

UNIVERSITÉ D'ALGER

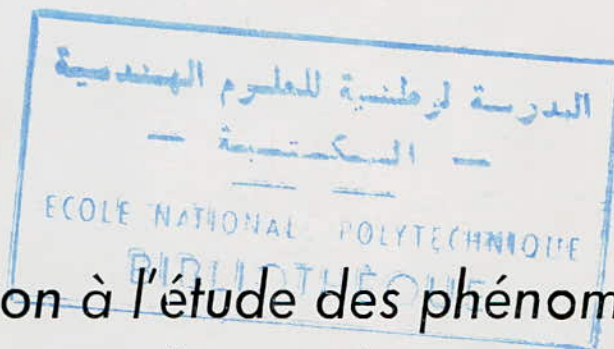
7/76

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT MECANIQUE

THESE DE FIN D'ETUDES

1 ex



*Contribution à l'étude des phénomènes
vibratoires des machines-outils*

(Application au cas particulier du fraisage)

proposée par :

Mr George COSTACHESCU

étudiée par :

HARHAD Améziane
OMAR AMRANI Ahmed

promotion 1976

CHAPITRE IIntroduction à l'étude des vibrations des
machines-outils(1) Position du problème

Une machine est en général un système complexe (Assemblage d'un grand nombre de pièces suivant une géométrie bien précise).

L'étude d'un tel système dans sa globalité est très difficile et même parfois impossible; aussi, pour pouvoir étudier une machine du point de vue des vibrations : il est nécessaire de représenter sa structure par ce qu'on appelle un "modèle mathématique".

Par "modèle mathématique", on entend une représentation simplifiée de la structure aussi ressemblante que possible au schéma réel.

Le choix d'un tel modèle est très important, suivant ce choix on s'approche ou on s'éloigne d'autant plus du schéma réel.

Il est à noter que les résultats recueillis ne peuvent dépasser le cadre du modèle adopté.

Dans cette première partie; on se propose de situer la question dans un contexte général de mécanique vibratoire; ce qui nous sera utile principalement pour la suite de notre exposé.

En premier lieu une machine-outil constitue un système susceptible de vibrer.

1) Il s'agit donc de définir le récepteur

2) Les sources de vibrations sont nombreuses; on distingue

a- Les vibrations extérieures induites par les fondations, pour y remédier, il faut isoler la structure par des amortisseurs judicieusement choisis.

b- Les défauts de transmission par courroie ou engrenage, de paliers...etc

c- Des balourds mécaniques, minimisés par équilibrage dynamique.

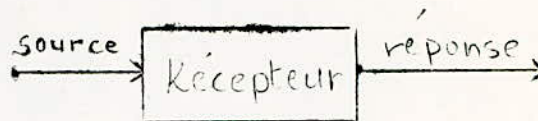
Les sources a, b, c, fournissent en général des vibrations dites forcées.

D'autres sources provoquent des vibrations libres : c'est le cas du phénomène de "Stick - Slip" auquel on peut remédier généralement par le choix de glissières hydrostatiques.

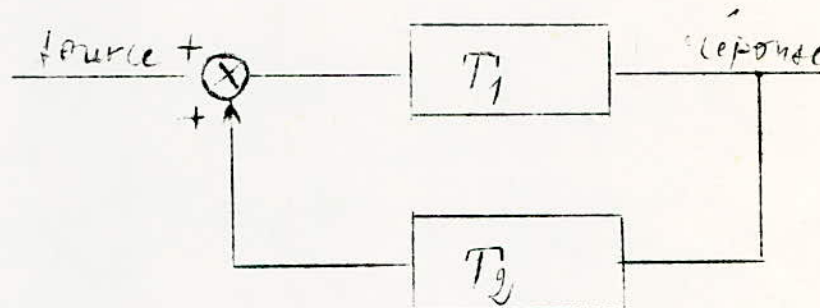
Enfin, les différents types de brautement provoquent des oscillations auto-entretenues qui sont potentiellement seules capables d'engendrer une instabilité

En effet, les vibrations forcées fournissent une réponse finie; il en est de même pour les vibrations libres.

On peut voir ces cas comme résultant d'une chaîne ouverte



par contre les phénomènes de brautement nécessitent l'adoption d'une chaîne bouclée.



(chaîne de retour)

(2) Définitions

(2.1) Récepteur

(2.1.1) Système continu : système ayant pour déformation une fonction continu. Le mouvement dépend d'une infinité de paramètres et il est représenté habituellement par un système d'équations aux dérivées partielles.

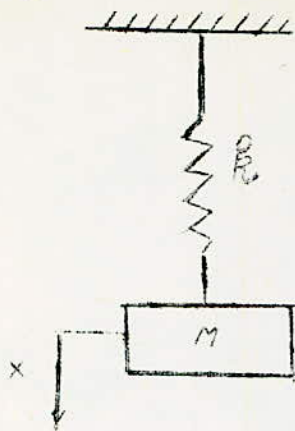
(2.1.2) Système discret : la position du système matériel dépend d'un nombre fini de paramètres. Le mouvement est représenté par un système d'équations différentielles.

(2.1.3) Vibrations libres : ce sont celles qui apparaissent lorsqu'on écarte un système de sa position d'équilibre et qu'on l'abandonne ensuite à lui même.

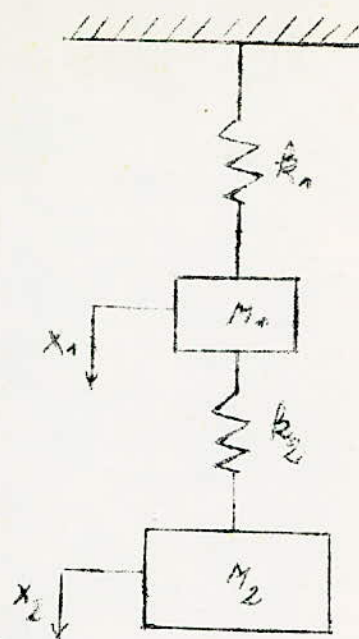
(2.1.4) Vibrations forcées : ce sont les oscillations dues à l'action des forces extérieures appliquées au système.

(2.1.5) Degré de liberté : le nombre de paramètres indépendants définissant de façon univoque la position d'un système (par rapport à un repère donné) est appelé le nombre de degrés de liberté du système.

(1 deg de liberté)



(2 deg de liberté).



3

(2.1.6) Système vibrant linéaire.

On désigne par système vibrant linéaire tout système pour lequel les équations de ses vibrations libres forment un système d'équations différentielles constants. (C'est en particulier le cas des petites oscillations autour de la position d'équilibre).

(2.1.7) Modes harmoniques

- Si nous considérons un système linéaire à un degré de liberté non amorti en vibrations libres.

Il oscille sinusoidalement $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$
avec ω pulsation propre.

- Un système à N degrés de liberté en vibrations libres n'oscille pas sinusoidalement, mais son mouvement résulte d'une superposition d'ondes sinusoidales

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^N \Delta k(\omega_\alpha^2) a_\alpha \sin(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)$$

où $\{\omega_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, N}$ sont les pulsations propres du système

a_α, φ_α des constantes déterminées par les conditions initiales.

et $\Delta k(\omega_\alpha^2)$ les mineurs du déterminant fournissant l'équation caractéristique. Tout mouvement particulier pour lequel tous les a_α sont nuls sauf l'un d'eux est appelé mode propre de vibration.

- Pour les systèmes continus, les mêmes définitions sont valables. Précisons cependant que si le mode est une fonction d'espace qui vérifie les conditions aux limites $y(x,t) = g(x) f(t)$ si $g(x)$ vérifie les conditions portant généralement sur $\frac{\partial^n}{\partial x^n} [y(x,t)]$ on obtient alors une forme stationnaire $G(x)$ qui est le mode.

(2.1.8) Vitesses critiques.

Un système en rotation prend une amplitude maximale pour des vitesses dites critiques, généralement égales (si les effets de disques sont négligeables) aux fréquences propres du système en vibrations transversales.

ex : pour un arbre comportant i disques on a

$$\omega_c^2 = g \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i y_i^2}$$

P_i étant les poids des disques et y_i les flèches statiques.

(2.1.9) Amortissement

- Amortissement externe : On entend par là tous les facteurs externes capables de provoquer une perte d'énergie (résistance de l'air ; frottement ; amortisseurs à piston, électromagnétique ... etc...)

Pour tous ces cas la force de résistance a pour expression générale :

$$F = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$$

où v est la vitesse d'un point quelconque ou d'une unité d'aire

- Amortissement interne :

Lors d'un mouvement réel la déformation dans les corps élastiques n'est pas thermodynamiquement réversible. Le corps solide est le siège de processus qui tendent à le ramener à l'état d'équilibre ; ce qui conduit à une dissipation d'énergie mécanique qui se transforme en chaleur (et par suite à l'inéversibilité de la transformation).

C'est ce que l'on appelle le frottement interne ou bien la viscosité des corps solides.

Lorsque la dissipation d'énergie mécanique est très faible on parle alors de processus "quasi-reversibles" et qui ont comme propriété remarquable le fait qu'ils peuvent être décrits par ce qu'on appelle la fonction de dissipation

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum \alpha_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad f_j = - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_j}$$

où Ψ est une forme quadratique définie positive des vitesses \dot{q}_j les q_j étant les coordonnées généralisées du système mécanique et f_j la force de frottement généralisée.

(2.2) SOURCES

On classe les nombreuses sources de vibration en trois grandes catégories

(2.2.1) - les signaux harmoniques

dont la forme générale est $X_m \sin(\omega t + \varphi)$

(2.2.2) - les signaux périodiques.

Supposons (qu'un signal de ce type) soit représenté par la fonction f si T est la période d'oscillation

On a alors $f(t + T) = f(t)$ pour $t \neq 0$

pour faciliter l'étude d'un tel signal on le décompose en série de FOURIER ($T = 2\pi/\omega$)

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k e^{-ik\omega t} + c_{-k} e^{ik\omega t})$$

(2.2.3) - les signaux aléatoires

Pour lesquels on utilise l'intégrale de FOURIER soit f la représentation d'un signal du type Aléatoire on a alors :

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

(F est appelée densité spectrale de f)

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(3) METHODES DE RESOLUTION DES SYSTEMES VIBRANTS(3.1) généralités

Dans cette partie on va chercher à écrire les équations générales du mouvement d'une structure déformable en vibrations; et de donner la méthode d'intégration de systèmes différentiels particuliers.

Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes pour formuler l'équilibre "dynamique" d'une structure donnée.

1^{ère} En se servant des équations de l'élasticité généralisées avec les termes d'inertie

2^{ème} En utilisant les méthodes énergétiques qui font appels aux théorèmes généraux et à la théorie du calcul variationnel.

(3.2) Equation de l'élasticité dynamique

Les équations du mouvement d'un milieu élastique isotrope (thermostable) s'écrivent comme suit :

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \mu \Delta \bar{u} + \frac{\lambda}{2\sigma} \text{grad div } \bar{u} \quad (\text{I})$$

ou encore en posant $S = \mu \Delta + \frac{\lambda}{2\sigma} \text{grad div.}$

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = S \bar{u} \quad (\text{II})$$

\bar{u} étant le vecteur déplacement

ρ la masse spécifique du matériau

λ, μ les coefficients de Lamé et σ celui de POISSON

S est ce qu'on appelle l'opérateur de l'élasticité de la structure

- cette équation est commode surtout pour la vibration des barres et plaques.

- Dans le cas où les variables sont séparables

$$\bar{u}_j(M, t) = \bar{w}_j(M) q_j(t) \quad (\text{III})$$

En portant (III) dans (II) on a :

$$\ddot{q}_j \bar{w}_j = q_j S \bar{w}_j \quad (\text{IV})$$

\Rightarrow

$$\frac{\ddot{q}_j}{q_j} = \left(\frac{S W_j}{\rho W_j} \right)_{x,y,z} = \omega_j^2 \quad (\text{V})$$

ω_j étant la pulsation propre correspondant au mode de rang j

\overline{W}_j étant alors les formes propres associées qui devront vérifier les conditions aux limites de la structure

multiplions (IV) par \overline{W}_j

on reçoit alors : $\ddot{q}_j e^{\overline{W}_j^2} = q_j \overline{W}_j S \overline{W}_j \quad (\text{VI})$

supposons que notre structure soit confinée au volume v et intégrons l'équation (VI) sur v

on a donc : $\ddot{q}_j \int_v e^{\overline{W}_j^2} dv = q_j \int_v \overline{W}_j S \overline{W}_j dv$

si l'opérateur S est auto-adjoint, c'est à dire si

$$\langle S \overline{u}, \overline{u}' \rangle = \langle \overline{u}, S \overline{u}' \rangle \text{ pour tout } p^t M \in v$$

(le symbole entre crochet désigne le produit scalaire)

Les modes propres constituent alors une base complète orthogonale nous pouvons définir alors

- les pulsations propres à partir de (V)

- les masses généralisées :

$$M_j = \int_v e^{\overline{W}_j^2} dv$$

- les raideurs généralisées :

$$K_j = \int_v \overline{W}_j S \overline{W}_j dv$$

Ainsi pour chaque mode on obtient pour un système conservatif l'équation :

$$M_j \ddot{q}_j(t) + K_j q_j(t) = 0$$

Pour un système dissipatif, on pourrait de même définir l'amortissement généralisé

B_j

on aurait donc :

$$M_j \ddot{q}_j(t) + B_j \dot{q}_j(t) + K_j q_j(t) = 0$$

Toute vibration libre s'écrira donc

$$\overline{u}(M, t) = \sum_j \overline{W}_j(M) q_j(t)$$

(3.3) Méthodes énergétiques (systèmes à un nombre fini de degrés de liberté)

(3.3.1) Méthode approximative de RAYLEIGH

- principe de RAYLEIGH (concernant les systèmes conservatifs)

L'idée du principe de RAYLEIGH est que pour les systèmes conservatifs la somme de l'énergie cinétique T et de l'énergie potentielle V est constante dans le temps et qu'alors lorsque T est maximum V est nulle (et vice-versa)

On peut donc écrire : $T_{\text{Max}} = V_{\text{Max}}$

Pour la suite de notre exposé; on utilisera les notations tensorielles. Tous les indices latins sont susceptibles de varier de 1 à n (n'étant le degré de liberté du système considéré). L'énergie cinétique et potentielle de ce système est donnée par les expressions suivantes.

$$T = \frac{1}{2} a^{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k ; \quad V = \frac{1}{2} c^{jk} q_j q_k$$

(On suppose que ces formes sont définies quadratiques et positives)

On sait que pour de tels systèmes il existe ce qu'on appelle les coordonnées Normales ou orthogonales principales $\{q_1, \dots, q_n\}$ (cf les sections ultérieures) et qui ont les propriétés suivantes :

1) $q_j = X_j^r q_r$ où les X_j^r sont des constantes

2) formules de transformation :

$$\begin{cases} a^{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = a^{jk} X_j^r X_k^s \dot{q}_r \dot{q}_s \\ c^{jk} q_j q_k = c^{jk} X_j^r X_k^s q_r q_s \end{cases}$$

3) Relations d'orthogonalité

$$\epsilon_{rs} = \begin{cases} 0 & r \neq s \\ 1 & r = s \end{cases} \quad \begin{cases} a^{jk} X_j^r X_k^s = \epsilon_{rs} (a^{jk} X_j^r X_k^s) \\ c^{jk} X_j^r X_k^s = \epsilon_{rs} (c^{jk} X_j^r X_k^s) \end{cases}$$

On pose

$$a^r = a^{jk} X_j^r X_k^r \quad \text{et} \quad c^r = c^{jk} X_j^r X_k^r$$

D'où

$$T = \frac{1}{2} a^r \dot{q}_r^2 ; \quad V = \frac{1}{2} c^r q_r^2$$

A présent nous pouvons poursuivre l'énoncé de notre théorie

- On considère un mode d'oscillation fictif où toutes les parties du système oscillent à la même fréquence fondamentale

$$q_r = G_r \sin(\omega t + \varphi)$$

il vient alors $(\dot{q}_r)_{\text{Max}} = \omega G_r$ et $(q_r)_{\text{Max}} = G_r$

et par suite

$$T_{\text{Max}} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} a^2 G_r^2 \right), \quad V_{\text{Max}} = \frac{1}{2} c^2 G_r^2$$

D'où

$$\omega^2 = (c^2 G_r^2) / (a^2 G_r^2)$$

or

$$\omega_r^2 = c^2 / a^2 \quad \text{ce qui donne} \quad \omega^2 = \frac{a^2 G_r^2 \omega_r^2}{a^2 G_r^2}$$

Il apparaît alors que ω^2 est comprise entre le $\min \omega_r^2$ et le $\text{Max} \omega_r^2$

Mais en fait $\omega \approx \min \omega_r$ et c'est cette dernière valeur que nous calculons.

- Amélioration de l'approximation et meilleure approximation

La méthode décrite précédemment peut être améliorée, en écrivant que pour le mode normal lorsque le système se trouve dans sa position extrême : il y a équilibre entre l'action des forces d'inertie et de rappel. On obtient le système suivant écrit sous forme matricielle

$$(q_r^{(1)}) = (A)(q_r)$$

A matrice d'itération

les indices numériques écrits en haut à droite de chaque lettre indiquent l'ordre de l'approximation

en généralisant $(q_r^{(m+1)}) = (A)(q_r^{(m)})$

Avec $\tilde{T}^{(m)} = \frac{1}{2} a^2 [q_r^{(m)}]^2$

$$V^{(m)} = \frac{1}{2} c^2 [q_r^{(m)}]^2$$

Ainsi on améliore l'approximation de ω^2 par les expressions

$$[\omega^{(2m)}]^2 = \frac{V^{(m)}}{\tilde{T}^{(m)}} ; \quad [\omega^{(2m+1)}]^2 = \frac{\tilde{T}^{(m)}}{V^{(m+1)}}$$

La meilleure approximation étant donnée par

$$\omega^2 = \frac{[\omega^{(2m+1)} \omega^{(2m-1)}]^2 - [\omega^{(2m)}]^2}{[\omega^{(2m-1)}]^2 - 2[\omega^{(2m)}]^2 + [\omega^{(2m+1)}]^2}$$

(formule itérative d'Aitken)

(3.3.2) Equations de Lagrange (de 2^{eme} espèce)

La manière la plus rapide pour établir les équations de Lagrange, est celle qui consiste à utiliser les principes variationnels intégraux. Ce qui revient à rendre extrémale l'intégrale d'action généralisée :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (L + \Psi) dt$$

$L = T - V$ étant le Lagrangien du système considéré

Ψ étant définie comme suit :

$$\delta \Psi = \sum_{j=1}^n Q_j' \delta q_j$$

$\delta \Psi$ étant alors le travail élémentaire virtuel des forces dissipatives et extérieures.

En variant I : On aboutit aux équations différentielles suivantes :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} + Q_j \quad j=1, \dots, n$$

Dans lesquelles \mathcal{R} représente la fonction de dissipation du système

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n b_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

et Q_j les forces généralisées dues aux forces extérieures

$$Q_j = \sum_{i=1}^p \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$$

\bar{F}_i étant la force extérieure agissant au point

1) Cas d'un système conservatif en vibrations libres comme dans la section (3.3.1)

On suppose que T et V sont données par les expressions

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k ; \quad V = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n c_{j,k} q_j q_k$$

Les équations de Lagrange nous fournissent alors le système

$$\sum_{k=1}^n (a_{j,k} \ddot{q}_k + c_{j,k} q_k) = 0 \quad j=1, \dots, n$$

pour résoudre ce système on va s'appliquer à chercher des solutions de la forme

$$q_k = A_k e^{i\omega t} \quad k=1, \dots, n \quad \text{ou} \quad \underline{A_k \in \mathbb{C}}$$

On est alors conduit à un système d'équations algébriques

$$\sum_{k=1}^n (c_{jk} - \omega^2 a_{jk}) = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

pour que ce système ait des solutions non triviales son déterminant doit obligatoirement s'annuler

$$\Delta(\omega^2) = |c_{jk} - \omega^2 a_{jk}| = 0 \quad (\text{équation caractéristique})$$

supposons que cette équation possède n racines distinctes $\{\omega_\alpha\}_{1-n}$

la solution générale s'écrit alors :

$$q_k = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_k(\omega_\alpha^2) c_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

$\Delta_k(\omega_\alpha^2)$ étant les mineurs du déterminant $\Delta(\omega^2)$

Les coordonnées normales se déduisent immédiatement de cette dernière relation

$$q_k = \sum_{\alpha} \Delta_k(\omega_\alpha^2) g_\alpha$$

2) Cas d'un système dissipatif en oscillations libres

Les énergies cinétiques et potentielles gardant les mêmes expressions que celles du cas précédent les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + b_{jk} \dot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

D'une manière analogue ce système se résoud en posant : $q_k = A_k e^{i\omega t}$
On s'arrêtera là pour cette partie renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés pour le développement de la théorie.

(3.3.3) Méthode des coefficients d'influence (ou de soyplesse)

Les équations du mouvement s'écrivent dans ce cas en faisant appel aux équations canoniques de la méthode des forces (que nous aurons à revoir par la suite)

En désignant par ξ_j les déplacements et en appliquant le principe de D'ALEMBERT

On a

$$\xi_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk}^i X_k \quad (j = 1, \dots, n)$$

pour lesquelles X_k représente l'action des forces d'inertie

$$X_k = -a_k \ddot{\xi}_k$$

ce qui donne alors :
$$\xi_j = - \sum_{k=1}^n \delta_k^j a_k \ddot{\xi}_k \quad (I)$$

et le coefficient δ_k^j étant le coefficient d'influence spécifique au système considéré

ex : pour une flexion pure

Le système (I) se résout en posant :

$$\delta_k^j = \int \frac{M_k M_j}{EI} dz$$

On a donc :

$$\xi_k = A_k e^{i\omega t}$$

$$A_j = \omega^2 \sum_{k=1}^n \delta_k^j a_k A_k \quad (j=1, \dots, n)$$

et par suite

$$\sum_{k=1, k \neq j}^n \delta_k^j a_k A_k + A_j \left(\delta_j^j a_j - \frac{1}{\omega^2} \right) = 0$$

A partir de là la résolution de ce système est identique à celle de la section (3.3.2) cas n°1 sauf que les inconnues ici sont les inverses de la pulsation au carré ($1/\omega^2$)

- A première vue cette méthode s'apparente beaucoup à la méthode de Lagrange, mais en fait elle est beaucoup plus générale car elle traduit l'équilibre global d'une structure.

(3.3.4) Conclusion

Après ce tour d'horizon des différentes méthodes de résolution, permettant le calcul des modes propres d'une structure donnée. Il importe de signaler que c'est suivant le type de problème que se fixera le choix de la méthode de calcul à employer (on choisira bien évidemment la méthode la plus adaptée).

D'autre part ces théories s'appliquent aux systèmes vibrants linéaires seulement; cependant on se ramènera toujours à ce cas quand c'est possible par linéarisation des équations du mouvement. Enfin pour ce qui est des systèmes continus dont l'étude est souvent mal aisée, on les approche par "Discretisation" de leur structure.

(4) Réponse des structures à une excitation donnée

Un système physique peut évoluer dans le temps suivant trois cas de vibrations différents et qui sont - les vibrations libres

- les vibrations forcées
- les vibrations auto-entretenues

On illustrera les deux premières possibilités par un exemple, ensuite on indiquera la théorie afférente au dernier cas.

(4.1) Exemple

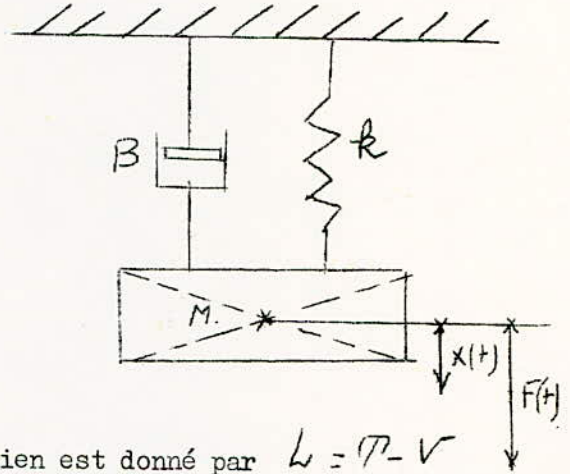
On considère le modèle mathématique suivant qui intervient constamment dans l'étude des vibrations.

Ecrivons les énergies entrant en jeu :

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 ; \quad V = \frac{1}{2} k x^2$$

$$R = \frac{1}{2} B \dot{x}^2$$

Le lagrangien est donné par $L = T - V$



l'équation du mouvement est alors : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} + F(t)$

ou encore $M \ddot{x} + B \dot{x} + kx = F(t)$

en divisant par M et en posant $2\lambda = B/M$ et $\omega_0^2 = k/M$

on a :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{M} = f(t)$$

- Oscillations libres : il suffit de poser $f(t) = 0$ dans l'équation ci-dessus pour obtenir l'équation du mouvement et qui est :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On sait que la solution d'une telle équation différentielle est de la forme

$$X_m e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \phi)$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} ; \quad (\text{fréquence naturelle amortie})$$

Au bout d'un temps assez long la réponse libre tend asymptotiquement vers zéro.

- Oscillations forcées (cas d'une excitation périodique)

On suppose notre signal périodique de période ($T = \frac{2\pi}{\omega}$)

Décomposons $f(t)$ en série de FOURIER

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k e^{-ik\omega t} + c_{-k} e^{ik\omega t})$$

l'équation du mouvement s'écrit : $(D^2 + 2\alpha D + \omega_0^2)x = f(t)$

D étant l'opérateur de différentiation par rapport au temps.

D'où la réponse forcée sera : $X_{ss} = \frac{1}{D^2 + 2\alpha D + \omega_0^2} \cdot f(t)$

en utilisant la décomposition de faurier.

$$X_{ss} = \sum_0^{\infty} \left\{ \frac{c_k e^{-ik\omega t}}{\omega_0^2 - k^2\omega^2 - i2\alpha k\omega} + \frac{c_{-k} e^{ik\omega t}}{\omega_0^2 - k^2\omega^2 + i2\alpha k\omega} \right\}$$

posons $\frac{c_k}{\omega_0^2 - k^2\omega^2 - i2\alpha k\omega} = Y_k e^{i\varphi_k}$

$$\text{ou } Y_k = \left| \frac{c_k}{\omega_0^2 - k^2\omega^2 - i2\alpha k\omega} \right| \quad \text{et } \varphi_k \text{ l'argument de ce nombre complexe}$$

$$\text{il apparaît } \frac{c_{-k}}{\omega_0^2 - k^2\omega^2 + i2\alpha k\omega} = Y_k e^{-i\varphi_k}$$

vu que c_{-k} est le conjugué complexe de c_k par construction

$$\text{Ainsi } X_{ss} = \sum_0^{\infty} \left\{ Y_k e^{-i(k\omega t - \varphi_k)} + Y_k e^{i(k\omega t - \varphi_k)} \right\}$$

$$X_{ss} = \sum_0^{\infty} 2Y_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

$$\text{enfin on pose } 2Y_k = X_k \quad \text{ou } X_{ss} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

- cette dernière relation est la réponse forcée du système

- Aspect énergétique de la solution

Recopions l'équation de Lagrange du mouvement sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = F(t)$$

Differentions le Lagrangien : on a

$$dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x}$$

remplaçons $\frac{\partial L}{\partial x}$ par sa valeur vue là haut

$$\Rightarrow dL = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x} + \dot{x} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} - \dot{x} F(t)$$

or

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \ddot{x} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)$$

D'où

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) = \dot{x} F(t) - \dot{x} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$$

Application

$$L = T - V \text{ et } \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2T$$

$$\Rightarrow \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = T + V = E$$

la quantité E désignant l'énergie du système

remarque si $R = 0$ et $F(t) = 0$ (système conservatif)

il vient alors $T + V = cte$

l'équation de l'énergie s'écrit donc :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x} F(t) - \dot{x} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}}$$

Dans le cas où la stabilité est atteinte (seule x_{ss} est à considérer)

On se propose alors de calculer la valeur moyenne dans le temps d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

des termes de droite de l'équation de l'énergie

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}_{ss} F(t) dt, \quad W_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} dt$$

$$\text{Avec: } F(t) = M f(t) \quad \dot{x} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = 2R = B \dot{x}^2 = M g d \dot{x}^2$$

$$\dot{x} \frac{\partial R}{\partial \dot{x}} = M g d \dot{x}_{ss}^2$$

$$X_{SS} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k \cos(k\omega t - \varphi_k)$$

16

$$X_{SS} = - \sum_{k=0}^{\infty} X_k(k\omega) \sin(k\omega t - \varphi_k)$$

$$W_1^{\sim} = \frac{M}{\pi} \int_0^T \left\{ - \sum_{k=0}^{\infty} X_k(k\omega) \sin(k\omega t - \varphi_k) \right\} f(t) dt$$

remplaçons $f(t)$ par son développement de Fourier : $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n e^{-in\omega t} + c_{-n} e^{in\omega t})$
 et servons nous de l'artifice de calcul suivant

$$W_1^{\sim} = \frac{M}{\pi} \left\{ - \sum_{n,k=0}^{\infty} X_k(k\omega) \int_0^T \left[e^{-i\varphi_k} (c_n e^{i(k-n)\omega t} + c_{-n} e^{i(k+n)\omega t}) dt \right] \right\}$$

$$W_1^{\sim} = \frac{M}{\pi} \left\{ - \sum_{k=0}^{\infty} X_k(k\omega) \int_0^T e^{-i\varphi_k} c_k dt \right\}$$

$$W_1^{\sim} = M \left(- \sum_{k=0}^{\infty} X_k(k\omega) \int_0^T c_k e^{-i\varphi_k} dt \right)$$

$$W_2^{\sim} = M^2 d \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\sum_{n,k} X_k X_n k n \omega^2 \sin(k\omega t - \varphi_k) \sin(n\omega t - \varphi_n) \right) dt$$

là aussi nous avons les propriétés d'orthogonalité.

$$\Rightarrow W_2^{\sim} = M^2 d \left(\frac{1}{2} \sum X_k^2(k\omega)^2 \right) = d M \sum X_k^2(k\omega)^2$$

A présent faisons quelques remarques utiles.

posons :
$$\frac{c_k}{\omega_0^2 - k^2 \omega^2 - i 2 d k \omega} = \frac{|c_k| e^{i \varphi_k}}{|\omega_0^2 - k^2 \omega^2 - i 2 d k \omega| e^{-i \beta_k}} = \gamma_k e^{i(\varphi_k + \beta_k)}$$

cherchons à calculer l'expression $\text{Im}(c_k e^{-i \varphi_k})$ il vient donc $\varphi_k + \beta_k = \varphi_k$

$$c_k e^{-i \varphi_k} = |c_k| e^{i(\alpha_k - \varphi_k)} = |c_k| e^{i(\alpha_k - \varphi_k - \beta_k)} = |c_k| e^{-i \beta_k}$$

D'où $\text{Im}(c_k e^{-i \varphi_k}) = -|c_k| \sin \beta_k$

or $\sin \beta_k = \frac{2 d k \omega}{|\omega_0^2 - k^2 \omega^2 - i 2 d k \omega|}$

ce qui donne donc $\text{Im}(c_k e^{-i \varphi_k}) = -\frac{|c_k|}{|\omega_0^2 - k^2 \omega^2 - i 2 d k \omega|} \times 2 d k \omega$

ou encore $\text{Im}(c_k e^{-i \varphi_k}) = -X_k d k \omega$

et en remplaçant dans l'expression de W_1

$$W_1 = d M \sum_{k=0}^{\infty} X_k^2 (k \omega)^2$$

nous arrivons au résultat très important $W_1 = W_2$

par conséquent

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{dE}{dt} dt = \frac{E(T) - E(0)}{T} = 0$$

D'où

$$E(0) = E(T) = \text{cte}$$

Théorème : La somme des échanges d'énergie d'un système non conservatif sous l'action d'une force quelconque mais périodique en une période est nulle.

On dit que l'énergie du système est " constante " sens restrictif

Il y a dissipation d'énergie par suite du frottement et compensation de cette perte par la source extérieure.

Mais $E(t)$ est en fait une grandeur fluctuante dans le temps.

pour s'en convaincre il suffit de se rappeler : $E = T + V$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{X}_{SS}^2 \quad , \quad V = \frac{1}{2} K X_{SS}^2$$

En faisant la somme de ces expressions il apparait clairement que :

$$T + V \neq \text{cte} \quad \forall t \in [0, T]$$

il est à noter qu'en général l'énergie d'un tel système est proportionnelle au produit des amplitudes et des fréquences.

(4.2) Vibrations auto-entretenues

nous verrons qu'elles sont provoquées par des excitations quelconques ;
la méthode la plus^v à employer dans ce cas est celle du calcul opérationnel
on considère alors la transformation de CARSON-LAPLACE (v appropriée)
définie par :

$$\bar{F}(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (p \in \mathbb{C})$$

(4.2.1) Fonction de transfert.

si nous considérons un système physique liant une grandeur de sortie $y(t)$ à une grandeur d'entrée $x(t)$ par une équation Intégro-différentielle à coefficients constants du type suivant :

(toutes les conditions initiales étant nulles)

$$\begin{aligned} A_3 y''' + A_2 y'' + A_1 y' + A_0 y + A_{-1} \int y dt + A_{-2} \int \left[\int y dt \right] dt \\ = B_2 x'' + B_1 x' + B_0 x + B_{-1} \int x dt \end{aligned}$$

Par définition, on appelle fonction de transfert du système

le rapport

$$T(p) = Y(p) / X(p)$$

Ainsi

$$T(p) = \frac{B_2 p^2 + B_1 p + B_0 + B_{-1}/p}{A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 + A_{-1}/p + A_{-2}/p^2}$$

En multipliant par p^2 en haut et en bas et en faisant le changement des constantes

$$A_i = a_{i+2} \text{ et } B_j = b_{j+2}$$

et

on a alors
$$T(p) = \left(\sum_1^4 b_j p^j \right) / \left(\sum_0^5 a_i p^i \right)$$

Remarque :

par des considérations énergétiques, on montre que pour tout système réel, le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur.

Cette remarque est très importante, car de ce fait l'étude de la stabilité se ramène uniquement à celle du dénominateur qui prend alors le nom d'équation caractéristique du système lorsqu'on l'égalé à zéro :

$$\sum_{i=0}^n a_i p^i = 0$$

Par conséquent, le système est stable si et seulement si toutes les parties réelles des racines de l'équation caractéristique sont négatives.

Donnons alors quelques critères mathématiques de stabilité.

(4.2.2) Critère de ROUTH .

On forme le tableau suivant à l'aide des coefficients de l'équation

$$\left(\sum_0^n a_i p^i = 0 \right)$$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	---
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	---
1	b_1	b_2	b_3	---
1	c_1	c_2	c_3	---

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-3} , \\ b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-5}, \dots, \text{etc} \\ c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1} \right) b_2 , \\ c_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1} \right) b_3, \dots, \text{etc} \end{array} \right.$$

Le système est stable si et seulement si tous les éléments de la première colonne ont même signe.

(4.2.3) Critère de Hurwitz

On forme les déterminants des coefficients de l'équation caractéristique

$$\left(\sum_0^n a_i p^i = 0\right) \quad (a_n > 0)$$

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \dots \text{etc}$$

Le système est stable si et seulement si tous les déterminants ainsi formés sont positifs

$$\Delta_i > 0 \text{ pour } i = 1, 2, \dots, n$$

(5) CONCLUSIONS

1) L'étude de tout phénomène vibratoire passe nécessairement par la recherche des modes propres, à ce propos nous avons formulé différentes méthodes de calcul (Rayleigh, Lagrange, etc...)

2) Pour connaître la réponse d'un système à une excitation donnée: On fait appel au concept de fonction de transfert du système; ce qui permet en particulier d'évaluer la stabilité dynamique du système. Pour cette raison on a donné quelques critères de stabilité parmi les plus usités.

3) Aspect experimental : La mesure expérimentale permet de déterminer certaines caractéristiques de la structure (fréquences propres, constantes d'élasticité etc...) habituellement on emploie une excitation harmonique.

Ainsi s'achève cet exposé sur la théorie des vibrations mécaniques, dont le but essentiel est de préciser certaines notions fondamentales et par là même d'aborder les vibrations dues à la coupe des métaux.

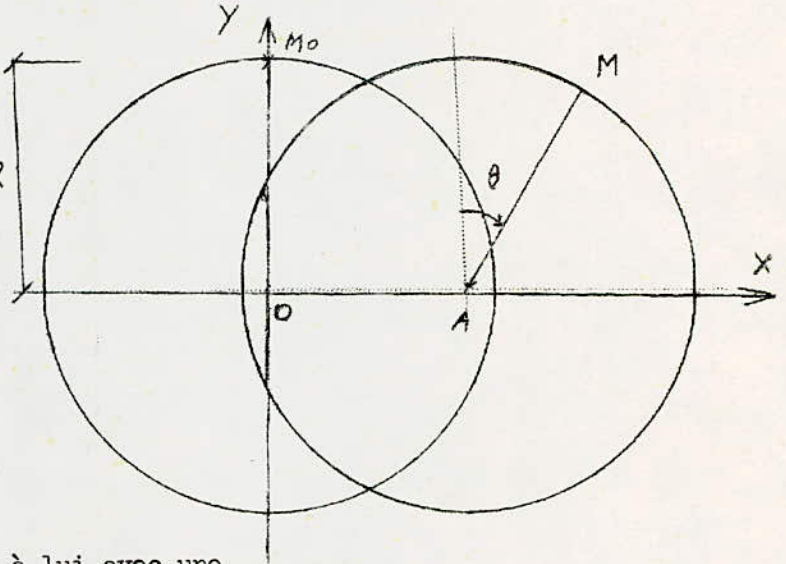
(1) Trajectoire décrite par l'outil ou encore equation du mouvement

Désignons par V la vitesse d'avance de la table et par R la vitesse angulaire de rotation de la fraise.

On cherche à écrire les équations de la courbe décrite par une dent de la fraise sur la pièce.

Si on considère un observateur lié à la pièce, il verra la fraise se déplacer par rapport à lui avec une vitesse V constante (D'après le principe de relativité de galilée)

On peut considérer que c'est la fraise qui possède un mouvement de translation uniforme de vitesse V (par rapport à notre observateur)



En utilisant les nombres complexes : $z_M = X + iY$ et $i^2 = -1$

$$\text{On a : } z_M - z_A = (z_{M_0} - z_0) e^{-i\theta}$$

Or $z_A = Vt$; $z_{M_0} = iR$; $z_0 = 0$ il vient alors :

$$z_M = Vt + iR e^{-i\theta} = Vt + iR (\cos\theta - i \sin\theta)$$

En séparant partie réelle et imaginaire

$$\begin{cases} X = Vt + R \sin\theta \\ Y = R \cos\theta \end{cases}$$

D'autre part vu que $\theta = \omega t \Rightarrow t = \theta/\omega$

$$(t \geq 0 \Rightarrow \theta \geq 0) \quad \text{Ainsi : } Vt = \frac{V}{\omega} \theta$$

$$\text{D'où } \begin{cases} X = \frac{V}{\omega} \theta + R \sin \theta \\ Y = R \cos \theta \end{cases} = \begin{cases} X = R \left(\frac{V}{\omega R} \theta + \sin \theta \right) \\ Y = R \cos \theta \end{cases}$$

$$\text{Posons } m = \frac{V}{R\omega} \Rightarrow \begin{cases} X = R(m\theta + \sin \theta) \\ Y = R \cos \theta \end{cases}$$

Ces dernières équations constituent ce qu'on appelle les équations paramétriques de la cycloïde

Remarque " sur l'allure de la courbe "

pour $\theta \in [0, \pi]$ - $Y(\theta)$ monotone décroissante

- $X(\theta)$ nécessite le calcul de sa dérivée

$$\frac{dX}{d\theta} = R(m + \cos \theta)$$

a) 1^{er} Cas) $m + \cos \theta > 0$ pour tout θ , c'est à dire

$\Rightarrow X(\theta)$ monotone croissante

b) 2^{eme} Cas $m = +1$ Maximum atteint au point $\theta = \pi$

$$X_{\text{Max}} = R\pi$$

c) 3^{eme} Cas $0 < m < 1$ Maximum atteint en θ_0 tel que

$$\cos \theta_0 = -m$$

comme m positif

$$\pi/2 < \theta_0 < \pi ; \theta_0 = \text{Arcos}(-m)$$

On a le tableau suivant des variations de $X(\theta)$

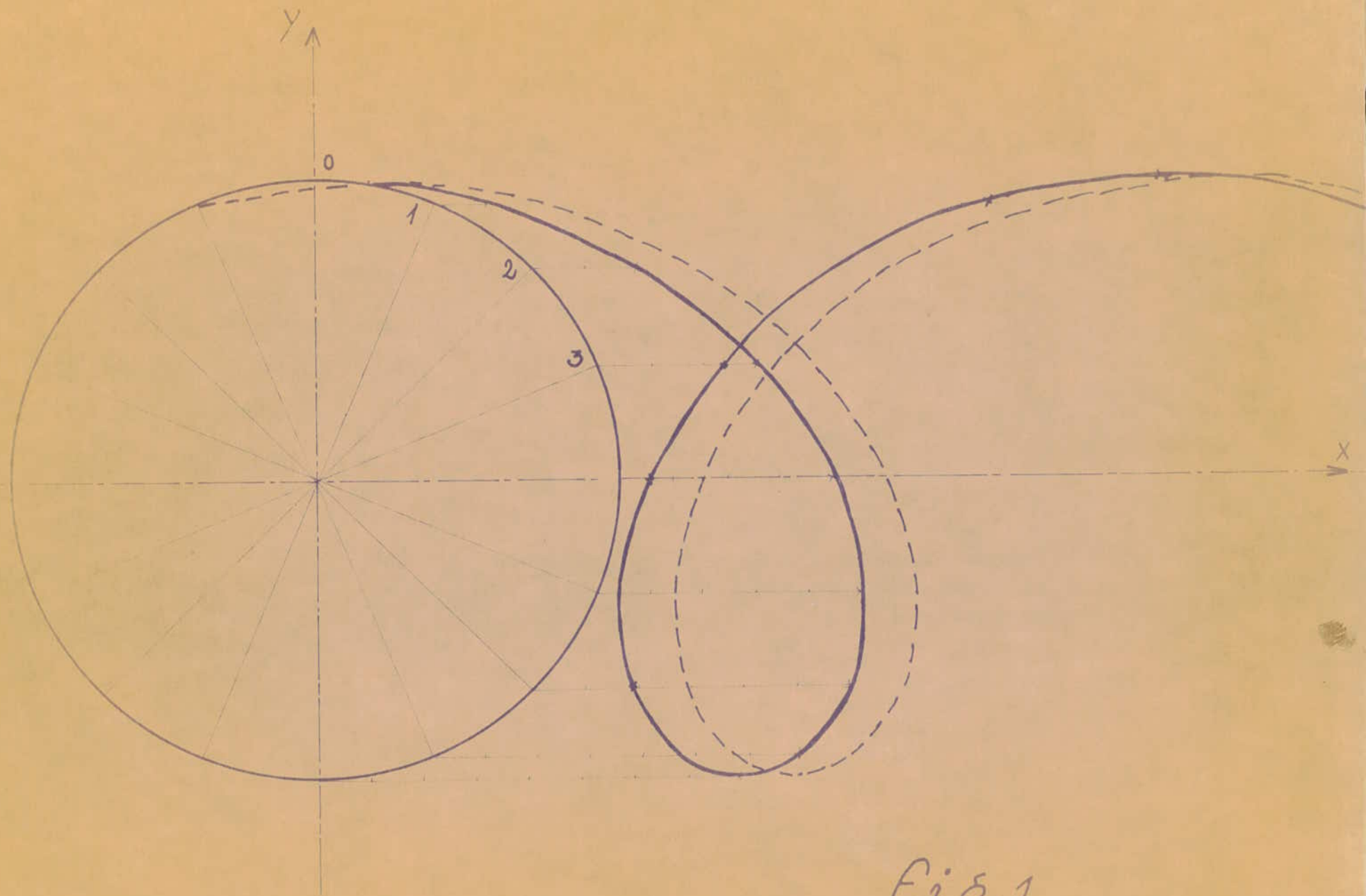


Fig. 1

C'est ce dernier cas que nous aurons à considérer dans la pratique.

En effet : le coefficient m inférieur à l'unité signifie

que la vitesse d'avance de la table est plus petite

que la vitesse périphérique de la fraise.

Cette condition étant toujours observée

du fait que la coupe des métaux doit satisfaire

à certaines conditions :

de résistance et déchauffement

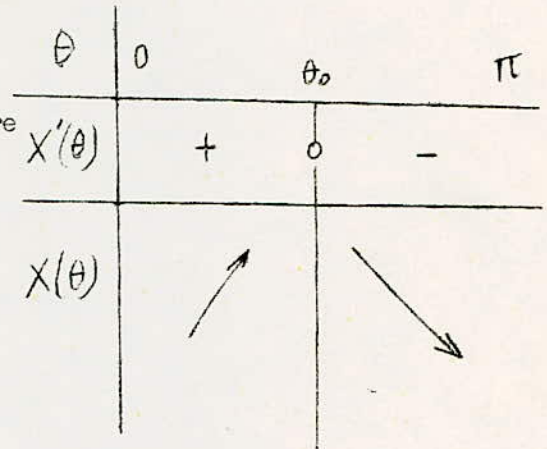
à ne pas dépasser (cette limitation portant

entre autre sur le coefficient)

Pour ($m < 1$) la courbe

obtenue s'appelle

"cycloïde allongée"



(1.1) Construction graphique (fig.1)

On commence par tracer un cercle de centre O et de rayon R ,

et deux axes OX et OY perpendiculaires en O .

Ensuite on partage notre circonférence en n arcs égaux qu'on numérote $0, 1, 2, \dots, j, \dots$ de chaque point de repère j .

On mène une parallèle à l'axe OX sur laquelle, on porte la mesure $x = Rm(\beta)$; ($\beta = \frac{2\pi}{n}$) autant de fois que nécessaire; par exemple pour le point d'indice j on porte (jx)

On obtient alors un point de la cycloïde et ainsi de suite, on trace notre courbe point par point.

Remarque importante

L'arc $\widehat{O1} = R\beta$, et comme par hypothèse le coefficient $\frac{1}{m}$ est plus petit que un; il apparaît que :

$$x = Rm\beta < R\beta = \widehat{O1}$$

D'où la mesure x ne saurait être en aucune manière supérieure ou égale à l'arc $\widehat{O1}$ de subdivision pris arbitrairement pour effectuer notre tracé.

Il est facile de vérifier l'exactitude de cette méthode. En effet : lorsque la fraise aura tourné de $j\beta$, la table sera déplacée de la quantité $(Rm\beta)j$.

Ajoutons à cette valeur l'abscisse relative du point d'indice j c'est à dire $R \sin j\beta$; l'ordonnée étant alors $R \cos j\beta$. On retrouve ainsi les équations paramétriques de la cycloïde.

Un dernier point à signaler : on étudie le contact pour l'angle θ variant de 0 à π , au voisinage de π on dit qu'on "décroche" c'est à dire qu'on perd le contact outil-métal.

(2) Réseau des courbes cycloïdes dans le cas où on a plusieurs dents.

Désignons $\frac{\text{par}}{Z}$ le nombre total de dents qu'on suppose. Régulièrement espacées de l'angle $\varphi_p = 2\pi/Z$

D'habitude on nomme φ_p "pas angulaire".

Intéressons nous au schéma ci-contre :

On peut dire que la dent n° 2

est en retard sur la dent n° 1

d'un angle φ_p , pour tout temps t positif.

Les équations cinématiques du mouvement de la dent

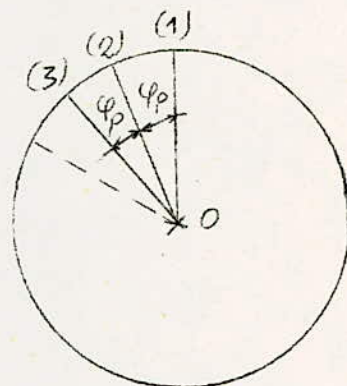
numéro deux s'écrivent alors immédiatement:

$$\begin{cases} X_2 = R [m\theta + \sin(\theta - \varphi_p)] \\ Y_2 = R \cos(\theta - \varphi_p) \end{cases}$$

Et en général pour la $k^{\text{ième}}$ dent on a :

$$k = 1, 2, \dots, Z$$

$$\begin{cases} X_k = R [m\theta + \sin[\theta - (k-1)\varphi_p]] \\ Y_k = R \cos[\theta - (k-1)\varphi_p] \end{cases}$$



- L'indice relatif aux coordonnées désignant le numéro de la dent
- D'autre part on remarque l'invariance de l'expression $m\theta$ du fait qu'elle désigne le temps.

(2.1) Interpretation

- Sur la figure 1; on a tracé la cycloïde engendrée par la dent numéro deux en prenant $\varphi_p = \beta$ pour des raisons de clarté de la construction.
Sur cette figure force nous est de constater qu'au voisinage des bords de la surface usinée résident de très légères imperfections, résultant inévitablement de la cinématique du fraisage. Ces défauts géométriques déprécient la qualité de la bande usinée; aussi, n'est-il pas intéressant de travailler sur tout le diamètre de la fraise. Pour éviter ces effets de bords néfastes donc; on préfère travailler plutôt avec un angle de contact c'est à dire sur une bande plus étroite, ou avec une fraise de plus grand diamètre (cette question sera étudiée plus bas).
Mais on peut tout aussi bien usiner une pièce bien plus large que le diamètre de la fraise. Il suffit d'effectuer plusieurs passes juxtaposées. Malheureusement dans ce cas apparaissent des défauts géométriques du fait que les surfaces usinées ne sont pas en général exactement à la même cote, on obtient ce qu'on appelle des "gradins".

(2.2) Coefficient de vitesse

On définit le coefficient de vitesse par le rapport $m = \frac{V}{\omega R}$ c'est un des principaux éléments du régime de coupe. Dans la pratique, on l'exprime du manière différente en se servant de l'avance par dent qu'on note S_z et du pont angulaire φ_p .

S_z est donc la distance parcourue par la table lorsque la fraise aura tourné de l'angle φ_p , ce qui correspond à un temps effectif φ_p/ω . On peut alors écrire $S_z = V \varphi_p/\omega$

De là il est facile de déduire les expressions :

$$m = \frac{S_z}{R \varphi_p} ; S_z = R m \varphi_p$$

(2.3) Epaisseur de la tranche cisailée dans la direction (x, x) et aire de la tranche cisailée.

Ecrivons les équations de la courbe décrite par la dent n° 1 et celles de la dent (n° 2).

On a

$$\begin{cases} x_1 = R (m \theta + \sin \theta) \\ y_1 = R \cos \theta \end{cases} \quad \text{pour } \theta \in [0, \pi]$$

et

$$\begin{cases} X_2 = R [m\varphi + \sin(\varphi - \varphi_p)] \\ Y_2 = R \cos(\varphi - \varphi_p) \end{cases} \text{ pour } \varphi \in [\varphi_p, \pi + \varphi_p]$$

- Il est à remarquer le changement de paramètre effectué dans les équations de la courbe (n°2) du fait que nous opérons en équations non-cinématiques.

Faisons alors le changement de variable $\theta = \varphi - \varphi_p$

D'où il vient : $X_2 = R [m(\theta + \varphi_p) + \sin \theta] = Rm\varphi_p + R(m\theta + \sin \theta)$

$$\text{ou encore } X_2 = Rm\varphi_p + X_1$$

$$\text{de même } Y_2 = R \cos \theta = Y_1$$

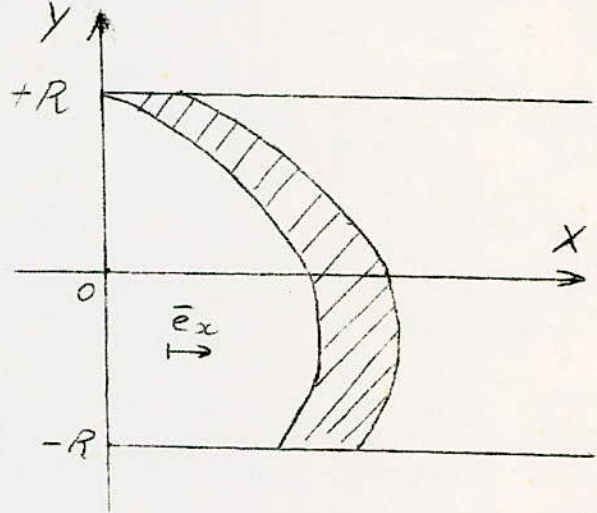
Par définition on appelle épaisseur de la tranche cisailée dans la direction (x, x)

la différence : $X_2 - X_1 = Rm\varphi_p$

Une première remarque s'impose :

la courbe décrite par une dent quelconque s'obtient par simple translation de la courbe décrite par la dent précédente du vecteur

$(X_2 - X_1) \bar{e}_x$
 \bar{e}_x étant le vecteur unitaire dans la direction (x, x) .



Deuxièmement : la dimension de l'outil suivant un rayon ne saurait en aucun cas être inférieure à cette valeur.

- L'aire de la tranche cisailée se calcule alors (en négligeant les effets de bords).

$$a = \int_{-R}^R (X_2 - X_1) dy$$

$$a = \int_{-R}^R (Rm\varphi_p) dy = 2R(Rm\varphi_p) = 2R S_z$$

Appelons D le diamètre de la fraise

$$\text{il vient : } a = D \cdot S_z$$

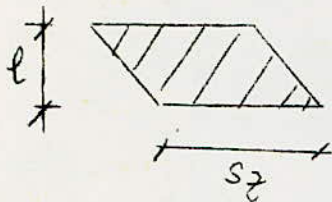
C'est la surface de tranche cisailée balayée par une dent en un tour de la fraise.
 Cependant en un tour, il passe Z dents. D'où l'aire totale effective pour un tour
 s'écrit : $Z a = D Z S_z$

- Si on appelle l la largeur du copeau enlevée, le volume total de copeau pour un tour
 s'obtient en multipliant la quantité ci-dessus par l . On a alors $l D Z S_z \left(\frac{\text{vol}}{\text{tour}} \right)$

- Calcul du débit.

La fraise effectue $\frac{\omega}{2\pi}$ (tour/sec)

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \frac{\omega}{2\pi} l D Z S_z = \frac{\omega l D S_z}{\varphi_p}$$



ou encore en explicitant : $S_z = R \omega \varphi_p$ et $m = \frac{v}{\omega R}$

il vient $\mathcal{D} = l D v$ (vol/sec)

On remarque que le débit est indépendant de la
 vitesse angulaire de rotation.

(3) Fraisage symétrique

On parle de fraisage symétrique lorsque l'axe de symétrie de notre pièce dans le sens longitudinal coïncide avec l'axe de la fraise.

(3.1) Angle de contact :

C'est l'angle qui sous-tend l'arc de circonférence de la fraise en contact dans la zone de coupe avec l'ébauche.

Pour chiffrer cet angle, on a en utilisant la relation générale des triangles.

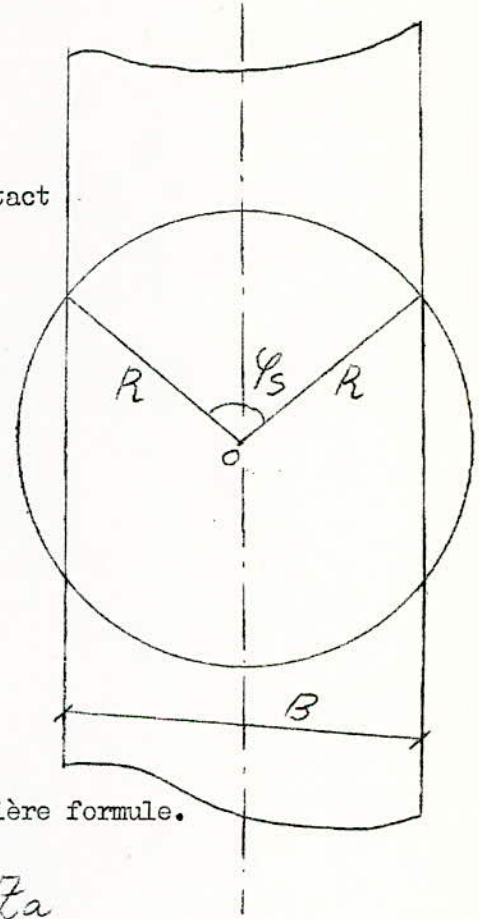
$$B^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \varphi_s$$

ce qui donne : $\varphi_s = \text{Arccos} \left(1 - \frac{B^2}{2R^2} \right)$

qu'encore $\sin \varphi_s / 2 = B / 2R$

$$\Rightarrow \varphi_s = 2 \text{Arcsin} \frac{B}{2R}$$

pour la simplicité on préférera cette dernière formule.



(3.2) Nombre effectif de tranchants en oeuvre : Z_a

C'est le nombre vrai de dents (ou de tranchants) en train de couper dans la matière. La particularité de ce nombre Z_a est qu'il est variable dans le temps; plus précisément, la valeur de Z_a alterne entre un certain nombre entier et l'entier immédiatement supérieur. Le calcul de ce nombre se mène de la façon suivante : Tout d'abord rappelons que l'angle séparant deux dents consécutives est noté par : $\varphi_p = 2\pi / Z$; Z étant bien entendu le nombre de dents que comporte notre circonférence.

Ensuite considérons le rapport φ_s / φ_p , et convenons de noter la partie entière d'un nombre réel quelconque par les crochets doubles II - II :

$$\text{Ainsi } \frac{\varphi_s}{\varphi_p} = \text{II} \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \text{II} + \left(\frac{\varphi_s}{\varphi_p} - \text{II} \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \text{II} \right)$$

l'angle résiduel est donc : $\varphi_s - \varphi_p \text{II} \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \text{II} < \varphi_p$

vu que le nombre de tranchants est plus grand de un du nombre des intervalles;
 le nombre de tranchants est donc à priori $\lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \rfloor + 1$. Cependant il apparait
 qu'au cours de la rotation de la fraise existe une configuration "maximale" pour
 laquelle $Z_a = \lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \rfloor + 1$ et une autre pour laquelle $Z_a = \lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \rfloor$

(c'est à dire au minimum)

D'où en définitif : $Z_a = \left\{ \lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \rfloor \text{ ou } \lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \rfloor + 1 \right\}$

exemple

On donne les valeurs suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 50 \text{ mm} \\ B = 80 \text{ mm} \end{array} \right. \quad Z = 8$$

calculer φ_s et Z_a : $\varphi_s = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$

ensuite on a $B/2R = \frac{80}{2 \times 50} = 0,8$; $\text{Arcsin } B/2R = 53,13^\circ$

$\Rightarrow \varphi_s = 2 \times 53,13^\circ = 106,26^\circ = 106^\circ 15'$

$$\frac{\varphi_s}{\varphi_p} = \frac{106,26^\circ}{45^\circ} = 2,36 \Rightarrow \lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \rfloor = 2$$

D'où $Z_a = \{ 2 \text{ ou } 3 \}$ alternativement

(4) Fraisage asymétrique

Par opposition au cas précédent, le fraisage asymétrique survient lorsque les axes de symétrie de la fraise et de la pièce ne sont pas confondus et ce suivant le sens longitudinal toujours.

- le sens de rotation de la fraise étant fixé (sens des aiguilles d'une montre). On adopte comme positive l'excentricité qui déplace l'axe de la fraise vers la gauche par rapport à l'axe de symétrie de la pièce.

(4.1) Calcul de φ_s

$$\text{on a : } \cos \varphi_1 = \frac{B/2 + e}{R}$$

$$\text{et } \cos \varphi_2 = \frac{B/2 - e}{R}$$

$$\text{ce qui donne } \varphi_1 = \text{Arccos } \frac{B+2e}{2R}$$

$$\text{et } \varphi_2 = \text{Arccos } \frac{B-2e}{2R}$$

$$\text{et enfin } \varphi_s = \pi - (\varphi_1 + \varphi_2)$$

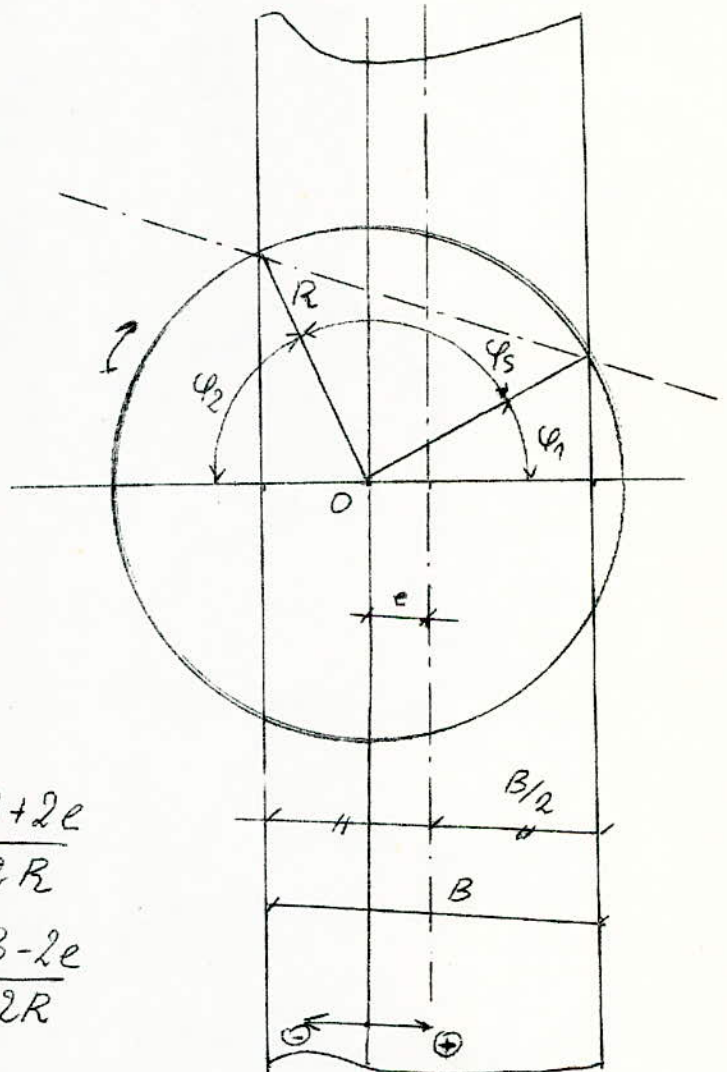
On obtient une formule plus condensée de la manière suivante :

$$\cos \varphi_s = -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$$

$$\text{en posant } a = \frac{B+2e}{2R} \text{ et } b = \frac{B-2e}{2R}$$

il vient

$$\varphi_s = \text{Arccos } [\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - ab]$$



(4.2) Calcul de Z_a

pour les mêmes raisons que celles vues dans la section (3)

$$\text{on a : } Z_a = \left\{ \left\lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \right\rfloor \text{ ou } \left\lfloor \frac{\varphi_s}{\varphi_p} \right\rfloor + 1 \right\}$$

Maintenant disons quelques mots sur l'intérêt qu'on a de travailler avec une excentricité. En premier lieu l'excentricité augmente l'angle de contact φ_s , et ce quel soit son type positive ou négative. En effet comme on peut le constater dans la formule donnant φ_s sous forme condensée la fonction $\varphi_s(e)$ est paire

$$\varphi_s(-e) = \varphi_s(e)$$

Il suffit donc d'étudier $\varphi_s(e)$ pour les valeurs positives de e ; à ce propos on a tracé un tableau donnant quelques valeurs numériques de φ_s en fonction de $B/2R$ et e/R

Ensuite parce que dans le cas d'une excentricité positive, on constate une diminution de l'amplitude des vibrations. Dans cet ordre d'idées, parfois on cherche d'augmenter

Z'_a (calculé pour le fraisage symétrique) d'une unité, en excentrant notre pièce par rapport à la fraise.

Pour de telles conditions de coupe, on obtient de bons résultats concernant la précision d'usinage.

La valeur correspondante de l'excentricité s'appelle alors excentricité "optimale".

L'angle de contact φ'_s pour le fraisage symétrique a pour expression :

$$\varphi'_s = 2 \text{ ARC sin } B/2R$$

$$\text{on pose : } \left\lfloor \varphi'_s/\varphi_p \right\rfloor = n-1 \Rightarrow Z'_a = \{n-1, n\}$$

$$\text{si on impose la condition : } \varphi_s/\varphi_p = \left\lfloor \varphi_s/\varphi_p \right\rfloor = n \Rightarrow Z_a = \{n, n+1\}$$

$$\text{ce qui s'écrit symboliquement : } Z_a = Z'_a + 1$$

En manipulant à dessein la relation donnant φ_s ,

$$\text{on a : } \cos^2 \varphi_s + 2a \sin \varphi_s = 1 - (a^2 + b^2)$$

remplaçons alors a et b par leur valeur :

$$\text{il vient : } \cos^2 \varphi_s + 2 \left[\left(\frac{B}{2R} \right)^2 - \left(\frac{e}{R} \right)^2 \right] \cos \varphi_s = 1 - 2 \left[\left(\frac{B}{2R} \right)^2 + \left(\frac{e}{R} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{e}{R}\right)^2 [1 - \cos \varphi_s] = [1 - \cos^2 \varphi_s] - 2 \left(\frac{B}{2R}\right)^2 [1 + \cos \varphi_s]$$

ou encore en divisant par $2(1 - \cos \varphi_s)$

$$\left(\frac{e}{R}\right)^2 = \frac{1 + \cos \varphi_s}{1 - \cos \varphi_s} \left[\frac{1 - \cos \varphi_s}{2} - \left(\frac{B}{2R}\right)^2 \right]$$

$$\text{soit } \left(\frac{e}{R}\right)^2 = \cot^2 \frac{\varphi_s}{2} \left[\sin^2 \frac{\varphi_s}{2} - \left(\frac{B}{2R}\right)^2 \right]$$

$$\text{et enfin } \frac{e}{R} = \cot \frac{\varphi_s}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_s}{2} - \left(\frac{B}{2R}\right)^2}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer φ_s par sa valeur c'est à dire :

$$\varphi_s = n \varphi_p = n \frac{2\pi}{Z}$$

D'où

$$e = R \cot n \frac{\pi}{Z} \sqrt{\sin^2 n \frac{\pi}{Z} - \left(\frac{B}{2R}\right)^2}$$

Application Numérique

avec les données de l'exemple vu dans la section (3)

on a :

$$n = 3, Z = 8$$

$$R = 50 \text{ mm} ; \frac{B}{2R} = 0,8 \Rightarrow \left(\frac{B}{2R}\right)^2 = 0,64$$

$$\Rightarrow \frac{\pi n}{Z} \text{ en degré est égal à : } 180^\circ \times \frac{3}{8} = 67,5^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin 67,5^\circ = 0,924 \Rightarrow \sin^2 67,5^\circ = 0,85 \\ \cot 67,5^\circ = 0,414 \end{array} \right\}$$

$$\sin^2 \frac{\pi n}{Z} - \left(\frac{B}{2R}\right)^2 = 0,85 - 0,64 = 0,21$$

$$\text{D'où } e = 50 \times 0,414 \times \sqrt{0,21} = 9,47 \text{ mm.}$$

 // TABLEAU DE VALEURS DE ψ EN DEGRE

$\frac{B}{2R}$ \ C/R	0	. 05	. I	I5	. 2	. 25	. 3
I	180°						
9	128 32°	130 02°	143.13°				
.8	106 26°	106 8°	108 59°	112.35°	126 87 °		
. 7	88.85°	89.13°	90°	91.58°;	94.16°	98.55°	113.58°
6	73 74°	73 91°	74.43°	75 33°	76 75°	78.70°	81.62°
.5	60°	60 11°	60 45°	61 03°	61 89°	63 07°	64.67°
.4	47 16°	47 23°	47.46°	47 85°	48.41°	49.17°	50.17°

(4.3) Aire de la tranche cisailée

Pour faire le calcul, on doit se placer obligatoirement dans le repère d'axes OX et OY attaché à la fraise. Dans la cas du fraisage symétrique, l'aire de la tranche cisailée se calcule immédiatement de la manière suivante :

$$A_{sym} = \int_{-B/2}^{B/2} (x_2 - x_1) dy = S_2 \int_{-B/2}^{B/2} dy = BS_2$$

et pour le fraisage asymétrique on a :

$$A_{asym} = \int_{-(B/2+e)}^{B/2-e} (x_2 - x_1) dy = S_2 \int_{-(B/2+e)}^{B/2-e} dy = BS_2$$

A partir de là, on peut proclamer l'invariance de l'aire de la tranche cisailée quel que soit la valeur de l'excentricité et de son signe : $A_{sym} = A_{asym}$.

ce qui implique donc en particulier, l'identité de la rentabilité du processus de coupe dans les deux cas précités.

- (5) Etude approximative de l'épaisseur du copeau .
 -o-

Cette étude se fait graphiquement en fonction de l'angle de rotation.

(5.1) Dépendance expérimentale

On construit deux tronçons des courbes cycloïdes engendrées par exemple par la dent (n°1) et (n°2) par la méthode exposée précédemment.

Ensuite, on convient de faire varier l'angle de rotation θ de l'angle β à chaque fois. On repère alors la dent (n°2) au moment où son ordonnée est maximale ($\theta = 0$) et on trace son rayon vecteur $\overline{1'1'}$.

On suppose qu'à cet instant, l'épaisseur du copeau est nulle (hypothèse entièrement justifiée du fait qu'on se trouve aux abords immédiats des tangentes aux deux courbes)

Pour chaque valeur de l'avance $R_m \beta$, on numérote sur l'axe OX les positions occupées par le centre de la fraise au moyen des nombres $\{ 1, 2, 3, \dots, j, \dots \}$
 l'indice j correspond donc pour la dent (n°2) à l'avance totale $(j-1) R_m \beta$

Puis à l'aide d'un compas ouvert à R ou d'une règle graduée, on trace successivement les rayons vecteurs $\overline{2'2'}$, $\overline{3'3'}$, ..., $\overline{j'j'}$, ... etc

L'épaisseur du copeau est alors pour chaque position ainsi indiquée : $//\overline{2'2'}//$, $//\overline{3'3'}//$, ..., $//\overline{j'j'}//$, ... etc

L'erreur de positionnement est diminuée du fait que les angles $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \dots, \hat{j}$, ... etc doivent vérifier nécessairement les conditions.

$$\hat{1} = \frac{\pi}{2} + \theta_1, \quad \hat{2} = \frac{\pi}{2} + \theta_2, \quad \hat{j} = \frac{\pi}{2} + \theta_j, \dots \text{ etc.}$$

$$\text{ou} \quad \theta_j = (j-1) \beta$$

Il est à remarquer qu'ici β n'est pas l'angle entre deux dents, mais l'angle de subdivision servant à la construction graphique. Plus on veut de précision plus β doit être petit.

Indiquons enfin que l'épaisseur du copeau sera notée par $S(\theta)$:

L'exemple de (la fig. 2) est tracé avec les valeurs suivantes :

$$\left(\begin{array}{ll} R = 55 \text{ mm} & m = 0,464 \\ \beta = \pi/8 & R_m \beta = 10 \text{ mm} \end{array} \right.$$

- pour la simplicité on choisit ($\varphi_p = \beta$)

On relève les différentes épaisseurs S_j : $j = 1, 2, \dots$ etc

en rapport avec les positions angulaires θ_j

on reçoit alors le tableau ci-dessous :

θ_j	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\frac{3\pi}{8}$	$\pi/2$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π	$\pi + \pi/8$
S_j (mm)	0	3	5	8	10	11	12	7	3	0

ce qui nous permet de représenter $S(\theta)$ en fonction de θ .
(voir figure)

(5.2) Remarques

a- Si on veut mener une étude analytique de $S(\theta)$, on utilise la formule d'interpolation de Newton qui donne alors $S(\theta)$ sous forme polynomiale.

b- Les paramètres qui entrent en jeu dans l'étude de l'épaisseur du copeau sont en nombre de trois; il s'agit : du rayon R de la fraise, du coefficient de vitesse m et enfin du pas angulaire φ_p .

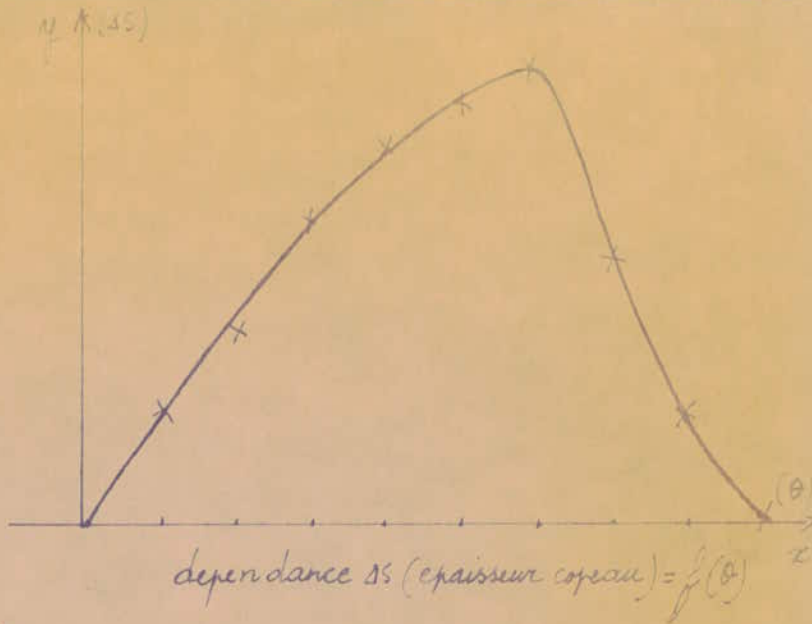
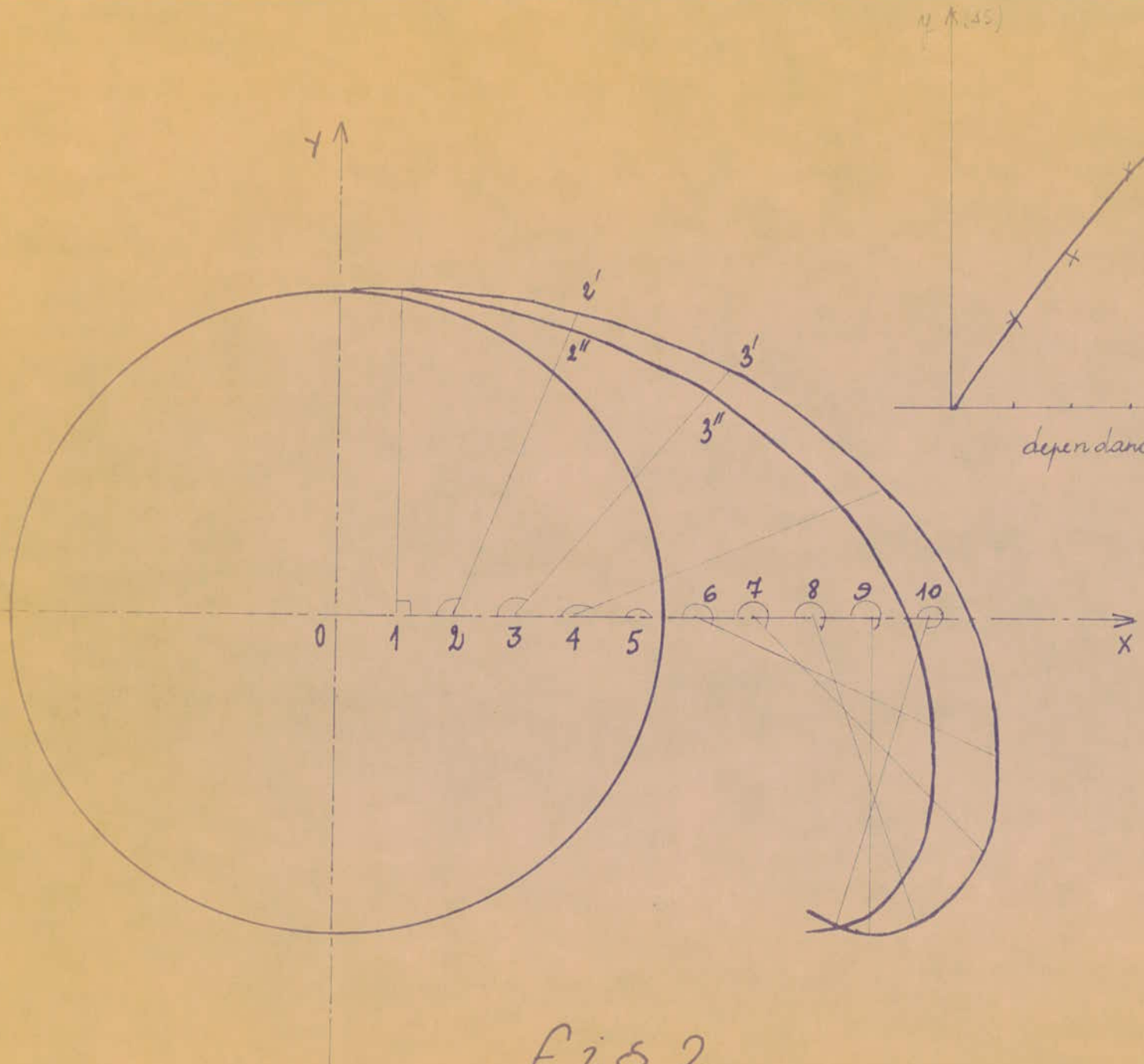
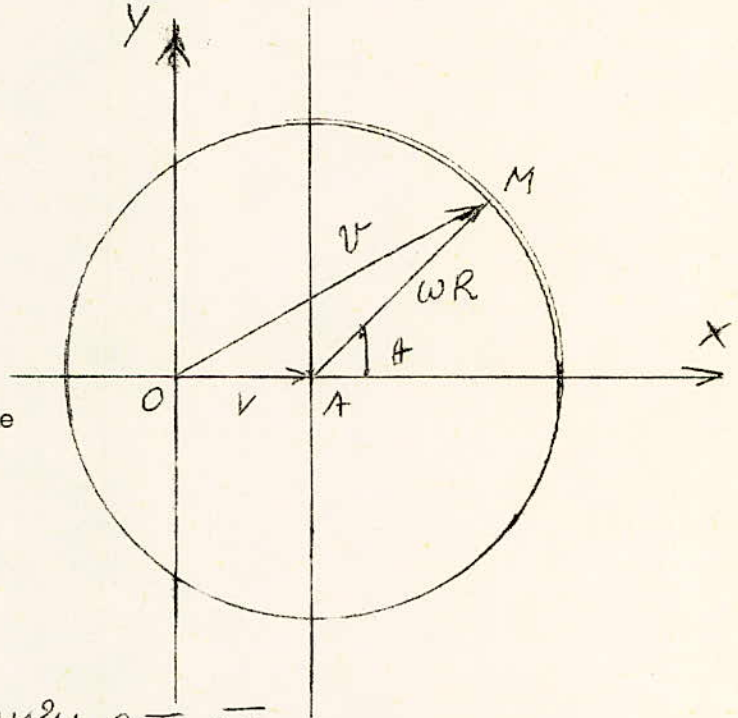


Fig 2

Examinons la dépendance de $S(\theta)$ en fonction de la variation de ces paramètres. Intuitivement, on peut poser que l'épaisseur du copeau est proportionnelle au rayon de la fraise car pour des rayons différents, on obtient deux tracés graphiques semblables mais pas à la même échelle. Tandis que pour des coefficients de vitesse différents ou même des pas angulaires différents; la proportionnalité n'est pas linéaire. On se trouve donc dans d'autres conditions de coupe.

(6) Hodographe des vitesses

Il a été dit plus haut que nous avons relativement à la fraise et à la table: deux référentiels galiléens en mouvement l'un par rapport à l'autre. On peut donc à tout moment, appliquer le principe de la composition des vitesses. Ce qui nous fournit alors la vitesse de coupe qu'on note v .



on a donc : $\vec{v} = \vec{OA} + \vec{AM}$

$$v^2 = OA^2 + AM^2 + 2 \vec{OA} \cdot \vec{AM}$$

$$v^2 = V^2 + (\omega R)^2 + 2 V (\omega R) \cos \theta$$

$$v^2 = (\omega R)^2 \left[1 + \left(\frac{V}{\omega R}\right)^2 + 2 \left(\frac{V}{\omega R}\right) \cos \theta \right]$$

$$\Rightarrow v = \omega R \sqrt{1 + m^2 + 2m \cos \theta} \Rightarrow \begin{cases} v_{\min} = \omega R (1 - m) \\ v_{\max} = \omega R (1 + m) \end{cases}$$

Vu que $(m \ll 1)$

comme critère d'appointage, on considère la vitesse moyenne de coupe

$$v_{\text{moy}} = \frac{v_{\min} + v_{\max}}{2} = \underline{\omega R}$$

Le résultat obtenu est très important car alors pour déterminer les paramètres du régime de coupe, il suffit de considérer la vitesse de rotation de la fraise et son rayon seulement sans se soucier de l'avance (sous réserve bien sûr que m)

(7) Quelques remarques sur la distribution angulaire des dents.

Jusqu'ici on a considéré que les dents de la fraise étaient régulièrement espacées d'un angle φ_p .

Si on désigne par Z le nombre total de dents que comporte notre fraise.

On a pour ce cas précis $\varphi_p = 2\pi/Z$

Concurremment à cela, on a mis en évidence le rôle du pas angulaire en tant que facteur de régime.

Puisqu'il en est ainsi, il nous est donc possible d'intervenir sur le pas angulaire c'est à dire en provoquant une irrégularité de sa distribution en vue de localiser le meilleur régime de coupe. (En ce qui concerne cette question, les recherches n'en sont encore qu'à leur début, et, bien sûr seule de nombreuses expériences pourraient nous renseigner définitivement sur l'intérêt probable de cette modification).

Dans ce qui suit, on donne quelques algorithmes parmi les plus simples.

On serait tenté de dire encore parmi les plus "naturels"

(7.1) Algorithmes de distribution angulaire

Pour tous ces cas la somme de tous les φ_p doit être obligatoirement égale à 2π

1) Alternativement espacées : $\varphi_p = \{\alpha, \alpha'\}$

$$2\pi = \frac{Z}{2}(\alpha + \alpha') \Rightarrow Z \text{ doit être un nombre pair}$$

$$\alpha + \alpha' = 4\pi/Z$$

Le choix se porte alors sur l'un des angles α et α' ou sur la différence $(\alpha - \alpha')$

2) en progression géométrique :

$$\varphi_p = \{\alpha, q\alpha, \dots, q^{z-1}\alpha\} \quad (q > 1)$$

$$\Rightarrow z\pi = \alpha \frac{q^z - 1}{q - 1}$$

Le choix se porte sur $(q \approx 1) \Rightarrow \alpha = z\pi \frac{q-1}{q^z-1}$

De plus on impose la condition $q^z \leq A$
(critère limitatif)

3) en progression arithmétique.

$$\varphi_p = \{\alpha, \alpha + \delta, \alpha + 2\delta, \dots, \alpha + (z-1)\delta\}$$

$$\Rightarrow z\pi = z\alpha + \frac{z(z-1)}{2}\delta$$

z étant donné, le choix se porte sur δ
(raison de notre progression)

ou encore en fixant α et δ , on peut calculer le nombre de dents correspondantes en résolvant une équation du 2^{ème} degré (assez simple) et qui est :

$$z^2 + z\left(\frac{2\alpha}{\delta} - 1\right) - \frac{4\pi}{\delta} = 0$$

on choisit alors le nombre entier le plus proche de la racine positive et on recalcule δ .

Pendant la coupe des métaux, il se produit des vibrations qui sont généralement indésirables, parce qu'elles se répercutent d'une manière défavorable sur la qualité de la pièce à usiner, elles conduisent aussi à une usure prématurée des organes de la machine, et elles risquent de diminuer les tenues de l'outil.

En fraisage les causes engendrant les vibrations sont assez variées et peuvent être classées de la manière suivante.

2 VIBRATIONS FORCÉES

21) Provoquées par une source extérieure ou intérieure au système technologique machine-outil-pièce (M.P.O), mais agissant indépendamment du processus de coupe.

211) Cas où la source de vibrations est extérieure au système technologique (M.P.O).

2111) Il s'agit de vibrations engendrées par les machines voisines et transmises par l'intermédiaire des fondations, on parle surtout de machines dont le processus de production est basé sur des répétitions de chocs, tels que les marteaux pilons de la forge, les presses à emboutir, les vibreurs pour bétons etc...

2112) Si une source thermique (four) se trouve à proximité de la machine peut causer des vibrations.

22) Cas où la source de vibrations est intérieure au système technologique (M.P.O).

Les causes de vibrations trouvées sont:

2121) Causes liées à la conception:

- Solution constructive défectueuse des organes de la machine.
- Choix des matériaux des pièces frottantes, du bâti etc...

Exp: Le cas de la fonte qui présente une bonne qualité frottante et une capacité d'absorption de vibrations excellente.

2122) Les causes liées aux imprécisions d'exécution.

- Usinage incorrect des surfaces fonctionnelles.
- Equilibrage et rigidité insuffisants des pièces de la machine.

Si une broche n'est pas parfaitement équilibrée, alors une force centrifuge prend naissance par suite du désaxage et provoque des vibrations entretenues.

- Mécanisme de transmission défectueux.
- Aspérités des coutures de la courroie.

Erreurs de taillage des engrenages entraînent des irrégularités de rotation.

2123) Causes liées aux défauts de montage.

- Des roues dentées, des roulements, du jeu dans les paliers.
- Des éléments du mécanisme d'asservissement hydraulique (clapets étranglants, distributeurs, filtres et pompes) qui provoquent les oscillations de la table.

2124) Causes liées au processus technologique de production.

- Utilisation non conforme du point de vue destination technologique.
- Sollicitation à des charges irrationnelles des éléments de la machine

2125) Causes liées à l'usure et à la lubrification

- L'usure à une influence importante sur les surfaces fonctionnelles, glissières, chemins de roulements flancs de denture etc...
- Vibrations entretenues par certaines propriétés du film d'huile dans les paliers abondamment lubrifiés.

22) Vibrations forcées provoquées par le processus de coupe.

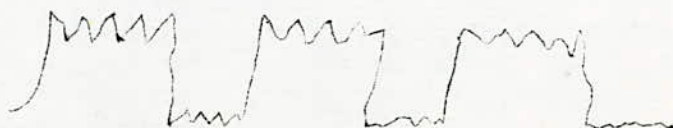
221) La dent de la fraise enlève un copeau d'une épaisseur variable pour un cycle de coupe (voir chapitre cinématique) alors la loi de Merritt $F(\theta) = K S(\theta)$ nous indique que l'effort de coupe varie dans certaines limites par conséquent les oscillations de cet effort produisent des vibrations entretenues.

222) Vibrations dues à la discontinuité du processus de coupe:

- ne taillent simultanément que les dents d'une partie du pourtour de la fraise engagées dans le métal.

223) Les dents de la fraise en s'engageant dans la matière d'œuvre enlèvent une épaisseur toujours plus grande de copeau et sortant immédiatement cela entraîne une chute brusque des efforts de coupe.

Les vibrations enregistrées auront la forme suivante.



3)

AUTO-VIBRATIONS

Les auto-vibrations (ou broutement) sont en effet des perturbations de travail de coupe et ne disparaissent que lorsqu'on cesse d'usiner.

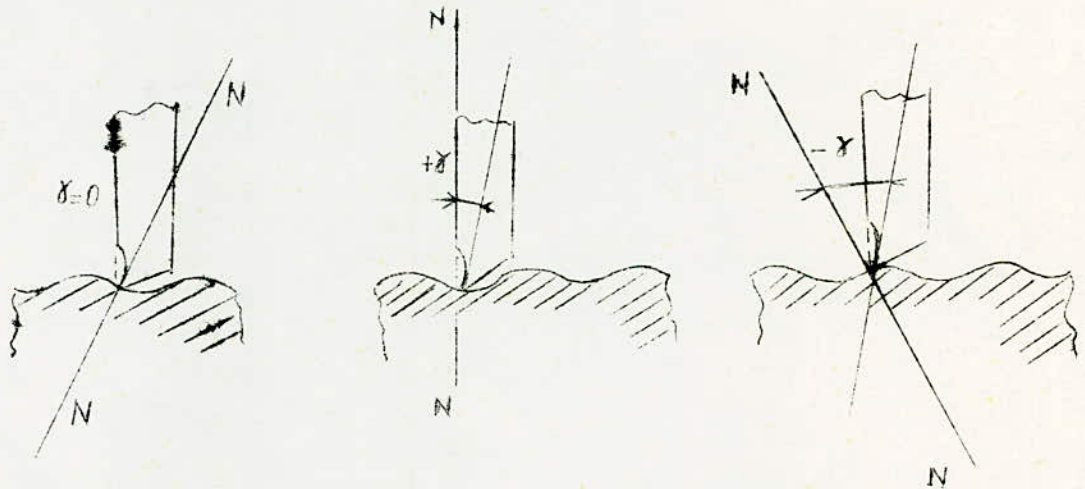
Les théories actuelles ne permettent pas de prévoir complètement les conditions d'apparitions de vibrations.

Dans ce paragraphe nous allons donner les principales causes qui engendrent les vibrations.

- 31) Elles se produisent par suite de variations de la force de frottement sur les faces d'attaque et de décapille de l'outil qui sont fonction de variation de la vitesse de glissement du copeau suivant la face de l'outil.

La variation de la force de frottement provoque une variation de l'effort de coupe qui entretiendra les vibrations.

- 32) Après un usinage en régime de vibrations l'arête tranchante décrit des lignes ondulées ainsi la géométrie de l'outil se trouve modifiée (voir schéma ci-dessous) en effet la variation de l'angle γ entraîne une variation de glissement du copeau par conséquent la variation de la force de frottement (on revient donc à la cause initiale).



33) La Pénétration de l'arête tranchante de l'outil dans la matière à usiner non déformée augmente la dureté de celle-ci, par suite du phénomène d'écrouissage alors la réaction du mandrin porte fraise provoque l'enfoncement du tranchant de la dent avec un effort de plus en plus important, pour une rotation donnée le tranchant se trouvant enfoncé dans le métal décrira une cycloïde allongée et commencera par enlever les copeaux cela provoque les vibrations de la table et du mandrin porte fraise.

34) Les auto-vibrations résident du phénomène de coupe lui même comme on verra dans le chapitre théorie du formation du copeau) en effet la formation du copeau est un processus assez complexe, il s'accompagne de déformations plastiques et élastiques, il se produit également un frottement assez important qui donne naissance à une résistance négative, le travail effectué par cette force est positif, il donne une énergie cinétique supplémentaire et la vibration augmente.

Les Auto-vibrations sont quelques fois représentées par un système linéaire à amortissement négatif.

- Lutte contre les vibrations

forcées

est la conception et la construction judicieuse des mécanismes et des éléments composants.

- Equilibrage des masses tournantes
- Rigidité suffisante
- Fondation anti-vibratoire adéquate

Auto-Vibrations

- Choix des régimes adéquats pour le travail de l'enlèvement du métal.
- Emploi d'un liquide convenable de refroidissement et de lubrification.

vibrations engendrées pendant l'usinage des métaux sur les fraiseuses

1

vibrations propres

2

vibrations forcées

3

auto-vibrations

entretenu par la variation de l'effort de coupe

2.1

variation de la section du copeau pour un cycle de coupe

2.2

discontinuité du processus de coupe

variation brusque de l'effort de coupe à la sortie de la dent

3.1

due à la variation de la force de frottement

3.2

due à la modification de la géométrie de l'outil après un usinage en régime de vibrations

3.3

due au phénomène d'écaillage

3.4

instabilité due à l'amortissement négatif

indépendants du processus de coupe

21.2

source interne au syst. tech M.P.O

21.1

source externe au syst. tech M.P.O

21.2.1

21.2.2

21.2.3

21.2.4

21.2.5

21.1.1

21.1.2

liée à la conception

liée aux imprécisions d'exécution

liée aux défauts de montage

liée au processus techn. de production

liée à l'usure et à la lubrification

vibrations transmises par les machines voisines.

Source thermique près du système M.P.O.

solution constructive defectueuse.

choix des matériaux.

usinage incorrect des surfaces fonctionnelles

équilibrage et rigidité insuffisante.

Mécanisme de transmission defectueux.

rous dentées, roulements etc...

du mécanisme d'asservissement hydraulique.

utilisation non conforme du point de vue destination technologique.

usure des surfaces fonctionnelles.

débit de lubrifiant.

principes physiques de la coupe des métaux

Le phénomène de la formation du copeau est un processus assez complexe qui s'accompagne de déformations plastiques et élastiques. Il donne lieu également à un frottement important, au dégagement de chaleur, à la formation d'une arête rapportée, à l'enroulement et au recroûtement du copeau au durcissement et à l'usure de l'outil.

Dans ce sous chapitre nous allons vous donner les bases du phénomène de formation du copeau dans un cas particulièrement simple : coupe orthogonale, telle que le trièdre formé par l'arête tranchante (α), vitesse d'avance \vec{v}_f , vitesse de coupe \vec{v}_c soit orthogonal.

1) grandeurs de base en coupe orthogonale

(voir fig 1.a) (cas du robotage)

- surface de coupe : surface par laquelle s'écoule le copeau
- surface de dépouille : surface en regard de la surface usinée sur la pièce (côté le talonage de l'outil sur la pièce)
- l'angle de coupe (γ) (ou de dégagement) c'est l'angle de la surface de coupe avec une perpendiculaire avec la surface usinée
- l'angle de tranchant (β) est l'angle du dièdre formé par les surfaces de coupe et de dépouille.
- l'angle de dépouille (α) est l'angle de la surface de dépouille avec la surface usinée
- le rapport de coupe ($c = \frac{h_1}{h_2}$) caractérise le gonflement du copeau
- l'angle de usaillement ϕ est l'angle du plan de formation du copeau avec la surface usinée

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{c \cos \gamma}{1 - c \sin \gamma}$$

F_v effort tangentiel ou effort principal de coupe

58

F_s effort d'avance ou effort axial

la coupe des métaux provoque une compression du métal devant l'outil caractérisée par le rapport c , ensuite survient une déformation plastique qui aboutit à la rupture. cette déformation produit le glissement de certaines couches par rapport à d'autres suivant des plans qui se confondent en général avec la direction des contraintes maximales de cisaillement, ce phénomène modifie les propriétés du métal et le rend de plus en plus dur.

On distingue 3 types fondamentaux de copeaux

copeau discontinu : le métal usiné est d'abord fortement comprimé, jusqu'à ce que la tension maximale de cisaillement dépasse la limite de résistance du métal, le copeau se cisaille et le cycle reprend

copeau continu sans arête rapportée : le métal usiné est encore fortement comprimé, mais il ne cisaille pas complètement

copeau continu avec arête rapportée : la formation d'un amas de métal sur l'arête de l'outil joue le rôle malgré sa stabilité variable avec les conditions de coupe, d'outil auxiliaire.

2) Analyse géométrique de la formation du copeau

la fig (1b) montre que dans le glissement le parallélogramme $ABOI$ est devenu le parallélogramme $CDOI$, les segments CD et AB sont alignés car $\text{Aire } CDOI = \text{Aire } ABOI$

OH est la hauteur commune des 2 parallélogrammes

$CD, AB, \text{ ou } OI$ sont des bases de même longueur, la déformation de cisaillement ϵ est:

$$\epsilon = \frac{BD}{OH} = \frac{AC}{OH} \quad BD = BH + HD = \frac{OH}{\tan \phi} + OH \tan(\phi - \gamma)$$

$$\epsilon = \cot \phi + \frac{OH}{OH} \tan(\phi - \gamma)$$

$$\boxed{\epsilon = \cot \phi + \tan(\phi - \gamma)}$$

de l'hodographe fig (1b) on en déduit

$$\begin{aligned}
 - V_s & \text{ vitesse de glissement} & V_s &= \frac{v \cos \delta}{\cos(\phi - \delta)} \\
 - V_c & \text{ vitesse de frottement} & & \\
 & \text{du copeau sur l'outil} & V_c &= c v
 \end{aligned}$$

** les valeurs de ϵ et $d\epsilon/dt$ en coupe sont beaucoup plus élevées que pour un essai au cisaillement simple

= l'angle ψ d'allongement maximum est obtenu en annulant la dérivée de la fonction $f(\psi) = \frac{OK}{OJ}$
avec $JK = BD = AC$

$$\begin{aligned}
 OK &= \frac{OH}{\sin \psi} & OJ &= \sqrt{OH^2 + HJ^2} = \sqrt{OH^2 + (HK - JK)^2} \\
 OJ &= \sqrt{OH^2 + (HK - BD)^2} & OJ^{-1} \times OK &= f(\psi) = \frac{1}{\sin \psi \sqrt{1 + [\cot \psi - \cot \phi - \cot(\phi - \delta)]^2}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{df(\psi)}{d\psi} = 0 \Rightarrow \boxed{\epsilon = 2 \cot 2\psi}$$

3) Analyse dynamique de la formation du copeau

Moyennant un certain nombre de simplifications, la théorie de MERCHANT permet de prévoir le système des forces qui explique la formation du copeau (voir fig 1c))

Hypothèses de calcul

- l'énergie nécessaire à la formation des (copeaux) surfaces nouvelles par l'enlèvement du copeau est négligeable
- le copeau est en équilibre sous l'action des forces de contact copeau-outil F' et des forces de déformation F
- le couple des forces de contact copeau-outil est négligeable et ne provoque pas de courbure du copeau.

On considère les projections de F et F'

$$F = \begin{cases} F_x = \text{force de contact copeau-outil suivant plan de coupe} \\ F_{xn} = \text{force normale au plan de coupe} \end{cases}$$

$F \begin{cases} F_V & \text{effort de coupe principal suivant direction de coupe } \vec{v} \\ F_S & \text{effort axial suivant direction d'avance } \vec{v}_s \end{cases}$

$F \begin{cases} F_{SH} & \text{Résistance au cisaillement suivant le plan de cisaillement} \\ F_{SHN} & \text{force normale au plan de cisaillement} \end{cases}$

on définit μ coefficient de frottement copeau outil par le rapport $\frac{F_S}{F_{SHN}} = \tan \tau$, il définit la résistance au glissement du copeau sur l'outil, recoupe en fait un ensemble de phénomènes très complexes qui se passent entre copeau-outil.

Calcul de \vec{F}

- sa direction est connue si τ l'est aussi
- son module est connue si F_{SH} est définie

en effet $F_{SH} = \sigma_{SH} \frac{A_0}{\sin \phi}$ σ_{SH} contrainte de cisaillement à cope.
 A_0 section = $h_1 \times b$
 b (largeur de coupe)

$$F = \frac{F_{SH}}{\cos(\tau - \gamma + \phi)} \quad F = \frac{F_V}{\cos(\tau - \gamma)}$$

$$\Rightarrow F_V = \frac{\cos(\tau - \gamma)}{\cos(\tau - \gamma + \phi)} \sigma_{SH} \frac{A_0}{\sin \phi}$$

σ_{SH} n'est pas constante pour cela on utilise la formule de CAQUOT BRIDGMAN

$$\sigma_{SH} = \sigma_0 + \sigma_{SHN} + c \tan \gamma \quad c \text{ dépend du matériau}$$

$$\frac{F_{SH}}{F_{SHN}} = \cot \gamma (\tau - \gamma + \phi) = \frac{\sigma_{SH}}{\sigma_{SHN}}$$

on obtient finalement :

$$F_V = \frac{2 A_0 \sigma_0 \cos(\tau - \gamma) \sin \gamma}{\cos(2\phi - \gamma + \tau - \gamma) - \cos(\tau - \gamma + \phi)}$$

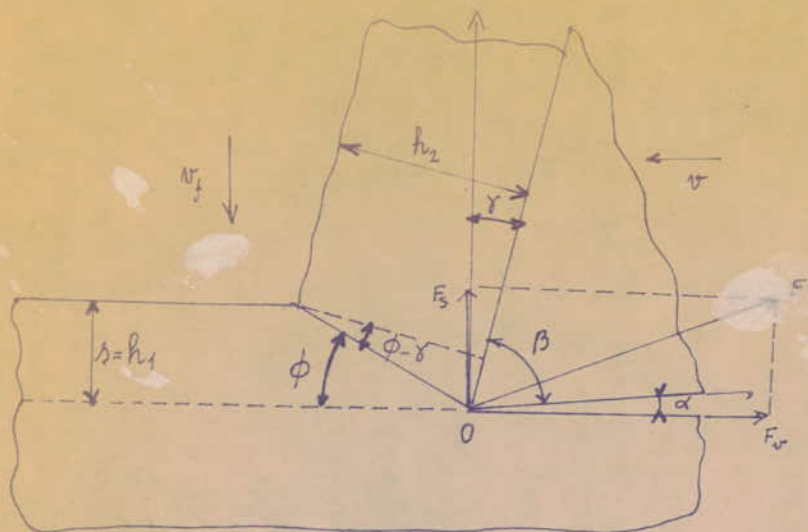
$$F_S = \frac{2 A_0 \sigma_0 \sin(\tau - \gamma) \sin \gamma}{\cos(2\phi - \gamma + \tau - \gamma) - \cos(\tau - \gamma + \phi)}$$

- répartition de l'énergie de coupe

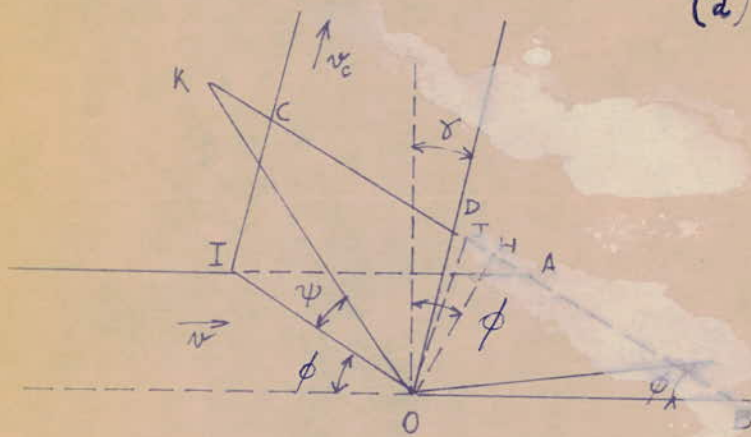
$$E = E_S + E_F = F_V V$$

$$E_S = F_{SH} V_S \quad E_F = F_S V_c$$

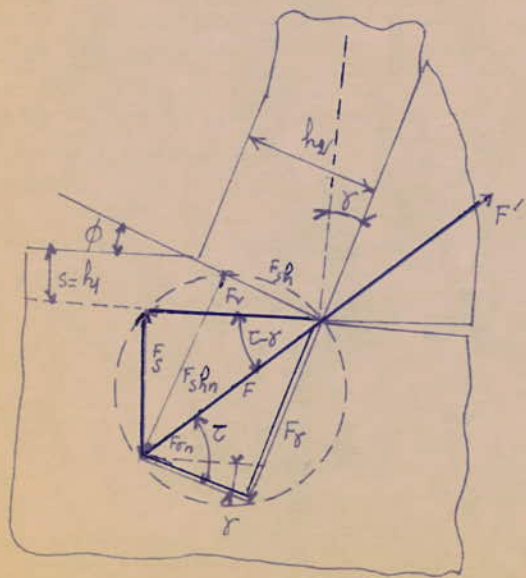
E énergie de coupe
 E_S énergie de déformation copeau
 E_F énergie de frottement du copeau



(a)



(b)



(c)

6

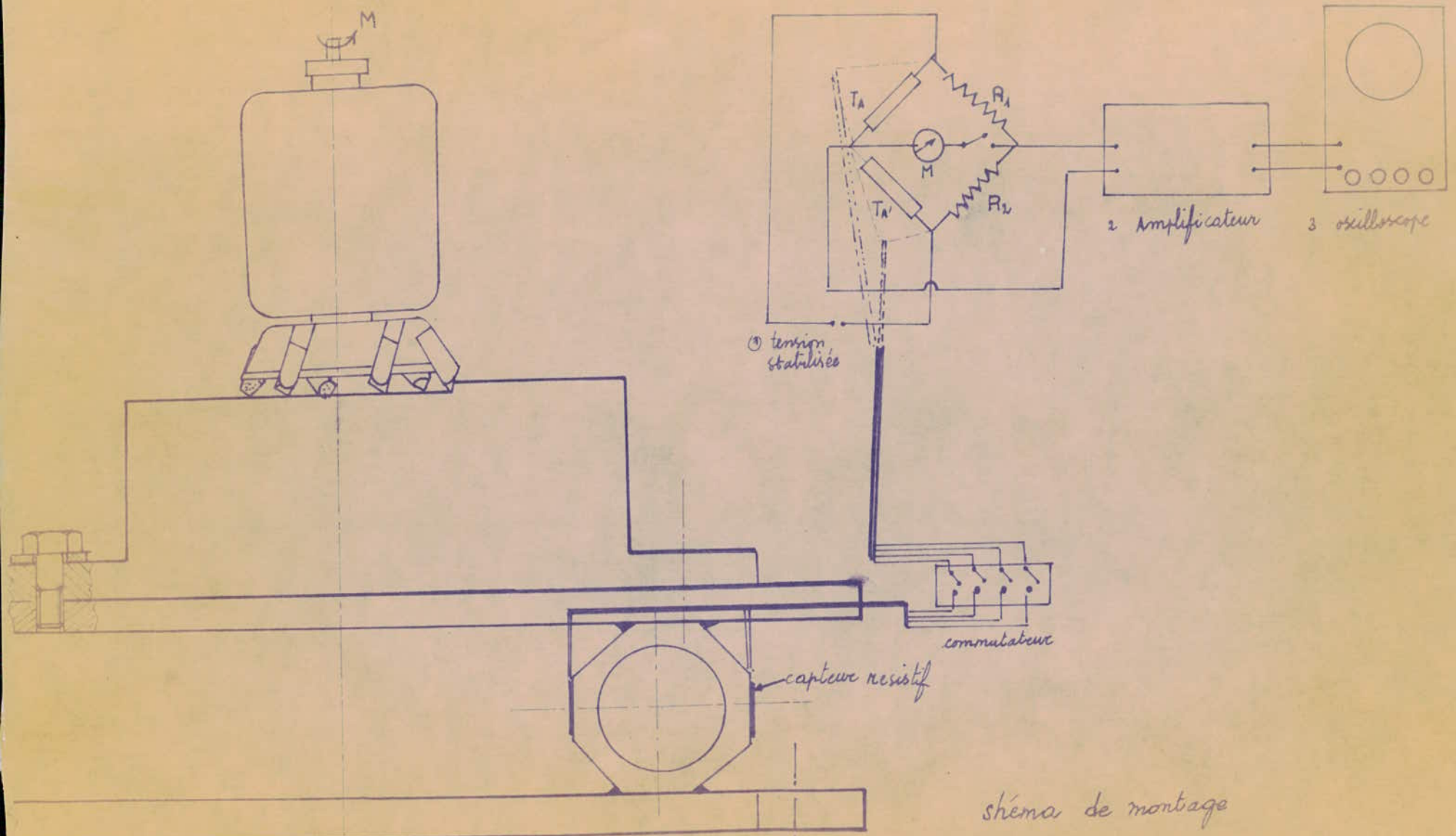


schéma de montage

