

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT: ELECTRONIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

ETUDE D'UN AMPLIFICATEUR DISTRIBUE

PROPOSE PAR :

Mr TRABELSI

ETUDIE PAR :

Mr BOUANANI Fouad

DIRIGE PAR :

Mr TRABELSI

{ R. ACSM
Z. TERRA
M. Trabelsi } edouard walid

PROMOTION 1994

(11/10/94)

DEDICACES

Je dedie ce modeste travail ,

à la mémoire de mon défunt père en
signe de reconnaissance pour tous les
sacrifices consentis à mon égard.

à ma belle mère qui n'a jamais cessé
de me soutenir pour aboutir à ma
formation.

à tous mes amis .

un exemple pratique.

~~P. 8~~

P. 12

←

P. 16

P. 18-19

P. 20

P. 33

P. 34

P

bib []

nono paraly d'impedance negative?

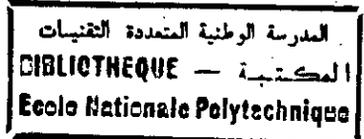
Figures

REMERCIEMENTS

Aux enseignants qui m'ont formé,
en particulier Mr TRABELSI qui a
contribué à la finalisation de ce
projet ,

toute ma gratitude.

SOMMAIRE



| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| I. INTRODUCTION..... | 01 |
| II. HISTORIQUE..... | 03 |
| III. AMPLIFICATEUR DISTRIBUE A ELEMENTS LOCALISES..... | 05 |
| 3.1 INTRODUCTION..... | 05 |
| 3.2 ANALYSE THEORIQUE..... | 10 |
| 3.2.1 ANALYSE POUR LES LIGNES K-CONSTANTES..... | 12 |
| 3.2.2 ANALYSE POUR LES LIGNES M-DERIVES..... | 19 |
| 3.3 MODIFICATION DES PARAMETRES INTRINSEQUES..... | 21 |
| 3.3.1 MODIFICATION DE R_{ds} | 22 |
| 3.3.2 MODIFICATION DE C_{gs} | 23 |
| IV. AMPLIFICATEUR DISTRIBUE A ELEMENTS DISTRIBUES..... | 25 |
| 4.1 INTRODUCTION..... | 25 |
| 4.2 THEORIE DE L'AMPLIFICATEUR DISTRIBUE A ELEMENTS DISTRIBUES..... | 26 |
| 4.3 ETUDE DE L'EVOLUTION DU GAIN..... | 28 |
| V. L'AMPLIFICATEUR DISTRIBUE AVEC DEUX LIGNES COUPLEES ACTIVEMENT..... | 33 |
| 5.1 PRESENTATION DU MODELE..... | 33 |
| 5.2 THEORIE DE L'AMPLIFICATEUR DISTRIBUE AVEC DEUX LIGNES COUPLEES ACTIVEMENT..... | 34 |
| 5.3 DISPOSITIF ACTIF ASSOCIE AUX DEUX SELFS L_e , L_s | 37 |

5.4 ADMITTANCE D'ENTREE ET DE SORTIE DU QUADRIPOLE

TOTAL.....40

VI. CONCLUSION

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIES

ANNEXE1 : CALCUL DE NOPT

ANNEXE2 : RESOLUTION DU SYSTEME D'EQUATIONS

ANNEXE3 : DEMONSTRATION DE L'EQUATION 5.7 DU CHAPITRE 5

Le développement continu des télécommunications fait que les transmissions doivent se faire à des fréquences de plus en plus élevées. De ce fait, il est nécessaire de disposer d'appareils fonctionnant à ces fréquences. C'est notamment le cas pour les amplificateurs.

Or cette expansion dans le domaine fréquentiel implique que l'on doit disposer d'amplificateurs pour chaque bande de fréquence .

Ce qui veut dire que l'on aura besoin d'un nombre croissant de ces dispositifs. L'amplificateur distribué apporte une solution à ce problème .

En effet, un amplificateur distribué est un appareil qui peut fonctionner sur une large bande de fréquence.

L'application de l'ampli-distribué aux micro-ondes progresse de plus en plus et la recherche d'une haute performance de l'amplificateur à impluser dans les systèmes radar est une grande motivation pour l'amplificateur distribué.

Des efforts théoriques considérables se font dans le domaine fréquentiel, cependant une étude temporelle n'est pas sans difficultés car il y a un nombre de facteurs considérables qu'il faut prendre en considération, par exemple la non linéarité, l'influence des interférences et la réflexion de la charge.

Notre étude se penche sur l'étude théorique dans trois modèles d'ampli-distribué et l'évaluation de ces performances.

Le chapitre 1 comprend une brève introduction qui situe le contexte de l'amplification dans le monde des télécommunications.

Le chapitre 2 retrace l'histoire de l'amplification distribuée.

Le chapitre 3 comprend une étude approfondie de l'amplificateur distribué à éléments localisés.

Le chapitre 4 retrace l'étude de l'amplificateur distribué à éléments distribués.

Le chapitre 5 comporte une étude sur l'amplification utilisant deux lignes couplées activement.

Le dernier chapitre 6 contient les conclusions à tirer de l'étude et quelques suggestions pour poursuivre ce travail.

L'idée de construire une ligne artificielle en incluant les capacités des dispositifs actifs est due à D.J. ZOBEL [5] en 1924. Cela nous permet de dire que le principe de l'amplification distribuée est assez ancien.

Cette idée a été utilisée pour la première fois par W.S. FERDIVAL [6] en 1936. Malgré les avantages que l'amplification distribuée procure, elle est restée, de manière assez inexploitée, non exploitée pendant plus de 10 ans. Il a fallu attendre 1948 avant de retrouver de nouvelles personnes qui se soient intéressées à ce principe.

Le terme " Amplificateur distribué " leur est dû [7].

Les amplificateurs construits à cette époque comportaient des tubes comme composants actifs. Pour cela, ils étaient volumineux et consommaient beaucoup d'énergie.

Ensuite est venue l'ère des transistors. Les amplificateurs distribués construits à l'aide de transistors à effet de champ (FET) permettaient (et permettent toujours) d'obtenir une bande passante de 10 GHz et un gain de 7 dB. Les amplificateurs distribués utilisant des transistors MESFET ont fait l'objet d'une très grande attention à cause de la facilité qu'ils procurent à la réalisation des circuits monolithiques. Par après, les HEMT's ont permis d'atteindre une bande passante de 20 GHz et un gain de 10 dB.

Finalement, on s'est mis à travailler autour des transistors, toujours pour augmenter la bande passante et le gain. Actuellement, on arrive à construire des amplificateurs distribués qui possèdent une bande passante qui s'étend de 1 à 40 GHz, soit 39 GHz !!! [8].

Il est également intéressant de signaler que, si l'amplification distribuée est utilisée pour étendre vers le haut la bande de fréquence utilisables, il n'en a pas toujours été ainsi.

En effet, la toute première application de ce type d'amplificateur a été de construire des appareils à large bande aux fréquences vidéos (500 - 1000 MHz). Pourquoi ? Parce qu'il est difficile de construire des tubes à ondes progressives à de telles fréquences . La raison en est la suivante. Comme les tubes à ondes progressives doivent être longs par rapport à la longueur d'onde, ils prendraient des dimensions démesurées s'ils étaient conçus pour fonctionner à des fréquences inférieures au GHz . L'amplification distribuée apportait alors une solution élégante à ce problème.

Elle a permis de réaliser un amplificateur à large bande à des fréquences relativement basses.

3.1 INTRODUCTION

Différents auteurs ont montré que la fréquence maximale de fonctionnement d'un amplificateur conventionnel est déterminée par un facteur qui est proportionnel au rapport de la transconductance du transistor à la racine carrée du produit des capacités d'entrée et de sortie. La simple mise en parallèle des dispositifs d'amplification ne permet pas de transgresser cette règle : L'augmentation du gain est compensée par l'augmentation des capacités. Malgré cela, une mise en parallèle intelligente permet d'augmenter le gain disponible [1].

L'amplificateur distribué permet de contourner ce problème en combinant les dispositifs actifs de telle manière que les gains des différents transistors puissent être additionnés sans limite! sans affecter les impédances d'entrées et de sortie.

En fait on va créer une ligne de transmission artificielle reliant les transistors entre eux.

On va utiliser les capacités présentes dans ceux-ci et les inductances qui peuvent être formées par les lignes de transmissions à proprement parler qui relient les transistors entre eux.

Nous pouvons ainsi dire que les lignes artificielles construites de cette manière forment des lignes de transmission distribuées. Celles-ci sont couplées entre elles par la transconductance des dispositifs actifs.

De manière simplifiée, on obtient le circuit suivant:

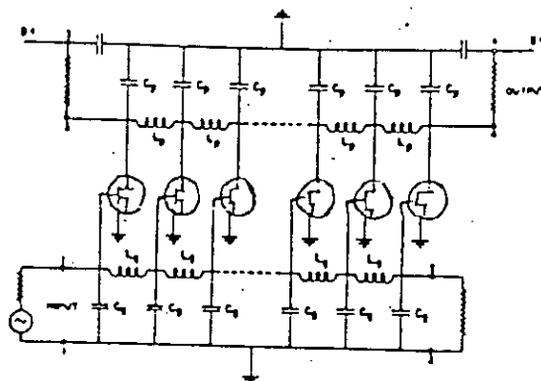


Fig. 1—Basic distributed amplifier.

Amplificateur distribué de base d'après [2]

FIG (3.1)

Entre les accès 1-1 et 2-2 il y a une ligne de transmission artificielle dont les éléments shunts sont les capacités grille-source des transistors et les éléments séries sont les inductances des lignes qui les relient. Entre les accès 3-3 et 4-4, la ligne est constituée de capacités drain-source et des lignes.

La charge connectée en 2-2 est appelée « terminaison de grille ». Celle connectée en 3-3 « terminaison inverse ». Toutes deux sont adaptées. Elles servent à absorber l'onde qui y arrive pour éviter qu'il ne se produise pas une réflexion et par la suite une dégradation du signal de sortie.

Les lignes artificielles ainsi construites peuvent avoir certaines caractéristiques, suivent ce que l'on souhaite. Ainsi si l'on réalise ce qui est montré par le schéma de la figure 3.1, on va construire une ligne dite " K-constante".

Celle-ci possède un caractère passe-bas. Au contraire, si on ajoute d'autres éléments à la branche shunt, on obtient de cette manière une ligne dite " m-dérivée ". Cette deuxième possède une caractéristique différente, dépendante des éléments qui la constituent. En générale, la ligne m-dérivée possède une caractéristique passe-bas ou passe-bande dans la région considérée.



A proprement parler, ce qui est expliqué ci-dessus ne constitue pas le schéma équivalent d'une ligne. En effet, les éléments ne sont pas purement distribués, et leur nombre n'est pas infini. Si l'inductance peut être distribuée, il ne peut pas être question pour la capacité; celle-ci se trouve dans le transistor et nulle part ailleurs.

D'autre part, en technologie microruban, les inductances sont des lignes courtes par rapport à la longueur d'onde. Elles ne peuvent donc même pas être considérées comme des éléments distribués. Mais à défaut de mieux, nous nous contenterons de cette approximation. La plupart des auteurs considèrent même qu'il s'agit de filtres plutôt que de lignes.

Cette dernière hypothèse peut être faite à condition que la longueur d'onde de travail soit beaucoup plus grande que la longueur de l'élément.

Ceci est valable lorsque l'élément est de l'ordre de dix fois plus petit que la longueur d'onde.

Dans ce cas, on parle de circuit localisé et considérer cette ligne comme un filtre n'est pas une erreur.

On appelle " ligne de grille " la ligne formée par les inductances et les capacités de grille des transistors.

La ligne de drain est formée des inductances et des capacités de drain.

Les impedances caractéristiques de telles lignes valent :

$$Z_{og} = \sqrt{\frac{L_g}{C_g}}$$

pour la ligne de grille et :

$$Z_{od} = \sqrt{\frac{L_d}{C_d}}$$

pour la ligne de drain .

On peut déjà remarquer une chose très importante :

Les impedances de ces lignes sont indépendantes du nombre de dispositifs actifs connectés.

Une brève explication du principe de l'amplification distribuée est la suivante :

Le signal appliqué à l'entrée de l'amplificateur traverse la ligne de grille jusqu'à la terminaison de grille, où il est absorbé. Pendant qu'il se propage, chaque grille des transistors est excitée et transmet ce signal à la ligne de drain au travers des transconductances. Si les lignes de grille et de drain ont la même vitesse de propagation, alors les signaux vont s'additionner au cours de la propagation .

Les signaux retrogrades ne sont pas en phase et ne s'additionnent pas . De toute façon, ils sont absorbés par la terminaison inverse.

3.2 ANALYSE THEORIQUE

Deux types différents d'analyse théorique sont développés pour étudier l'amplificateur distribuée à éléments localisés, suivant que l'on considère que la ligne artificielle est une ligne K-constante ou bien une ligne m-dérivée.

La ligne K-constante (fig.3.2) possède une inductance série et une capacité shunt, formant ainsi une ligne de transmission classique tandis que la ligne m-dérivée (fig.3.3) possède une inductance comme élément série et une capacité en série ou en parallèle avec d'autres éléments comme élément shunt.

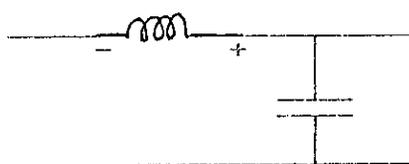


FIG 3.2

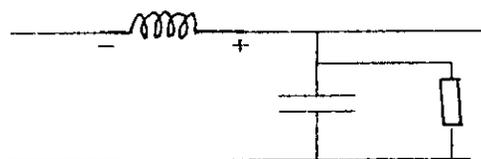


FIG 3.3

On peut noter comme différences entre ces lignes que la variation de la transmittance en fonction de la fréquence n'est pas la même.

Si la première a toujours un caractère passe-bas, la seconde peut présenter un caractère soit passe-bas, soit passe bande, suivant la nature et les valeurs des éléments shunts, comme déjà signalé plus haut .

Il faut considérer l'un ou l'autre type de ligne suivant la complexité du schéma équivalent du transistor utilisé. Un modèle simple de transistor conduit à l'utilisation des lignes K-constantes, tandis qu'un modèle plus compliqué conduit à l'utilisation des lignes m-dérivées.

La figure 3.4 représente un modèle de transistor conduisant à l'utilisation de lignes K-constantes, tandis que la fig 3.5 représente un modèle qui conduit à l'utilisation de lignes m-dérivées.

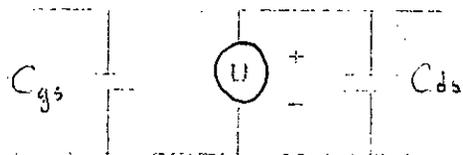


FIG 3.4

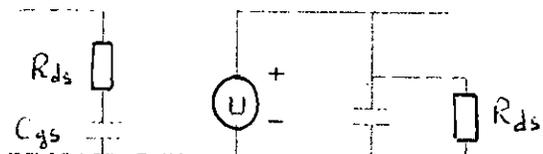


FIG 3.5

Modèles de transistors pour les deux types de ligne

3.2.1 ANALYSE POUR LES LIGNES K-CONSTANTES

Le schéma de la figure 3.1 peut se présenter par la figure suivante :

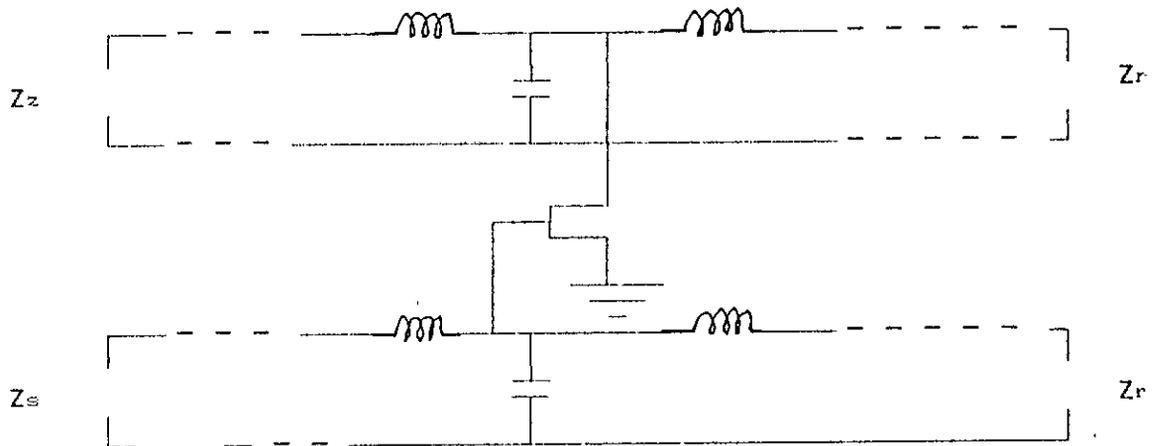


FIG 3.6 : Schema d'un ampli distribué

On note que les lignes de grille et de drain sont séparées . Le couplage entre lignes est conservé en introduisant des sources de courant commandées.

A noter qu'on impose ici l'hypothèse d'unilatéralité des transistors ($S_{12}=0$) en effet on considère que la ligne de grille n'est pas influencée par la ligne de drain.

Handwritten mark: A large, stylized handwritten symbol or signature, possibly a stylized 'S' or 'Z', is present on the left side of the page.

On peut se permettre de faire cette hypothèse car le paramètre S_{12} des transistors est généralement petit. Cela simplifie l'étude dans une première approche.

Si on note $\theta_d = A_d + j \Phi_d$ l'exposant complexe de propagation de la ligne de drain et $\theta_g = A_g + j \Phi_g$ celui de la ligne de grille, on peut arriver à l'expression du gain en puissance [2].

$$G = \frac{g_m^2 R_{o1} R_{o2} \sinh^2 \left[\frac{n}{2} (A_d - A_g) \right] e^{-n(A_d - A_g)}}{4 \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \sinh^2 \left[\frac{A_d - A_g}{2} \right]}$$

où ;

$$R_{o1} = \sqrt{\frac{L_g}{C_g}}$$

$$R_{o2} = \sqrt{\frac{L_d}{C_d}}$$

$$\omega_g = (R_1 C_{gs})^{-1}$$

ω_c : fréquence de coupure des lignes.

On a supposé que les lignes de grille et de drain avaient même fréquence de coupure et même exposant de propagation . Elles ont donc même vitesse de phase. Le gain en tension est donné par la racine carrée de G .

De l'expression du gain, on peut montrer (voir annexe 1) que le nombre N_{opt} de transistors qui maximise G est donnée par ,

$$N_{opt} = \frac{\ln\left(\frac{A_d}{A_g}\right)}{A_d - A_g}$$

On constate donc que le nombre de dispositifs actifs ne peut croître indéfiniment, sous peine de voir le gain se dégrader. Cela peut s'expliquer simplement:

- d'une part, au fur et à mesure que le signal se propage sur la ligne de grille, chaque transistor reçoit moins de puissance que le précédent.

- d'autre part, lorsque le nombre de transistors augmente, la longueur de la ligne de drain augmente et le signal amplifié est atténué.

Il existe donc un nombre optimal de transistors au-delà duquel l'adjonction d'un dispositif actif supplémentaire ne conduira plus à une augmentation supplémentaire du gain.

Les atténuations dans les lignes de grille et de drain sont des facteurs importants de l'amplification distribuée.

En effet il est évident que si ces lignes ne possèdent pas d'atténuation, on pourrait obtenir n'importe quelle valeur de gain, aussi grande soit elle, il suffirait d'augmenter le nombre de transistors.

Il convient de préciser les différentes sources d'atténuation. Une partie de l'atténuation est due à la présence d'effets résistifs inévitables (mais non présents dans le cas de lignes K-constantes), tandis qu'une autre partie tient au caractère passe-bas des lignes.

Quand bien même il n'y aurait pas de résistance dans la ligne, l'amplificateur distribué qui utiliserait un tel schéma de lignes ne serait pas à bande passante infinie. Ceci est dû à la présence de la fréquence de coupure.

Au-delà de cette fréquence, il y a toujours atténuation.

Si on trace les graphes de ces atténuations ainsi que ceux du gain on obtient les résultats présents aux pages suivantes fig 3.7 et 3.8 pour les atténuations et fig 3.9 et 3.10 pour les gains .

Les figures sont agencées de la manière indiquée ci-dessous.

Atténuation de la ligne de grille

Atténuation de la ligne de drain

et page suivante :

Gain en tension

Gain en tension (dB)

On peut déjà noter que les lignes de grille et de drain ont la même atténuation . C'est tout à fait normal, car elles ont les mêmes paramètres.

La décroissance du gain en fonction de la fréquence est uniquement due au caractère passe-bas des lignes de grille et de drain .

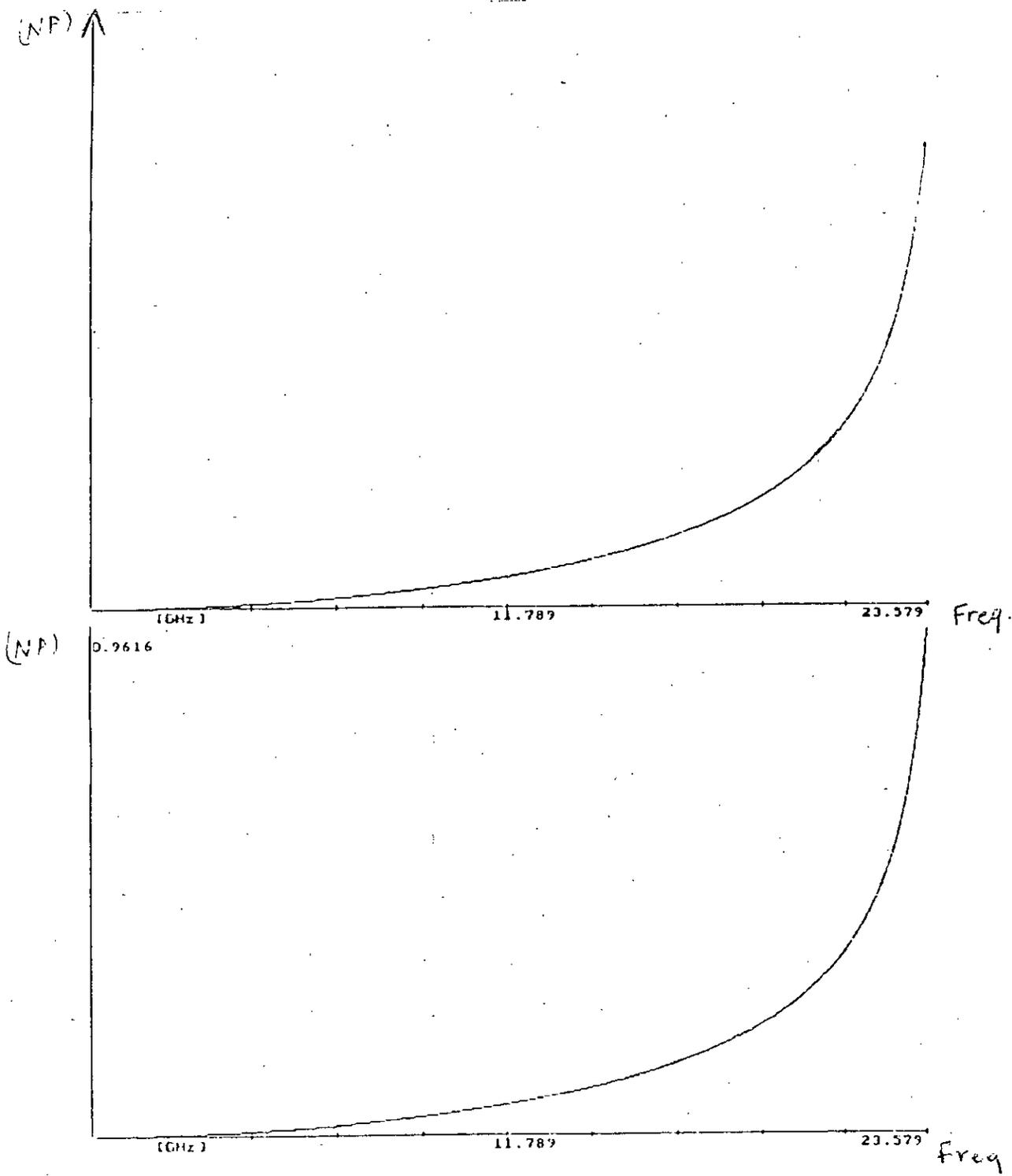


Fig. 3.8.

Attenuations des lignes de grille et de drain

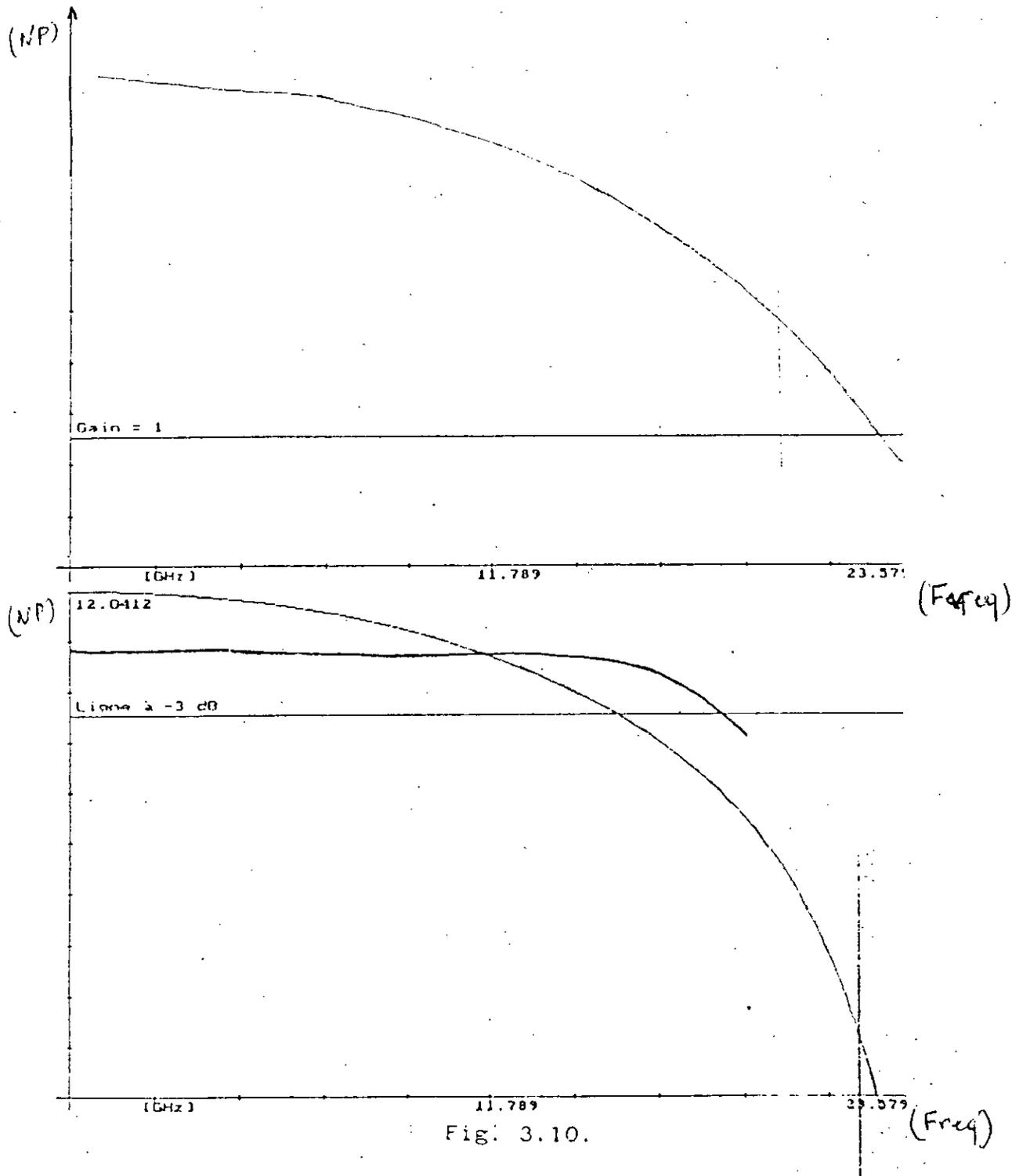


Fig. 3.10.

Gain en tension
Gain en tension en dB

Si on compare la courbe théorique du gain à la courbe que les auteurs de [2] ont obtenue pour l'amplificateur distribué qui possède les caractéristiques utilisées pour la simulation (courbe en gras) il faut noter les points suivants:

- Le gain DC est surestimé,
- Le gain plonge trop vite.

Ceci est dû principalement au fait suivant:

Si le schéma équivalent de la ligne de grille s'accorde bien avec le schéma de la ligne K-constante, il n'en est pas de même pour la ligne de drain. Le schéma équivalent de cette seconde s'approche plus de la ligne m-dérivée. Il faut donc reprendre l'étude pour cette configuration.

3.2.2 ANALYSE POUR LES LIGNES M-DERIVEES

On se ramène alors à l'étude du schéma suivant :

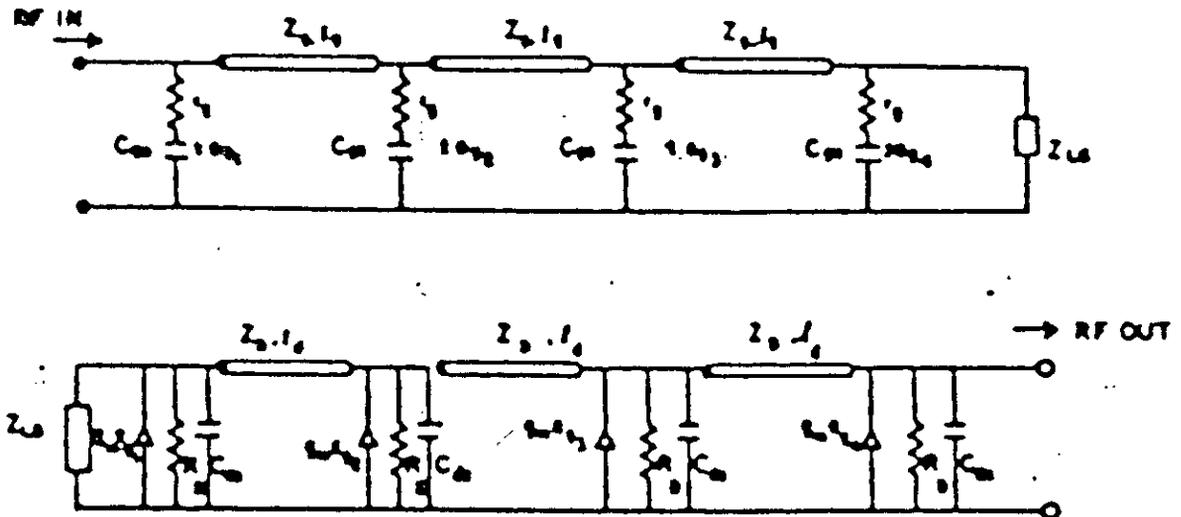


FIG 3.11

Modèles de ligne utilisées pour les
tr

Si l'atténuation de la ligne de grille ne change pas, l'atténuation de la ligne de drain devient [2]

$$A_d = \frac{\frac{\omega_d}{\omega_c}}{\sqrt{1 - X_k^2}}$$

L'expression du gain reste semblable à l'expression précédemment établie. La simulation numérique donne les courbes suivantes (fig 3.12 à 3.15).

On remarque tout de suite que la courbe simulée du gain se rapproche beaucoup mieux de la courbe réelle que lors de la simulation précédente.

Ceci est vrai même dans le cas d'une des hypothèses utilisées, à savoir celle qui dit que les paramètres intrinsèques des transistors sont constants en fonction de la fréquence.

Ceci n'est évidemment pas vrai en réalité. Il suffit de consulter les " data sheets " de transistors pour s'en rendre compte.

Fig. 3.12.

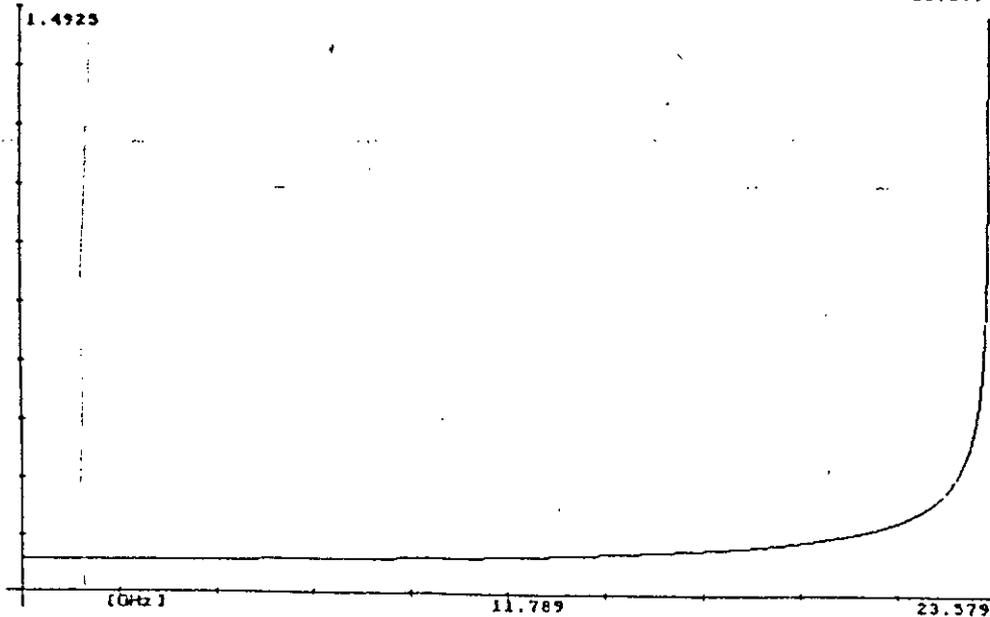
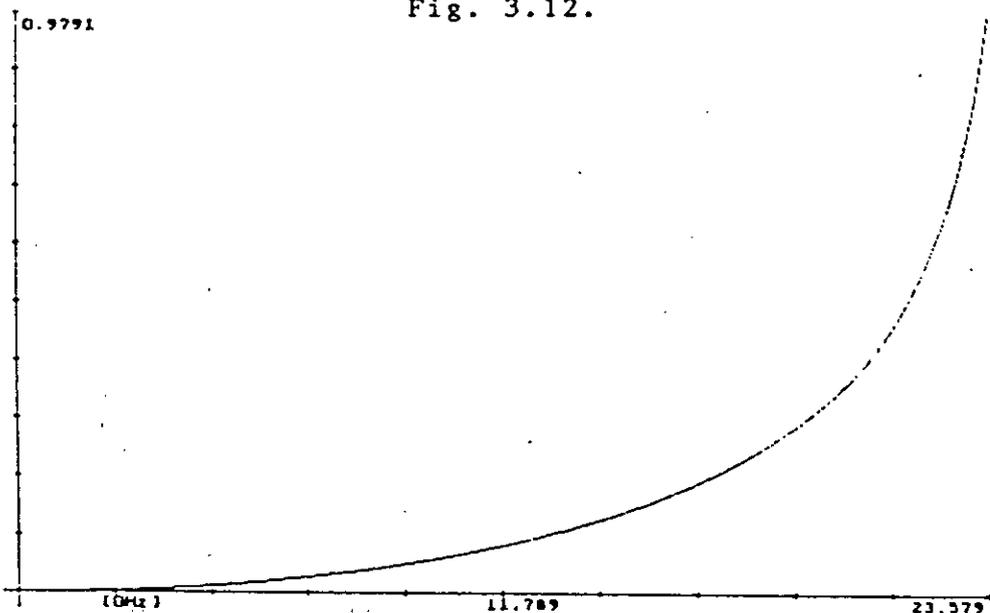


Fig. 3.13

Fig. 3.14

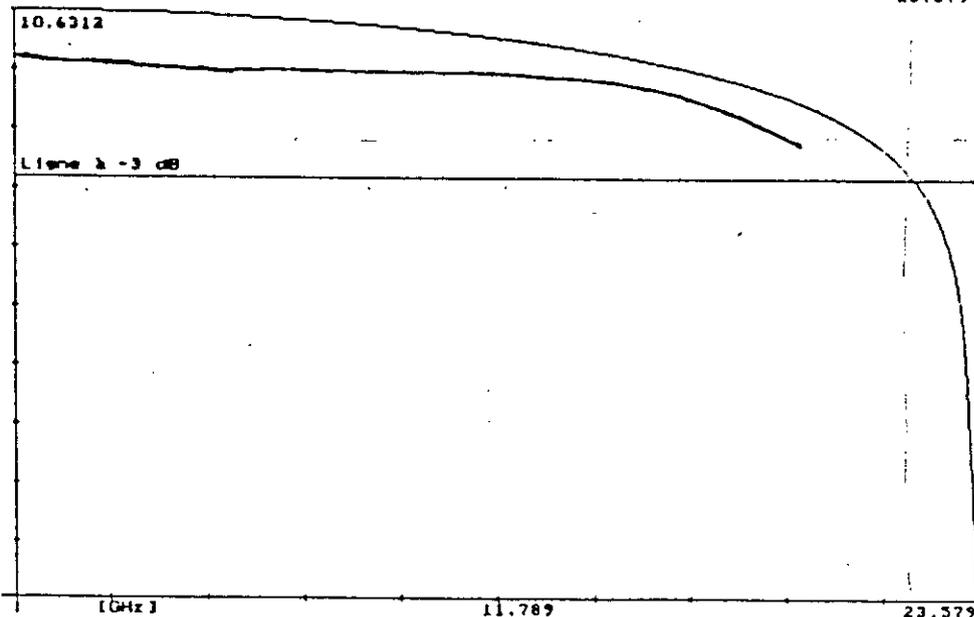
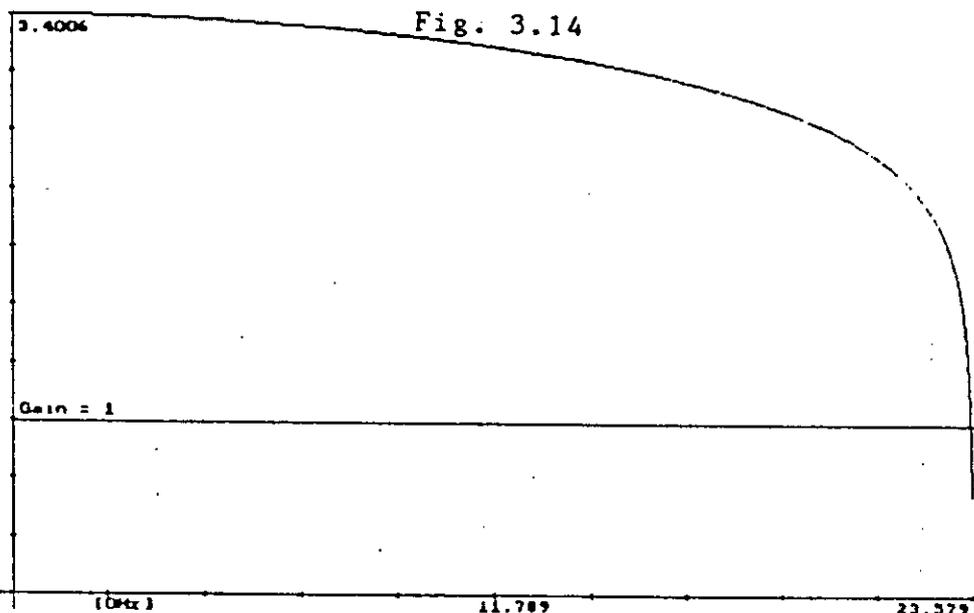


Fig. 3.15

On remarque également quelque chose de très important: L'atténuation de la ligne de drain n'est pas nulle à la fréquence nulle. C'est donc elle qui regit le gain DC de l'amplificateur distribué. D'autre part, cette atténuation reste quasi constante en fonction de la fréquence jusqu'en $X_k = 0.9$.

Par contre, l'atténuation de la ligne de grille croît de manière plus importante avec la fréquence. Ces deux observations nous permettent d'énoncer le principe suivant :

Si on souhaite augmenter les performances fréquentielles d'un amplificateur distribué, il faut diminuer l'atténuation de la ligne de grille. Par contre, si on veut augmenter le gain DC, c'est l'atténuation de drain qu'il faut s'attacher à diminuer.

3.3 MODIFICATION DES PARAMETRES INTRINSEQUES

Nous allons à présent étudier la sensibilité du gain d'un amplificateur distribué face à des modifications des paramètres intrinseques des transistors qui le composent. Cette étude sera effectuée pour le second modèle qui a été développé précédemment.

Nous allons étudier deux modifications de paramètres à savoir:

- Une modification de R_{ds}
- Une modification de C_{gs}

Ces modifications de paramètres seront faites de manière indépendante, afin de pouvoir garder une possibilité de comparer les effets causés.

3.3.1 MODIFICATION DE R_{ds}

Si l'on fait varier la résistance drain-source, on observe les modifications suivantes:

- La fréquence de coupure reste inchangée.
- Le gain DC augmente.
- Le gain diminue moins vite.

au fur et à mesure de l'augmentation de R_{ds} .

Ces modifications peuvent s'expliquer de la manière suivante.

La fréquence de coupure reste inchangée car celle-ci ne dépend que des paramètres réactifs.

Le gain DC augmente car une augmentation de R_{ds} correspond une diminution des pertes.

En effet cette résistance drain-source est une résistance placée en parallèle dans le schéma équivalent. A une augmentation de R_{ds} correspond donc une diminution des pertes. Comme l'atténuation de la ligne de drain diminue à fréquence nulle, le gain DC augmente.

Enfin le gain diminue moins vite en fonction de la fréquence pour la même raison que ci-dessus: les pertes augmentent moins vite.

On remarque également que la modification de la forme de la courbe du gain se produit essentiellement dans les hautes fréquences, confirmant ainsi le fait que ce sont les paramètres de la ligne de grille qui sont les principaux responsables de l'évolution du gain sur presque toute plage de fréquence.

Sur la figure (3.42), les courbes illustrent la variation du gain pour une résistance drain-source variant de 100 à 2000 Ohms.

3.3.2 MODIFICATION DE C_{gs}

Si l'on fait varier la capacité grille-source du transistor, on remarque les modifications suivantes:

- La fréquence de coupure diminue,
 - Le gain DC augmente
- avec l'augmentation de la capacité.

Il convient de préciser les paramètres qui varient lorsqu'on fait varier C_{gs} . En effet, on peut imposer lors de cette modification que l'impédance caractéristique des lignes restent égales à 50 Ω ou non.

On peut également imposer que la vitesse de phase des lignes restent inchangée.

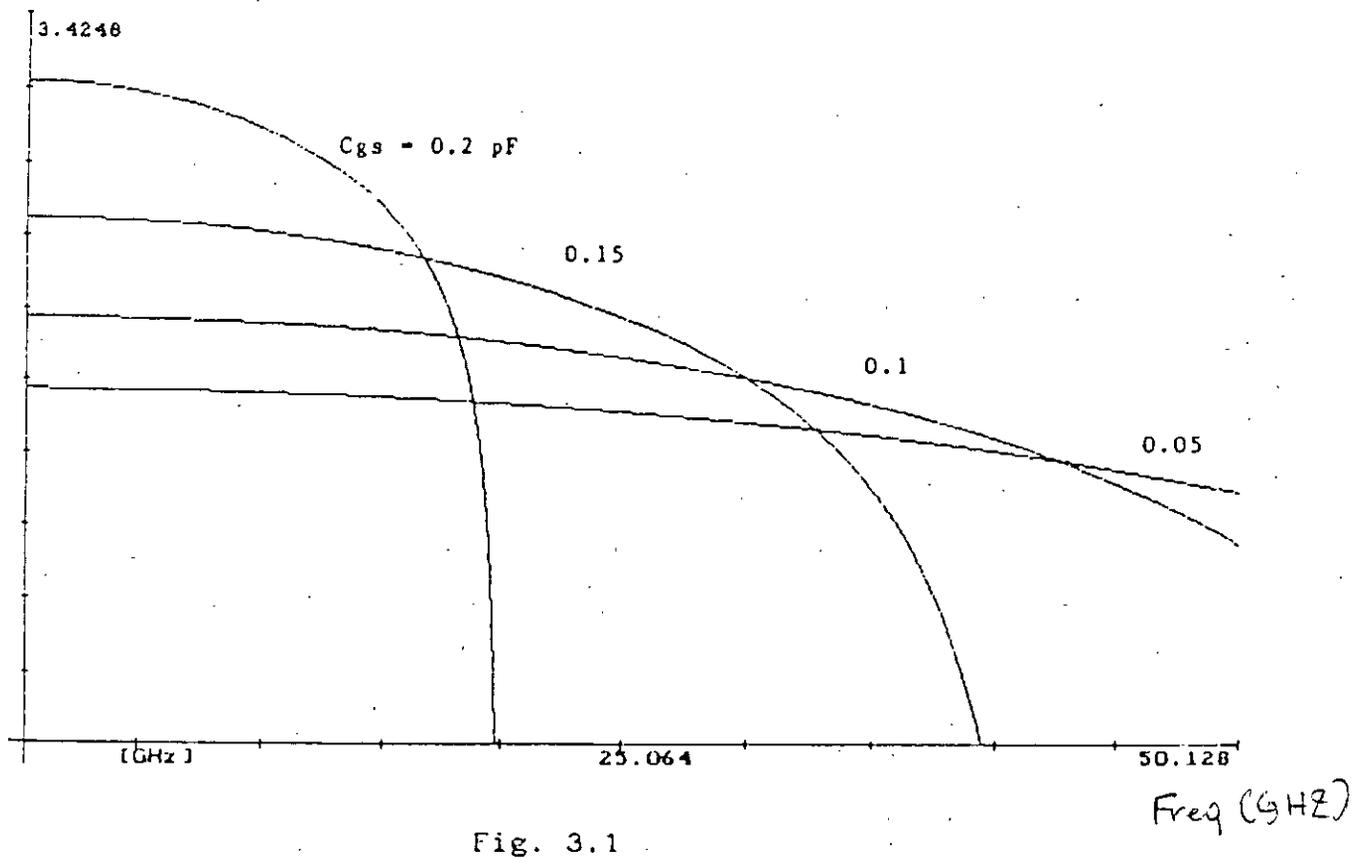
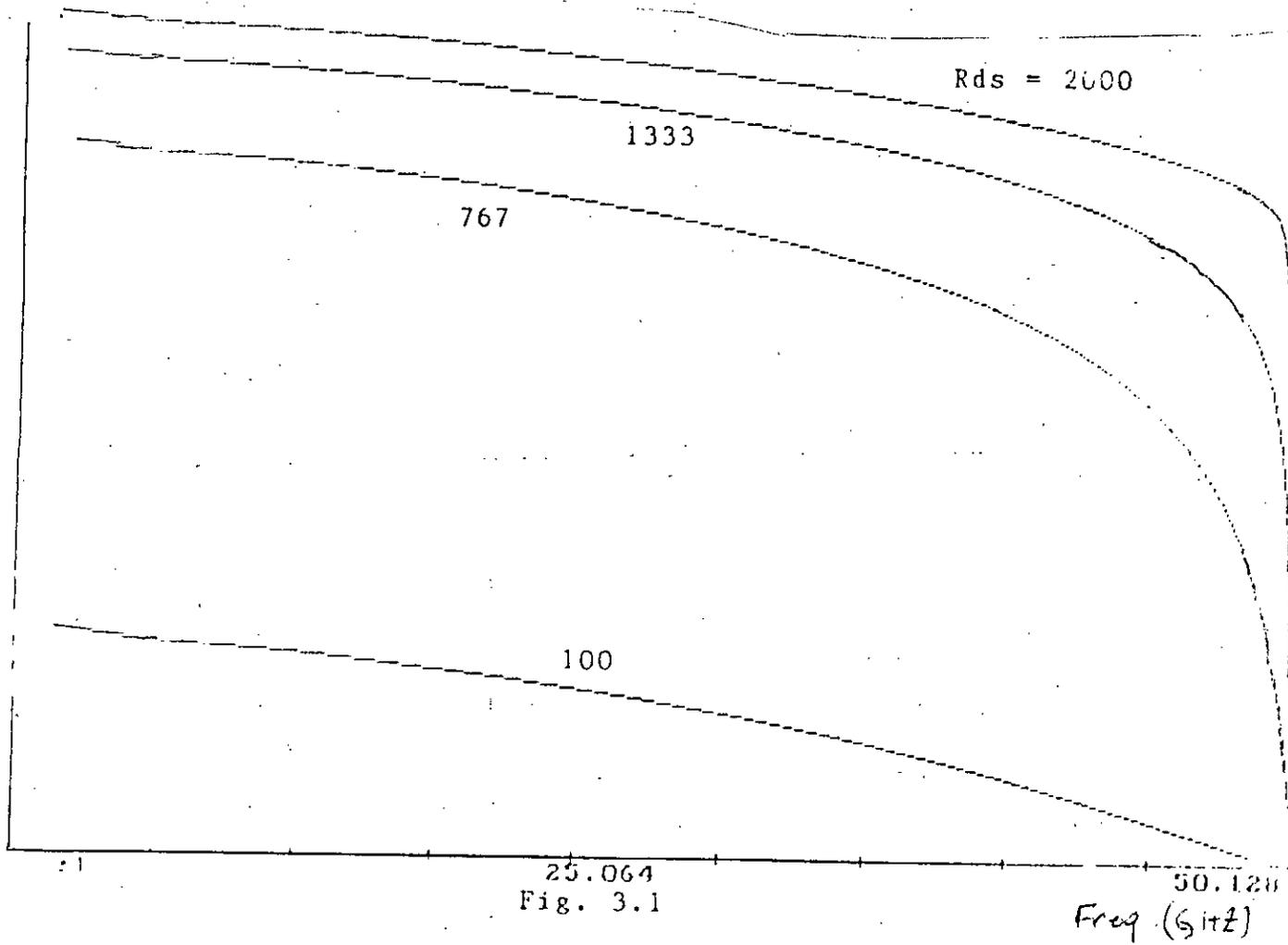


Fig. 3.1

La simulation qui est décrite ici repose sur l'hypothèse que l'impédance des lignes restent égale à 50Ω . On impose également que les vitesses de phase des deux lignes soient égales. Par contre on impose pas que ces vitesses restent constante (ce qui est d'ailleurs incompatible avec le maintien de l'impédance caractéristique) lorsque C_{gs} varie.

La diminution de la fréquence de coupure s'explique par la modification d'un des paramètres fondamentaux de la ligne artificielle, et donc de la fréquence de coupure.

Comme déjà vu le gain DC ne dépend pas des paramètres de la ligne de grille, cependant une augmentation de C_{gs} correspond une augmentation de C_{ds} . Dans ce cas, ω_c diminue et donc l'atténuation de la ligne de drain diminue. Cela à pour conséquence une augmentation du gain DC.

Notons que ω_c est également fonction de C_{ds} , ce qui fait que ce paramètre est également soumis à des modifications. Celles-ci renforcent encore l'effet décrit plus haut.

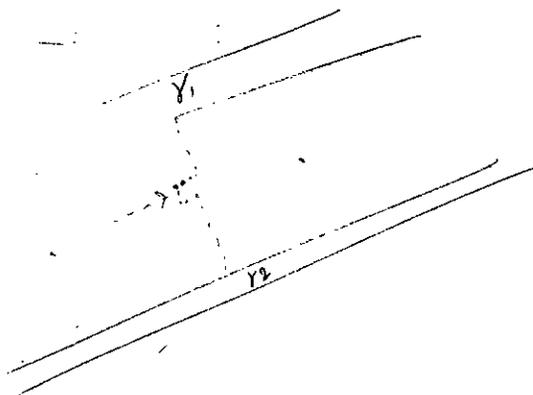
On trouve à la figure(3.13) un graphique illustrant l'influence de la modification de la capacité de grille sur le gain.

4.1 INTRODUCTION

La plupart des amplificateurs distribués construits pour fonctionner aux hyperfréquences sont réalisés en technologie MMIC. De cette manière on obtient une très grande compacité. Cela permet aussi d'utiliser une théorie relativement simple.

En effet, lorsqu'on travaille à 10 GHz, la longueur d'onde est de 3 cm (négligeons l'effet de la perméabilité du substrat). La taille classique des lignes qui relient les transistors entre eux est de l'ordre de 2 à 3 mm, ce qui permet de considérer ces lignes comme des éléments localisés.

Lorsque l'on décide de construire un amplificateur distribué à partir d'éléments discrets, la distance entre les transistors est de l'ordre du centimètre.



Ces distances sont trop grandes pour encore pouvoir y appliquer directement les résultats obtenus pour la réalisation intégrée. Il faut donc développer une autre théorie .

4.2 THEORIE DE L'AMPLIFICATEUR DISTRIBUE A ELEMENTS DISTRIBUES

Suivant ce qui a été fait par les auteurs de [3] et en utilisant la notion d'onde généralisée, on peut arriver à une expression élégante du paramètre S_{21} .

Notation utilisée:

a : onde de la ligne de grille

b : onde de la ligne de drain

un + en exposant indique que l'onde est prograde

un - en exposant indique que l'onde est retrograde .

Les ondes généralisées s'écrivent respectivement pour les lignes de grille et de drain ,

$$a_n^{\pm} = \frac{V_{an}}{\sqrt{Z_{0a}}} \pm i a_n \sqrt{Z_{0a}}$$

$$b_n^{\pm} = \frac{V_{bn}}{\sqrt{Z_{0b}}} \pm i b_n \sqrt{Z_{0b}}$$

L'expression finale du gain à laquelle on arrive est la suivante :

$$S_{21} = \frac{b_n^+}{a_o} = \frac{-H \sin(N \theta_d)}{\sinh(\theta_d)} e^{-N \theta_d}$$

avec : $\theta_o = \frac{\theta_a + \theta_b}{2}$ $\theta_d = \frac{\theta_a - \theta_b}{2}$

où θ_a et θ_b sont les exposants de propagation de la ligne de grille et de la ligne de drain respectivement, ceux-ci pouvant être complexes.

Le paramètre H est un paramètre qui dépend du schéma équivalent du transistor utilisé. Celui-ci est de la forme suivante:

$$H = \frac{-g_m}{2} \sqrt{Z_g Z_d} D_g(\omega) \cdot D_d(\omega)$$

Les termes $D_g(\omega)$ et $D_d(\omega)$ sont des termes qui dépendent des schémas équivalents des circuits d'entrée et de sortie des transistors. Si l'on prend comme circuit équivalent d'entrée le schéma classique R_c (une résistance mise en série avec une capacité) on a :

$$D_g(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_g}}$$

où $\omega_g = (R_g C_g)^{-1}$

4.3 ETUDE DE L'EVOLUTION DU GAIN

Si on considère que les transistors sont suffisamment espacés, on peut dire que l'impédance caractéristique ainsi que l'exposant de propagation restent inchangés, par rapport à la ligne non chargée.

En effet, lorsque l'on va connecter la patte du transistor, on va modifier localement les paramètres de la ligne. La zone où se produisent les perturbations est de l'ordre du quart d'onde, de part et d'autre de la connection .

On peut facilement résoudre ce système pour les variables L et C et l'on obtient :

$$C = \frac{\sqrt{\epsilon_{r \text{ eff}}}}{C Z_c}$$

$$L = Z_c^2 C$$

Dans le cas où les lignes de grille et la ligne de drain ont même exposant de propagation, on a que $\theta_d = 0$.

Le rapport

$$\frac{\sinh(N \theta_d)}{\sinh(\theta_d)} \quad (1)$$

est égal à N.

La modification du gain (où plutôt la norme du gain) en fonction de la fréquence est alors entièrement causé par le comportement fréquentiel des transistors. La phase du gain dépend des paramètres des lignes, mais également de ceux des transistors.

Le rapport (1) donné ci-dessus est identique au facteur de réseau que l'on obtiendrait pour un réseau de N antennes disposées en ligne. Il y a d'ailleurs une analogie entre le réseau d'antennes et l'amplification distribuée.

Si les transistors sont placés à une distance telle qu'il n'y ait pas d'interférences entre les perturbations, on peut alors dire que les paramètres de la ligne chargée ne sont pas trop perturbés par rapport aux paramètres de la ligne non chargée.

Fortis de cette hypothèse, nous pouvons alors calculer les paramètres de la ligne en fonction de l'impédance caractéristique de celle-ci et de la permittivité relative du substrat utilisé, en utilisant les caractéristiques de la ligne non chargée.

Dans le cas de lignes sans pertes, on dispose des relations suivantes:

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{C}{\sqrt{\epsilon_{r\text{eff}}}}$$

avec $Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ et $C = 3 \cdot 10^8$ (m/s)

La ligne de grille joue le rôle des lignes d'alimentation des antennes et la ligne de drain joue le rôle de la propagation dans l'air.

Dans le cas où les lignes de grille et de drain n'ont pas le même exposant de propagation le rapport (1) varie de la manière illustrée par les figures 4.1 et 4.2, la figure 4.1 illustre la variation du rapport pour $N=8$, la figure 4.2 pour $N=4$.

En détaillant un peu, on a

$$\theta_d = \omega \sqrt{L_a C_a} - \omega \sqrt{L_b C_b}$$

On constate immédiatement au vu de cette relation que θ_d va augmenter en fonction de la fréquence. L'évolution du gain en fonction de la fréquence sera donc conforme aux figures 4.1 et 4.2. Le gain présentera des maximums locaux et des zéros, correspondant à une addition en phase ou en opposition de phase des signaux passants par deux transistors différents.

Les figures 4.3 et 4.4 illustrent ce même rapport (1) mais influencé par le comportement fréquentiel du transistor, l'influence choisie est du type :

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega}{\omega_g}}$$

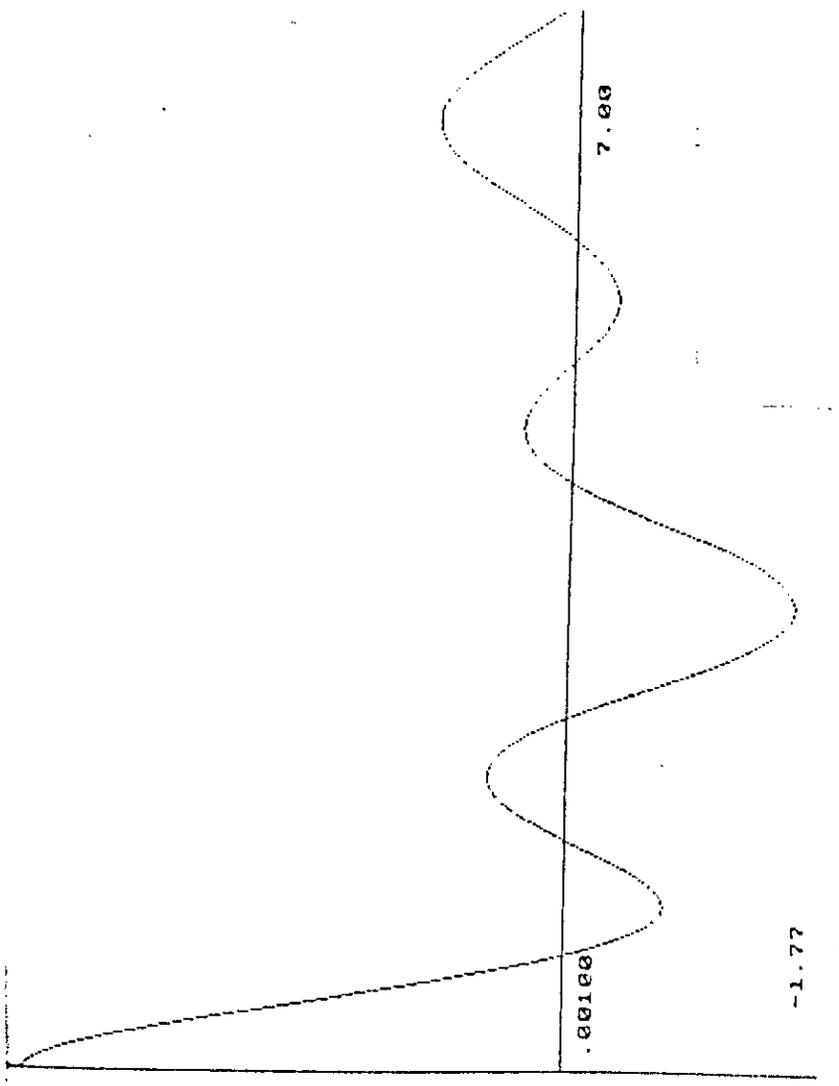


Fig. 4.3.

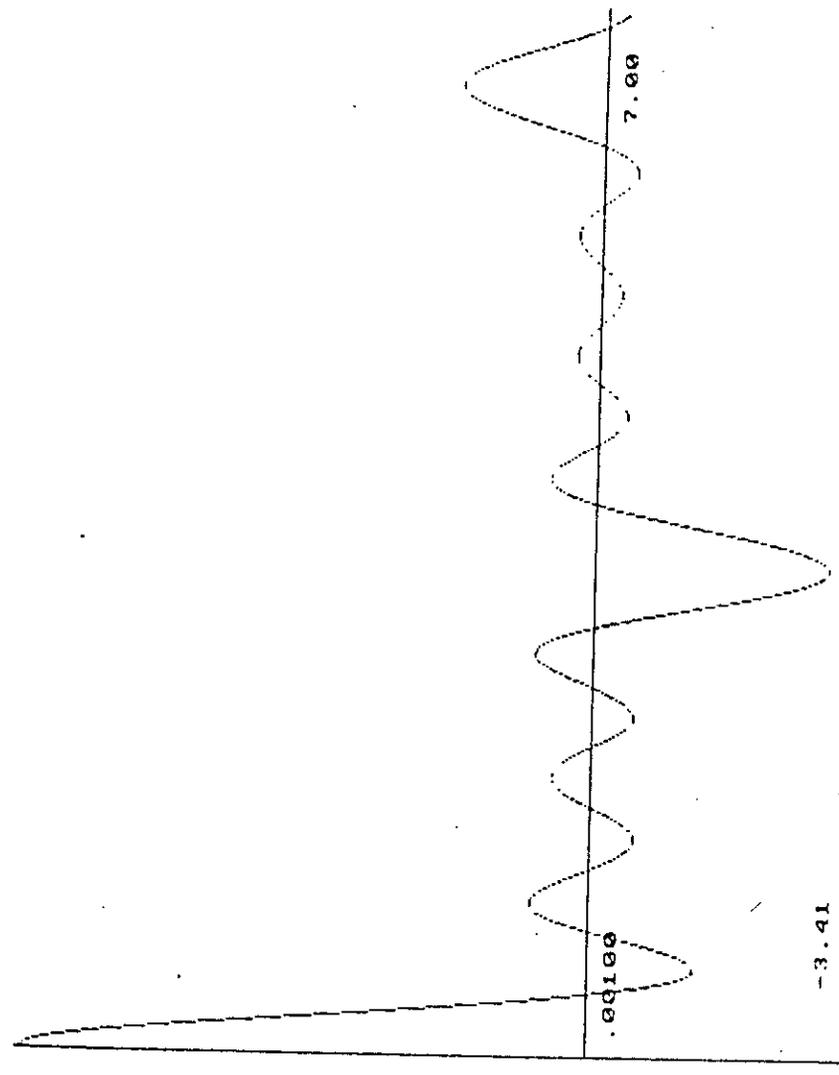


Fig. 4.4.

On constate en plus qu'il se produit une dégradation du gain en fonction de la fréquence, chose à laquelle on pouvait s'attendre.

On en conclut donc que l'on a intérêt à travailler avec des lignes de grille et de drain possédant le même exposant de propagation.

On peut remarquer, en regardant l'expression de H , que si on travaille avec des lignes qui ont une impédance caractéristique élevée, le paramètre S_{21} sera plus élevée. C'est une arme à double tranchant .

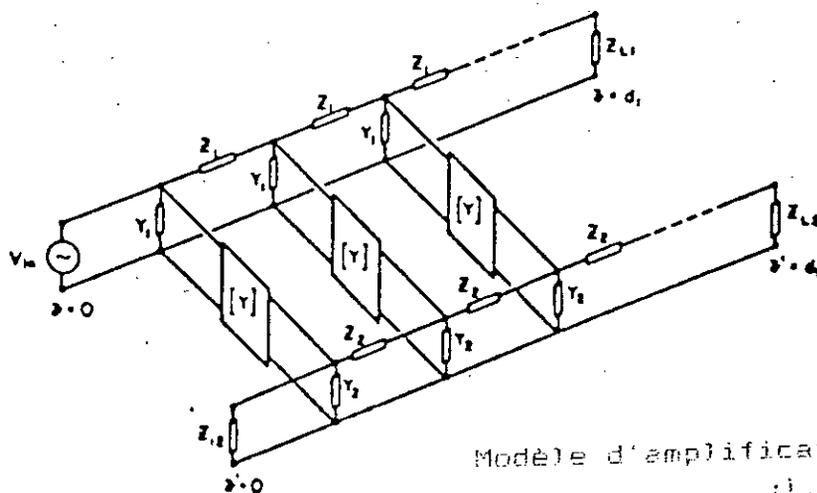
En effet si on augmente l'impédance, il faudra songer à des dispositifs d'adaptation à l'entrée et à la sortie de l'amplificateur . Ceux-ci seront le plus souvent à bande étroite. Ceci ne nous arrange guère car nous essayons de construire un amplificateur à large bande .

5.1 PRESENTATION DU MODELE

On peut dire qu'un amplificateur distribué est composé de deux lignes. Entre celle-ci, il existe un couplage actif. Ce couplage provient naturellement de la transconductance des transistors qui relient les lignes entre elles.

Le modèle proposé dans la figure (I-1) présente un couplage actif et éventuellement un couplage passif provenant de l'interaction entre les inductances des lignes.

On supposera le long de toute notre étude que les lignes sont suffisamment espacées pour pouvoir négliger cette interaction.



Modèle d'amplificateur distribué

d'après [2]

FIG (5.1)

Une brève explication du principe de l'ampli-distribué est la suivante :

Le signal appliqué à l'entrée de l'amplificateur traverse la ligne de grille jusqu'à la terminaison de grille où il est absorbé. Pendant qu'il se propage chaque grille des transistors est excitée et transmet ce signal à la ligne de drain au travers des transconductance.

Si les lignes de grilles et de drain ont la même vitesse de propagation les signaux retrogradent ne sont pas en phase et ne s'additionnent pas. De toute façon ils sont absorbés par la terminaison inverse.

5.2 THEORIE DE L'AMPLIFICATION DISTRIBUE AVEC DEUX LIGNES COUPLEES ACTIVEMENT

L'étude dans le domaine fréquentiel de transmission dans le modèle de la figure (5.1) fait intervenir les équations qui sont l'application pure et simple de la théorie des [] lignes. (9.)

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dz} = -Z_1 \cdot I_1 \\ \frac{dI_1}{dz} = -(\gamma_1 + \gamma_{11}) v_1 - \gamma_{12} \cdot v_2 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \frac{dv_2}{dz} = -Z_2 \cdot I_2 \\ \frac{dI_2}{dz} = -\gamma_{21} \cdot v_1 - (\gamma_2 + \gamma_{22}) v_2 \end{cases} \quad (5.2.a)$$

où $Z_1, Z_2, \gamma_1, \gamma_2$ sont les impédances et admittances par unité de longueur (Ω/m) des lignes 1 et 2 respectivement $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{22}$, sont les paramètres par unité de longueur des dispositifs actifs.

Si on introduit les longueurs des lignes d_1 et d_2 on peut réécrire les équations de la ligne 2 comme suit:

$$\begin{cases} \frac{dv_2}{dz} = - \frac{d_2}{d_1} Z_2 \cdot I_2 \\ \frac{dI_2}{dz} = - \frac{d_2}{d_1} \gamma_2 \cdot v_1 - \frac{d_2}{d_1} (\gamma_2 + \gamma_{22}) v_2 \end{cases} \quad (5.2.b)$$

Et après transformation mathématique on obtient le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_1}{dz^2} = CP_{11} \cdot v_1 + CP_{12} \cdot v_2 \\ \frac{d^2 v_2}{dz^2} = CP_{21} \cdot v_1 + CP_{22} \cdot v_2 \end{cases} \quad (5.3)$$

Avec :

$$\begin{aligned} CP_{11} &= Z_1 (\gamma_1 + \gamma_{11}) \\ CP_{12} &= Z_1 \cdot \gamma_{12} \\ CP_{21} &= \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 Z_2 \cdot \gamma_{21} \\ CP_{22} &= \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 Z (\gamma_2 + \gamma_{22}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

La résolution du système d'équation (5.3) conduit aux deux tensions de lignes (voir annexe 2)

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 e^{-\gamma_1 z} + B_1 e^{\gamma_1 z} + C_1 e^{-\gamma_2 z} + D_1 e^{\gamma_2 z} \\ v_2 &= A_2 e^{-\gamma_1 z} + B_2 e^{\gamma_1 z} + C_2 e^{-\gamma_2 z} + D_2 e^{\gamma_2 z} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Avec : γ_1 et γ_2 les coefficients de propagation.

D'après l'équation (5.5) il est clair qu'en générale il existe deux types d'ondes se propageant dans les deux lignes, chaque onde a un coefficient de propagation différent. Ces coefficients se tirent aussi du système d'équation (5.3)

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \frac{1}{2} \left[(CP_{11} + CP_{22}) + \sqrt{(CP_{11} + CP_{22})^2 - 4(CP_{11} \cdot CP_{22} - CP_{12} \cdot CP_{21})} \right] \\ \gamma_2^2 &= \frac{1}{2} \left[(CP_{11} + CP_{22}) - \sqrt{(CP_{11} + CP_{22})^2 - 4(CP_{11} \cdot CP_{22} - CP_{12} \cdot CP_{21})} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.3 DISPOSITIF ACTIF ASSOCIE AUX DEUX SELFS L_e , L_s

CONDITION D'AMPLIFICATION

Comme déjà signalé que le fait d'avoir la partie réelle du coefficient de propagation , cependant cette condition n'est pas nécessaire .

On associe aux transistors MESFET deux quadripoles Q_s et Q_e faites de selfs L_s et L_e comme la figure (5.2) et voyons dans quelle condition la partie réelle de γ_1 ou γ_2 sont négatives.

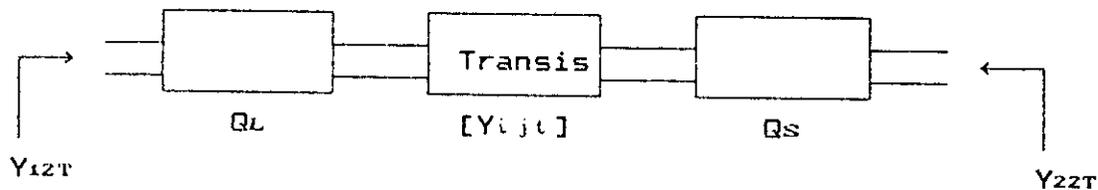


FIG (5.2)

Le rôle de L_e et L_s est principalement de modifier les impédances d'entrée et de sortie des lignes couplées activement.

Ces impédances passent de :

$$\gamma_{11t} \longrightarrow \gamma_{11T} \quad \text{et} \quad \gamma_{22t} \longrightarrow \gamma_{22T}$$

où γ_{11T} et γ_{22T} les impédances d'entrée et sortie totales.

Rappelons d'après les équations (5.6)

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{2} \left[(CP_{11} + CP_{22}) + \sqrt{(CP_{11} + CP_{22})^2 - 4(CP_{11} \cdot CP_{22} - CP_{12} \cdot CP_{21})} \right]$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1}{2} \left[(CP_{11} + CP_{22}) - \sqrt{(CP_{11} + CP_{22})^2 - 4(CP_{11} \cdot CP_{22} - CP_{12} \cdot CP_{21})} \right]$$

Avec la nouvelle configuration du dispositif actif de la figure (5.2), il faut remplacer des valeurs de CP_{ij} les nouvelles paramètres γ_{ij} .

Comme γ_1 et γ_2 sont des complexes, on peut écrire:

$$\gamma_1 = \alpha_1 + j \beta_1 \qquad \gamma_2 = \alpha_2 + j \beta_2$$

Dans le cas d'un faible couplage passif c.à.d ($CP_{12}=0$), les deux coefficients de propagation précédents s'écrivent:

$$\gamma_1 \approx \sqrt{CP_{11}} \qquad , \qquad \gamma_2 = \sqrt{CP_{22}}$$

Les conditions α_1 ou α_2 négatives s'écrivent :

$$\alpha_1 < 0 \implies \text{Im } CP_{11} < 0 \implies \text{Re } \gamma_{11} < 0 \qquad (5.7)$$

$$\alpha_2 < 0 \implies \text{Im } CP_{22} < 0 \implies \text{Re } \gamma_{22} < 0 \qquad (5.8)$$

Voir annexe 3

on vérifiera bien dans les traces de $\text{Re}(\gamma_{11})$ et $\text{Re}(\gamma_{22})$ que au moins l'une des deux conditions est vérifiée, et dans certaines conditions toute les deux satisfaites.

9
0
11

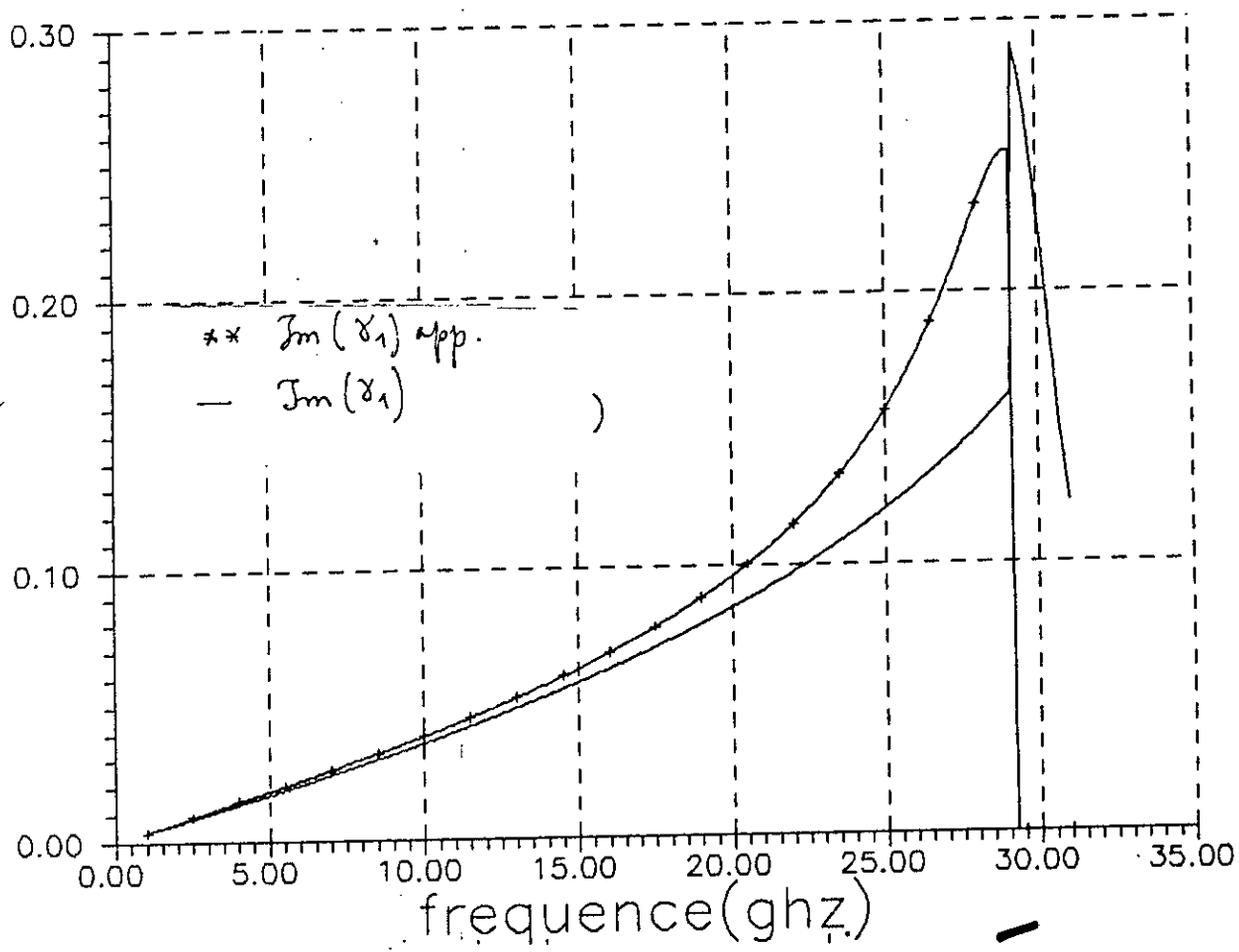


Fig: 5.7

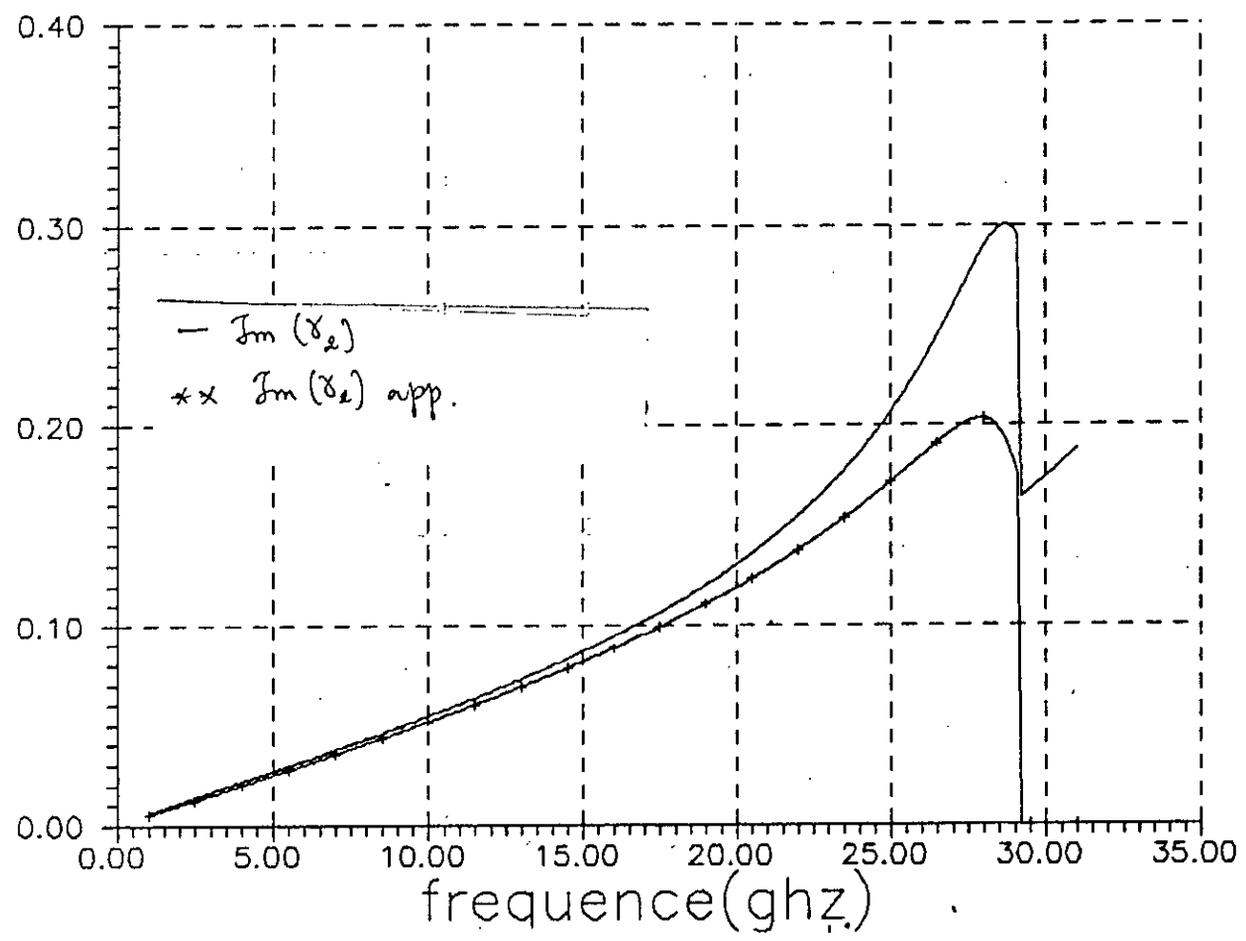


Fig: 5.8

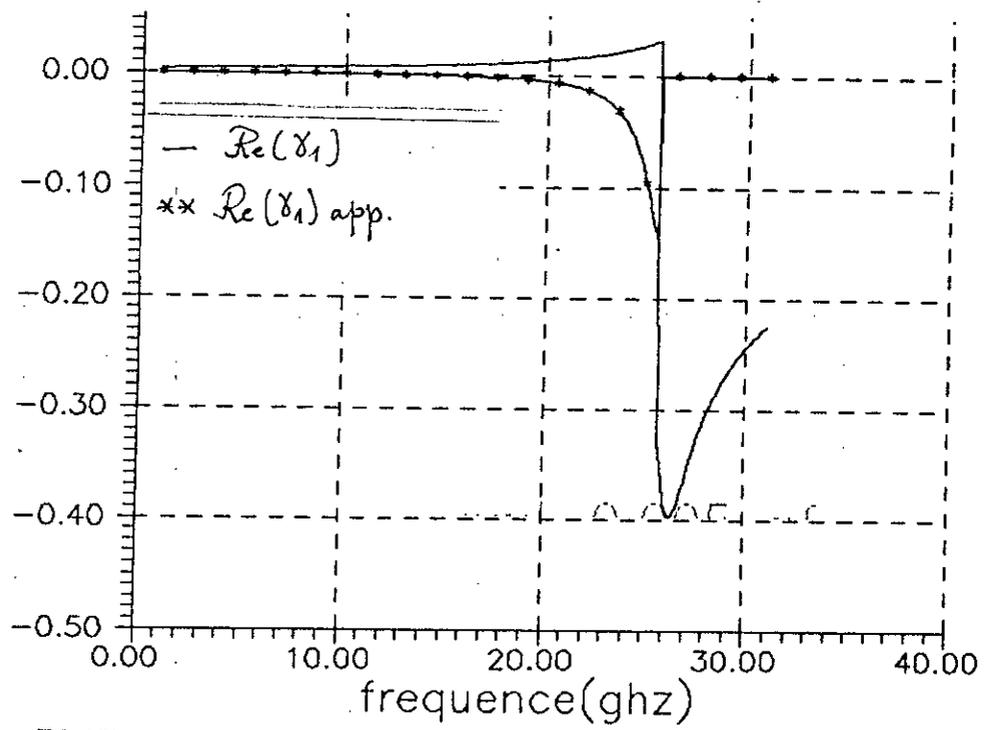


Fig: 5.5

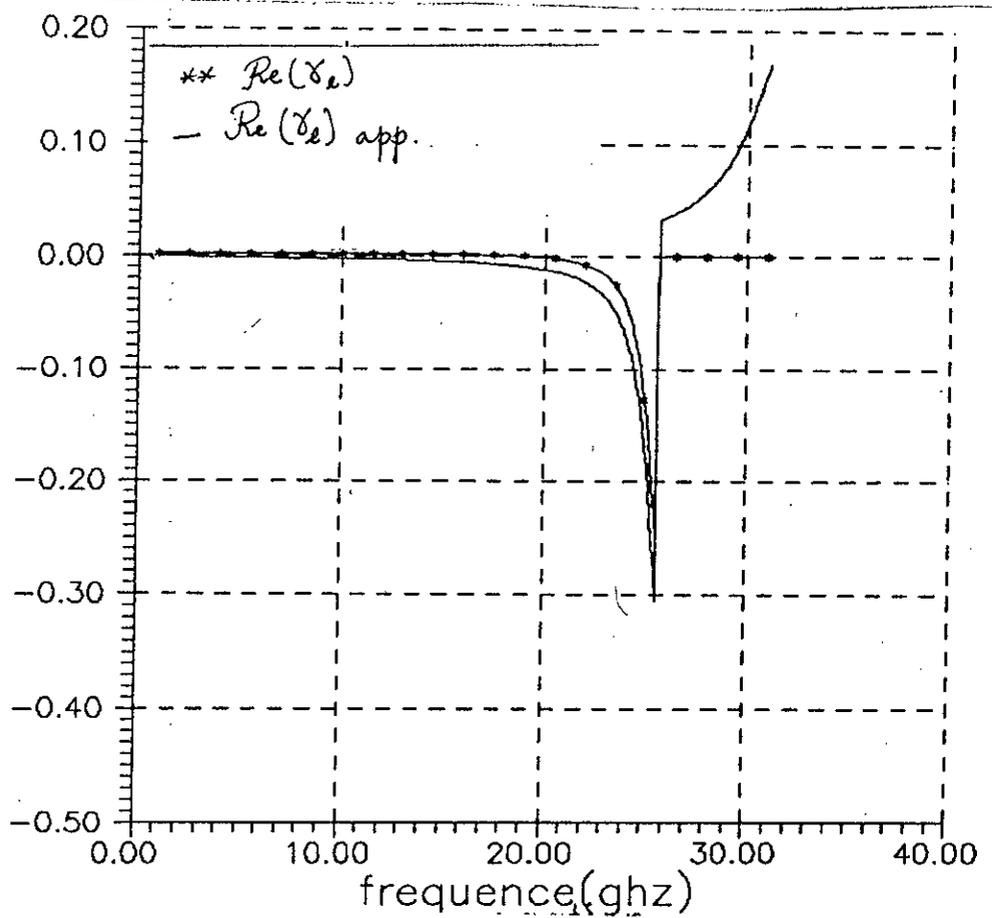


Fig: 5.6

Le fait d'avoir une atténuation négative, cela veut dire que le long de la ligne, le signal propageant ne subit pas de dégradation, tout en étant amplifié par les transconductances des transistors, ce qui se traduit par l'élargissement de la bande passante sans abaissement de l'allure du gain en deux modes:

Le produit Gain * Bande passante s'améliore .

L'effet de L_e et L_s apparaît de plus en plus dans le cas où d'autant plus le couplage par la capacité C_{gd} est faible car:

a) Si C_{gd} existe au moins un terme des deux (α_1 ou α_2) est négatif même sans les selfs L_e et L_s .

b) Avec la présence de C_{gd} l'amélioration apportée au facteur de mérite sera atténuée par cette capacité.

c) Pour un $C_{gd}=0$ les deux atténuations étaient tout deux positifs sans l'association des selfs alors qu'elles deviennent tout deux négatives avec la présence de celles-ci .

5.4 ADMITTANCE D'ENTREE ET DE SORTIE DU QUADRIPOLE TOTALE

Pour avoir les admittances d'entrée et de sortie du quadripole totale il suffit de calculer la matrice transmittance de chaque quadripole puis faire le produit pour avoir la transmittance totale et enfin passer à la matrice admittance .

Cependant il est intéressant de les tirer directement pour voir les éléments influents et enfin essayer d'en tirer une expression plus ou moins raffinée pour prévoir l'évolution de celles-ci.

Considérons le quadripôle de la figure (5.3)

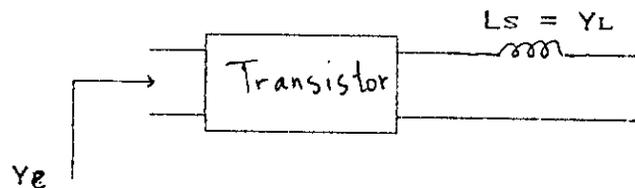


FIG (5.3)

L'admittance d'entrée :
$$y_e = y_{11t} - \frac{y_{21t} y_{12}}{y_L + y_{22t}}$$

Une expression approchée de y_e est donnée par l'équation :

$$Y_e \begin{cases} \text{Re}(Y_e) \approx \frac{g_n \omega C_{gd}}{\omega (C_{gd} + C_{ds}) - \frac{1}{L_s \omega}} + \text{Re}(Y_{11t}) \\ \text{Im}(Y_e) \approx \text{Im}(Y_{11t}) \end{cases} \quad (5.9)$$

On voit déjà que l'admittance d'entrée γ sans la self L contient le terme

$$\frac{1}{\omega (C_{gd} + C_{ds}) - \frac{1}{L_s \omega}}$$

Ce terme est responsable du signe (-) de l'admittance d'entrée totale γ et à la pulsation :

$$\omega^2 = \frac{1}{L_s (C_{gd} + C_{ds})}$$

Il se produit une résonance qui rend l'admittance d'entrée infinie ceci se traduit par une forte perturbation dans l'amplificateur .

Pour les valeurs de C_{gd} et C_{ds} choisies , cette pulsation critique est de 27 GHz et au-dela de cette fréquence. Le terme de résonance ci-dessus est négatif à partir de 9 GHz.

Le fait que γ_{ur} n'est pas négatif dès le début , ceci s'explique par ceci :

La self L_s du quadripole associé au transistor n'est pas le modèle exacte de ce quadripole.

Les modèles des amplificateurs distribués utilisant les éléments localisés permettent d'obtenir des gains plus ou moins stable sur des bandes qui peuvent devenir également de plus en plus large du moment qu'on connaît - du moins relativement - les facteurs influants sur leurs performances.

Cependant l'utilisation des fréquences de plus en plus élevée fait que les longueurs d'onde deviennent de plus en plus courte : il faut donc que les éléments constituant l'amplificateur deviennent de plus en plus petits pour pouvoir encore appliquer le concept d'élément localisés.

Il arrivera forcément un moment où l'on ne pourra plus raccourcir les éléments . Il faudra donc se rabattre vers une étude considérant les éléments constitutifs comme des éléments distribués. Une telle étude a été présente dans ce memoire, et ce modèle permet d'aller très loin dans la bande fréquence si les difficultés d'instabilités seront résolues !

Un modèle aussi intéressant est celui de deux lignes couplées activement et qui permet d'obtenir des amplis à très large bande du moment qu'on considère ces éléments comme distribués, et dans le modèle des dispositifs actifs on tient compte des capacités grille-drain .

Partant de ce modèle il est présentée une étude qui naissse d'une idée aussi attrayante qu'intelligente (imaginée par Mr TRABELSI) qui est l'introduction des dispositifs réactifs à l'entrée et sortie des dispositifs actifs pour l'obtention des impédances d'entrée et de sortie négative, et avoir la possibilité d'avoir des coefficients de propagation dont la partie réelle est négative.

Il faudrait poursuivre l'étude du modèle présenté au chapitre 5 . Il reste beaucoup de choses à éclaircir.

Comme on peut le constater, l'amplificateur distribué est un sujet qui est encore loin d'être épuisé.

REFERENCES ET BIBLIOGRAPHIE

- [1] "Amplificateurs micro-ondes de puissance en technologie micro-ruban" , Y. BORLEZ, TFE. 1989, UCL .
- [2] "MESFET Distributed Amplifier Design Guidelines", J.B BEYER, S.N FRASAD, R.C BECKER, J.E NORMAN, G.K. HOHENWARTER, T-MTT, Vol 32, N°3, March 1984, pp 268-275.
- [3] "A High-Performance 2-18.5 GHz Distributed Amplifier-Theory and Experiment", T. MKAY, J.EISENBERG, R.E. WILLIAMS, T-MTT, Vol 34, N°12, Dec 1986, pp 1559-1567.
- [4] "Coupled-Wave Small-Signal Transient Analysis of GaAs Distributed Amplifier", K.Han, T.T.Y. WONG, T-MTT, Vol 38, N°1, Jan 90, p 23-39.
- [5] "Transmission Characteristics of Electric Wave-Filters", O.J. ZOBEL, BELL Syst. Tech. J., Vol 3 , 1923, pp 567-620.
- [6] "Thermoionic valve circuit", W.S. Percival, British Patent 460562, Jan. 1937.
- [7] "Distributed Amplification", E.L GINZTON, W.R. Hewlett, J.H. Jasberg, J.D. Noe, Proc. IRE, Vol 36, N° 8, August 1948 , pp 956-969.
- [8] "A 1 to 40 GHz MESFET Hybrid Distributed Amplifier", H. BRAUZES, G. Deredec, Y.W. Bender, MTT-S Int. Mic. Symp. Digest, June 1989, pp 849-852.

- " Hyperfréquences: Théorie, Pratique et Mesures " A Vander. Vorst, A. Laloux, De Boeck universite, 1988.
- " Broad-Band Distributed Amplifier Impedance-Matching Techniques ", K.R. Cioffi, T-MTT, Vol 37, N°12, dec 1989, pp 1870-1876.
- " Distributed Amplifiers: Practical Considerations and Experimental Results", W.R. Hewlett, J.H. Jasberg, J.D. Noe, Proc IRE, Vol 38, July 1950, pp 748-753.
- " Distributed Amplifier Theory", D.V. Payne, Proc IRE, Vol 41, June 1953, pp 759-762.
- Cours de Micro-Ondes , Prog. 4^{ème} année , 1990/1991.

ANNEXE1

Calcul du nombre optimal de transistor qui maximise le gain.

Le gain peut s'écrire

$$\begin{aligned}
 G &= K \sinh^2 \left[\frac{n}{2} (A_d - A_g) \right] e^{-n(A_d + A_g)} \\
 &= K \left\{ \frac{1}{2} \cosh \left[n(A_d - A_g) - \frac{1}{2} \right] \right\} e^{-n(A_d + A_g)} \\
 &= K \left\{ \frac{e^{n(A_d - A_g)} + e^{-n(A_d - A_g)}}{4} - \frac{1}{2} \right\} e^{-n(A_d + A_g)}
 \end{aligned}$$

On derive l'expression G et on l'annule

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G}{\partial n} &= \left\{ \frac{(A_d - A_g) e^{n(A_d - A_g)} - (A_d - A_g) e^{-n(A_d - A_g)}}{4} \right\} e^{-n(A_d + A_g)} \\
 &\quad - \left\{ \frac{e^{n(A_d - A_g)} + e^{-n(A_d - A_g)}}{4} - \frac{1}{2} \right\} (A_d + A_g) e^{-n(A_d + A_g)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (A_d - A_g) e^{n(A_d - A_g)} - (A_d - A_g) e^{-n(A_d - A_g)} \\
 &\quad - (A_d + A_g) e^{-n(A_d - A_g)} - (A_d + A_g) e^{-n(A_d - A_g)} + \cancel{e} = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cancel{e} A_g e^{n(A_d - A_g)} + \cancel{e} A_d e^{-n(A_d - A_g)} = \cancel{e}$$

$$n(A_d - A_g) \ln A_g - n(A_d - A_g) \ln A_d = 1$$

$$n(A_d - A_g) \ln A_g + n(A_d - A_g) \ln \frac{1}{A_d} = 0$$

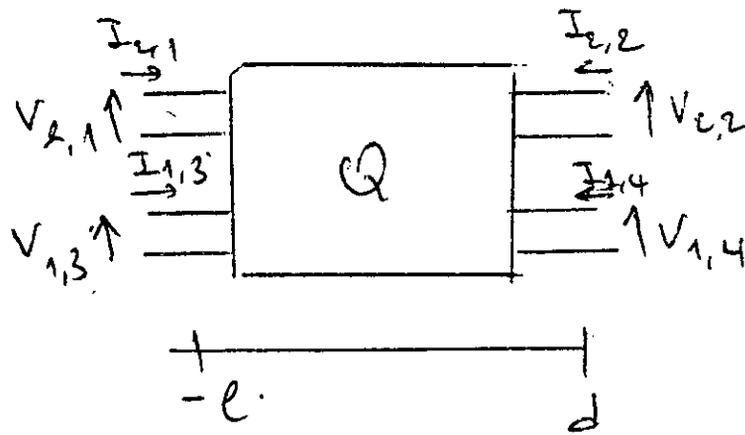
$$n(A_d - A_g) \ln \frac{A_g}{A_d} = 1$$

$$n(A_d - A_g) = \ln \frac{A_d}{A_g}$$

$$n = \frac{\ln \frac{A_d}{A_g}}{A_d - A_g}$$

ANNEXE2

Resolution de systeme d'equation



$$\textcircled{1} \begin{cases} -\frac{dV_1}{dz} = Z_1 I_1 \\ \frac{dI_1}{dz} = (Y_1 + Y_{11}) V_1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} -\frac{dV_2}{dz} = \left(\frac{dz}{dz_1}\right) Z_2 I_2 \\ -\frac{dI_2}{dz} = \left(\frac{dz}{dz_1}\right) Y_{21} V_1 + \left(\frac{dz}{dz_1}\right) (Y_2 + Y_{22}) V_2 \end{cases}$$

En posant $a = \left(\frac{dz}{dz_1}\right)^2$, $Y_{1T} = Y_1 + Y_{11}$

$$Y_{2T} = Y_2 + Y_{22} \quad \text{et} \quad K = Y_{21}$$

La solution du systeme $\textcircled{1}$ est de la forme

$$V_1(z) = V_{1+} e^{-\gamma_1 z} + V_{1-} e^{+\gamma_1 z}$$

$$I_1(z) = I_{1+} e^{-\gamma_1 z} + I_{1-} e^{+\gamma_1 z}$$

$$\text{avec } \gamma_1^2 = Y_{1T} Z_1^2$$

② \Rightarrow

$$\frac{d^2 V_2}{dz^2} = a z_2 K V_1 + a y_{2T} z_2 V_2$$

Equation qui a comme solution générale :

$$V_{2g}(z) = V_{2+} e^{-\sqrt{a} \gamma_2 z} + V_{2-} e^{+\sqrt{a} \gamma_2 z}$$

et comme solution particulière :

$$V_{2p}(z) = A V_{1+} e^{-\gamma_1 z}$$

$$A \gamma_1^2 V_{1+} e^{-\gamma_1 z} = a A y_{2T} z_2 V_{1+} e^{-\gamma_1 z} + a K z_2 V_{1+} e^{-\gamma_1 z}$$

$$A \gamma_1^2 V_{1+} e^{-\gamma_1 z} = a A \gamma_2^2 V_{1+} e^{-\gamma_1 z} + a K z_2 V_{1+} e^{-\gamma_1 z}$$

$$A (\gamma_1^2 - a \gamma_2^2) = a K z_2$$

$$A = \frac{a K z_2}{\gamma_1^2 - a \gamma_2^2}$$

$$\text{donc } V_2(z) = V_{2g}(z) + V_{2p}(z)$$

$$V_2(z) = V_{2+} e^{-\sqrt{a} \gamma_2 z} + V_{2-} e^{+\sqrt{a} \gamma_2 z} + \left(\frac{K z_2 V_{1+}}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \right) e^{-\gamma_1 z}$$

$$\frac{d^2 I_2}{dz^2} = a \gamma_2^2 I_2 - a K \frac{dV_1}{dz}$$

or $-\frac{dV_1}{dz} = z_1 I_1$ l'expression précédente écrite

$$\frac{dI_z}{dz} = a\gamma_z^2 I_z + aKZ_1 I_1$$

et $V_{z,1} = V_z(0) = V_{z+} + V_{z-} + AV_1$

$$I_{z,1} = I_z(0) = Y_{zc} V_{z+} - Y_{zc} V_{z-} + BY_{1c} V_{1+}$$

maintenant - cherchons les expressions de V_{z+} et V_{z-}

$$V_{z+} = V_{z,1} - V_{z-} - AV_1$$

$$Z_{zc} I_{z,1} = V_{z+} - V_{z-} + Z_{zc} BY_{1c} V_{1+}$$

On place une charge adaptée en $z,1$:

$$Z_{zc} I_{z,1} + V_{z,1} = 0 \Rightarrow Z_{zc} I_{z,1} = -V_{z,1}$$

$$\Rightarrow -V_{z,1} = V_{z+} - V_{z-} + Z_{zc} BY_{1c} V_{1+}$$

$$\text{donc } V_{z+} = -V_{z,1} + V_{z-} - Z_{zc} BY_{1c} V_{1+}$$

$$V_{z+} = (-AV_{1+} - Z_{zc} BY_{1c} V_{1+}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 = 2V_{z,1} - 2V_{z-} - AV_{1+} + Z_{zc} BY_{1c} V_{1+}$$

$$\text{donc } V_{z-} = V_{z,1} - \frac{1}{2}(AV_{1+} - Z_{zc} BY_{1c} V_{1+})$$

$$V_{22} = V_{2+} e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + V_{2-} e^{\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + A V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}$$

$$I_{22} = y_{2c} V_{2+} e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2} - y_{2c} V_{2-} e^{\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + B y_{1c} V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}$$

$$V_{22} = V_{2+} e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + \left[V_{2-} e^{\sqrt{a}\gamma_2 d_2} - \frac{A V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}}{2} + \frac{z_{2c} B y_{1c} V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}}{2} \right] + A V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}$$

$$z_{2c} I_{22} = V_{2+} e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2} - V_{2-} e^{\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + z_{2c} B y_{1c} V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}$$

$$V_{22} + z_{2c} I_{22} = 2V_{2+} e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + [A + z_{2c} B y_{1c}] V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2} = 2V_{2c}$$

$$2V_{22} = -\cancel{2} (A + z_{2c} B y_{1c}) \frac{1}{\cancel{2}} V_{1+} e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2} + (A + z_{2c} B y_{1c}) V_{1+} e^{-\gamma_1 d_2}$$

$$2V_{22} = (A + z_{2c} B y_{1c}) [e^{-\gamma_1 d_2} - e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2}]$$

$$\text{or } A = \frac{k z_2}{\frac{\gamma_1^2}{a} - \gamma_2^2}, \quad B = \frac{k z_1}{\frac{\gamma_1^2}{a} - \gamma_2^2}$$

$$2V_{22} = \frac{k}{\frac{\gamma_1^2}{a} - \gamma_2^2} (z_2 + z_{2c} z_1 y_{1c}) (e^{-\gamma_1 d_2} - e^{-\sqrt{a}\gamma_2 d_2}) V_{1+}$$

$$g = \frac{v_{e2}}{v_{1+}} = \frac{1}{2} \frac{k}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} \left(z_2 + \frac{z_2 z_1}{z_1} \right) \left(e^{-\gamma_1 d_2} - e^{\sqrt{a^2 \gamma_2 d_2}} \right)$$