_u(k) [r(x(k), u(k), k) + J^*(x(k+1), k+1)] \quad (1.36)$$

$r(x(k), u(k), k)$  représente le critère de performance sous sa forme discrète (équation (1.34)).

#### 1.5.1 ETAT FINAL LIBRE:

De l'équation (1.34) et de (1.36) l'équation d'optimalité de Bellman s'écrit:

$$J^*(x(k), k) = \min_u(k) \left\{ \frac{1}{2} (x^T(k) Q_0 x(k) + u^T(k) R_0 u(k) + 2x^T(k) S_0 u(k)) + J^*(Ax(k) + Bu(k), k+1) \right\} \quad (1.37)$$

Dans ce cas le revenu optimal s'exprime sous forme quadratique [3]:

$$J^*(x(k), k) = \frac{1}{2} x^T(k) P(k) x(k) \quad (1.38)$$

en effet posons à l'instant  $k+1$  :

$$J^*(x(k+1), k+1) = \frac{1}{2} x^T(k+1) P(k+1) x(k+1) \quad (1.39)$$

il vient que :

$$J^*(x(k), k) = \min_u \left[ \frac{1}{2} (x^T Q_0 x + 2x^T S_0 u + u^T R u) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (Ax + Bu)^T P(k+1) (Ax + Bu) \right] \quad (1.40)$$

L'optimisation de  $J(x, u)$  par rapport à  $u$  conduit à la condition nécessaire :

$$\frac{\partial J(x, u)}{\partial u} = 0 \quad (1.41)$$

soit:  $S_0^T x + R_0 u + B^T P(k+1) + (Ax + Bu) x = 0$

ce qui conduit à la commande optimale :

$$u^*(k) = -(R_0 + B^T P(k+1) + B)^{-1} (S_0^T + B^T P(k+1) + A) x(k) \quad (1.42)$$

d'où la structure bouclée :

$$u^*(k) = -Lx(k) \quad (1.43)$$

$$L = (R_0 + B^T P(k+1) + B)^{-1} (S_0^T + B^T P(k+1) + A)$$

Reportons ces expressions dans (1.40) on obtient :

$$J(x) = \frac{1}{2} [x^T Q_0 x - 2x^T S_0 Lx + x^T L^T R_0 Lx] \\ + \frac{1}{2} x^T (A + BL)^T P^* (A + BL) x \quad (1.44)$$

on voit bien que  $J(x)$  est une forme quadratique, donc si le revenu optimal est quadratique à l'instant  $k+1$  il l'est aussi à l'instant  $k$ . Comme l'état final est libre il vient :

$$J(x_N, N) = 0$$

D'après (1.38) et (1.44) on peut tirer  $P(k+1)$ .  $P(k)$  est solution de l'équation récurrente suivante :

$$P(k) = Q_0 + A^T P(k+1) A - [R_0 + B^T P(k+1) B]^{-1} \\ [S_0^T + B^T P(k+1) A] [S_0^T + B^T P(k+1) A] \quad (1.45)$$

Connaissant la valeur finale  $K(N)=0$  ; on peut calculer  $K(N-1)$  facilement car il s'agit d'une simple relation recursive entre  $K(N)$  et  $K(N-1)$ .

### 1.5.2 ETAT FINAL IMPOSE:

Lorsque l'état final du système n'est pas nul on montre d'après [3] que le critère prend la forme quadratique suivante:

$$J^*(x(k), k) = \frac{1}{2} x^T(k) P(k) x(k) - 2g^T(k) x(k) + \varphi(k) \quad (1.46)$$

posons:

$$J^*(x(k+1), k+1) = \frac{1}{2} x^T(k+1) P(k+1) x(k+1) - 2g^T(k+1) x(k+1) + \varphi(k+1) \quad (1.47)$$

La condition de stationnarité de  $u$  s'écrit:

$$\frac{\partial J^*(x, k)}{\partial u} = 0$$

d'où:

$$S^T x(k) + Ru^*(k) + B^T P(k+1) (Ax(k) + Bu^*(k)) + 2B^T g(k+1) = 0 \quad (1.48)$$

La commande optimale sera:

$$u^*(k) = (R + B^T P(k+1) B)^{-1} (S^T + B^T P(k+1) A) x(k) - 2B^T g(k+1) \quad (1.49)$$

qui est de la forme :

$$u^*(k) = Lx(k) + \lambda(k) \quad (1.50)$$

portons cette expression dans l'équation(1.47) il vient:

$$J^*(x(k), k) = \frac{1}{2}x^T(k)P(k)x(k) - 2g^T(k)x(k) + \varphi(k) \quad (1.51)$$

où  $P(k)$  est la solution de l'équation Riccati discrète (1.48).  
et:

$$\begin{aligned} \lambda(k) &= 2(R+B^T P(k+1)B)^{-1}B^T g(k+1) \\ g(k) &= (A+BL)^T g(k+1) \\ \varphi(k) &= \varphi(k+1) + \lambda^T B^T g(k+1) \end{aligned} \quad (1.52)$$

La condition finale sur la fonction  $J$  est donnée par:

$$J(N, N) = x^T(N)P(N)x(N) - 2g^T(N)x(N) + \varphi(N) \quad (1.53)$$

où  $x(N)$ ,  $P(N)$ ,  $g(N)$ , et  $\varphi(N)$  sont des valeurs connues.

La connaissance de  $J(x(k+1), k+1)$  à l'instant  $k+1$  donc  $P(k+1)$  permet de calculer  $P(k)$  à l'instant  $k$ .

### 1.6 CHOIX DES MATRICES DE PONDERATION:

Lorsque on utilise la théorie d'optimisation, le critère de performance est formé suivant des arguments physiques. Dans ce cas idéal, la théorie de la commande optimale quadratique apparaît comme une approximation lorsque les équations d'état sont obtenues par une linéarisation des équations physiques, et lorsque la fonction coût est obtenue à partir d'une fonction coût non linéaire. Malheureusement, cette formulation est obtenue dans peu de cas.

Dans le cas général, il est difficile de trouver le critère de performance quadratique. Le concepteur doit choisir une fonction de coût, et déterminer la loi de commande en résolvant l'équation de Riccati. Le système bouclé obtenu est analysé; réponse temporelle, réponse fréquentielle, robustesse. Sur l'optique lumière de cette analyse, on modifiera la fonction de coût jusqu'à l'obtention du résultat souhaité. La commande optimale semble la plus adaptée pour résoudre un problème dont on n'a aucune connaissance à priori. En effet, la commande optimale permet d'avoir à toute instant une stabilité du système avec une marge de stabilité raisonnable.

## 1.6.2 METHODE DE PENALITE:

Une autre façon pour déterminer ces matrices, et de choisir des variables  $q_i$  qui correspondent à des variables physiques significatives. La fonction coût est choisit comme une somme pondérée avec ces variables. Un poids élevé entraîne une réponse avec une amplitude faible, un poids faible correspond à une réponse grande. Ainsi la réponse du système à des perturbations typiques est évalué:

$$J = \int_0^T (q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 + \dots + q_n x_n^2 + \rho_1 u_1^2 + \rho_2 u_2^2 + \dots + \rho_l u_l^2) dt \quad (1.56)$$

avec:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & q_n \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \rho_l \end{bmatrix}$$

les pénalités sont choisit de telle sorte que le système ait le comportement désiré.

*Chapitre 2*

*Estimation d'état*

### 2.1 INTRODUCTION:

De nombreuses méthodes de commandes des processus utilisent le principe de retour d'état (commande optimale, placement de pôles, découplage ..). Cependant, le retour d'état nécessite que le vecteur d'état  $x$  du système soit accessible à la mesure pour pouvoir réaliser la loi  $u=f(x)$ . Il existe des cas où ce vecteur n'est pas disponible; la matrice d'observation  $C$  est singulière.

Pour résoudre un tel problème on peut procéder par trois méthodes:

La première; intuitive, consiste à résoudre l'équation d'état directement, mais cela est possible si le calcul de l'intégral est évident. Généralement ce n'est pas le cas. Il faut procéder par une méthode numérique qui introduit sans doute des erreurs de calculs. De plus, le calcul fait apparaître les erreurs de modélisation des matrices  $A$  et  $B$  et les conditions initiales ne sont connues que d'une manière approximative. Cela revient à estimer une valeur de l'état  $x$  et ne pas le calculer exactement [10].

Une autre solution qui peut être considérée et consiste à se contenter des états accessibles pour réaliser la boucle fermée. Mais l'utilisation de la technique de la commande optimale devient non utile puisqu'elle donne un système avec retour d'état non optimal [12].

Une troisième façon de voir ce problème; la plus intéressante, est de construire un algorithme qui permet d'estimer l'état  $x$  en corrigeant en permanence cette estimation et en tenant compte seulement des signaux accessibles au concepteur; l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$ .

Un reconstituteur d'état ou estimateur est un système (Fig. 1) ayant comme entrées les entrées et les sorties du processus réel, et dont la sortie est une estimation de l'état de ce processus.

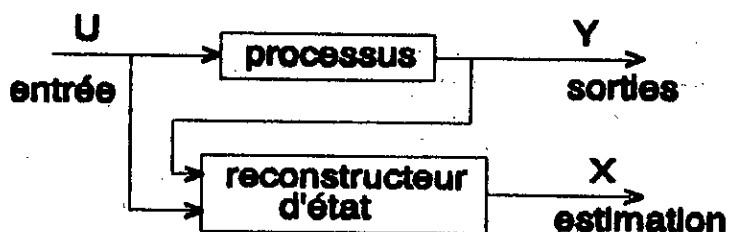


Figure 1: Principe d'un estimateur

Sous les hypothèses que le système est linéaire et observable, il est possible de concevoir l'observateur pour estimer tous les états.

La structure de base de l'estimateur est toujours la même, mais sa réalisation dépendra du contexte choisi: continu ou discret, déterministe ou stochastique.

Dans le cas où ce modèle est un modèle déterministe, le reconstituteur d'état sera appelé observateur. Dans le cas du modèle stochastique, le reconstituteur est appelé filtre.

Le problème de l'observation consiste à construire, pour un modèle déterministe du processus, un système défini par son équation d'état, dont la sortie donne une estimation de l'état réel du processus (Fig. 1). Cette estimation comporte une erreur qui doit tendre vers zéro; quand cette propriété est satisfaite l'observateur est dit asymptotique [3].

## 2.2 STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR:

Supposons un système défini par la réalisation linéaire déterministe:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 y(t) &= Cx(t) \\
 \text{avec:} & \\
 x(0) &= x_0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$



ts  $R^1$ , représente le temps,  $u(t) \in R^1$ , l'entrée du processus,  $y(t) \in R^m$ , la sortie mesurée du processus,  $x(t) \in R^n$ , l'état du modèle (2.1) et A, B, et C sont des matrices constantes de dimensions adaptées.

Si l'on excepte le cas trivial où C est inversible, les seules grandeurs accessibles du modèle sont u et y. Une première solution pour estimer l'état x serait de simuler le modèle (2.1) sous la forme:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (2.2)$$

où  $\hat{x}$  est une estimation de x. Cette solution ne tenant compte que des entrées est inacceptable: d'une part l'erreur d'estimation  $x = \hat{x} - x$  augmente exponentiellement dans le cas d'un modèle instable. D'autre part, toute commande calculée en boucle fermée est implantée sous la forme  $u=f(\hat{x})$  devient en réalité une commande en boucle ouverte. Le principe de reconstruction d'un observateur consiste donc à corriger la dynamique (2.2) en tenant compte de l'écart entre la sortie réelle et la sortie reconstruite. Cela conduit à l'observateur:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (2.3)$$

K: est le gain de l'observateur.

Soit  $x = \hat{x} - x$  l'erreur d'observation. D'après (2.1) et (2.3) il vient:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) \\ \text{avec:} & \\ \hat{x}(0) &= x_0 - x_0 \\ \hat{A} &= A - KC \end{aligned} \quad (2.4)$$

#### THEOREME:

Les valeurs propres de A-KC peuvent être fixées arbitrairement si et seulement si la paire (A,C) est observable [9].

Si les conditions de ce théorème sont vérifiées, une grande liberté est laissée à l'utilisateur pour fixer la matrice K. De façon générale, on la choisit telle que les valeurs propres de A aient des parties réelles négatives plus grandes en module que celles des valeurs propres de A. On sera alors assuré d'avoir une dynamique d'erreur d'observation plus rapide que celle du processus. En utilisant la théorie de la commande optimale, K

peut être déterminé en minimisant un critère de type quadratique sur l'erreur de reconstruction  $x$ .

### 2.3 OBSERVATEUR STOCHASTIQUE:

Dans la pratique on n'a jamais de mesures parfaites (ie: sans bruits), il existe toujours des bruits de souffle à l'intérieur des capteurs et qui interviennent directement sur les grandeurs mesurables. De plus, les systèmes physiques sont rarement connus de façon exacte; il y a toujours une incertitude dans la modélisation. Ces bruits sont généralement de nature aléatoire avec des caractéristiques statistiques connues.

Donc, il est important de tenir compte de ces bruits dans le développement de la théorie de commande; la commande optimale déterministe sera remplacée par la commande optimale stochastique, et le problème d'observation déterministe cède sa place au filtrage

### 2.4 FILTRE DE KALMAN:

#### 2.4.1 INTRODUCTION:

Le problème de filtrage consiste à extraire un signal utile noyé dans un bruit. Si les spectres du signal et du bruit ne se chevauchent pas, il est possible de concevoir un filtre qui fait passer le signal désiré et atténue le signal bruit.

Lorsque le signal et le bruit présentent un certain chevauchement de spectres, le problème de filtrage devient celui de trouver le filtre adéquat qui extrait le signal du bruit [11].

Le filtrage peut être défini aussi comme étant la détermination des estimations de variables du système lorsque l'environnement présente des perturbations aléatoires.

Deux approches peuvent être utilisées pour aborder ce problème: une approche fréquentielle (filtre de Wiener) basée sur l'étudisation des fonctions de transferts ou des réponses impulsionnelles; concepts valables seulement pour les systèmes linéaires et invariants. L'autre approche est temporelle (filtre de Kalman) et fait recourir aux équations différentielles et de différences qui peuvent concerner même des systèmes non linéaires.

La dernière approche sera traitée dans notre étude, car elle permet d'utiliser les méthodes d'espace d'état et d'appréhender le cas des systèmes multi-entrées multi-sorties non stationnaires et facilite l'emploi d'ordinateur dans les calculs.

Dans les deux cas, le problème de filtrage optimal se résume dans la détermination d'un système optimal au sens de la minimisation de la variance d'erreur entre la variable réelle et son estimation.

Différents types de filtres estimateurs peuvent être synthétisés suivant la quantité d'information disponible.

Si on considère un système dont on possède un ensemble de mesures  $Y$  entre un instant initial  $t_0$  et un instant final  $t_f$  tel que:

$$Y = (y(t) / t \in [t_0, t_f])$$

En utilisant l'ensemble des mesures  $Y$ ; disponibles jusqu'à l'instant  $t_f$  on veut estimer une variable  $x(t)$ .

On distingue trois cas possible:

- . Si  $t < t_f \Rightarrow$  problème de lissage;
- . Si  $t = t_f \Rightarrow$  problème de filtrage;
- . Si  $t > t_f \Rightarrow$  problème de prédiction.

La figure 2 illustre ces différents cas possible:

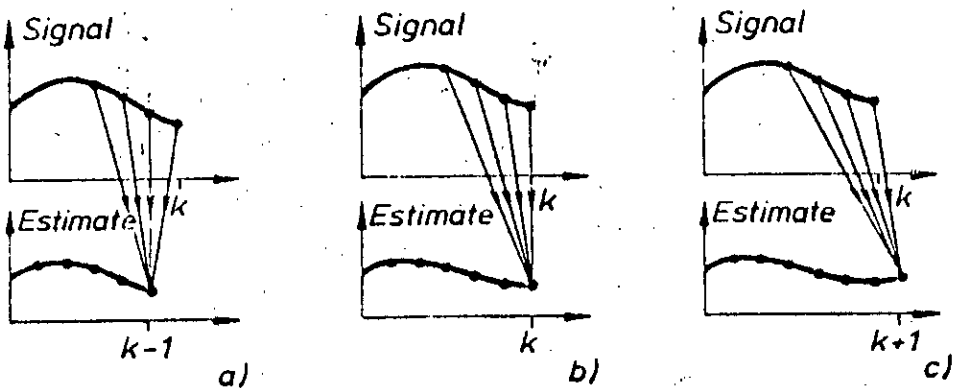


Figure 2: Les trois cas de filtrage:  
(a) lissage; (b) filtrage; (c) prédiction.

Les algorithmes donnant la solution de ce problème ont été initialement déterminées par Kalman [ 1960 ] dans le cas discret et Kalman et Bucy [1961] dans le cas continu. Nous établirons le filtre de Kalman discret puis nous passerons au filtre de Kalman continu.

## 2.4.2 LE FILTRE DISCRET DE KALMAN :

## 2.4.2.1 MODELE STOCHASTIQUE DISCRET:

Un système linéaire et invariant dans le temps d'ordre  $n$  à composantes localisées peut être décrit en général par les équations de différence suivantes [9]:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\quad (2.5)$$

où  $A$  est la matrice dynamique du système de dimension  $(n \times n)$

$B$  est une matrice d'input de dimension  $(n \times m)$

$C$  la matrice d'observation de dimension  $(l \times n)$

$x(k)$ ,  $u(k)$ , et  $y(k)$  sont respectivement, le vecteur d'état qu'on veut estimer, le vecteur d'entrée déterministe, et le vecteur de mesure du système.

Si l'environnement présente des perturbations aléatoires, une composante due au bruit peut être ajoutée simplement au modèle (2.5) et on obtient:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Gw(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Où  $w(k)$  représente les bruits de dynamique et  $v(k)$  les bruits de mesure.

Les bruits de dynamique et les bruits de mesure sont souvent supposés blancs de moyennes nulles et incorrélés [11] c'est-à-dire:

$$\begin{aligned}E\{w(k)\} &= 0 \\ E\{v(k)\} &= 0 \\ E\{w(k)v^T(l)\} &= 0\end{aligned}\quad (2.7)$$

et de matrices de covariance connues telles que

$$E \{ w(k)w^T(l) \} = Q(k)\delta(k-l) \quad (2.8)$$

$$E \{ v(k)v^T(l) \} = R(k)\delta(k-l)$$

Où  $E\{\cdot\}$  représente l'espérance mathématique et  $\delta$  est l'impulsion de Kronecker.

Les matrices  $Q(k)$  et  $R(k)$  sont symétriques définies et positives [1].

Si on suppose que l'état  $x(0)$  est une variable aléatoire avec une moyenne  $\bar{x}_0$  et une covariance  $P_0$  tel que :

$$E \{ x(0) \} = \bar{x}_0 \quad (2.9)$$

$$P_0 = E \{ (x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T \}$$

$P_0$  est aussi symétrique définie et positive. Si de plus on suppose que les bruit sont stationnaires alors la moyenne de l'état  $x(k)$  est donnée par :

$$E \{ x(0) \} = \bar{x}_0$$

d'où :

$$\bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\bar{u}(k) \quad (2.10)$$

La différence entre la moyenne  $\bar{x}(k)$  et l'état  $x(k)$  est :

$$x(k) - \bar{x}(k)$$

d'où :

$$x(k+1) - \bar{x}(k+1) = A(x(k) - \bar{x}(k)) + Gw(k)$$

avec :

$$x(0) - \bar{x}(0)$$

Le filtre de kalman est constitué d'un ensemble d'équations récursives servant au calcul des covariances  $P(k/k)$  et/ou  $P(k/k-1)$  et de l'estimation  $\hat{x}(k/k)$  et/ou  $\hat{x}(k/k-1)$  pour  $k=1,2,\dots$ , et cela en supposant que:  $P(0/1)$  (ie: la covariance de l'erreur relative à l'état initial  $x(0)$ ), et  $\hat{x}(0/1)$  (la moyenne de l'état initial  $x(0)$ ) sont connues [21].

#### 2.4.2.3 EQUATIONS DU FILTRE:

Les équations du filtre discret de Kalman interviennent en deux étapes:

1- **ETAPE DE PREDICTION:** qui consiste à trouver l'état du filtre en considérant qu'il n'y a pas de bruit et ce d'après l'équation (2.5).

$$\begin{aligned}\hat{x}(k+1/k) &= A\hat{x}(k/k) + Bu(k) \\ P(k+1/k) &= AP(k/k)A^T + GQG^T\end{aligned}\tag{2.15}$$

2- **ETAPE DE CORRECTION:** qui consiste à apporter une correction à l'étape de prédiction en tenant compte des bruits de dynamique et de mesure.

$$\begin{aligned}(2.16) \quad \hat{x}(k/k) &= \hat{x}(k/k-1) + K(k)[y(k) - c\hat{x}(k/k-1)] \\ P(k/k) &= [I - K(k)C]P(k/k-1)\end{aligned}$$

où  $K(k)$  est le gain optimal du filtre donné par:

$$\begin{aligned}K(k) &= P(k/k-1)C^T \Sigma^{-1}(k) \\ \Sigma(k) &= R + CP(k/k-1)C^T\end{aligned}\tag{2.17}$$

Le filtre de Kalman est résolu par ce système d'équations récurrentes permettant la progression:

- ( $\hat{x}(k/k)$ ,  $P(k/k)$ ) vers ( $\hat{x}(k+1/k+1)$ ,  $P(k+1/k+1)$ ) pour un filtre estimateur.

- ( $\hat{x}(k/k-1)$ ,  $P(k/k-1)$ ) vers ( $\hat{x}(k+1/k)$ ,  $P(k+1/k)$ ) pour un filtre prédicteur à-un-pas.

Suivant la nature du bruit, le filtre de Kalman peut avoir deux interprétations [11]:

1- Si le bruit est blanc et gaussien le filtre donne la meilleure estimation de l'état  $x$ .

2- Si le bruit n'est pas gaussien, le filtre de Kalman est un estimateur linéaire de  $x$  seulement, c'est-à-dire, qu'on peut éventuellement trouver un autre filtre donnant une meilleure estimation de  $x$ .

#### 2.4.2.4 FORMES PARTICULIERES DU FILTRE:

Le filtre de Kalman est composé de l'ensemble des équations (2.15 à 2.17). Cependant, suivant que l'étape de prédiction suit ou procède l'étape de correction, on peut réaliser un filtre prédicteur à-un-pas ou filtre estimateur.

##### a) FILTRE PREDICTEUR A-UN-PAS:

Le filtre prédicteur peut être décrit par les équations récurrentes:

$$\hat{x}(k+1/k) = A\hat{x}(k/k-1) + Bu(k) + K(k)[y(k) - c\hat{x}(k/k-1)] \quad (2.18)$$

où la variance de l'erreur d'estimation sera donnée par:

$$P(k+1/k) = A [I - P(k/k-1)C^T[\Sigma(k)]^{-1}C] P(k/k-1)A + GQG^T$$

avec: (2.19)

$$\Sigma(k) = R + CP(k/k-1)C^T$$

Le gain du filtre prédicteur est donné par :

$$K(k) = AP(k/k-1)C^T[\Sigma(k)]^{-1} \quad (2.20)$$

## b) FILTRE ESTIMATEUR:

Le filtre estimateur peut être décrit par les équations:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1/k+1) &= A\hat{x}(k/k) + Bu(k) \\ &+ K(k+1) [y(k+1) - C(A\hat{x}(k/k) + Bu(k))] \end{aligned} \quad (2.21)$$

La variance de l'erreur d'estimation sera donnée par:

$$P(k+1/k+1) = [I - K(k+1)C] [AP(k/k)A^T + GQG^T] \quad (2.22)$$

Le gain du filtre estimateur est :

$$K(k+1) = P(k+1/k) C^T \Sigma^{-1}(k+1) \quad (2.23)$$

avec:

$$\Sigma^{-1}(k+1) = R + CP(k+1/k)C^T$$

On remarque dans le filtre de Kalman, que les équations du filtre permettent de calculer  $K(k)$  (gain du filtre) et les matrices de covariances  $P(k/k)$  et  $P(k+1/k)$  indépendamment des mesures  $y(k)$  et les valeurs  $\hat{x}(k/k)$  et  $\hat{x}(k+1/k)$ . Ainsi, le gain  $K(k)$  et la covariances  $P(k/k)$  et  $P(k+1/k)$  peuvent être calculés à l'avance et stockés dans un ordinateur pour former le filtre après.

On aboutit à partir de (2.15), (2.16) et (2.17) à l'équation de récurrence qui fournit  $P(k+1/k)$ :

$$\begin{aligned} P(k+1/k) &= AP(k/k-1)A^T + GQG^T \\ &- AP(k/k-1)C^T [R + CP(k/k-1)C^T] C P(k/k-1)A^T \end{aligned} \quad (2.24)$$

C'est une équation de type Riccati permettant de calculer  $P(k/k)$  et  $K(k)$ . Une fois ces matrices sont connues, on peut réaliser le filtre suivant que l'on dispose ou non de la sortie à l'instant  $k+1$ .

Les différents termes intervenant dans l'équation de Riccati peuvent être interprétés ainsi:

le terme  $APA^T$  traduit le changement de la variance avec la



dynamique du système.

.  $GG^T$  représente l'augmentation dans la variance due au bruit de dynamique.

. le dernier terme montre comment la variance de l'erreur diminue en fonction de l'information obtenue par la mesure.

#### 2.4.2.5 FILTRE AVEC BRUITS CORRELES:

Dans le cas où les bruits de dynamique et de mesure sont corrélés, le problème peut être approché par deux méthodes différentes. La première consiste à reprendre les équations du filtre en tenant compte que les bruits ne sont pas décorrés. La deuxième; plus facile, consiste à revenir au modèle des bruits décorrés en faisant la transformation suivante:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k) - SR^{-1}[y(k) - \hat{y}(k)]$$

Avec:

(2.25)

$$E[v(k)w(l)^T] = S^T \delta(k-l)$$

Le modèle (2.2) devient:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + Bu(k) + G\bar{w}(k) + \bar{G}y(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + v(k)$$

(2.26)

$$\text{avec : } \begin{aligned} \bar{A} &= A - GSR^{-1}C \\ \bar{G} &= GSR^{-1} \end{aligned}$$

et le nouveau vecteur de bruit est:

$$\bar{w}(k) = w(k) - SR^{-1}v(k)$$

(2.27)

C'est un bruit blanc centré. On peut vérifier que:

$$E[\bar{w}(k)] = 0$$

et :

$$E[v(k)\bar{w}(l)^T] = 0$$

La matrice de covariance du nouveau vecteur de bruit est donnée par:

$$E[\bar{w}(k)\bar{w}^T(l)] = \bar{Q} \delta(k-l) \quad (2.28)$$

Avec:

$$\bar{Q} = Q - SR^{-1}S^T$$

Le terme  $\bar{G}y(k)$  dans le modèle (2.26) est connu. On peut maintenant utiliser les équations du filtre pour le cas où  $S=0$ . Notez que seule l'étape de prédiction change, à savoir:

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1/k) &= \bar{A}\hat{x}(k/k) + Bu(k) + \bar{G}y(k) \\ P(k+1/k) &= \bar{A}P(k/k)\bar{A}^T + G\bar{Q}G^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

L'étape de correction reste inchangée. L'équation de Riccati pour le cas général devient:

$$\begin{aligned} P(k+1/k) &= AP(k/k-1)A^T + GQG^T \\ &\quad - [AP(k/k-1)C^T + GS] \\ &\quad \cdot [R + CP(k/k-1)C^T]^{-1} [AP(k/k-1) + GS]^T \end{aligned} \quad (2.30)$$

La résolution de cette équation permet de former le filtre estimateur, ainsi que le filtre prédicteur en calculant  $P(k/k)$  et  $K(k)$ .

- **FILTRE PREDICTEUR:**

Le gain du filtre est donné par:

$$K(k) = [AP(k/k-1)C^T + GS][R + CP(k/k-1)C^T]^{-1} \quad (2.31)$$

- **FILTRE ESTIMATEUR:**

Le gain du filtre est donné par:

$$K(k) = [P(k/k)C^T + GS][R + CP(k/k)C^T]^{-1} \quad (2.32)$$

Les conditions initiales de ces filtres sont:

$$\bar{x}_0 = E(x_0)$$

$$P(0) = E\{[x(0)-x(0)][x(0)-x(0)]^T\}$$

L'avantage de ce modèle est de permettre la conception d'un filtre de Kalman dans le cas général où les bruits de dynamique et de mesure sont corrélés. En effet, en pratique il est difficile de générer un bruit blanc corrélés. Ce modèle permet de contourner cette difficulté en utilisant les bruits décorrélés:  $w(k)$  et  $v(k)$  [3].

2.4.2.6 **FILTRE STATIONNAIRE:**

Dans plusieurs cas pratique [4,9] la covariance d'erreur  $P(k)$  et le gain du filtre  $K(k)$  convergent vers un régime stationnaire lorsque  $k$  tend vers l'infini. Cela nous permet d'écrire l'équation de Riccati sous sa forme algébrique en posant:

$$P(k+1) = P(k) \text{ lorsque } k \rightarrow \infty$$

$$P = APA^T + GQG^T - [APC^T + GS][R + CPC^T]^{-1} \quad (2.33)$$

$$P(0) = P_0$$

Cela est valable pour un filtre stable.

**THEOREME:**

Si  $(A,C)$  est une paire observable, le filtre optimal est asymptotiquement stable, et la matrice de covariance tend vers une solution unique qui est définie et positive [10].

Le gain optimal du filtre devient:

$$K = (PC^T + GS)(R + CPC^T)^{-1} \quad (2.34)$$

La différence entre le filtre optimal et le filtre sous-optimal ne se fera sentir qu'au début de fonctionnement (on perd les informations initiales).

Le filtre stationnaire donne un gain du filtre avec une bonne précision et réduit considérablement le temps et la masse des calculs [4].

Dans plusieurs applications, on peut remplacer le filtre optimal par son approximation asymptotique. Durant le temps transitoire le filtre n'est pas optimal, puis il deviendra à mesure que  $k$  tend vers l'infini [4].

Lorsque on exige une grande précision dans le calcul du gain ou on souhaite travailler en temps réel (problème de poursuite par exemple), il faut utiliser le filtre de Kalman optimal.

Parfois en pratique on ne dispose pas des conditions initiales  $x(0)$  et  $P(0)$ , alors dans ce cas l'utilisation du filtre asymptotique s'impose (elle ne fait pas appel aux conditions initiales [9]).

**2.4.3 FILTRE DE KALMAN CONTINU:****2.4.3.1 MODELE STOCHASTIQUE CONTINU:**

Le modèle linéaire stochastique continu correspondant à celui qui est décrit par les équations discrètes (2.5) est donné par [10]:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) + GW(t) \\ Y(t) &= Cx(t) + V(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Où  $t$  représente la variable indépendante du temps,  $x(t)$ ,  $u(t)$ , et  $y(t)$  sont respectivement: le vecteur d'état, le vecteur d'entrée déterministe, et le vecteur de mesure.  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $G$  sont des matrices connues et de dimensions convenables.  $w(t)$  est le bruit de dynamique et  $v(t)$  le bruit de mesure.

Les bruits du système et de mesure sont souvent pris blancs avec une moyenne nulle, et ils sont caractérisés par leurs matrices de covariance.

$$E[w(t)] = 0 \quad (2.36)$$

$$E[v(t)] = 0$$

$$E[w(t)w(\tau)^T] = Q(t)\delta(t-\tau) \quad (2.37)$$

$$E[v(t)v(\tau)^T] = R(t)\delta(t-\tau)$$

Si les bruits sont stationnaires, on aura:  $Q(t)=Q$  et  $R(t)=R$ . De plus, si on suppose que les bruits ne sont pas corrélés alors:

$$E[(w(t)v(\tau)^T)] = 0 \quad (2.38)$$

$E\{.\}$  représente l'espérance mathématique, et  $\delta$  est l'impulsion de Dirac.

Les matrices  $Q(t)$  et  $R(t)$  sont symétriques définies et positives. On suppose que l'état initial  $x_0$  est une variable aléatoire avec une moyenne  $\bar{x}_0$  et une covariance  $P_0$ :

$$E\{x(t_0)\} = \bar{x}_0 ; E\{(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^T\} = P_0 \quad (2.39)$$

#### 2.4.3.2 FILTRE DE KALMAN:

Le filtre linéaire optimal du système continu stochastique définie par Kalman et Bucy a la forme suivante [10]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)[y(t) - C\hat{x}(t)] \quad (2.40)$$

avec:

$$\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$$

où  $\hat{x}(t)$  est définie comme étant la moyenne conditionnelle de l'état  $x(t)$ :

$$\hat{x}(t) = E[x(t)/y(\tau), \tau \leq t] \quad (2.41)$$

$K(t)$  est le gain optimal du filtre. Il est déterminé de façon à ce que la matrice de covariance de l'erreur d'estimation soit minimale.

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

d'où:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)$$

Tenant compte des équations (2.35) et (2.40), on obtient:

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A - K(t)C]\hat{x}(t) + Gw(t) - K(t)v(t) \quad (2.42)$$

Etant donné que  $w$  et  $v$  sont des bruits blancs alors la variable  $\xi(t)$  définie par :

$$\xi(t) = Gw(t) - K(t)v(t) \quad (2.43)$$

est aussi un bruit blanc avec une moyenne nulle et une matrice de covariance  $Q_\xi(t)$  définie ainsi:

$$\begin{aligned} Q_\xi(t) = & GQ(t)G^T - K(t)S^T(t)G^T \\ & - GS(t)K^T(\tau) + K(t)R(t)K^T(\tau) \end{aligned} \quad (2.44)$$

En tenant compte de:

$$\begin{aligned} E[w(t)w^T(\tau)] &= Q\delta(t-\tau) \\ E[v(t)v^T(\tau)] &= R\delta(t-\tau) \\ E[w(t)v^T(\tau)] &= S\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.45)$$

où  $Q$  et  $R$  sont les matrices de covariance de bruits stationnaire.  $S$  la matrice d'intercorrélation des bruits  $w$  et  $v$ , on obtient:

$$Q_t(t) = GQG^T - K(t)S^T G^T - GSK^T(\tau) + K(t)RK^T(\tau) \quad (2.46)$$

On définit la matrice de covariance de l'erreur  $x$  par:

$$P(t) = E[x(t)x^T(\tau)] \quad (2.47)$$

d'où:

$$\dot{x}(t) = [A - KC]x(t) + Q_t(t) \quad (2.48)$$

En portant (2.46) dans (2.48) on démontre que la matrice de covariance  $P$  vérifie l'équation différentielle:

$$\dot{P}(t) = [A - K(t)C]P(t) + P(t)[A - K(t)C]^T + Q_t \quad (2.49)$$

En remplaçant par l'expression de  $Q_t$  dans (2.49), on retrouve la forme de l'équation de Riccati du chapitre 1:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & [A - K(t)C]P(t) + P(t)[A - K(t)C]^T + GQG^T \\ & - K(t)S^T G - GS(t)K^T(\tau) + K(t)RK^T(\tau) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Si les bruits  $w$  et  $v$  sont non corrélés alors,  $S=0$  et on retrouve l'équation de Riccati suivante:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) = & [AK(t)C]P(t) + P(t)[A - K(t)C]^T \\ & + GQG^T + K(t)RK^T(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

En utilisant les résultats de l'analyse faite dans le chapitre 1 ( Commande optimale ) on tire le gain du filtre comme suit :

$$\hat{K}(t) = \hat{P}(t)C^TR^{-1} \quad (2.52)$$

avec  $P$  la matrice de covariance de l'erreur d'estimation donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}}(t) = & A\hat{P}(t) + \hat{P}(t)A^T \\ & - \hat{P}(t)C^TR^{-1}C\hat{P}(t) + GQG^T \end{aligned} \quad (2.53)$$

L'équation (2.52) définissant le gain  $K(t)$  peut faire l'objet de l'explication suivante :

. Si on a une grande confiance dans les estimations précédentes et si on considère la mesure actuelle comme douteuse,  $K(k)$  doit être faible.

. Inversement, si les estimations précédentes sont douteuses et si la mesure actuelle est considérée comme correcte, alors  $K(k)$  doit être élevé.

#### 2.4.3.3 FILTRE AVEC BRUITS CORRELES :

Des relations plus générales sont obtenues quand  $S \neq 0$ . En particulier, on suppose que :

$$\begin{aligned} P &= \hat{P} + U \\ K &= \hat{K} + \Gamma \end{aligned} \quad (2.54)$$



où  $P$  et  $K$  sont respectivement la covariance et le gain du filtre optimal. Substituant (2.54) dans (2.50), on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{P}} + \dot{U} &= [A - \hat{K}C - \Gamma C][\hat{P} + U] + [\hat{P} + U][A - \hat{K}C - \Gamma C]^T \\ &+ GQG^T - [\hat{K} + \Gamma]S^T G^T - GS[\hat{K}^T + \Gamma^T] \\ &+ [\hat{K} + \Gamma]R[\hat{K}^T + \Gamma^T] \end{aligned} \quad (2.55)$$

or  $P$  satisfait (2.50) donc l'équation (2.55) devient:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= [A - \hat{K}C - \Gamma C]U + U[A^T - \hat{K}C - \Gamma C]^T + \Gamma R \Gamma^T \\ &+ \Gamma[\hat{R}\hat{K}^T - C\hat{P} - S^T G^T] + [\hat{K}R - \hat{P}C^T - GS]\Gamma^T \end{aligned} \quad (2.56)$$

On avait dit que  $\hat{P}$  est la matrice covariance minimale donc,  $U$  doit être obligatoirement définie et positive quelque soit  $L$ . Pour cela on doit avoir:

$$\begin{aligned} \hat{K}R - \hat{P}C^T + GS \\ \text{d'où } \hat{K} &= [\hat{P}C^T + GS]R^{-1} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$\hat{P}$  est la solution de l'équation de Riccati trouvée en substituant (2.53) dans (2.55):

$$\dot{\hat{P}} = \tilde{A}\hat{P} + \hat{P}\tilde{A}^T - \hat{P}C^T R^{-1} C\hat{P} + G\tilde{Q}G^T$$

avec:

$$\tilde{A} = A - GSR^{-1}C$$

$$\tilde{Q} = Q - SR^{-1}S^T$$

Lorsque les bruits ne sont pas corrélés:

$$S = 0 ; \bar{A} = A ; \bar{Q} = Q$$

#### 2.4.3.4 CAS DES BRUITS GAUSSIENS:

Kalman et Bucy prouvèrent en 1961, que si les processus  $w$  et  $v$  étaient blancs et gaussiens, alors le filtre de Kalman et Bucy serait le meilleur estimateur de tout les filtres possibles (i.e: il n'y a pas d'autres filtres linéaires ou non linéaire pouvant donner une covariance d'erreur d'estimation plus faible). Si les processus  $w$  et  $v$  ne suivent pas la loi Gauss alors le filtre non linéaire devient meilleur [10].

#### 2.4.3.5 FILTRE STATIONNAIRE:

Quand le temps tend vers l'infini et pour un système stable, la matrice de covariance de l'erreur et le gain optimal  $K(t)$  convergent vers une solution constante. On dit que le filtre est en régime stationnaire dans ce cas :

$$\dot{P}(t) = 0$$

on retrouve l'équation algébrique de Riccati (EAR) :

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T + G\bar{Q}G - PC^TR^{-1}CP = 0 \quad (2.59)$$

Cette équation aura une solution unique définie et positive lorsque la paire  $(A,C)$  est observable.

On a les même remarques sur les deux types de filtre (optimal et sous optimal) traités précédemment dans le cas discret.

#### 2.4.4 CAS DE SORTIES NON BRUITÉES:

Dans certains cas, on dispose de capteurs de haute qualité, et qui n'introduisent pratiquement aucun bruit sur les mesures. En fait, les bruits d'observation sont si petits qu'on peut les négliger devant les bruits introduits par les autres capteurs combinés avec eux. Le résultat de se faite, une matrice de covariance  $R$  très mal conditionnée (i.e: le déterminant est pratiquement nul). Cette matrice va endommager les algorithmes du filtre. Alors il est préférable de regarder ces composantes de bruits faibles comme étant un zéro [10]. Mais, l'existence de mesures non bruitées implique la singularité de la matrice covariance de bruit de mesure. Il s'ensuit une

difficulté d'application des filtres de Kalman (particulièrement dans le cas continu). En effet, dans la formulation des filtres de Kalman on avait supposé que la matrice de covariance des bruits de mesure  $R$  était non singulière. Cela nous conduit à développer une technique qui traite un tel cas.

Deux cas se présentent: le cas où la matrice  $R$  est singulière, c'est-à-dire que certaines sorties ne sont pas touchées par le bruit, et l'autre cas où la matrice  $R$  est nulle. Nous allons aborder le premier cas; matrice singulière puis, on traitera le deuxième cas.

Soit le système de dynamique continu stationnaire:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \quad (2.60)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (2.61)$$

Si certaines mesures sont non perturbées par le bruit l'équation (2.61) devient:

$$y_1(t) = C_1 x(t) \quad (2.62)$$

$$y_2(t) = C_2 x(t) + v_2(t) \quad (2.63)$$

$y_1(t)$  représente les mesures non bruitées ( $\in \mathbb{R}^{n_1}$ ). Elles ne seront pas estimées.

$y_2(t)$  représente de son côté, les mesures bruitées ( $\in \mathbb{R}^{n_2}$ ) et qui vont être estimées.

$w(t)$  et  $v_2(t)$  sont des bruits blancs centrés avec des matrices de covariances connues:

$$\begin{aligned} E \{w(t)w^T(\tau)\} &= Q\delta(t-\tau) \\ E \{v_2(t)v_2^T(\tau)\} &= R_2\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.64)$$

On suppose que la matrice  $C_1$  est de rang plein (cela est toujours possible par élimination de mesures redondantes).

Un changement de variables élémentaire (Annexe B) permet de se ramener à la forme:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1(t) &= A_{11}X_1(t) + A_{12}X_2(t) + B_1u(t) + G_1w(t) \\ \dot{X}_2(t) &= A_{21}X_1(t) + A_{22}X_2(t) + B_2u(t) + G_2w(t) \\ y_1(t) &= X_1(t) \\ y_2(t) &= C_{21}X_1(t) + C_{22}X_2(t) + v_2(t) \end{aligned} \quad (2.65)$$

La mesure  $y_1(t)$  donne une estimation certaine de  $X_1(t)$ . On a besoin de construire un estimateur qui nous donne simplement une estimation des états touchés par le bruit (ie:  $X_2(t)$ ).

On considère les nouveaux vecteurs de mesure:

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= y_2(t) - C_{21}X_1(t) = C_{22}X_2(t) + v_2(t) \\ z(t) &= \dot{X}_2(t) - A_{21}X_1(t) - B_2u(t) = A_{22}X_2(t) + G_2w(t) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Les équations définissant  $X_2(t)$  se ramènent à:

$$\begin{aligned} \dot{X}_2(t) &= A_{22}X_2(t) + A_{21}y_1(t) + B_2u(t) + G_2w(t) \\ Z(t) &= CX_2(t) + V(t) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Avec:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} A_{22} \\ C_{22} \end{bmatrix} \quad V(t) = \begin{bmatrix} G_2w(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Ce modèle adopté ici fait apparaître un modèle à bruits corrélés :

$$\begin{aligned}
 E \{w(t)w^T(\tau)\} &= Q\delta(t-\tau) \\
 E \{v(t)w^T(\tau)\} &= \begin{bmatrix} G_1 Q \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t-\tau) - \bar{S} \delta(t-\tau) \\
 E \{v(t)v^T(\tau)\} &= \begin{bmatrix} G_1 Q G_1^T & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \delta(t-\tau)
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

En utilisant l'analyse faite sur le cas des bruits corrélés le filtre de Kalman pour ce cas devient :

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{X}}_2(t) &= A_{22}\hat{X}_2(t) + A_{21}y_1(t) + B_2u(t) \\
 &\quad + K(t)[z(t) - C\hat{X}_2(t)]
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

$K(t)$  est le gain optimal du filtre de kalman

L'inconvénient de cette structure et de nécessiter pour élaborer la mesure  $z(t)$  la dérivation de la sortie réelle (l'opération de dérivation est toujours évitée en pratique du fait qu'il est difficile de réaliser des dérivateurs que des integrateurs). De façon à contourner cette difficulté on définit la variable :

$$Y(t) = \dot{\hat{X}}_2(t) - K_1 y_1(t) \tag{2.70}$$

où

$$K = [K_1 \quad K_2]$$

qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}(t) &= [A_{22} - KC]Y(t) + [B_2 - K_1 B_1]u(t) + K_2 y_2(t) \\
 &\quad + [A_{21} - K_1 A_{11} - K_2 C_{21} + (A_{22} - KC)K_1]y_1(t)
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

où n'apparaît aucune dérivation de la sortie.

L'estimation optimale de  $X_2(t)$  est fournie par la variable:

$$\hat{X}_2(t) = Y(t) + K_1 y_1(t) \quad (2.72)$$

En tenant compte du fait que:

$$y_1(t) = X_1(t) \quad (2.73)$$

Cette équation d'état définit un filtre d'ordre réduit d'ordre  $n-m$  pour le système (2.65). La variable  $X_2(t)$  étant reconstruite par l'équation (2.72).

$K_1$  est le gain de ce filtre de dimension  $n-m \times m$ .

En plus de sa résolution du problème où certaines mesures ne sont pas infectées par le bruit, ce filtre d'ordre réduit apporte une grande simplification pour le calcul de l'équation de Riccati. En effet, l'ordre du filtre est  $(n-m)$  pour un système d'ordre  $n$  et un nombre de mesure parfaites  $m$ .

Dans le cas où la matrice  $R$  est réellement nulle (pas de bruits de mesure) il est possible de résoudre ce problème par deux méthodes. La première, prend un aspect pratique et consiste à introduire des bruits blancs de caractéristiques statistiques connues sur les mesures non bruitées. L'utilisation de l'algorithme du filtre avec bruits de mesure devient simple. La deuxième méthode, consiste à manipuler les équations d'état de façon à introduire des bruits de mesures. En effet, considérons le processus dynamique linéaire invariant:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \quad (2.74)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.75)$$

en dérivant  $y$ :

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t) + CGw(t) \quad (2.76)$$

En posant :

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t) - CBu(t) \\ &= CAx(t) + CGw(t) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Ce nouveau vecteur de mesure linéaire contient une composante de bruit blanc :

$$v(t) = CGw(t) \quad (2.78)$$

et les caractéristiques statistiques des différents bruits deviennent :

$$\begin{aligned} E \{w(t)w^T(\tau)\} &= Q\delta(t-\tau) \\ E \{v(t)v^T(\tau)\} &= CGQG^TC^T\delta(t-\tau) = \bar{R}\delta(t-\tau) \\ E \{v(t)w^T(\tau)\} &= QG^TC^T\delta(t-\tau) = \bar{S}\delta(t-\tau) \end{aligned} \quad (2.79)$$

le filtre de Kalman aura comme expression :

$$\hat{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \hat{K}(t)[z(t) - CA\hat{x}(t)] \quad (2.80)$$

En utilisant l'algorithme de bruits corrélés le gain du filtre sera donné par :

$$\begin{aligned} \hat{K} &= [\hat{P}C^T + G\bar{S}] \bar{R}^{-1} \\ &= [\hat{P}C^T + GQG^TC^T][CGQG^TC^T]^{-1} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$\hat{P}$  est solution de l'équation de Riccati

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \hat{A}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}^T - \hat{P}A^TC^T\bar{R}^{-1}CA\hat{P} + G\hat{Q}G^T \\ \text{avec : } \hat{A} &= A - GQG^TC^T\bar{R}^{-1}CA \\ \hat{Q} &= Q - QG^TC^T\bar{R}^{-1}CGQ \end{aligned} \quad (2.82)$$

On démontre dans ce cas que  $CP(t)$  est une matrice singulière [10]. La structure du filtre sera remplacée par la forme suivante:

$$\dot{x} = \hat{K}y + L_2\gamma_2 \quad (2.83)$$

avec  $K$  est donné en tenant compte de (2.81) par :

$$\hat{K} = [CQG^T C^T][CGQG^T C^T]^{-1} \quad (2.84)$$

où:  $\gamma_2$  est l'état d'un système d'ordre  $(n-1)$ ,  $l$  nombre de ligne indépendantes de la matrice  $C$ ,  $L_2$  est un vecteur qu'on va expliciter.  $L_2$  et  $\gamma_2$  sont obtenues ainsi:

$$I - \hat{K}C = T^{-1}E_T \quad (2.85)$$

et  $T$  est une transformation définie par:

$$T = \begin{bmatrix} C \\ U_1(I - \hat{K}C) \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

et  $U_1(I - \hat{K}C)$  est matrice  $n-1 \times n$  choisie tel qu'elle contient  $(k-1)$  lignes de  $(I - \hat{K}C)$  indépendantes de celles de la matrice  $C$ .

Si on pose

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

$$\text{et : } T^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix} \\ \quad \quad \quad (l) \quad \quad (n-l)$$

alors  $\gamma_2$  vérifiera l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\gamma}_2 = \bar{A}_{22}\gamma_2 + \bar{A}_{21}y + U_1(I - \hat{K}C)Bu \quad (2.88)$$



Un cas spécial du filtre de Kalman résultent quand  $CG$  est matrice inversible, dans ce cas:

$$\hat{K} = G(CG)^{-1} \quad (2.89)$$

$C$  est une matrice inversible alors:

$$\hat{K} = C^{-1} \text{ et } \hat{x} = C^{-1}y \quad (2.90)$$

donc si la matrice  $C$  est inversible alors le meilleur estimateur de  $x$  est lui même

### 2.5 CAS DES BRUITS COLORES:

La supposition que les bruits de dynamique et de mesures lors de la synthèse des algorithmes du filtre de Kalman ne peut être valide pour tous les systèmes physiques. Afin d'exploiter l'édifice théorique déjà présenté, le concepteur est amené à approximer les processus aléatoire par des bruits blancs ou par de processus qui résultent du passage d'un bruit blanc à travers un système linéaire [10]. Cette approximation repose sur le fait de considérer que le processus aléatoire réel et son équivalent ont la même densité spectrale (Fig. 3).

Considérons l'équation de mesure:

$$y = Cx + q \quad (2.91)$$

avec  $q$  un bruit dont la densité spectrale.

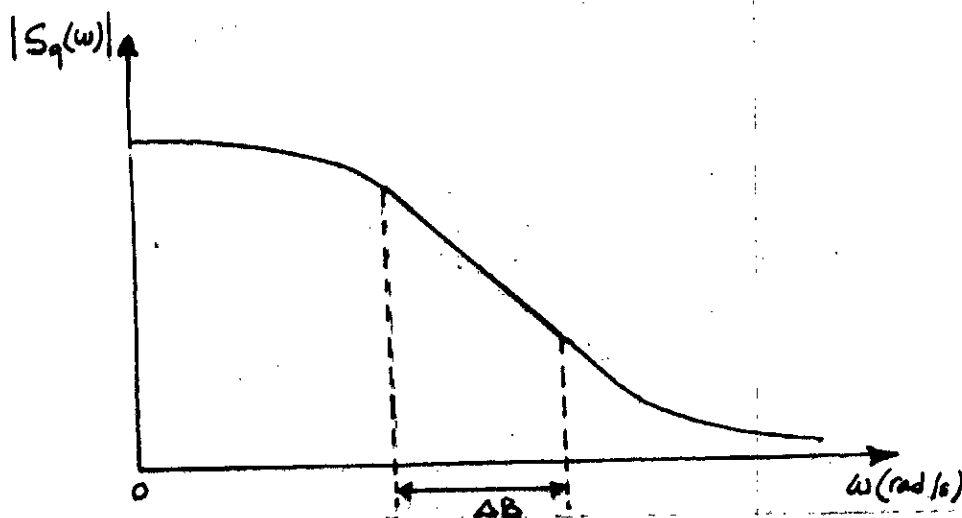


Figure 3: Densité spectrale du bruit.

Où  $\Delta B$  représente la bande passante du système.

Sur cette bande où les densités spectrales des deux processus se chevauchent on peut considérer que la densité spectrale du bruit est de la forme :

$$S_q(\omega) = \frac{Q}{(\omega^2 + \omega_0^2)} \quad (2.92)$$

Cette densité peut être identifiée à celle de la sortie d'un filtre passe-bas attaqué par un bruit blanc avec une densité spectrale égale à  $Q$ . Donc le processus dont-il est question, peut être modélisé ainsi :

$$\dot{q} = -\omega_0 q + v \quad (2.93)$$

avec  $v$  un bruit blanc. En considérant l'équation de dynamique :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \quad (2.94)$$

on peut regrouper les deux équations dans le système augmenté suivant :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (2.95)$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -\omega_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad C = [C \quad I]$$

D'après ce qu'on a déjà vu dans section 4.4 (systèmes à mesures non bruitées) l'estimateur du système augmenté aura la forme suivante:

$$\hat{X} = Ky + L_2 \gamma_2 \quad (2.96)$$

## 2.6 CONCLUSION:

Le problème de filtrage optimal consiste ainsi à déterminer une estimation d'état du système, sujet à de bruits aléatoires, en minimisant la variance de l'erreur entre la valeur de l'état réel et celle de son estimation.

Ce problème a été examiné en utilisant l'approche temporelle qui permet entre autre d'utiliser les méthodes d'espace d'état et traitement des systèmes multivariables. Les versions discrètes et continue du filtre de Kalman ont été présentées.

Nous retrouvons en particulier que:

- a) Pour un système linéaire, et une observation linéaire, et lorsque les bruits sont considérés comme blancs gaussiens le filtre de Kalman linéaire est le meilleur de tout les filtres possibles linéaires ou non-linéaires.
- b) Le problème de l'implémentation du filtre réside dans la résolution d'une équation non linéaire de type Riccati.
- c) Le filtre de Kalman (optimal) peut être remplacé par son approximation (sous-optimale) lorsque les informations du régime transitoire n'influent pas considérablement sur la synthèse de la commande.

Cette approximation est très intéressante, puisqu'elle évite le calcul en temps réel, donc une réduction notable dans la complexité du filtre (l'ordinateur ne devient pas nécessaire).

*Chapitre 3*

*Commande optimale  
stochastique*

### 3.1 INTRODUCTION:

Dans la conception d'un contrôleur optimal déterministe, on cherche à minimiser un critère de performance de la forme quadratique (1.5) en supposant que l'état  $x$  est accessible à la mesure et que l'action des bruits aléatoires sur le processus est nulle.

Nous avons vu au chapitre précédent comment optimiser un observateur pour estimer l'état d'un système en présence de bruits aléatoires.

Si le problème d'optimisation du critère de performance en présence de perturbations de type aléatoire est considéré soit dans le cas où l'état est complètement accessible ou non on utilisera le théorème de séparation.

En effet, pour optimiser le critère en présence d'une perturbation de type aléatoire, il suffit de concevoir le contrôleur optimal déterministe en ignorant la présence du bruit, et lorsque l'état n'est pas accessible pour la mesure, ou bien, les mesures sont bruitées, on utilise le filtre de Kalman pour estimer l'état. Ce résultat est connu sous le nom du principe de séparation [10].

Le principe de séparation s'annonce de la manière suivante [1]: Si la commande et l'observation sont calculés séparément de façon optimale, alors l'ensemble réuni dans une structure de type régulateur-observateur sera également optimale. Cela est permis surtout grâce à la linéarité du problème (où le principe de superposition est valable).

## 3.2 SYSTEMES CONTINUS:

Lorsque il existe des perturbations aléatoires agissant sur le processus sous contrôle, le modèle linéaire requis sera de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + v(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

rappelons que:

$$\begin{aligned} E\{w(t)w^T(\tau)\} &= W \delta(t-\tau) \\ E\{w(t)v^T(\tau)\} &= V \delta(t-\tau) \\ E\{w(t)v^T(\tau)\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

La présence de bruit aléatoire  $w(t)$  entraîne une dynamique aléatoire du système quelque soit la forme de la loi de commande, linéaire ou non linéaire. Ainsi,  $x$  est une variable d'état aléatoire. L'intégral  $J$  de l'équation (1.5) sera aussi une fonction aléatoire. Le problème d'optimisation est significatif seulement lorsque on travaille sur la moyenne de  $J$ .

$$J = \frac{1}{2} E \left\{ x^T(T) F x(T) + \int_0^T (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \right\} \quad (3.3)$$

Dans le cas d'un système où l'état est complètement accessible, la commande optimale a la forme classique:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P(t) x(t) \quad (3.4)$$

où  $P(t)$  est solution de l'équation de Riccati (1.17).

Par contre, dans le cas où seule la sortie est accessible (systèmes à états non complètement accessibles), la commande optimale s'écrit sous la forme:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T P(t) \hat{x}(t) \quad (3.5)$$

où  $P(t)$  est défini par l'équation de Riccati (1.17), et  $\hat{x}(t)$  est l'estimation optimale de  $x(t)$  obtenue à l'aide de filtre de Kalman (2.40).

### 3.3 SYSTEMES DISCRETS:

Le modèle discret stochastique est donné par:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + Gw(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned}$$

En rappelons:

$$\begin{aligned} E\{w(k)w^T(l)\} &= W\delta(k-l) \\ E\{v(k)v^T(t)\} &= V\delta(k-l) \\ E\{v(k)w^T(l)\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le critère de performance dans ce cas devient:

$$J = E \left\{ x^T(N) F_0 x(N) + \sum_0^N (x^T(k) Q_0 x(k) + u^T(k) R_0 u(k)) dt \right\} \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un système où l'état est complètement accessible, la loi de commande a la forme:

$$u^*(k) = -(R + B^T P(k) B)^{-1} B^T P(k) A x(k) \quad (3.9)$$

où  $P(k)$  est la solution de l'équation de Riccati discrète (1.51).

Par contre, dans le cas où il existe des états non accessibles à la mesure:

$$u^*(k) = -(R + B^T P(k) B)^{-1} B^T P(k) A \hat{x}(k) \quad (3.10)$$

## 3.4 DUALITE COMMANDE OPTIMALE ET FILTRAGE:

D'après les résultats des chapitres: commande optimale linéaire quadratique et filtrage optimal, on établira le tableau de dualité suivant:

TABLEAU 1: Dualité commande optimale et filtrage.

C.O.L.Q	F.O
A	$A^T$
B	$C^T$
C	$G^T$
K	$K^T$
Q	Q
R	R
$P(*)$ vers $P(0)$	$P(0)$ vers $P(*)$

\* = T dans le cas continu.

\* = N dans le cas discret.

Il est important de noter que le problème de filtrage au sens de Kalman est le problème dual du problème de la commande optimale quadratique linéaire déterministe. L'équation de Riccati dans les deux problèmes est similaire. L'équation de Riccati dans le cas du filtrage, est simplement résolue dans le sens direct, en commençant par la valeur initiale, inversement à sa similaire dans le cas de la C.O.L.G, qui doit être résolue dans le sens rétrograde. Il est clair que par cette dualité le même programme peut être utilisé pour calculer au même temps, le filtre et la commande, cela simplifie considérablement le système de commande qui nécessite en général une estimation des états, avec un retour d'état.



*Chapitre 4*

*Modèle de l'avion*

- $\theta$ : angle de tangage (pitch angle), Fig 1.c.  
 $r$ : vitesse de roulis (rolling velocity), Fig 1.a  
 $q$ : vitesse de lacet (yawing velocity), Fig 1.b.  
 $p$ : vitesse de tangage (pitching velocity), Fig 1.c.

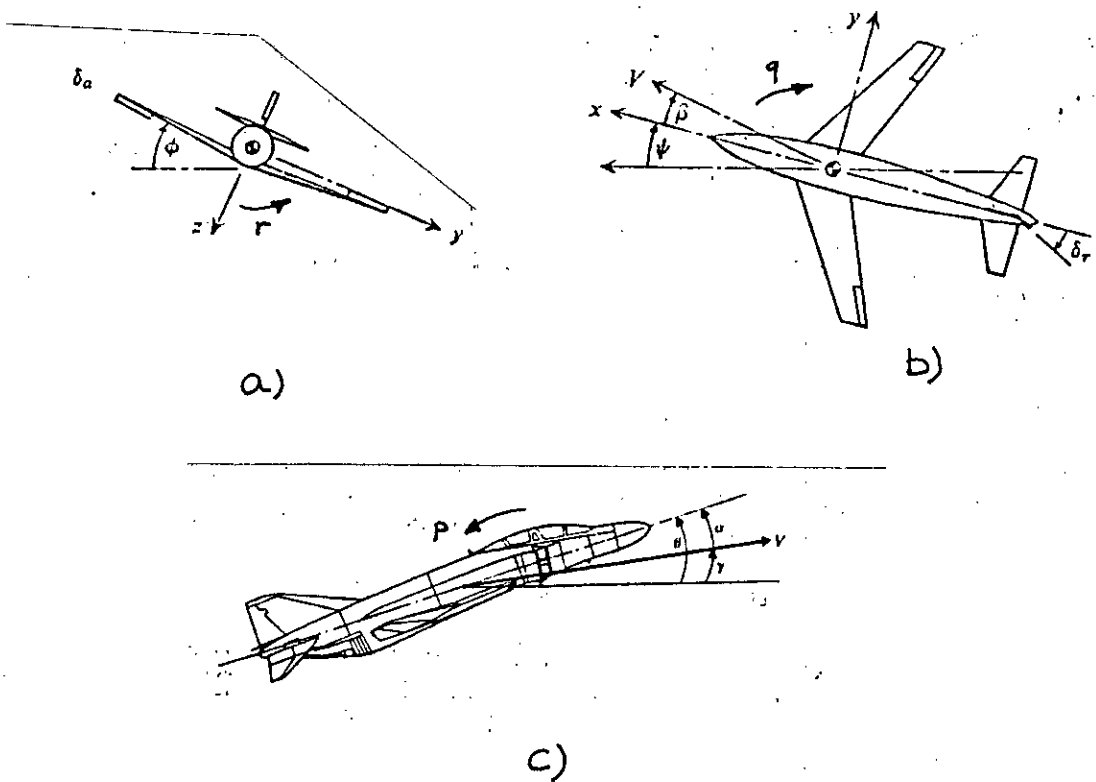


Figure 1: Notation des angles et des vitesses:

- (a) vitesse et angle de roulis;  
 (b) vitesse et angle de lacet;  
 (c) vitesse et angle de tangage.

On définit aussi:

L'angle d'attaque  $\alpha$  (Fig 2) : l'angle que fait le vecteur vitesse de déplacement de l'avion avec l'axe longitudinal dans la direction de tangage.

L'angle de glissement latéral  $\beta$  (side-slip angle, Fig 2): l'angle que fait le vecteur vitesse de déplacement de l'avion avec l'axe longitudinal dans la direction de lacet.

Les approximations sont valides pour des petits angles, dont il est le cas pour  $\alpha$  et  $\beta$ .

$$\alpha = \arctan\left(\frac{W}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) = \frac{W}{u}$$

(4.1)

$$\beta = \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{v}{u}$$

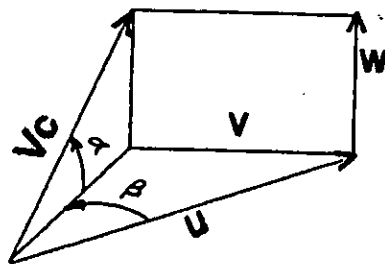


Figure 2: Définition de l'angle d'attaque  $\alpha$  et l'angle de glissement latéral  $\beta$ .

#### 4.3 SURFACES DE COMMANDE:

Pour varier l'attitude de l'avion, il faut modifier son profil aérodynamique. Cela est réalisé à l'aide d'un ensemble de petites palettes placées dans différents endroits de l'appareil appelées surfaces de commande.

Comme on a vu dans la section (2), il existe trois axes définissant l'orientation de l'avion dans l'espace: l'axe XX, appelé axe de roulis. L'avion évolue autour de cet axe grâce au braquage des gouvernes (A), appelées Ailerons. L'axe ZZ', dit de tangage, commande l'inclinaison vers le haut, ou vers le bas; c'est par l'intermédiaire de la gouverne de profondeur (GP) que le pilote agit sur cet axe. Enfin, on trouve un troisième axe YY', axe de lacet, c'est autour de lui que pivote l'avion par l'intermédiaire de la gouverne de direction (GD).

Le mouvement d'un corps rigide est décrit par les lois de Newton:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (4.2)$$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{G} \quad (4.3)$$

$\vec{p} = [P_x, P_y, P_z]^T$  : moment du corps

$\vec{h} = [h_x, h_y, h_z]^T$  : moment angulaire

$\vec{F} = [F_x, F_y, F_z]^T$  : la somme des forces

$\vec{G} = [L, M, N]^T$  : moment de torsion

L'avion est en mouvement relatif par rapport à la terre. Les équations (4.1), (4.2) ne sont valables que pour des axes d'inertie. Il faut tenir compte de l'accélération et de la rotation du corps rigide en introduisant la modification:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} + m\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{F} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\vec{h}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{h} = \vec{G} \quad (4.5)$$

Avec  $\vec{\omega}$  est la vitesse angulaire de rotation du référentiel de l'avion.

#### 4.5 L'ORIENTATION DE L'AVION:

Pour définir l'orientation d'un avion dans l'espace, il faut définir trois axes  $(x_i, y_i, z_i)$  fixés sur l'avion.

Dans la mécanique de l'avion, on définit l'orientation des axes orthogonaux de l'avion de telle façon à ce qu'ils coïncident avec les axes d'inertie de référence.

Si les axes du corps sont initialement alignés avec les axes de référence. Il faut faire une série de trois rotations consécutives dont l'ordre est important, pour retrouver les axes du corps dans une position quelconque (figure 4).

1<sup>o</sup> rotation (lacet) autour de l'axe z.

2<sup>o</sup> rotation (tangage) autour de l'axe y résultant de la 1<sup>o</sup> rotation.

3<sup>o</sup> rotation (roulis) autour de l'axe x résultant de la 1<sup>o</sup> et la 2<sup>o</sup> rotation.

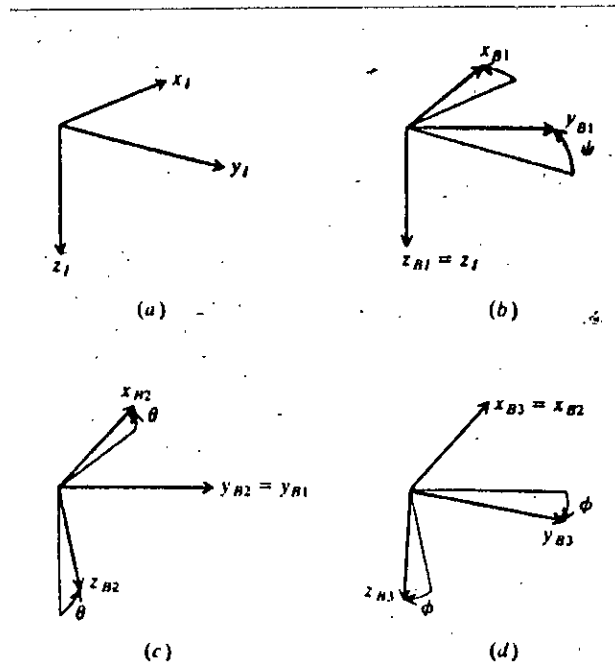


Figure 4: Séquence de rotation de l'axe de l'avion à partir de l'orientation de référence, vers une orientation quelconque. (a) les axes de référence; (b) première rotation autour de z (lacet); (c) deuxième rotation autour de y (tangage); (d) troisième rotation autour de x (roulis).

On définit ainsi la matrice qui permet le passage du référentiel du corps rigide au référentiel d'inertie.

$$T_{CI} = ROT(\phi, x_3) \cdot ROT(\theta, y_2) \cdot ROT(\psi, z_1)$$

$$T_{CI} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$T_{ci}$  est une matrice orthogonale:

$$T_{IC} = T_{CI}^{-1} = T_{CI}^T \quad (4.7)$$

#### 4.6 MOUVEMENT DE ROTATION:

##### 4.6.1. VITESSES ANGULAIRE:

Dans le cas d'un corps rigide, le moment angulaire est défini par:

$$\vec{h} = J\vec{\omega}$$

(4.8)

$$\text{avec : } \vec{\omega} = [P \ Q \ R]^T$$

où J: le tenseur d'inertie.

$\vec{\omega}$ : La vitesse angulaire.

Dans le référentiel lié à l'avion J est une matrice diagonale et de ce fait le moment angulaire dans ce référentiel compte tenu de (4.8) s'écrit:

$$\vec{h}_c = \begin{bmatrix} J_{xx}P \\ J_{yy}Q \\ J_{zz}R \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

D'après la section (5) on a :

$$\vec{h}_I = T_{IC} \vec{h}_C \quad (4.10)$$

En substituant (4.10) dans (4.3), et en tenant compte de (4.7) on abouti à l'équation suivante :

$$\vec{h}_C + T_{CI} \dot{T}_{IC} \vec{h}_C - T_{CI} \vec{G}_{CI} = \vec{G}_C \quad (4.11)$$

En comparant les équations (4.5) et (4.11) on arrive au résultat suivant :

$$T_{CI} \dot{T}_{IC} = \begin{bmatrix} 0 & -R & P \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \frac{L}{J_{xx}} - \frac{J_{xz} - J_{yy}}{J_{xx}} QR \\ \dot{Q} &= \frac{M}{J_{yy}} - \frac{J_{xx} - J_{zz}}{J_{yy}} PR \\ \dot{R} &= \frac{N}{J_{zz}} - \frac{J_{yy} - J_{xx}}{J_{zz}} PQ \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ce sont les équations d'Euler qui décrivent l'évolution des composantes de la vitesse angulaire de l'avion dans le temps.

#### 4.6.2 ANGLES DE ROTATION :

Pour exprimer l'orientation de l'avion en termes de composantes de la vitesse angulaire (P,Q,R) on substitue (4.6) dans (4.11) on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi &= P + (Q \sin \Theta + R \cos \Theta) \tan \Theta \\ \Theta &= Q \cos \Phi - R \sin \Phi \\ \Psi &= (P \sin \Phi + Q \cos \Phi) / \cos \Theta \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ces équations non linéaires, complètent la description de la dynamique du corps rigide dans l'espace.

#### 4.7 MOUVEMENT DE TRANSLATION:

##### 4.7.1 VITESSES DE TRANSLATION:

D'après la loi de Newton:

$$\vec{P} = m \frac{d\vec{V}_I}{dt} = m \frac{d}{dt} (T_{IC} \vec{V}_C) = \vec{F}_I$$

avec:  $\vec{V}_C = [U \ V \ W]^T$  (4.15)

$$\frac{d\vec{V}_C}{dt} = -T_{CI} \dot{T}_{IC} \vec{V}_C + \frac{1}{m} \vec{F}$$

et d'après l'équation (4.4):

$$T_{CI} \dot{T}_{IC} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

En remplaçant l'expression (4.16) dans (4.15) on trouve:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= RV - QW + \frac{1}{m} F_x \\ \dot{V} &= -RU + PW + \frac{1}{m} F_y \\ \dot{W} &= QU - PV + \frac{1}{m} F_z \end{aligned} \quad (4.17)$$

##### 4.7.2 POSITION DE L'AVION:

Pour compléter la dynamique de l'avion, on doit trouver les équations qui définissent l'évolution de la position du véhicule dans le temps.

On a:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \vec{V}_I = T_{IC} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (4.18)$$



En donnant ce système définissant la position de l'avion dans l'espace. La description du mouvement de l'avion dans l'espace sera complète.

#### 4.8 FORCE ET MOMENT APPLIQUES SUR L'AVION:

Les forces agissantes sur l'avion sont dues essentiellement aux:

- . Forces aérodynamiques
- . Forces de gravitation.
- . Forces moteur.

##### 4.8.1 FORCES DE GRAVITATION:

Les axes de l'avion ne sont pas en général dans la direction du vecteur de gravité. Chaque composante de  $F$  inclut un terme de gravité.

$$\begin{aligned} F_{xg} &= -mg \sin \theta \\ F_{yg} &= mg \cos \theta \sin \phi \\ F_{zg} &= mg \cos \theta \cos \phi \end{aligned} \quad (4.19)$$

##### 4.8.2 LES FORCES ET MOMENTS AERODYNAMIQUE:

Les forces et les moments aérodynamiques dépendent de la pression donnée par:

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2$$

avec

(4.20)

$\rho$ : densité de l'air

$V$ : vitesse de l'avion

Les forces et moments aérodynamiques peuvent être exprimés de la forme:

$$\begin{aligned}
 F_{xA} &= QAC_x \\
 F_{yA} &= QAC_y \\
 F_{zA} &= QAC_z \\
 L &= lQAC_L \\
 M &= lQAC_M \\
 N &= lQAC_N
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

$C_x, C_y, C_z, C_l, C_m, C_n$  sont des coefficients aérodynamiques exprimés avec leurs unités.

A: est la surface frontale caractérisant l'avion.  
l: la longueur de référence.

Les coefficients aérodynamiques ont des expressions très compliquées. Ils dépendent:

- 1- de la vitesse du véhicule : linéaire et angulaire;
- 2- des surfaces de contrôle de l'avion;
- 3- de la déflexions de ces surfaces de contrôle autour de leurs positions de référence.

Les variables qui influent considérablement sur les coefficients aérodynamiques sont: la vitesse de l'avion (nombre de Much), ainsi, que l'angle d'attaque et l'angle de glissement latéral.

#### 4.9 LINEARISATION DU MODELE:

Les équations qui décrivent le mouvement de l'avion sont de type non-linéaire. Pour pouvoir appliquer la commande linéaire, on doit linéariser le modèle sous certaines conditions:

- En étudiant le mouvement de l'avion dans un régime de vol où la vitesse et l'orientation sont constantes.
- Les surfaces de contrôle effectuent des petits déplacements pour maintenir le régime de vol et, de forcer n'importe quelles perturbations à zéro.

- La vitesse d'avance est approximativement constante, l'angle d'attaque et l'angle de glissement latéral peuvent être utilisés pour remplacer les vitesses  $W$  et  $U$  respectivement.

Le système d'équations (4.17) devient en tenant compte de (4.1):

$$\begin{aligned}\dot{U} &= RU\beta - Q\alpha U + \frac{1}{mU} F_x \\ \dot{\beta} &= -R - P\alpha + \frac{1}{mU} F_y \\ \dot{\alpha} &= Q - P\beta + \frac{1}{mU} F_z\end{aligned}\quad (4.22)$$

Les variables constituant le modèle sont données par:

a) Les variables vitesses, vitesse angulaire:

$$\begin{aligned}U &= U_0 + u \\ B &= \beta_0 + \beta \\ A &= \alpha_0 + \alpha\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}P &= p_0 + p \\ Q &= q_0 + q \\ R &= r_0 + r\end{aligned}\quad (4.24)$$

b) Les variables de positions absolues et d'orientations:

$$\begin{aligned}X &= x_0 + x \\ Y &= y_0 + y \\ Z &= z_0 + z\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \phi_0 + \phi \\
 \Psi &= \psi_0 + \psi \\
 \Theta &= \theta_0 + \theta
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$

c) Les surfaces de commande:

$$\begin{aligned}
 \Delta_A &= \delta_{A0} + \delta_A \\
 \Delta_E &= \delta_{E0} + \delta_E \\
 \Delta_R &= \delta_{R0} + \delta_R
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$

Sous ces conditions le modèle peut être linéarisé autour de l'état indicé par zéro.

En supposant que le mouvement de l'avion est considéré comme étant des petites déviations de la référence de vol, et en négligeant les produits des petits termes et leurs carrés.

Le modèle linéaire est exprimé en termes de variations :  $(u, \alpha, \beta), (p, q, r), (x, y, z), (\phi, \psi, \theta), (\delta_A, \delta_E, \delta_R)$ .

La fonction du système de contrôle est de réguler ces petites déviations au lieu de contrôler les positions absolues  $(x, y, z)$ . Ainsi les positions  $x, y$ , et  $z$  ne sont pas généralement incluses dans l'équation d'état du système.

Dans les problèmes aérodynamiques, on souhaite en général travailler avec des coefficients aérodynamiques sans dimensions pour plus de généralité et de commodité. Les coefficients seront normalisés [8].

En étudiant le mouvement de l'avion pour des petites perturbations. Certaines variables sont faiblement liés. Il est préférable de séparer le mouvement longitudinal du mouvement latéral. Les deux mouvements seront contrôlés séparément. Le mouvement longitudinal est contrôlé par la surface de contrôle appelé gouverne de profondeur. Les autres surfaces n'interviennent que faiblement sur le mouvement longitudinal.

Par contre le mouvement latéral est contrôlé par une paire d'ailerons et un gouvernail. L'effet de la gouverne de profondeur intervient faiblement sur le mode latéral.

## 4.10 LE MODELE LINEAIRE ADOPTE:

D'après [Friedland, 1987] les équations d'état de l'avion après linéarisation sont données par:

. Mouvement longitudinal:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= X_u u + X_\alpha \alpha - g\theta + X_E \delta_E \\ \dot{\alpha} &= \frac{Z_u}{V} u + \frac{Z_\alpha}{V} \alpha + q + \frac{Z_E}{V} \delta_E \\ \dot{q} &= M_u u + M_\alpha \alpha + M_q q + M_E \delta_E \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned} \quad (4.28)$$

. Mouvement latéral:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{Y_\beta}{V} \beta + \frac{Y_p}{V} p + \left(\frac{Y_r}{V} - 1\right) r + \frac{g}{V} \phi + \frac{Y_A}{V} \delta_A + \frac{Y_R}{V} \delta_R \\ \dot{p} &= L_\beta \beta + L_p p + L_r r + L_A \delta_A + L_R \delta_R \\ \dot{r} &= N_\beta \beta + N_p p + N_r r + N_A \delta_A + N_R \delta_R \\ \dot{\phi} &= p \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (4.29)$$

Les symboles X, Y, L, M, N avec leurs indices représentent les différents paramètres aérodynamiques de l'avion qui sont déjà standardisés dans le domaine de l'aéronautique.

## 4.11 COMMANDE AUTOMATIQUE DE L'AVION:

Dans le domaine de l'aviation, on distingue deux types d'avions: avions dit naturellement stables, et les avions modernes que l'on qualifie d'artificiellement stables. Leurs équilibres sont assurés par des systèmes automatiques commandés par ordinateur.

La conception d'un avion instable a plusieurs avantages: elle permet d'avoir des avions plus légers, plus économique, et plus agile en vol [5].

En plus de la stabilisation de l'appareil, la commande permet de pilotage automatique. En pilotage automatique, on s'intéresse à suivre le plan de vol, et l'optimiser de façon à réaliser les étapes de la route le plus économiquement possible, à la vitesse exigée, en maintenant le cap, et l'attitude de l'avion sélectionnés par le pilote.

Le pilotage automatique est programmé pour optimiser l'attitude de l'avion en fonction d'une trajectoire définie (vol en palier, virage à droite, virage à gauche, montée, descente) [5].

Le pilotage automatique est un dispositif gyroscopique qui détecte les écarts de position ou de trajectoire de l'avion, et les corrige à l'aide de vérins pneumatiques, ou électrique agissant sur les commandes. La fonction en question, consiste à détecter lorsqu'il se produisent les phénomènes aérodynamiques, ayant une incidence directe sur le comportement de l'appareil (rafales, tourbillons), et d'en annuler les effets sur l'appareil.

Il existe plusieurs types de pilotage automatique, les plus simples ne font que maintenir l'équilibre latéral. Il existe d'autre plus évolué qui permettent de maintenir l'attitude complète de l'appareil, à savoir:

dans l'équilibre latéral:

- \* angle de glissement latéral;
- \* angle de roulis;
- \* vitesse de roulis;
- \* vitesse de lacet;
- \* angle de lacet.

dans l'équilibre longitudinal:

- \* vitesse d'avance;
- \* angle d'attaque;
- \* vitesse de tangage;
- \* angle de tangage.

- \* maintien d'une attitude constante.
- \* maintien d'un parcours bien défini.

Le type de pilotage choisi pour notre application, consiste à maintenir l'équilibre latéral, et l'équilibre longitudinal.

#### 4.12 CAPTEURS DE L'AVION:

Le changement de l'attitude de l'avion est évalué à l'aide de capteurs dessinés en différents points de l'appareil. Ils sont spécifiquement adaptés à la détection des paramètres recherchés. Ils vont déterminer l'amplitude des différentes modifications d'attitudes engendrées par les perturbations extérieures.

Le gyroscope constitue la base de ces capteurs. Ce dernier peut être définie comme étant un solide tournant autour d'un point fixe  $o$  et possédant un axe de symétrie dynamique  $oz$  qui passe par son centre d'inertie [22].

Si une force extérieure agit sur le gyroscope en essayant de changer l'angle entre l'axe vertical et l'axe de symétrie dynamique  $oz$  le gyroscope va annuler cette variation en revenant à sa position d'équilibre [22]. Cette variation sera mesurée et convertie en une tension électrique qui traduira un changement dans la position ou la vitesse angulaire [7].

Dans un tableau de bord d'un avion on trouve les principaux instruments de mesures suivantes:

1. L'anémomètre: mesure la vitesse de l'avion par rapport à celle de la terre.
2. L'horizon artificiel: permet de déterminer la position et la stabilité de l'appareil.
3. L'altimètre: détermine l'altitude de l'appareil.
4. L'aiguille: indique l'amplitude et le sens lorsque l'avion prend un virage.
5. Le compas gyroscopique: permet de contrôler la navigation et la direction du vol.

#### 4.13 CONCLUSION:

— La description de la dynamique de l'avion; supposé un corps rigide, dans l'espace est très compliquée, du fait qu'elle nécessite 12 équations différentielles.

— Dans la terminologie de l'aéronautique, le mouvement de l'avion dans l'espace est décrit par trois axes de rotation: axe de roulis, axe de tangage, et axe de lacet.

---

— La commande de l'attitude de l'avion se fait à l'aide de trois surfaces de commande: le Gouvernail de direction, qui permet le virage à gauche, ou virage à droite, le Gouvernail de Profondeur, qui permet de varier l'incidence de l'appareil, et les Ailerons, qui permettent la rotation de l'avion autour de son axe longitudinal.

- Le modèle décrivant le mouvement de l'avion dans l'espace, est de type non linéaire. Pour commander un tel système, il faut utiliser une commande non linéaire. Mais, il est possible de simplifier le système de commande en linéarisant le modèle autour d'un point de fonctionnement, et cela sous certains critères.

- Il est possible de découpler le mouvement longitudinal, et le mouvement latéral, en tenant compte que les deux mouvements sont faiblement liés. Ce découplage permet une simplification notable dans la synthèse du régulateur.



Chapitre 5

*Synthèse de la commande  
de l'avion*

### 5.1 INTRODUCTION:

Dans cette partie on va étudier la commandabilité et la stabilité des deux mouvements de l'avion, en analysant les modes instables du système.

Après la commande en boucle fermée sera utilisée pour stabiliser les modes instables et pour concevoir un pilote automatique; on fera appel à la technique de COLQ.

Une analyse par simulation sur MATLAB sera donnée pour des données réelles de l'avion.

### 5.2 ANALYSE DE LA DYNAMIQUE:

#### 5.2.1 MOUVEMENT LATERAL:

##### a) Données numériques:

Le modèle du mouvement latéral trouvé dans la partie précédente est adopté ici, les valeurs numériques des coefficients aérodynamiques sont celles d'un avion de type AFTI-16 [10]:

a =

-0.7460	0.0060	-0.9990	0.0369	0
-12.9000	-0.7460	0.3870	0	0
4.3100	0.0240	-0.1740	0	0
0	1.0000	0	0	0
0	0	1.0000	0	0

b =

0.0012	0.0092
6.0500	0.9520
-0.4160	-1.7600
0	0
0	0

##### b) commandabilité:

Pour pouvoir utiliser la commande en boucle fermée le système doit être commandable. Le rang de la matrice de commandabilité est cinq: le système est complètement commandable.

## c) stabilité:

En utilisant la technique de l'analyse modale, les modes de l'avion pour ce mouvement sont:

P=

0  
-0.7653  
-0.0062  
-0.4473 + 2.0724i  
-0.4473 - 2.0724i

deux pôles complexes avec un faible amortissement et trois pôles réels.

Dans la terminologie de l'aviation, on utilise les appellations suivantes [8].

- Les deux pôles complexes définissent un mode appelé dutch roll
- le premier pôle réel relativement loin de l'origine définit un mode appelé roll subsidence.
- Le deuxième pôle réel relativement proche de l'origine est appelé spiral mode. Ce dernier est parfois instable et cause l'instabilité de toute l'appareil.
- Le dernier pôle réel est nul et entraîne sans doute l'instabilité.

Si on essaye de commander l'appareil par une impulsion sur les Ailerons ( $\delta_A$ ) (figure 1):

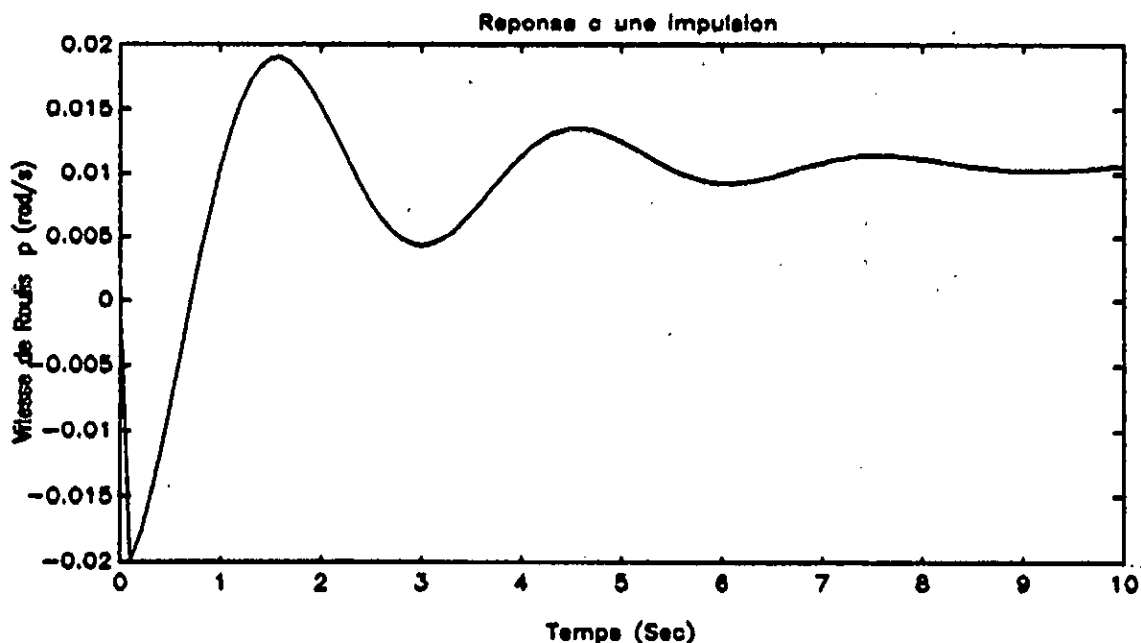


Figure 1: Réponse du système à une impulsion (vitesse de roulis).

On voit que le système est légèrement amorti. En effet, l'avion oscille autour d'un point non nul. Cela veut dire que l'avion peut tourner si l'on commande par une impulsion sur les Ailerons.

L'avion aura besoin d'une boucle de retour pour améliorer le facteur d'amortissement.

### 5.2.2 MOUVEMENT LONGITUDINAL:

#### a) données numériques:

Le modèle de ce mouvement est donné aussi dans le chapitre 4. Les données numériques sont tirées de [10] pour un avion de type AFTI-16:

$\mathbf{a} =$

-0.0507	-3.8610	0	-32.1700
-0.0012	-0.5164	1.0000	0
-0.0001	1.4168	-0.4932	0
0	0	1.0000	0

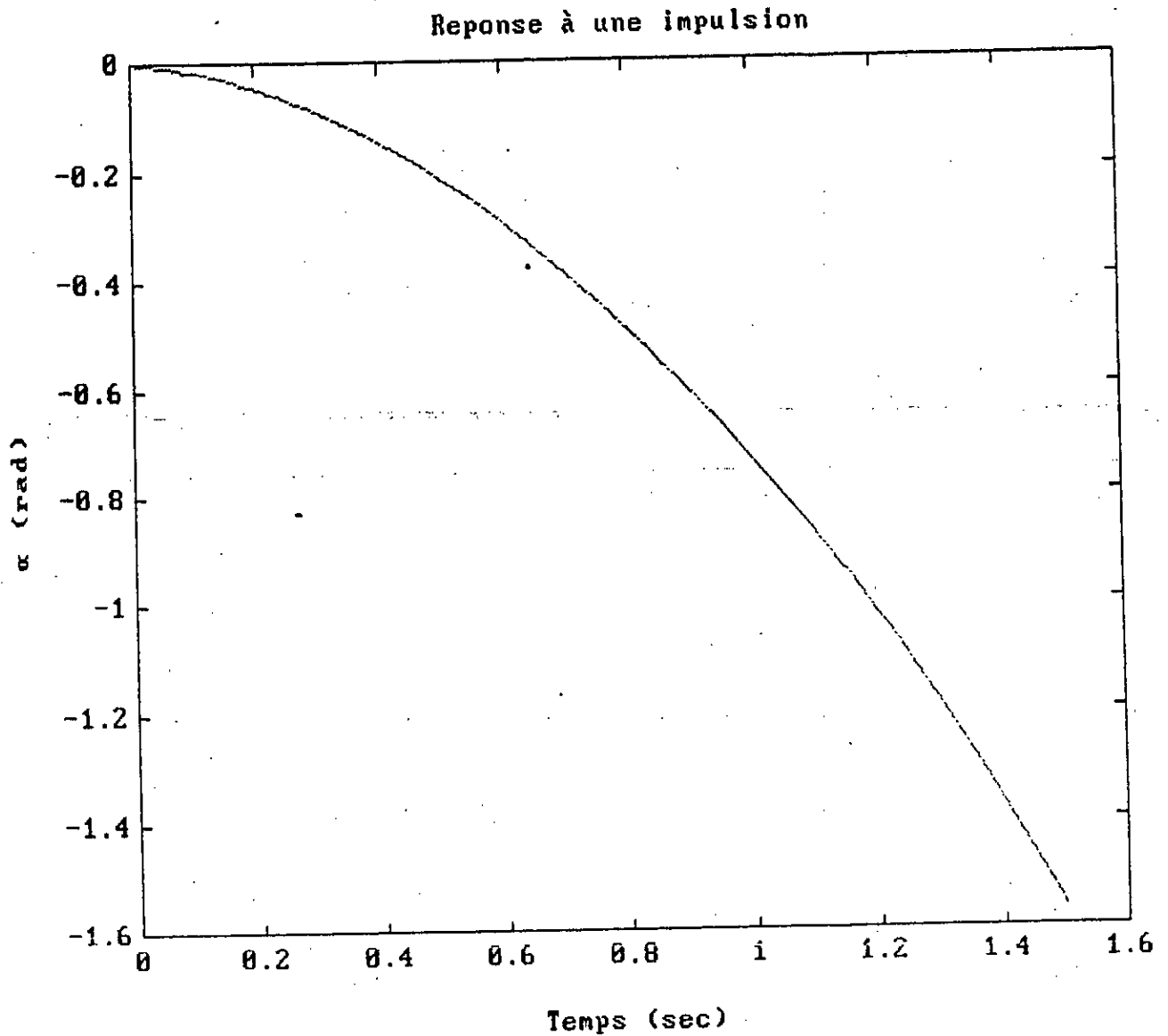


Figure 2: Réponse du système à une impulsion (angle d'attaque)

### 5.3 COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE:

Nous avons trouvé dans l'étude précédente que l'avion a besoin d'une boucle de retour qui fait augmenter la stabilité de l'appareil en déplaçant les pôles du système plus vers la gauche. Pour plusieurs raisons citées auparavant, la technique de la commande optimale semble la plus conseillée. Parmi ces raisons, la conception d'un pilotage automatique au même temps que l'augmentation de la stabilité.

On a vu que la commande optimale linéaire quadratique (COLQ) consiste à trouver une commande  $u(t)$  en minimisant une fonction de coût quadratique (1.5).

Vu que les systèmes physiques ont en général une constante de temps assez grand, et que le système est stationnaire, la commande avec horizon fini ne devient plus nécessaire, elle sera remplacée par la commande à horizon infini, qui permet de réduire considérablement le temps de calcul. Le critère à minimiser prendra la forme:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T R x + u^T R u) dt$$

Q et R sont les matrices de pondération.

La méthode de Bryson sera utilisée pour former ce critère. Les variations maximales permises pour les variables d'états et de contrôle sont reliés à la mécanique de l'avion.

La synthèse de commande en boucle fermée se fait en calculant le gain optimal de retour G tel que:

$$u(t) = -Gx(t)$$

### 5.3.1 MOUVEMENT LATERAL:

On avait vu que le mouvement latéral est peu amortie et qui peut devenir instable dû à certains pôles. La boucle fermée à pour rôle d'augmenter la stabilité et de:

- maintenir un angle de roulis constant;
- une vitesse de roulis constante;
- une direction de vol constante.

Le critère à minimiser sera de la forme [6]:

$$J = \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^2 + \left( \frac{p}{p_0} \right)^2 + \left( \frac{\psi + \beta}{e_0} \right)^2 + \left( \frac{\delta_A}{\delta_{A0}} \right)^2 + \left( \frac{\delta_R}{\delta_{R0}} \right)^2 \right) dt$$

les matrices de pondération seront :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\epsilon_0^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_0^2} \\ 0 & \frac{1}{p_0^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\phi_0^2} & 0 \\ \frac{1}{\epsilon_0^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\epsilon_0^2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{AO}^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\delta_{RO}^2} \end{bmatrix}$$

avec :

avec :

$$\epsilon_0 - \beta_0 + \psi_0 = 0.3 \text{ rad}$$

$$p_0 = 1 \text{ rad/sec}$$

$$\phi_0 = 1.0 \text{ rad}$$

$$\delta_{AO} = 0.8 \text{ rad}$$

$$\delta_{RO} = 0.8 \text{ rad}$$

le gain de la boucle de retour (figure 3) sera calculé en résolvant l'équation de Riccati. Les calculs donnent :

G =

$$\begin{bmatrix} 1.0989 & 9.9765 & 0.5953 & 9.9799 & 4.4925 \\ -22.1462 & 1.1702 & -3.3820 & 0.8522 & -31.3020 \end{bmatrix}$$

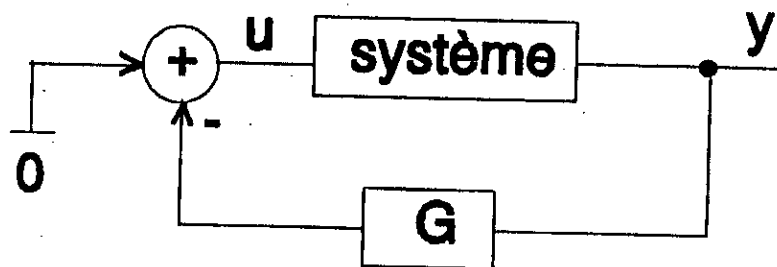


Figure 3: Schéma fonctionnel du régulateur.

La réponse du système à une perturbation extérieure qui sera simulée par des états initiaux non nuls est illustrée sur la figure 4.

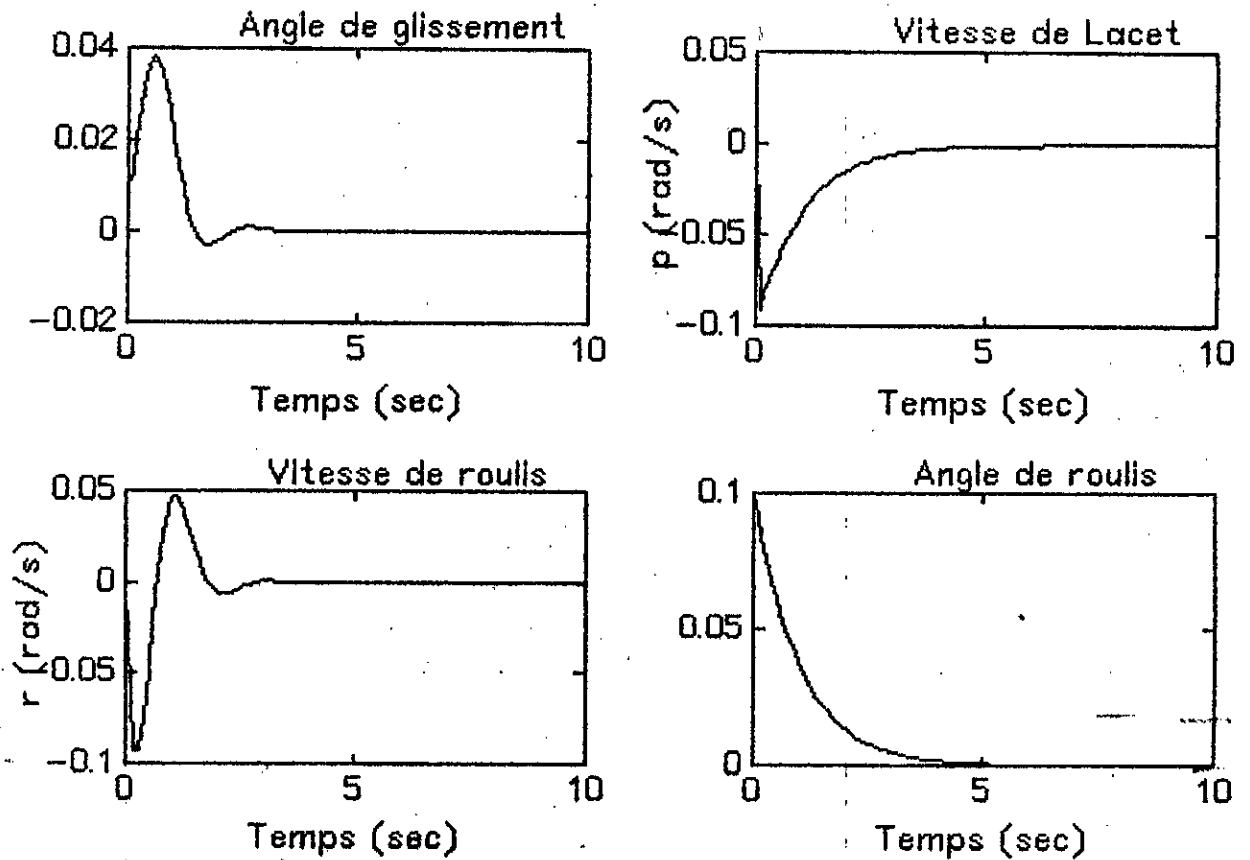


Figure 4: Reponse du système à une perturbation extérieure ( commande optimale ).

La forme de la commande optimale est donnée sur la figure 5.



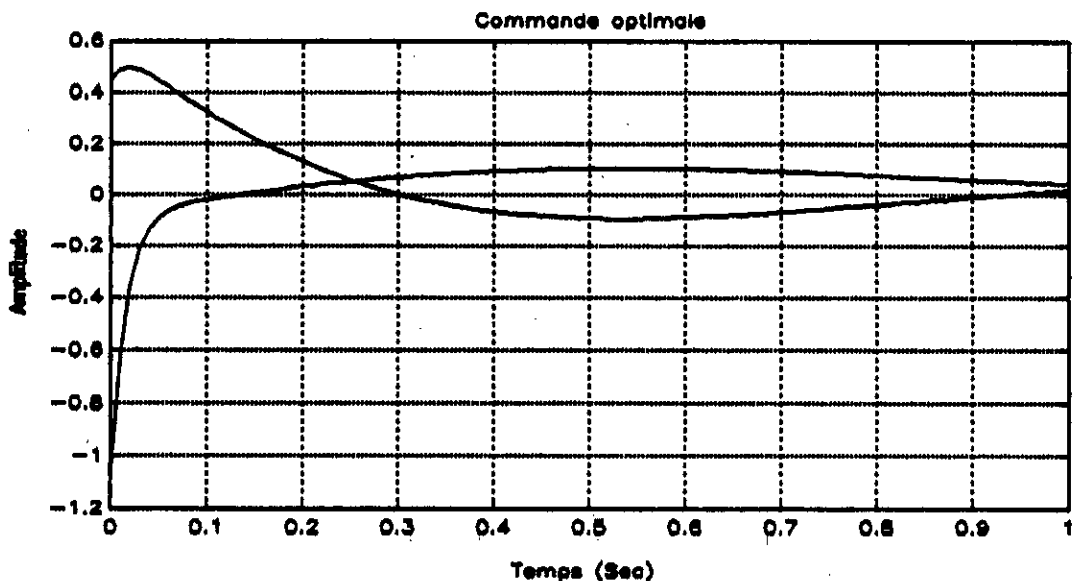


Figure 5: Commande optimale (ailerons et gouvernail).

En analysant la figure 4 on peut voir que les oscillations importantes (Fig. 1) sont fortement réduites. En effet, le facteur d'amortissement devient plus important et l'amplitude des oscillations tendent rapidement vers zéro.

L'effet des perturbations extérieures sur l'attitude ( états du système) est annulé par le biais de la commande optimale en réduisant toute variations des états du système vers zéro d'une façon douce.

De la figure 4 on remarque que tous les états se stabilisent autour de zéro après un régime transitoire; c'est l'effet de la régulation d'état.

La figure 5 représente l'allure de la commande optimale (ailerons et Gouvernail de direction ). Cette commande agit sur les états du système pour annuler l'effet de la perturbation. Lorsque les états deviennent nuls la commande le devient aussi, et ne revient en action que si une autre perturbation se présente.

Si on réalise la boucle de retour de façon non optimale la réponse du système à la même perturbation sera (figure 5):

Le gain de la boucle de retour dans ce cas est:

$G=$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0.5 & 10 & 5 \\ -20 & 1 & -3 & 0.5 & -20 \end{matrix}$$

Le calcul de la valeur du critère de performance dans le cas optimal et le cas non optimal est donné dans le tableau 1:

Tableau 1: Coparaison C.O avec C.N.O:

Type de commande	Valeur du critère (J)
Commande optimale	0.0698
Commande non optimale	0.2533

On voit que la valeur du critère de performance dans le cas optimale est bien plus faible que celui du cas non optimale. Ce qui verifié que la commande optimale est meilleur.

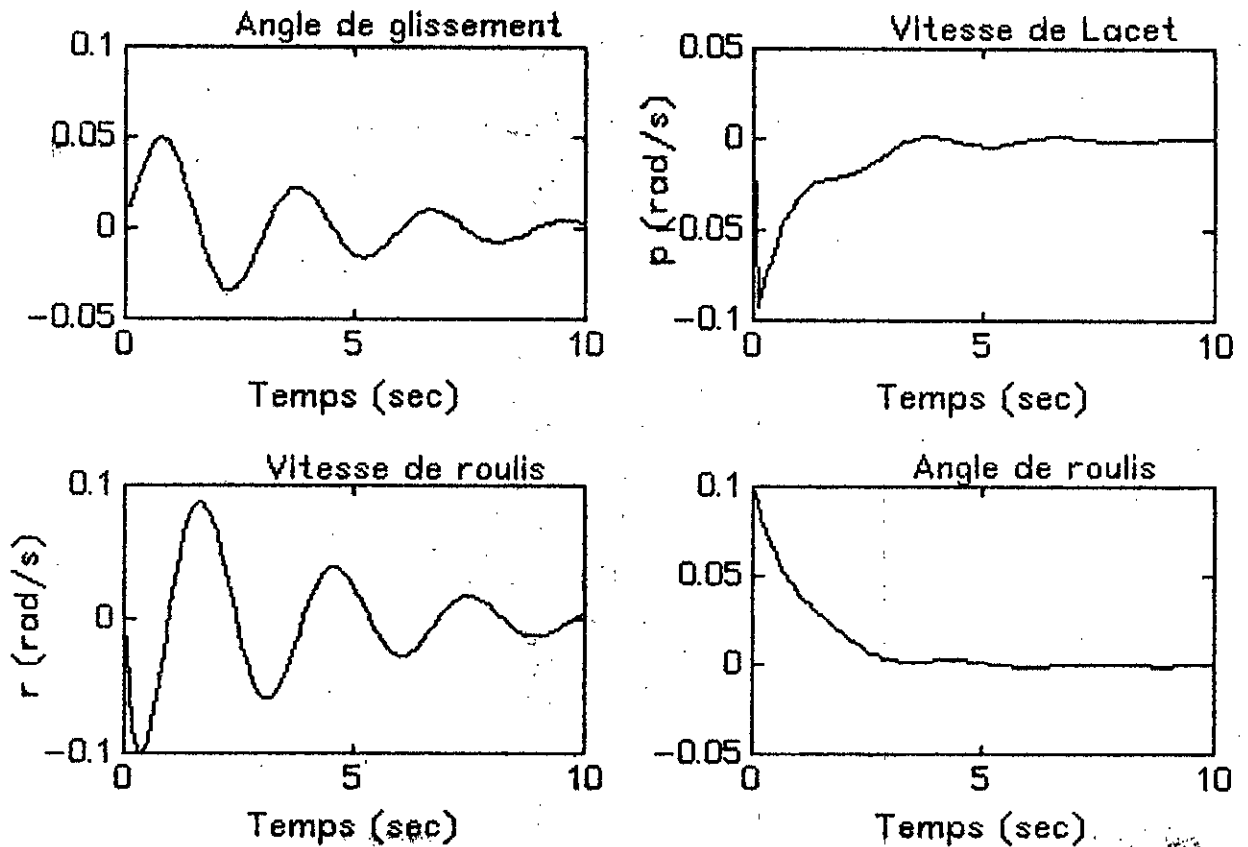


Figure 6: Réponse du système à une perturbation extérieure ( commande non optimale ).

En comparant la figure 4 (commande optimale) avec la figure 6 (commande non optimale) on voit que la réalisation d'une boucle de retour de façon non optimale peut causer des effets non désirables. En effet, les oscillations et les dépassements sont très importantes dans ce dernier cas et les états ne se stabilisent pas autour du zéro (ils oscillent autour d'un point non nul).

### 5.3.2 MOUVEMENT LONGITUDINAL:

Dans le mouvement longitudinal on s'intéresse à stabiliser le système et de :

- maintenir une accélération verticale constante;
- une vitesse verticale constante;
- une inclinaison constante.

Le critère dans ce cas devient [6]:

$$J = \int_0^{\infty} \left( \left( \frac{q}{Q_0} \right)^2 + \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 + \left( \frac{\theta - \alpha}{\gamma_0} \right)^2 + \left( \frac{\delta z}{\delta z_0} \right)^2 \right) dt$$

les matrices de pondérations:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{1}{\gamma_0^2} & 0 & -\frac{1}{\gamma_0^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{Q_0^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma_0^2} & 0 & \frac{1}{\gamma_0^2} \end{bmatrix}, \quad R = \left[ \frac{1}{\delta z_0^2} \right]$$

avec :

$$\alpha_0 = 0.1 \text{ rad}$$

$$\theta_0 = 0.2 \text{ rad}$$

$$\gamma_0 = \theta_0 - \alpha_0 = 0.1 \text{ rad}$$

$$q_0 = 0.5 \text{ rad/sec}$$

le gain de la boucle de retour de la figure 3 sera :

$G =$

$$\begin{bmatrix} 0.0650 & -15.5568 & -22.8184 & -88.4637 \end{bmatrix}$$

La réponse de ce système à une perturbation extérieure de (Figure 7) :

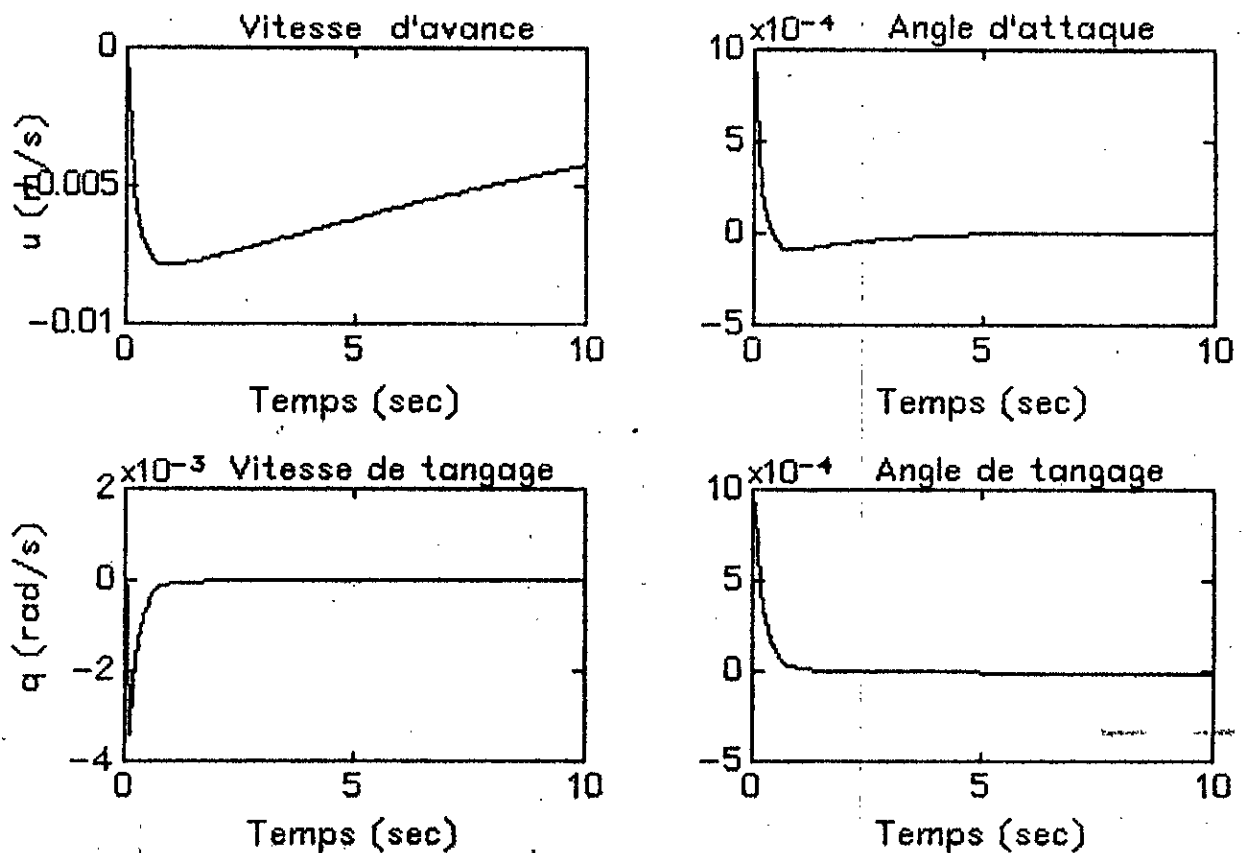


Figure 7: Réponse à une perturbation extérieure (commande optimale).

La commande optimale qui agit sur les états du système à la forme:

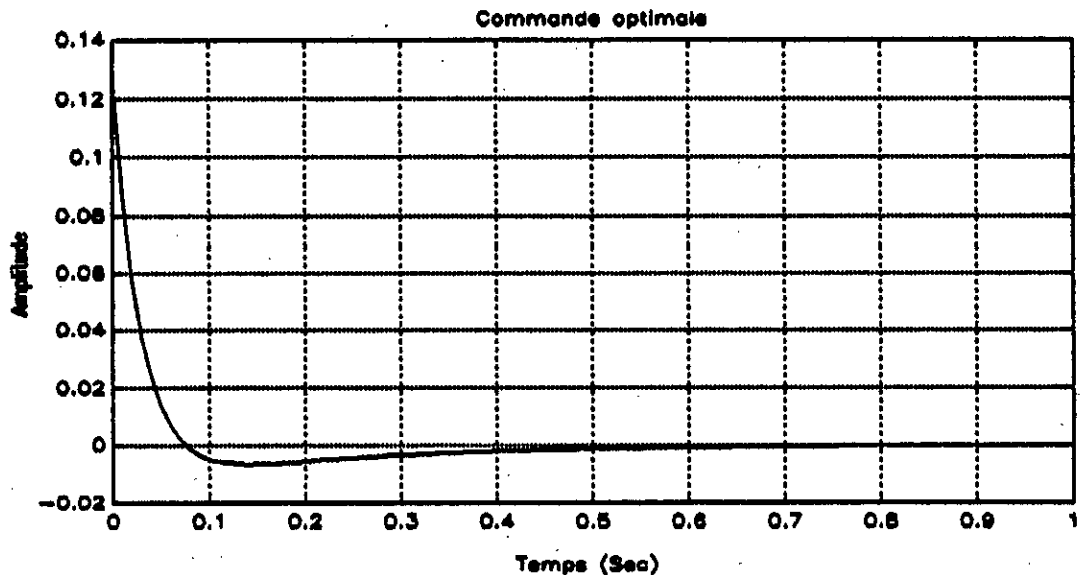


Figure 8: Commande optimale ( gouvernail de profondeur ).

De la figure 7 on voit bien que la stabilité du système est augmentée; la commande optimale assure toujours la stabilité.

L'effet de la perturbation est éliminé par la commande optimale (Fig. 8) qui agit en sens inverse des états. Les états tendent vers zéro après un temps transitoire douce et l'avion est peu influé par la perturbation.

Pour une boucle de retour réaliser de façon non optimale et avec un gain de retour:

$$G = \begin{bmatrix} 4 & -10 & -10 & -10 \end{bmatrix}$$

on obtient les réponses suivantes ( Fig. 9):

La comparaison entre la commande optimale ( Fig. 7) et la commande non optimale (Fig. 9) montre que cette dernière peut réaliser la stabilité mais, les performances du système ne sont pas satisfaisantes par rapport de la commande optimale; oscillations importantes, dépassements élevés.

En effet, le calcul de la valeur du critère de performance ( Tableau. 2) montre que la valeur de ce dernier dans le cas optimal est plus faible que celui dans le cas non optimal.

Tableau 2: Comparaison C.O avec C.N.O.

Type de commande	Valeur du critère (J)
Commande optimale	0.0209
Commande non optimale	0.0453

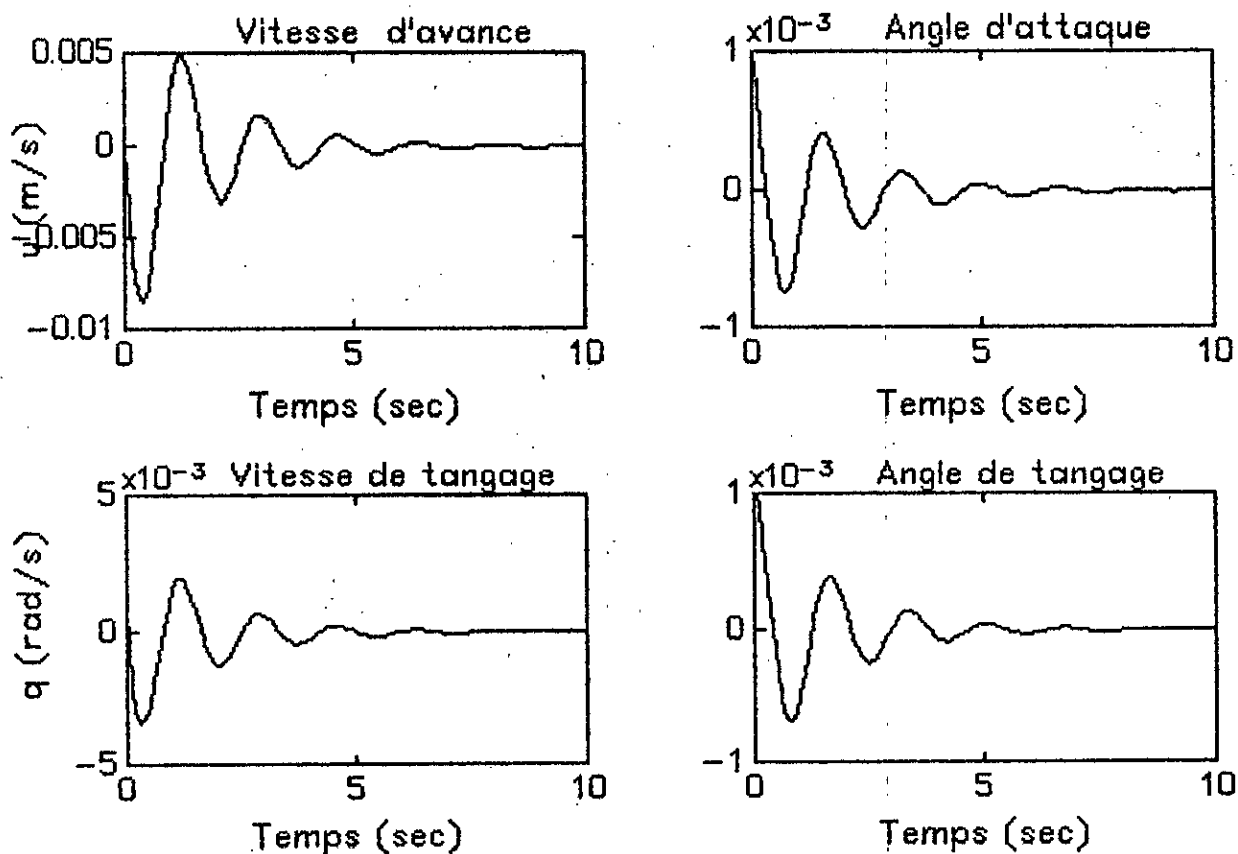


Figure 9: Réponse du système à la même perturbation ( commande non optimale).

## 5.4 SYNTHÈSE DANS LE CAS DISCRET:

Dans un souci de complémentarité dans notre étude, nous avons estimé utile de présenter dans ce qui suit la version discrète des résultats obtenus précédemment dans un cadre continu.

Le choix de la période d'échantillonnage se fait en analysant la réponse en boucle fermée ( chapitre 1). Le système discret pour les deux mouvements deviennent:

## 5.4.1 MOUVEMENT LONGITUDINAL:

Pour une période d'échantillonnage  $T = 0.05$  sec le système discret sera:

A =

0.9997	-0.0193	-0.0004	-0.1608
-0.0000	0.9974	0.0050	0.0000
-0.0000	0.0071	0.9976	0.0000
-0.0000	0.0000	0.0050	1.0000

B =

0.0016
-0.0056
-0.0814
-0.0020

Le critère quadratique à minimiser prendra la forme (1.37), et les matrices de pondérations seront:

Qo =

0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	0.9974	0.0013	-0.4994
-0.0000	0.0013	0.0200	0.0000
0.0000	-0.4994	0.0000	0.5000

Ro =

5.0495e-005

il y a l'apparition du terme croisé:

So =

1.0e-003 *
0.0000
-0.1826
-0.0824
0.0895

Le gain de la boucle fermée optimale sera :

$$G = \begin{matrix} 0.0592 & -14.2146 & -20.9805 & -80.5110 \end{matrix}$$

La réponse du système à une perturbation extérieure est illustrée sur la figure 10.

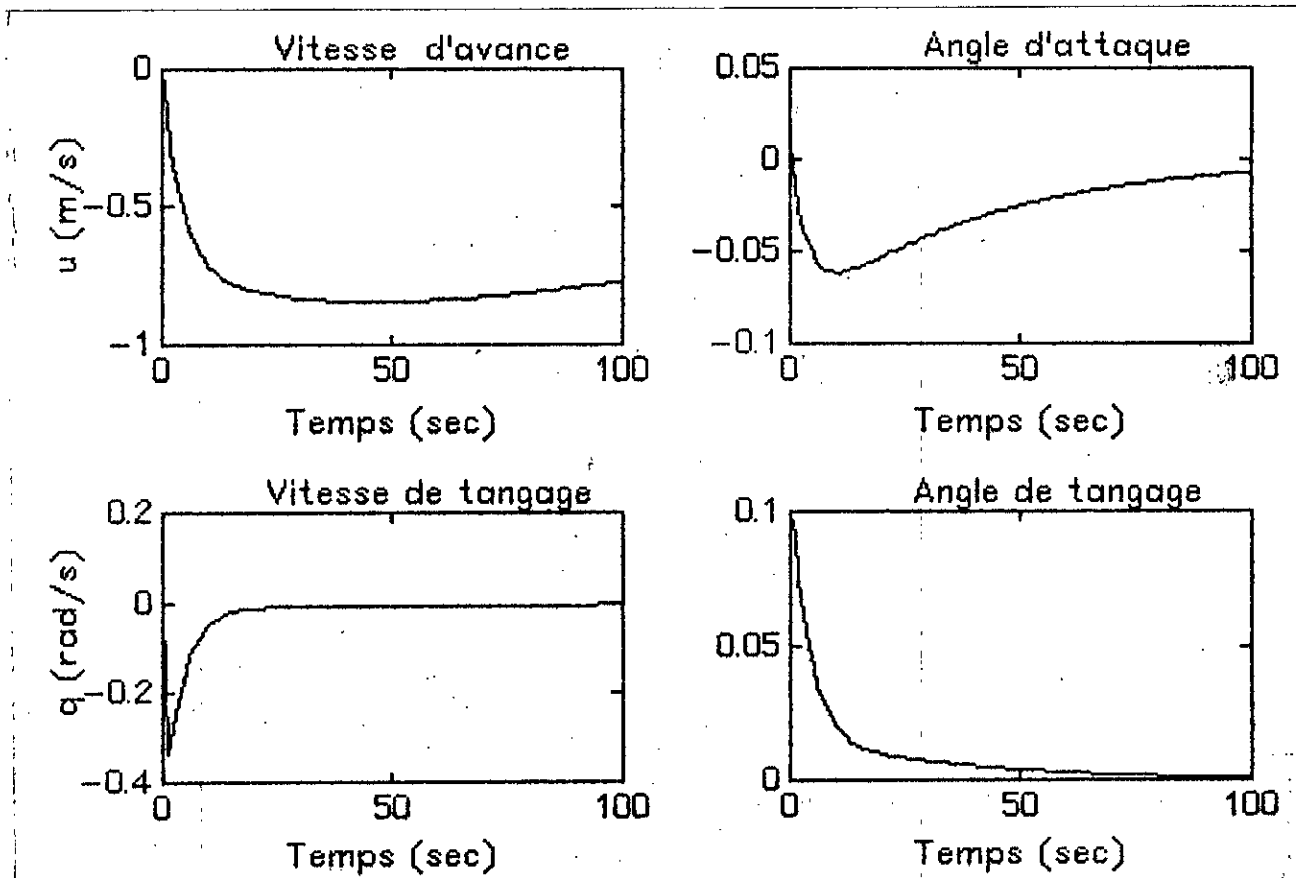


Figure 10: Réponse du système discret à une perturbation extérieure ( commande optimale).



## 5.4.2 MOUVEMENT LATERAL:

pour  $T = 0.1$  sec le système latéral aura pour dynamique:

$$A = \begin{bmatrix} 0.9074 & 0.0006 & -0.0947 & 0.0035 & 0 \\ -1.1806 & 0.9278 & 0.0974 & -0.0022 & 0 \\ 0.4072 & 0.0024 & 0.9622 & 0.0008 & 0 \\ -0.0609 & 0.0963 & 0.0039 & 0.9999 & 0 \\ 0.0208 & 0.0001 & 0.0984 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0023 & 0.0094 \\ 0.5812 & 0.0843 \\ -0.0402 & -0.1730 \\ 0.0295 & 0.0044 \\ -0.0020 & -0.0087 \end{bmatrix}$$

Le critère de performance auront pour valeurs:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0.9777 & -0.0578 & -0.0022 & -0.0003 & 0.9636 \\ -0.0578 & 0.0932 & 0.0037 & 0.0048 & 0.0003 \\ -0.0022 & 0.0037 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0013 \\ -0.0003 & 0.0048 & 0.0001 & 0.1000 & 0.0018 \\ 0.9636 & 0.0003 & 0.0013 & 0.0018 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0.0125 & 0.0017 \\ 0.0017 & 0.0013 \end{bmatrix}$$

$$S_0 = \begin{bmatrix} -0.0236 & -0.0031 \\ 0.0281 & 0.0042 \\ 0.0016 & 0.0002 \\ 0.0010 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0004 \end{bmatrix}$$

Le gain de la boucle fermée sera:

$$G = \begin{bmatrix} 0.3745 & 2.0055 & 0.5809 & 1.9987 & 3.4496 \\ -16.6261 & 0.0183 & -2.9268 & -0.2310 & -23.7185 \end{bmatrix}$$

La réponse du système à une perturbation extérieure est donnée sur la figure 11.

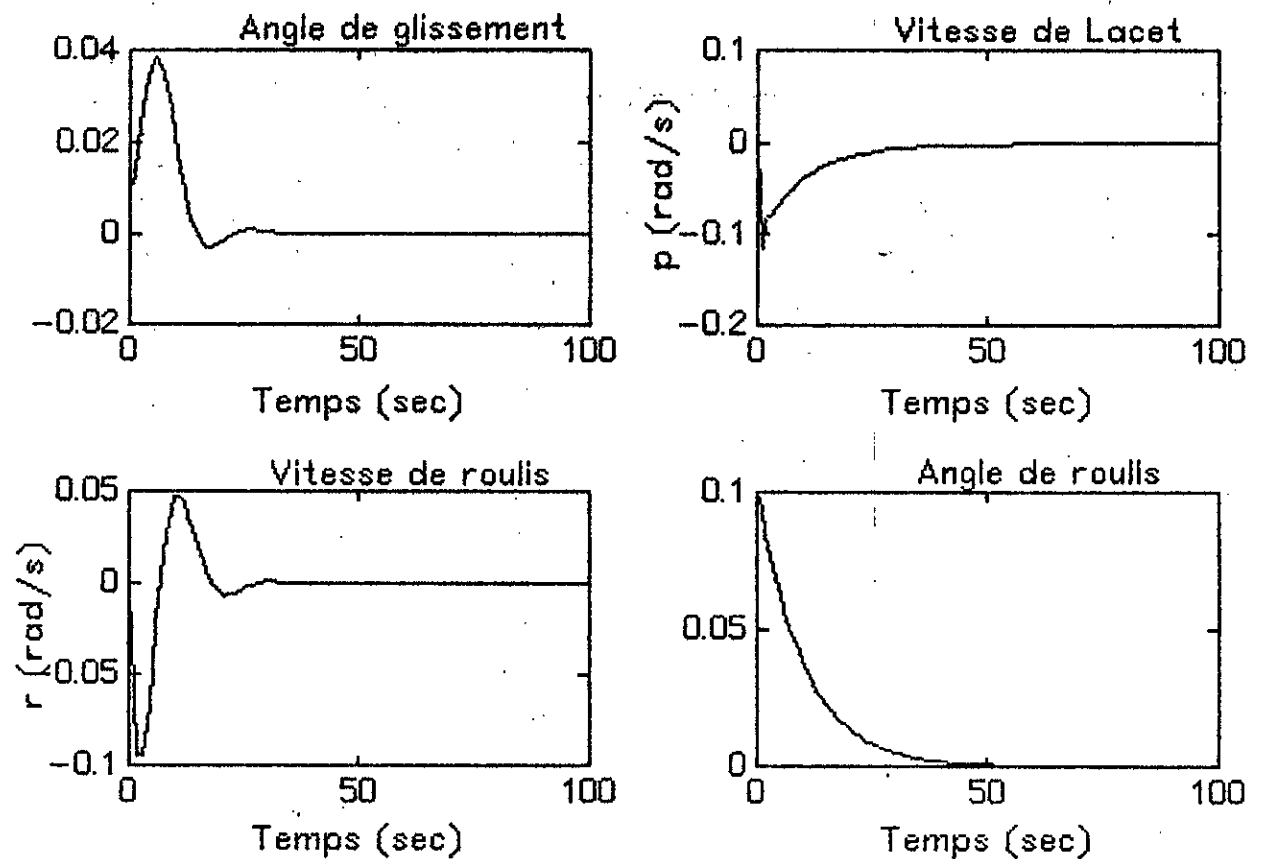


Figure 11: Réponse du système discret à une perturbation extérieure.

Les mêmes remarques concernant l'interprétation de ces courbes peuvent être faites comme dans le cas continu.

### 5.5 CONCLUSION:

L'analyse dynamique ( par simulation sur ordinateur ) d'un avion dans ses deux mouvements ( latéral et longitudinal ) montre que l'appareil est non suffisamment stable.

Par application de la commande optimale aux mouvements longitudinal et latéral de l'avion, les résultats graphiques montrent que plusieurs caractéristiques souhaitées ont été obtenues, en particulier une augmentation de la stabilité, réduction des temps de réponses, augmentation du facteur d'amortissement,...

Ces résultats ont été testés sous l'effet d'une perturbation ( impulsion de durée appropriée ) sur les ailerons et le gouvernail de direction dans le cas du mouvement latéral, et sur le gouvernail de profondeur dans le cas du mouvement longitudinal.

Lors de l'action d'une perturbation, les états de l'avion seront perturbés, et la commande entre en action en annulant les effets de cette dernière. Les états tendent vers un régime stationnaire après un régime transitoire bien amorti.

Il faut noter que la perturbation agissante sur l'appareil (tourbillons, rafales d'air) et qui entraîne une modification dans l'attitude sera annulée après qu'elle soit évaluée par les capteurs d'orientations et de vitesses et transmis au système de commande qui va annuler ces effets en agissant sur les surfaces de commandes convenables ( pour le mouvement latéral: les ailerons et le gouvernail de direction, et pour le mouvement longitudinal: les gouvernails de profondeur).

*Chapitre 6*

*Estimation des états  
de l'avion*

### 6.1 INTRODUCTION:

En général, la dynamique des systèmes physiques est perturbée par des phénomènes aléatoires. Pour concevoir un système de contrôle qui doit rencontrer de tels phénomènes lors de son action il faut en tenir compte dans la conception. De plus, la mesure des variables d'états se fait toujours avec la présence inévitable de différents types de bruits de mesure.

Pour la simulation on choisira tous les bruits; de dynamique et de mesure, blanc, centrés, non corrélés, et gaussiens.

### 6.2 ETUDE DE L'OBSERVABILITE:

Pour qu'on puisse utiliser l'observateur déterministe ou bien le filtre de Kalman le système doit être observable.

#### 6.2.1. MOUVEMENT LATERAL:

La matrice de mesure C est:

C=

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

le rang de la matrice d'observabilité est quatre; le système est complètement observable.

#### 6.2.2. MOUVEMENT LONGITUDINAL:

La matrice de mesure C est:

C=

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

le rang de la matrice d'observabilité est quatre; le système est complètement observable.

L'utilisation du filtre de Kalman dans ce cas est possible.

## 6.3 OBSERVATION STOCHASTIQUE:

Les mesures sont infectées par un bruit aléatoire. Par cet effet, elles ne sont plus significatives (Fig. 1) et (Fig. 2).

Les covariances de l'erreur entre les mesures bruitées et les mesures parfaites pour différents rapports signal sur bruit (S/N) sont:

## Dynamique latérale:

. S/N=0.0100

var =  
 0.0033      0.0032      0.0032      0.0030      0.0026

. S/N = 0.1000

var =  
 1.0e-003 \*  
 0.2827      0.3185      0.3144      0.3107      0.3377

. S/N = 1

var =  
 1.0e-004 \*  
 0.2917      0.3083      0.3269      0.3172      0.2586

. S/N= 10

var =  
 1.0e-005 \*  
 0.3669      0.2870      0.3579      0.3676      0.2953

## Dynamique longitudinale:

. S/N = 0.0100

var =  
 1.0e-004 \*  
 0.5030      0.4562      0.4824      0.4145

. S/N = 0.1000

var =

1.0e-005 *				
0.4697	0.4085	0.4876	0.3864	

. S/N = 1

var =

1.0e-006 *				
0.4619	0.4651	0.4580	0.4275	

. S/N = 10

var =

1.0e-007 *				
0.4020	0.4307	0.4951	0.4206	

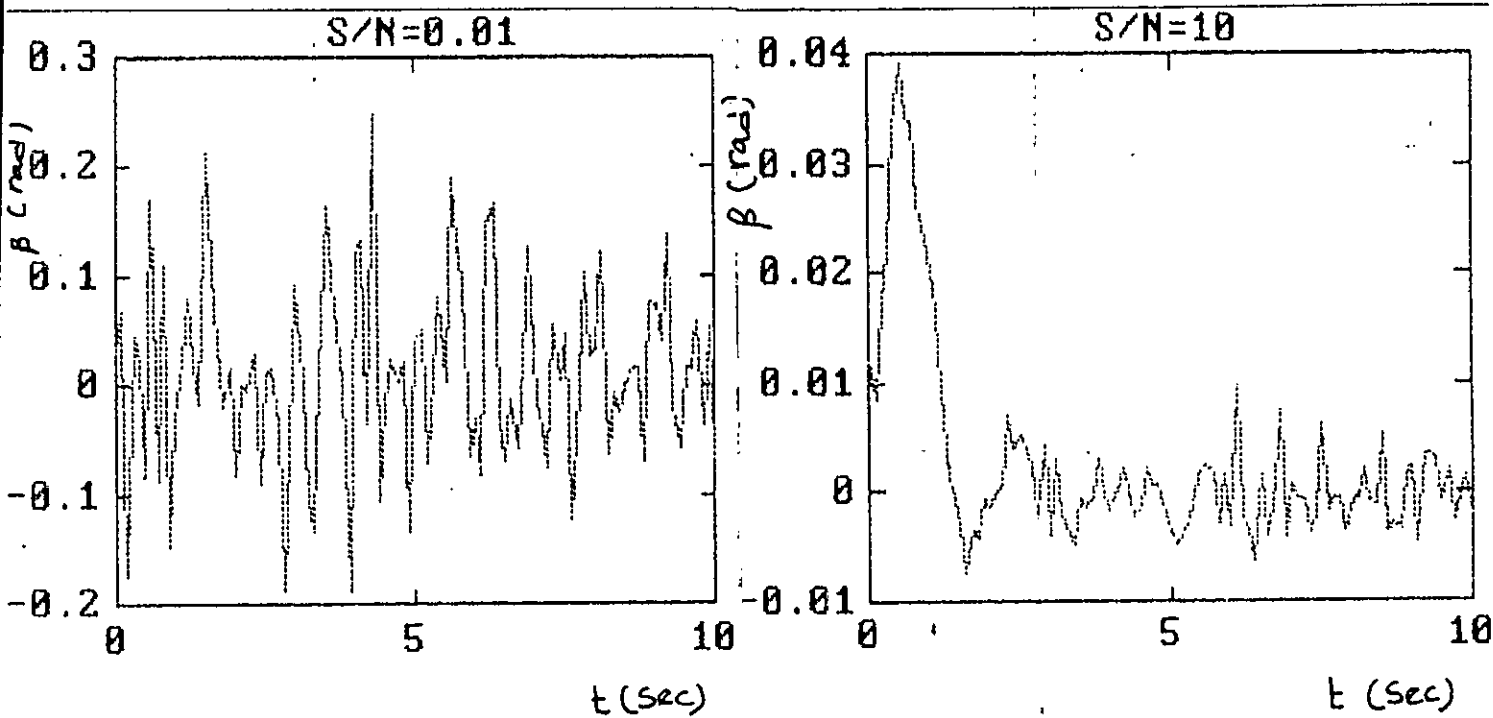


Figure 1: Réponse du système à une perturbation extérieure pour différents rapports signal sur bruit (S/N). L'état représenté est l'angle de glissement latéral ( $\beta$ ).

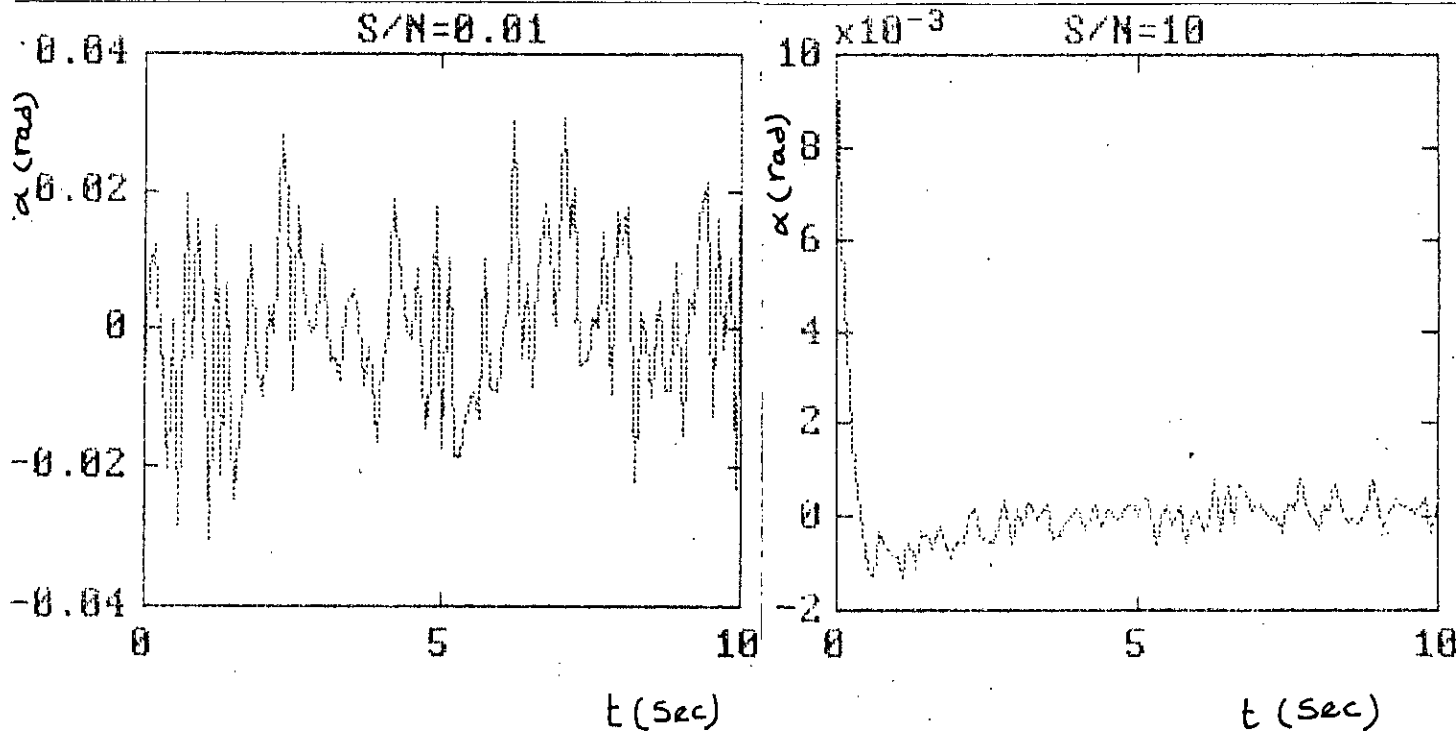


Figure 2: Réponse du système à une perturbation extérieure pour différents rapports signal sur bruit (S/N). L'état représenté est l'angle d'attaque ( $\alpha$ ).

Ces figures représentent les états du système en présence d'un bruit blanc. On constate qu'il est impossible de réaliser un retour d'état (ie:  $u=-Gx$ ) avec un vecteur d'état aléatoire. En effet, la régulation n'est pas réalisée du fait que les états du système varient toujours autour de zéro. De plus, les matrices de mesure  $C$  ne sont pas carrées; le vecteur d'état est non entièrement accessible à la mesure.

L'utilisation du filtre de Kalman devient nécessaire dans ce cas.



Vu qu'on ne travaille pas en temps réel et pour les mêmes raisons que dans la COLQ à horizon fini le filtre de Kalman asymptotique sera utilisé.

L'utilisation du filtre de Kalman et Bucy se fait en calculant le gain optimal du filtre.

#### 6.4 PRINCIPE DE SEPARATION:

L'estimation d'états dans la partie précédente est faite dans le but de réaliser la boucle de retour. Maintenant que l'on dispose d'une estimation du vecteur d'état on peut réaliser facilement le système de contrôle Régulateur-Estimateur.

Le gain de la boucle de retour peut être calculé en utilisant la COLQ déterministe.

La réponse du système à une perturbation est illustrée sur la figure 3 pour la dynamique latérale et la figure 4 pour la dynamique longitudinale.

Les covariances de l'erreur entre les mesures parfaites et les mesures bruitées deviennent:

Dynamique latérale:

. S/N = 0.0100

var =  

0.0332	0.0013	0.0543	0.0015	0.0092
--------	--------	--------	--------	--------

. S/N = 0.1000

var =  

0.0025	0.0003	0.0033	0.0004	0.0007
--------	--------	--------	--------	--------

. S/N = 1

var =  

1.0e-003 *				
0.4845	0.2167	0.9847	0.3287	0.1412

. S/N = 10

var =

1.0e-003 \*

0.0502	0.2137	.2892	0.3244	0.0164
--------	--------	-------	--------	--------

Dynamique longitudinale:

. S/N = 0.0100

var =

1.0e-003 \*

0.1082	0.0032	0.0234	0.0022
--------	--------	--------	--------

. S/N = 0.1000

var =

1.0e-004 \*

0.1121	0.0151	0.1211	0.0143
--------	--------	--------	--------

. S/N = 1

var =

1.0e-004 \*

0.0790	0.0148	0.1197	0.0141
--------	--------	--------	--------

. S/N = 10

var =

1.0e-004 \*

0.0790	0.0147	0.1196	0.0141
--------	--------	--------	--------

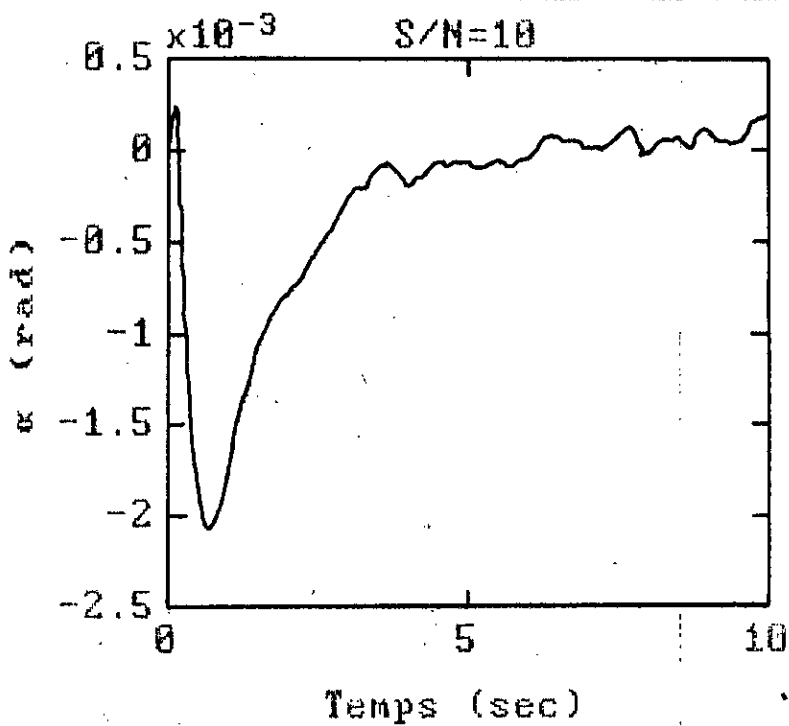
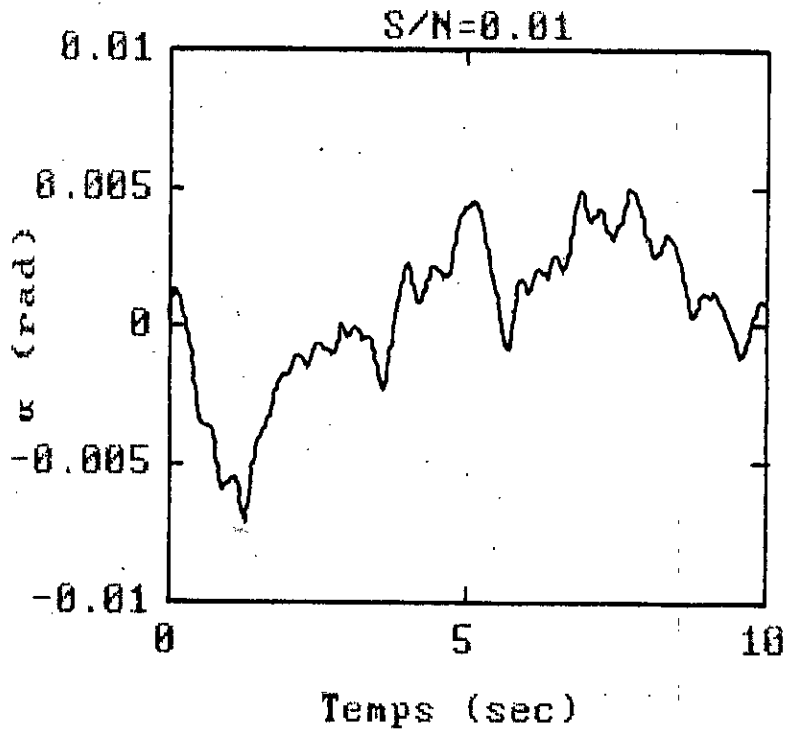


Figure 5: Réponse du système (angle d'attaque) à la même perturbation (Fig. 2) après filtrage.

Une comparaison entre les figures 1 et 2 avec les figures 3 et 4 montre que:

- Dans le premier cas ( pas de filtrage) le signal utile est complètement noyé dans le bruit. Les mesures dans ce cas sont complètement faussées surtout dans le cas où le rapport signal sur bruit est faible.

- Dans le deuxième cas le filtrage a permis d'avoir une estimation du signal utile toute en filtrant le bruit. Cependant, pour un rapport signal sur bruit médiocre le l'opération du filtrage permet d'améliorer ce rapport en réduisant l'effet du bruit. Pour un rapport signal sur bruit meilleur; 10 par exemple, on obtient une bonne estimation de l'état  $x$ .

- Le calcul des covariances de l'erreur entre les mesures estimées les mesures parfaites avant et après le filtrage montre l'effet de ce dernier sur la réduction des perturbations aléatoires. En effet, la covariance de l'erreur devient plus faible pour le même rapport signal sur bruit.

- En examinant les figures 4 et 5 on voit que le régulateur peut réaliser sa tâche de réduire les variations des états à zéro.

Maintenant, il est possible de commander l'avion en présence de conditions réelles de vol; bruit de dynamique, bruits de mesure, et perturbations.

Pour une perturbation donnée (rafale d'air, tourbillons..) la commande va agir sur les surfaces de commande convenable pour annuler les effets de ces perturbations après avoir estimée les états du système en utilisant le filtrage de Kalman linéaire.

### 6.5 CAS DES SYSTEMES DISCRETS:

Pour l'utilisation de système régulateur-observateur dans le cas discret on fera appel au filtre de Kalman discret. Suivant la disponibilité des sorties  $y(k)$  à l'instant  $k$  ou à l'instant  $k+1$  le filtre de Kalman estimateur, ou le filtre prédicteur à-un-pas sera utilisé.

Les états du système lors d'une utilisation d'un filtre prédicteur seront estimés (2.18) et par (2.21) pour le cas d'un filtre estimateur.

La réponse du système Observateur-Régulateur à une perturbation en présence de bruits aléatoires avant l'opération de filtrage est illustrée sur la figure 6; pour le mouvement latéral et la figure 7 pour le mouvement longitudinal

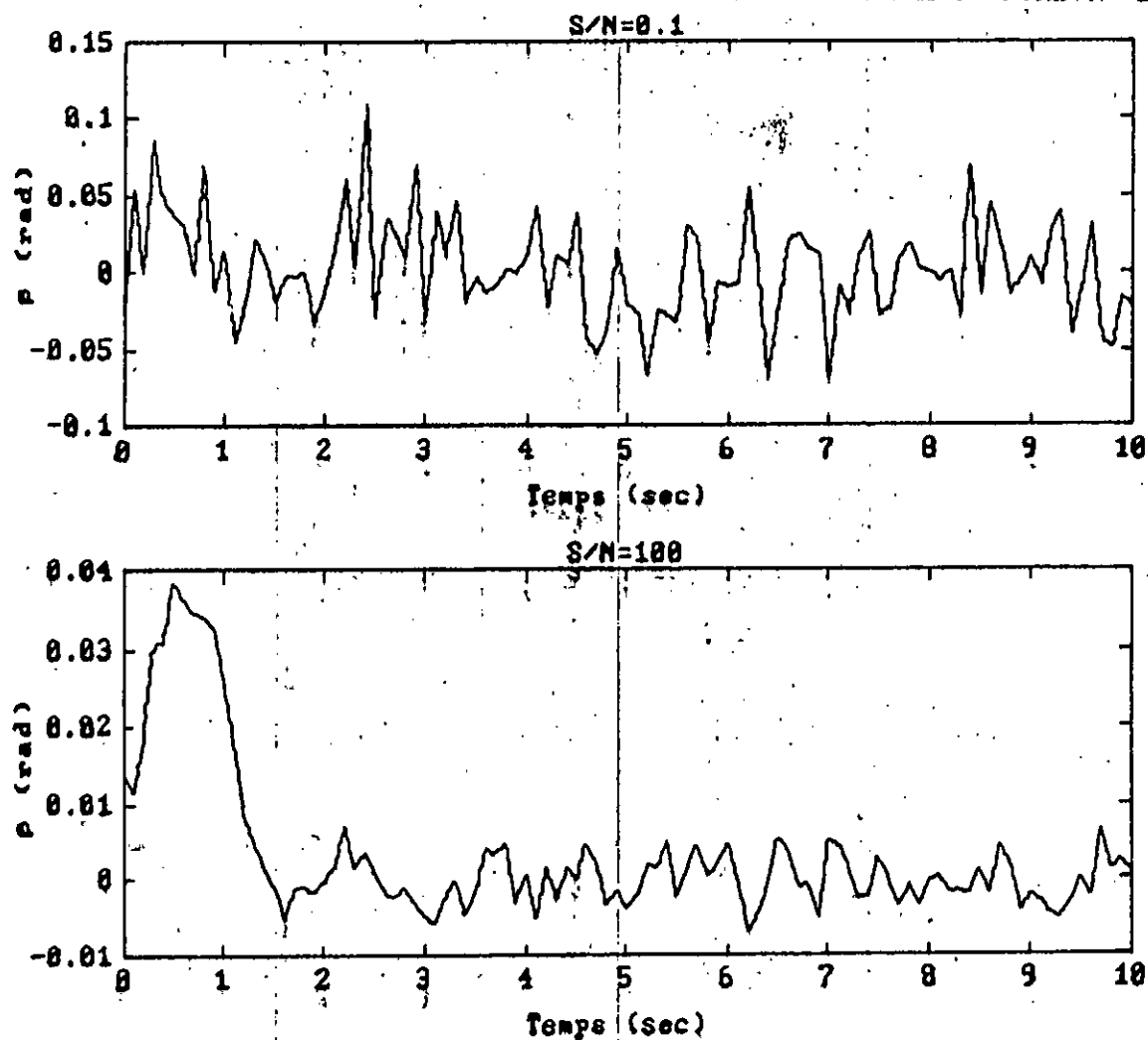


Figure 6: Réponse du système à une perturbation pour une période d'échantillonnage  $T=0.1$  sec. L'état représenté est l'angle de glissement latéral.

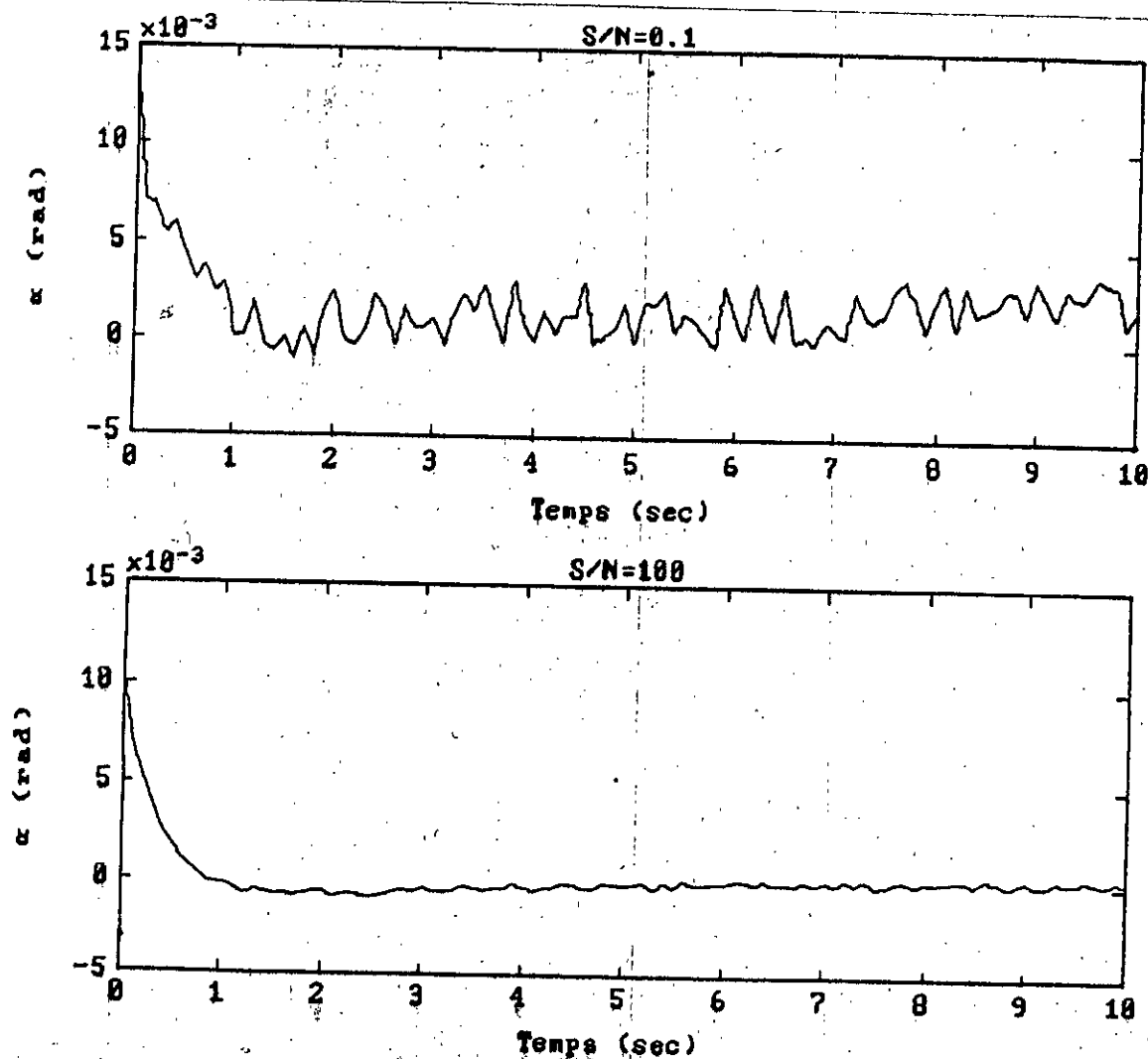


Figure 7: Réponse du système à une perturbation pour une période d'échantillonnage  $T=0.05$  sec. L'état représenté est l'angle d'attaque.

L'allure des états du régulateur après le filtrage sont donnés sur la figure 8 pour la dynamique latérale et la figure 9 pour la dynamique longitudinale.

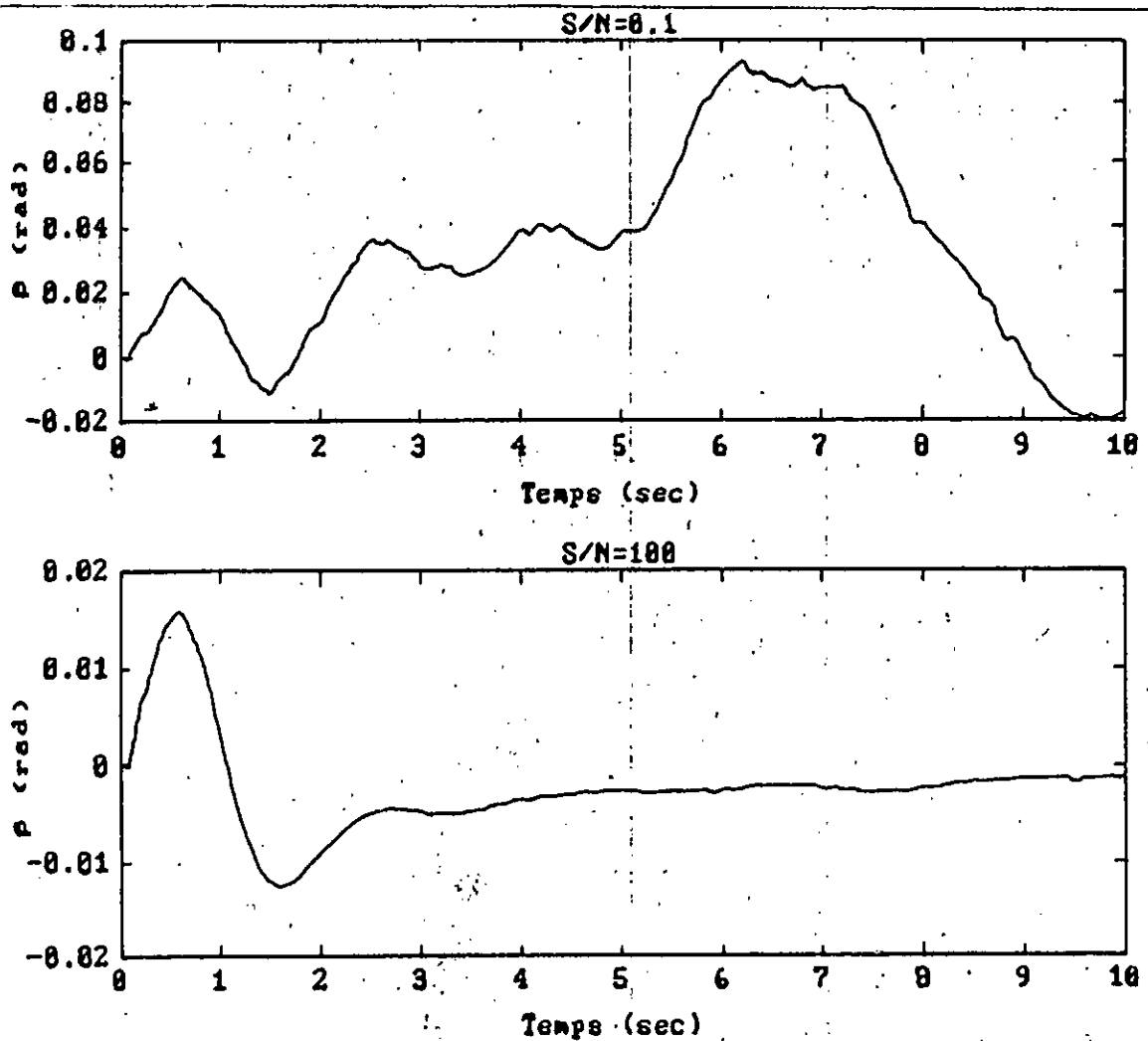


Figure 8: Réponse du système à une perturbation pour une période d'échantillonnage  $T=0.1$  sec après filtrage. L'état représenté est l'angle de glissement latéral.

### 6.6 CONCLUSION:

L'estimation d'état devient nécessaire lorsque la boucle de retour doit être réalisée avec la présence de bruits de dynamique et de mesure.

L'opération de filtrage a permis de réduire l'effet de bruits sur le processus. Si le rapport signal sur bruit est bon l'opération de filtrage permet d'avoir une bonne estimation de l'état  $x$ . Si ce dernier est médiocre le filtrage aura pour rôle de réduire l'effet de bruits.

Il est à noter qu'un rapport signal sur bruit très faible ne permet pas d'avoir une bonne estimation de l'état  $x$  et un rapport très élevé peut entraîner une matrice de covariance de bruits de mesure mal conditionnée (son déterminant devient proche de zéro); l'utilisation d'un filtre de Kalman réduit devient indispensable.

L'introduction du filtre de Kalman en cascade avec la boucle de retour a entraînée une légère modification dans l'emplacement des pôles du système.

Pour le cas discret la dynamique du système dépend du choix de la période d'échantillonnage. Elle est choisie de façon à réaliser un compromis entre un temps de réponse très élevé et un temps de réponse très faible.



## *Conclusion*

La théorie de la commande optimale linéaire est un outil mathématique très puissant pour la synthèse des systèmes de commandes linéaires dans le domaine temporel. En effet, elle permet de choisir le gain de la boucle fermée de façon à optimiser les performances du système.

La commande optimale nécessite en général une estimation d'état, cette dernière est réalisée à l'aide d'un observateur (déterministe ou stochastique).

Notons que le domaine de l'aviation est très vaste, et que le problème traité auparavant constitue une partie des problèmes existant dans ce champ d'activité.

Nous tenons à remarquer que cette étude peut être étendue en traitant le problème de poursuite avec un modèle incluant un terme qui traduit les perturbations.

Il est à noter aussi que la dynamique latérale et la dynamique longitudinale de l'avion peuvent être regroupées en un seul groupe de façon à utiliser un seul système de commande par la technique de la commande adaptative.

En fin, on peut dire que cette application nous a permis de s'introduire dans un domaine d'application très intéressant du côté pratique; le domaine de la commande optimale et l'estimation d'état et particulièrement la commande de l'avion.

A decorative border with a repeating pattern of small 'x' marks, forming a rectangular frame with rounded corners on the right side.

# *Annexes*

**ANNEXE A**

Soit le système continu décrit par:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

et le critère à minimiser lors de l'établissement de la commande optimale s'écrit:

$$J = \int_0^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (\text{A.2})$$

**A.1 DISCRETISATION DU SYSTEME:**

L'état du système à l'instant d'échantillonnage  $t_k$  et  $x(t_k)$ , l'état du système à un instant futur quelconque  $t > t_k$  est obtenu en résolvant (A.1).

$$x(t) = e^{A(t-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^t e^{A(t_k+1-s)} B u(s) ds \quad (\text{A.3})$$

l'état du système à l'instant d'échantillonnage suivant :  $t_{k+1}$  est donné par:

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-s)} B u(s) ds$$

La commande  $u$  est supposée constante entre les instants d'échantillonnage. Pour un échantillonnage périodique de période  $T_0$  et en mettant:

$t_{k+1} = k+1$   
 $t_k = k$   
 le système (A.1) devient :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$F = e^{AT_0} \quad , \quad G = \Gamma(T_0)B \quad (A.5)$$

$$\Gamma(T_0) = e^{At_0} \int_0^{T_0} e^{-Ar} dr$$

Remarque:

Pour les systèmes réels la matrice D est nulle car dans la commande par un ordinateur numérique la sortie y est d'abord mesurée et le signal de commande est ensuite généré, comme il y a toujours un retard significatif entre les deux phénomènes on ne peut avoir de relation directe entre y(k) et u(k).

**A.2 DISCRETISATION DU CRITERE:**

Posons dans (A.2)  $t_i = NT_0$  avec N nombre d'échantillons supposés très grand, le critère peut s'écrire ainsi:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (A.6)$$

avec:

$$kT_0 \leq t \leq (k+1)T_0$$

posons :

$$\Psi(t) = \int_{kT_0}^t e^{A(t-s)} B ds$$

D'après (A.3) on a:

$$x(t) = e^{A(t-kT_0)} x(kT_0) + \Psi(t) u(kT_0)$$

et l'équation (A.6) devient:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} \left[ (x^T(k) e^{A^T(t-kT_0)} + u^T(k) \Psi^T(k)) Q (e^{A(t-kT_0)} x(k) + \Psi(k) u(k)) + u^T(k) R u(k) \right] dt$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \int_k^{k+1} \left\{ x^T(t) e^{A^T(t-kT_0)} Q e^{A(t-kT_0)} x(k) + u^T(k) [R + \Psi^T(k) Q \Psi(k)] u(k) + 2x^T(k) e^{A^T(t-kT_0)} Q \Psi(k) u(k) \right\} dt$$

Enfin on peut mettre J sous la forme suivante :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[ x^T(k) Q_0 x(k) + 2x^T(k) S_0 u(k) + u^T(k) R_0 u(k) \right] \quad (\text{A.6})$$

avec:

$$S_0 = \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} e^{A^T(t-kT_0)} Q \Psi(kT_0) dt - \left[ \int_0^{T_0} \int_0^s e^{A^T r} Q e^{A r} dr ds \right] B \quad (\text{A.7})$$

$$Q_0 = \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} e^{A^T(t-kT_0)} Q e^{A(t-kT_0)} dt - \int_0^{T_0} e^{A^T s} Q e^{A s} ds \quad (\text{A.8})$$

et:

$$R_0 = R T_0 + \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} \Psi^T(kT_0) Q \Psi(kT_0) dt - R T_0 + B^T \left[ \int_0^{T_0} \int_0^r \int_0^s e^{A^T r} Q e^{A s} dz dr ds \right] B \quad (\text{A.9})$$

**A.3 CALCUL DES NOUVELLES MATRICES DE PONDERATION:**

Le calcul d'intégrales contenant des exponentielles avec un exposant matricielle est donné par le théorème de [Van-Loan, 1978] qui dit que : Si:  $n_1, n_2, n_3,$  et  $n_4$  sont des entiers positifs avec  $m$  leurs somme on définit une matrice  $E$  triangulaire de dimension  $(m \times m)$  tel que:

$$E = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & d_1 \\ 0 & A_2 & B_2 & C_2 \\ 0 & 0 & A_3 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix} \quad (A.10)$$

alors pour  $t \geq 0$  on a:

$$e^{st} = \begin{bmatrix} F_1(t) & G_1(t) & H_1(t) & L_1(t) \\ 0 & F_2(t) & G_2(t) & H_2(t) \\ 0 & 0 & F_3(t) & G_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & F_4(t) \end{bmatrix} \quad (A.11)$$

Avec:

$$F_j(t) = e^{A_j t}, \quad j=1..4$$

$$G_j(t) = \int_0^t e^{A_j(t-s)} B_j e^{A_{j+1}s} ds, \quad j=1..3$$

$$H_j(t) = \int_0^t e^{A_j(t-s)} C_j e^{A_{j+1}s} ds$$

$$+ \int_0^t \int_0^s e^{A_j(t-s)} B_j e^{A_{j+1}(s-r)} B_{j+1} e^{A_{j+2}r} dr ds, \quad j=1,2$$

$$L_1(t) = \int_0^t e^{A_1(t-s)} D_1 e^{A_4 s} ds$$

$$+ \int_0^t \int_0^s e^{A_1(t-s)} [C_1 e^{A_2(s-r)} B_3 + B_1 e^{A_2(s-r)} C_2] e^{A_4 r} dr ds \quad (A.13)$$

$$+ \int_0^t \int_0^s \int_0^r e^{A_1(t-s)} B_1 e^{A_2(s-r)} B_2 e^{A_3(r-z)} B_3 e^{A_4 z} dr ds dz$$

Pour calculer les formules (A.5, 7, 8, 9) on applique le théorème en prenant comme matrice à blocs triangulaires la matrice suivante:

$$E = \begin{bmatrix} -A^T & I & 0 & 0 \\ 0 & -A^T & Q & 0 \\ 0 & 0 & A & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Toutes les matrices présentes dans E sont des matrices carrées de même rang .

Si la matrice E est présentée sous la forme (A.11) alors on obtient:

$$\begin{aligned} F &= e^{AT_0} - F_3(T_0) \\ G &= \Gamma(T_0)B - G_3(T_0)B \\ Q_0 &= F_3^T(T_0)G_2(T_0) \\ S_0 &= F_3^T(T_0)H_2(T_0)B \\ R_0 &= RT_0 + B^T [F_3^T(T_0)L_1(T_0) + L_1^T(T_0)F_3(T_0)]B \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$



**ANNEXE B**

Pour obtenir le changement de variable cité dans le chapitre 2 on procède ainsi:

on pose:

$$y_1(t) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$y_1$ : représente les mesures non bruitées.  $C_{11}$  est une matrice réversible de rang  $m$ .

On a aussi:

$$y_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + v_2(t) \quad (\text{B.2})$$

$y_2$ : représente les mesures bruitées, et  $v_2$  représente le bruit de mesure.

Le nouveau vecteur d'état est donné par:

$$X(t) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} x(t) - Px(t)$$

avec  $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$

$$\text{et } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

A partir de l'équation (B.3) on obtient:

$$x(t) = P^{-1}X(t) \quad (\text{B.4})$$

En tenant compte de l'équation (2.60) on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= PAP^{-1}X(t) + PBu(t) + PGW(t) \\ y(t) &= CP^{-1}X(t) + V(t) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

en fin le modèle linéaire sera de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \bar{A}X(t) + \bar{B}u(t) + \bar{G}w(t) \\ y(t) &= \bar{C}X(t) + V(t) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

avec:

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, & V(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_2(t) \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, & \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \\ & & \bar{C} &= \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{11} = [C_{11}A_{11} - C_{12}A_{21}]$$

$$\bar{A}_{12} = -\bar{A}_{11}C_{12} + [C_{11}A_{12} + C_{12}A_{22}]$$

$$\bar{A}_{21} = A_{21}C_{11}^{-1}$$

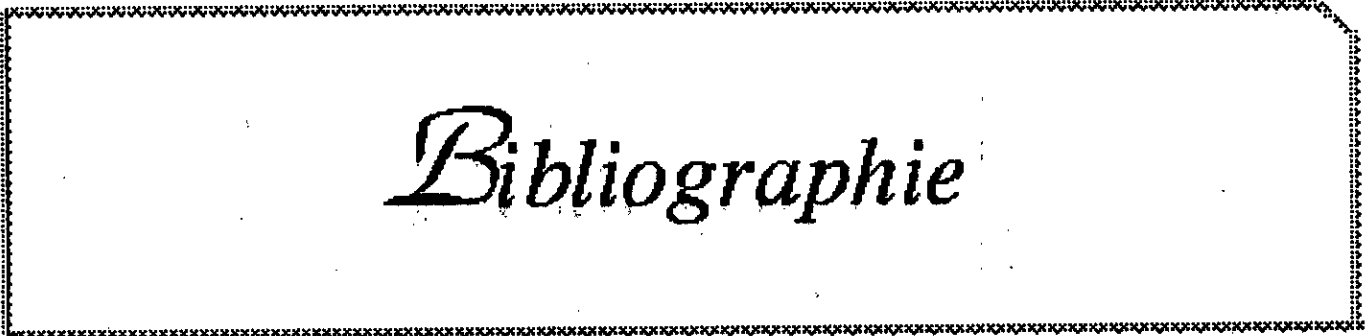
$$\bar{A}_{22} = A_{22} - A_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$$

$$\bar{B}_1 = C_{11}B_1 - C_{12}B_2 \quad ; \quad \bar{B}_2 = B_2$$

$$\bar{G}_1 = C_{11}G_1 + C_{12}G_2 \quad ; \quad \bar{G}_2 = G_2$$

$$\bar{C}_{11} = I_m \quad ; \quad \bar{C}_{12} = 0 \quad ; \quad \bar{C}_{21} = C_{21}C_{11}^{-1}$$

$$\bar{C}_{22} = C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$$



*Bibliographie*

- 
- [1] K.J Aström & B. Wittenmark. Computer Controlled Systems - Theory and Design. Prentice Hall, New Jersey, 1984.
  - [2] M. Athans & P.L. Falb. Optimal Control: An Introduction To The Theory And Its Applications. McGraw Hill Book Company, New York, 1966.
  - [3] P.Borne, G.Dauphin-Tauguy, J.P.Richard, F.Rattela, et I.Zambettakis. Commande et Optimisation des Processus. Edition TECHNIP, Paris, 1990.
  - [4] J.A.Borrie. Moderne Control Systems: A Manual Of Design Methods. Prentice Hall, Inc. New Jersey, 1986.
  - [5] S.Brosselin. Les commandes de Vol Electriques. Science & Vie N°807, Decembre 1984. PP 82-91.
  - [6] A.E.Bryson and Y.C.Ho. Applied Optimal Control, Optimisation, Estimation, and Control. Wiley, New York, 1975.
  - [7] J.J. D'Azzo and C.H.Houpis. Linear Control Systems Analysis and Design: Conventional and Design. McGraw Hill Book Company, New York, 1985
  - [8] B.Etkin. Dynamics of Flight. Jonh Wiley & Sons, 1982.
  - [9] C.Foullard, S.Gentil, et J.P.Sandraz. Commande et Régulation par Calculateur Nunérique. Eyrolles, 1977.
  - [10] B.Friedland. Control System Design: An Introduction To State Space Methods. McGraw Hill Book Company, New York, 1987.
  - [11] C.Goodwin & K.S.Sin. Adaptive Filtering Prediction And Control. Prentice Hall, 1984.
  - [12] N.Louam. An Overview Of Modern Linear Control and Estimation Methods. En voie de publication dans Algerian Journal Of Technology (AJOT). ENP, Alger.
  - [13] N.Louam. Discrete Linear Preview Control For Active Automatique Suspension Systems Via The Overtaking Optimality Criterion. SSA'92.
  - [14] N.Louam. Commande Pré-Informée. Algerian Journal Of Technology (AJOT), N°10, Series BSC. Alger, 1994.
  - [15] N.Louam. Cours De Commande Optimale. ENP, Alger, 1993.

- 
- [16] J.M.Mendel. Computational Requirements for Discrete Kalman Filter. IEEE Transactions On Automatic Control, Vol AC-16, N°6 December 1971.
  - [17] P.Naslin. Theorie de la commande et conduite optimale. Dunod, Paris, 1969.
  - [18] M.Rivoire et J.L.Ferrier. Cours d'automatique. Tome 3: Commande par ordinateur-identification. Eyrolles, 1990.
  - [19] A.P Sage. Optimum Systems Control. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.
  - [20] Van Loan.C. Computing Integrals Involving The Matrix Exponential. IEEE Transactions On Automatic Control. Vol AC-23, N°6 June 1978.
  - [21] M.Verhaegen and P.Van Dooren. Numerical Aspects Of Different Kalman Filter Implementations. IEEE Transactions On Automatic Control, Vol AC-31, N°10, October 1986.
  - [22] B.Yavorski, A.Detlaf. Aide mémoire de physique. Edition Mir, Moscou, 1986.