

6/86

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

T H E S E

المكتبة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

Présentée par :

Mme KETTAB née MITICHE Ratiba

Ingénieur E.N.P

Pour obtenir le diplôme de  
MAGISTER EN GENIE CIVIL

ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INFLUENCE DU  
BETON SUR LA CAPACITE PORTANTE D'UNE POUTRE  
HYPER-STATIQUE EN BETON ARME

soutenue publiquement le 28 mai 1986

devant le Jury d'examen :

Président : A. CHARIF - P.H.D  
Rapporteur : W. KUCZYNSKI - Professeur  
Examineurs: M.S. BARAKA - Chargé de cours  
M. BELAZOUGUI è Chargé de cours  
P. BONNEVILLE - Professeur  
Invité : B. TILIOUINE è Maître de conférences

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

**T H E S E**

Présentée par :

Mme KETTAB née MITICHE Ratiba  
Ingénieur E.N.P

Pour obtenir le diplôme de  
MAGISTER EN GENIE CIVIL

**ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INFLUENCE DU  
BETON SUR LA CAPACITE PORTANTE D'UNE POUTRE  
HYPER-STATIQUE EN BETON ARME**

soutenue publiquement le 28 mai 1986  
devant le Jury d'examen :

Président : **A. CHARIF - P.H.D**  
Rapporteur : **W. KUCZYNSKI - Professeur**  
Examineurs: **M.S. BARAKA - Chargé de cours**  
**M. BELAZOUGUI è Chargé de cours**  
**P. BONNEVILLE - Professeur**  
Invité : **B. TILIOUINE è Maître de conférences**

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

**T H E S E**

Présentée par :

Mme KETTAB née MITICHE Ratiba  
Ingénieur E.N.P

Pour obtenir le diplôme de  
MAGISTER EN GENIE CIVIL

**ETUDE EXPERIMENTALE DE L'INFLUENCE DU  
BETON SUR LA CAPACITE PORTANTE D'UNE POUTRE  
HYPER-STATIQUE EN BETON ARME**

soutenue publiquement le 28 mai 1986  
devant le Jury d'examen :

Président : A. CHARIF - P.H.D  
Rapporteur : W. KUCZYNSKI - Professeur  
Examineurs: M.S. BARAKA - Chargé de cours  
M. BELAZOUGUI à Chargé de cours  
P. BONNEVILLE - Professeur  
Invité : B. TILIOUINE à Maître de conférences

## SOMMAIRE

INTRODUCTION	1
CHAPITRE I - SECURITE DES STRUCTURES EN BETON ARME	4
1.1 - Définition des états limites	4
1.2 - Notion de la capacité portante ultime	5
1.3 - Sécurité des structures en béton armé	8
1.4 - Méthode semi-probabiliste - états limites	11
1.5 - Conception internationale pour le calcul	12
CHAPITRE II - METHODE DE CALCUL : THEORIE	15
2.1 - Généralités	15
2.2 - Rotule plastique et mécanisme	16
2.3 - Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite	17
2.4 - Loi de comportement	18
2.5 - Exposé des différentes méthodes de résolution	21
CHAPITRE III - DETERMINATION DE LA CHARGE LIMITE	29
3.1 - Théorème des travaux virtuels avec la loi de comportement bilinéaire	29
3.2 - Méthode des rotations imposées avec une loi de comportement bilinéaire	40
3.3 - Théorie de la dégradation continue de la rigidité	55
CHAPITRE IV - EXPERIMENTATION	69
4.1 - But et limites des essais	69
4.2 - Programme d'essais	69
4.3 - Exécution des essais	73
4.4 - Caractéristiques mécaniques des matériaux	79
4.5 - Formulation de béton pour confection de poutres	81

CHAPITRE V - ANALYSE THEORIQUE DES POUTRES HYPERSTATIQUES	91
5.1 - Résolution élastique	91
5.2 - Résolution par la méthode rigide plastique	94
5.3 - Méthode de Kuczynski	100
5.4 - Calcul d'après la réglementation (BAEL)	114
CHAPITRE VI - ANALYSE COMPARATIVE DES RESULTATS	118
6.1 - Synthèse des résultats expérimentaux	118
6.2 - Comparaison avec les résultats théoriques	125
CHAPITRE VII - CONCLUSIONS	143
7.1 - Conclusions générales	143
7.2 - Conclusions techniques	144
7.3 - Orientation future du travail	145
ANNEXES	
ANNEXE A - ETALONNAGE DE LA PRESSE	146
ANNEXE B - CALCULS STATISTIQUES DES CARACTERISTIQUES MECANIQUES	151
ANNEXE C - RESULTATS DE MESURES	152
ANNEXE D - FONCTIONS LAISSE • METHODE CONTINUE	159
ANNEXE E - TABLEAUX D'ITERATION, METHODE CONTINUE	165
BIBLIOGRAPHIE	183

## DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

- mon mari, pour m'avoir encouragée, aidée et surtout pour avoir subi mes problèmes de recherche ;
- ma mère et mon père pour m'avoir mise au monde et permis d'étudier malgré certaines contraintes ;
- mes enfants Nadia, Mohammed Amine, ...
- mes frères et soeurs pour leur soutien moral
- ma belle-mère et mon beau-père pour leur gentillesse et leur compréhension.

## REMERCIEMENTS

C'est un grand plaisir pour moi de pouvoir exprimer mes plus vifs remerciements et ma grande reconnaissance à tous ceux et celles qui m'ont aidée lors de la réalisation de cette thèse.

Mes remerciements vont particulièrement à :

- Monsieur le Professeur W. KUCZYNSKI, Directeur de recherche de cette thèse. J'ai pu, lors de mes travaux au laboratoire et mes entretiens avec lui, apprécier ses qualités humaines et scientifiques ; qu'il me soit permis de lui exprimer ma gratitude pour tous les conseils qu'il m'a prodigués.
- Monsieur A. CHARIF, PHD, Directeur du Département Génie-Civil, d'avoir bien voulu présider le jury de soutenance. Il m'est agréable de lui exprimer ma profonde gratitude et mon profond respect.
- Monsieur M.S. BARAKA, Chargé de cours à l'ENP pour tous les conseils qu'il m'a donnés et les entretiens fructueux que j'ai eus avec lui.
- Monsieur BELAZOUGUI, Chargé de cours à l'ENP, d'avoir bien voulu accepter d'être membre de ce jury.
- Monsieur P. BONNEVILLE, Professeur à l'ENP, responsable de la post-graduation du génie-civil, qui a fait de son mieux pour me faciliter les démarches administratives et a accepté de faire partie de ce jury ; qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.
- Monsieur B. TILIOUINE, Maître de conférence à l'ENP d'avoir accepté d'être invité. Ceci est ressenti par moi comme un intérêt certain à mes travaux, qu'il me soit permis de lui exprimer mes plus vifs remerciements.

Je remercie aussi les responsables ainsi que toute l'équipe du laboratoire de la SONATRO de REGHAIA pour toute l'aide qu'ils m'ont donnée lors des essais au sein de leur laboratoire.

Mes remerciements vont également à Monsieur GHERNAOUT, ex Directeur Général de la SNMC, de m'avoir ouvert les portes de ses chantiers et m'avoir approvisionné en agrégats et ciment.

Qu'il me soit permis de présenter ma reconnaissance et mes plus vifs remerciements à :

- Monsieur BIAREZ et Monsieur FA RE, professeurs à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures
- Monsieur SALENCON, professeur à l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
- Monsieur DEHOUSSE et Monsieur GAMSKI, professeurs à l'Université de Liège, pour m'avoir acceptée au sein de leur laboratoire et m'avoir facilité l'accès à la documentation.

Je ne saurais oublier de remercier mes professeurs ainsi que mes collègues de travail qui, malgré parfois des divergences d'idées, des contraintes matérielles et de temps, ont su dépasser cela et finaliser le travail de recherche entamé ensemble.

Mes remerciements vont aussi à mes collègues et amies : Madame GUICOVA G., Mademoiselle BENMAMAR S., Mademoiselle ZERFA F.Z.

Je ne saurais comment remercier Madame BOUMAZOUZI H. pour sa gentillesse exemplaire et pour la célérité et le soin avec lesquels elle a exécuté le pénible travail de frappe.

Pour finir, je tiens à remercier tous ceux et celles qui m'ont aidé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

المدرسة الوطنية المتحددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Ecole Nationale Polytechnique

## INTRODUCTION

## INTRODUCTION

Lorsqu'on parle du calcul en béton armé, il faut distinguer deux phases essentielles d'abord calcul des efforts internes puis détermination du ferrailage.

Jusqu'à présent, nous sommes en train d'introduire les méthodes de dimensionnement se basant sur les calculs limites ultimes des sections ; mais les calculs statiques restent traités élastiquement, ce qui présente un certain illogisme.

Les tendances contemporaines pour la modernisation des calculs des structures en béton armé, vont vers la suppression de cet illogisme.

Les dimensionnements des éléments en béton armé aux états limites ultimes prennent en compte les phénomènes de plastification du béton et de l'acier et il est logique que les mêmes éléments soient pris en compte dans les calculs statiques.

Cette procédure s'appelle "calcul plastique non linéaire des structures en béton armé".

Jusqu'à vers 1970, les structures en béton étaient calculées communément en comparant des contraintes maximum sous charge de service  $\sigma_{\max}$  à des contraintes admissibles  $\sigma_{\text{adm}}$ . La vérification peut être résumée par la condition suivante :

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{adm}} \quad (\text{stade I et II})$$

Les efforts intérieurs  $N$ ,  $T$ ,  $M$  résultent d'un calcul élastique dans lequel les sections fissurées (stade II) comme celles non fissurées (stade I) sont toutes considérées comme étant constituées de béton homogène et isotrope, non fissuré se comportant élastiquement. Cette méthode assure simultanément une sécurité vis à vis de la ruine et un comportement sain à l'état d'utilisation, tout au moins en ce qui concerne la fissuration.

La théorie de la plasticité fut développée pour mieux saisir la capacité portante ultime d'une structure. En effet, les sécurités vis à vis de la ruine peuvent varier grandement d'un cas à l'autre si l'on se base uniquement sur un calcul élastique et une vérification de contraintes admissibles.

Il était donc judicieux de faire intervenir la plasticité des matériaux pour mieux

cerner le comportement réel d'une structure proche de la ruine.

On pensa d'abord qu'une telle vérification à la ruine garantirait également un comportement satisfaisant à l'état d'utilisation ; mais on se rendit compte qu'une structure suffisamment sûre vis à vis de la ruine ne présente pas nécessairement un comportement acceptable à l'état d'utilisation car celui-ci est dicté par d'autres critères que ceux de la résistance ultime.

Une structure doit donc être vérifiée séparément pour les deux états : serviciabilité (utilisation) et ruine.

Le développement de la théorie de la plasticité et des méthodes de l'analyse limite a permis une utilisation plus rationnelle des matériaux car elle prend en compte les déformations réelles de la structure avec une sécurité suffisante contre les risques de ruine (ce qui diminue les coûts).

#### **But et orientation de l'étude**

L'étude consiste à déterminer l'état limite de résistance et de stabilité traité comme un état limite ultime en tenant compte de l'influence du diagramme moment courbure sur la ruine.

~~Elle sera axée essentiellement sur la sécurité des structures.~~

Ce travail est donc fait dans le cadre des recherches faites sur les états limites et il consiste à déterminer l'influence du béton sur le comportement de poutres hyperstatiques en béton armées d'acier à haute adhérence et soumises à des charges quasi-instantanées croissantes de zéro jusqu'à la rupture en tenant compte des déformations non élastiques dues à la fissuration du béton tendu et à la plastification du béton comprimé et des aciers tendus.

Pour les systèmes qu'on se propose d'étudier (c'est-à-dire hyperstatiques), la détermination de la capacité portante est complexe car il faut d'abord déterminer la

redistribution des efforts internes et voir ainsi la dégradation progressive du système jusque sa ruine totale.

Contrairement, pour les systèmes isostatiques, la capacité portante dépendra uniquement du moment de rupture.

L'étude expérimentale est précédée d'une étude théorique portant sur quelques méthodes récentes de l'analyse non linéaire des structures hyperstatiques en béton armé. Nous avons exposé trois méthodes : (\*)

- méthode de BAKER : diagramme moment courbure bilinéaire
- méthode de MACCHI : diagramme moment courbure trinéaire
- méthode de KUCZYNSKI : diagramme moment courbure continu

ainsi que la conception et recommandations internationales pour le calcul.

---

(\*) Ces méthodes étant des approximations de caractère élastique non linéaire de la loi moment-courbure réelle (la loi de comportement élasto-plastique est complexe), elles seront donc valables en simple charge.

CHAPITRE I  
SECURITE DES STRUCTURES EN BETON ARME

## PREMIERE PARTIE : BIBLIOGRAPHIE

### I - SECURITE DES STRUCTURES EN BETON ARME

#### 1.1 - Définition des états limites

Une structure (ou une partie de cette structure) est rendue inapte à l'usage auquel on la destine lorsqu'elle atteint un état particulier dit "état limite" dans lequel elle cesse de remplir les fonctions ou ne satisfait plus aux conditions pour lesquelles elle a été conçue.

Ce phénomène apparait dans le cas de modification défavorable d'une action (majoration ou minoration selon le cas).

Les états limites peuvent être classés en deux catégories :

- états limites ultimes
- états limites d'utilisation

##### 1.1.1 - Etats limites ultimes

Ce sont ceux correspondant à la valeur maximale de la capacité portante.

Exemples de causes les produisant :

- perte de stabilité d'une partie ou de l'ensemble de la structure assimilée à un corps rigide (état limite de l'équilibre)
- ~~une ou plusieurs sections se rompent soit par déformation excessive ou par~~ rupture de l'armature, soit par écrasement du béton
- rupture des sections critiques de la structure
- transformation de la structure en un mécanisme
- instabilité par déformation
- détérioration par effet de fatigue
- déformation plastique ou de fluage, ou fissuration conduisant à un changement de géométrie qui exigerait le remplacement de la structure.

L'état limite ultime peut également être dû à la sensibilité de la structure aux effets de la répétition des actions du feu, d'une déflagration.

Il est donc nécessaire de prendre en considération de tels effets lors de la conception de la structure.

### 1.1.2 - Etats limites d'utilisation

Elles sont fonction des critères d'utilisation normale ou de durabilité.

Exemples de causes les produisant :

- déformation excessive pour une utilisation normale de la structure
- fissuration prématurée ou excessive
- dommages indésirables (corrosion)
- déplacement excessif sans perte de l'équilibre
- compression du béton.

Dans la méthode de calcul à la rupture ou calcul aux états limites, on a donc un état de référence par rapport auquel on se mettra en sécurité.

Cet état est davantage caractérisé par la mise hors service que par la rupture proprement dite.

En flexion simple, l'état limite peut se produire de deux façons différentes :

- -contrainte de l'armature tendue atteint et dépasse la limite élastique : sollicitation - traction
  - \* acier écroui : subit de grandes déformations non proportionnelles
  - \* ~~acier à palier de ductilité : se déforme sous contrainte constante.~~

Ceci dans le cas de pièces normalement armées.

- la contrainte dans l'armature n'atteint pas la limite élastique au moment de la rupture - cas de pièces fortement armées.

## 1.2 - Notion de la capacité portante ultime (33)

### 1.2.1 - Caractéristiques de la structure

Pour pouvoir élucider la notion de capacité portante ultime ou pour donner sa définition même, il faut se faire une idée globale des différentes phases du

comportement de la structure.

Considérons alors une structure hyperstatique quelconque, en béton armé à laquelle est appliqué un certain type de charge. Si cette charge augmente à partir de zéro, des changements importants se produisent dans la structure du point de vue de son utilisation, on peut les décrire par une mesure appropriée de la détérioration.

L'interdépendance entre la charge  $S$  et le degré de détérioration  $\Gamma$  peut être portée sur un graphique.

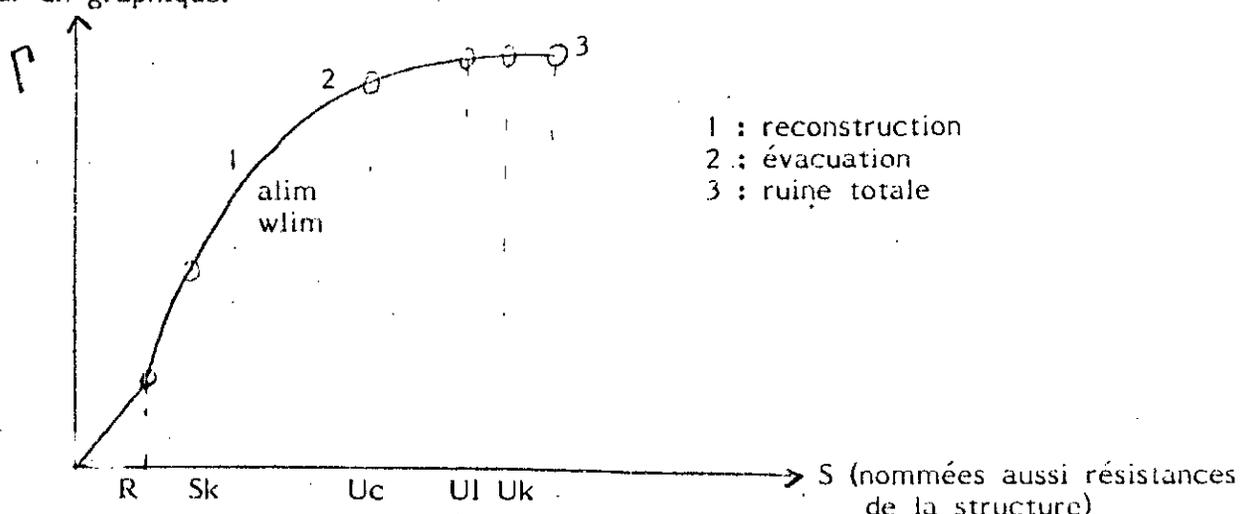


fig. 1-1 : caractéristique de la structure

Pour une charge inférieure à la valeur caractéristique  $S_k$ , le degré de détérioration est sans importance bien que de faibles fissures soient déjà apparues dans plusieurs parties de l'ouvrage.

Au cas où la valeur  $S_k$  est dépassée, l'ouverture des fissures ou les déformations excèdent les limites admissibles ( $Q_{lim}$ ,  $a_{lim}$ ) et il faut prendre des mesures pour décharger la structure ou le cas échéant la reconstruire.

Lorsque la charge continue à augmenter, des indices de la naissance d'une rupture se manifestent, tel que par exemple écaillage du béton dans une ou plusieurs sections

critiques (capacité portante ultime  $U_c$ ) ce qui conduit souvent à l'évacuation de l'ouvrage.

Si la charge atteint la valeur  $U_1$ , la première section de la structure se rompt ; pour la charge  $S = U_k$  on obtient les ruptures de  $k$  sections et finalement, sous la plus grande charge possible ( $S = U_{col}$ ), la ruine se produit, l'ouvrage s'écroule et ainsi est atteint le degré maximal de détérioration.

### 1.2.2 - Définition de la capacité portante ultime.

La caractéristique de la structure ci-dessus (fig. 1.1) conduit à l'idée de ne prendre pour capacité portante ultime que la charge  $U_{col}$  appliquée au moment de la ruine car elle paraît constituer la limite extrême qui puisse se réaliser ; la définition de la charge  $U_{col}$  est donnée par la méthode de l'équilibre ultime.

Pour des valeurs plus faibles, la structure cesse d'être utilisable parce que des déplacements excessifs se produisent et des ruptures partielles apparaissent.

Il serait donc plus opportun de définir la capacité portante  $U_c$  pour laquelle le béton commence à s'écailler dans l'une des sections critiques

On peut trouver aussi de façon relativement précise la capacité portante  $U$  définie par la rupture de la première section et assez voisine de la valeur  $U_{col}$

On peut donc dire :

**"une structure hyperstatique en béton armé atteint sa capacité portante ultime lorsque l'une de ses sections au moins se rompt". (30)**

Pour une poutre ou un portique continu,  $U_1$  peut être pris égal à  $U_{col}$  sans que l'on commette une erreur considérable en ce qui concerne la vérification de la sécurité.

De la définition ci-dessus découlent des méthodes de calcul qui tiennent compte des propriétés de déformations de la structure. On fait également usage de cette définition dans le cas où l'on ne tient pas compte de la redistribution des moments et où leur répartition se détermine d'après la théorie élastique linéaire. Dans ce cas, on

prend pour capacité portante ultime la charge  $V_e$  sous laquelle le moment ultime s'est produit dans l'une des sections critiques d'où  $U_e \leq U_{col}$  et avec  $U_d < U_e$  (1.1) (vérifiée expérimentalement par TICHY - 1961, théoriquement par KAUFMAN et MANES - 1961) et généralement reconnue et regardée comme évidente par MACCHI - 1965.

Nous voyons donc les sens multiples de la notion de capacité portante ultime dans une structure hyperstatique. Par contre pour une structure isostatique (une seule section critique), la définition de la capacité portante ultime est bien plus simple.

### 1.3 - Sécurité des structures en béton armé

#### 1.3.1 - Généralités

C'est à Monsieur Marcel PROT que revient le mérite d'avoir montré avec une clarté et une grande rigueur, la nécessité d'admettre que la sécurité ne peut pas être mathématiquement totale mais qu'elle doit être définie par une probabilité de ruine suffisamment faible pour être tolérable.

Nous citerons un extrait de son exposé lors du Troisième Congrès de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes :

*"Concevoir la sécurité d'un ouvrage comme une impossibilité complète de ruine, c'est vouloir faire en sorte que la probabilité de ruine soit nulle. Or vouloir une probabilité de ruine nulle n'a aucun sens. Il est dans la nature des choses que nous acceptons certains risques. Rechercher une sécurité très grande dans certains domaines entraîne des dépenses de temps, d'argent, de travail et de matières qui peuvent entraîner corrélativement une diminution de sécurité dans d'autres domaines et cela d'autant plus que l'on se heurte, en cette matière comme en beaucoup d'autres, à une loi de rendement décroissant qui rend un accroissement de sécurité de plus en plus coûteux au fur et à mesure que la sécurité elle-même s'accroît. L'expérience montre que l'on tient pratiquement pour négligeable la probabilité d'un accident, même si cet accident doit nous coûter la vie lorsque cette probabilité est de l'ordre du millionième."*

Donc le principe qu'une probabilité extrêmement faible de risque doit être tolérée, sans s'étendre sur l'idée de nuancer ce degré de sécurité d'après l'importance des conséquences matérielles et morales du risque s'il se manifeste.

Il faudra donc en tenir compte dans la conception de l'ouvrage projeté.

De plus, l'art des constructeurs est de tirer parti de tous les enseignements historiques et de l'expérience acquise que celle-ci soit issue de l'observation du comportement des ouvrages, ou bien qu'elle soit le résultat des progrès réalisés dans la modélisation mécanique.

### 1.3.2 - Notion de "coefficient de sécurité"

Initialement, la science du calcul des constructions considérait comme acquise la loi de HOOKE c'est-à-dire la proportionnalité des efforts internes en tous points aux déformations et par conséquent aux efforts extérieurs. Elle faisait en sorte que "les taux de travail" (suivant l'expression ancienne) ou les contraintes soient en deçà d'une limite admissible, elle-même bien inférieure à la contrainte qui amène la ruine du matériau.

On déterminait l'état de contraintes des différents éléments d'une structure en connaissant les actions et charges y agissant et en appliquant les hypothèses de la résistance des matériaux.

La position qui a prévalu consistait à obliger le constructeur à concevoir un ouvrage dont chaque partie, chaque élément travaille dans un domaine admissible bien délimité.

Outre le fait que dans certains cas, ce principe de limitation locale peut conduire à des résultats inacceptables, il faut noter qu'en aucun cas, un coefficient de sécurité ne peut être défini, ni calculé.

La vérification réglementaire s'exprime donc par l'inéquation fondamentale :

$$\sigma \leq \bar{\sigma} \quad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{en}}{k} \quad (1.2)$$

Plus récemment, il est apparu préférable de majorer les actions et de

comparer les contraintes calculées aux contraintes de ruine. Cette manière de faire légitime le bénéfice qu'on est en droit de tirer de la théorie de la plasticité. Certains auteurs suggèrent même de combiner la minoration des contraintes et la majoration des sollicitations.

L'introduction de la notion d'état limite suggère la définition d'un état de "ruine" ou plutôt d'un état de perte d'usage de l'ouvrage. Un "coefficient de sécurité" est alors défini comme le rapport entre le chargement de ruine et le chargement de service (7)

La relation (1.2) ne tient pas compte des phénomènes d'adaptation plastique dont l'importance varie selon la nature des sollicitations et la forme de la section et n'est pas suffisante pour garantir la sécurité des ouvrages vis à vis d'une augmentation accidentelle des actions. De plus, la grandeur  $f$  est elle-même mal définie.

Nous voyons donc que pour apprécier la sécurité d'un ouvrage vis à vis de la rupture, de très nombreux facteurs doivent être pris en compte. Ce qui explique la complexité croissante des règlements actuels.

### 1.3.3 Probabilité de la sécurité

La science de la construction est basée sur :

- connaissance des matériaux
- connaissance de la mécanique
- règlement de construction

La connaissance des matériaux a fait et fait toujours l'objet de nombreux travaux tant sur le plan expérimental que sur le plan théorique.

Les méthodes expérimentales permettent une analyse précise des propriétés mécaniques des matériaux mis en place, par identification des paramètres par rapport à ceux des lois théoriques de comportement telles que l'élasticité, la plasticité, la viscoélasticité et les comportements irréversibles.

Aussi loin qu'il est possible d'aller dans cette voie, il est utopique de réaliser à

chaque construction l'ensemble des essais nécessaires à une caractérisation complexe. Suivant la précision désirée, un matériau est représenté par un modèle rhéologique plus ou moins bien adapté qui est admis comme un comportement moyen dont il importe alors d'estimer les écarts probables. (7)

Même en supposant connues les lois de distribution statique de chacune des variables aléatoires en cause, leur combinaison conduirait à des calculs inextricables même dans des cas très simples.

La méthode purement probabiliste n'est donc pas utilisable pratiquement (dimensionnement, vérification) mais elle a permis de mettre sur pied en l'espace de vingt ans une méthode récente dite semi probabiliste. Cette dernière découle de la méthode probabiliste en introduisant un certain nombre de principes des théories statistiques ; elle a été réalisée par un groupe d'ingénieurs du C.E.B.

#### 1.4 - Méthode semi probabiliste - Etats limites

Cette méthode de calcul tient compte de la variabilité aléatoire tant des charges que des propriétés de la structure. Elle attribue à différentes charges, différentes influences sur la sécurité de la structure. Les vérifications à faire seront du type :

$$\gamma_F S(\psi, \gamma_F, F_k) \leq S\left(\frac{F_k}{\gamma_m}\right) \quad (1-3)$$

$S$  : sollicitation provoquée par une action  $F$

$\gamma_{F1}$  : coefficient multiplicateur de la valeur caractéristique de l'action destiné à tenir compte du dépassement possible de cette valeur

$\psi$  : coefficient multiplicateur inférieur à 1 qui tient compte du fait que dans certaines combinaisons d'actions, la probabilité pour que toutes les actions atteignent simultanément leur valeur caractéristique est très réduite

$\gamma_F$  : coefficient tenant compte de l'incertitude sur les sollicitations et les contraintes provenant de la simplification des schémas et des hypothèses de calculs, des tolérances d'exécution, des modifications éventuelles des actions dans le temps

$F_k$  : résistance caractéristique d'un matériau

$\gamma$ : coefficient qui tient compte de la réduction possible de la résistance du matériau par rapport à sa résistance caractéristique.

Cette méthode semi probabiliste d'états limites sert à l'élaboration des recommandations sur le plan international. Son principe de base consiste à :

- a) prendre en compte des valeurs caractéristiques des actions définies par une probabilité de dépassement fixée à priori
- b) prendre en compte de la même façon des valeurs caractéristiques des résistances mécaniques des matériaux
- c) couvrir les facteurs aléatoires non pris en compte ci-dessus par des coefficients de majoration appliqués aux actions et de minoration aux résistances
- d) partir des actions ainsi majorées, calculer les sollicitations des différentes sections et les majorer éventuellement pour tenir compte de l'approximation du calcul
- e) vérifier que les sollicitations de calcul ainsi définies sont inférieures à celles qui correspondent à l'état limite considéré.

## 1.5.1 - Conception internationale pour le calcul

### 1.5.1 - Introduction

C'est au cours du XIX<sup>e</sup> siècle qu'est apparue la méthode des contraintes admissibles. Cette méthode consistait à limiter les contraintes s'exerçant en chaque point de la structure à une valeur inférieure à la limite du matériau constitutif.

Est apparue ensuite la méthode du calcul à la rupture. Cette méthode dont l'origine remonte à plus de cinquante ans, prend pour état de référence l'état de rupture et fixe la valeur du rapport de la charge utile à la charge de service. La totalité du facteur de sécurité se trouve de se fait appliquée aux actions extérieures.

La charge de rupture est calculée en adoptant un modèle de comportement des matériaux aussi fidèle que possible.

Le concept de semi-probabilisme et des états limites s'est largement développé dans le monde depuis une trentaine d'années, en particulier sous l'impulsion du Comité Euro-International du Béton (CEB).

Les recherches effectuées dans le domaine de la sécurité des constructions, avec l'introduction du probabilisme d'une part et le développement de la théorie de la plasticité d'autre part, ont conduit à l'élaboration de nouvelles méthodes de justification au sein des associations techniques internationales, en particulier le Comité Européen du Béton (CEB) et la Fédération Internationale de la Précontrainte (FIP). Ces principes sont repris par les différents règlements nationaux de calcul aux états limites.

Après une première série de recommandations publiées en 1964 relatives au béton armé classique par le CEB, apparaît en 1970 une deuxième édition en collaboration avec la FIP englobant béton armé et précontrainte.

Les méthodes de calcul se réfèrent essentiellement aux différents processus par lesquels peut être atteint l'état limite ultime : dépassement de la limite d'élasticité de l'armature ou écrasement des bielles du béton du treillis généralisé qui continue de servir de "modèle de calcul".

### 1.5.2 - Principes de calcul

Pour assurer un degré approprié de sécurité et d'aptitude à l'utilisation d'une structure, on doit considérer dans le calcul, conformément à la méthode des coefficients de sécurité partiels, différents états limites et différentes valeurs représentatives pour les actions.

Dans la plupart des cas, la vérification doit être faite pour garantir :

a) que la capacité portante de la structure vis-à-vis d'une ruine possible est

convenable en comparant les sollicitations agissantes de calcul aux valeurs résistantes correspondantes des sections.

$$S_{act,d} \leq R_d \quad (1-4)$$

b)- que le critère qui détermine les conditions d'utilisation imposées tel que la limitation des flèches, ouverture des fissures, etc. est respecté.

La vérification peut aussi consister à comparer directement les actions à la capacité portante de l'ensemble d'un élément structural et d'une structure

$$F_{act,d} \leq F_{res,d} \quad (1-5)$$

Chaque vérification de la structure comporte deux parties :

- 1 - Détermination des effets des actions correspondant au cas étudié, avec leurs positions et leurs configurations les plus défavorables et dans leurs combinaisons appropriées.
- 2 - Détermination des valeurs résistantes en fonction des propriétés des matériaux constitutifs de la structure en vue de la vérification de la condition 1-4  
comparaison de la flèche calculée ou de l'ouverture des fissures calculée avec les limites imposées par les exigences fonctionnelles de la structure.

**CHAPITRE II**  
**METHODES DE CALCUL : THEORIE**

## II - METHODES DE CALCUL : THEORIE

### 2.1 - Généralités

La plupart des théories de la flexion ont eu en commun l'hypothèse de BERNOULLI selon laquelle les sections droites de la poutre restent, après déformations planes et normal à l'axe incurvé de la poutre.

L'étude de la flexion des poutres parfaitement plastiques permet de dégager les deux concepts fondamentaux qui sont à la base du calcul plastique des ossatures : celui de moment plastique et celui de rotule plastique.

La réalisation d'une certaine résistance de la structure est désignée comme l'obtention d'un état limite.

Une justification de l'inégalité existant entre la charge (ou son effet  $S$ ) et la capacité portante ultime  $U$  devrait être faite pour satisfaire la condition de sécurité.

$$\gamma S_{nom} \leq U_{nom} \quad (3-1)$$

$\gamma$  : Coefficient de sécurité  
 $S_{nom}$  : Charge  $\geq$  charge de service

La capacité  $U_{nom}$  se détermine d'après une relation fonctionnelle dans laquelle sont introduites comme données les valeurs des propriétés mécaniques du matériau voisines des valeurs moyennes (pour le béton) ou celles dites garanties (pour l'acier).

$S_{nom}$  et  $U_{nom}$  sont dites valeurs centrales (c'est-à-dire parties des valeurs moyennes).

Elles peuvent être soit les moyennes d'une "distribution statique", soit des valeurs caractéristiques (dites normales) ou enfin des valeurs réelles trouvées par l'étude faite dans le but de vérifier la sécurité d'un ouvrage.

La condition 3-1 doit être satisfaite pour toute section et toute structure (isostatique ou hyperstatique).

La méthode du coefficient de sécurité est avantageuse pour faire ressortir l'importance de la redistribution des moments du point de vue des économies d'armature.

On sait que pour chaque élément de la structure, le diagramme des moments rapporté à la ligne de fermeture doit toujours correspondre, en forme ainsi qu'en grandeur au diagramme des moments dans une poutre sur deux appuis simples.

Le calcul par la méthode de la capacité portante ultime conduit à une meilleure approche de la loi de comportement de la structure sous charge variable.

Si la charge permanente est seule appliquée, les diagrammes des moments ne peuvent varier et le calcul plastique ne présente aucun avantage (si évidemment on néglige les avantages résultant de la meilleure disposition constructive).

Le CEB a formé une commission spéciale (n° 11 - structures hyperstatiques) pour étudier les méthodes d'analyse et de dimensionnement inélastique des ossatures en béton armé. Les travaux de cette commission ont été consacrés aux critères de sécurité à utiliser, qui ont été adoptés en 1965.

Ces critères sont généralement résumés sur l'annexe 6 - structures hyperstatiques (tome 3, annexe aux recommandations du CEB, 3<sup>ème</sup> édition, 1972) et accompagnés d'une description détaillée des méthodes de dimensionnement basées sur l'approche bi et trinéaire.

## 2.2 - Rotule plastique et mécanisme

Lorsque les charges appliquées à une partie augmentent, le moment de flexion dans la section critique augmente progressivement et atteint sa valeur maximale appelée moment plastique. Les parties de la poutre situées de chaque côté de la section peuvent tourner l'une par rapport à l'autre alors que la valeur du moment dans la section demeure inchangée ; ainsi cette section critique travaille comme une articulation et est communément appelée "rotule plastique".

La formation d'une rotule plastique dans une zone précise de la structure ne signifie pas que la structure continuera à se déformer sous la charge qui a entraîné la rotule. Pour que les déformations s'amplifient, il faut que la formation d'une telle rotule transforme le système en mécanisme, lequel se produit quand les rotules plastiques peuvent être remplacées par des rotules réelles et quand la structure ou une partie de celle-ci est libre de se déformer.

Si une ossature hyperstatique de degré  $n$  est soumise à un ensemble de forces grandissant toutes proportionnellement l'une à l'autre, au moment où la  $n$ ème rotule plastique se forme, le système est statiquement déterminé.

La formation de la  $(n+1)$ ème rotule transforme le système isostatique en un mécanisme articulé à un degré de liberté qui prend sous charge constante des déformations indéfinies et est ainsi mis hors service.

La charge limite est la charge correspondant à l'apparition de la  $(n+1)$ ème rotule plastique.

### 2.3 - Théorèmes fondamentaux de l'analyse limite

Les méthodes générales de recherche de la charge limite reposent sur deux théorèmes démontrés par Gvozdev et Hill dans le cas des corps rigides plastiques et par Drucker, Greenberg et Prager dans le cas des corps élasto-plastiques. Ces énoncés ne font intervenir que les concepts de champ de tension statiquement admissible et de champ de vitesse de déformation cinématiquement admissible sans que la nature rigide plastique n'apparaisse.

Quand la charge limite est appliquée à une structure, l'apparition de rotules plastiques en un nombre suffisant de zone transforme la structure en mécanisme.

Cependant, pour calculer la charge limite, il faut connaître le mécanisme correct. En général, il existe un grand nombre de mécanismes possibles et le mécanisme exact est inconnu.

Les deux théorèmes peuvent s'énoncer (26)

### 2.3.1 - Théorème statique

La charge limite  $P_1$  est la borne supérieure de toutes les charges  $P_+$  correspondant aux états statiquement admissibles. Ces états sont tels que les contraintes dans le corps soient en équilibre, équilibrent les charges appliquées  $P$  et sont inférieures à la limite élastique. Ces contraintes doivent vérifier les conditions aux limites  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  avec  $\sigma_{ij}$  : champ statiquement admissible.

### 2.3.2 - Théorème cinématique

La charge limite  $P_e$  est la borne inférieure de toutes les charges  $P_+$  correspondant aux états cinématiquement admissibles. Un mécanisme d'écoulement est dit cinématiquement admissible quand il satisfait aux conditions d'appui et que les charges  $P$  fournissent dans ce mécanisme une puissance de dissipation supérieure à celle transformée en chaleur. On peut donc écrire :

$$Q_{us} \leq Q_u \leq Q_{uc} \quad (2-2)$$

## 2.4 - Loi de comportement

En béton armé, il faut que les premiers éléments plastifiés puissent se déformer suffisamment pour que les autres se plastifient à leur tour. Sinon il se produirait une rupture prématurée par déformation excessive des premiers éléments ; d'où la nécessité de vérifier la compatibilité des rotations anélastiques des diverses rotules plastiques. Pour cette vérification, il est indispensable de définir des lois moments - courbures ou moments - rotations sur la longueur de la zone plastique. Le diagramme réel moments - courbures est très difficile à exprimer de façon analytique. (figure 2.1) Mais même si cela était facile, le profit dans la pratique serait bien faible, car la complexité de la fonction ne permettrait aucune détermination raisonnable de la répartition des moments ; c'est pourquoi on cherche des relations approximatives appropriées facilitant la solution. Il pourrait être remplacé par exemple par une droite et une hyperbole (figure 2.2 a et figure 2.2 b).

Pour la pratique, il est préférable d'utiliser des diagrammes composés uniquement de droites :

- trilinéaire : introduit par Levi en 1954. et développé par Macchi (figures 2.3 a et 2.3 b).
- bilinéaire : introduit par Johnson et Sawyer en 1958 et développé par All. Baker (figures 2.4 a et 2.4 b)

On peut aussi avoir une simplification de cette loi moments - courbures de la forme suivante :

- dans le cas du modèle rigide plastique (figure 2.5)
- ou une loi continue introduite par Kuczynski (figure 2.6).

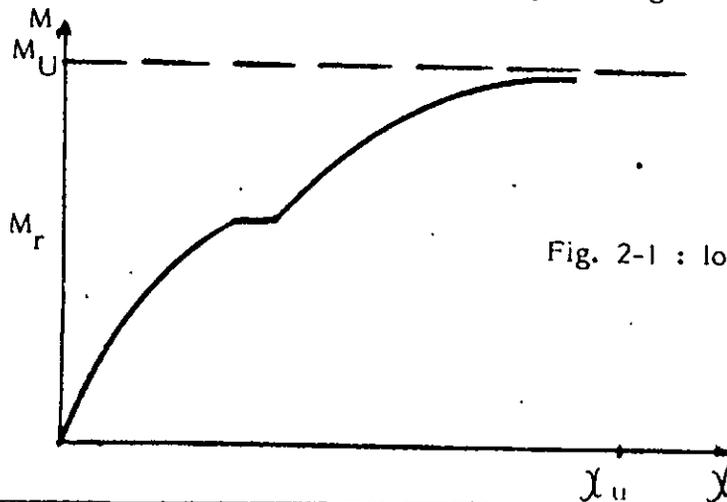


Fig. 2-1 : loi de comportement réel

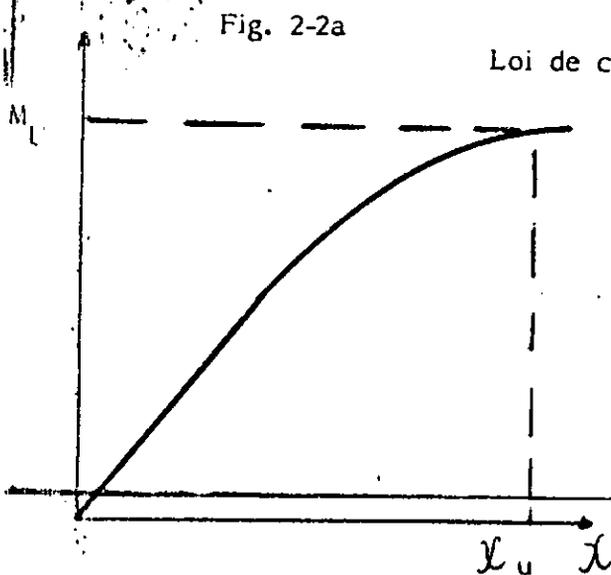


Fig. 2-2a

Loi de comportement parabolé-rectangle

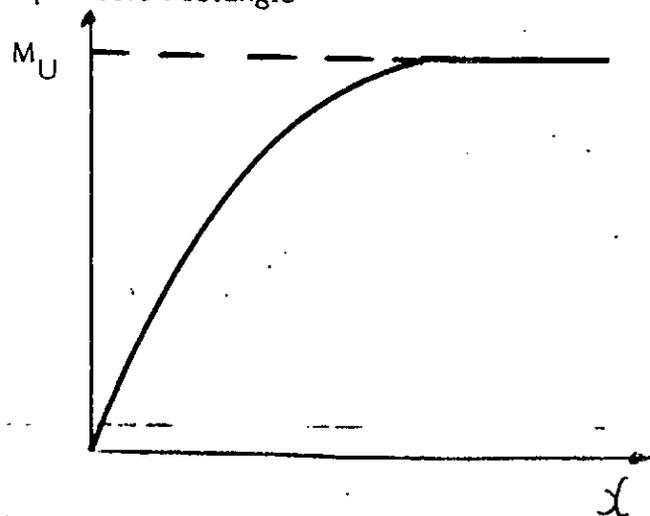


Fig. 2-2b

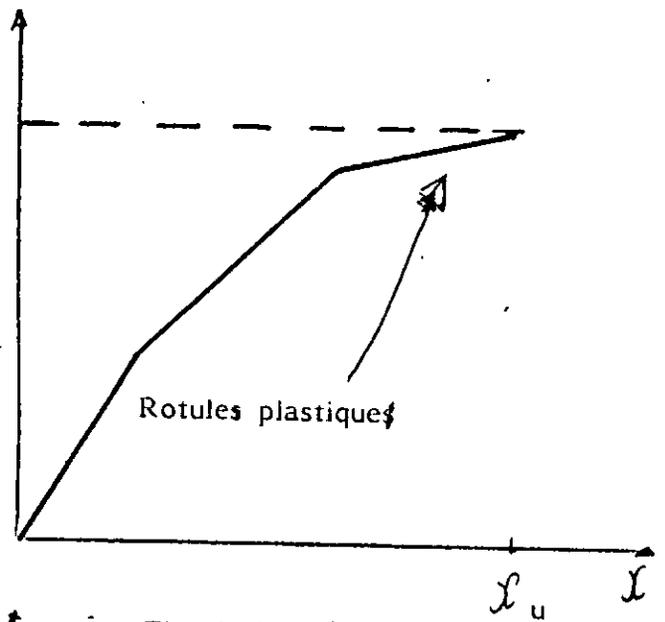
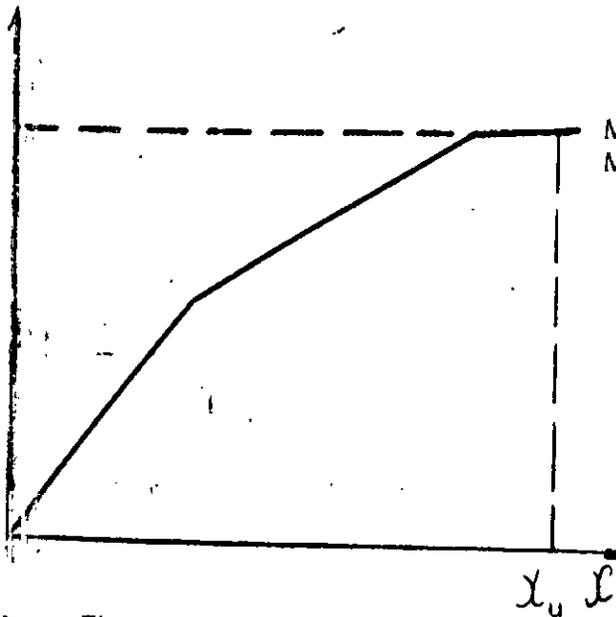


Fig. 2-4a : JOHNSON et SAWYER

Fig. 2-4b : BAKER

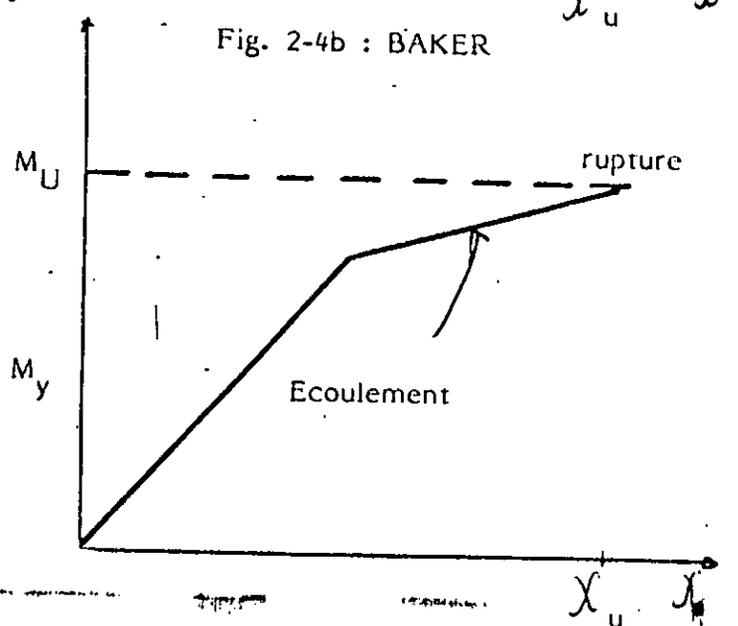
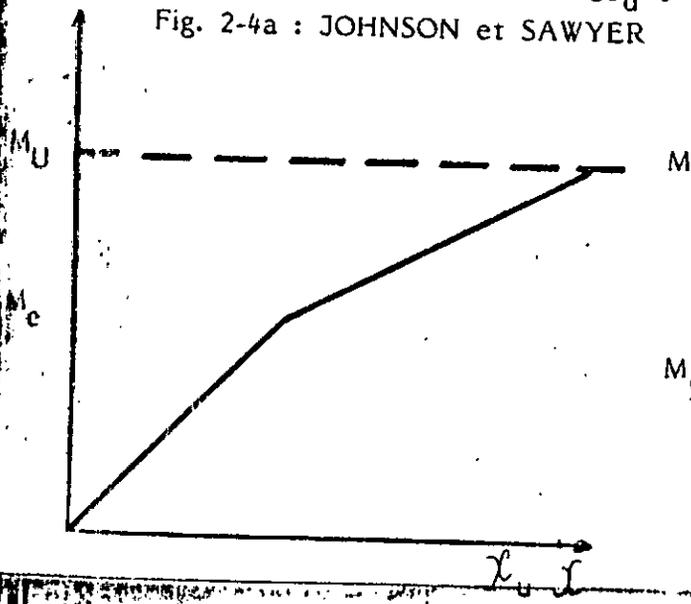
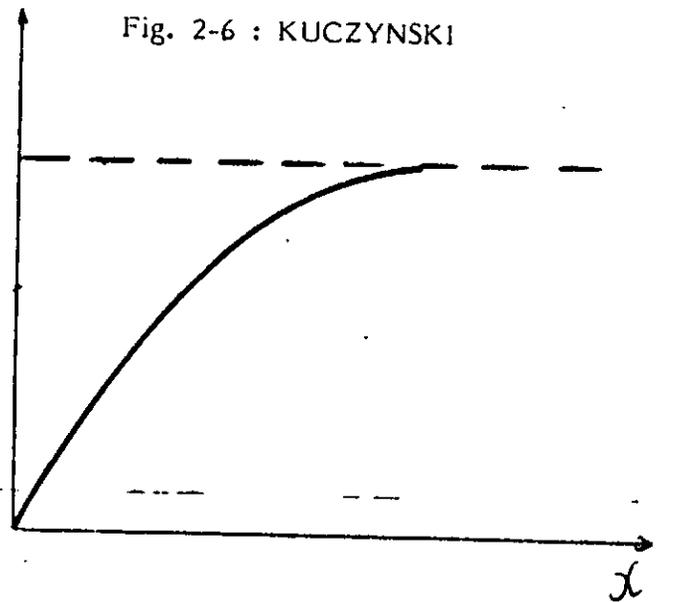
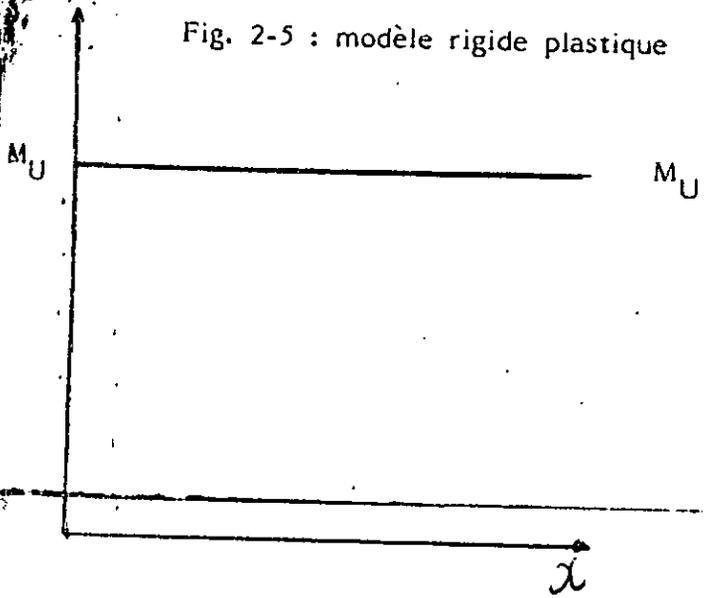


Fig. 2-5 : modèle rigide plastique

Fig. 2-6 : KUCZYNSKI



## 2.5 - Exposé des différentes méthodes de résolution

### 2.5.1 - Utilisation du théorème combiné

L'utilisation du principe des travaux virtuels est possible mais pas pratique dans le cas d'une structure complexe. Le problème est de trouver un mécanisme simple très proche du mécanisme réel. La charge calculée est une borne supérieure qui doit se rapprocher de la charge limite réelle. Utilisant le théorème statique et dynamique développé par GREENBERG et PRAGER (11), il est possible d'obtenir une borne inférieure connaissant une borne supérieure.

Si  $N$  est le nombre de rotules possibles et  $R$  le degré d'hyperstaticité de la structure, il existe  $(N-R)$  équations de la statique indépendantes entre les moments inconnus des rotules. En substituant la charge limite obtenue pour chaque mécanisme avec  $(R+1)$  rotules dans les équations précédentes, il est possible de calculer le moment en chaque rotule. Si l'on suppose un mécanisme avec  $R$  rotules, il faudrait adjoindre une équation indépendante supplémentaire obtenue par l'analyse élastique de la partie de la structure qui demeure statiquement indéterminée.

Si tous les moments sont plus petits ou égaux à  $M_p$ , le mécanisme pris en compte est correct ; si l'un des moments est supérieur à  $M_p$ , il peut s'écrire :

$$M_{\max} = C_x M_p \quad (2-3).$$

### Méthode par combinaison de mécanismes

Le principe de cette méthode due à NEAL et SYDMONDS (29) est de construire le mécanisme de ruine par combinaison d'un certain nombre de mécanismes simples indépendants. Il faut commencer par identifier tous ces mécanismes simples pour écrire l'équation du travail correspondant à chacun d'eux.

D'après le théorème cinématique, le mécanisme qui se produit réellement se distingue par la plus grande valeur de  $M_p$ .

Il faut alors sélectionner le mécanisme simple qui fournit la plus grande valeur  $M_p$  et y combiner un ou plusieurs autres mécanismes simples pour former un mécanisme complexe donnant une valeur plus grande de  $M_p$  (26).

Toutes les combinaisons les plus vraisemblables sont examinées jusqu'à ce que l'utilisateur croit avoir trouvé le mécanisme exact.

Pour vérifier que le choix a été bon, il faut déterminer par la statique le diagramme des moments dans l'ossature. Si celui-ci est statiquement admissible, la solution du problème est trouvée (26).

Cette méthode présente un inconvénient : à chaque stade des calculs, l'étape suivante n'est pas clairement indiquée et il faut parfois faire plusieurs essais avant de trouver le bon.

La méthode ne se prête donc pas à la programmation sur ordinateur.

### 2.5.3 - Méthode par distribution des moments résiduels

Elle a été développée par HEYMAN. Elle est plus longue que la précédente mais entièrement automatique.

### 2.5.4 - Evaluation des déformations

Pour un système rigide plastique, le principal avantage de la méthode de dimensionnement plastique sur la méthode classique élastique est de permettre la détermination de la charge de ruine par de simples considérations de statique, sans se préoccuper des déformations élastiques de la construction (26). Cependant, les déformations peuvent atteindre des valeurs inadmissibles avant que la charge limite ne soit atteinte et celle-ci est alors sans signification pratique.

Le calcul des déformations proposé par SYMONDS est basé sur les mêmes hypothèses que le calcul de la charge limite et suppose que la structure est formée de régions purement élastiques séparées par des rotules plastiques concentrées dans certaines régions.

Cette méthode prend en compte une idéalisation élasto-plastique du corps réel. Elle n'entraîne de grandes erreurs que dans le cas où certaines portions de poutres sont soumises à un moment constant et se déforment plastiquement par flexion pure dans toute leur étendue.

Il est indispensable de savoir calculer les déformations d'une structure au moment où la dernière rotule n'a pas encore commencé à tourner (26).

De plus, pour évaluer les déformations sous les charges de service et pouvoir contrôler théoriquement les résultats expérimentaux obtenus sur une structure  $n$  fois hyperstatique, il est intéressant de pouvoir calculer les déformations :

- a/ en régime élastique
- b/ lorsque la première rotule est sur le point de se former
- c/ lorsque chaque rotule successive est sur le point de se former

Pour effectuer le calcul, il y a deux types de méthodes disponibles : (26)

- a/ la méthode pas à pas, où l'on suit le comportement de la structure de manière continue jusqu'à la ruine
- b/ la méthode directe qui donne immédiatement les déformations dans tout stade déterminé de la structure.

#### 2.5.4.1 - Méthode pas à pas

Elle repose sur la remarque suivante :

une rotule plastique une fois formée dans une section droite déterminée, bloque le moment fléchissant en cet endroit à la valeur fixe  $M_p$ .

par conséquent, pour tout accroissement de la charge au delà de la valeur sous laquelle la  $K$ ième rotule a été formée, on peut introduire une rotule libre dans la section correspondante.

Cette rotule a pour effet de diminuer d'une unité le degré d'hyperstaticité du système.

Trois méthodes différentes généralisent le problème :

- HANGAN a étendu la méthode de cross au calcul des déformations élasto-plastiques ;
- GHEORGIN, PACOSTE, BERGMANN et IORDANESCO ont montré comment étudier pas à pas tout ce comportement élasto-plastique de la structure en généralisant la méthode des forces de MULLER
- BRESLAU-WHAN a développé un calcul utilisant la méthode matricielle des déplacements ; celle-ci consiste à modifier, à chaque apparition d'une zone plastique, la matrice de rigidité de la structure, à faire le calcul de la nouvelle structure sous des charges unitaires, à déterminer l'accroissement de charge pour lequel une nouvelle plastification apparaît, à ajouter les valeurs des déplacements et des moments correspondant à cet accroissement à celles de l'étape précédente.

#### 2.5.4.2 - Méthode directe (26)

Elle est fondée sur le principe des travaux virtuels.

La difficulté de déterminer à l'avance quelle est la dernière rotule à se former a été surmontée par SYSMONDS et NEAL (29)

#### 2.5.5 - Théorie des charges limites (33)

##### 2.5.5.1 - Introduction du chargement élasto-plastique - position du problème d'élasticité type quasi statique.

Etant donné un système en matériau élasto-plastique, le problème est de déterminer l'état actuel de contraintes et de déformations dans ce système soumis à un certain type de chargement.

la résolution d'un tel système ne peut se faire que pas à pas en suivant le trajet de la charge.

L'état de contraintes et de déformations dépend du trajet de charge suivi.

Le comportement d'un tel système peut être défini par les étapes suivantes :

a/ le chargement augmente proportionnellement au paramètre  $Q$   
Etat initial  $Q = 0$  (2-4)

b/  $Q < Q_0$  il n'y a pas de zone élastoplastique  $f(\sigma) < 0$  partout (2-5)

c/  $Q = Q_0$  (2-6) apparition de zones élasto-plastiques .

Le critère de plasticité est atteint en un point (ou plusieurs points).

$Q_0$  : limite d'élasticité initiale du système

d/  $Q$  augmente au delà de  $Q_0$  : développement des zones élasto-plastiques avec possibilité de déformations plastiques contenues par les déformations des zones élastiques

e/  $Q = Q_1$  (2-7) : les zones élasto-plastiques sont suffisamment développées pour qu'apparaisse la possibilité d'écoulement plastique libre c'est-à-dire que les déformations plastiques ne sont plus contenues par les déformations élastiques

Cette description n'est valable que si les déformations restent petites jusqu'au stade de l'écoulement libre c'est-à-dire les changements de géométrie sont négligeables.

#### 2.5.5.2 - Passage au matériau rigide plastique

On démontre que si au cours du processus de chargement d'un système élasto parfaitement plastique les déformations restent petites jusqu'à l'apparition de l'écoulement libre, les chargements limites du système sont indépendants des propriétés élastiques du matériau et peuvent donc être déterminés sur le système rigide parfaitement plastique associé.

Les chargements limites sont donc des chargements pour lesquels il y a apparition de l'écoulement plastique libre.

### 2.5.5.3 - Conditions à la limite, paramètres de chargement

#### a/ caractérisation des chargements limites

On cherche à déterminer les chargements c'est-à-dire :

( $\mathcal{C}, V$ ) solution du système rigide parfaitement plastique

$\mathcal{C}$  : champ de contraintes satisfaisant le critère de plasticité

$V$  : champ de vitesse de déformation dérivant d'un champ de vitesse  $u$  associé à  $\mathcal{C}$  par la loi de comportement plastique

#### b/ paramètres de chargement

Soit un solide de frontière  $S'$ , et un processus de chargement subi par le matériau et possédant les propriétés suivantes :

- on peut définir en chaque point  $M$  de  $S$  trois axes orthogonaux entre eux  $Mx_i$
- $S_{ui}$  portion de  $S$  sur laquelle  $u_i$  est donnée dans une structure d'espace vectoriel  $D_p$
- $S_{Ti}$  : portion de  $S$  sur laquelle  $T_i$  est donnée dans une structure d'espace vecto-

$T$  : vecteur contrainte

$V$  : champ de vitesse

$$\begin{aligned} S_{ui} \cup S_{Ti} &= \{S\} \\ S_{ui} \cap S_{Ti} &= \{\emptyset\} \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2-8)$$

On appelle

- a/ jeu de données dynamiques un ensemble  $\mathcal{J}_d$  de données  $T_i$  sur  $S' \cap T$  et  $F$  forces de masse en tout point de  $V$  tels que l'équilibre des forces extérieures totales soit possible

b/ jeu de données cinématiques, un ensemble  $J_c$  de données  $U_i$  sur  $S_{U_i}$

On suppose enfin que le processus de chargement étudié est tel que les ensembles des jeux de données cinématiques réalisables dans ce processus aient des structures d'espaces vectoriels sur  $R$  soit  $D_p$  et  $T_p$ .

On peut ainsi introduire avec les définitions précédentes les notions suivantes :

- un champ de contrainte  $\sigma$  est dit statiquement admissible associé à un jeu de données dynamiques du processus  $\forall s_a$  ass  $J_d \in D_p$  (2-9) s'il satisfait pour ce jeu de données, les équations d'équilibre et les données à la limite sur les contraintes
- un champ de vitesse de déformation  $V$  est dit cinématiquement admissible associé à un jeu de données cinématiques du processus  $\forall c_a$  es.  $J_c \in T_p$  (2-10) s'il dérive d'un champ de vitesse  $u$  satisfaisant pour ce jeu de données, les données à la limite sur les vitesses

d'où l'énoncé du théorème des puissances virtuelles

$$\begin{array}{ll} \forall J_d \in D_p & J_c \in T_p \\ \forall \sigma \text{ ass } J_d & \forall v \text{ ass } J_c \end{array}$$

$$\text{on a } \int_S \sigma r ds + \int_V P f u dV = \int_V \underline{\sigma} \underline{v} dV = P(\underline{\sigma}, \underline{v}) \quad (2-11)$$

$\sigma$  : champ de contraintes

$\underline{\sigma}$  : tenseur contrainte (valeur du champ  $\sigma$  en un point)

$u$  : champ de vitesse

$V$  : champ de vitesse de déformations

$\underline{v}$  : tenseur de vitesse de déformations

$f$  : fonction de charge du matériau

$f=0$  : critère de plasticité

$V$  : volume d'un solide

$S$  : frontière d'un solide

$T$  : vecteur contrainte

$g$  : potentiel plastique du matériau

On dira alors qu'un corps est soumis à un processus de chargement dépendant d'un nombre fini de paramètres

$Q_i$   $S_i$

$\forall J_d \in D_p$  et  $\forall \sigma \in S_a$  on peut définir une application univoque

$$\sigma \rightarrow Q(\sigma) = [Q_1(\sigma), Q_2(\sigma), \dots, Q_n(\sigma)] \in \mathbb{R}^n \quad (2-12)$$

$\forall J_c \in T_c$  et  $\forall v \in V_{ca}$  on peut définir une autre application univoque

$$v \rightarrow \dot{q}(v) = [\dot{q}_1(v), \dot{q}_2(v), \dots, \dot{q}_n(v)] \in \mathbb{R}^n \quad (2-13)$$

Telles que :

$$P(\sigma, v) = Q(\sigma) \dot{q}(v) = \sum_{i=1}^n Q_i(\sigma) \dot{q}_i(v) \quad (2-14)$$

On dira alors que les  $Q_i$  sont les  $n$  paramètres de chargement du corps,  $Q$  un chargement et  $\dot{q}$  une vitesse de déformation du système

**CHAPITRE III**  
**DETERMINATION DE LA CHARGE LIMITE**

### III - DETERMINATION DE LA CHARGE LIMITE

Plusieurs méthodes de détermination de la charge limite existent dans la littérature, chacune d'elles utilisant une loi de comportement simplifiée.

Nous exposerons en détail trois méthodes essentielles :

- méthode de BAKER : loi de comportement bilinéaire, méthode de résolution par le théorème des travaux virtuels
- méthode de MACCHI : loi de comportement trilineaire, méthode de résolution des rotations imposées
- méthode de KUCZYNSKI : loi de comportement continu, méthode pas à pas.

#### 3.1 - Théorème de travaux virtuels avec une loi de comportement bilinéaire

Cette méthode, mise au point par BAKER, est basée sur le théorème de la borne supérieure et nécessite que chaque mécanisme possible soit envisagé. Elle suppose que les déformations de la structure sont infinitésimales avant que la charge limite soit atteinte ; dès lors, toutes les déformations apparaissent quand la structure est transformée en mécanisme.

Les poutres de la structure se comportent comme des bielles rectilignes indéformables, articulées les unes sur les autres aux rotules plastiques. Il s'en suit que les déformations sont nulles sauf aux  $n$  endroits de rotules plastiques où se produisent les rotations finies  $\psi_j$ .

D'après le principe des travaux virtuels, si une ossature déformable en équilibre sous l'effet d'un système de forces extérieures est soumise à une déformation virtuelle compatible avec ses liaisons, le travail  $T_e$  fourni par les forces extérieures  $T_i$ . Ce théorème conduit à

$$\sum P_i \delta_i = \sum M_{pj} \psi_j \quad (3-1)$$

où  $\delta_i$  est le déplacement du point d'application de la force extérieure  $P_i$

$M_{pj}$  représente le moment plastique de la rotule  $j$

Pour connaître le mécanisme correct, il faut satisfaire au théorème de la borne inférieure et il faut alors calculer les moments plastiques de toutes les rotules possibles.

### 3.1.1 - Notations

$L_1$  : limite d'élasticité

$L_2$  : limite ultime

$r$  : rayon de courbure de 0 à la limite  $L_1$

$\theta_h$  : rotation à la rotule plastique  $K$  de  $L_1$  à  $L_2$

$EI$  : raideur en flexion

$M_1$  : moment résistant à  $L_1$

$\alpha_h$  : distance de l'axe neutre à  $L_1$

$h$  : hauteur utile

$\epsilon_{bl}$  : raccourcissement du béton à  $L_1$

$\epsilon_{al}$  : allongement de l'acier à  $L_1$

$\bar{X}_k$  : moment résistant à la rotule à  $L_2$

$\theta_{ik}$  : rotation de la rotule  $i$  lorsque  $\bar{X}_k$  a agi

$l_p$  : longueur équivalente de la rotule plastique

$l$  : portée de la poutre

$\epsilon'_p$  : raccourcissement du béton entre  $L_1$  (acier ou béton) et  $L_2$  (béton ou acier)

$l_i$  : distance entre le point d'inflexion et l'appui

$k_1$  : constante dépendant de la nature de l'acier

$P_u$  : capacité ultime de l'élément sous une charge normale lorsque aucun moment n'agit

$p$  : charge normale ultime dans un élément (lorsque le moment agit)

$$K_2 = 1 + 0,5 \frac{P}{P_u} \quad (3-2)$$

$K_3$  : constante dépendant de la nature du béton

$e_{nuh}$  : distance de l'axe neutre à  $L_2$

$\epsilon_{b2}$  : allongement du béton à  $L_2$

$\epsilon_{b1}$  : allongement du béton à  $L_1$

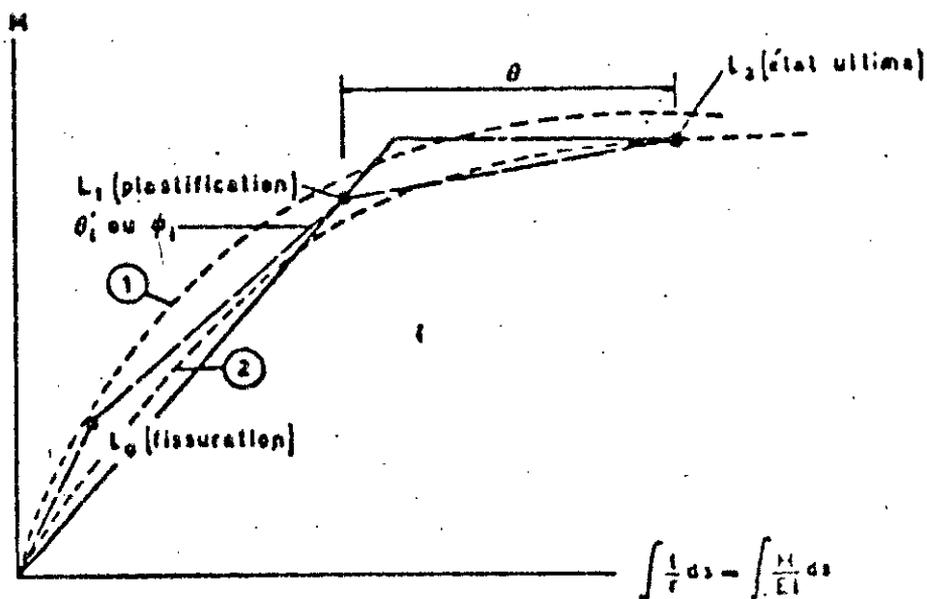
### 3.1.2 - Remarques générales

Dans le cas de certaines structures telles que les ossatures de bâtiment, comportant un grand nombre d'inconnues hyperstatiques et dans lesquelles la répartition de la fissuration n'est pas définie, la schématisation consistant à utiliser un diagramme trilineaire conduit à certaines difficultés.

Une simplification importante consiste à prendre en compte un mt mt - rotation bilinéaire tel que  $OL_1 L_2$  (figure 3.1) dans lequel le segment de droite passant par  $L_2$  est horizontal.

Afin de comparer les deux diagrammes, considérons un élément de structure dans lequel les noeuds conservent, sous la charge, une position dans l'espace, constante; dans un tel élément, la répartition des moments de flexion dépend des pentes d'extrémité aux jonctions.

Les valeurs de ces pentes d'extrémité sont fonction de la quantité  $\int \frac{1}{r} ds$  le long des éléments, c'est à dire de l'aire du diagramme représentant la courbure et de la position du centre de gravité de cette aire. L'aire du diagramme des courbures le long d'un élément (fig. 3-2) représente la rotation totale le long de l'élément et l'on peut supposer lors du calcul des pentes d'extrémité ou les termes des équations de compatibilité, que cette rotation totale est équivalente à une rotation concentrée au centre de gravité de cette aire.



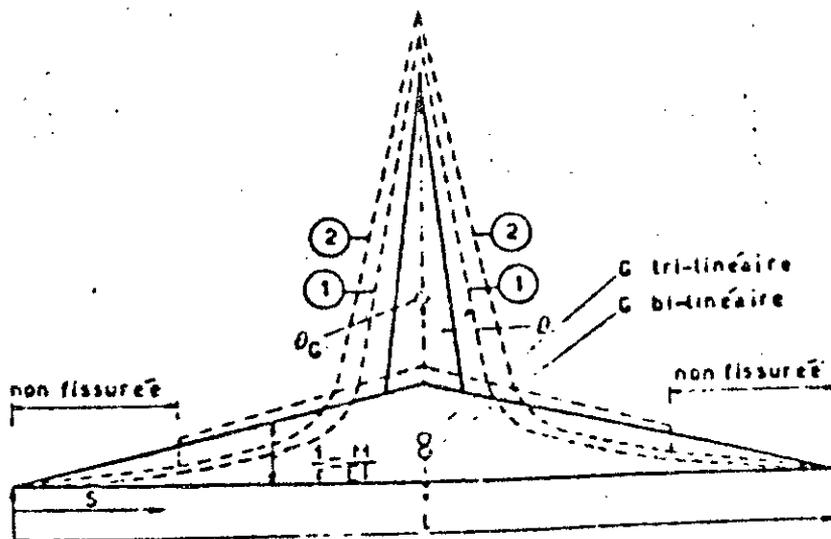
- ① Diagramme réel sous charge de courte durée; zone fissurée très étendue
- ② Diagramme réel sous chargement lent; zone fissurée peu étendue
- Diagramme tri-linéaire (Macchi)
- Diagramme bi-linéaire (Baker)

Figure 3-1

M

Diagramme type  $\frac{M}{\int \frac{1}{r} ds}$  pour une poutre.

Fig. 3-2 : type de répartition de la courbure pour une poutre



- ① Diagramme réel pour une charge de courte durée
- ② Diagramme réel pour une charge de longue durée
- Tri-linéaire (Macchi)
- Bi-linéaire (Baker)

### 3.1.3 - Exposé de la méthode simplifiée bilinéaire

#### a/ principe de base

L'hypothèse simplifiée bilinéaire, en raison de la linéarité, permet pour le calcul ou l'analyse des poutres continues ou des ossatures, d'utiliser l'une quelconque des méthodes élastiques connues, à la condition d'introduire dans les sections critiques comme l'indiquent les équations de compatibilité, des angles de discontinuité ayant certaines valeurs admissibles.

Les équations générales de compatibilité définissent clairement les principaux termes à prendre en compte dans tout calcul.

La résolution d'un tel problème implique un choix préalable des positions des rotules et il convient de vérifier que, en chaque jonction, les angles de discontinuité entre les éléments requis par la compatibilité ne dépassent pas certaines valeurs admissibles. Dans les ossatures de bâtiment, lorsqu'il est nécessaire de vérifier ou de prendre en compte l'influence des déplacements horizontaux, l'ossature peut être calculée de façon que les rotules plastiques se forment de telle sorte que chaque étage puisse être isolé et étudié séparément. A chaque étage, on fixe tout d'abord les moments d'encastrement de toutes les rotules plastiques ayant une influence sur les déplacements horizontaux et l'on en déduit les angles résultant de ces déplacements. Ensuite, lorsqu'il s'agit de vérifier et de corriger chaque jonction de cet étage pour assurer la compatibilité, on effectue séparément l'étude de l'angle résultant du déplacement horizontal et celle des rotations des rotules dues à d'autres causes.

#### b/ Valeurs de la rigidité en flexion

Lors de l'utilisation de l'hypothèse simplifiée bilinéaire, la détermination de  $EI$  dans les éléments, entre les sections critiques, est basée sur une relation moment courbure supposée linéaire entre 0 et  $L_1$ . L'ossature est alors calculée de telle sorte que, lorsque sont formées toutes les rotules plastiques nécessaires pour rendre la structure isostatique, les contraintes dans les sections critiques entre ces rotules

correspondent à des sollicitations inférieures ou égales à la limite de plastification L1. Cela revient donc à admettre que, lorsque la section est uniforme, les éléments présentent sur toute leur longueur, entre les rotules, un coefficient EI constant, basé sur la valeur obtenue à la limite L1. Il peut arriver que dans certains cas particuliers, l'élément soit fissuré près de la section critique et reste intact sur la plus grande partie de sa longueur. Le projecteur doit alors décider si l'élément doit être supposé totalement fissuré ou totalement non fissuré. Si l'élément doit être supposé totalement non fissuré à la limite L1, il est possible d'utiliser la valeur usuelle de EI pour l'état non fissuré.

Que l'élément doive être supposé entièrement fissuré ou non, la valeur de EI sera calculée sur la base de la relation moment courbure à L1

$$EI = \frac{M \cdot |X_1| h}{\epsilon'_{b1}} = \frac{M \cdot |L_{a1}| h}{\epsilon_{a1}} \quad (3-3)$$

Lorsque l'élément n'est pas fissuré,  $\epsilon'_{b1}$  s'applique à la position de l'axe neutre obtenue sous l'action combinée du moment de flexion et de l'effort normal. De même  $\epsilon'_{b1} = 0,002$  s'applique aussi à cette action combinée.

#### c/ Valeurs des paramètres

- contraintes et déformations

##### \* Acier

Contrainte de plastification L1 pour une déformation unitaire résiduelle de 0,001

Contrainte à l'état limite L2 pour une déformation unitaire totale de 0,01

##### \* Béton

Contrainte de plastification L1 pour une déformation unitaire de 0,002

Contrainte à l'état limite L2 pour une déformation unitaire de 0,035 supposée égale à la contrainte obtenue pour une déformation unitaire de 0,02.

\* Diagramme contraintes déformations

Parabole de 0 à L1

Horizontale de L1 à L2

- Répartition des contraintes et des déformations

\* déformation du béton

linéaire le long de la section transversale

\* contraintes du béton

parabolique

\* diagramme de calcul : voir fig 3.3 et 3.4

h1 et h2 sont calculés en fonction de  $\theta$

$\mu_1$  et  $\mu_2$  sont calculés en fonction de h1 et h2

Ces diagrammes ont été établis pour des sections rectangulaires. Des courbes analogues peuvent être obtenues pour des sections en T et en I et pour une déformation résiduelle de l'acier de 2°/00 à L1, si cette dernière est considérée comme sûre pour des aciers écrouis à froid. Si  $h_2 > 0.5$ , la résistance caractéristique du béton à utiliser dans les calculs devra être prise égale à 80 % de la valeur obtenue pour la flexion seule. Les résultats d'essais ont montré qu'une telle hypothèse était acceptable.

d/ Valeur admissibles de  $\theta$

La figure 3.5 indique les valeurs de  $\theta$  que l'on peut admettre en demeurant du côté de la sécurité, en fonction du paramètre  $\alpha_2 = \frac{x_2}{h}$  et du pourcentage d'acier

P (3-4)

e/ Exemples d'application de la méthode bilinéaire

Dans une poutre continue comportant au moins 5 travées égales de portée l.,

on adopte les hypothèses suivantes :

- il se forme des rotules plastiques aux appuis
- la répartition "libre" des moments de flexion a une forme parabolique. Ces moments ont une valeur maximale égale à  $M$
- Le moment résistant plastique sur les deux appuis médians est égal à  $M/2$

En appliquant la règle de MOHR, ou par substitution dans l'équation générale de compatibilité, il vient :

$$\theta = 0,16 \frac{M \cdot l}{EI} \quad (3-5)$$

$$EI = M \frac{\alpha_1 h}{\epsilon_{b1}} \quad (3-6) \quad \text{où } M' \text{ est le moment résistant de la}$$

section de la poutre à la limite  $L1$ .

La meilleure façon de déterminer  $M'$ ,  $\alpha_1$ ,  $h$ ,  $\alpha_2$  est d'utiliser des courbes de calcul telles que celles des figures (3-3) et (3-4). La valeur admissible de  $\theta$  peut être obtenue à partir du diagramme de la figure (3-5).

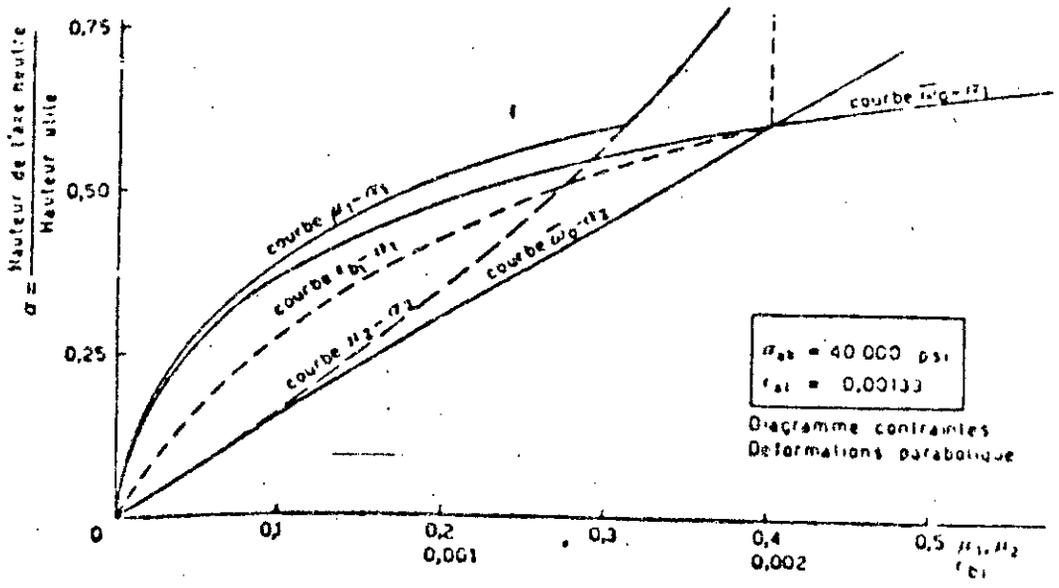


Figure 3-3

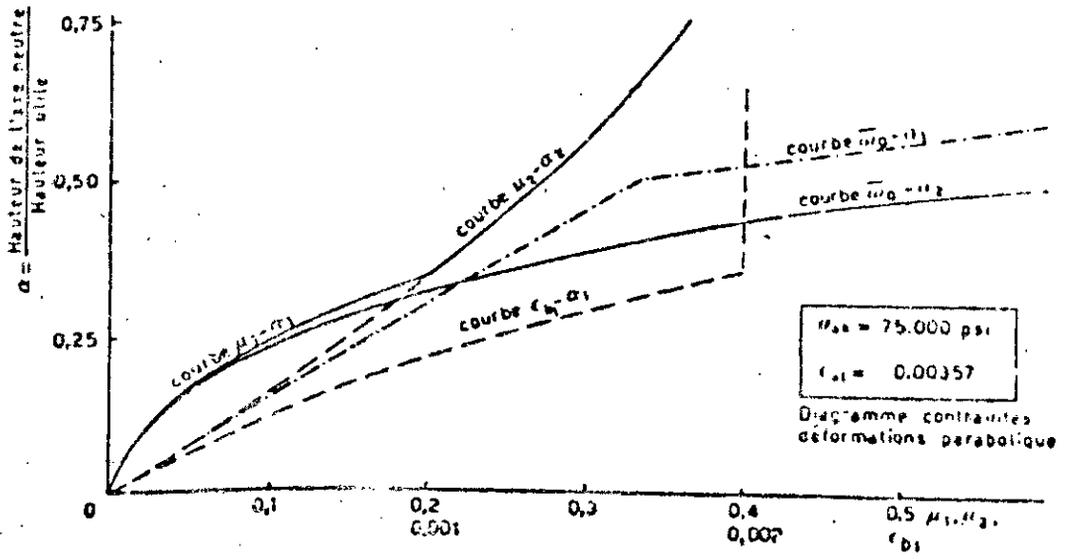


Figure 3-4

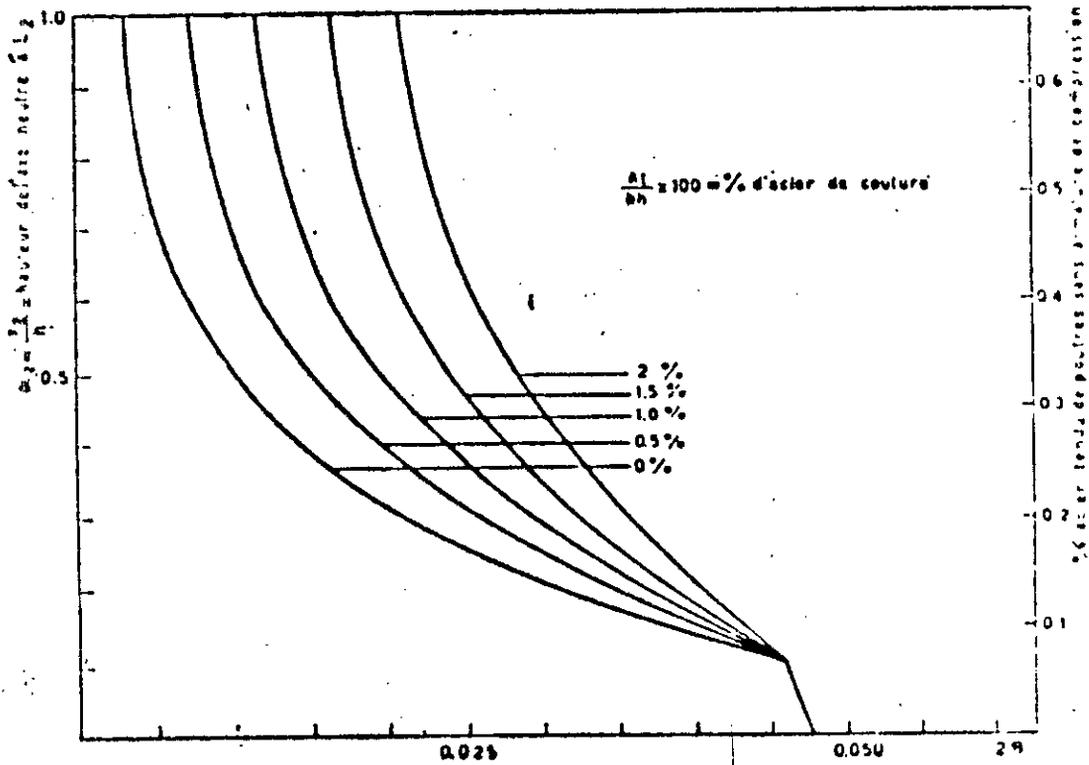


Figure 3-5

Valeur admissible de 20

Pour illustrer cette méthode, considérons comme exemple de système hyperstatique simple une poutre continue.

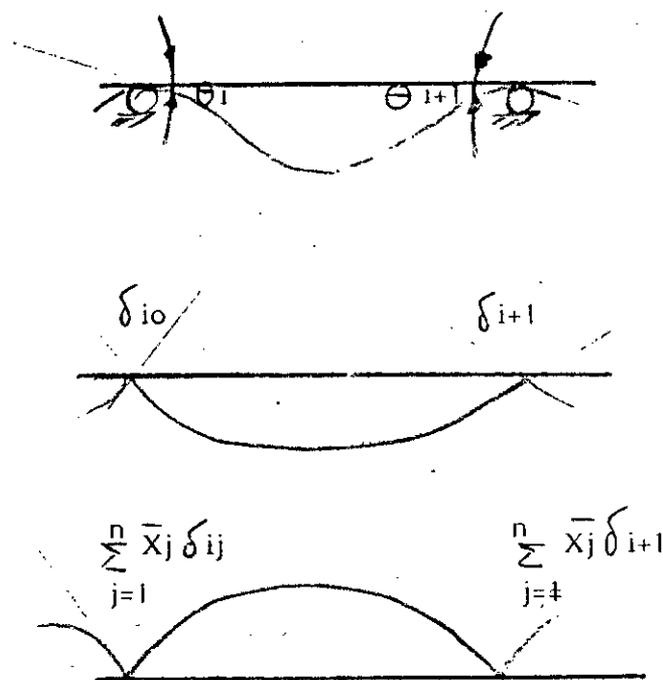
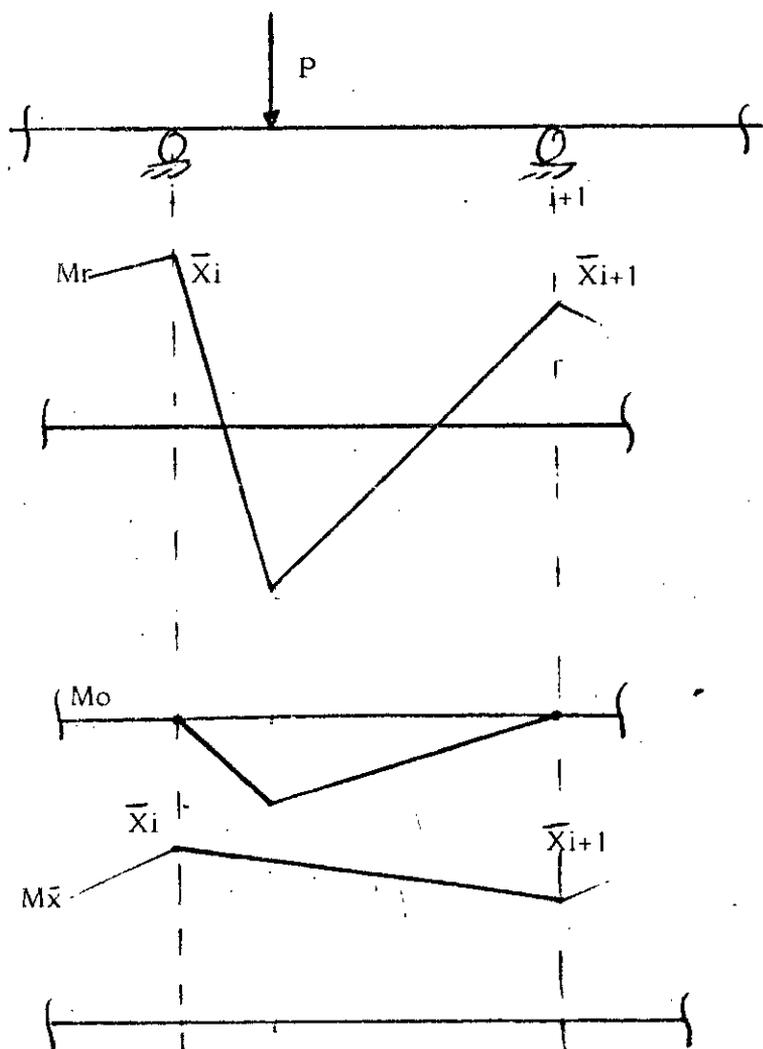
Adoptons un certain nombre de sections (les sections d'appui par exemple) où l'on désire que les rotules plastiques se forment. Ces sections sont donc les sections critiques.

Leur nombre, on l'a vu, doit être tel qu'en remplaçant les rotules plastiques par des rotules réelles, on obtienne un système de référence isostatique.

Si on adopte des moments  $\bar{X}_i$  (fig. 3-6) (notation de BAKER) arbitraires dans les sections critiques, le diagramme des moments à la ruine est statiquement déterminé.

Fig. 3-6

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^n \bar{X}_j \delta_{ij} = \theta_j \quad (3-7)$$



On peut décomposer en deux diagrammes les moments  $M_0$  et  $M\bar{x}$  dus respectivement, dans le système de référence isostatique, aux charges extérieures et aux moments de rupture arbitraires  $\bar{X}_i$  appliqués aux lèvres des coupures.

Le principe de superposition permet de calculer les rotations  $\Theta_i$  aux différentes rotules plastiques afin que la distribution arbitraire des moments puisse être atteinte.

$$\delta_{i0} + \sum_{j=1}^n \delta_{ij} \bar{X}_j = -\Theta_i \quad (i = 1, n) \quad (3-8)$$

$n$  : degré d'hyperstaticité

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} ds \quad (3-9) \quad \delta_{i0} = \int \frac{M_i M_0}{EI} ds \quad (3-10)$$

$M_i$ ,  $M_j$ ,  $M_0$  sont les moments dans le système isostatique de référence dus respectivement à la paire des moments  $\bar{X}_i$  en  $i$ ,  $\bar{X}_j$  en  $j$  et aux charges extérieures.

### 3.2 - Méthode des rotations imposées : loi de comportement trilineaire (MACCHI)

#### 3.2.1. - Généralités

Elle repose sur le principe de la superposition des effets plastiques des charges extérieures aux effets des rotations plastiques, ces dernières étant supposées concentrées au droit des sections critiques.

Elle est faite sur des bases théoriques analogues à celles du procédé de dimensionnement de BAKER (considérations des rotations limites des sections critiques, compatibilité de la déformation).

Le but de cette méthode est de rechercher un procédé de vérification, permettant d'évaluer les marges de sécurité des structures hyperstatiques indépendamment de la méthode adoptée pour le dimensionnement (applicable donc également aux structures dimensionnées par la méthode des contraintes admissibles) (23).

La méthode des rotations imposées est fondée sur l'interprétation générale des phénomènes plastiques donnée depuis plusieurs années par le professeur COLONETTI et mise au point par le professeur LEVI (22).

### 3.2.2 - Domaine d'application

Les ossatures en béton armé présentent pour des charges excédant la charge de service, un comportement anélastique qui s'accompagne, dans les structures hyperstatiques, d'une redistribution plus ou moins complète des moments fléchissants.

Cette méthode a pour but la vérification des structures hyperstatiques composées de pièces linéaires (essentiellement poutres continues et portiques) vis à vis des trois états limites de rupture, de fissuration excessive, et de déformation excessive et dans le respect des principes semi probabilistes.

Il est aussi possible de tenir compte des autres actions telles que le retrait, le fluage, la température et les tassements d'appui.

Elle propose donc d'être suivant les principes du CEB, une méthode complète tout en introduisant des hypothèses simplifiées et des approximations justifiées par son caractère essentiellement pratique.

La méthode suppose l'unicité des états limites considérés, ce qui équivaut à adopter la convention de l'accroissement parallèle des charges pour chaque configuration de chargement.

Cette convention, raisonnable pour des structures simples, n'est pas toujours justifiée pour les structures à haut degré d'hyperstaticité ; sous cette réserve, on peut toujours envisager l'application de la méthode à des structures plus compliquées que celles considérées ici, en utilisant les calculateurs électroniques.

### 3.2.3 - Principes de calcul

#### a) Equations de compatibilité des déformations

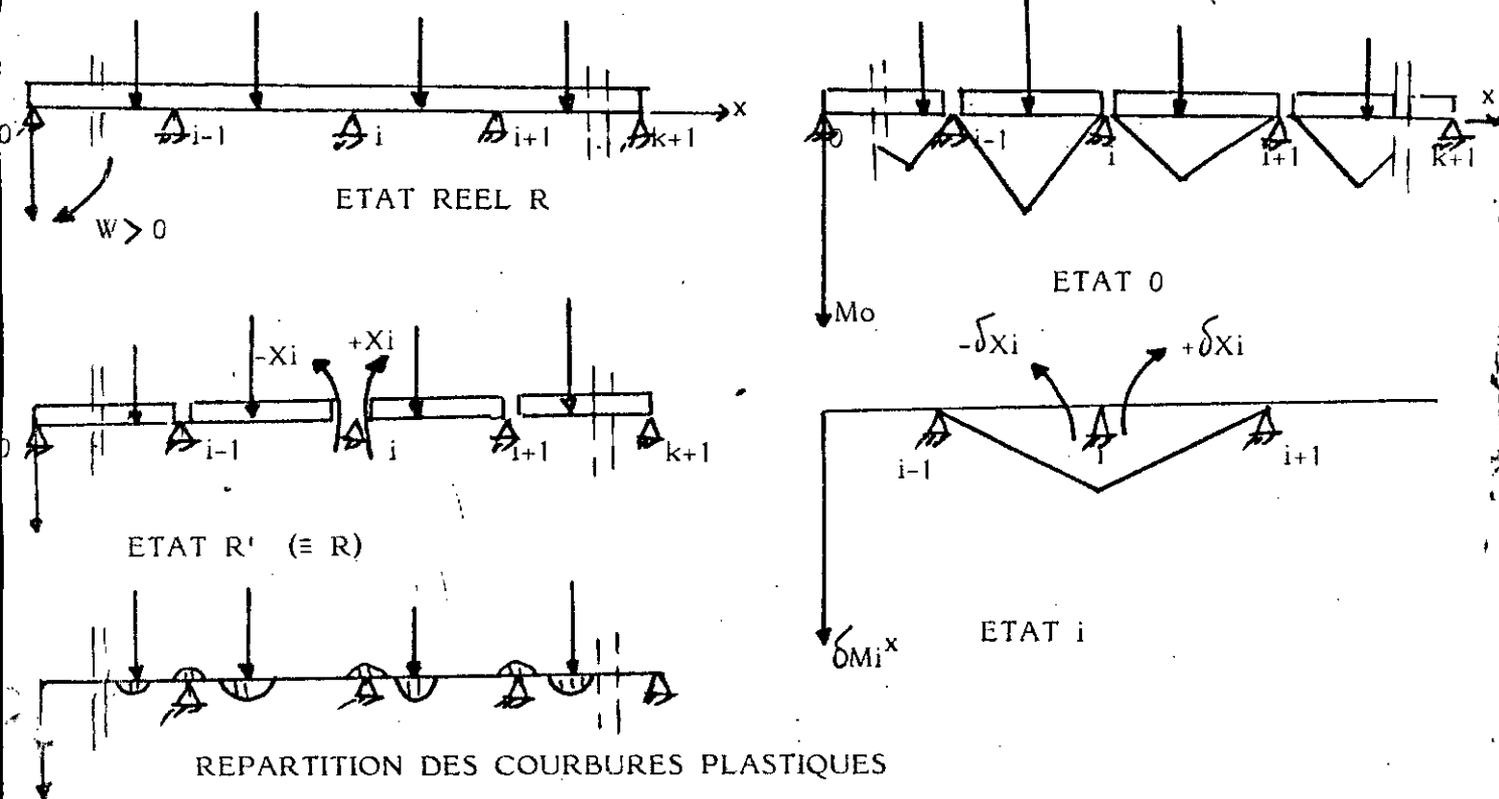
Considérons une poutre hyperstatique de degré  $k$ , sous l'effet des actions appliquées, certaines zones de la poutre peuvent être le siège de déformations plastiques.

Rendons isostatique le système en introduisant  $k$  rotules sans frottement au niveau des appuis intermédiaires (état 0). Dans la configuration réelle, chaque rotule est soumise à un couple  $-x_i$  à gauche et  $+x_i$  à droite de façon à annuler la rotation mutuelle des sections de part et d'autre de la rotule (état  $R'$ ). Les couples  $x_i$  sont les inconnues du problème. Pour les déterminer, nous utilisons le théorème des forces virtuelles.

Considérons pour cela  $k$  états  $i$  de la poutre isostatique associée, chacun de ses états étant obtenu en appliquant de part et d'autre de la rotule  $i$  des couples internes virtuels  $-\delta x_i$  et  $+\delta x_i$ . Pour chaque état  $i$ , il en résulte ainsi un champ de moment virtuel statiquement admissible  $\delta M_i x$ .

Fig.3,7 - Décomposition du système hyperstatique en vue de l'utilisation du théorème des forces virtuelles.

fig. 3-7 : décomposition du système hyperstatique en vue de l'utilisation du théorème des forces virtuelles



Si  $w_i$  est la rotation de la section sur l'appui  $i$  (fig. 3-7) dans le système réel (état R), la variation virtuelle du travail complémentaire est égale à :

$$\delta T^* = \delta x_i w_i - \delta x_i w_i = 0 \quad (3-11)$$

En effet, dans l'état réel la continuité de la poutre implique l'égalité des rotations à gauche et à droite de l'appui.

La variation virtuelle de l'énergie interne complémentaire s'écrit :

$$\delta J^* = \int_S \delta M_i^X \chi \, ds \quad (3-12)$$

où  $\chi ds$  représente, dans le système réel (état R), la rotation mutuelle des sections extrêmes d'un élément de poutre de longueur  $ds$ .

Le théorème des forces virtuelles indique que :

$$\begin{aligned} \delta J^* &= \delta T^* \quad \forall M_i^X \quad \text{statiquement admissible} \\ \text{d'où } \int_S \delta M_i^X \chi \, ds &= 0 \quad (3-13) \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie pour tout champ de moment statiquement admissible, nous pouvons choisir en particulier pour champ de moment, le champ  $M_i^X$  engendré par les deux couples internes  $-x_i$  et  $+x_i$  agissant dans la section  $i$  de la poutre dans l'état réel (état R'). Dans ces conditions, il vient :

$$\int_S M_i^X \chi \, ds = 0 \quad (3-14)$$

Posons  $x_i = 1$ . Ce couple unitaire donne naissance à une distribution de moment  $\bar{M}_i$  dans le système isostatique et nous pouvons écrire :

$$M_i^X = X_i \bar{M}_i \quad (3-15)$$

(3-14) deviendra alors

$$\int_S \bar{M}_i \chi \, ds = 0 \quad (3-16)$$

La courbure  $\chi$  est formée d'une composante élastique  $\chi^e$  et d'une composante plastique  $\chi^p$ . La composante élastique est la somme :

- d'une courbure  $\chi^{eo}$  due à l'action des charges extérieures sur la poutre isostatique associée ;
- d'une courbure  $\chi^{ei}$  due à l'action du moment  $X_i$  dans la section  $i$  de la poutre isostatique associée
- et des courbures  $\chi^{ej}$  résultant de l'action des moments  $X_j$  dans les sections  $j$  de la poutre isostatique associée ( $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, k$ ).

Compte tenu de cette décomposition, l'équation (3-16) s'écrit :

$$\int_S \bar{M}_i \chi^{eo} ds + \int_S \bar{M}_i \chi^{ei} ds + \sum \int_S \bar{M}_i \chi^{ej} ds + \int_S \bar{M}_i \chi^p ds = 0 \quad (3-17)$$

En introduisant les expressions des courbures élastiques

$$\chi^{eo} = \frac{M_o}{EI} \quad \chi^{ei} = \frac{M_i^x}{EI} = X_i \frac{\bar{M}_i}{EI}$$

$$\chi^{ej} = \frac{M_j^x}{EI} = X_j \frac{\bar{M}_j}{EI} \quad \text{et en posant}$$

$$\delta_{io} = \int_S \frac{M_o \bar{M}_i}{EI} ds \quad \delta_{ii} = \int_S \frac{M_i^2}{EI} ds \quad \delta_{ij} = \int_S \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds \quad (3-18)$$

L'équation (3-17) devient

$$\delta_{io} + \delta_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} X_j + \int_S \bar{M}_i \chi^p ds = 0 \quad (3-19)$$

L'intégrale du premier membre de cette équation se rapporte à toutes les zones plastiques de la poutre, aussi bien à celles qui sont adjacentes aux rotules qu'à

celles qui se trouvent en travée. D'après le théorème de Verechtchaguine nous pouvons poser pour une zone plastique  $i'$  située en travée :

$$\int_{l'_p} \bar{M}_i^G \chi_p ds = \bar{M}_i^G \int_{l'_p} \chi_p ds = M_i \psi_{i'} \quad (3-20)$$

où  $M_i^G$  est la valeur du moment  $\bar{M}_i$  au centre de gravité de la répartition des courbures plastiques (fig. 3-8) et  $\psi_{i'}$  la rotation mutuelle des sections extrêmes de la zone plastique  $i'$  de longueur  $l'_p$

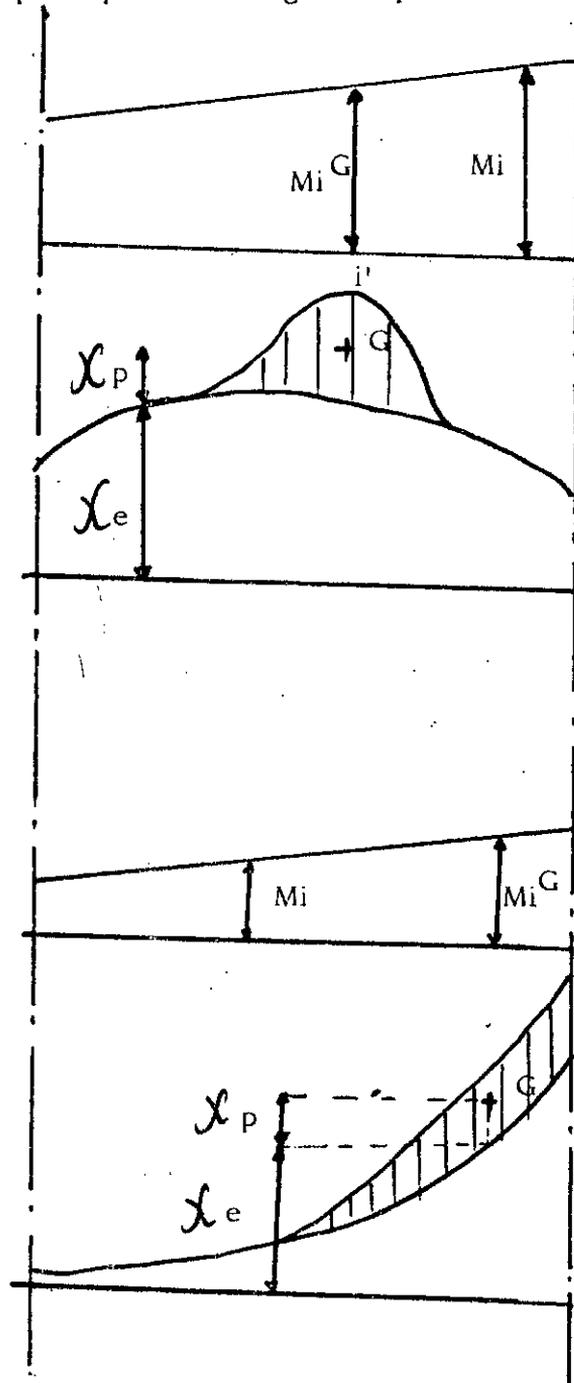


Fig. 3-8 : répartition de la courbure plastique en travée

$\chi_i=1$

Fig. 3-9 : répartition de la courbure plastique au droit d'une rotule

De même, pour la zone plastique  $i$  située au voisinage d'une rotule  $i$  (fig. 3-9), nous pouvons écrire

$$\int_{l_p} \bar{M}_i \chi_{pds} = \bar{M}_i^G \int_{l_p} \chi_{pds} = \bar{M}_i^G \Theta_i \quad (3-21)$$

Expression dans laquelle  $\Theta_i$  est la rotation plastique mutuelle des sections extrêmes de la zone  $i$  et  $l_p$  la longueur de cette zone.

Comme la zone plastique s'étend aux alentours de la rotule  $i$ , nous pouvons admettre sans erreur grossière  $\bar{M}_i^G \approx X_i = 1$

Compte tenu des expressions (3-20) et (3-21) l'équation peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\delta_{i0} + \delta_{ii} X_i + \sum_{j \neq i} \delta_{ij} X_j + \sum \psi_i' \bar{M}_i^G + \Theta_i = 0 \quad (3-22)$$

Cette équation doit être écrite pour chaque rotule  $i$  de la poutre isostatique associée. Nous obtenons ainsi un système linéaire de  $k$  équations à partir duquel  $k$  inconnues  $X_i$  peuvent être déterminées.

Le calcul des rotations plastiques intervenant dans la formule (3-22) nécessite la connaissance dans chaque section de la loi moment-courbure.

b/ applications

Le principe consiste à rendre pratique, au moyen du procédé particulier, la détermination de la configuration réelle en régime anélastique, telle qu'elle est définie théoriquement par l'équation suivante, qui résulte de l'extension de la méthode de MÜLLER - BRESLAU (recommandations CEB - CR 3, 114, 1964)

$$\int \frac{M_i M_0}{E'I'} ds + X_i \int \frac{M_i M_i}{E'I'} ds + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{E'I'} ds + M_i \Theta_i' + \sum M_i \psi_r = 0 \quad (3-23)$$

Sans renoncer à sa généralité, ce qui en particulier en permet l'utilisation non seulement dans l'état limite de rupture, mais aussi sous la charge d'exploitation. Le procédé consiste à considérer les rotations anélastiques comme des rotations imposées à l'endroit des sections critiques sur la structure considérée encore élastique.

Il en découle un ensemble de coactions (ou autotensions) qui est superposé au diagramme élastique dû aux charges extérieures.

Ce procédé correspond à subdiviser en deux les équations générales (CEB n° 30)

- Equation élastique de l'effet des charges

$$\int \frac{M_i M_0}{E'I'} ds + X_i \int \frac{M_i^2}{E'I'} ds + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{E'I'} ds = 0 \quad (3-23)$$

- Equation qui donne l'effet d'une rotation anélastique unitaire

$$X_i \int \frac{M_i^2}{E'I'} ds + \sum X_k \int \frac{M_i M_k}{E'I'} ds + 1 = 0 \quad (3-24)$$

Les deux équations sont élastiques, donc la résolution directe est possible ; elle peut être simplifiée par tout l'ensemble de tables dont on dispose pour le calcul élastique des structures hyperstatiques.

Cette dernière phase de calcul fournit les diagrammes élastiques des moments dûs aux charges et les diagrammes des moments (eux aussi élastiques) dûs à des rotations unitaires imposées dans les sections critiques.

La partie "anélastique" du calcul suit la préparation de ces éléments ; elle consiste à superposer les diagrammes dûs aux charges et ceux dûs aux rotations unitaires, en donnant à chacun d'eux un coefficient d'amplification de manière à respecter les lois moments rotations réelles.

Dans la pratique, on utilisera les diagrammes moments rotations trilineaires qui suivent de près le comportement réel des sections. On introduit une approximation importante en considérant les rotations anélastiques concentrées dans les sections critiques ; l'admissibilité pratique de cette approximation est justifiée dans le bulletin du CEB n° 21.

Les déformations axiales des membrures soumises à la flexion composée seront en général négligées, à l'exception des cas où elles jouent un rôle essentiel (arcs).

### 3.2.4 - Sécurité

#### a) Pour l'état limite de rupture

- calcul de la résistance des différentes sections critiques en introduisant les résistances de calcul  $\sigma^*$  des matériaux
- vérification, par le calcul hyperstatique, que la rupture de la structure dans son ensemble se vérifie sous une charge au moins égale à la charge de calcul

#### b) Pour l'état limite de fissuration ou de déformation

- vérification que sous la charge caractéristique non majorée, la contrainte dans l'acier ne dépasse pas les limites admises pour le diamètre choisi, compte tenu éventuellement de la redistribution des moments due à la fissuration admise, calcul des flèches maximales.
- en ce qui concerne les surcharges, il faut tenir compte de la possibilité que les conditions les plus défavorables se réalisent fréquemment avec surcharge agissant seulement sur des parties de la construction ; on devra donc vérifier la structure sous les configurations les plus défavorables des surcharges.

Grâce aux possibilités de redistribution, on néglige le fait que la probabilité de rupture de la structure est plus petite que la probabilité de rupture des sections individuelles ; une telle considération pourrait conduire à une réduction de la charge de calcul à prendre en compte, mais, sa définition numérique n'étant pas possible pour le moment, on négligera cette sécurité supplémentaire.

Une deuxième considération probabiliste concernant les structures hyperstatiques est celle de la dispersion des déformations ; cette dispersion peut sensiblement influencer la configuration de rupture, notamment en présence de sections fragiles ; on va donc considérer des limites supérieures et des limites inférieures des rotations pour en prendre en compte, dans les calculs, les combinaisons les plus défavorables.

### 3.2.5 - Préparation des éléments pour le calcul

#### a) détermination des sections critiques

Les sections critiques sont les sections les plus sollicitées de chaque zone soumise à un moment de même signe ; dans ces sections se réalisent, en régime anélastique, les conditions les plus sévères et une partie considérable de la rotation anélastique y est concentrée ; dans les sections critiques on considère concentrée aussi toute la rotation anélastique de même signe qui se produit de part et d'autre de chacune d'elles.

Il existe donc autant de sections critiques qu'il y a de zones dans lesquelles des rotations anélastiques de signes différents sont supposées ; le nombre des sections critiques est en général différent du nombre de rotules nécessaires pour rendre la structure isostatique.

#### b) calcul de l'effet élastique des charges

On introduit dans le calcul les résistances de calcul  $\sigma^*$  de l'acier et du béton.

c) calcul de l'effet élastique des charges

Pour chaque configuration de charges à prévoir, on trace les diagrammes des moments en régime élastique pour une charge unitaire.

d) calcul de l'effet des rotations unitaires

on imagine d'effectuer une coupure dans chaque section critique et on trace le diagramme des moments élastiques dus à une rotation relative unitaire imposée aux deux faces de coupure.

e) construction des diagrammes moments rotations

Les diagrammes à construire sont en réalité des diagrammes moments rotations anélastiques, les rotations élastiques étant considérées dans les calculs élastiques précédents.

Un diagramme doit être tracé pour chaque section critique, dans laquelle est conventionnellement concentrée la rotation anélastique de la zone adjacente ; le moment porté en ordonnées est le moment dans la section critique

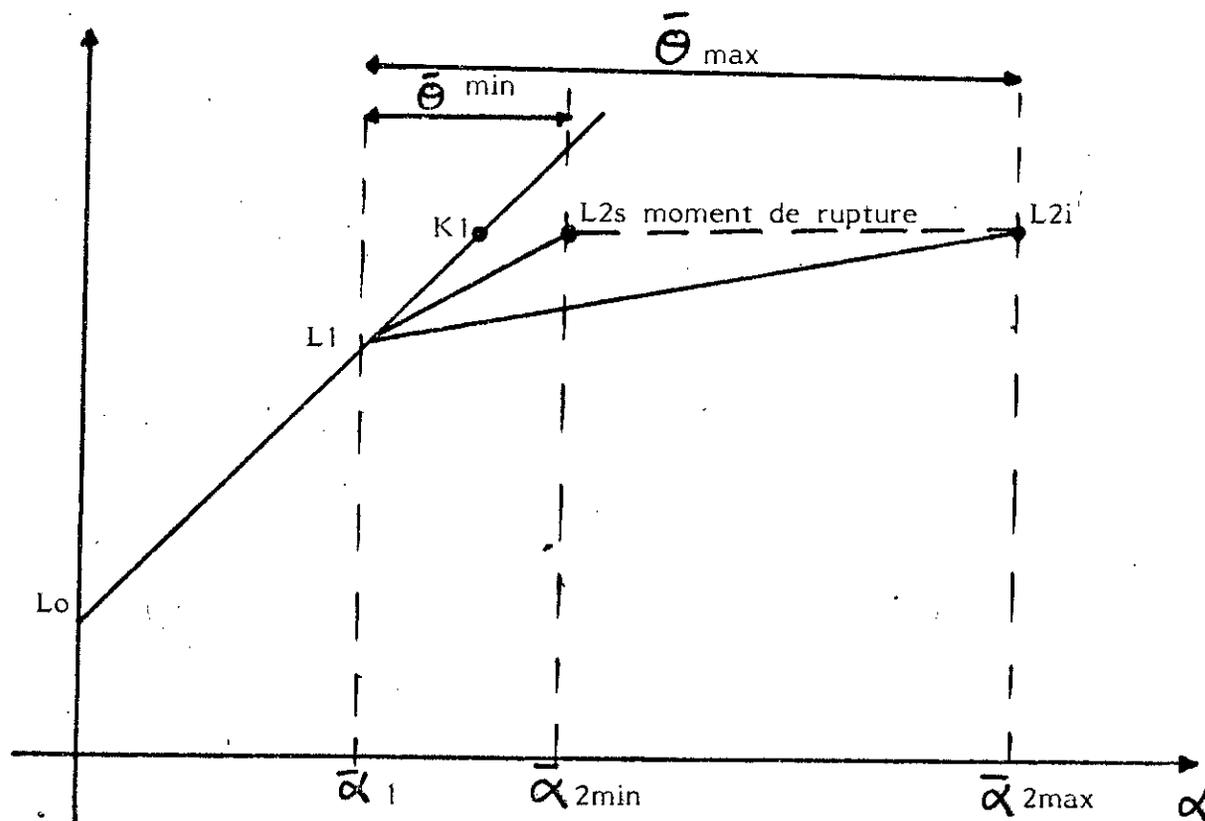


fig. 3-10 : diagramme moments rotations anélastiques

## 1) première branche

Le point final  $l_0$  de la première branche correspond à la fissuration de la section critique ; il est donc défini en flexion simple, par son ordonnée, c'est-à-dire le moment de fissuration

$$M_0 = \frac{\sigma_{bk} I'}{y} \quad (3-25)$$

$\sigma_{bk}$  : résistance caractéristique du béton à la traction

$I'$  : inertie de la section homogène

$y$  : distance entre le bord tendu et le centre de gravité de la section homogène

## 2) deuxième branche (état fissuré)

L'ordonnée de  $L_1$  est le moment  $L_1$  pour lequel la limite d'élasticité est atteinte dans le diagramme de calcul de l'acier (acier écroui 0,95  $\sigma_a$ ).

$M_1$  calculé par la théorie ordinaire du béton armé (sections planes, acier et béton encore élastiques, section fissurée).

L'abscisse de  $L_1$  (rotation anélastique) peut être prévue par l'intégration, étendue à la partie de poutre où  $M_0$  est dépassé, des courbures calculées suivant la théorie ordinaire du béton armé et diminuées des courbures élastiques.

La courbure anélastique en flexion simple, à l'expression

$$\frac{1}{r} = \frac{M - \Delta M}{E_a I_{II} + E'_b I'}$$

avec :  $\Delta M = M - M_0$

$E_a$  : module d'élasticité de l'acier

$I_{II} = A \cdot Z (h-x)$

$A$  : aire de l'armature

$Z$  : bras de levier

$h$  : hauteur utile

$x$  : hauteur de la zone de béton comprimé

### 3) Troisième branche

Pour les poutres qui dépassent la limite d'élasticité, une troisième branche atteint le point de rupture L2.

Il s'agit de calculer pour bien déterminer cette branche, la rotation anélastique totale.

Les essais ont montré (CEB n° 52) que dans les limites des approximations requises par les applications pratiques,  $\bar{\theta}$  peut être considérée comme localisée dans la section critique, indépendante de l'échelle de la structure, du rapport hauteur/portée, de la forme du diagramme des moments.

La figure (3-11) deux courbes expérimentales sont tracées correspondant respectivement à la borne inférieure et supérieure.

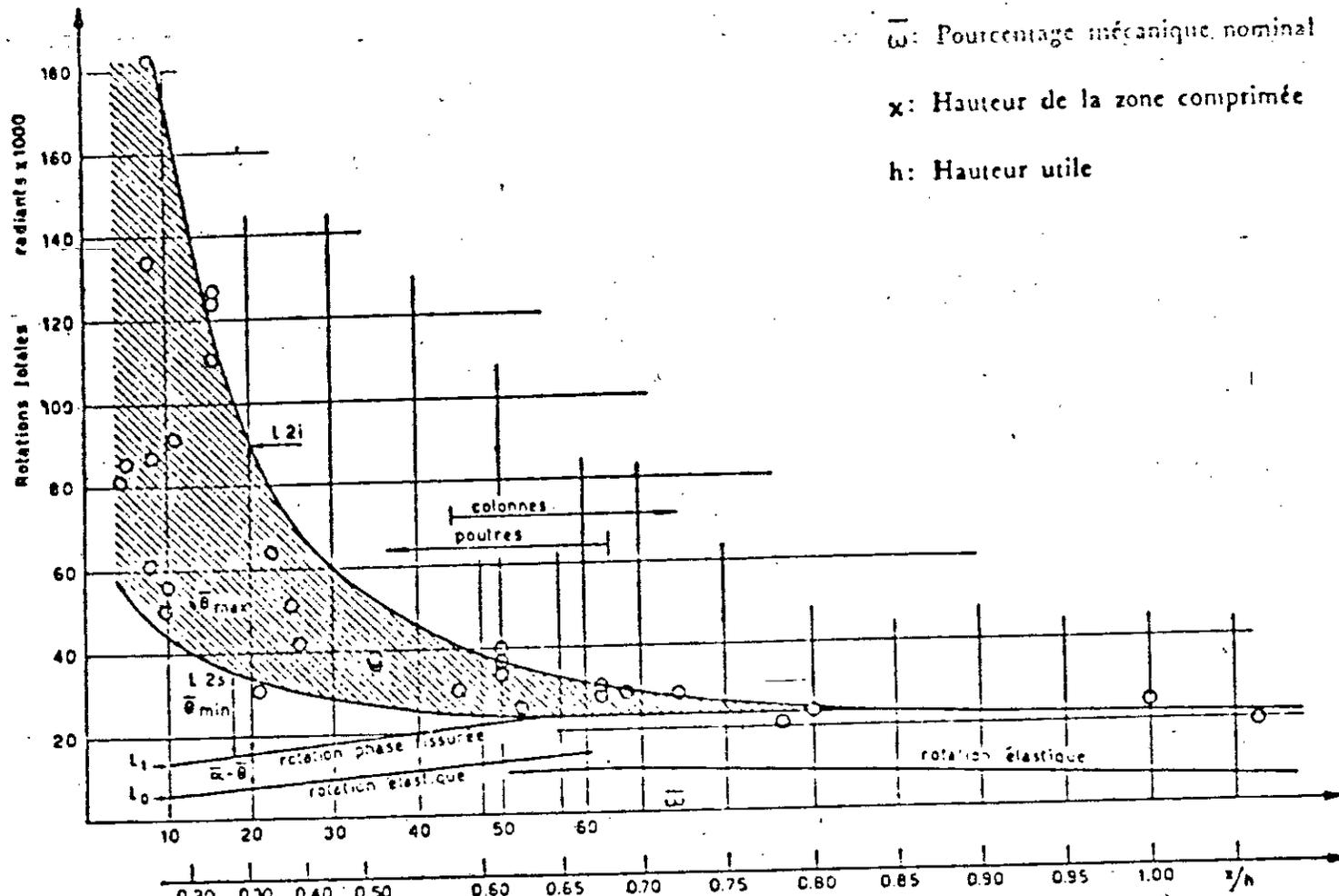
Connaissant la borne inférieure  $\theta_{\min}$  et la borne supérieure  $\theta_{\max}$  on peut :

- déterminer les différentes combinaisons

- tracer soit la branche supérieure L1 - L2s avec  $\theta_{\min}$   
ou la branche inférieure L1 - L2i avec  $\theta_{\max}$

L2 correspond au moment maximum qui peut être développé pour la section critique.

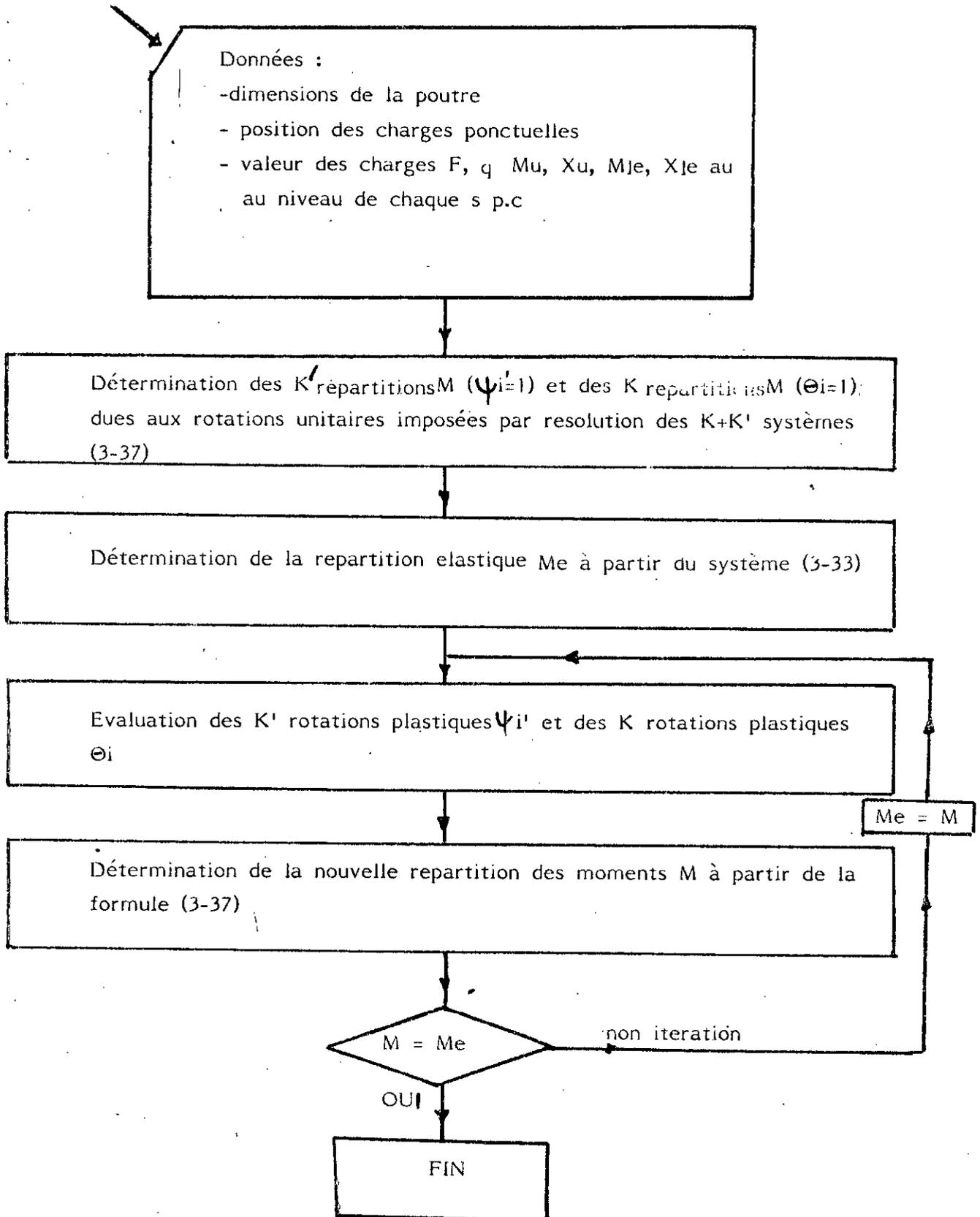
Figure 3-11



$\bar{\omega}$ : Pourcentage mécanique nominal  
 $x$ : Hauteur de la zone comprimée  
 $h$ : Hauteur utile

Rotations totales - Valeurs expérimentales du programme du CEB obtenues sur poutres soumises à charge concentrée  
 Laboratoires de: Paris - Torino - Porto - Madrid - Mexico - Venezia

## ORGANIGRAMME - METHODE DE MACCHI



### 3.3 - Théorie de la dégradation continue de la rigidité : Kuczynski

#### 3.3.1 - Introduction

Pour la détermination du mécanisme de ruine et de la valeur de la charge ultime du système, la loi de Hooke ne reste plus valable ; on utilise alors la théorie de plasticité ou théorie de la chaîne cinématique.

La méthode de KUCZYNSKI dite "théorie continue" offre la possibilité de prendre en compte dans les calculs, tous les problèmes de non linéarité. Elle est fondée sur le processus intrinsèque continu associé à la croissance des forces extérieures. Ce dernier englobera l'état de déformation et de fissuration qui précédera l'état de ruine.

Le point de départ de cette théorie sera donc la loi empirique de la dégradation continue (non linéaire) de la rigidité d'un élément fléchi au fur et à mesure de l'accroissement de la charge (de zéro jusqu'à la rupture) (fig. 3.12)

$$B = B_0 (1 - m) \quad (3-27)$$

$B = EI$  rigidité flexionnelle

$$B_0 = \gamma E_0 I \text{ rigidité initiale de la poutre ou d'un tronçon} \quad (3-28)$$

$\gamma$  = coefficient de correction initial

$\gamma < 1$  déterminé expérimentalement

(le coefficient de réduction  $\gamma$  de la rigidité initiale est dû au fait qu'avant chargement les éléments en B.A subissent des fissures dues au retrait du béton, sont sous l'effet dynamique causé par le transport, le démoulage  $0,4 \leq \gamma \leq 0,7$ )

$E_0$  : module de déformation longitudinal moyen du béton

$I$  : inertie de la section en phase I (armatures compris)

$$m(x) = \frac{M(x)}{M_u} \quad (3-29) \quad \text{taux de sollicitation ou degré d'avancement de charge}$$

$$s(x) = \frac{1}{m(x)} \quad (3-30) \quad \text{sécurité locale}$$

$M(x)$  moment fléchissant dans la section considérée

$M_u$  : moment ultime d'une poutre ou d'un tronçon

$\psi$  : facteur de plastification et de fissuration du béton. Ces valeurs sont bien déterminées empiriquement pour différents bétons et différents pourcentages d'armatures (voir tableau 3-1 ou fig. 3-13)

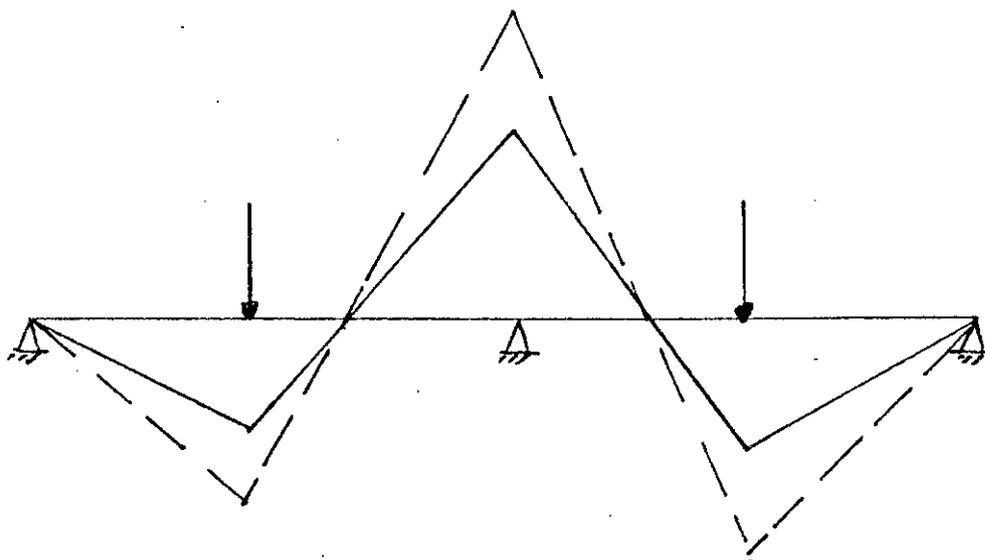
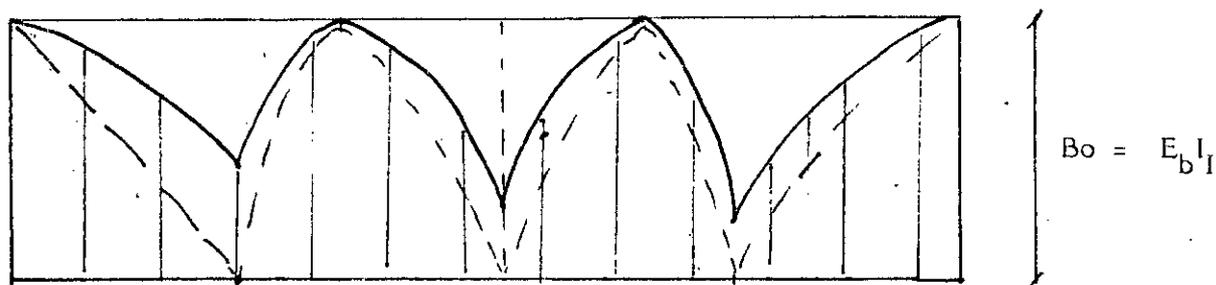


FIG. 3-12 : EXEMPLE DE VARIATION DE LA RIGIDITE



— — — Etat limite ultime

Dans la relation (3-27), on ne distingue pas entre les phases I, II et III. Elle décrit donc tout le processus de flexion. Les valeurs du degré d'avancement petites répondent aux solutions élastiques avant la fissuration. Quand  $m$  tend vers 0,  $B$  tendra vers  $B_0$  d'où solution élastique. Pour  $m$  tendant vers l'unité, la rigidité tendra vers 0 ; ce sera donc l'état de ruine car apparition de rotules plastiques.

L'auteur admet et traite théoriquement que la rigidité de la section critique au moment de la catastrophe est pratiquement nulle. Dans ce cas, les systèmes statiquement indéterminés se transforment en chaîne cinématique (en d'autres termes en mécanisme de ruine). Cette chaîne cinématique sera constituée de tronçons rigides liés entre eux par les rotules plastiques apparues aux sections critiques.

Cette théorie répondant bien aux deux états élastiques (pour de faibles charges) et purement plastique (à la ruine) sera étendue par continuité aux autres phases intermédiaires.

Lorsque  $m$  augmente, la répartition des efforts internes varie par rapport à la disposition élastique, c'est ce qu'on a appelé redistribution.

Dans cette méthode, la redistribution des moments se fait d'une manière continue sous charges croissantes et elle croit donc avec l'accroissement de la charge.

Pour le moment final, elle répondra très bien à l'état limite ultime.

Cette redistribution dépendant de la disposition de l'armature, les divergences seront d'autant plus grandes que l'armature le long de la poutre s'éloigne de la disposition conforme à l'état élastique.

La marche à suivre sera donc la suivante :

- a) calcul statique élastique (détermination de  $T$ ,  $M$ )
- b) détermination du mécanisme de ruine et de la valeur des charges ultimes du système d'après la théorie de plasticité (théorie de la chaîne cinématique)
- c) description du comportement dans n'importe quel état intermédiaire i  
 fixation de  $\gamma, \psi$   
 détermination de  $B_i$   
 détermination de  $K_i$

La redistribution ainsi que la déformée ( $\chi$  courbure -  $\psi$  rotation -  $y$  flèche) seront obtenues par le tableau d'iteration en fonction du degré d'avancement de charge. L'essentiel de la procédure est la compatibilité des angles de rotation sur appui intermédiaire grâce à la recherche des valeurs inconnues des moments d'appui.

Pour les poutres de section rectangulaire :

$$\psi = 29 \frac{\beta \omega + 0.05}{\beta/n - 0.17\beta + 1} \quad (3-29)$$

avec  $\psi \geq 1.4$

Pour les poutres de section en T :

$$\psi = 17 \frac{\beta \omega + 0.05}{0.95 \beta/n - 0.5\beta + 1} \quad (3-30)$$

FIG. 3-13 : Valeurs du paramètre  $\psi$  - section rectangulaire

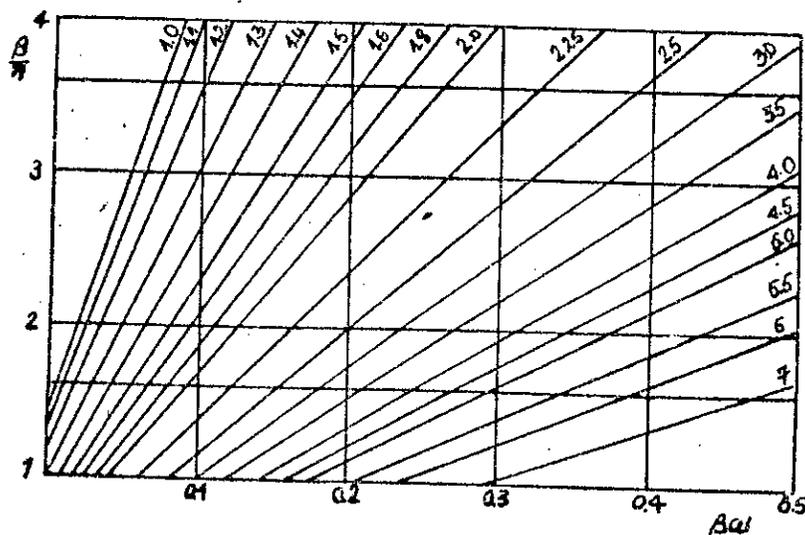


Tableau 3-1

Valeurs  $\psi$ 

$\beta/n$ \ $\beta_{ew}$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
1,6	1,6	2,2	2,7	3,30	3,80	4,40	5,0
1,8	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,6
2,0	1,4	1,9	2,4	2,8	3,3	3,8	4,3
2,2	1,3	1,8	2,2	2,6	3,1	3,6	4,0
2,4	1,2	1,6	2,0	2,5	2,9	3,4	3,8
2,6	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2	3,6
2,8		1,5	1,8	2,2	2,6	3,0	3,4
3,0		1,4	1,8	2,1	2,5	2,8	3,2

$$\beta = \frac{Ra}{Rb}$$

$$\mu = \frac{Fa}{bh}$$

$$n = \frac{Ea}{E_{bo}}$$

### 3.3.2 - Equations fondamentales et fonctions de base

#### 3.3.2.1 - Courbures

L'équation de la courbure se présente sous la forme suivante :

$$\chi = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{B_0(1-m^\psi)} = \frac{mMu}{B_0(1-m^\psi)} = \frac{Mu}{B_0} \frac{m}{1-m^\psi} \quad (3-31)$$

Introduisons les notations sans dimensions :

$$(3-32) \quad \begin{aligned} X &= \frac{x}{l} & \xi &= \frac{x}{l} & \text{coordonnée d'une section de la travée} \\ y &= \frac{y}{l} & \eta &= \frac{y}{l} & \text{flèche réduite, } l \text{ étant la portée d'une pièce} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

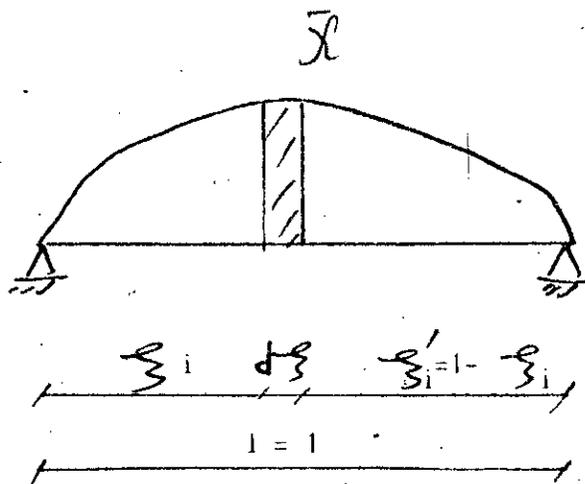
$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{d \xi^2} &= K \frac{m}{1-m^\psi} = K \sum_{n=0}^{\infty} m^n \psi^{n+1} \\ \chi_i &= \frac{d^2 \eta_i}{d \xi_i^2} = K_i \frac{m_i}{1-m_i^\psi} = K_i \sum_{n=0}^{\infty} m_i^n \psi^{n+1} = K_i \bar{\chi}_i \end{aligned} \quad (3-33)$$

La série (3-33) est convergente [  $m_i$  étant une fonction linéaire  $< 1$  et  $\psi_i > 1$  ( $\psi_i \geq 1.4$ ). ]

$\bar{\chi}$  : courbure réduite ;  $K = \frac{Mu l}{B_0}$  (3-34) : coefficient de souplesse caractéristique mécanique de la travée ou d'un segment.

#### 3.3.2.2 - Angles de rotation et flèches

Passons aux calculs des angles de rotation



On charge la poutre auxiliaire par une charge fictive égale à la courbure  $\chi' = K \bar{\chi}$

$$\bar{R}_{A, x1} = K \int_0^1 \bar{\chi} \xi' d\xi = K \left[ \int_0^1 \bar{\chi} d\xi - \int_0^1 \bar{\chi} \xi d\xi \right] \quad (3-35)$$

Passons au calcul des angles de rotation

$$\varphi_i = -\bar{T}_i = -(\bar{R}_A - K \int_0^{\xi_i} \bar{\chi} d\xi) = -K \left[ \int_0^{\xi_i} \bar{\chi} \xi' d\xi - K \int_0^{\xi_i} \bar{\chi} d\xi \right] \quad (3-36)$$

Deux cas peuvent se présenter :

- le moment fléchissant est constant c'est à dire  $T_i = 0$
- le moment fléchissant est linéaire c'est à dire  $T_i \neq 0$

avec  $K_i$  constante

$m_i$  : fonction linéaire de  $M_i$

a) la solution reste très simple

$$\varphi_i = \frac{d m_i}{d \xi} = \int K_i \bar{\chi}_i d\xi + C_1 = K_i \bar{\chi}_i \xi + C_1 = K_i \bar{\chi}_i + C_1 \quad (3-37)$$

$$m_i = \int \xi d\xi = K_i \bar{\chi}_i \frac{\xi^2}{2} + C_{1i} \xi + C_{2i} \quad (3-38)$$

$$m_i = K_i \bar{\chi}_i + C_{1i} \xi + C_{2i}$$

Les fonctions de base  $\bar{x} = \frac{m_i}{1 - m_i \psi}$

$$\bar{\varphi}_i = \bar{x}_i \xi \quad (3-39)$$

$$i = \frac{i}{2}$$

sont données sous forme de tableaux pour différentes valeurs de  $\psi$  et  $m$

b) Linéaire  $T_i \neq 0$

La question devient plus complexe  $T_i = \frac{dM_i}{dx} = \text{constante}$   $dx = l d\xi$

$$\frac{T_i}{M_{Ri}} = \frac{dM_i}{M_{Ri} l d\xi} = \frac{d \left( \frac{M_i}{M_{Ri}} \right)}{l d\xi} = \frac{d m_i}{l d\xi} \quad (3-40)$$

Introduisons la notation

$$t_i = \frac{d m_i}{d \xi} = \text{const} \quad (3-41)$$

$t_i$  étant la dérivée du taux de sollicitation

alors  $d \xi = \frac{d m_i}{t_i} \quad (3-42)$

La relation (3-40) deviendra alors :

$$\frac{T_i l}{M_{Ri}} = t_i \quad (3-42)$$

- déterminons l'angle de rotation :  
nous devons intégrer une somme

$$\psi_i = K_i \int \bar{x}_i d\xi = K_i \int \sum_{n=0}^{\infty} m_i^{n\psi+1} d\xi = K_i \int \sum_{n=0}^{\infty} m_i^{n\psi+1} \frac{dm_i}{t_i} = \frac{K_i}{t_i} \int \sum_{n=0}^{\infty} m_i^{n\psi+1} dm_i =$$

$$\frac{K_i}{t_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_i^{n\psi+2}}{n\psi+2} + C_{1i} \quad (3-44)$$

Pour l'expression de la flèche réduite dans le tronçon  $i$ , nous devons intégrer une seconde fois et nous aboutissons à :

$$\varrho_i = \int_0^{\varrho} K_i \frac{1}{t_i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_i^{n\psi+2}}{n\psi+2} C_{1i} d\xi =$$

$$\varrho_i = \frac{K_i}{t_i} \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_i^{n\psi+2}}{n\psi+2} \frac{dm_i}{t_i} + C_{1i} \xi + C_{2i} \quad (3-45)$$

$$\varrho_i = \frac{K_i}{t_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_i^{n\psi+3}}{(n\psi+2)(n\psi+3)} + C_{1i} \xi + C_{2i}$$

$$\varrho_i = K_i \frac{(m_i)^2}{(t_i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_i^{n\psi+1}}{(n\psi+2)(n\psi+3)} = K_i \sum_{i=1}^n \bar{Y}_i$$

Faisons la transformation suivante :

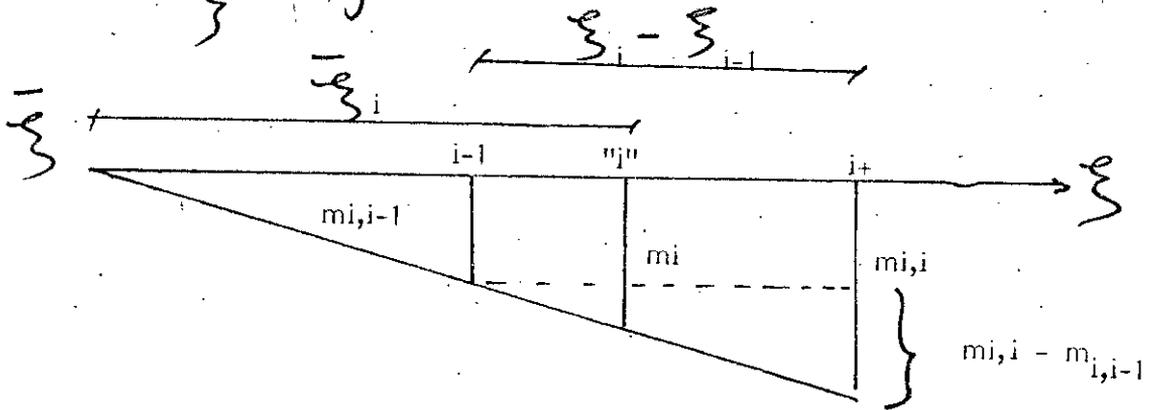
$$\frac{d\varrho_i}{d\xi} = \int K_i \frac{m_i}{1-m_i^\psi} d\xi = K_i \int \frac{m_i}{1-m_i^\psi} \frac{d\xi}{dm_i} dm_i \quad (3-46)$$

$$t_i = \frac{dm_i}{d\xi} = \frac{d(M_i)}{d\xi} \frac{1}{M_R} = \frac{T_i}{M_R} = \text{constante}$$

En tenant compte du principe de la discretisation du problème (linéarisation) on obtient :

$$t_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} M_R \quad (3-47)$$

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\xi} = \frac{K_i}{t_i} \int \frac{m_i}{1-m_i} dm_i + A_i \quad (3-48)$$



Interprétation géométrique de la valeur

$$\bar{x}_i = \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{m_{i,i} - m_{i,i-1}}$$

$$\bar{x}_i = \frac{m_i (\xi_i - \xi_{i-1})}{m_{i,i} - m_{i,i-1}} = \frac{m_i \Delta \xi_i}{\Delta m_i} = \frac{m_i}{t_i} \quad (3-49)$$

En résumé

\* pour  $T_i = 0$  :

$$\bar{x}_i = \frac{m_i}{1-m_i} \psi$$

$$\bar{\phi}_i = K_i \sum \frac{m_i}{1-m_i} \psi$$

$$\bar{y}_i = K_i \sum \frac{m_i}{2(1-m_i)} \psi$$

\* pour  $T_i \neq 0$

$$\bar{x}_i = \frac{m_i}{1-m_i} \psi$$

$$\bar{\phi}_i = \sum \frac{m_i^{n\psi+1}}{n\psi+2}$$

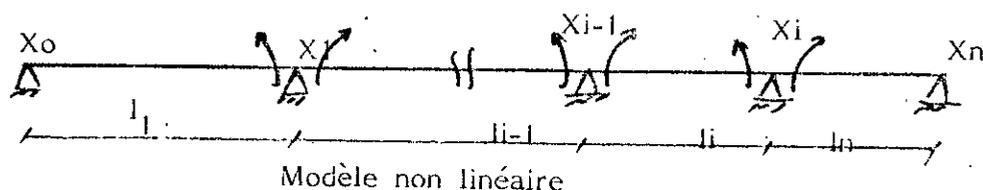
$$\bar{y}_i = \sum \frac{m_i^{n\psi+1}}{(n\psi+2)(n\psi+3)}$$

Nous voyons que ces formules dépendent de trois valeurs

- $K_i$  qui détermine les paramètres géométriques et mécaniques
- $\xi$ : fonction simple présentant la position de la section
- $m_i$ : caractérise la section sous l'aspect de sa déformabilité

### 3.3.3 - Application au calcul des poutres hyperstatiques

Solution générale des poutres continues



Appliquons la méthode des déformations pour résoudre le problème : la poutre continue sera remplacée par la série de travées liées par des articulations et soumiés aux moments inconnus  $X_i$ . Ces derniers seront déterminés par l'application du principe de compatibilité (déformations - angles de rotation)

$$\theta_{ii}(X_i, X_{i-1}) = \theta_{i+1,i}(X_i, X_i, X_{i+1}) \quad (3-50)$$

Nous obtenons autant d'équations analogues que d'inconnues hyperstatiques.

La flèche dans n'importe quelle section de la travée sera donnée par :

$$\eta_i = -\xi_i \left( \int_0^{\xi_i} \xi X d\xi - \eta_0 \right) - \xi_{i+1} \left( \int_{\xi_i}^1 \xi X d\xi - \eta_1 \right) \quad (3-51)$$

• l'angle de rotation

$$\psi_i = \left( \int_0^{\xi_i} \xi X d\xi - \eta_0 \right) - \left( \int_{\xi_i}^1 \xi X d\xi - \eta_1 \right)$$

$$\xi = 1 - \xi' = \frac{x}{l} \quad \text{abscisse réduite}$$

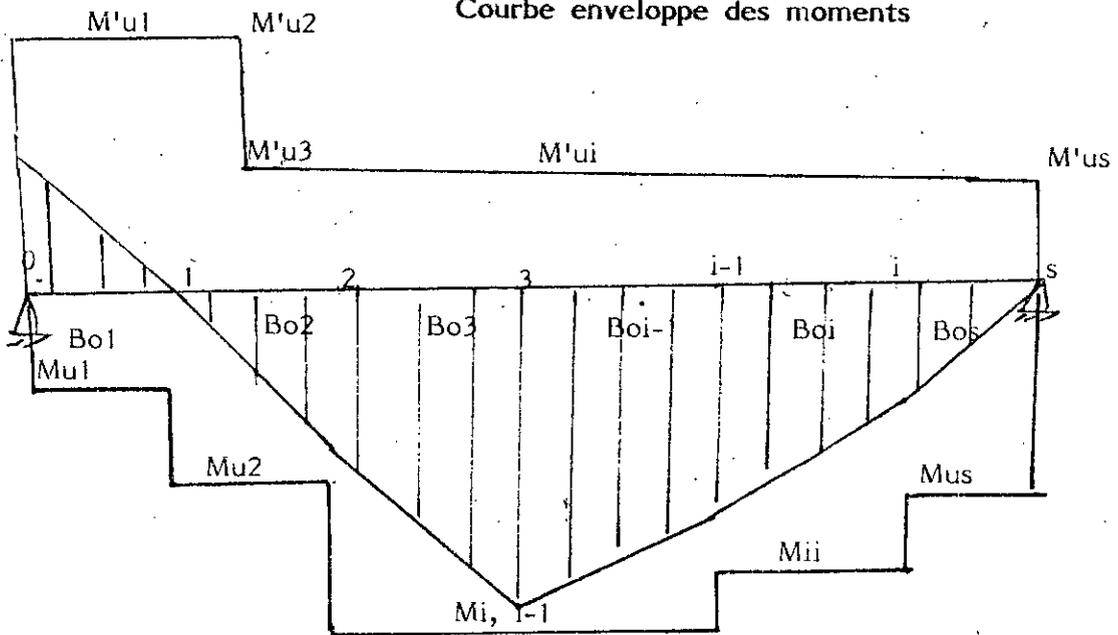
$\eta_0, \eta_1$  : tassements ou déplacements d'appuis

$$\begin{aligned} \bar{x} &= K \bar{x} \\ K &= \frac{Mu_1}{Bo} \\ \bar{x} &= \frac{Bo}{1-m} \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} m^n \Psi_{+1} \end{aligned}$$

soit la poutre

Figure 3-14

Courbe enveloppe des moments



$Bo_i = \text{constante}$

$M_{ui} = \text{constante}$

(3-52)

$\frac{d\xi_i}{d\xi} = t_i = \text{constante}$

$d\xi$

Appliquons la méthode de discretisation du problème

$$\frac{d\xi_i}{d\xi} = \frac{\Delta \xi_i}{\Delta \xi} = \frac{m_{i,j} - m_{i,i-1}}{i - i-1} = \text{constante} \quad \text{avec } m_{i,i-1} = \frac{M_{i,i-1}}{M_{ui}}$$

$$\text{et } m_{ii} = \frac{M_{i,i}}{M_{ui}}$$

La solution sera d'autant plus exacte que le nombre de tronçons sera plus important.

Les intégrales rentrant dans les équations de la déformée auront les formes suivantes :

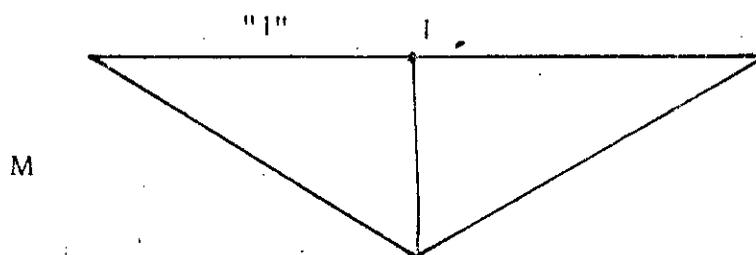
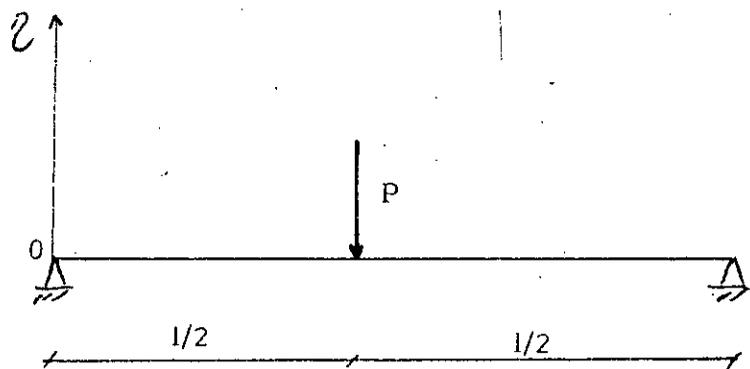
$$\int \bar{\xi}_i \, d\bar{\xi} = \begin{cases} \sum \bar{\xi}_i^2 O_i - \bar{\xi}_i^2 Y_i & t_i \neq 0 \\ \frac{1}{2} \sum \bar{\xi}_i^2 & t_i = 0 \end{cases} \quad (3-53)$$

$$\int \bar{\xi}'_i \, d\bar{\xi} = \begin{cases} -\bar{\xi}_i O_i - \bar{\xi}_i^2 Y_i & t_i \neq 0 \\ -\frac{1}{2} \sum \bar{\xi}'_i & t_i = 0 \end{cases} \quad (3-54)$$

avec la valeur moyenne de  $\bar{\xi}_i$

$$\bar{\xi}_i = \bar{\xi}'_i = \frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{2} \quad m_i \quad (3-55)$$

### 3.3.4 - Application au calcul des poutres isostatiques (voir annexe E - tableaux V et VI)



La symétrie nous permet d'appliquer la formule :

$$Q_{0.5} = - \sum_{i=1}^k KI \Delta Y_i \quad (3-56) \quad KI = \text{constante}$$

$$\Delta Y = \Delta Y'$$

$$Q_{0.5} = - K (\Delta Y)$$

$$\Delta Y = \left( \sum_{1.1} \bar{\xi}_{1.1} \phi_{1.1} - \sum_{1.1}^2 \bar{Y}_{1.1} \right) - \left( \sum_{1.0} \bar{\xi}_{1.0} \phi_{1.0} - \sum_{1.0}^2 \bar{Y}_{1.0} \right) \quad (3-57)$$

$$\sum_{1.1} \bar{\xi}_{1.1} = 0.5, \quad \sum_{1.1}^2 \bar{Y}_{1.1} = 0.5, \quad \sum_{1.0} \bar{\xi}_{1.0} = 0, \quad \sum_{1.0}^2 \bar{Y}_{1.0} = 0$$

$$M_{1.1} = 0.25 \frac{P_1}{\mu}, \quad M_{1.0} = 0, \quad m_{1.1} = \frac{M_{1.1}}{\mu} = 0.25 \frac{P_1}{\mu}$$

$$m_{1.0} = 0, \quad \phi_{1.0} = 0, \quad \bar{Y}_{1.0} = 0$$

$$\Delta Y = 0.5 \times 0.5 \times \bar{\phi}_{1.1} - 0.5^2 \bar{Y}_{1.1} = 0.25 (\bar{\phi}_{1.1} - \bar{Y}_{1.1})$$

$$y_{0.5} = - \frac{K}{4} (\bar{\phi}_{1.1} - \bar{Y}_{1.1}) \quad (3-58)$$

**CHAPITRE IV**  
**EXPERIMENTATION**

## CHAPITRE IV

### DEUXIEME PARTIE : EXPERIMENTATION

#### 4.1 - But et limites des essais

Les essais sont effectués au laboratoire "structures" à l'école nationale polytechnique d'El Harrach.

Le but est d'étudier le comportement des poutres hyperstatiques en béton armé sollicitées par des charges concentrées croissantes jusqu'à rupture.

Nous nous sommes limités à la mise en évidence de l'influence de deux paramètres : classe du béton et disposition des armatures sur :

- déformations redistribution des efforts internes - flèches et angles de rotation
- fissuration : ouverture, espacement et longueur des fissures
- capacité portante et mécanisme de ruine

#### 4.2 - Programme d'essais

Le programme que nous avons élaboré comporte 18 poutres hyperstatiques de grandeur nature identiques du point de vue coffrage et sollicitations.

Ces corps d'essais sont classés en trois séries (A, B, C) selon le dosage du béton en ciment ; chaque série étant subdivisée en deux catégories I et II selon la disposition de l'armature.

I : disposition conforme au diagramme des moments fléchissants en phase I

II : disposition non conforme au diagramme des moments fléchissants en phase I

Série résistance du béton	Disposition d'armature	Désignation des poutres essayées	
A	I	A11, A12	et A13
	II	A112 A112	et A113
B	I	B11 B12	B13
	II	B111 B112	B113
C	I	C11 C12	C13
	II	C111 C112	C113

Les poutres numérotées 1 et 2 ont servi pour nos essais ; la n° 3 a été gardée comme réserve.

#### 4.2.1 - Dimensions et mode de chargement

Les pièces d'essais sont des poutres hyperstatiques en béton armé reposant sur trois appuis simples. Les travées sont égales et ont 2 m de portée et 20 cm de débord.

La section droite est rectangulaire de caractéristiques géométriques théoriques

comme suit :

base : 15 cm

hauteur totale : 26 cm

hauteur utile : 23,6 cm

Les travées sont identiquement sollicitées par deux forces concentrées appliquées respectivement aux  $3/8$  et  $5/8$  de la portée à partir de l'appui de rive.

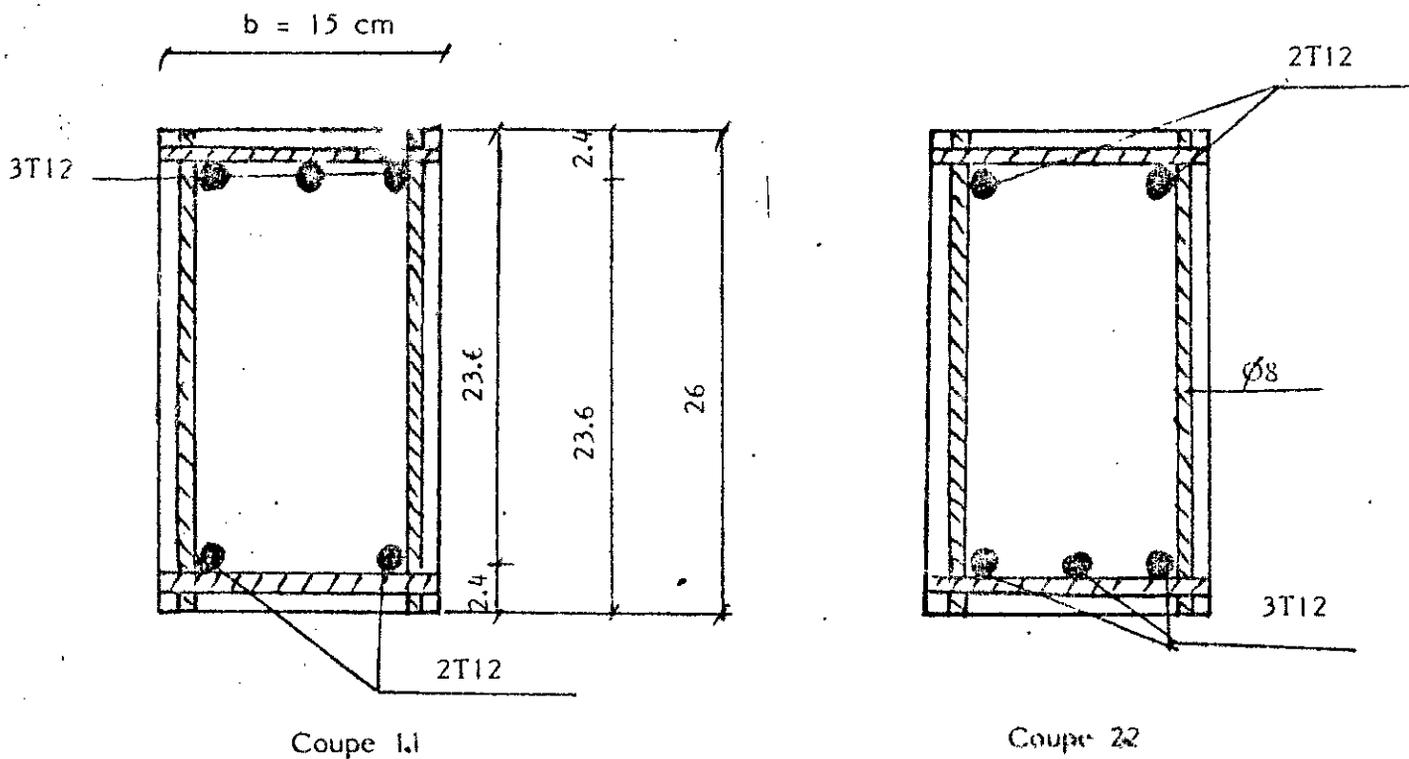
#### 4.2.2 - Ferrailage

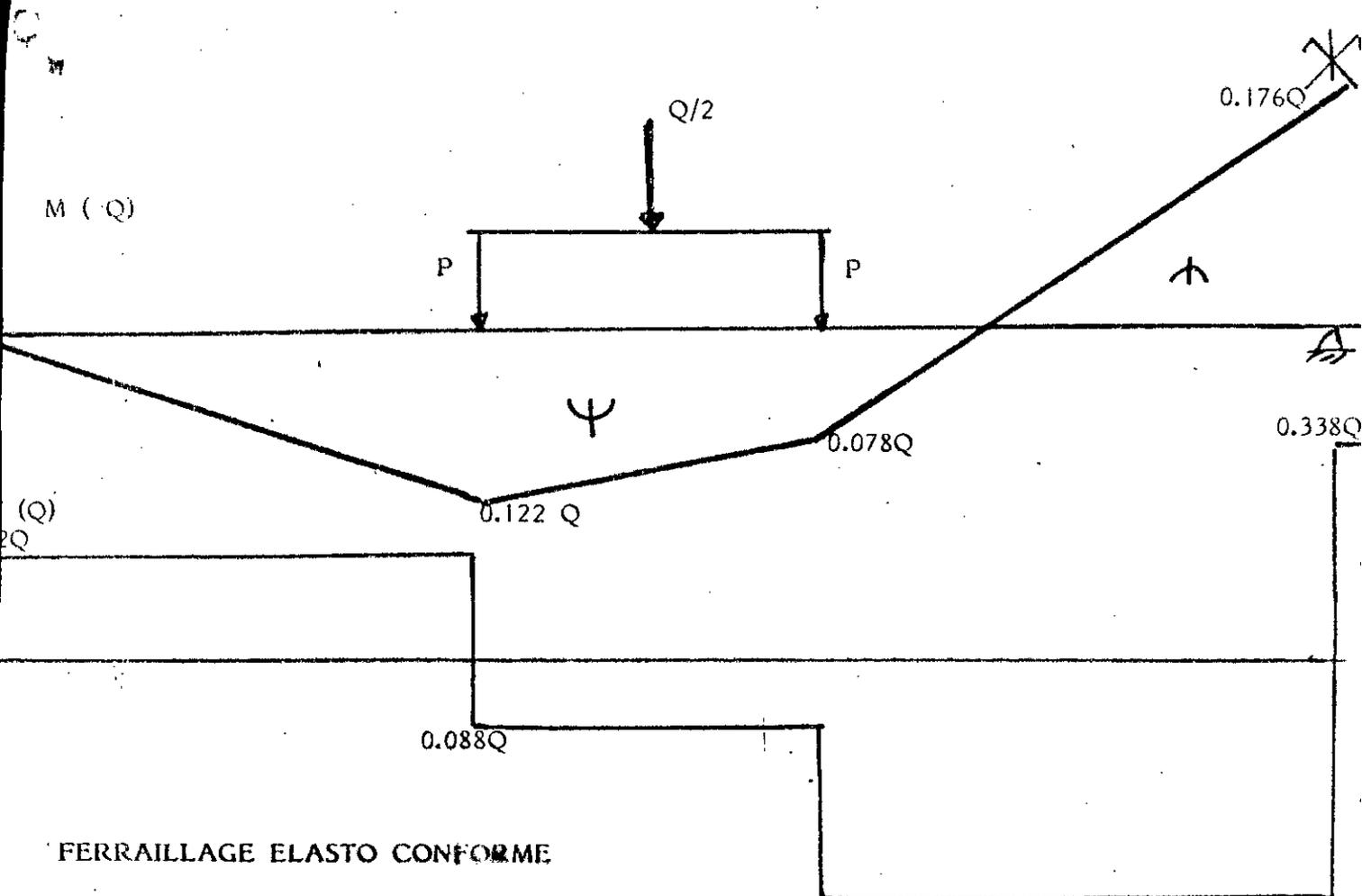
##### a) les armatures principales

Ce sont des barres filantes en acier haute adhérence (T12) dont le rapport est de 1,5 entre les ferrillages en appui et en travée pour le conforme et inversement pour le non conforme.

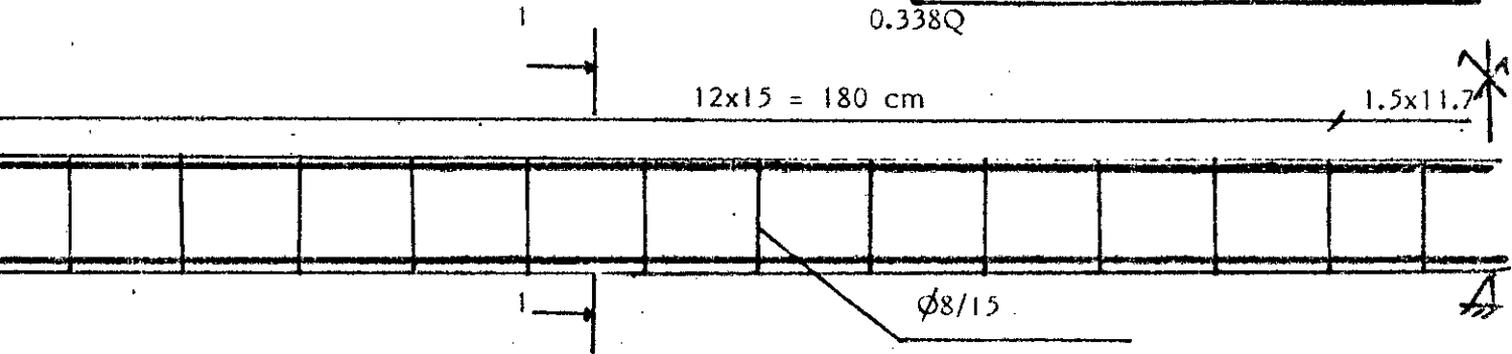
##### b) Armatures transversales

Les armatures transversales sont en acier doux de 8 mm de diamètre ; d'espacement constant égal à 15 cm ; les cadres étant soudés.

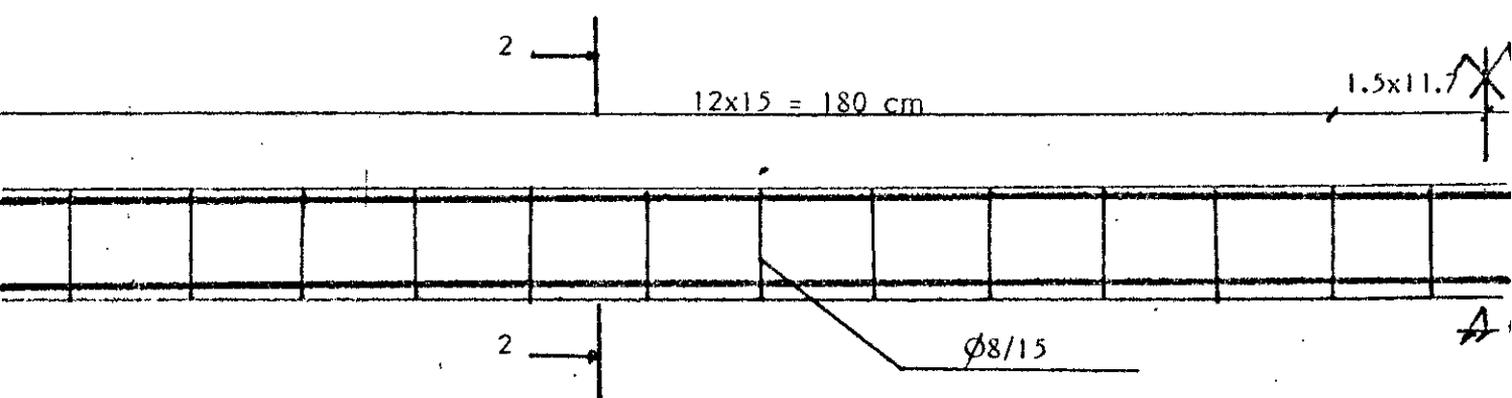




FERRAILLAGE ELASTO CONFORME



FERRAILLAGE ELASTO NON CONFORME



### 4.3 - Exécution des essais

Les essais ont été réalisés au Laboratoire structures du département de génie civil.

#### 4.3.1 - Machine d'essais

La machine d'essai en charpente métallique est schématisée ci-dessous. Elle est composée de trois portiques déplaçables dans le sens longitudinal de la table d'essai ; chaque portique comporte un verin hydraulique coulissant sur sa traverse perpendiculairement au déplacement des portiques. Grâce à ce système à trois degrés de liberté, nous avons pu adapter la machine à nos essais.

##### a) contact verin - répartisseur

Chaque face inférieure du vérin comporte un creux où vient se loger une plaque munie d'une bille qui sert à transmettre la charge. Dans notre cas, la poutre étant sollicitée par quatre forces concentrées, nous avons utilisé deux verins.

la force transmise par chacun sera décomposée en deux grâce à un profilé métallique (répartisseur de force).

On n'a pas utilisé un seul verin parce que sa capacité de chargement ne nous permettrait pas d'atteindre la rupture.

##### b) Contact répartisseur - poutre

Nous avons pris la précaution de polir la surface de contact afin d'avoir une transmission de charge uniforme.

##### c) types d'appui

La poutre reposant sur trois appuis, les deux extrêmes sont des appuis simples et l'appui central est remplacé par un capteur de force

d) système de blocage de la charge

Il a été manuel afin de palier aux fuites (voir courbe d'étalonnage en annexe).

#### 4.3.2 - Mesures et appareils de mesure

a) réaction d'appui

La réaction centrale (vue la symétrie) a été déterminée en fonction de la charge appliquée grâce à un appui dynamométrique qui est un capteur de force relié à une alimentation stabilisée de 12V et à un millivoltmètre.

b) flèches

Elles sont mesurées à l'aide de comparateurs ayant une précision de  $10^{-2}$  mm,  $2,10^{-3}$  et  $10^{-4}$  mm (les plus sensibles ont été placés dans les zones de faibles déformations). Le nombre et l'espacement des comparateurs sont choisis de telle sorte à pouvoir définir les déformées sous charges avec précision.

c) Rotations

Elles sont déterminées à l'aide de comparateurs précis situés à 10 cm de part et d'autre des sections critiques, 25 cm de l'appui de rive et 12,5 cm du central. Un comparateur à  $10^{-4}$  mm est placé sur chaque appui afin de prévoir un tassement éventuel.

Chaque comparateur est supporté par un socle pesant, en acier, muni de béquilles réglables formant un système indépendant de la poutre.

En tout point de contact comparateur - poutre, nous avons prévu une plaque de plexiglace pour avoir une surface lisse et une déformation uniforme sur cette dernière et parer ainsi à toute erreur de mesure due au déplacement local du comparateur.

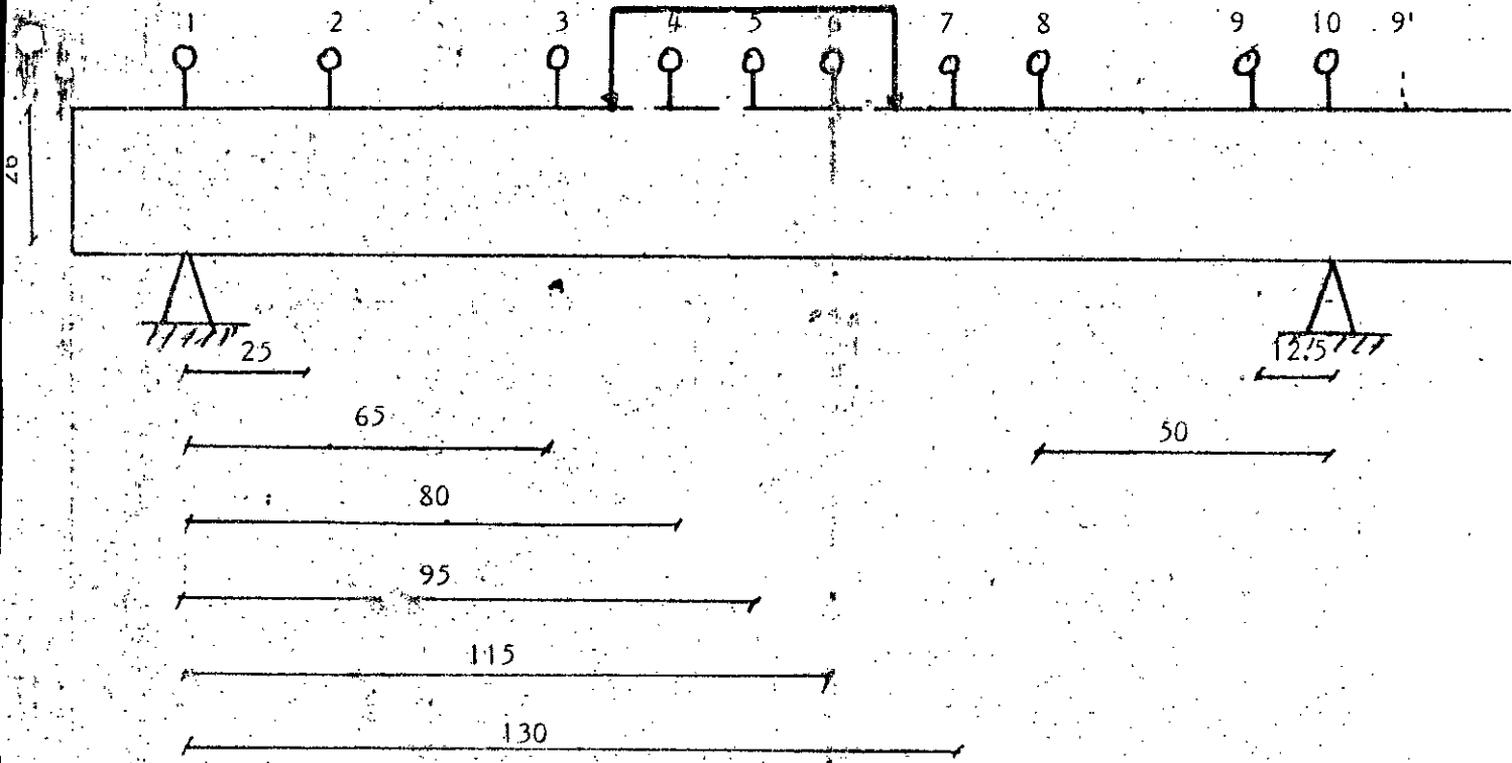
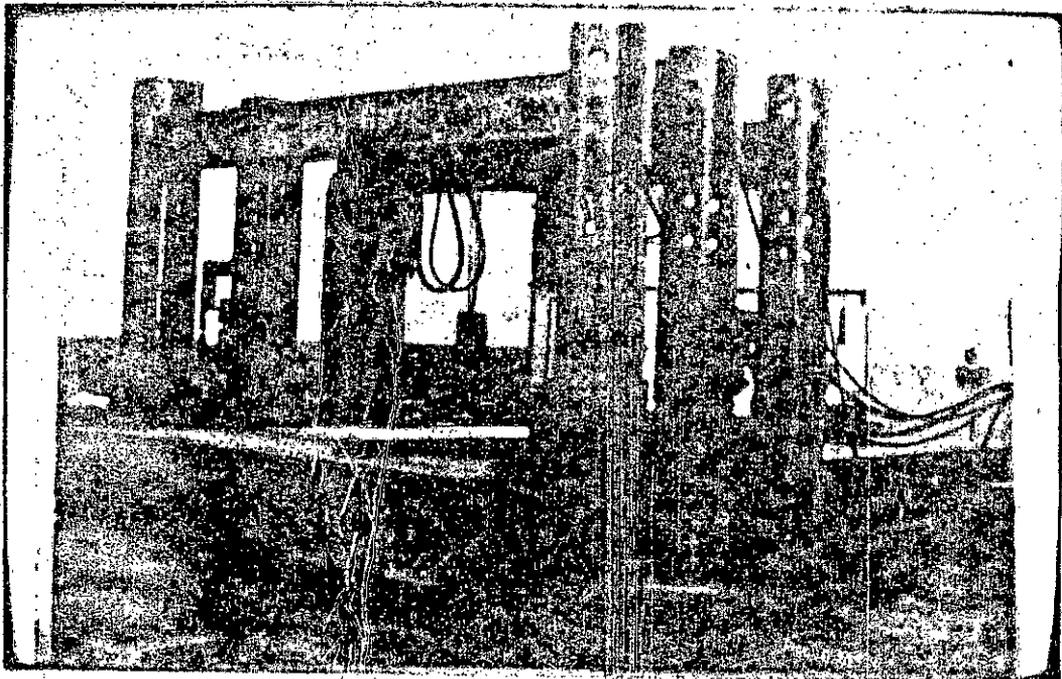


TABLE D'ESSAI



#### d) Courbures

Elles ne peuvent être mesurées directement. C'est la raison pour laquelle il faut des considérations théoriques pour établir des lois moments courbures dont on peut vérifier leur validité par comparaison des rotations et des flèches qu'elles permettent de calculer avec les valeurs mesurées correspondantes des flèches

#### e) déformations unitaires

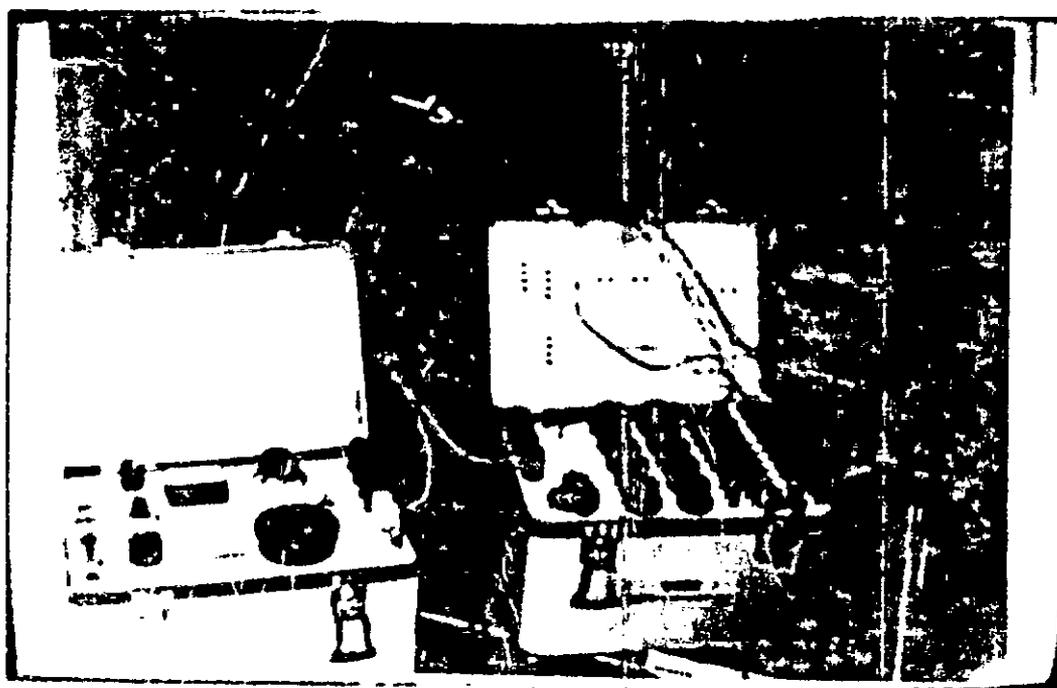
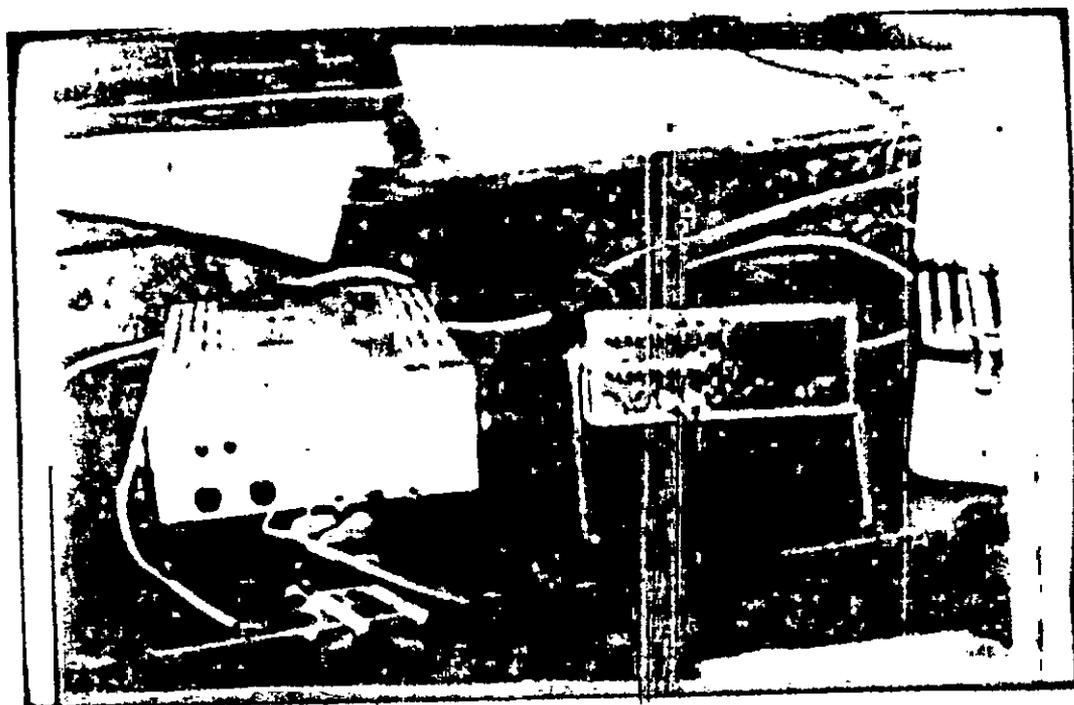
Les allongements de l'acier et raccourcissements du béton au voisinage des sections critiques sont déterminés à l'aide de jauges ohmiques

Les valeurs sont lues directement en  $\mu\text{m/mm}$ . Les paramètres K (facteur de sensibilité des jauges et R (résistance en  $\Omega$ ) propres à chacune sont introduits directement dans le pont.

- pour l'acier : les jauges sont collées directement sur l'armature après polissage de la surface de contact
- pour le béton : elles sont placées au niveau de la fibre la plus comprimée.

#### DETAIL DU PIED DE COMPAREUR

INSTALLATION DU PONT D'EXTENSIOMETRIE  
(DETERMINATION DES DEFORMATIONS UNITAIRES)



## f) fissuration

1/ ouverture : mesurée au niveau du centre de gravité des aciers à l'aide d'un fissuromètre muni d'une lampe d'éclairage et permettant d'apprécier le 1/100 mm..

2/ Position et hauteur des fissures sont relevées sur un calque après rupture

## 4.3.3 - Conditions d'exécution des essais

## a) coulage des poutres

Le coffrage a été prévu pour une série entière (six poutres) ; vu le volume de béton que représente ces six pièces et le manque de moyens (malaxage à la pelle), nous avons été obligés de faire le coulage en deux fois à un jour d'intervalle.

Un nombre important d'éprouvettes a été prélevé lors du coulage

18 éprouvettes cylindriques 16 x 32

15 éprouvettes cylindriques 11 x 22

10 éprouvettes prismatiques 7 x 7 x 8

Pour une série donnée, il a été montré après écrasement des éprouvettes à 90 jours que les valeurs des résistances étaient suffisamment homogènes et qu'on pouvait alors déterminer la résistance moyenne de la série entière moyennant une étude statistique. (voir annexe B)

## b) Essai

La mise en charge de chaque poutre se fait par paliers successifs sans déchargement. Chaque pas est défini comme un pourcentage de la charge limite ultime théorique QU du système.

Ces pourcentages appelés aussi degrés d'avancement de charge ( $m = \frac{Q}{QU}$ ) sont

de 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 % avec un palier supplémentaire de 15 % 25 %, 35 % respectivement pour le béton faible, moyen et fort.

A chaque étape de chargement, et après stabilisation de tous les appareils de mesure, nous procédons au relevé des mesures, opération qui nous prend environ trente minutes. L'essai dure ainsi toute une journée sans interruption.

Pour maintenir la charge constante, nous avons été obligés d'immobiliser le levier actionnant les verins d'une manière manuelle et ceci pour palier aux fuites d'huile.

Les mesures ont été prises jusqu'à rupture.

#### 4.4 - Caractéristiques mécaniques des matériaux

##### 4.4.1 - Bétons

Les essais sur les agrégats ainsi que la composition des différents bétons ont été réalisés avec la collaboration du Laboratoire central de la SONATRO (Réghaia).

Béton n° A dosé à 400 kg de ciment par  $m^3$  de béton

Béton n° B dosé à 300 kg de ciment par  $m^3$  de béton

Béton n° C dosé à 200 kg de ciment par  $m^3$  de béton

Les constituants les composant ont été prélevés dans un premier temps du chantier SNMC.

Après les analyses faites au laboratoire, nous avons été amenés, d'une part à rejeter le sable des dunes pour le remplacer par celui de Cap Djinet, d'autre part à laver tous les agrégats qui présentaient un taux d'impureté très élevé.

## .4.2 - Aciers

Pour les aciers, nous avons prélevé lors du confectionnement du squelette de ferrailage, quelques éprouvettes qui ont donné après essai les résultats suivants

Numéro éprouvettes.	Diamètre nominal en mm	Section nominale en mm <sup>2</sup>	Masse métrique en kg/mm	Limite apparente d'élasticité en kgf/mm <sup>2</sup>	Résistance à la traction en kgf/mm <sup>2</sup>	% d'allongement à la rupture
1	12	113.1	0.953	56	66	22.5
2	12	113.1	0.950	56	65	22.8
3	12	113.1	0.953	55	64	22
4	12	113.1	0.970	57	65	22.8
5	12	113.1	0.949	57	66	22.5

#### 4.5 - Formulation du béton pour la confection de poutres

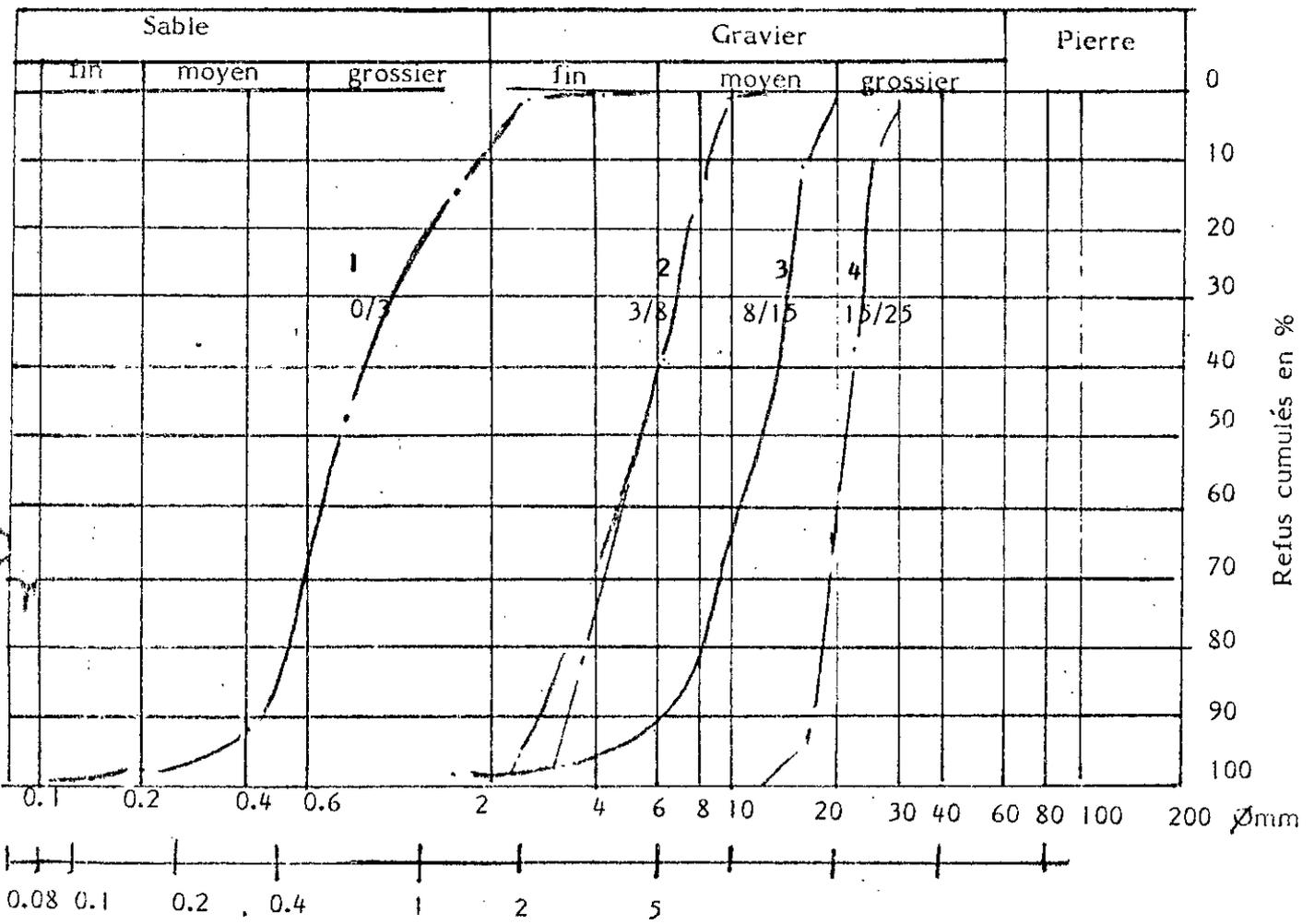
Provenances :

graviers concassés 15/25	)	Carrière de Keddara
8/15	)	
3/8	)	
Sable de mer	0/3	Sablère de Cap Djinet
Ciment C.P.A	325	SNMC Meftah

L'étude comprend notamment

l'analyse granulométrique, Teneur en eau naturelle des agrégats, Poids spécifiques des grains, Densités apparentes, Teneur en éléments minéraux inertes ( $<$  à 0,08mm) l'équivalent de sable module de finesse, Dureté, essai d'absorption...

- Recherche théorique de la composition
  - . courbes de référence et composition théorique
  - . Mélange pratique
- gachées d'essai :
  - . confection des éprouvettes cylindriques
  - . densité apparente du béton frais
  - . teneur en eau du béton frais
  - . consistance (essai du cône d'Abrams)
  - . analyse granulométrique sans ciment
  - . Ecrasement des éprouvettes à 3 et 7 jours à la compression



TENEUR EN EAU DES AGREGATS

La teneur en eau des agrégats est variable. Le tableau ci-après donne les valeurs moyennes et les fourchettes de variation qui permettront de corriger les poids partiels de chaque composant de la gachée

Classes	Teneur en eau naturelle (%)	
	moyenne	variation
0/3	8	6 - 10
3/8	4	2 - 6
8/15	2.5	1 - 4
15/25	1.5	0,5 - 2,5

Il est recommandé de mesurer la teneur en eau des agrégats tous les jours ou au début de chaque bétonnage.

## DENSITE APPARENTE, POIDS SPECIFIQUE, DURETE, EQUIVALENT DE SABLE

Provenance - Nature	Numéro Courbes	densité app kg/dm <sup>3</sup>	poids spec. kg/dm <sup>3</sup>	dureté % Los angeles	E.S %
Sable de mer Cap Djinet 0/3	1	1,61	2,69		97,8
Gravier concassé 3/8	2	1,30	2,71		
8/15	3	1,38	2,69	Granulomé- trie adoptée "B"	
15/25	4	1,40	2,68	29,23 %	
Ciment C.P.A 325 en vrac			Poids spéci- fique "adop- té" 3,1		

module de finesse sable 0/3 Cap Djinet = 2,586

compris dans la phase de bon sable à béton qui doit avoir un module de finesse de 2,2 à 2,8 ; ce qui permet d'obtenir une bonne ouvrabilité et une bonne résistance avec des risques de ségrégation limités.

• DETERMINATION DES IMPURETES ET DES ELEMENTS MINERAUX INERTES :

- sable de mer Cap Djinet	1,8 %
- Gravier concassé Keddara 3/8	7,3 %
8/15	2,4 %
15/25	2,5 %

Les pourcentages tolérés sont de :

2 % pour les sables

1,5 % pour les graviers concassés

Au vu des résultats obtenus, le lavage des différentes fractions d'agrégats (3/8, 8/15, 15/25) s'avère indispensable.

#### ESSAIS D'ABSORPTION

A 24 heures

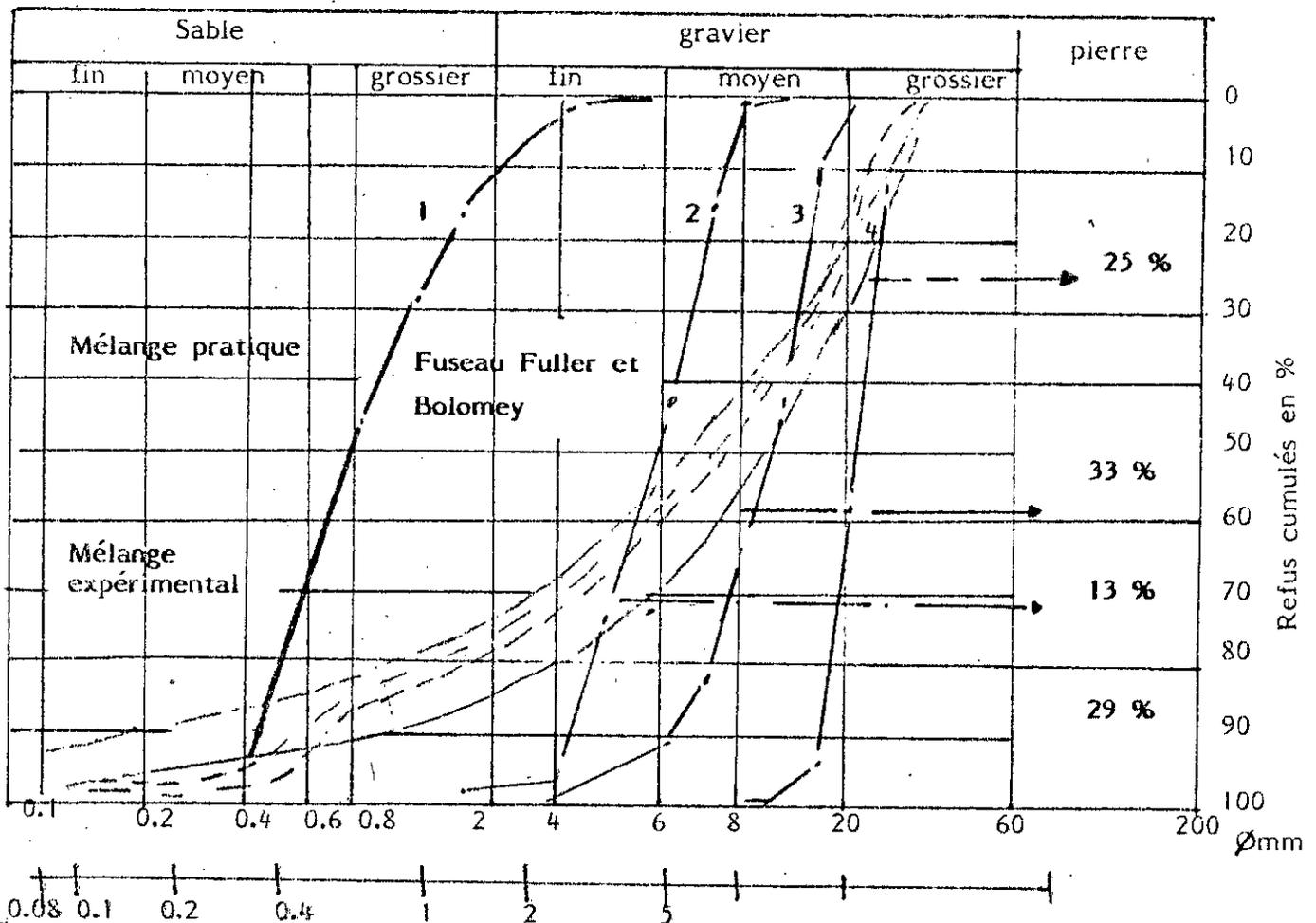
Gravier 3/8 1 %

8/15 0,7 %

15/25 1,4 %

Granulats à faible absorption

#### COURBES DE REFERENCE ET COMPOSITION GRANULOMETRIQUE



## FRACTIONS GRANULOMETRIQUES

Proportions pondérales sur agrégats  
secs sans ciment

Gravier concassé 15/25	25 %
8/15	33 %
3/8	13 %
Sable de mer 0/3	29 %

Béton n° 1 : dosé à 200 kg de ciment / m<sup>3</sup> de béton

Composants	%	Poids/m <sup>3</sup> de (kg) béton	poids spéci- fique daN/dm <sup>3</sup> )	volume l
Gravier concassé carrière Keddara				
15/25	25	555	2.68	208
8/15	33	736	2.69	273
3/8	13	292	2.71	108
Sable de mer Cap Djinet				
0/3	29	647	2.69	240
Ciment C.P.A 325		200	3.1	65
Eau (E/C = 0,51)		102	1,0	102
Air occlus				4
<b>T O T A L</b>	<b>100 %</b>	<b>2 532 kg/m<sup>3</sup></b>		<b>1 000 l</b>

Densité théorique = 2,53

Béton n° 2 : dosé à 300 kg de ciment / m<sup>3</sup> de béton

Composants	%	Poids/m <sup>3</sup> de (kg) béton	Poids spéci- fique daN/dm <sup>3</sup> )	Volume l
Gravier concassé Carrière Keddara 15/25	25	506	2.68	189
8/15	33	670	2.69	249
3/8	13	266	2.71	98
Sable de mer Cap Djinet 0/3	29	589	2.69	219
Ciment C.PA 325		300	3.1	97
Eau (E/C = 0,08)		144	1.0	144
Air occlus				4
<b>T O T A L</b>	<b>100 %</b>	<b>2475 kg/m<sup>3</sup></b>		<b>1 000 l</b>

Densité théorique = 2,475

Béton n° 3 : dosé à 400 kg de ciment / m<sup>3</sup> de béton

Composants	%	Poids/m <sup>3</sup> de (kg) béton	Poids spécifique daN/dm <sup>3</sup> )	Volume (l)
Gravier concassé carrière Keddara				
15/25	25	453	2,68	169
8/15	33	600	2,69	223
3/8	13	238	2,71	88
Sable de mer Cap Djinet				
0/3	29	527	2,69	196
Ciment CPA 325		400	3,1	129
Eau (E/C = 0,48)		192	1,0	192
Air occlus				3
<b>T O T A L</b>	<b>100 %</b>	<b>2410 kg/m<sup>3</sup></b>		<b>1000 l</b>

Densité théorique = 2,41

### Contrôle sur béton frais

	Béton n° 1	N° 2	N° 3
- Densité apparente	2,49 T/m <sup>3</sup>	2,48 T/m <sup>3</sup>	2,40 T/m <sup>3</sup>
- affaissement au cône d'Abrams	1 cm	1,5 cm	4 cm

- Confection d'éprouvettes cylindriques pour contrôle de résistance à la compression

- trois gachées d'essai de 45 l ont été préparées au laboratoire pour servir notamment à la confection de 18 éprouvettes cylindriques de 16x32. La teneur en eau a été définie expérimentalement.

### Essais de rupture sur éprouvettes de béton

Béton n° 1

Age : 3 jours

N° éprouvettes	Densité apparente daN/dm <sup>3</sup> )	section (cm <sup>2</sup> )	compression sur éprouvettes cylindriques 16 x 32	
			charge (kg)	résistance rupture daN/cm <sup>2</sup> )
1	2,48 6	201,06	32.000	159
2	2,47	201,06	33.500	166 6
3	2,47	201,06	32.000	159
Moyenne	2,475	201,06		161,5

Age : 7 jours

4	2,48	201,06	51.500	256
5	2,479	201,06	56.500	281
6	2,456	201,06	55.500	276
Moyenne	2,474	201,06		271

## Béton n° 2

Age : 3 jours

N° éprouvettes	Densité apparente (daN/dm <sup>3</sup> )	section (cm <sup>2</sup> )	compression sur éprouvettes cylindriques 16 x 32	
			charge (kg)	résistance rupture (daN/cm <sup>2</sup> )
A	2,49	201.06	46.000	228,8
B	2,455	201.06	48.000	238,7
C	2,47	201.06	46.500	231,3
Moyenne	2,473	201.06		232,9

Age : 7 jours

D	2,495	201.06	80.500	400,4
E	2,471	201.06	79.000	392,9
F	2,487	201,06	78.500	390,4
Moyenne	2,484	201,06		394,6

## Béton n° 3

Age : 3 jours

N° éprouvettes	densité apparente daN/dm <sup>3</sup>	section (cm <sup>2</sup> )	compression sur éprouvettes cylindriques 16 x 32	
			charge (kg)	résistance rupture daN/cm <sup>2</sup>
I	2,486	201.06	49.500	246.2
II	2,495	201.06	54.500	271
III	2,48	201.06	49.500	246.2
Moyenne	2,487	201.06		254.5

Age : 7 jours

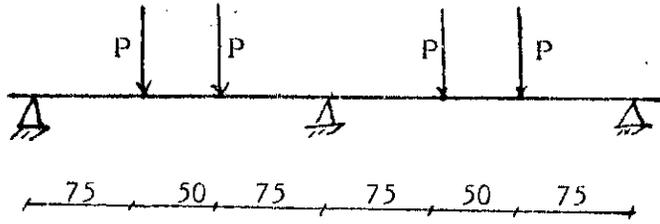
IV	2,487	201.06	88.000	437.7
V	2,479	201.06	85.700	426,2
VI	2,495	201.06	83.000	412.8
Moyenne	2,487	201.06		425,6

## OBSERVATIONS

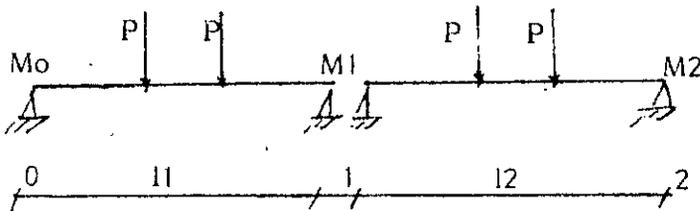
- La teneur en eau obtenue pour les différents bétons les classe dans la catégorie terre humide et pourraient être plastifiés en relevant la teneur en eau totale de  
 $118 \text{ l/m}^3 - E/C = 0,59$  pour le béton n° 1  
 $161 \text{ l/m}^3 - E/C = 0,55$  pour le béton n° 2
- L'excès de résistance obtenu permettra au chantier de jouer sur la teneur en eau afin d'obtenir un béton plus maléable.

**CHAPITRE V**  
**ANALYSE THEORIQUE DES POUTRES HYPERSTATIQUES**

5-1 - Résolution élastique



\* Calcul statique on a  $Q = 4 P$



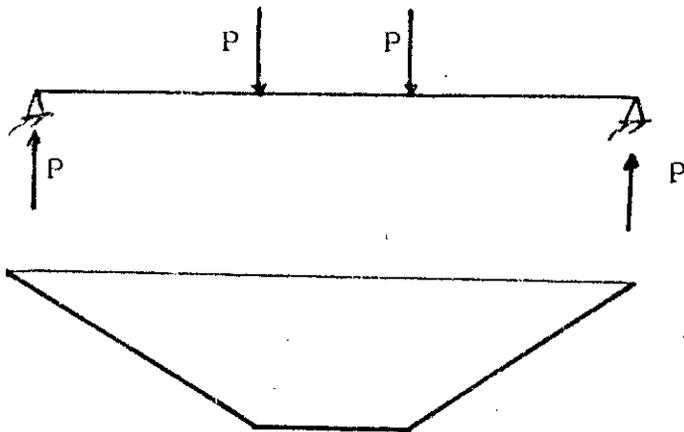
$$M_0 \cdot 11 + 2M_1 (11 + 12) + M_2 \cdot 12 = -\frac{6}{11} \int_0^{11} \mu x dx - \frac{6}{12} \int_0^{12} \mu (\frac{1}{2} x) dx =$$

$M_0 = M_2 = 0$  appuis de rive

$$11 = 12 = l \quad \mu \int_0^{11} = \mu \int_0^{12}$$

$$2M_1 \times 21 = \frac{-6}{1} \int_0^1 \mu x dx - \frac{6}{1} \int_0^1 \mu (1-x) dx$$

\* détermination de  $\mu$



$$\frac{(0,50 + 2) \times 0,75 P \times 1}{2} =$$

$$\frac{2,5 \times 0,75 P}{2} = 0,9375P$$

$$0,75P = 0,1875 Q$$

23

$$4M_1 = \frac{-6}{1} \times 2 \times 0,9375P$$

$$M_1 = \frac{-6}{4 \times 2^2} \times 2 \times 0,9375 P = -0,703125 P$$

$$M_1 = -0,17578125 Q$$

$$M_1 \approx -0,176 Q$$

Détermination des réactions  $M_1$  : moment de réaction  $< 0$

$$-\sum M/A = M + P \times (0,50 + 0,75 + 0,75) - R_B \times 2 = 0$$

$$R_B = \frac{1}{2} \left[ 0,176 Q + \frac{Q}{4} (2) \right]$$

$$R_B = \frac{1}{2} \left[ 0,176 Q + \frac{Q}{2} \right] = 0,338 Q$$

$$R_B = 0,676 Q$$

$$\sum M/B = R_A \times 2 - P (0,50 + 0,75 + 0,75) + M_1 = 0$$

$$R_A = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q}{4} \times 2 - 0,176 Q \right]$$

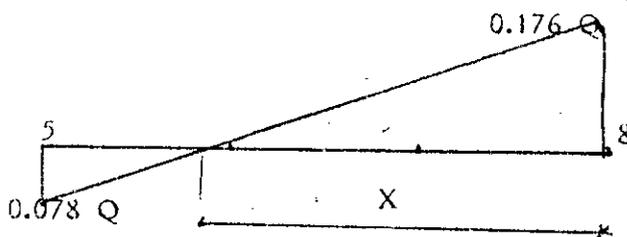
$$R_A = \frac{1}{2} \left[ \frac{Q}{2} - 0,176 Q \right] = 0,162 Q$$

$$R_A = 0,162 Q$$

Trace des diagrammes

$$M_3 = 0,122 Q, M_5 = 0,078 Q, M_8 = -0,176 Q$$

$$R_Q = 0,162 Q, R_8 = 0,676 Q$$



Détermination du point de moment nul

$$\frac{M_8}{M_5} = \frac{X}{3/81 - X}$$

En phase élastique,  $X \approx 0,260 l$

## Efforts dûs au poids propre



D'après les résultats expérimentaux, nous pouvons prendre

$$\gamma \text{ (kg/dm}^3\text{)} = 2,5 \text{ kg/dm}^3 \text{ pour les trois bétons.}$$

$$q = 2,5 \times 1,5 \times 2,6 = 9,75 \text{ kg/dm} = 97,5 \text{ kg/ml}$$

Le moment de flexion dans le domaine élastique

$$M(x) = \frac{ql}{2} \left( \frac{3}{4} x - \frac{x^2}{l} \right)$$

avec

$$R_A = R'_A = \frac{3pl}{8} \quad (\uparrow)$$

$$R_B = \frac{5}{4} pl$$

$$M\left(x = \frac{3}{8} l\right) = \frac{ql}{2} \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} l - \frac{\left(\frac{3}{8} l\right)^2}{l} \right] = \frac{ql^2}{2} \left[ \frac{9}{32} - \frac{9}{64} \right] = \frac{(18-9)}{64} \frac{ql^2}{2}$$

$$M\left(x = \frac{5}{8} l\right) = \frac{ql}{2} \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} l - \frac{\left(\frac{5}{8} l\right)^2}{l} \right] = \frac{ql^2}{2} \left[ \frac{15}{32} - \frac{25}{64} \right] = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{30-25}{64} \right)$$

$$M(x = l) = \frac{ql}{2} \left( \frac{3}{4} l - \frac{l^2}{l} \right) = -q \frac{l^2}{8}$$

$$M_3 = 54,84 \cdot 10^{-3} \text{ tm}$$

$$M_5 = 30,47 \cdot 10^{-3} \text{ tm}$$

$$M_8 = 48,75 \cdot 10^{-3} \text{ tm}$$

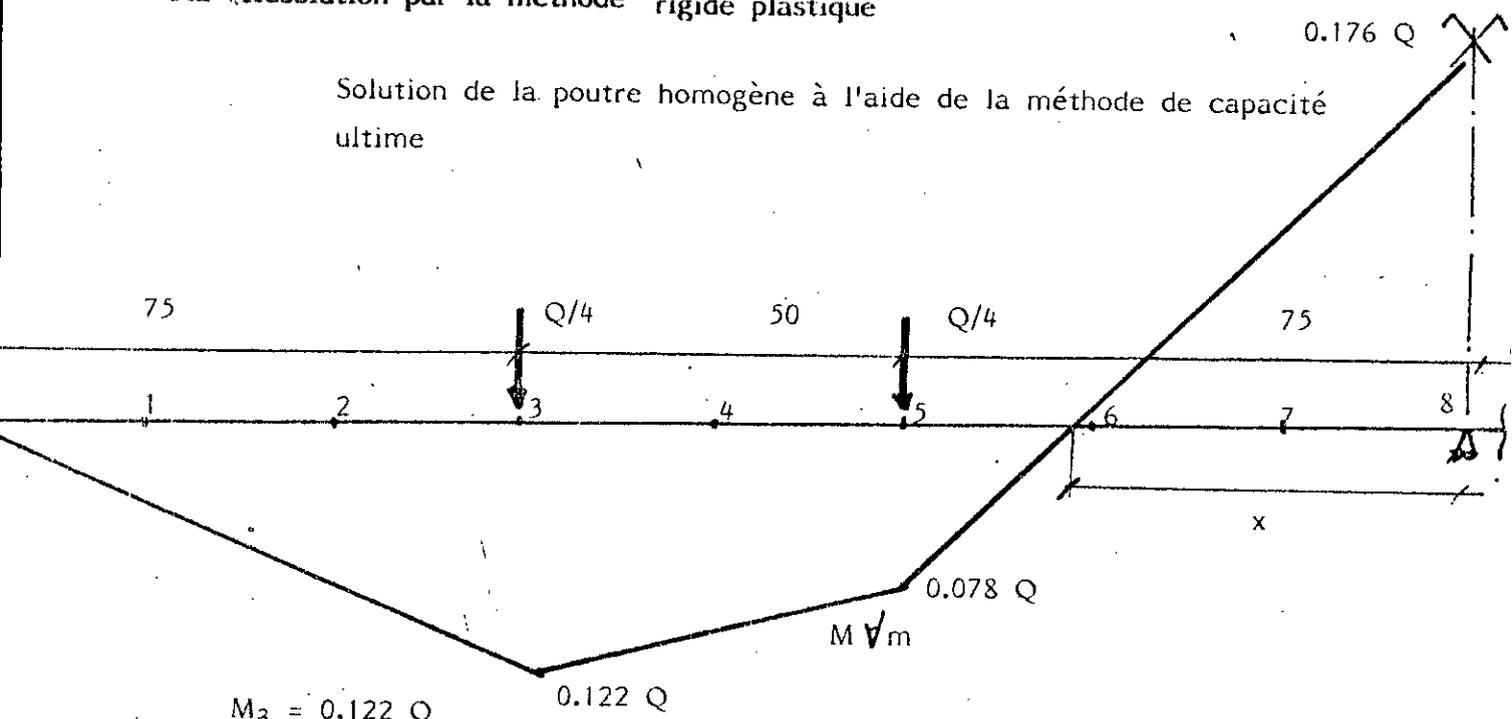
$$M_{\max} = M_{3/8l} = 54,84 \cdot 10^{-3} \text{ tm}$$

$$\text{AN } q = 97,5 \cdot 10^{-3} \text{ t/ml}$$

$$l = 2^m$$

### 5.2.4 Résolution par la méthode rigide plastique

Solution de la poutre homogène à l'aide de la méthode de capacité ultime



$M_3 = 0,122 Q$   
 $M_5 = 0,078 Q$   
 $M_8 = 0,176 Q$

pt de moment nul  $x = 0,260 l$

Pour déterminer la capacité portante d'une poutre, on a deux possibilités :

- statique
- cinématique

Si ces deux procédés de calcul donnent le même résultat, on dira alors que la solution est complète.

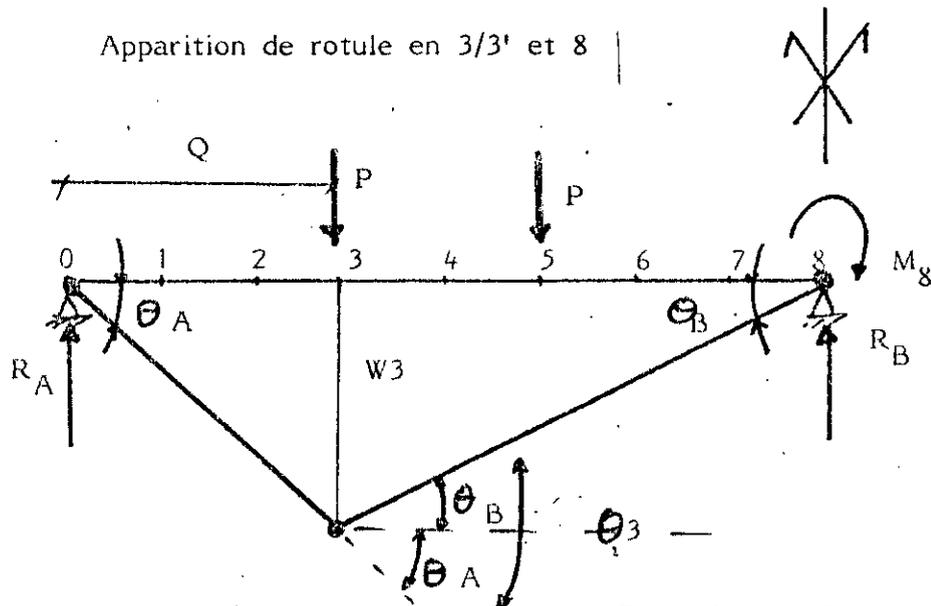
Sinon, c'est à dire si des différences entre les deux méthodes de calcul sont importantes, on dira que la solution est incomplète et la valeur à prendre sera la plus petite des deux valeurs trouvées respectivement par la méthode statique et cinématique (c'est-à-dire la méthode statique si on veut se placer en sécurité).

#### Mécanismes de ruine :

Avec la théorie rigide plastique on a deux mécanismes probables de ruine. Chacun d'eux comportera deux points plastifiés le 3 et 8 (3' et 8) pour le premier mécanisme.

le 5 et 8 (5' et 8) pour le deuxième mécanisme

### Premier mécanisme de ruine probable



Nous obtenons une poutre sollicitée par  $2P$  et  $M_8$  ; ceci avec une interprétation rigide plastique (alors que réellement nous avons une plastification continue du béton).

#### 1 - METHODE STATIQUE

Condition d'équilibre  $\sum M/8 = 0$

$$R_A l - P(l-a) - P'a + M_8 = 0$$

$$R_A l = Pl - M_8$$

$$R_A = P - \frac{M_8}{l}$$

$$M_3 = R_A a = \left(P - \frac{M_8}{l}\right) a = P \frac{3}{8} l - M_8 \frac{3}{8}$$

$$\text{d'où on tire } P = \frac{M_8}{l} + \frac{8}{3} \frac{M_3}{l}$$

Indépendamment du degré d'avancement de charge, les relations entre les différentes forces internes restent les mêmes, en particulier

$$P_U = \frac{M_{31}}{1} + \frac{8}{3} \frac{M_{3u}}{1}$$

## 2. - METHODE CINEMATIQUE

L'apparition de rotule divise la poutre en deux tronçons également rigides. Ces deux parties rigides seront donc reliées par les rotules.

La méthode énergétique s'énonçant comme suit (le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel interne), nous obtenons la relation à la limite

$$P_U W_3 + P_U W_5 = M_3 \theta_3 + M_3 (\theta_A + \theta_B) + M_A \theta_A$$

or

$$\frac{W_3}{W_5} = \frac{5}{3} \quad W_5 = \frac{3}{5} W_3$$

De plus, les angles de rotation étant très petits, nous pouvons les assimiler à leur tangente. On obtiendra :

$$\theta_A = \frac{W_3}{3/81} = \frac{8}{31} W_3$$

$$\theta_B = \frac{W_5}{5/81} = \frac{8}{51} W_5$$

En remplaçant dans l'équation du travail effectué par les forces, nous obtenons et avec  $M_A = 0$

$$P_U W_3 + P_U \frac{3}{5} W_3 = M_B \frac{8}{51} W_3 + M_3 \frac{64}{151} W_3 \quad \text{on tire}$$

$$P_U = \frac{M_{B0}}{3} + \frac{8}{3} \frac{M_{3u}}{1}$$

La solution est donc complète

$$Q_u = 4P_u = 4 \left( \frac{M_{Pu}}{1} + \frac{8}{3} \frac{M_{3u}}{1} \right)$$

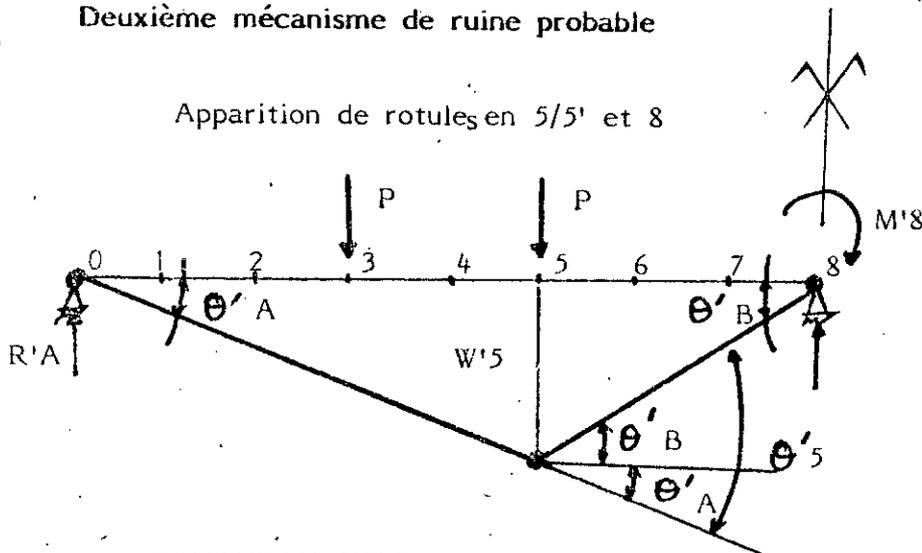
détermination du point de moment nul VP (voir diagramme du fléchissant M)

$$\frac{X}{\frac{3-x}{4}} = \frac{M_8}{M_5} \quad \text{d'où} \quad X = \frac{M_8}{M_8+M_5} \cdot \frac{3}{8} l$$

$$X = \alpha C \quad \alpha = \frac{M_8}{M_8+M_5}$$

Deuxième mécanisme de ruine probable

Apparition de rotules en 5/5' et 8



1 - CONDITION STATIQUE OU D'EQUILIBRE

$$R'_A = P(l-a) + Fa - M'B$$

$$R'_A = P - \frac{M'B}{l}$$

$$M'_5 = R'_A(l-a) - P(l-2a) \quad \text{avec} \quad a = \frac{3}{8} l$$

On tire

On tire

$$P_u = \frac{8}{3} M'_{5u} + M'_{B} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{l} \right)$$

$$P'_u = \frac{8}{3} \frac{M'_{5u}}{1} + \frac{5}{3} \frac{M'_{B}}{1}$$

## 2 - CONDITION CINEMATIQUE

$$P'_u W_3 + P'_u W_5 = M'_{B} \theta'_B + M'_{5} (\theta'_A + \theta'_B)$$

$$\frac{W_3}{W_5} = \frac{3}{5} \quad \text{d'où} \quad W_3 = \frac{3}{5} W_5$$

$$\theta'_B = \frac{8}{3} \frac{W_5}{1} \quad \theta'_A = \frac{8}{5} \frac{W_5}{1}$$

Après résolution on obtient :

$$P'_u = \frac{5}{3} \frac{M'_{Bu}}{1} + \frac{8}{3l} M'_{5u}$$

La solution est aussi complète donc

$$Q'_U = 4 \left( \frac{5}{3} \frac{M'_{Bu}}{1} + \frac{8}{3} \frac{M'_{5u}}{1} \right)$$

**\* Calcul du moment de rupture**

(calculer le moment de rupture)

$$h = h_t - d = 23.6 \text{ cm}$$

$$\delta = \frac{d}{h_t} = \frac{2.4}{26} = 0.092$$

- Si  $\frac{A'}{A} < 0.25$  on néglige l'armature auxiliaire

$$\text{et } M_R = A R_a h (1 - 0.5 \xi_R)$$

$$\text{avec } \xi_R = \omega \beta_r \quad \omega = \frac{A}{b h t}$$

$$\text{et } X_R = \xi_R h$$

$$\text{Si } \frac{A'}{A} > 0.25 \quad M_R = A R_a Z, \quad Z = h_t - 2d$$

L'armature auxiliaire n'est plus négligée.

Dans notre exemple, appui et travée répondent à la seconde condition que ce soit pour la disposition conforme ou disposition non conforme (0.67 et 1.5)

Tableau 5-1 : Moment de rupture

M R (kg cm)			
EC		ENC	
Appui	travée	appui	travée
3 $\emptyset$ 12=3.39 cm <sup>2</sup>	2 $\emptyset$ 12=2.26cm <sup>2</sup>	2 $\emptyset$ 12=2.26cm <sup>2</sup>	3 $\emptyset$ 12+3.39cm <sup>2</sup>
4.039.10 <sup>5</sup>	2.693 10 <sup>5</sup>	2.693.10 <sup>5</sup>	4.039 10 <sup>5</sup>

Ra = 5620 daN/cm<sup>2</sup>  
 Valeur moyenne  
 donnée par essai  
 de traction sur acier

- détermination de la charge ultime

1er mécanisme de ruine probable

$$Q_u = 4 \left( \frac{M_{8u}}{l} + \frac{8}{3} \frac{M_{3u}}{l} \right)$$

Disposition EC

$$M_{8u} = M_{au} = 4.039 \text{ tm}$$

$$M'_{5u} = M_{3u} = M_{tru} = 2.693 \text{ tm}$$

$$Q_u = 22.44 \text{ t}$$

$$Q'_u = 27.826 \text{ t}$$

2ème mécanisme de ruine

$$Q'_u = 4 \left( \frac{8}{3} \frac{M'_{5u}}{l} + \frac{5}{3} \frac{M'_{8u}}{l} \right)$$

Disposition ENC

$$M_{8u} = M_{au} = 2.693 \text{ tm}$$

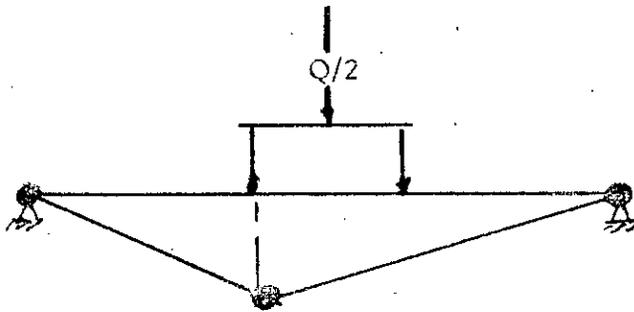
$$M'_{5u} = M_{3u} = M_{tru} = 4.039 \text{ tm}$$

$$Q_u = 26.927 \text{ t}$$

$$Q'_u = 26.93 \text{ t}$$

La charge ultime à prendre en compte est la plus petite donnée par les différents mécanismes de ruine probable.

Nous voyons donc que le mécanisme de ruine le plus probable est le premier envisagé.



$$\text{EC} \quad Q_u = 224.4 \text{ KN}$$

$$\text{ENC} \quad Q_u = 269.3 \text{ KN}$$

### 5.3 - Méthode de Kuczynski

Les calculs des systèmes statiquement indéterminés sont faits d'après la théorie d'itération de MOHR modifiée par GOŚZCZYNSKI où la courbure est la charge fictive secondaire.

Les résultats seront donnés sous forme de tableau.

Nous allons donner les calculs sous forme de tableau pour les différents bétons et différents pourcentages d'acier :

$R_b$  : résistance moyenne en compression du béton

$R_a$  : résistance moyenne de l'acier

$\tilde{\omega}$  : pourcentage d'acier tendu  $\frac{A}{2bd}$

$\tilde{\omega}'$  : pourcentage d'acier comprimé  $\frac{A'}{2bd'}$

$A$  : section d'acier tendu

$E_b$  : module de déformation longitudinale du béton ( $R_b$  en bars)

$$E_b = 19\,000 \sqrt{R_b}$$

$E_a$  : module d'élasticité de l'acier

$$\eta = \frac{E_a}{E_b} \quad \beta_R = \frac{R_a}{R_b}$$

$X_o$  : position de l'axe neutre à l'état initial

$$X_o = \frac{n(Ah + A'd') + bht^2/2}{n(A + A') + bh_t}$$

$I$  : Inertie de la section

$$I = \frac{1}{3} \frac{X_o^3 b}{3} + \frac{b}{3} (ht - X_o)^3 + nA(h - X_o)^2 + nA'(X_o - d')^2$$

$B_o$  :  $\gamma E_b I_o$  rigidité initiale

	Séries A et B	Série C
avec $\gamma =$ en appui	0.39	0.32
$\gamma =$ en travée	0.58	0.48

$K = \frac{M_R}{B_o}$  coefficient de souplesse

$$\gamma = \frac{29 (Br\omega + 0.05)}{Br - 0.17 Br\omega + 1}$$

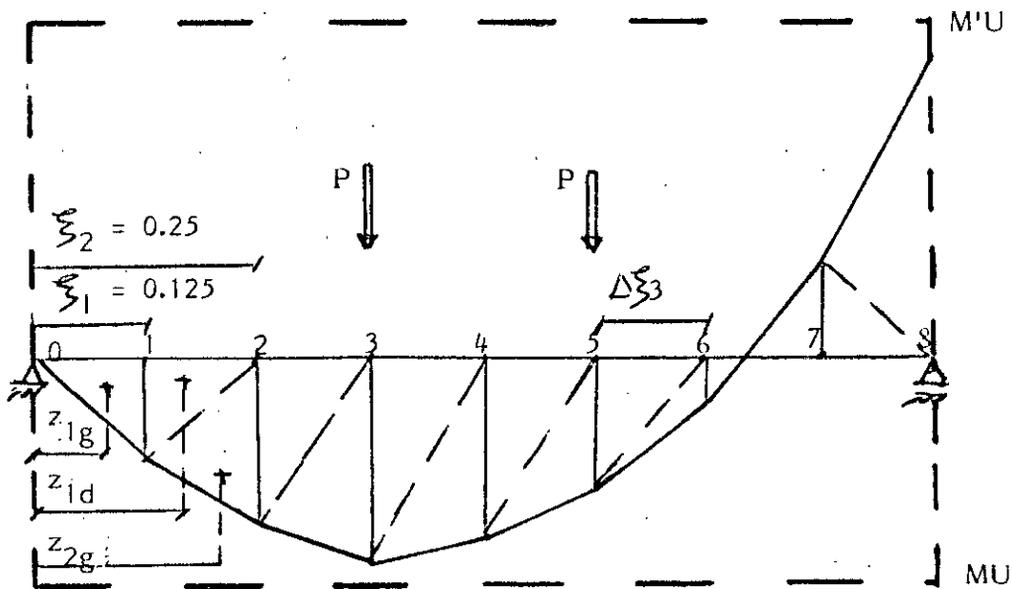
Ce tableau servira pour la détermination pour la suite de la redistribution

## EXPOSE DE LA METHODE D'ITERATION

Ayant chargé la poutre auxiliaire avec une charge fictive égale à la courbure, la détermination de la déformée (c'est-à-dire de la rotation et du déplacement vertical), revient au tracé des diagrammes des éléments de réduction fictifs avec :  
tranchant fictif = rotation ( $T_y^f = \Theta$ ) et fléchissant fictif = déplacement vertical ( $M_z^f = y$ )

Le point de départ de cette méthode est la compatibilité des angles de rotation au point commun  $j$ , laquelle se traduit par :  $\Theta_{jj} = \Theta_{j+1,j}$

La première étape de cette itération est la linéarisation des moments fléchissants et de la capacité portante sur chaque tronçon. Vu la symétrie de notre poutre, nous ne considérons qu'une seule travée, laquelle sera partagée en huit tronçons égaux.



Les  $\xi_i$  étant les coordonnées des sections qu'on retrouve dans la deuxième ligne du tableau d'itération.

- Les  $\sum \xi_i$  (troisième ligne du tableau d'itération) représentent les bras de levier de la résultante fictive par rapport au point 0.

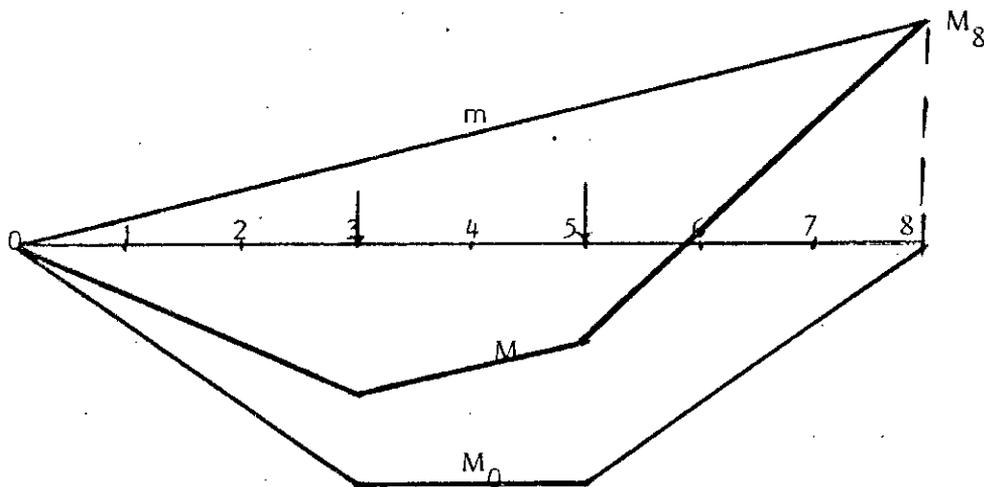
$$\sum \xi_i = z_{ig} + z_{id}$$

exemple, pour la section 2 :

$$\sum \xi_2 = z_{2g} + z_{2d} = (0.25 - 1/3 \cdot 0.125) + (0.25 + 1/3 \cdot 0.125) = 0.50$$

$$z_{ig} = \xi_i - 1/3 \Delta \xi_i \quad z_{id} = \xi_i + 1/3 \Delta \xi_{i+1}$$

- $M_0$  est le moment de flexion de la poutre isostatique de référence.
- $M$  est le moment de flexion du système hyperstatique



- $m$  est le degré d'avancement de charge =  $M/M_u$  ou  $M/M'_u$
- $\chi$  est la courbure, elle est égale à  $Km/(1-m^2)$
- $\sum \pm$  comporte les termes du type  $\chi 10^3 \times \sum$  et sert pour la vérification. On devrait avoir  $\sum \pm = 0$  pour traduire  $y_0 = 0$
- Pour le calcul des intégrations donnant la rotation et le déplacement vertical de la poutre, nous avons appliqué la méthode des trapèzes.

$$\varphi_{jj} = \int \xi \chi d\xi = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \xi_i \chi_i d\xi \approx 1/2 (\chi_{id} z_{id} + \chi_{ig} z_{ig}) \Delta \xi_i$$

$\chi_i$  étant la courbure au point  $i$  à la distance  $\xi_i$  de l'extrémité gauche.

$$\varphi_{jj-1} = -\int \xi' \chi d\xi = 1/2 \sum_{i=1}^n (\chi_{i-1d} z'_{i-1d} + \chi_{ig} z'_{ig}) \Delta \xi_i$$

avec  $\xi' = 1 - \xi$  et  $z' = 1 - z$

La condition particulière vue la symétrie est que la rotation est nulle dans la section 8 (axe de symétrie).

- Les angles de rotation sont calculés par :

$$\varphi_k = \varphi_{j,j-1} + 1/2 \sum_{i=1}^n (\chi_{i-1d} + \chi_{ig}) \Delta \xi_i = \varphi_{k-1} + 1/2 (\chi_{kd} + \chi_{kg}) \Delta \xi_k$$

- La variation  $\Delta \varphi = \chi/16$

- Pour les flèches, on a

$$\varrho_k = \int_0^{\xi^k} \varphi d\xi \approx 1/2 \sum_{j=1}^k (\varphi_{j-1} + \varphi_j) \Delta \xi_j = \varphi_{k-1} + 1/2 (\varphi_{k-1} + \varphi_k) \Delta \xi_k$$

Accroissement de la fêche :  $\Delta \varrho = \varphi/16$

TABLEAU 5.2

## RESOLUTION PAR LA METHODE CONTINUE : DETERMINATION DES DIFFERENTS PARAMETRES

Série	Type	R <sub>B</sub> kg/cm <sup>2</sup>	σ <sub>en</sub> kg/cm <sup>2</sup>	$\tilde{\omega}$ %	$\tilde{\omega}'$ %	A cm <sup>2</sup>	A' cm <sup>2</sup>	E <sub>B</sub> kg/cm <sup>2</sup>	$\eta$	$\beta_R$	X <sub>0</sub> cm	I cm <sup>4</sup>	B <sub>010</sub> <sup>9</sup> kg/cm <sup>2</sup>	MR kNm	K10 <sup>2</sup>	$\psi$	Q <sub>y</sub> (kN)	$\psi$ moyen	
A	EC	400	5620	0.64	0.96	2.26	3.39	3.800 10 <sup>5</sup>	5.526	14.05	12.843	25 467.7	5.613	26.93	0.9596	1.15	224.4	1.4	
				0.96	0.64	3.39	2.26				13.157		3.774	40.39	2.140	1.523			
	ENC			0.96	0.64	3.39	2.26				13.157		5.613	40.39	1.439	1.523			269.3
				0.64	0.96	2.26	3.39				12.843		3.784	26.93	1.423	1.15			
B	EC	300		0.64	0.96	2.26	3.39	3.291 10 <sup>5</sup>	6.383	18.73	12.821	26 008.4	4.964	26.93	1.085	1.259	224.4	1.5	
				0.96	0.64	3.39	2.26				13.192		3.338	40.39	2.420	1.707			
	ENC			0.96	0.64	3.39	2.26				13.192		4.964	40.39	1.627	1.707			269.3
				0.64	0.96	2.26	3.39				12.821		3.338	26.93	1.613	1.259			
C	EC	150	0.64	0.96	2.26	3.39	2.327 10 <sup>5</sup>	9.013	37.47	12.755	27 665.3	3.090	26.93	1.743	1.643	224.4	2.0		
			0.96	0.64	3.39	2.26				13.245		2.060	40.39	3.921	2.331				
	ENC		0.96	0.64	3.39	2.26				13.245		3.090	40.39	2.614	2.331			269.3	
			0.64	0.96	2.26	3.39				12.755		2.060	26.93	2.615	1.643				

$$\begin{aligned}
 h_t &= 26 \text{ cm} \\
 b_t &= 15 \text{ cm} \\
 h &= 23,6 \text{ cm} \\
 z &= 21,2 \text{ cm} \\
 d &= d' = 2,4 \text{ cm} \\
 E_a &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

$$X_0 = \frac{n(Ah + A'd') + b_t \cdot t^2/2}{n(A+A') + bh_t}$$

$$B_0 = E_b I_0 \text{ rigidité initiale}$$

$$K = MR/B_0 : \text{coefficient de souplesse}$$

$$\psi = \frac{29(\beta_r + 0.05)}{\beta_r \omega - 0.17(\beta_r + 1)}$$

$$I = bX_0^3/3 + b/3(ht - X_0)^3 + nA(h - X_0)^2 + nA'(X_0 - d')^2$$

$$MR = A \sigma_{en} Z$$

$$P_u = 1/I (M8U + 8/3 M3U)$$

$$P'U = 8/3 M5/I + 5/3 M'8/I$$

TABLEAU 5.3 : RESOLUTION PAR LA METHODE DE KUCZYNSKI

Série	$\delta = \frac{Q_{exp}}{Q_{th}}$	$Q_{exp}$ (KN)	$\psi$	$M_u$ (KNm)	$K \cdot 10^3$	$(\frac{KNm}{M_u})$	$K \cdot 10^3$	$(\frac{KNm}{M_g})$	$(\frac{KNm}{M_0})$	mc	$(\frac{KNm}{M_{u,K}}$	$(\frac{KNm}{M_{u,K}}$
A I	1.223	274.5	2.20	26.93	12.89	40.39	29.28	37.70 43.64	42.45 47.76	3.80 0.90	32.93	49.40
A II	1.164	317.25	2.20	40.39	18.23	26.93	18.42	28.39 30.58	48.22 56.50	0.80 0.95	47.01	31.35
B I	1.138	254.75	2.10	26.93	13.47	40.39	30.62	35.00 40.50	39.40 44.33	0.80 0.90	30.65	45.96
B II	1.053	283.5	2.10	40.39	18.76	26.93	18.94	25.37 27.33	43.09 50.49	0.80 0.95	42.53	28.36
C I	1.069	240	2.00	26.93	16.52	40.39	38.32	32.96 38.16	37.12 41.76	0.80 0.90	28.79	43.18
	0.986	265.5	2.00	40.39	23.29	26.93	19.30	23.76 40.35	40.35	0.80 0.90	39.82	26.55

TABLEAUX D'ITERATION POUR LA SERIE AI

mc = 0,825	section	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	M	0	9,475	18,950	28,425	23,750	19,075	0,25	-18,575	-37,4
	m	0	0,288	0,576	0,863	0,721	0,579	0,0076	0,376	0,757
	$\chi 10^3$	0	3,964	10,545	40,241	18,130	10,678	0,098	12,458	48,417
	$\varphi 10^3$	5,874	5,626	4,719	1,545	-2,103	-3,904	-4,577	-3,805	
	$\rho 10^3$	0	0,719	1,365	1,757	1,722	1,346	0,816	0,293	0,055

mc = 0,874	M	0	9,95	19,9	29,85	24,80	19,75	-0,30	-20,35	40,4
	m	0	0,302	0,604	0,906	0,753	0,598	0,006	0,412	0,819
	$\chi 10^3$	0	4,196	11,629	00,137	20,917	11,415	0,178	14,058	67,652
	$\varphi 10^3$	7,573	7,311	6,322	1,837	3,229	-5,250	-5,974	-5,107	-
	$\rho 10^3$	0	0,939	1,782	2,292	2,205	1,675	0,474	0,281	-0,038

mc = 0,928	M	0	10,445	20,99	31,335	25,86	20,385	-1,01	-22,405	-43,80
	m	0	0,317	0,637	0,952	0,785	0,619	0,020	0,454	0,887
	$\chi 10^3$	0	4,444	13,068	118,532	24,545	12,241	0,597	16,107	111,625
	$\varphi 10^3$	0	12,261	11,167	2,942	-6,000	-8,299	-9,027	-7,983	-
	$\rho 10^3$	12,539	1,55	3,014	3,896	3,705	2,811	1,728	0,665	0,166

TABLEAUX D'ITERATION POUR LA SERIE BI

mc = 0.816

M	0	8,725	17,450	26,175	21,90	17,625	0,35	-16,925	-34,2
m	0	0,285	0,569	0,854	0,714	0,575	0,011	0,368	0,744
$\chi 10^3$	0	4,128	11,056	40,776	19,008	11,272	0,154	12,851	49,274
$\varphi 10^3$	6,113	5,855	4,906	1,667	-2,070	-3,968	-4,676	-3,883	-
$\rho 10^3$	0	0,748	1,420	1,831	1,806	1,429	0,889	0,354	0,111

mc = 0.879

M	0	9,30	18,60	27,90	23,20	18,50	-0,20	-18,9	-37,6
m	0	0,303	0,607	0,910	0,557	0,604	0,004	0,411	0,818
$\chi 10^3$	0	4,450	12,581	68,445	23,025	12,439	0,132	14,896	72,858
$\varphi 10^3$	8,685	8,407	7,343	2,279	-3,438	-5,655	-6,424	-5,485	-
$\rho 10^3$	0	1,068	2,052	2,654	2,581	2,013	1,258	0,514	0,171

mc = 0.942

section	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M	0	9,812	19,625	29,457	24,25	19,062	-1,125	-21,312	-41,50
m	0	0,320	0,640	0,960	0,191	0,622	0,024	0,464	0,903
$\chi 10^3$	0	4,746	14,188	159,180	27,432	13,273	0,750	17,729	143,288
$\varphi 10^3$	14,419	14,122	12,939	2,104	-9,559	-10,789	-11,172	-10,064	-
$\rho 10^3$	0	1,784	3,475	4,415	3,949	2,702	1,355	0,028	-0,01

TABLEAUX D'ITERATION POUR LA SERIE CI

mc = 0.825	M	0	8,307	16,625	24,922	20,860	16,797	0,365	-16,067	-32,50
	m	0	0,288	0,577	0,866	0,725	0,583	0,013	0,372	0,753
	$\chi 10^3$	0	5,200	14,295	59,063	25,198	14,612	0,210	-16,550	66,531
	$\varphi 10^3$	8,345	8,020	6,801	2,342	-2,800	-5,288	-6,214	-5,193	-
	$\eta 10^3$	0	1,023	1,949	2,511	2,492	1,986	1,268	0,555	0,230

mc = 0.900	section	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	M	0	8,925	17,850	26,775	22,200	17,625	-0,45	-18,525	-36,00
	m	0	0,310	0,620	0,93	0,771	0,612	0,010	0,429	0,848
	$\chi 10^3$	0	5,666	16,638	113,736	31,422	16,176	-0,399	20,147	115,262
	$\varphi 10^3$	13,201	12,847	11,453	3,305	-5,767	-8,742	-9,728	-8,469	-
	$\eta 10^3$	0	1,628	3,147	4,069	3,915	3,008	1,854	0,717	0,187

mc = 0.928	M	0	9,132	18,265	27,397	22,610	17,822	-0,885	-19,592	-38,30
	m	0	0,317	0,634	0,952	0,785	0,619	0,021	0,454	0,887
	$\chi 10^3$	0	5,826	17,540	166,538	33,851	16,581	0,786	21,893	159,383
	$\varphi 10^3$	17,246	16,882	15,421	3,916	-8,608	-11,760	-12,747	-11,330	-
	$\eta 10^3$	0	2,133	4,152	5,360	5,067	3,794	2,263	0,758	0,050

TABLE AUX D'ITERATION POUR LA SERIE AII

mc = 0.625	M	0	9,265	18,530	27,795	24,66	21,525	5,99	-9,545	-25,00
	m	0	0,197	0,394	0,591	0,524	0,458	0,127	0,304	0,800
	$\chi 10^3$	0	3,697	8,250	15,730	12,612	10,172	2,348	6,051	37,986
	$\varphi 10^3$	3,471	3,239	2,493	0,994	-0,77	-2,201	-2,284	-2,752	-
	$\rho 10^3$	0	0,419	0,778	0,996	1,009	0,823	0,499	0,140	-0,032

mc = 0.792	M	0	12,173	24,346	36,519	32,992	29,466	10,239	-8,988	-28,21
	m	0	0,259	0,518	0,777	0,702	0,627	0,218	0,287	0,90
	$\chi 10^3$	0	4,974	12,344	33,223	23,643	17,794	4,114	5,642	80,130
	$\varphi 10^3$	6,298	5,987	4,905	2,057	-1,497	-4,087	-5,456	-5,361	-
	$\rho 10^3$	0	0,768	1,449	1,884	1,919	1,570	1,973	0,297	0,038

mc = 0.908	section	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	M	0	14,277	28,554	42,831	39,109	35,386	13,663	-8,060	-29,78
	m	0	0,304	0,607	0,911	0,832	0,753	0,291	0,257	0,95
	$\chi 10^3$	0	5,970	16,624	89,683	45,554	29,529	5,672	4,987	163,98
	$\varphi 10^3$	13,257	12,884	11,472	4,827	-3,625	-8,318	-10,518	-10,560	-
	$\rho 10^3$	0	1,664	3,156	4,175	4,250	3,504	2,326	1,009	0,349

TABLEAUX D'ITERATION POUR LA SERIE BII

mc = 0.638	M	0	8,462	16,925	25,387	22,55	19,712	5,575	-8,562	-22,7
	m	0	0,199	0,398	0,597	0,530	0,453	0,131	0,302	0,800
	$\chi 10^3$	0	3,863	8,725	16,925	13,511	10,854	2,494	6,221	40,591
	$\varphi 10^3$	3,732	3,490	2,704	1,101	-0,802	-2,324	-3,159	-2,296	-
	$\eta 10^3$	0	0,451	0,838	1,676	1,095	0,899	0,554	0,177	-0,006

mc = 0.807	section	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	M	0	11,109	22,219	33,328	30,138	26,947	9,457	-8,033	-25,524
	m	0	0,261	0,522	0,784	0,709	0,634	0,222	0,283	0,90
	$\chi 10^3$	0	5,211	13,168	36,688	25,820	19,282	4,357	5,774	85,874
	$\varphi 10^3$	6,976	6,651	5,502	2,386	-1,5207	-4,339	-5,817	-5,728	-
	$\eta 10^3$	0	0,8517	1,611	2,104	2,158	1,792	1,157	0,436	0,078

mc = 0.918	M	0	12,898	25,798	38,797	35,33	31,962	12,328	7,306	-26,944
	m	0	0,303	0,607	0,910	0,831	0,752	0,290	0,258	0,9500
	$\chi 10^3$	0	6,196	17,505	94,891	48,306	31,252	5,874	5,179	176,199
	$\varphi 10^3$	13,843	13,456	11,975	4,950	-4,000	-8,972	-11,293	-11,336	-
	$\eta 10^3$	0	1,706	3,296	4,353	4,413	3,602	2,235	0,921	0,213

TABLEAUX D'ITERATION POUR LA SERIE CII

mc = 0,603	section	0	1	2	3	4	5	6	7	8
	M	0	7,345	14,69	22,035	19,38	16,725	4,07	-8,585	-21,24
	M	0	0,184	0,369	0,553	0,487	0,420	0,102	0,323	0,80
	$\chi 10^3$	0	4,446	9,945	18,576	14,853	11,877	2,405	6,968	42,889
	$\varphi 10^3$	4,211	3,933	3,034	1,251	-0,838	-2,509	-3,401	-3,116	-
	$\eta 10^3$	0	0,509	0,944	1,212	1,238	1,029	0,659	0,252	0,057

mc = 0,771	M	0	9,813	19,626	29,439	26,452	23,465	7,679	-8,108	-23,895
	m	0	0,246	0,493	0,739	0,664	0,589	0,193	0,305	0,900
	$\chi 10^3$	0	6,110	15,163	37,974	27,692	21,027	4,664	6,500	91,44
	$\varphi 10^3$	7,844	7,462	6,132	2,811	-1,293	-4,338	-6,089	-6,120	-
	$\eta 10^3$	0	0,957	1,806	2,365	2,622	2,431	1,780	1,017	0,634

mc = 0,898	M	0	11,747	23,494	35,241	32,089	28,936	10,883	-7,170	-25,222
	m	0	0,295	0,590	0,885	0,806	0,727	0,273	0,270	0,95
	$\chi 10^3$	0	7,525	21,079	95,100	53,526	35,860	6,879	5,621	188,051
	$\varphi 10^3$	15,04	14,570	12,782	5,521	-3,768	-9,355	-12,026	-12,104	-
	$\eta 10^3$	0	1,851	3,560	4,704	4,814	3,993	2,657	1,149	0,393

## RESULTATS DE CALCUL - METHODE DE KUCZYNSKI

Série	$m_c$	$m_3$	$m_8$	$\varphi_0 \cdot 10^6$ (rd)	a (mm)	$m_8 / m_3$
A I	0.62	0.655	0.543	49.236	1.612	0.829
	0.825	0.863	0.757	102.521	3.444	0.877
	0.874	0.906	0.819	132.174	4.410	0.904
	0.928	0.952	0.887	218.847	7.410	0.932
B I	0.610	0.660	0.541	51.400	1.638	0.820
	0.816	0.854	0.744	106.692	3.612	0.871
	0.879	0.910	0.818	151.582	5.162	0.899
	0.942	0.960	0.903	251.659	7.898	0.941
C I	0.61	0.658	0.532	67.492	2.444	0.808
	0.825	0.866	0.753	145.648	4.984	0.870
	0.900	0.930	0.848	230.401	7.83	0.912
	0.928	0.952	0.887	300.999	10.134	0.932
A II	0.60	0.558	0.770	56.793	1.918	1.380
	0.625	0.591	0.800	60.580	2.018	1.354
	0.792	0.777	0.900	109.921	3.838	1.158
	0.908	0.911	0.950	231.378	8.500	1.043
B II	0.60	0.557	0.763	60.039	2.056	1.370
	0.638	0.597	0.800	65.136	2.190	1.340
	0.807	0.784	0.900	121.754	4.316	1.148
	0.918	0.910	0.950	241.606	8.826	1.044
C II	0.600	0.533	0.780	70.616	2.400	1.463
	0.603	0.553	0.800	73.496	2.476	1.447
	0.771	0.739	0.900	136.904	5.244	1.218
	0.898	0.885	0.950	262.497	9.628	1.073

## 5.4 - Calculs d'après la réglementation (BAEL)

### 5.4.1 - Calcul du moment de rupture

Après détermination de tous les mécanismes de ruine probables, nous procédons au calcul du moment de rupture qui servira à définir le mécanisme le plus probable.

On détermine d'abord la position de l'axe neutre par la relation :

$$\alpha_u = \frac{A}{bh} \frac{R_a}{R'_b}$$

avec  $X_u = \alpha_u h$

Si : -  $X_u < d'$  la force de compression du béton se trouve au dessus des armatures on a donc :

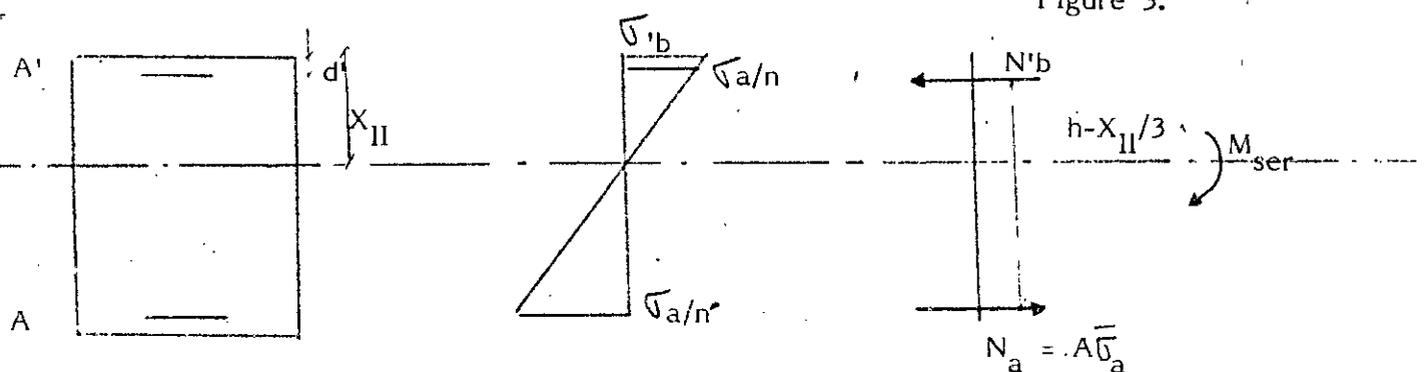
$$M_R = AR_a (h - d')$$

Si : -  $X_u > d'$

$$M_R = AR_a h (1 - 0.4 \alpha_u).$$

### 5.4.2 - Calcul de la sécurité

- calcul élastique du moment de service



XII =  $\alpha_{II} h$  avec

$$\alpha_{II} = n (c_u + c_u') \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 (c_u + \delta' c_u')}{n (c_u + c_u')^2}} \right]$$

où  $\delta' = \frac{d'}{h}$

$n$  : coefficient d'équivalence

$c_u, c_u'$  : respectivement pourcentages des aciers tendus et comprimés.

$$M_{ser} = A \bar{\sigma}_a h \left( 1 - \frac{\alpha_{II}}{3} \right) \text{ avec } \bar{\sigma}_a = \frac{2}{3} \sigma_{en}$$

La valeur de  $Q$  admissible sera déterminée d'après la solution purement élastique en sachant que :

$$M_{3ser} = 0.122 Q_1 \text{ et}$$

$$M_{8ser} = 0.176 Q_2 \quad Q_{adm} = \min(Q_1, Q_2).$$

- Calcul du coefficient de sécurité d'une section  $i$  :

$$s_i = \frac{M R_i}{M_{ser i}}$$

pour le système  $s = \frac{P_u}{P_{ser}} \quad \text{ou } s = \frac{Q_u}{Q_{adm}}$

N.B :

Les calculs sont faits avec des valeurs moyennes des caractéristiques mécaniques de l'acier et du béton qui sont pour nous les valeurs réelles.

Les résultats de calculs seront donnés sous formes de tableaux avec

$$\bar{\sigma}_a = \frac{2}{3} \sigma_{en} = \frac{2}{3} 5620 = 3747 \text{ daN/cm}^2$$

$$\delta' = d'/h = 2.4/23.6 = 0.1017$$

$$M_r = A \bar{\sigma}_a (h - XII/3)$$

## POSITIONS DE L'AXE NEUTRE A L'ETAT LIMITE ULTIME

		A	B	C
$R'_{bd}$ (daN/cm <sup>2</sup> )		400	300	150
$A'$ (cm <sup>2</sup> )	2 $\phi$ 12	2.26	2.26	2.26
	3 $\phi$ 12	3.39	3.39	3.39
$\alpha_u$	2 $\phi$ 12	0.0897	0.1196	0.2392
	3 $\phi$ 12	0.1345	0.1794	0.3588
$X_U$ (cm)	2 $\phi$ 12	2.117	2.822	5.645
	3 $\phi$ 12	3.174	4.234	8.468

avec  $R_a = 5\,620$  daN/cm<sup>2</sup>

CALCUL THEORIQUE DU MOMENT DE SERVICE ET DE LA CHARGE ADMISSIBLE

		n	$\omega$	$\omega'$	$\alpha_{II} 10^{-1}$	$X_{II}$ cm	Mser t m	Q t	
A	EC	trav.	5.526	0.64	0.96	2.105 10 <sup>-1</sup>	4.967	1.858	15.22
		appui	5.526	0.96	0.64	2.596 10 <sup>-1</sup>	22.93	2.738	15.56
	ENC	trav.	5.526	0.96	0.64	2.596 10 <sup>-1</sup>	6.126	2.738	22.44
		appui	5.526	0.64	0.96	2.105 10 <sup>-1</sup>	4.967	1.858	10.56
B	EC	trav.	6.383	0.64	0.96	2.213 10 <sup>-1</sup>	4.967	1.858	10.56
		appui	6.383	0.96	0.64	2.737 10 <sup>-1</sup>	6.461	2.724	15.48
	ENC	trav.	6.383	0.96	0.64	2.737 10 <sup>-1</sup>	6.461	2.724	22.33
		appui	6.383	0.64	0.96	2.213 10 <sup>-1</sup>	5.222	1.851	10.52
C	EC	trav.	9.013	0.64	0.96	2.479 10 <sup>-1</sup>	5.851	1.833	15.02
		appui	9.013	0.96	0.64	3.092 10 <sup>-1</sup>	7.297	2.689	15.28
	ENC	trav.	9.013	0.96	0.64	3.092 10 <sup>-1</sup>	7.297	2.689	22.04
		appui	9.013	0.64	0.96	2.479 10 <sup>-1</sup>	5.851	1.833	10.41

**CHAPITRE VI.**  
**ANALYSE COMPARATIVE DES RESULTATS**

## CHAPITRE VI - ANALYSE COMPARATIVE DES RESULTATS

### 6.1 - Synthèse des résultats expérimentaux

L'étude se concentrant sur l'analyse détaillée du comportement à l'état limite ultime des poutres en béton armé statiquement indéterminées, les essais complétés de solutions théoriques ont pour but :

- établir la redistribution des forces internes pour des degrés de chargement avancés
- de déterminer les mécanismes de rupture et la charge ultime
- d'évaluer l'influence de la disposition de l'armature et du dosage du béton en ciment sur les caractères de la redistribution des éléments de réduction et sur la création des mécanismes de rupture.

#### 6.1.1 - Principaux résultats expérimentaux

Nous donnons les principaux résultats expérimentaux sous forme de tableaux ( -1, -2, -3 et -4).

#### 6.1.2 - Comportement des poutres sous charges croissantes de zéro jusqu'à rupture

Pour les différents paliers de chargement, et la durée de la charge, voir annexe C tableaux I et II.

Les mesures des réactions d'appui central, des flèches à mi-travée, et des angles de rotation des appuis de rive sont données sous forme de graphes pour un taux de sollicitation variant de zéro jusqu'à l'unité. Fig. I, II, III, IV et V de l'annexe C.

Nous allons décrire grossièrement le comportement de chaque corps d'essai.

#### a) Série AI

- i) poutre AI 1 : les premières fissures sont apparues à 66 KN sous les charges extrêmes en travée et à 126 KN à l'appui.

La première fissure oblique est apparue au septième pas à 23.5 cm de l'appui de rive et est inclinée de 17° par rapport à la verticale.

La rupture a eu lieu à l'appui avec une inclinaison de 50°.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 4.9 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = -2.72 \% \quad mc = 0.852$$

ii) poutre AI 2 : les premières fissures sont apparues à 93 KN à l'appui et en travée symétriquement sur les deux faces.

L'apparition des rotules plastiques en travée a eu lieu à 268.5 KN.

A la rupture, le tranchant l'emporte et on observe l'effet de Goujon.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 4.4 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = -4.05 \% \quad mc = 0.858$$

### b) Série AII

i) poutre A II 1

Première fissure apparue à 96 KN à l'appui et sous charges extrêmes sur les deux faces. On a épuisement de l'axe neutre à 141 KN et 201 KN.

A la rupture, on a eu cisaillement et écrasement du béton à l'appui central.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = +5.09 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = -4 \% \quad mc = 0.897$$

ii) Poutre AII 2

Première fissure apparue à 58.5 KN au niveau de l'appui central et à 118.5 KN en travée.

L'épuisement de l'axe neutre est à 201 KN à l'appui.

La rupture s'est faite sous charges extrêmes. On a remarqué une forte concentration des fissures en travée et très peu à l'appui central (3).

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 4.36 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = -4.033 \% \quad mc = 0.891$$

Apparition de la première fissure oblique au neuvième pas, elles sont inclinées à 37° par rapport à la verticale et distantes de 58 cm de l'appui de rive.

A l'appui central, elle est apparue au huitième pas et est inclinée à 40°.

### c) Série BI

i) poutre BI 1

Premières fissures apparues à 51 KN dans les deux travées sous charges extrêmes et à 80 KN à l'appui.

L'épuisement de l'axe neutre a eu lieu à 178.5 KN pour l'appui et à 246 KN en travée.

On a apparition d'une rotule plastique à 246 KN en travée, mais à la rupture l'effort tranchant l'emporte à l'appui central.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 9.5 \% \quad m_c = 0.916$$

ii) poutre BI 2

Premières fissures apparues à 51 KN en travée.

La rupture fragile et prématurée est apparue par cisaillement de la poutre à l'appui central. L'inclinaison de la faille est de 33°.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 2.41 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = - 3.66 \% \quad m_c = 0.756$$

d) Série BII

i) Poutre BII 1

Premières fissures apparues à 96 KN en travée et à l'appui.

Juste avant ruine, on observe une grande ouverture des fissures au niveau de l'appui central et des charges extrêmes. La rupture s'est faite au niveau de la première rotule (3, 3') à 45° par cisaillement.

ii) Poutre BII 2

Premières fissures apparues à 81 KN à l'appui central et à 103.5 KN en travée. La première fissure oblique inclinée à 30° par rapport à la verticale est apparue au septième pas et elle est distante de 47 cm de l'appui de rive.

A l'appui, la fissure oblique est apparue au quatrième pas avec une inclinaison de 15°.

La rupture a eu lieu à l'appui central avec une inclinaison de 25°.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 11.62 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = - 1.24 \% \quad m_c = 0.916$$

e) Série CI

i) Poutre CI 1

Premières fissures apparues sous charges extrêmes à 43.5 KN.

La rupture s'est faite de manière oblique à l'appui central.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 9.35 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = - 4.56 \% \quad m_c = 0.970$$

ii) Poutre CI 2

Premières fissures apparues en travée à 43.5 KN.

Rupture par cisaillement à l'appui central avec de grandes fissures parallèles.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 14.07 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = - 2.28 \% \quad m_c = 0.920$$

RECAPITULATIF DE QUELQUES RESULTATS EXPERIMENTAUX  
SERIES ELASTO CONFORMES

## SERIE A I

POUTRE A I 1					POUTRE A I 2				
Quth KN	Quexp KN	$\delta$	Qifis KN	mf %	Quth KN	Quexp KN	$\delta$	Qifis KN	mf %
224.4	253.5	1.130	66	26.03	224.4	295.5	1.317	93	31.47

Quth = 224.4 KN

Quexp m = 274.5 KN

m = 1.223

Qifis m = 79.5 KN

mf m = 29.0 %

## SERIE B I

POUTRE B I 1					POUTRE B I 2				
Quth KN	Quexp KN	$\delta$	Qifis KN	mf %	Quth KN	Quexp KN	$\delta$	Qifis KN	mf %
224.4	262.5	1.176	51	19.00	224.4	247	1.10	51	20.70

Quth m = 224.4 KN

Quexp m = 254.75 KN

m = 1.138

Qifis m = 51 KN

mf m = 19.82 %

## SERIE C I

POUTRE C I 1					POUTRE C I 2				
Quth KN	Quexp KN	$\delta$	Qifis KN	mf %	Quth KN	Quexp KN	$\delta$	Qifis KN	mf %
224.4	253.5	1.1297	43.5	17.16	224.4	226.5	1.009	43.5	19.20

Quth m = 224.4 KN

Quexp m = 240 KN

m = 1.069

Qifis m = 43.5 KN

mf m = 18.10 %

RECAPITULATIF DE QUELQUES RESULTATS EXPERIMENTAUX  
SERIES ELASTO NON CONFORMES

## SERIE A II

POUTRE A II 1					POUTRE A II 2				
Q <sub>uth</sub> KN	Q <sub>exp</sub> KN	$\delta$	Q <sub>1fis</sub> KN	mf %	Q <sub>uth</sub> KN	Q <sub>exp</sub> KN	$\delta$	Q <sub>1fis</sub> KN	mf %
269.3	291	1.081	96	32.99	269.3	336	1.248	58.5	17.00

Q<sub>uth</sub> m = 269.3 KN      Q<sub>exp</sub> m = 317.21 KN      m = 1.1645  
Q<sub>1fis</sub> m = 77.25 KN      mf m = 24.35 %

## SERIE B II

POUTRE B II 1					POUTRE B II 2				
Q <sub>uth</sub> KN	Q <sub>exp</sub> KN	$\delta$	Q <sub>1fis</sub> KN	mf %	Q <sub>uth</sub> KN	Q <sub>exp</sub> KN	$\delta$	Q <sub>1fis</sub> KN	mf %
269.3	298.5	1.108	96	32.20	269.3	268.5	0.997	81	30.17

Q<sub>uth</sub> m = 269.3 KN      Q<sub>exp</sub> m = 283.5 KN      m = 1.053  
Q<sub>1fis</sub> m = 88.5 KN      mf m = 31.22 %

## SERIE C II

POUTRE C II 1					POUTRE C II 2				
Q <sub>uth</sub> KN	Q <sub>exp</sub> KN	$\delta$	Q <sub>1fis</sub> KN	mf %	Q <sub>uth</sub> KN	Q <sub>exp</sub> KN	$\delta$	Q <sub>1fis</sub> KN	mf %
269.3	283.5	1.053	73.5	25.93	269.3	247.5	0.919	73.5	29.70

Q<sub>uth</sub> m = 269.3 KN      Q<sub>exp</sub> m = 265.5 KN      m = 0.986  
Q<sub>1fis</sub> m = 73.5 KN      mf m = 27.68 %

## RESULTATS DE MESURE : SERIES ELASTO - CONFORMES

Série	Quexp moyen (KN)	mc	Q (KN)	a (mm)	$\varphi_0 \cdot 10^6$ (rd)	R <sub>Bexp</sub> (KN)
A I	274.5	0.60	164.7	1.90	53	107
		0.70	192.15	2.50	73	126
		0.80	219.6	3.20	100	144
		0.90	247.05	4.40	136	162
		0.95	260.775	5.20	162	173

B I	254.75	0.60	152.85	2.00	67	99.40
		0.70	178.325	2.60	85	117
		0.80	203.8	3.30	104	33.7
		0.90	229.27	4.45	132	153.3
		0.95	242.01	5.25	160	160.50

C I	240	0.60	144	2.60	72	93.60
		0.70	168	3.30	92	110.40
		0.80	192	4.15	120	126
		0.90	216	5.45	165	141.60
		0.95	228	6.25	190	151.20

RESULTATS DE MESURE : SERIES ELASTO NON CONFORMES

TABEAU 6.4

Série	Qexp (KN)	mc	Q (KN)	a (mm)	$\phi \cdot 10^6$ (rc)	R <sub>Bexp</sub> (KN)	R <sub>Bel</sub> (KN)	R <sub>Bexp</sub> (KN)	R <sub>Bel</sub> (KN)
A II	317.25	0.60	190.35	2.00	64	117	128.67	0.909	
		0.70	222.75	2.70	80	133.5	150.58	0.9893	
		0.80	253.80	3.55	99	157	171.57	0.9151	
		0.90	285.525	4.85	126	173	193.01	0.8963	
		0.95	301.387	6.30	145	184	203.74	0.903	
B II	283.50	0.60	170.10	1.95	56	104.9	114.99	0.9123	
		0.70	198.45	2.60	71	120.6	134.15	0.89.90	
		0.80	226.80	3.30	90	140.3	153.32	0.9151	
		0.90	255.15	4.45	115	154.5	172.48	0.8957	
		0.95	269.325	5.15	139	164.4	182.06	0.9030	
C II	265.60	0.60	159.36	2.60	83	98.23	107.73	0.9118	
		0.70	185.92	3.30	103	113.5	125.68	0.9031	
		0.80	212.48	4.10	125	131.4	143.64	0.9148	
		0.90	239.04	5.25	156	144.7	161.59	0.8955	
		0.95	252.32	6.00	190	154	170.57	0.9029	

## f) Série CII

## i) Poutre CII 1

Premières fissures apparues à l'appui central à 73.5 KN et en travée à 81 KN.  
La rupture s'est faite au niveau de l'appui central, le tranchant l'emporte.  
On a deux fissures parallèles avec grande ouverture.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 17.39 \% \quad m_c = 0.921$$

## ii) Poutre CII 2

Premières fissures apparues à 73.5 KN à l'appui central sur les deux faces.  
Rupture prématurée sous la deuxième charge. Le tranchant l'emporte.

$$\varepsilon_{\text{amax}} = 16.4 \% \quad \varepsilon_{\text{bmax}} = - 3.12 \% \quad m_c = 0.994$$

## 6.2 - Comparaison avec les résultats théoriques

## 6.2.1 - Capacité portante

- Les résultats expérimentaux donnent des valeurs plus grandes que celles obtenues théoriquement (à l'exception de la série CII). Voir tableaux 6.1 et 6.2).

Les valeurs de  $\delta = Q_{\text{exp}}/Q_{\text{theorique}}$  varient de :

- pour les séries élasto-conformes : 1.069 à 1.223  $\delta_m = 1.143$
- pour les séries élasto non conformes : 0.986 à 1.164  $\delta_m = 1.068$

L'expérience nous démontre donc qu'indépendamment de la disposition de l'armature et de la qualité du béton, la sécurité effective est plus grande que celle prise en compte dans les bureaux d'étude.

Ce coefficient croît avec la qualité du béton indépendamment de la disposition de l'armature (voir fig. 6.1)

- Nous pouvons mettre en évidence l'influence de la qualité du béton dans le tableau ci-dessous où nous donnons les valeurs des rapports de la capacité portante et de la charge admissible entre le béton faible et les bétons fort et moyen.

Tableau 6.8

	E - C		E - N - C	
	C1/A1	C1/B1	CII/AII	CII/BII
$Q_u$	0,8743	0,9421	0,8372	0,9368
$Q_{\text{adm}}$	0,9890	0,9860	0,9970	0,9870

La capacité portante varie sensiblement en fonction de la qualité du béton. Pour la série élasto-conforme, les rapports entre béton faible et bétons fort et moyen varient de - 12.6 % à - 5.8 % ; pour la série élasto non conforme, ces mêmes rapports varient de - 16.3 % à - 6.3 %.

Le rôle du béton pour le calcul élastique n'est donc pas grand. C'est la disposition de l'armature qui joue un rôle prépondérant.

#### 6.2.2 - Déformations

- La dispersion des déformations pour chaque série de poutres déterminée expérimentalement, ainsi que la ligne moyenne des flèches calculées d'après la théorie de la dégradation continue de la rigidité, nous montrent le caractère asymptotique d'évolution des flèches à mi-travée et des rotations à l'appui de rive sous l'effet de charges avancées (fig. 6.2, 6.3, ..... , 6.7)

- Les déformations expérimentales pour des taux de sollicitation voisins de l'unité, sont moins importantes que celles déterminées théoriquement et ce à partir d'un avancement de charges variant de :

. pour les flèches à mi-travée

	AI	BI	CI	AII	BII	CII
mc	0.82	0.78	0.73	0.74	0.70	0.63

. pour les rotations de l'appui de rive

	AI	BI	CI	AII	BII	CII
mc	0.87	0.82	0.70	0.73		0.69

- Les méthodes de déformations du CEB et de BRANSON sont suffisamment exactes pour les états d'exploitation ( $mc = 0.4 \div 0.6$ ) mais ne décrivent pas suffisamment l'état pour des charges fortement avancées (proches de la ruine) tandis que la méthode continue de KUCZYNSKI est suffisamment exacte pour ce point là.

- Le modèle rigide plastique des poutres en béton armé s'est montré suffisamment adéquat pour le comportement final à partir de  $mc > 0.9$  des poutres continues ce qui a été confirmé par les essais. En effet, d'après nos essais, nous avons constaté que la formation de rotules plastiques est aléatoire. La rotule commence toujours à apparaître dans les sections critiques (3, 3' et 8) mais finalement, on constate la formation de rotules plastiques prévues pour le modèle théorique pris en compte dans notre analyse. La rotule plastique se manifeste par de grandes ouvertures de fissures dans les sections critiques pour des degrés de chargement compris entre 0.8 et 0.9.

- L'influence de T est parfois constatée d'après les caractères de fissuration (fissures inclinées). Elle n'a pas d'impact sur la valeur finale de la capacité portante excepté pour le cas du béton faible.

### 6.2.3 - Redistribution

- L'analyse de la redistribution des efforts internes (fig. 6-8a, 6-8b, 6-8c ; 6-9 a, 6-9b, 6-9c) nous conduit à la conclusion suivante : au début de la charge, pour  $mc < 0.3$  le comportement des poutres en béton armé reste presque élastique ; au-delà de 0.60, la redistribution est non linéaire (pas de proportionnalité élastique) ; enfin, à l'état limite ultime, la redistribution est exprimée par le modèle rigide plastique.

- L'analyse du taux de comportement des sections critiques (3, 3' et 8) (tableau 5-10) nous conduit à la conclusion suivante : le rapport  $\mu = m_8/m_3$  pour toutes les poutres s'approche de l'unité avec l'augmentation de la charge jusqu'à la ruine.

. pour les séries élasto conformes, ce rapport varie de 0.81 à 0.94 donc tend vers l'unité par valeurs inférieures ( $\mu < 1$ )

. pour les séries élasto non conformes, il varie de 1.463 à 1.043 donc tend vers 1 par valeurs supérieures ( $\mu > 1$ )

- La comparaison des résultats de redistribution avec les valeurs élastiques (tableaux 6-6 et 6-7) nous permet d'aboutir au fait que : la redistribution est plus importante pour les séries élasto non conformes que pour les séries élasto conformes

- pour les séries élasto conformes, les éléments de réduction (M) sont proches de la solution élastique ( $M_{3red}''$  tend vers  $M_{3el}$  par valeurs supérieures et  $M_{8red}$  tend vers  $M_{8el}$  par valeurs inférieures)
- pour les séries élasto non conformes, la redistribution s'éloigne de la solution élastique aussi bien en travée (par valeurs supérieures) qu'en appui (par valeurs inférieures).

- Le cas des poutres élasto conformes est assez rare dans la pratique car nous avons un seul schéma de charges. Nous nous servons de la courbe enveloppe des moments pour déterminer l'armature, qui englobe tous les cas de charges possibles. Mais pour chaque cas de charges, on se trouve dans le cas de poutres non conformes. Les conclusions de nos essais seront donc plus générales pour les poutres hyperstatiques en pratique.

- Nous avons analysé la sécurité théorique  $s_{th} = Q_{uth}/Q_{adm}$  (tableau 6-5)  
Elle varie pour les séries élasto conformes de 1.474 (AI) à 1.494 (CI)  
moyenne : 1.482 et pour les séries élasto non conformes, de 2.550 (AII) à 2.587 (CII)  
moyenne : 2.566.

Ce sont les valeurs qui intéressent l'ingénieur au bureau d'étude car aussi bien  $Q_u$  que  $Q_{adm}$  sont calculés théoriquement.

TABLEAU 6.5

N° Poutre	$Q_{adm}$	$Q_{uth}$	$Q_{uexp}$	$\frac{Q_{uexp}}{Q_{uth}}$	$\frac{Q_{uth}}{Q_{adm}}$	$\frac{Q_{uexp}}{Q_{adm}}$	$\bar{S}_r$
AI 1	15,22	22,44	25,35	1,130	1,474	1,666	1,803
AI 2	15,22	22,44	29,55	1,317	1,474	1,941	
BI 1	15,17	22,44	26,25	1,170	1,479	1,730	1,679
BI 2	15,17	22,44	24,70	1,101	1,479	1,628	
CI 1	15,02	22,44	25,35	1,130	1,494	1,687	1,597
CI 2	15,02	22,44	22,65	1,009	1,494	1,508	

AII 1	10,56	26,93	29,10	1,081	2,550	2,756	2,969
AII 2	10,56	26,93	33,60	1,248	2,550	3,182	
BII 1	10,52	26,93	29,85	1,108	2,560	2,387	2,469
BII 2	10,52	26,93	26,85	0,997	2,560	2,552	
CII 1	10,41	26,93	28,35	1,054	2,587	2,723	2,550
CII 2	10,41	26,93	24,75	0,919	2,587	2,377	

$\frac{Q_{uexp}}{Q_{uth}}$  = sécurité supplémentaire

$\frac{Q_{uexp}}{Q_{adm}}$  = sécurité réelle

$\frac{Q_{uth}}{Q_{adm}}$  = sécurité théorique

$\bar{S}_r$  = Moyenne arithmétique de la sécurité réelle pour deux échantillons

TABLEAU 6.6  
TABLEAU DE REDISTRIBUTION DES EFFORTS INTERNES - SERIES ELASTO- CONFORMES

Série	QU (KN)	M3Redis (KN m)	M5Redis (KN m)	M8Redis (KN m)	Q (KN)	mc	$\alpha$	M3Elas (KN m)	M5Elas (KN m)	M8Elas (KN m)	$\frac{M3Redis}{M3Elas}$	$\frac{M8Redis}{M8Elas}$
A I	274.5	21.690	14.890	-27.000	170.19	0.620	0.5545	20.763	13.275	29.953	1.0446	0.9014
		28.425	19.075	-37.400	226.400	0.825	0.6622	27.621	17.659	39.846	1.0291	0.9386
		29.850	19.750	-40.400	240.302	0.874	0.6716	29.280	18.720	-42.24	1.0195	0.9564
		31.335	20.385	-43.800	254.72	0.928	0.6824	31.076	19.868	-44.831	1.0083	0.9770
B I	254.75	20.175	13.925	-24.800	155.40	0.610	0.5514	18.958	12.121	-27.350	1.0642	0.9068
		26.175	17.625	-34.200	208	0.816	0.6599	25.376	16.224	-36.608	1.0315	0.9342
		27.900	18.500	-37.600	224	0.879	0.6702	27.328	17.472	-39.424	1.0209	0.9537
		29.457	19.062	-41.500	240.104	0.942	0.6852	29.293	18.728	-42.258	1.0056	0.9821
C I	240	18.975	13.405	-23.200	146.40	0.61	0.5501	17.861	11.419	25.766	1.0624	0.9004
		24.922	16.797	-32.500	197.917	0.825	0.6593	24.156	15.457	-34.833	1.0321	0.9330
		26.775	17.625	-36.600	216	0.900	0.6750	26.352	16.848	-38.016	1.0161	0.9627
		27.397	17.822	-38.300	222.717	0.928	0.6824	27.171	17.372	-39.198	1.0083	0.9771

$$mc = Q/QU$$

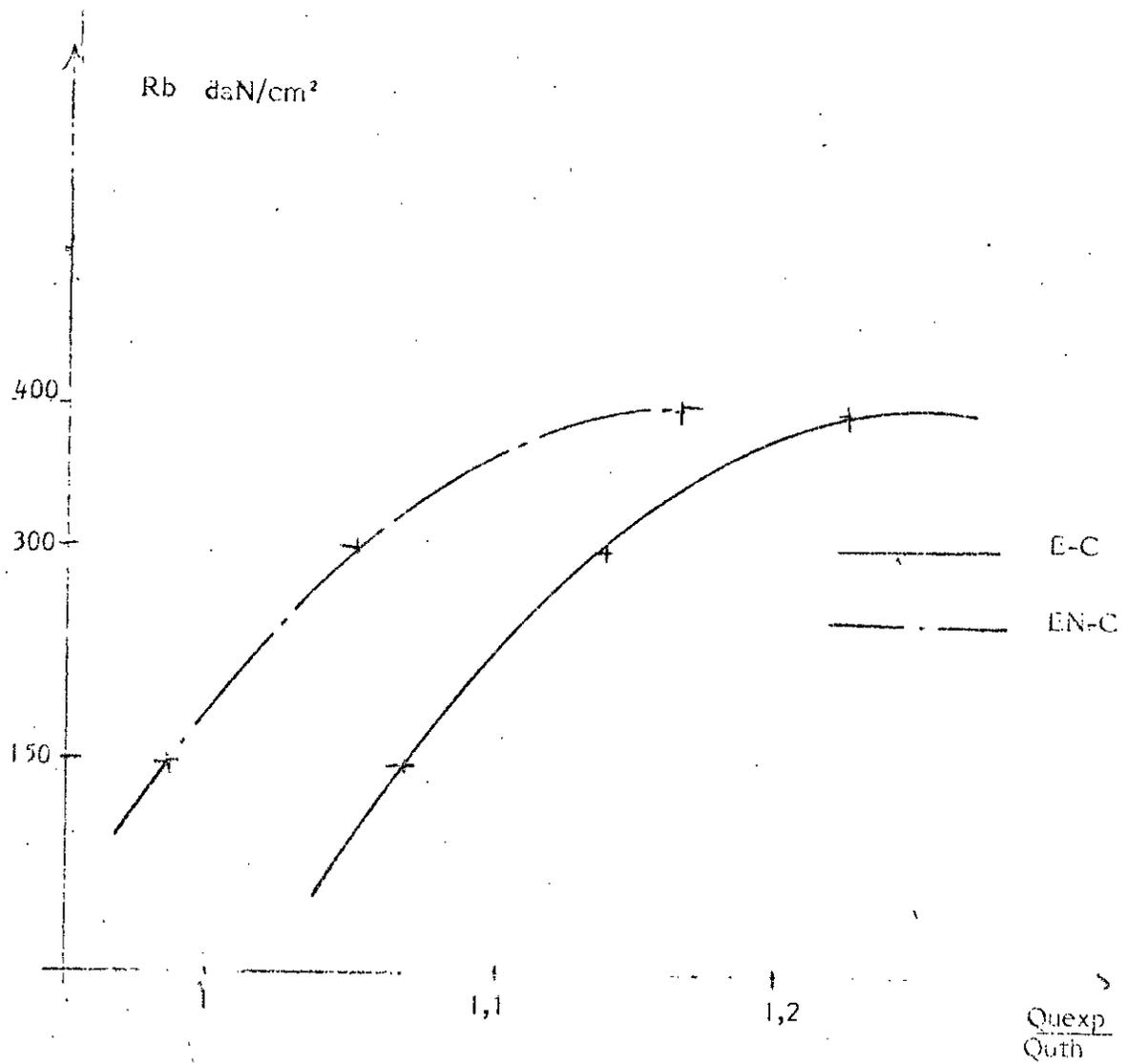
$$\alpha = M8/M8 + M5$$

$$Q = 4 (4/3 M3 + 1/2 M8)$$

TABLEAU 6.7  
TABLEAU DE REDISTRIBUTION DES EFFORTS INTERNES  
SERIES ELASTO NON CONFORMES

Séries	QU (KN)	M3redis (KN m)	M5redis (KN m)	M8redis KN m	Q (KN)	mc	$\alpha$	M3elas (KN m)	M5elas (KN m)	M8elas (KN m)	M3redis/ M3 elas	M8redis/ M8 elas
A II	317.25	26.172	20.160	-24.050	190.35	0.60	0.5440	23.223	14.847	33.502	1.1270	0.7179
		27.795	21.525	-25.008	198.256	0.625	0.5374	24.187	15.464	-34.893	1.1492	0.7167
		36.519	29.466	-28.215	251.198	0.792	0.4892	30.646	19.593	44.211	1.1916	0.6382
		42.831	35.386	-29.782	287.996	0.908	0.4570	35.135	22.464	50.687	1.2390	0.5876
B II	283.50	23.700	18.300	-21.650	170.100	0.600	0.5419	20.752	13.268	29.938	1.1420	0.7232
		25.387	19.712	-22.700	180.797	0.638	0.5352	22.057	14.102	31.820	1.1510	0.7134
		33.328	26.947	-25.524	228.797	0.807	0.4864	27.913	17.846	40.268	1.1940	0.6338
		38.697	31.962	-26.940	260.264	0.918	0.4574	31.752	20.301	-45.806	1.2187	0.5881
C II	265.50	21.229	16.051	-20.685	159.30	0.60	0.5631	19.435	12.425	-28.037	1.0923	0.7378
		22.035	16.725	-29.240	160	0.603	0.5595	19.52	12.48	-28.160	1.1288	0.7543
		29.439	23.455	-23.995	204.798	0.771	0.5045	24.985	15.974	-36.044	1.1782	0.6629
		35.241	28.936	-25.222	238.396	0.898	0.4657	29.084	18.595	-41.958	1.2117	0.6011

Figure 6.1 -  $\frac{Q_{exp}}{Q_{uth}}$  en fonction de la catégorie du béton et de la disposition de l'armature



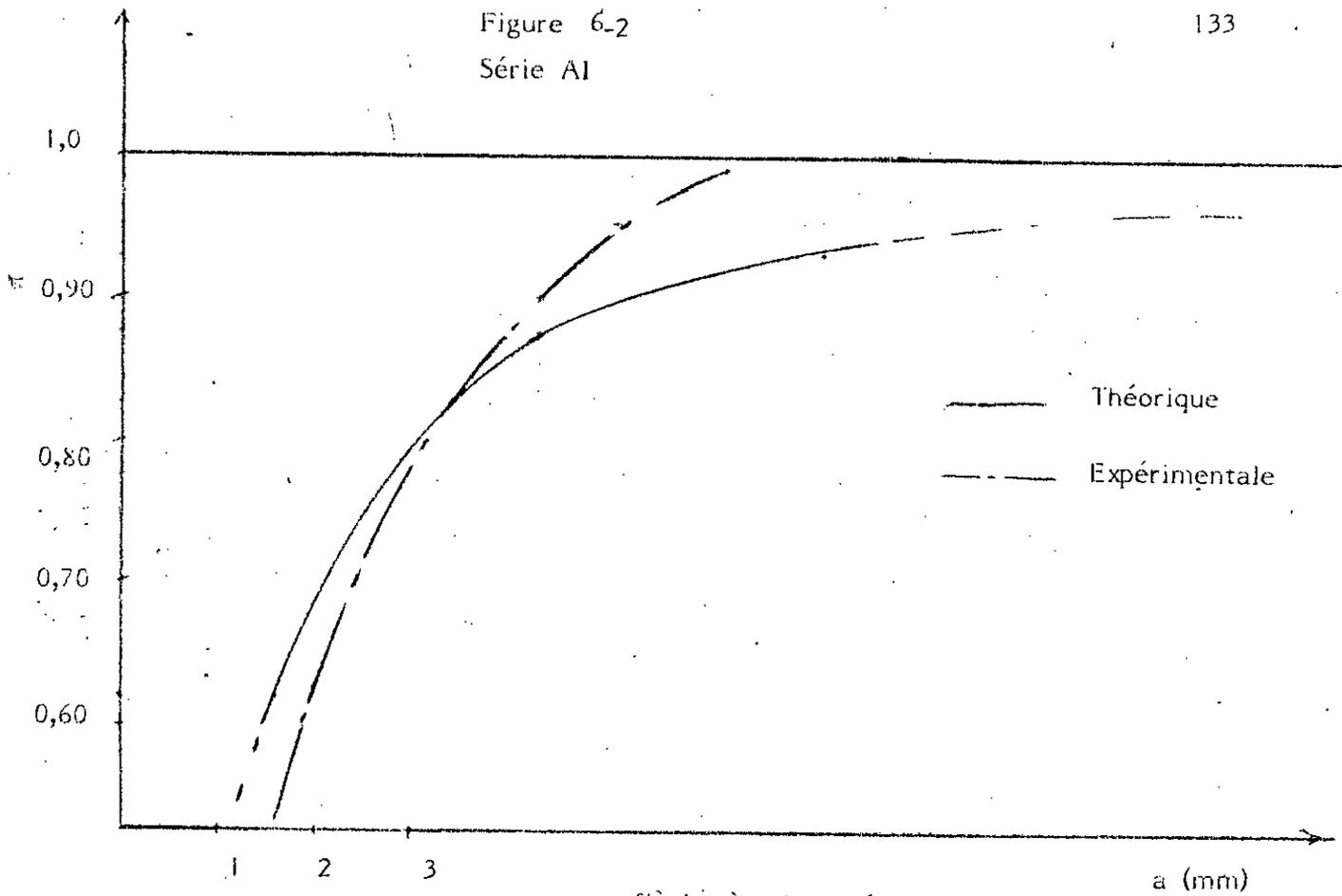


fig. 6-2 a : flèche à mi travée

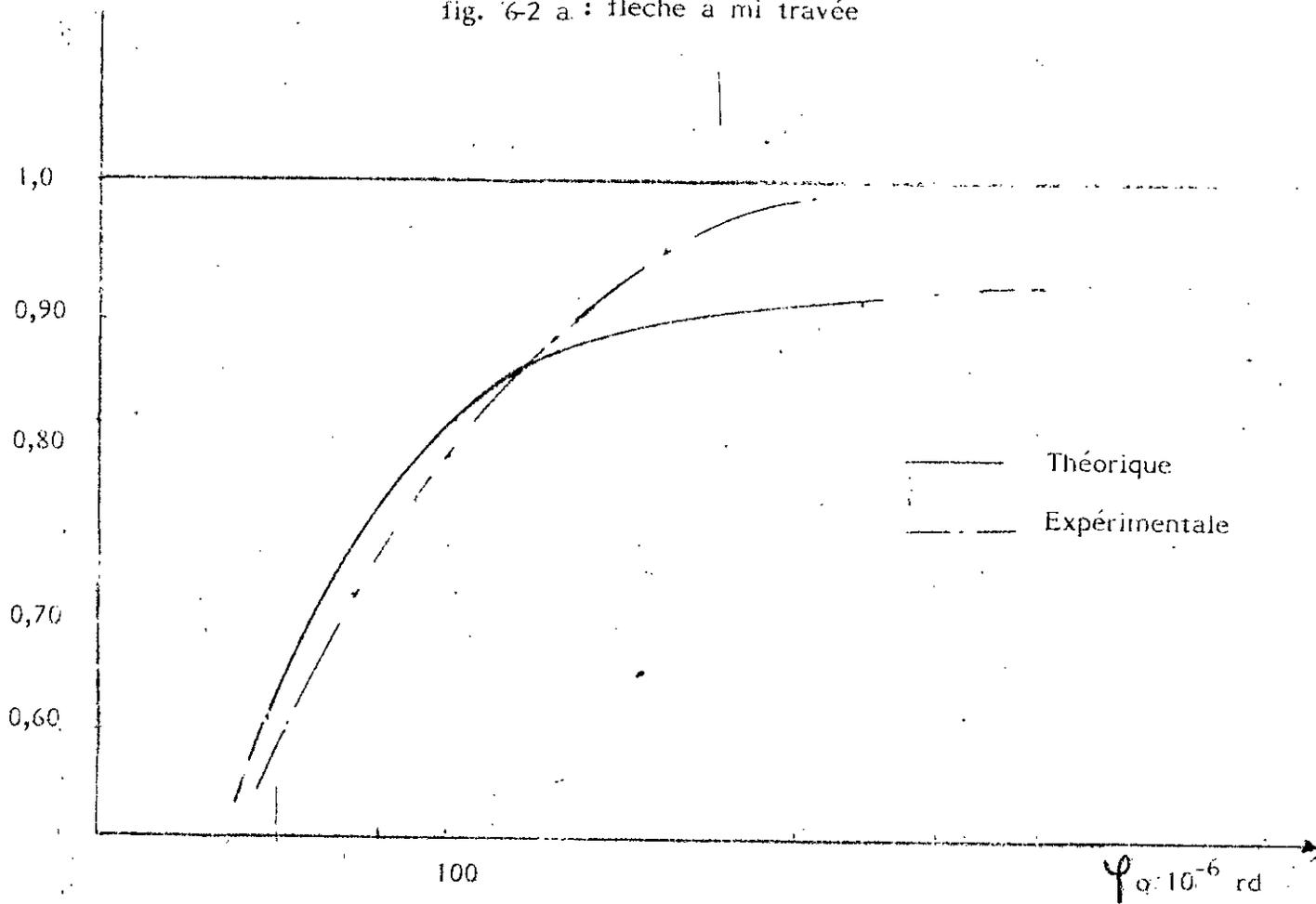


fig 6-2 b : Rotation de l'appui de rive

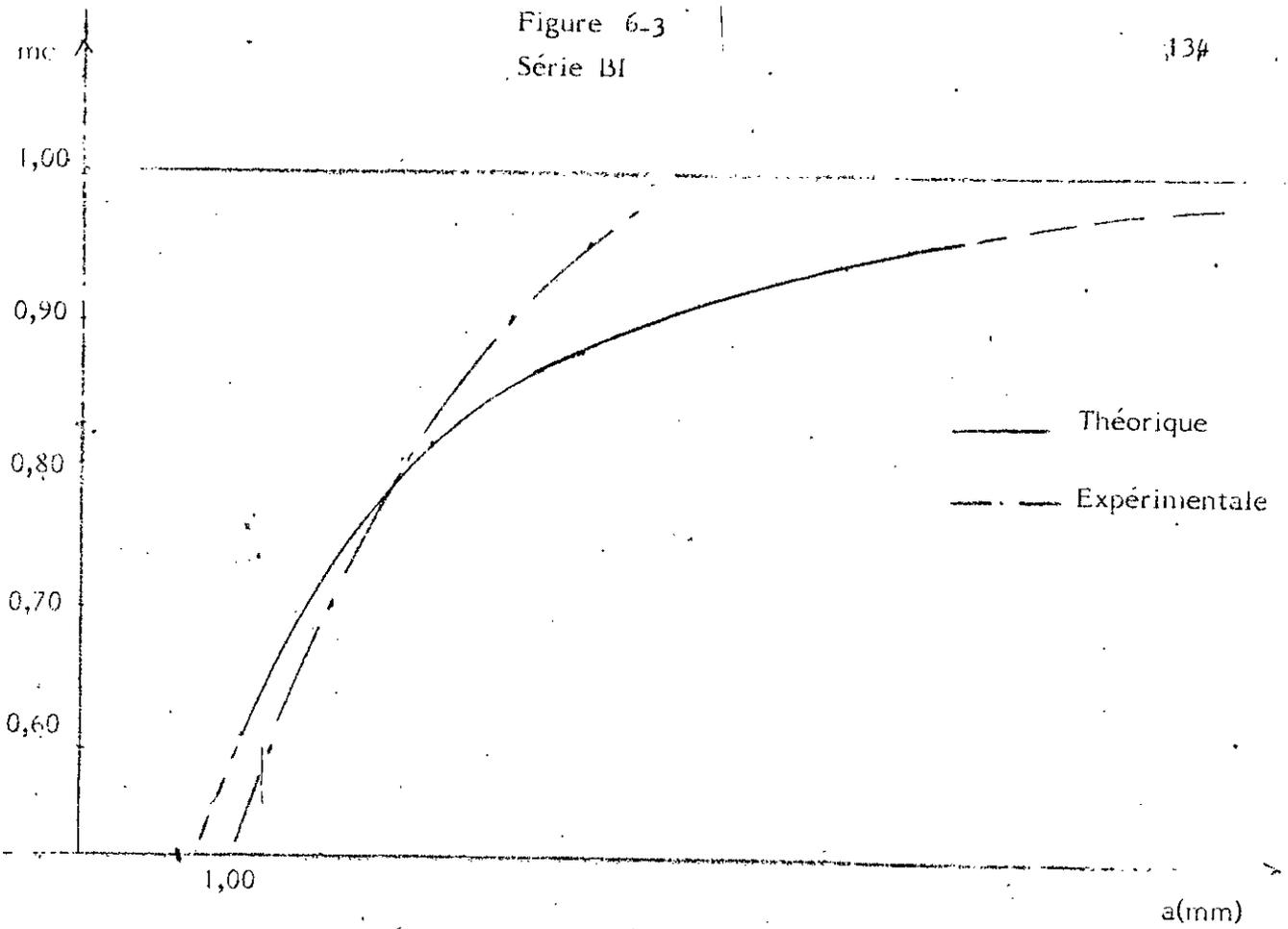


fig. 6-3 a: flèche à mi travée

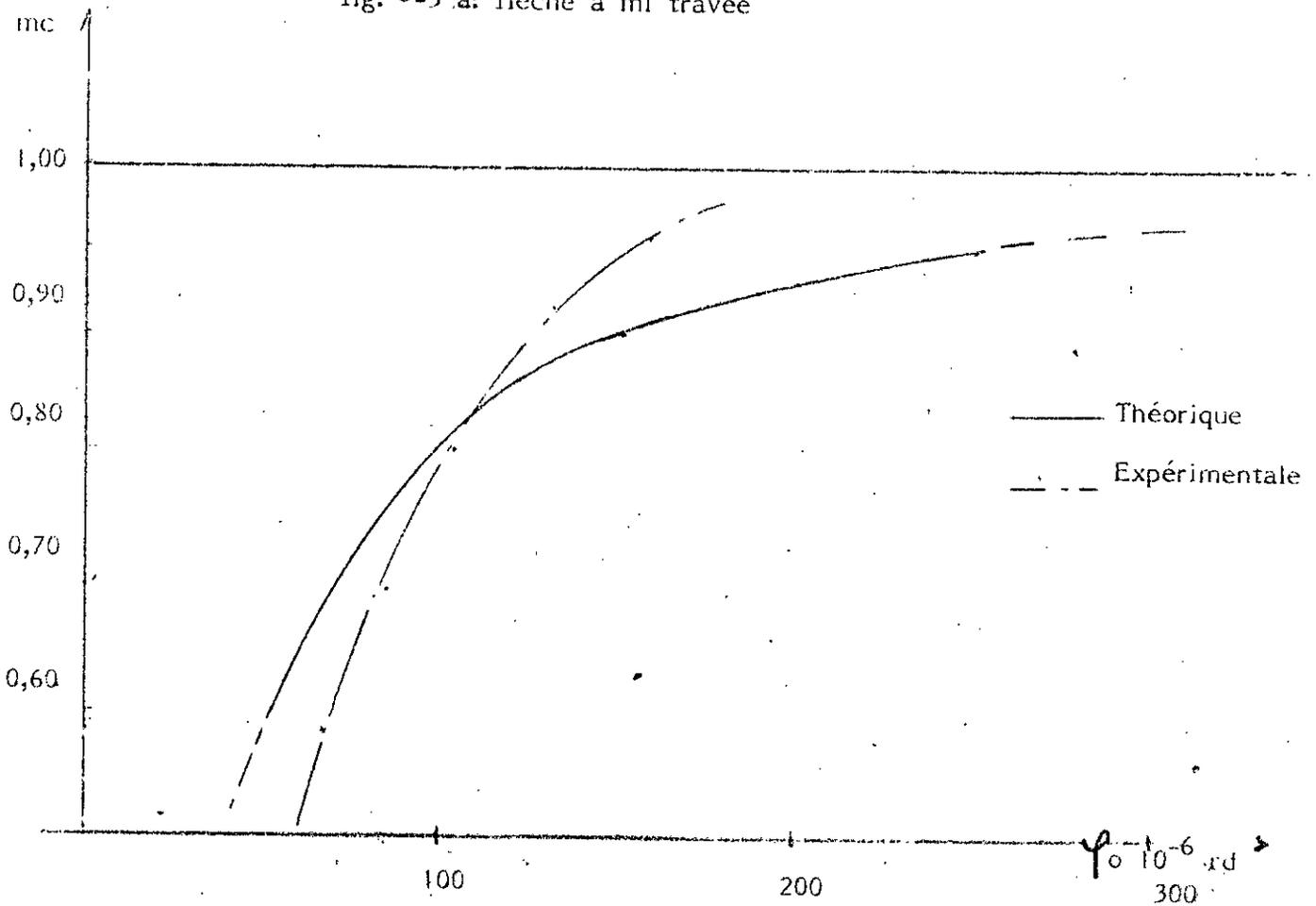


fig. 6-3 b : rotation de l'appui de rive

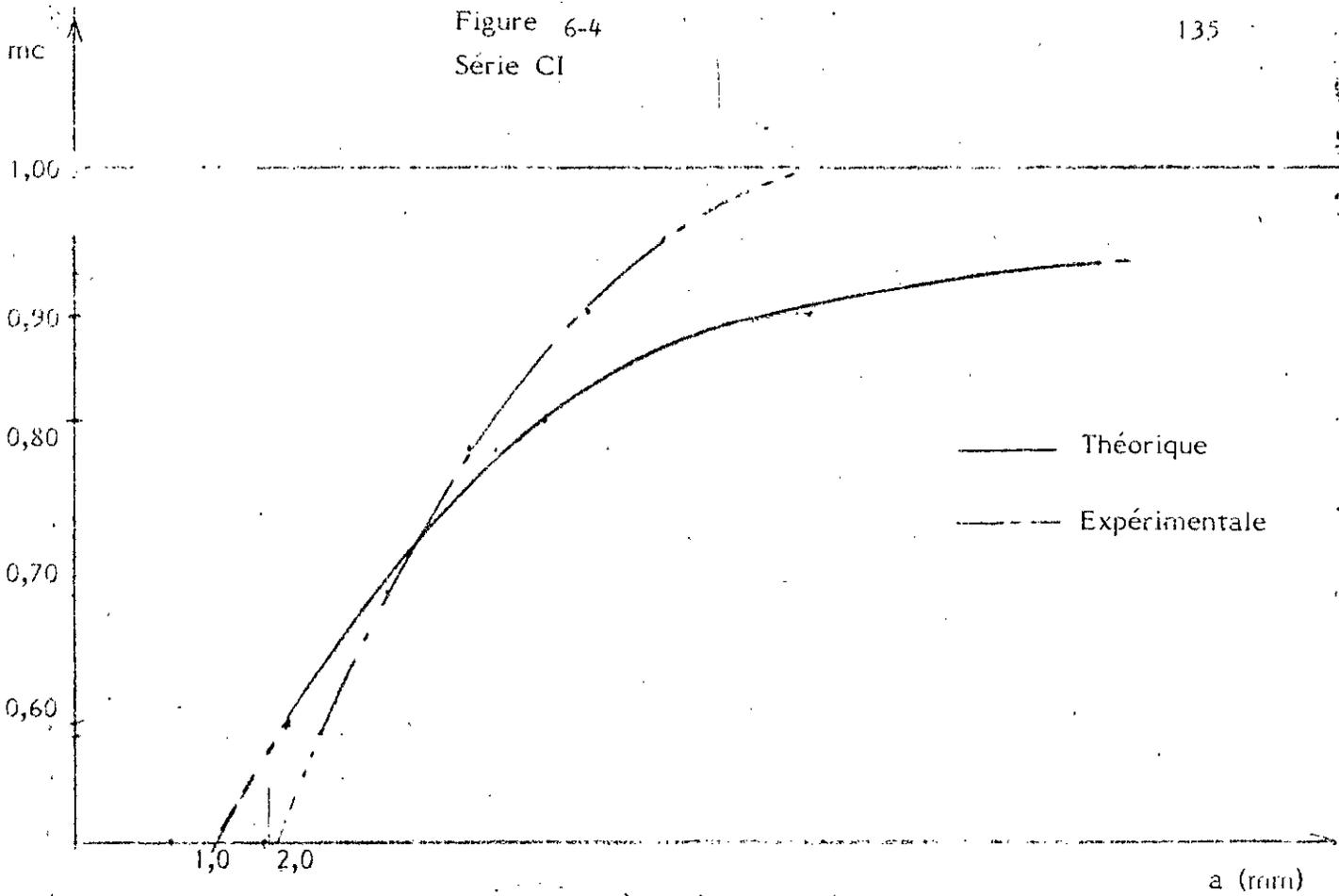


fig. 6-4 a : flèche à mi-travée

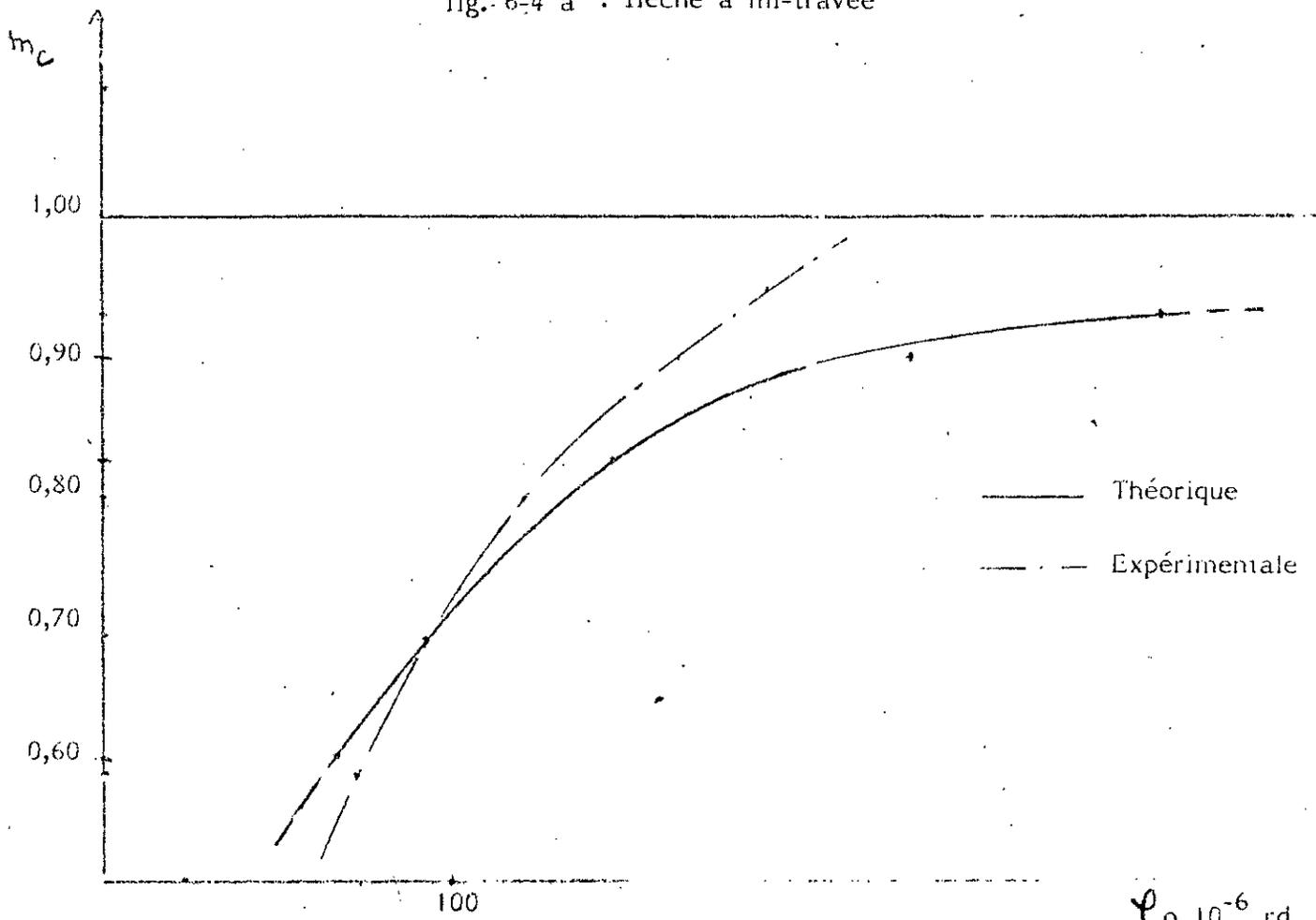


fig. 6-4 b : rotation de l'appui de rive

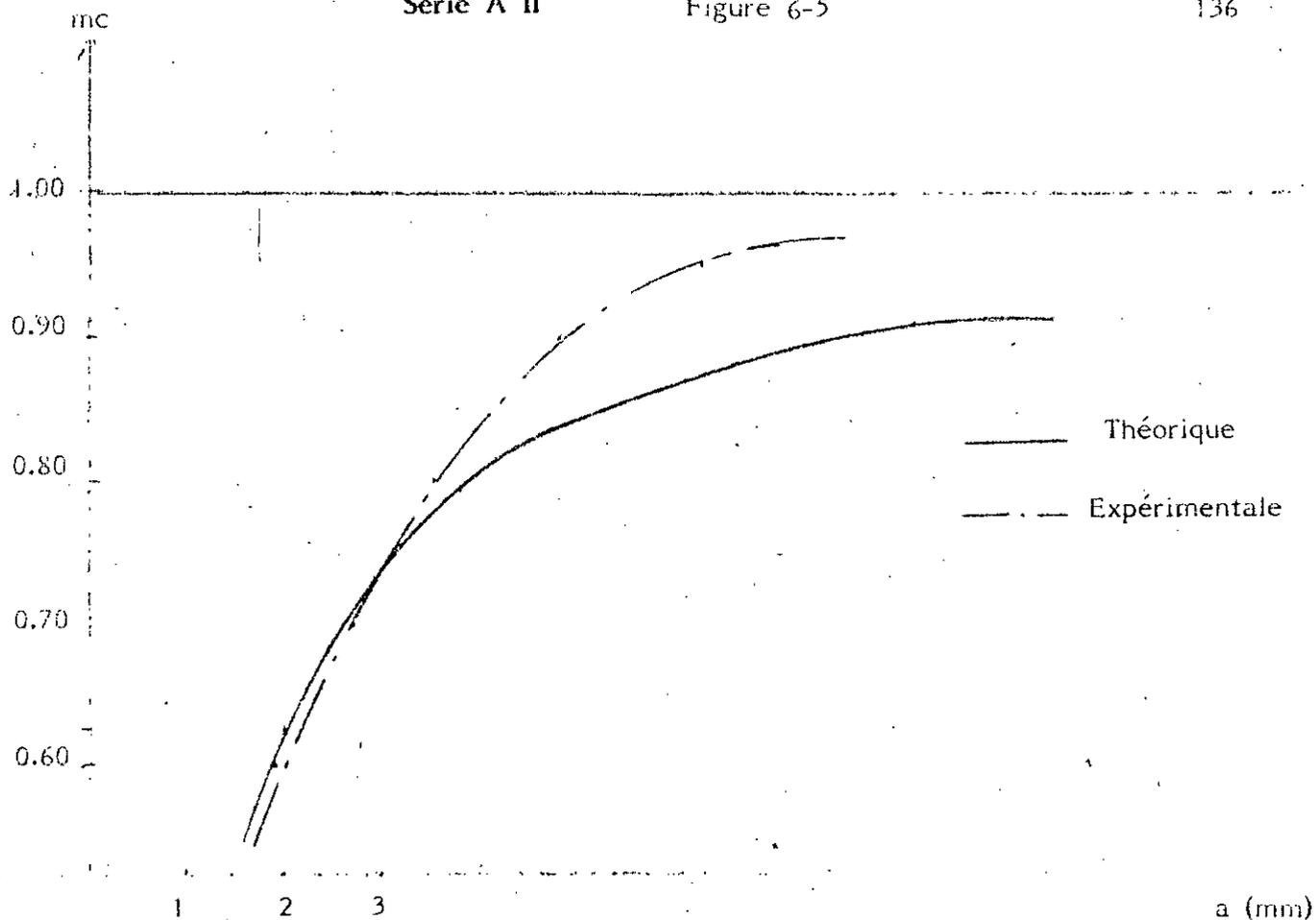


Fig. 6-5 a : flèche à mi-travée

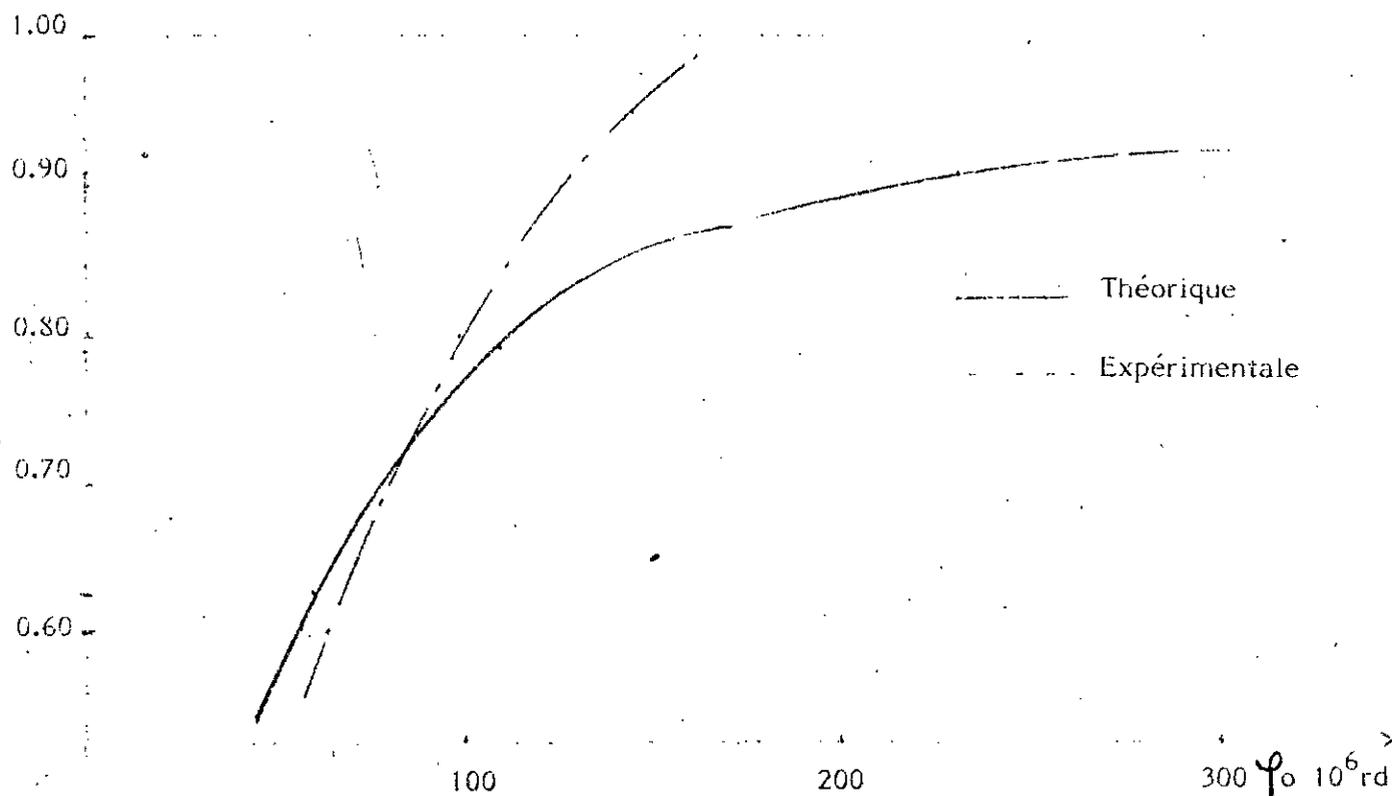


Fig. 6-5 b Rotation de l'appui de rive

Figure 6-6

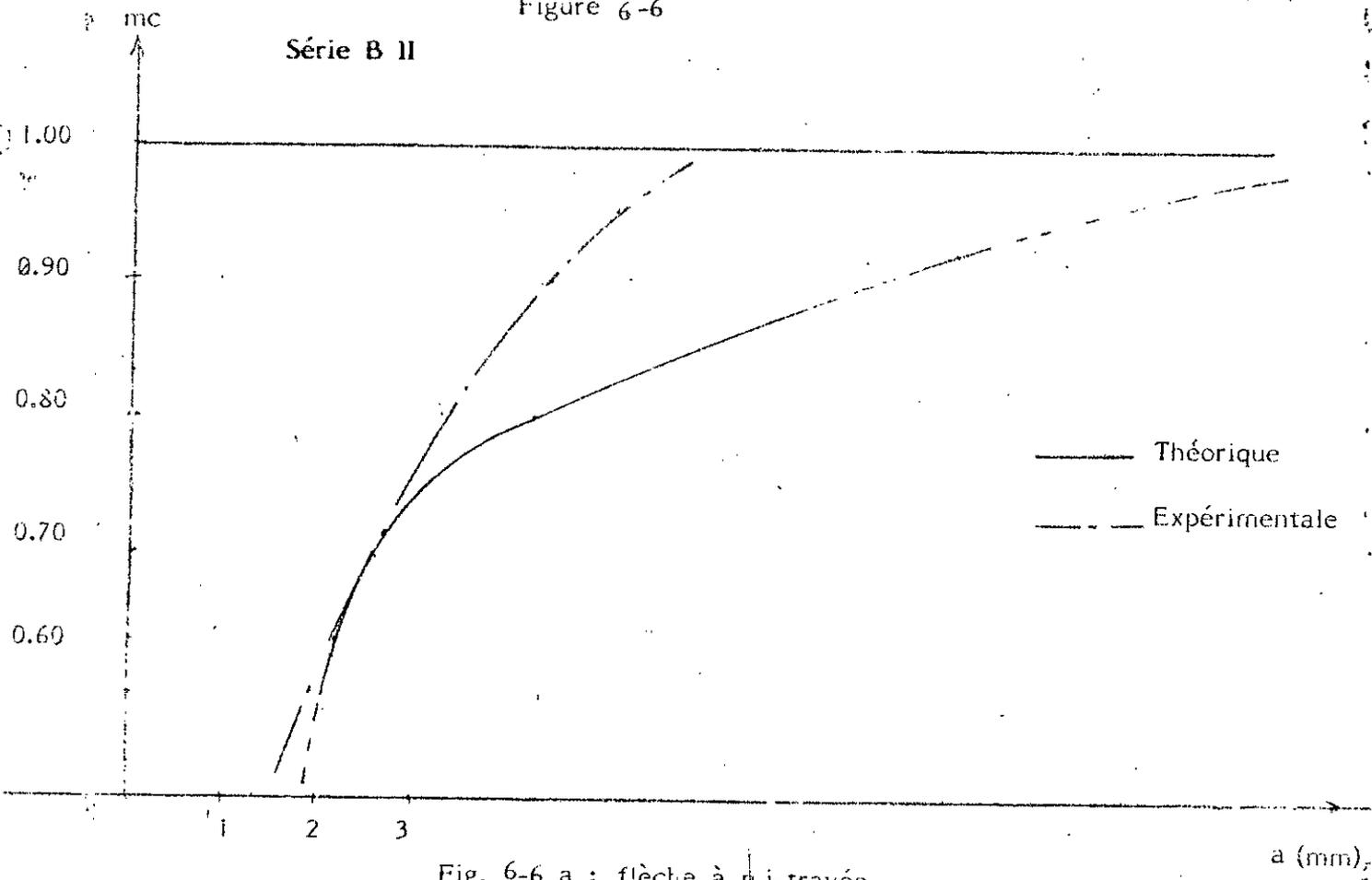


Fig. 6-6 a : flèche à mi-travée

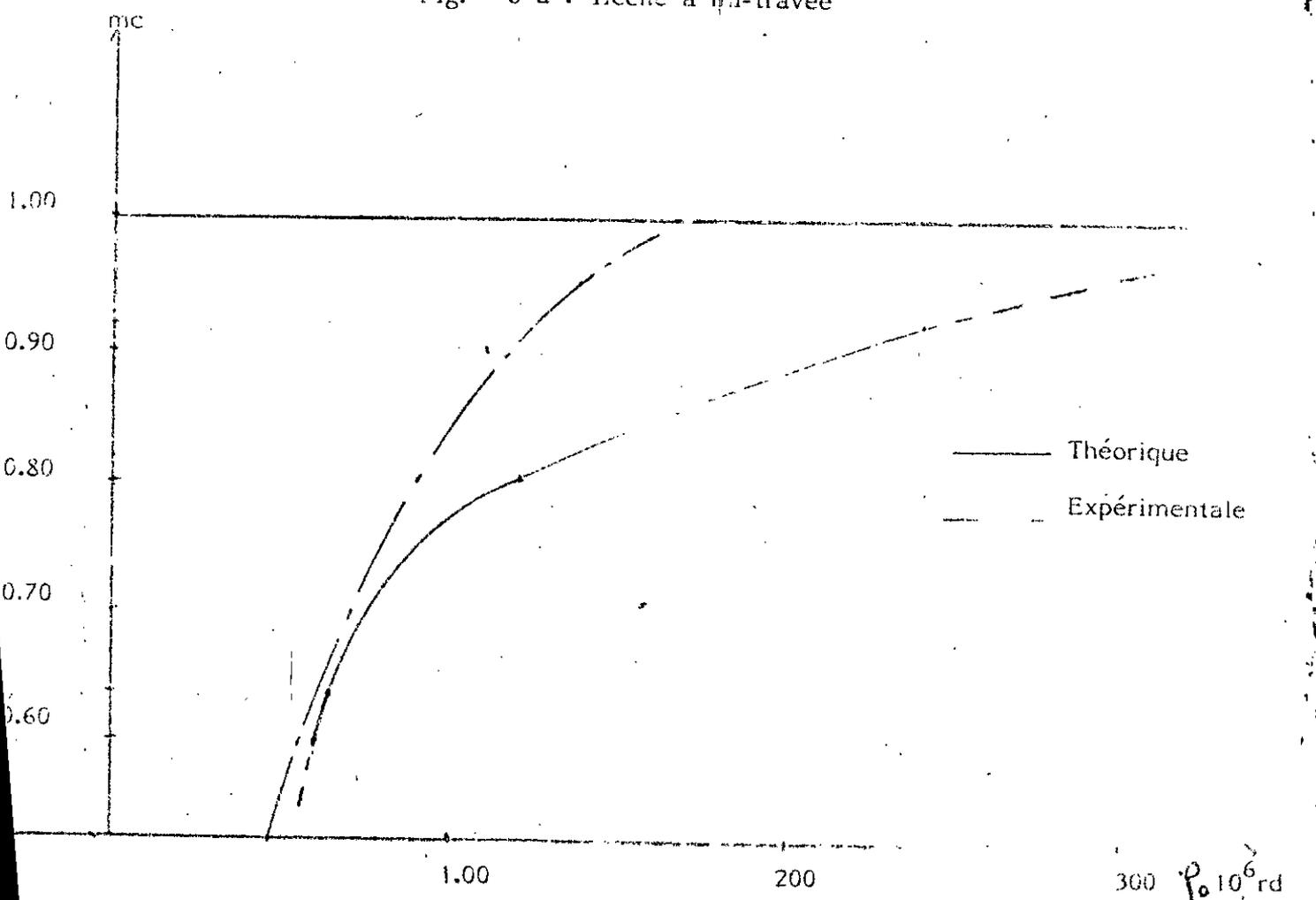


Fig. 6-6 b : Rotation de l'appui de rive

Figure 6-7

mc

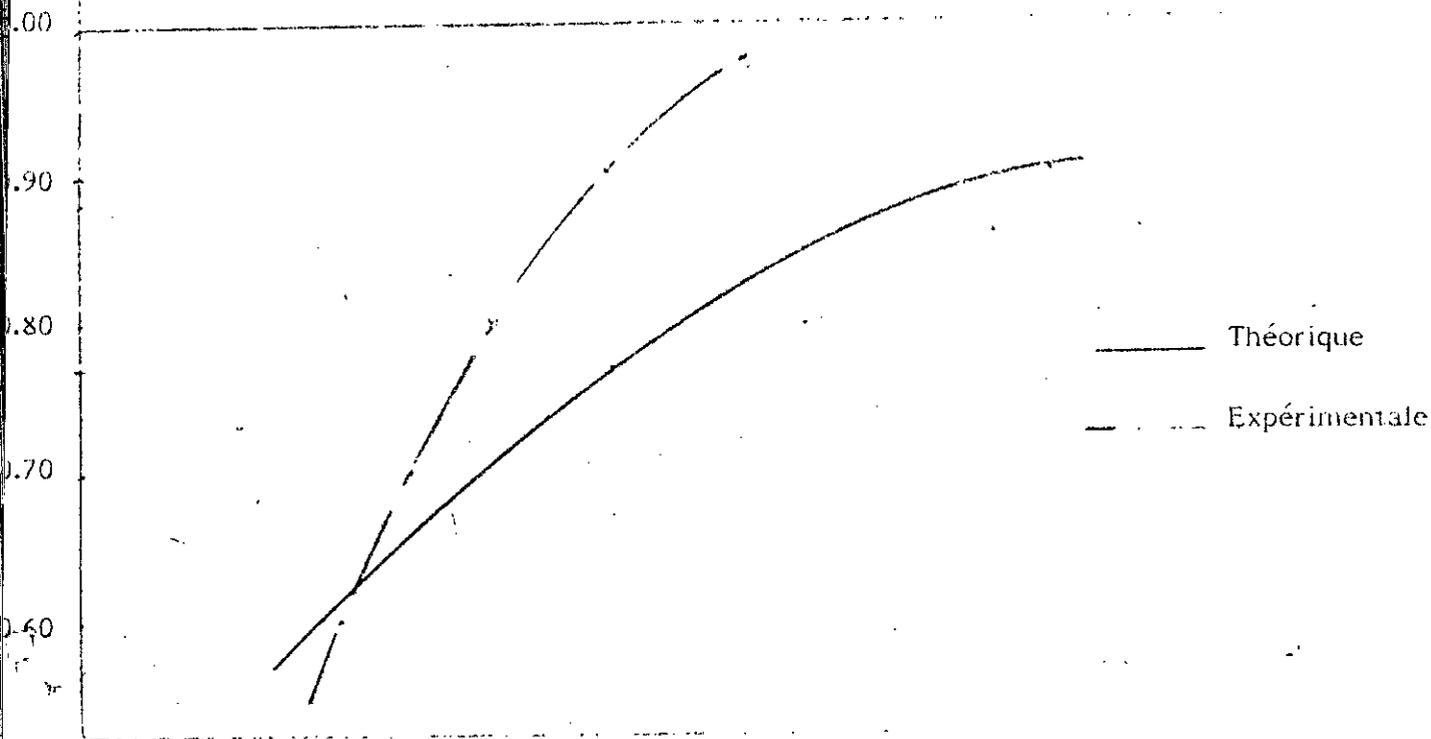


Fig. 6-7 a : Flèche à mi-travée

a (mm)

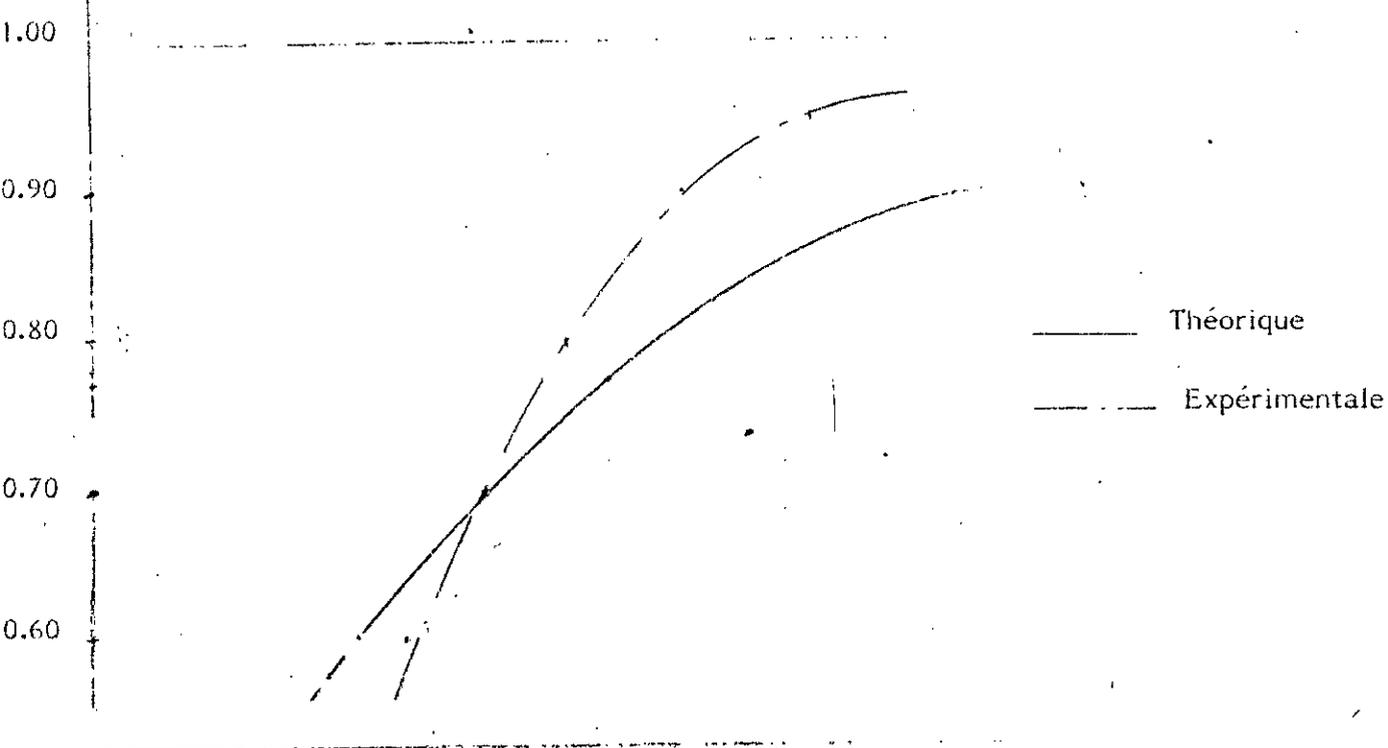


Fig. 6-7 b : Rotation de l'appui de rive

$\psi \cdot 10^6$  rd

Figure 6-8 : Redistribution théorique des efforts internes

Fig. 6-8 a Série A1

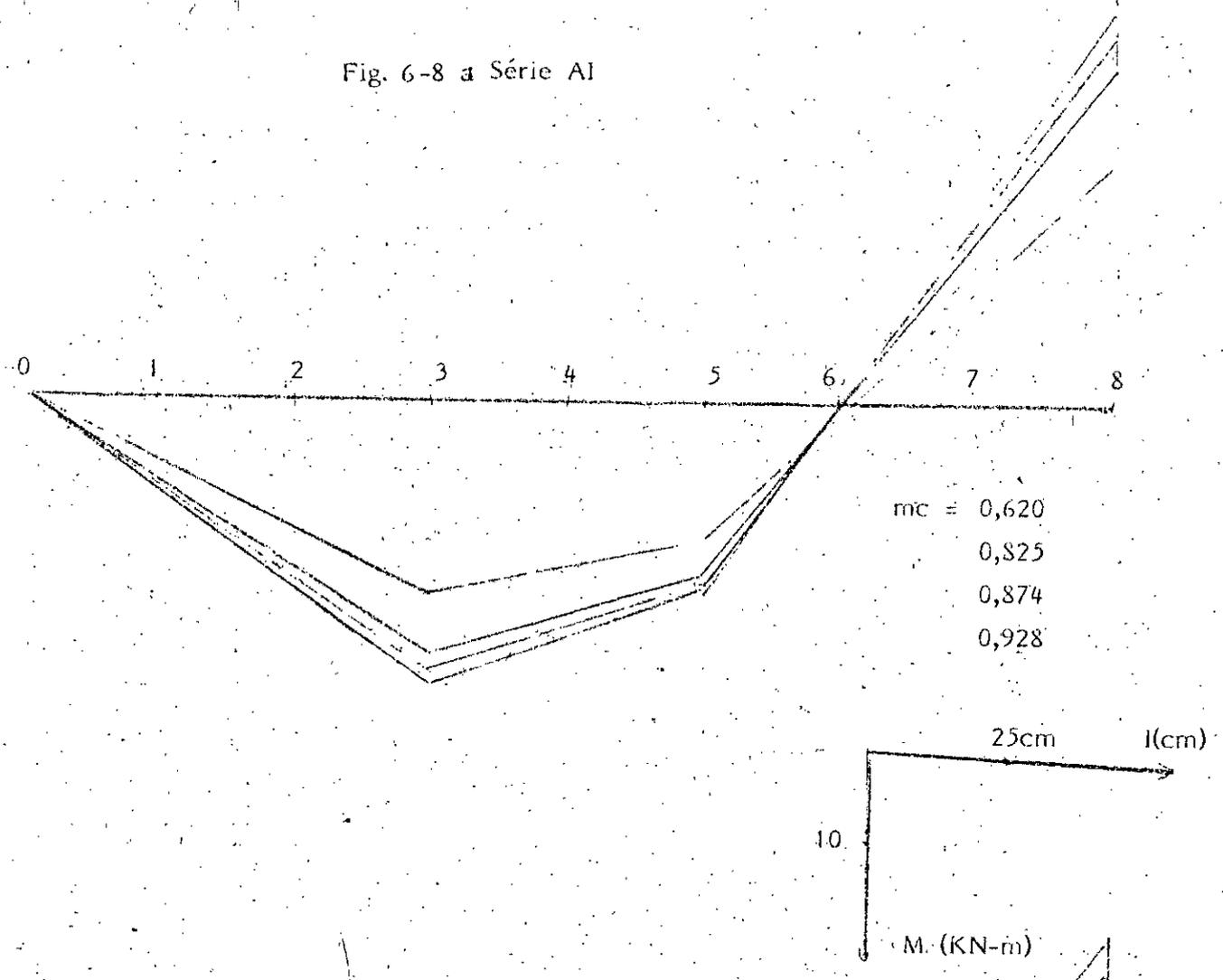


Fig. 6-8 b Série B1

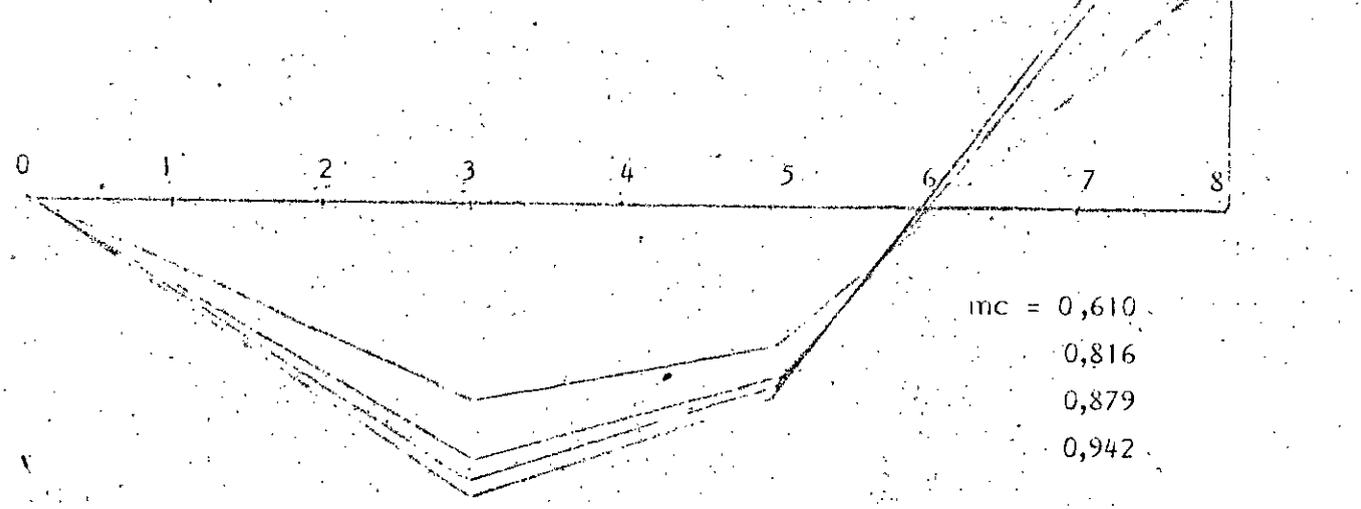


fig. 6-8 c: Série CI

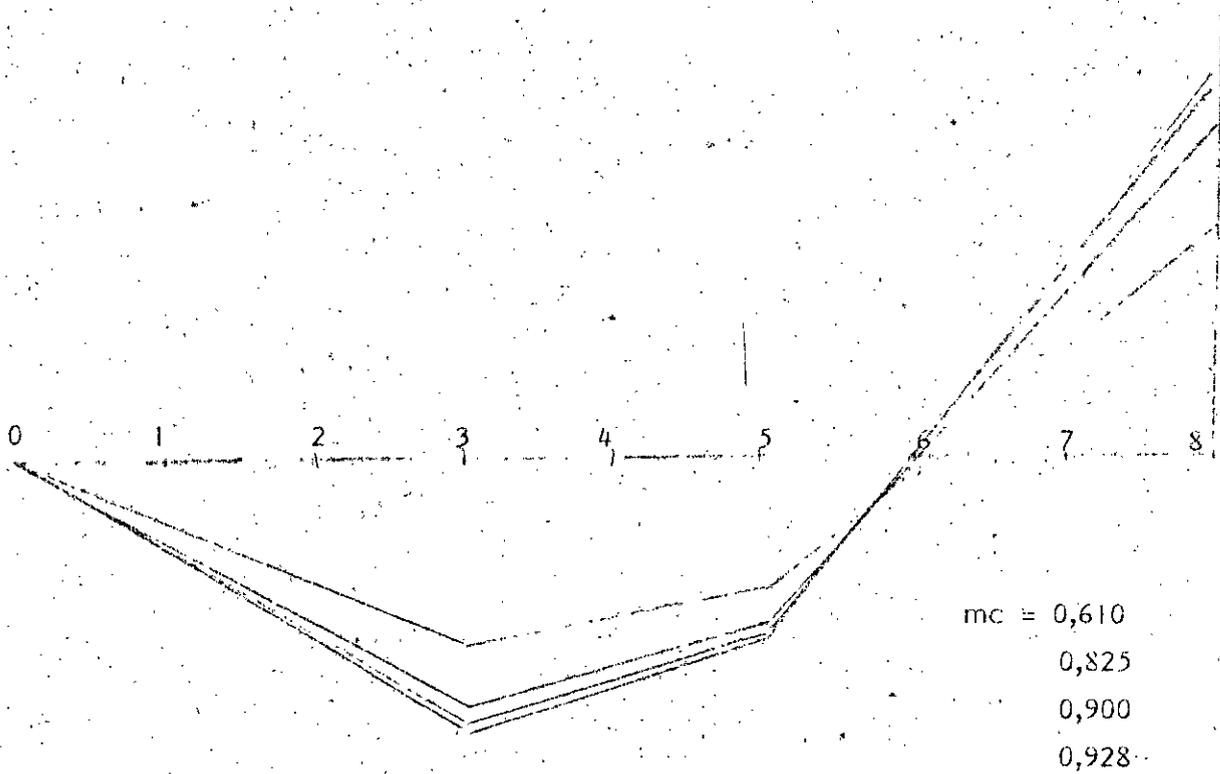


Fig. 6-9 a - Série AII

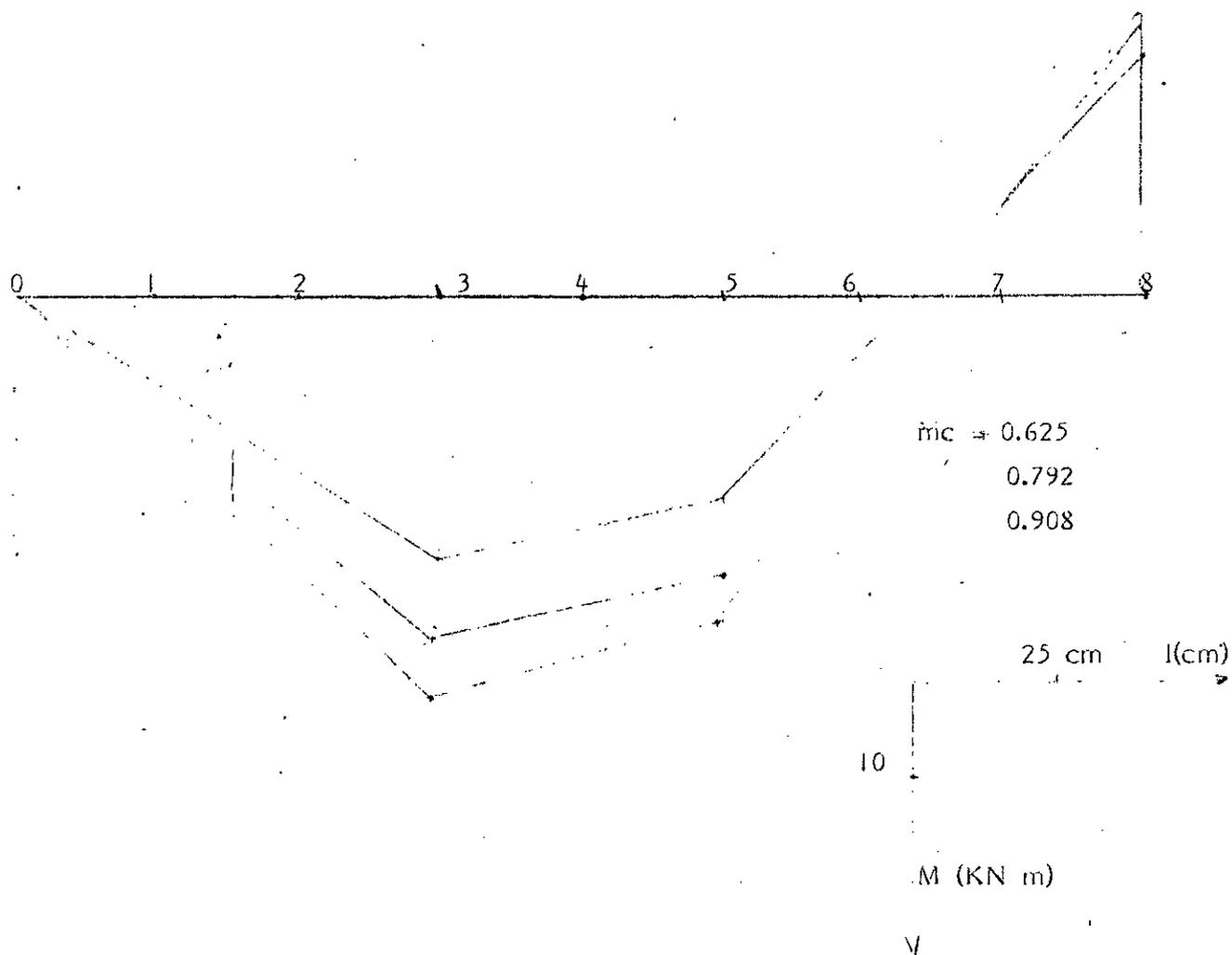


Fig. 6-9 b - Série BII

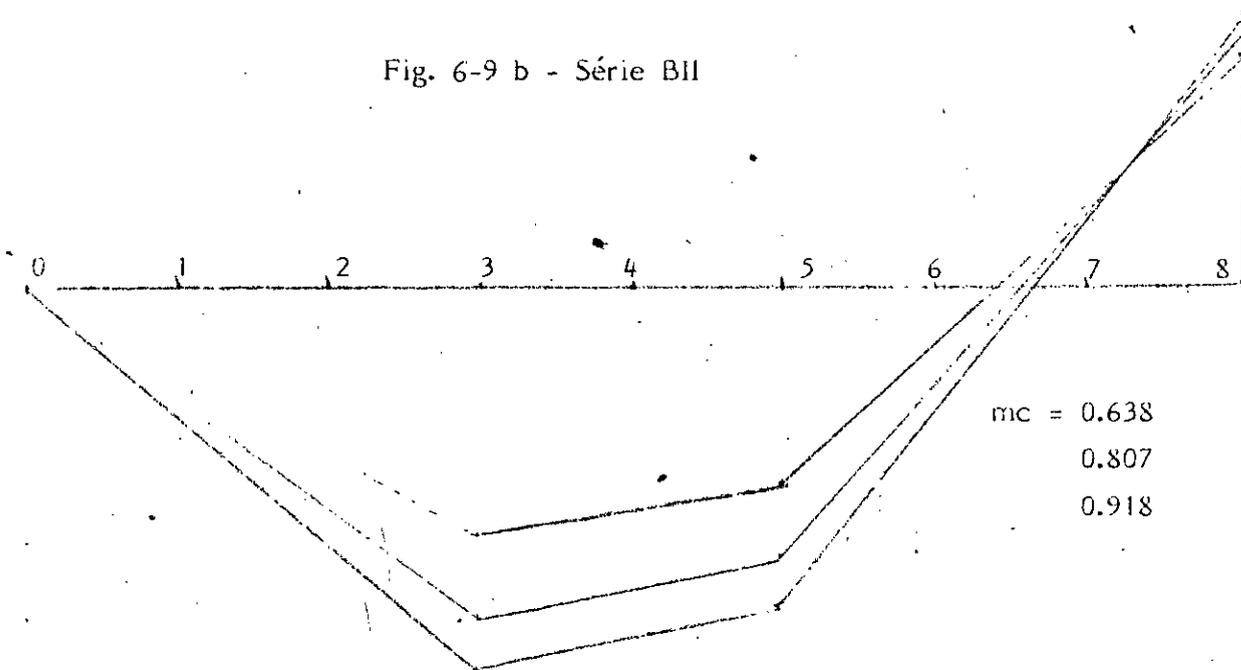
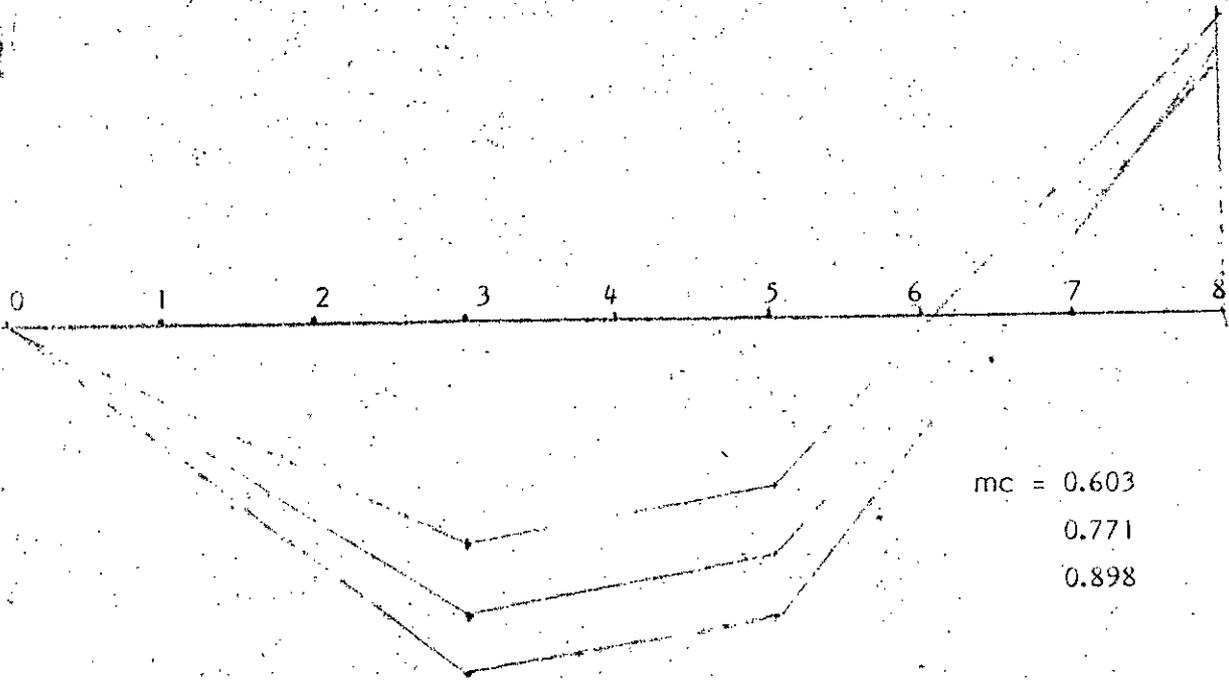


Fig. 6-9 c - Série CII



**CHAPITRE VII**  
**CONCLUSIONS**

## CHAPITRE VII - CONCLUSIONS

### 7.1 - Conclusions générales

7.1.1 - Jusqu'à présent, dans la plupart des cas, on prend en compte, pour les calculs pratiques, le calcul classique qui est logique quand le comportement du matériau reste linéairement élastique et ce aussi bien pour le calcul statique que pour le dimensionnement. Mais cette méthode, basée sur la conception des contraintes admissibles, présente quelques insuffisances. Il y a donc deux possibilités :

a) concordance avec la conception du modèle élastique (contrainte admissible basse) ce qui conduit à un gaspillage de matériau (surdimensionnement, construction très lourde...)

b) Prendre des contraintes admissibles à peu près 50 % plus élevées, mais cela ne répond pas parfaitement au modèle élastique.

7.1.2 - La conception classique ne nous permet pas de connaître la sécurité globale. On connaît seulement la réserve de sécurité du côté des matériaux. Dans cette conception de l'analyse du problème, on a considéré que les surcharges étaient très bien déterminées et qu'il n'existe pas la possibilité de surcharge probable. On donne les coefficients de sécurité partiels proposés par différents règlements dans le tableau ci-dessous.

7.1.3 - On constate dans les résultats une dispersion non négligeable et ceci doit nous ouvrir l'oeil sur le caractère aléatoire des résistances. Si la capacité de résistance d'un type d'ouvrage est dispersée, c'est qu'il est dans la nature de la résistance d'être aléatoire.

	BAEL 80	CEB 78	CP 110	DIN 1045	ACT 318.77
<u>Actions</u>					
Permanent $\gamma_g$	1.35	1.35	1.4	1	1.4
Variables $\gamma_q$	1.50	1.50	1.60	1	1.7
<u>Matériaux</u>					
Béton $\gamma_b$ ( $\gamma_c$ )	1.50	1.50	1.50	1	1
Acier $\gamma_s$ ( $\gamma_a$ )	1.15	1.15	1.15	1	1

## 7.2 - Conclusions techniques

L'analyse est faite sur le comportement de poutres hyperstatiques à l'état limite soumises à des charges instantanées croissantes en faisant varier deux paramètres :

7.2.1 - La disposition de l'armature élasto conforme et élasto non conforme nous permet de conclure :

- La capacité portante ainsi que la sécurité réelle ( $Q_{exp}/Q_{adm}$ ) sont plus importantes pour la disposition non conforme que pour la disposition conforme.
- La redistribution des efforts internes s'écarte d'autant plus de la résolution élastique que la disposition de l'armature s'éloigne de la solution conforme.

7.2.2 - La qualité du béton, pour une même disposition de l'armature, nous permet de conclure :

- La capacité portante ultime croît avec la résistance du béton constituant les pièces ( $Q_u$  varie de 25.35 KN - AI - à 22.65 KN - CI - et de 29.10 KN - AII - à 24.75 KN - CII -).
- La sécurité réelle moyenne (les valeurs prises dans les calculs sont des valeurs moyennes qui sont pour nous les valeurs réelles) croît aussi avec la qualité du béton. Elle varie de 1.803 - AI - à 1.597 - CI - et de 2.969 - AII - à 2.550 - CII -).
- La qualité du béton influence très peu la redistribution des efforts internes.
- Il nous semble, d'après nos essais, qu'au point de vue économique, dans les normes futures algériennes, il faut prendre en compte ces marges de sécurité cachées et ceci en réduisant les valeurs des coefficients de réduction  $\delta$  m pour élever les valeurs de calcul de résistance des matériaux.

### 7.3 - Orientations futures du travail

Tous les essais effectués au Laboratoire de l'Ecole Nationale Polytechnique étaient limités par une durée de six heures par pièce ce qui représente d'après les normes un excellent exemple de comportement sous charges instantanées.

Etant convaincue que le comportement réel sous l'effet de charges de longue durée augmente probablement le résultat tel que déformations, fissurations et mesures de capacités portantes, il faut souligner l'importance d'élargir ces essais par ceux de longue durée tenant compte des mêmes conditions d'exécution.

ANNEXE A - ETALONNAGE DE LA PRESSE

## ETALONNAGE DE LA PRESSE

### I - BUT

Trouver une relation entre les graduations lues et la charge réelle appliquée.

### II - APPAREILS UTILISES

Capteur de force et millivoltmètre.

### III - OPERATIONS A REALISER

- Etalonner le capteur de force  $y$  (millivolt)  $= f(Q)$  KN
- purger les deux verins
- réaliser un schéma de chargement identique à celui de nos essais pour s'assurer que les deux verins fonctionnent de la même manière
- obtenir une courbe reliant tension lue et divisions du manomètre de la presse
- déduire la courbe d'étalonnage de la presse c'est-à-dire relation entre la charge appliquée et la division

$$y \text{ (mv)} = f(D)$$

$$Q = f(D)$$

### IV -MODE OPERATOIRE

#### 1 - Capteur de force

A l'aide d'une presse hydraulique déjà étalonnée, nous exerçons progressivement sur le capteur des forces bien déterminées en prenant soin de relever à chaque fois la valeur correspondante indiquée par le voltmètre. On obtient ainsi une courbe  $y \text{ (mV)} = f(\text{charge réelle exercée})$ .

## 2 - Purger

Voir schéma et photo

## 3 - Ne disposant que d'un seul capteur, nous avons dû procéder en deux étapes :

- la première étape : utilisation d'un seul verin avec le capteur

Tout d'abord, il fallait assurer le contact verin capteur, le second verin agissant sur un appui métallique très rigide et procéder au chargement des deux verins.

On a eu ainsi la correspondance entre division du manomètre de l'appareil utilisé et tension du millivoltmètre.

- la deuxième étape consistait à intervenir entre les deux verins en maintenant le même procédé.

### Tableaux de mesures

La capacité du capteur étant assez élevée, nous n'avons pas pu prendre les premières lectures. (l'ensemble n'étant pas encore stabilisé)

a) capteur de force en fonction de la charge appliquée

q (KN)	Tension en mV*	q (KN)	tension en mV *
100	1.80	200	3.60
110	1.95	220	3.90
120	2.15	240	4.30
130	2.30	260	4.75
140	2.40	280	5.00
150	2.60	300	5.37
160	2.85		
170	3.00		
180	3.25		
190	3.40		

$$y \text{ (mV)} = 0,0179 \text{ q (KN)}$$

\* Ces valeurs sont la moyenne statistique de 4 mesures.

b) Verins de la presse en fonction du nombre de divisions D du manomètre

Divisions	Verin gauche/ presse * mV	Verin droit/ presse * mV
100	1.30	1.25
110	1.49	1.50
120	1.60	1.55
130	1.75	1.70
140	1.85	1.90
150	2.00	2.00
160	2.12	2.15
170	2.25	2.20
180	2.35	2.37
190	2.55	2.49
200	2.70	2.62
210	2.75	2.92
220	2.90	2.95
230	3.00	3.10

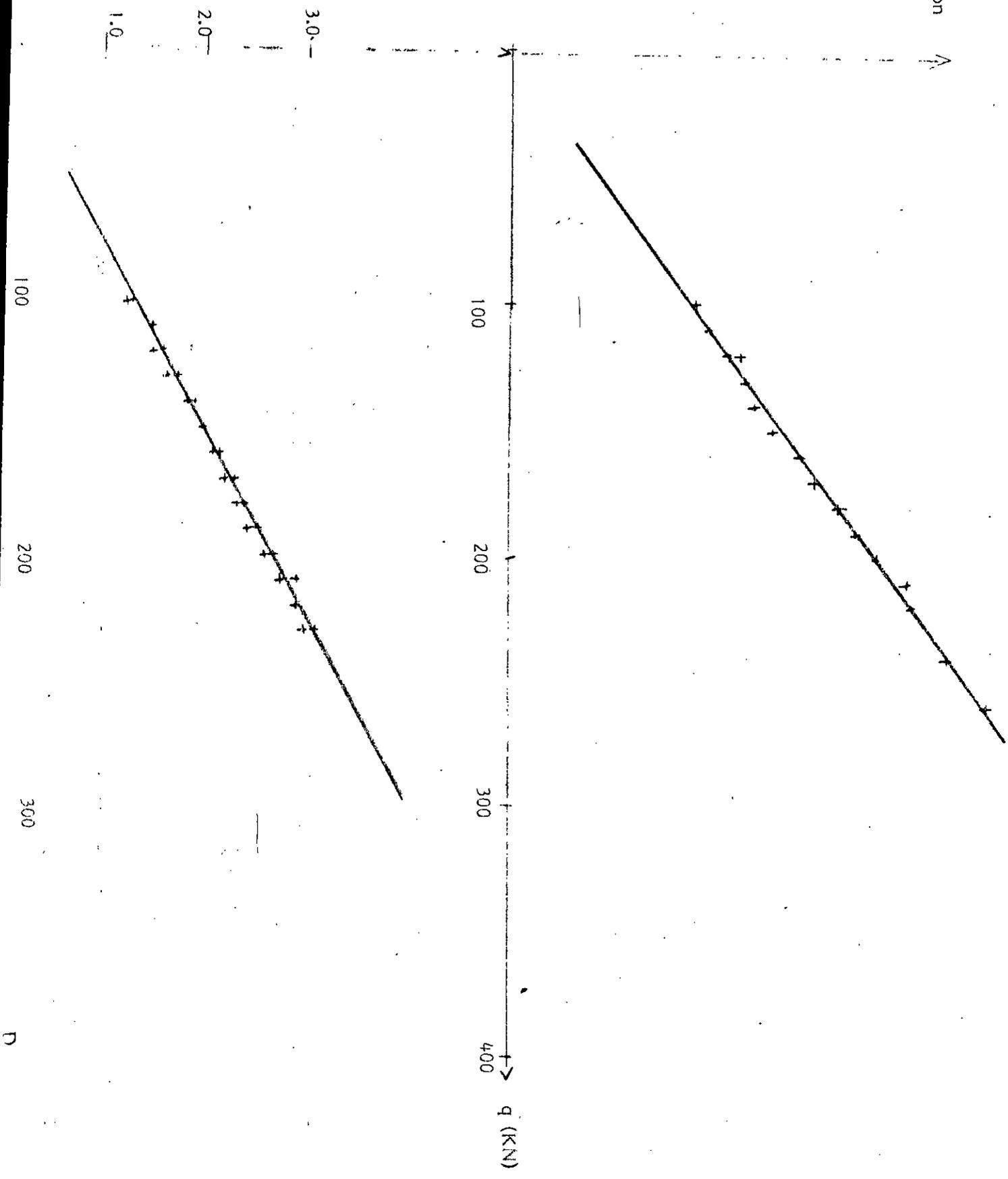
\* Les valeurs obtenues sont la moyenne statistique de 4 mesures

Nous avons obtenu des valeurs très rapprochées pour les deux verins, ce qui nous a amené à faire passer une seule courbe par l'ensemble des points et donc de prendre une équation moyenne

\* Equation d'un verin en fonction des divisions  $y_{mv} = 0,0135 D$

\* Equation d'un verin exprimé en charge réelle en fonction du nombre de divisions  
 $q \text{ (KN)} = 0.75 D$

tension  
(mV)



ANNEXE B - CALCULS STATISTIQUES DES CARACTERISTIQUES MECANIQUES

TABLEAU I :

## RESULTATS SUR EPROUVETTES DES RESISTANCES DES BETONS

Série A		Série B		Série C	
238.7	288.5	209	238.5	99.5	107
298.4	353.1	246.2	241	127	126.8
335.9	328.3	266.1	264	121.9	133.5
358.6	349.7	273.2	270	125.2	135.9
328.7	399	278.5	279	138	141.3
365.5	379	288.5	297.9	145.2	147.6
370	378.5	288.5	288.5	147.5	148.3
388.5	379	298.4	288.5	149.2	150
398.4	388.5	298	293.4	157.3	157.5
193.4	422.1	290.5	285.7	155	151
422.2	404.8	305.2	306.1	160.7	158
435.6	409	319.2	305.2	162.3	164.2
438.5	446.2	319.3	320	165	161.5
439.2	437.4	315.5	308.4	172.1	174.9
408.9	438.9	312.1	328.8	166.6	168.4
441.3	445.2	335	328.3	171.6	179.2
469	447.3	337.2	340	184.7	186.6
478.4	493.4	349.7	358.6	200.8	
485.2	545.9	379			
moyenne = 395.5		Moyenne = 298.68 kg/cm <sup>2</sup>		Moyenne = 152.61 kg/cm <sup>2</sup>	
Ecart type = 60.94 kg/cm <sup>2</sup>		Ecart type = 34.92 kg/cm <sup>2</sup>		Ecart type = 22.06 kg/cm <sup>2</sup>	
Variance = 3615.48		Variance = 1 186.29		Variance = 472.93	

ANNEXE C - RESULTATS DE MESURES

TABLEAU I : DESCRIPTION DU CHARGEMENT DES POUTRES LORS DES ESSAIS : SERIES ELASTO CONFORMES

Poutre AI 1

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.024
13	20	36	0.142
17	40	66	0.260
20	60	96	0.379
30	80	126	0.497
35	100	156	0.615
34	120	186	0.734
34	140	216	0.852
25	160	246	0.970
	165	256.5	1

Poutre BI 1

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6.00	0.022
10	20	36	0.134
15	30	51	0.190
20	40	66	0.246
25	50	81	0.302
30	60	96	0.357
42	85	133.5	0.497
42	110	171	0.637
33	115	178.5	0.665
36	125	193.5	0.721
32	135	208.5	0.776
25	145	223.5	0.832
25	160	246	0.916
	175	268.5	1.00

Poutre CI 1

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.024
5	15	28.5	0.112
22	23	40.5	0.160
17	30	51	0.201
35	40	66	0.260
35	50	81	0.319
45	60	96	0.379
30	70	111	0.438
8	80	126	0.497
20	90	141	0.556
20	100	156	0.615
5	110	171	0.675
20	120	186	0.734
20	140	216	0.852
20	160	246	0.970
	165	253.5	1

Poutre AI 2

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.020
12	20	36	0.122
12	30	51	0.173
10	40	66	0.223
18	50	81	0.274
18	60	96	0.325
25	85	133.5	0.452
38	110	171	0.579
30	125	193.5	0.655
29	135	208.5	0.706
30	145	223.5	0.756
36	155	238.5	0.807
30	165	253.5	0.858
30	175	268.5	0.909
	193	295.5	1.00

Poutre BI 2

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.024
12	20	36	0.146
15	30	51	0.207
26	45	73.5	0.299
13	50	81	0.329
38	60	96	0.392
20	80	126	0.512
35	100	156	0.634
30	120	186	0.756
30	145	223.5	0.908
	160	246	1.00

Poutre CI 2

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.026
10	20	36	0.159
15	25	43.5	0.182
32	40	66	0.291
25	50	81	0.358
25	60	96	0.424
35	85	133.5	0.589
25	110	171	0.755
30	125	193.5	0.854
30	135	208.5	0.920
	147	226.5	1.00

TABLEAU II : DESCRIPTION DU CHARGEMENT DES POUTRES LORS DES ESSAIS : SERIES ELASTO NON CONFORMES

Poutre AII 1

Temps KN	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.021
6	25	43.5	0.149
20	40	66	0.227
8	50	81	0.278
15	60	96	0.330
20	70	111	0.381
30	90	141	0.484
40	110	171	0.588
30	130	201	0.691
30	150	231	0.794
30	170	261	0.897
13	180	276	0.948
	190	291	1.00

Poutre BII 1

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.020
10	15	28.5	0.095
14	35	58.5	0.196
11	45	73.5	0.246
34	60	96	0.322
35	75	118.5	0.397
35	90	141	0.472
30	105	163.5	0.548
30	120	186	0.623
24	130	201	0.673
30	140	216	0.724
20	150	231	0.774
20	160	246	0.824
35	180	276	0.925
20	190	291	0.975
		298.5	1.00

Poutre CII 1

Temps mn	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.021
8	20	36	0.127
10	30	51	0.180
21	40	66	0.233
35	50	81	0.286
25	60	96	0.339
32	80	126	0.444
35	100	156	0.550
30	120	186	0.656
30	140	216	0.762
25	160	246	0.868
25	170	261	0.921
	185	283.5	1.00

Poutre AII 2

Temps	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.017
8	18	33	0.096
15	35	58.5	0.170
17	45	73.5	0.214
15	55	88.5	0.258
17	65	103.5	0.301
19	75	118.5	0.345
23	90	141	0.410
28	110	171	0.498
35	130	201	0.585
33	145	223.5	0.651
24	155	238.5	0.694
35	165	253.5	0.738
25	175	268.7	0.782
24	190	291	0.847
20	200	306	0.891
	225	343.5	1.00

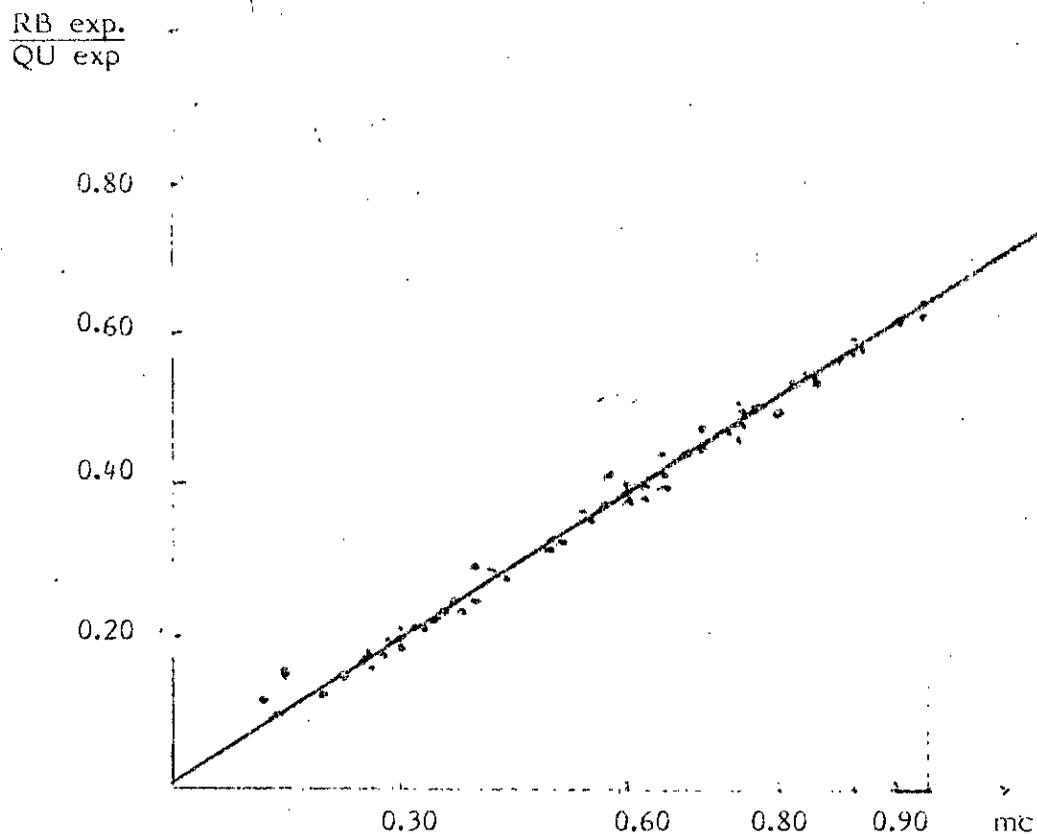
Poutre BII 2

Temps	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.022
14	30	51	0.190
17	50	81	0.302
17	65	103.5	0.385
28	80	126	0.469
30	100	156	0.581
20	110	171	0.637
15	130	201	0.749
17	150	231	0.860
30	160	246	0.916
	175	268.5	1.00

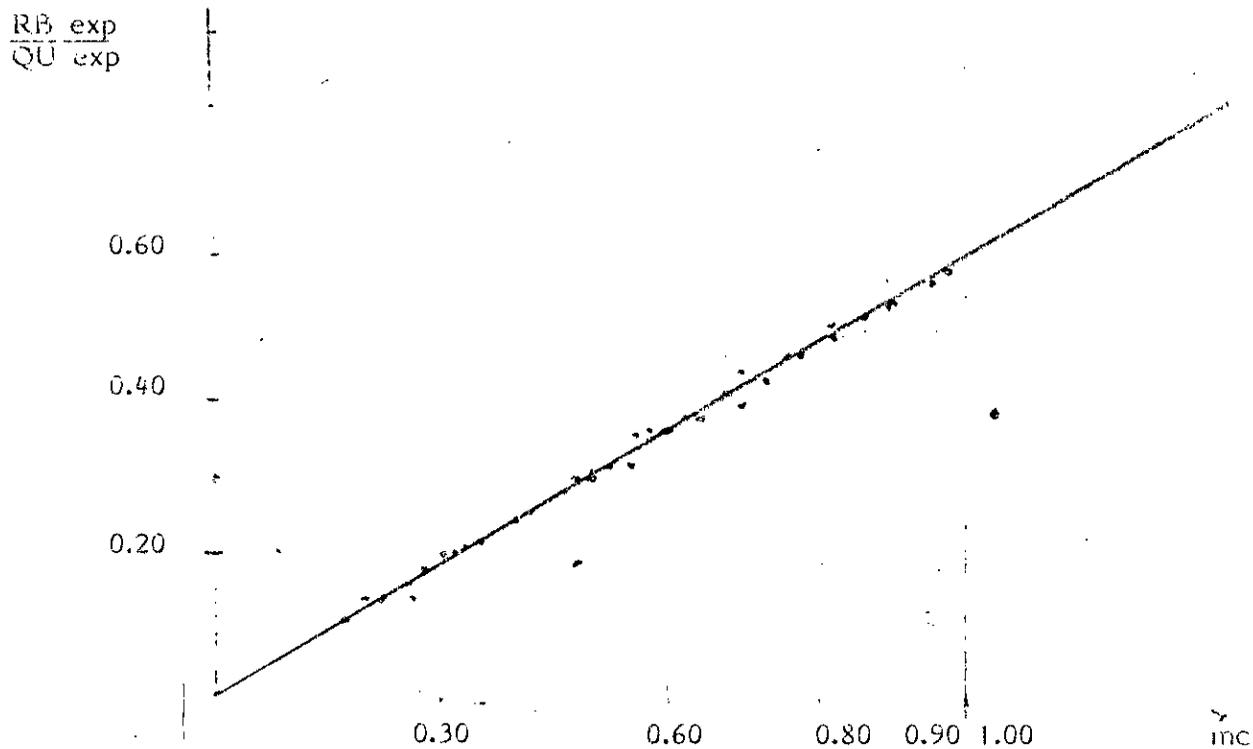
Poutre CII 2

Temps	Nbre divisions	Q KN	m
		6	0.024
8	20	36	0.145
15	30	51	0.206
12	40	66	0.267
11	45	73.5	0.297
23	60	96	0.388
30	70	111	0.448
30	85	133.5	0.539
30	100	156	0.630
30	120	186	0.751
30	140	216	0.873
30	160	246	0.994
	161	247.5	1.00

Fig. I : REACTION D'APPUI CENTRAL



Poutres elasto conformes - Séries AI, BI, CI



Poutres elasto non conformes - séries A II, B II, C II

Fig. II : FLECHES A MI TRAVÉE : SERIES ELASTO CONFORMES

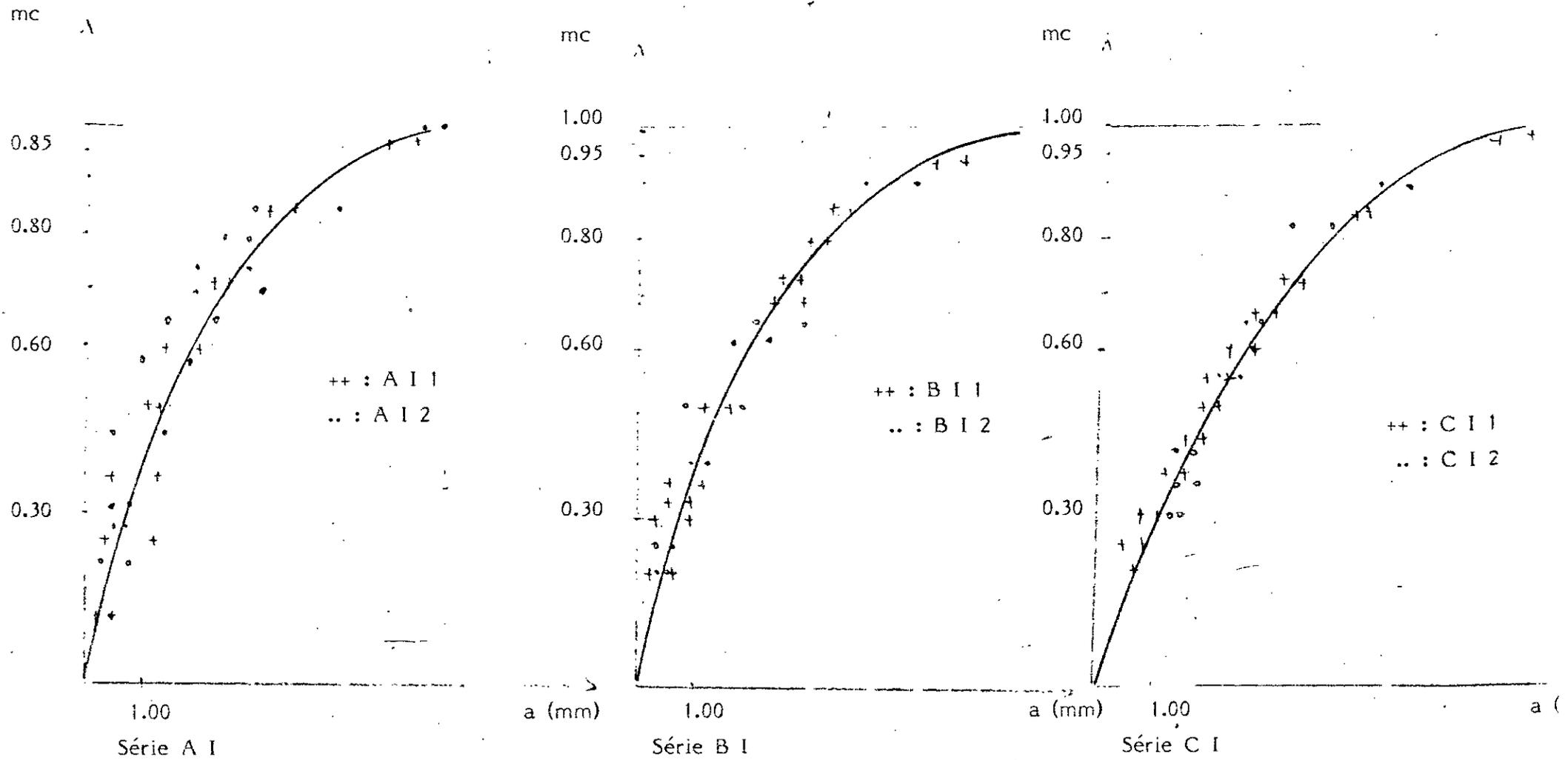


Fig. III : FLECHES A MI TRAVÉE : SERIES ELASTO NON CONFORMES

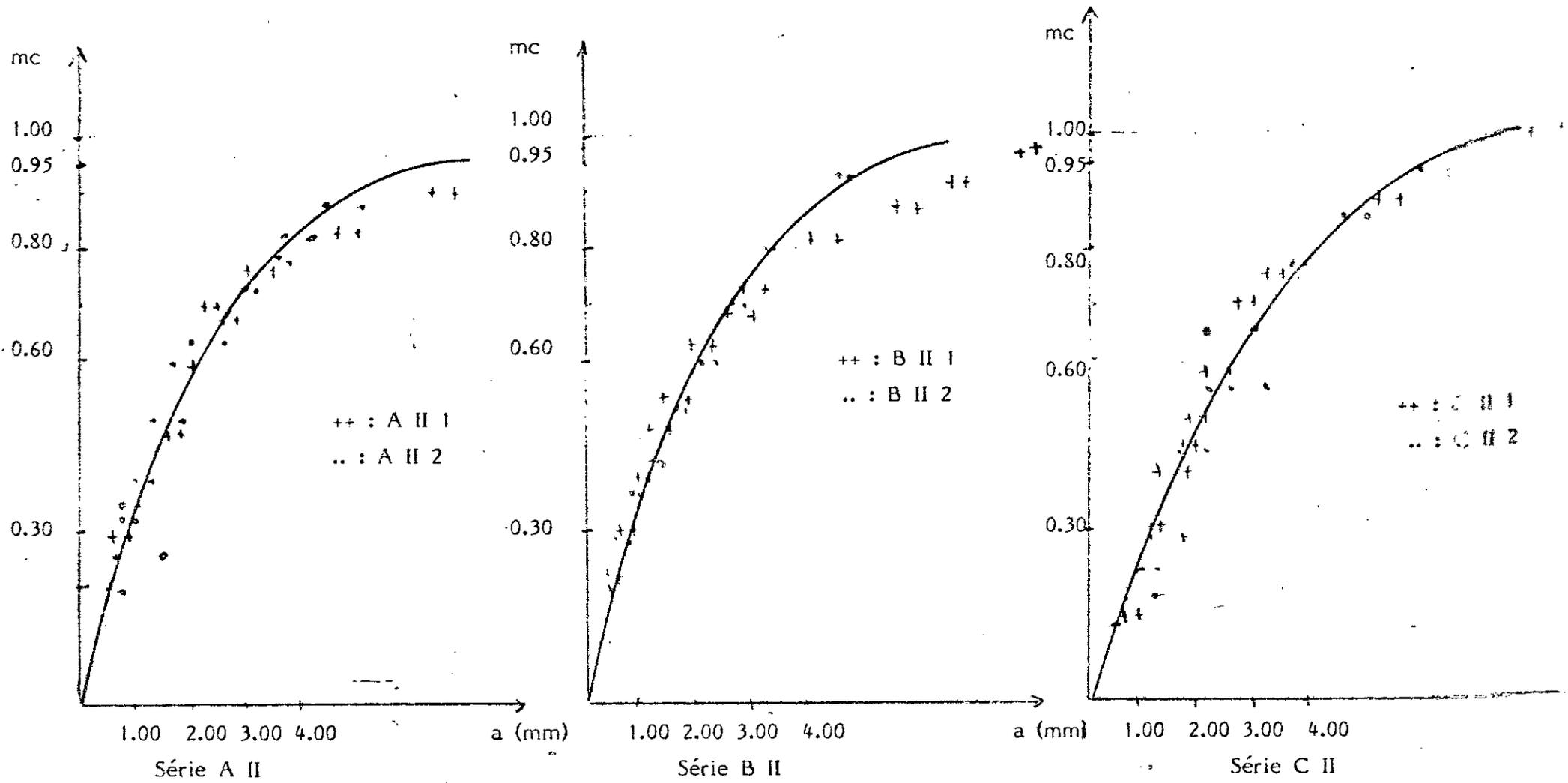


Fig. IV : ANGLES DE ROTATION DE L'APPUI DE RIVE  
SÉRIES ELASTO CONFORMES

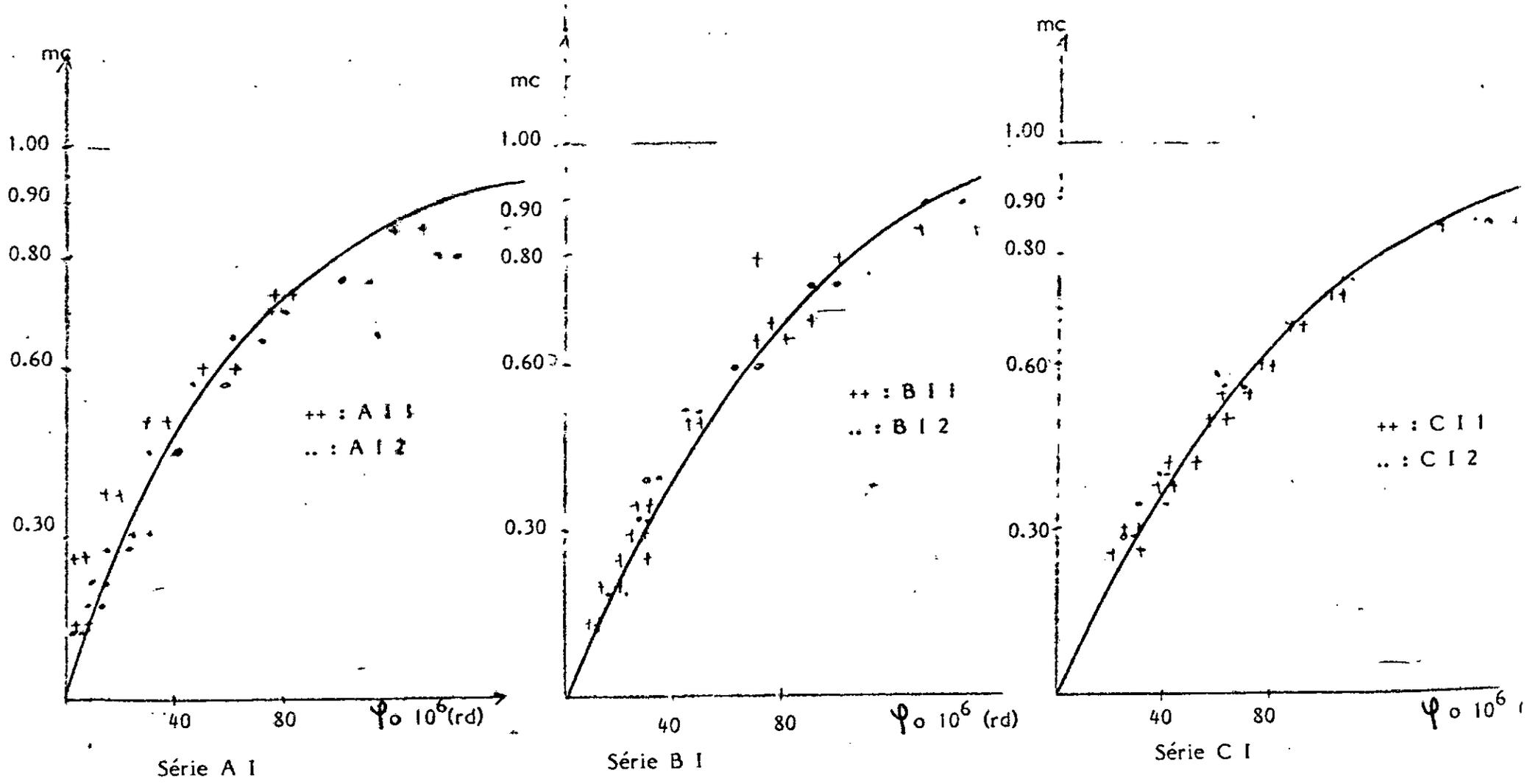
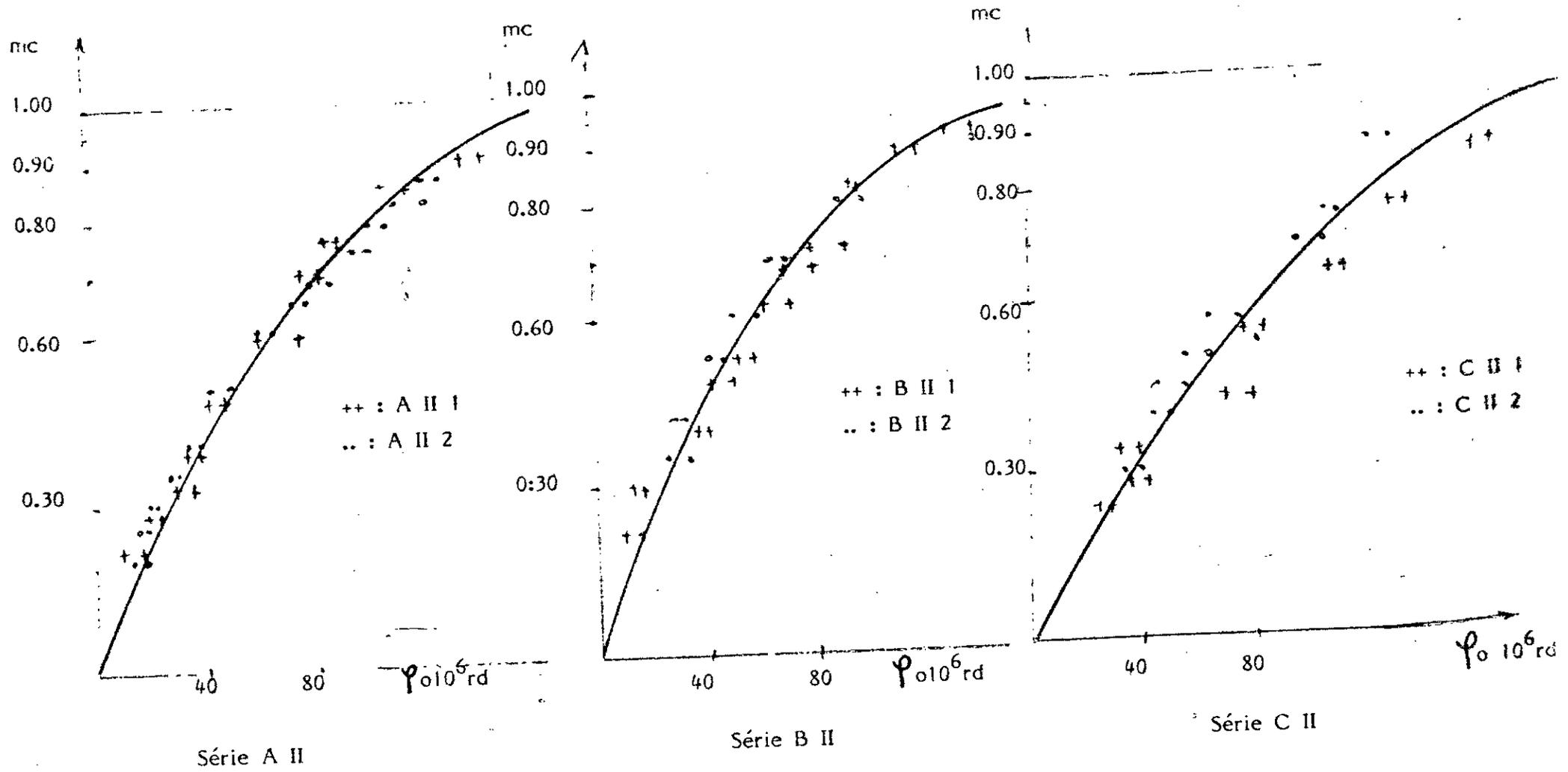


Fig. V : ANGLES DE ROTATION DE L'APPUI DE RIVE : SERIES ELASTO NON CONFORMES



**ANNEXE D - FONCTIONS DE BASE : METHODE CONTINUE**

TABLEAU I  
 FONCTIONS DE BASE  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\rho}$

$\psi = 1.6$

$\mu$	$\bar{\rho}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\rho}$	$\mu$	$\bar{\rho}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\rho}$
0.050	0.0504	0.0251	0.0084	0.800	2.8637	0.7285	0.1892
0.100	0.1028	0.0507	0.0168	0.805	2.7452	0.7407	0.1914
0.150	0.1576	0.0771	0.0254	0.810	2.8301	0.7533	0.1936
0.200	0.2165	0.1044	0.0343	0.815	2.9197	0.7664	0.1959
0.250	0.2805	0.1332	0.0434	0.820	3.0142	0.7797	0.1981
0.300	0.3511	0.1635	0.0528	0.825	3.1141	0.7936	0.2004
0.350	0.4302	0.1958	0.0627	0.830	3.2197	0.8078	0.2030
0.400	0.5200	0.2308	0.0730	0.835	3.3318	0.8224	0.2054
0.450	0.6239	0.2684	0.0836	0.840	3.4508	0.8376	0.2078
0.500	0.7461	0.3098	0.0954	0.845	3.5774	0.8535	0.2103
0.510	0.7733	0.3186	0.0978	0.850	3.7125	0.8700	0.2128
0.520	0.8015	0.3276	0.1002	0.855	3.8568	0.8868	0.2155
0.530	0.8308	0.3369	0.1026	0.860	4.0114	0.9046	0.2182
0.540	0.8614	0.3463	0.1051	0.865	4.1774	0.9231	0.2209
0.550	0.8932	0.3559	0.1077	0.870	4.3562	0.9421	0.2236
0.560	0.9263	0.3658	0.1102	0.875	4.5492	0.9622	0.2264
0.570	0.9609	0.3759	0.1128	0.880	4.7581	0.9830	0.2291
0.580	0.9970	0.3862	0.1155	0.885	4.9852	1.0050	0.2314
0.590	1.0348	0.3970	0.1181	0.890	5.2329	1.0277	0.2354
0.600	1.0744	0.4079	0.1209	0.895	5.5041	1.0519	0.2356
0.610	1.1160	0.4191	0.1237	0.900	5.8026	1.0775	0.2418
0.620	1.1597	0.4307	0.1266	0.905	6.1321	1.1043	0.2450
0.630	1.2056	0.4426	0.1294	0.910	6.4956	1.1328	0.2483
0.640	1.2539	0.4550	0.1324	0.915	6.8952	1.1630	0.2519
0.650	1.3049	0.4676	0.1353	0.920	7.3367	1.1954	0.2554
0.660	1.3589	0.480	0.1384	0.925	7.8207	1.2297	0.2592
0.670	1.4160	0.4941	0.1415	0.930	8.3488	1.2669	0.2630
0.680	1.4768	0.5082	0.1446	0.935	8.9244	1.3073	0.2670
0.690	1.5409	0.5228	0.1480	0.940	9.5574	1.3506	0.2710
0.700	1.6095	0.5376	0.1513	0.945	10.2559	1.3985	0.2753
0.710	1.6826	0.5532	0.1546	0.950	12.0614	1.4509	0.2795
0.720	1.7609	0.5694	0.1581	0.955	13.4557	1.5094	0.2843
0.730	1.8449	0.5862	0.1616	0.960	15.1504	1.5753	0.2892
0.740	1.9352	0.6039	0.1652	0.965	17.4723	1.6504	0.2943
0.750	2.0326	0.6220	0.1699	0.970	20.4136	1.7375	0.2997
0.760	2.1381	0.6415	0.1728	0.975	24.5935	1.8410	0.3053
0.770	2.2525	0.6615	0.1767	0.976	30.8676	1.9657	0.3115
0.780	2.3772	0.6828	0.1807	0.985	41.3221	2.1333	0.3178
0.790	2.5137	0.7049	0.1848	0.990	62.2979	2.3916	0.3249

TABLEAU 2  
 FONCTIONS DE BASE  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\bar{Y}$

→  $\Psi = 2.0$

$\alpha$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{Y}$	$\alpha$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{Y}$
0.050	0.0501	0.0250	0.0053	0.800	2.2216	0.6360	0.1716
0.100	0.1010	0.0502	0.0167	0.805	2.2671	0.6481	0.1735
0.150	0.1535	0.0759	0.0252	0.810	2.3553	0.6585	0.1755
0.200	0.2083	0.1020	0.0337	0.815	2.4272	0.6691	0.1774
0.250	0.2667	0.1291	0.0425	0.820	2.5031	0.6799	0.1793
0.300	0.3297	0.1572	0.0514	0.825	2.5832	0.6913	0.1812
0.350	0.3959	0.1867	0.0606	0.830	2.6680	0.7029	0.1832
0.400	0.4762	0.2179	0.0701	0.835	2.7579	0.7146	0.1852
0.450	0.5642	0.2514	0.0800	0.840	2.8534	0.7274	0.1873
0.500	0.6660	0.2876	0.0904	0.845	2.9550	0.7401	0.1893
0.510	0.6593	0.2953	0.0926	0.850	3.0633	0.7534	0.1916
0.520	0.7127	0.3030	0.0947	0.855	3.1790	0.7673	0.1938
0.530	0.7370	0.3110	0.0969	0.860	3.3029	0.7815	0.1959
0.540	0.7623	0.3192	0.0991	0.865	3.4359	0.7963	0.1982
0.550	0.7875	0.3274	0.1014	0.870	3.5792	0.8120	0.2005
0.560	0.8159	0.3359	0.1037	0.875	3.7329	0.8282	0.2028
0.570	0.8443	0.3448	0.1059	0.880	3.8974	0.8452	0.2051
0.580	0.8740	0.3534	0.1083	0.885	4.0837	0.8628	0.2074
0.590	0.9070	0.3625	0.1107	0.890	4.2816	0.8815	0.2100
0.600	0.9374	0.3717	0.1131	0.895	4.4909	0.9010	0.2125
0.610	0.9714	0.3814	0.1155	0.900	4.7378	0.9216	0.2150
0.620	1.0071	0.3911	0.118	0.905	5.0019	0.9431	0.2183
0.630	1.0445	0.4012	0.1205	0.910	5.2951	0.9664	0.2210
0.640	1.0839	0.4115	0.1231	0.915	5.6226	0.9908	0.2236
0.650	1.1254	0.4221	0.1257	0.920	5.9914	1.0167	0.2269
0.660	1.1693	0.4332	0.1283	0.925	6.4091	1.0445	0.2299
0.670	1.2156	0.4445	0.1310	0.930	6.8864	1.0745	0.2330
0.680	1.2647	0.4562	0.1337	0.935	7.4371	1.1066	0.2363
0.690	1.3169	0.4682	0.1366	0.940	8.0794	1.1417	0.2396
0.700	1.3724	0.4807	0.1394	0.945	8.8355	1.1800	0.2432
0.710	1.4315	0.4937	0.1423	0.950	9.7490	1.2223	0.2467
0.720	1.4948	0.5071	0.1453	0.955	10.8633	1.2695	0.2506
0.730	1.5626	0.5210	0.1483	0.960	12.2549	1.3223	0.2546
0.740	1.6351	0.5357	0.1514	0.965	14.0450	1.3827	0.2586
0.750	1.7139	0.5508	0.1545	0.970	16.4322	1.4527	0.2630
0.760	1.7985	0.5665	0.1576	0.975	19.7750	1.5362	0.2677
0.770	1.8910	0.5832	0.1617	0.980	24.7550	1.6376	0.2726
0.780	1.9914	0.6009	0.1646	0.985	31.1649	1.7704	0.2781
0.790	2.1011	0.6191	0.1680	0.990	40.0466	1.9373	0.2836

TABLEAU 3  
 FONCTIONS DE LASE  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$

$\psi = 2.25$

m	$\bar{\rho}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	m	$\bar{\rho}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$
0.050	0.0501	0.0260	0.0083	0.800	2.0262	0.5990	0.1044
0.100	0.1006	0.0501	0.0161	0.805	2.0845	0.6081	0.1061
0.150	0.1521	0.0755	0.0251	0.810	2.1453	0.6173	0.1078
0.200	0.2055	0.1013	0.0336	0.815	2.2093	0.6270	0.1095
0.250	0.2616	0.1277	0.0422	0.820	2.2769	0.6368	0.1713
0.300	0.3214	0.1549	0.0509	0.825	2.3483	0.6469	0.1731
0.350	0.3864	0.1833	0.0599	0.830	2.4238	0.6573	0.1749
0.400	0.4583	0.2131	0.0691	0.835	2.5038	0.6682	0.1767
0.450	0.5395	0.2447	0.0786	0.840	2.5888	0.6793	0.1787
0.500	0.6331	0.2787	0.0885	0.845	2.6791	0.6909	0.1808
0.510	0.6537	0.2859	0.0906	0.850	2.7758	0.7028	0.1826
0.520	0.6750	0.2932	0.0926	0.855	2.8785	0.7151	0.1845
0.530	0.6971	0.3005	0.0947	0.860	2.9888	0.7281	0.1865
0.540	0.7200	0.3081	0.0968	0.865	3.1072	0.7414	0.1886
0.550	0.7437	0.3158	0.0990	0.870	3.2345	0.7554	0.1906
0.560	0.7684	0.3236	0.1011	0.875	3.3721	0.7698	0.1929
0.570	0.7942	0.3317	0.1033	0.880	3.5211	0.7851	0.1951
0.580	0.8210	0.3399	0.1055	0.885	3.6829	0.8008	0.1973
0.590	0.8490	0.3483	0.1077	0.890	3.8593	0.8175	0.1996
0.600	0.8782	0.3568	0.1100	0.895	4.0528	0.8350	0.2019
0.610	0.9088	0.3656	0.1123	0.900	4.2651	0.8533	0.2044
0.620	0.9409	0.3746	0.1146	0.905	4.4998	0.8727	0.2068
0.630	0.9745	0.3838	0.1170	0.910	4.7608	0.8933	0.2093
0.640	1.0099	0.3934	0.1194	0.915	5.0521	0.9151	0.2119
0.650	1.0472	0.4032	0.1218	0.920	5.3799	0.9384	0.2147
0.660	1.0865	0.4132	0.1243	0.925	5.7514	0.9632	0.2174
0.670	1.1281	0.4235	0.1268	0.930	6.1756	0.9900	0.2202
0.680	1.1721	0.4342	0.1293	0.935	6.6652	1.0187	0.2232
0.690	1.2188	0.4451	0.1319	0.940	7.2362	1.0500	0.2262
0.700	1.2684	0.4566	0.1345	0.945	7.9110	1.0843	0.2295
0.710	1.3213	0.4684	0.1372	0.950	8.7215	1.1219	0.2328
0.720	1.3778	0.4806	0.1400	0.955	9.7109	1.1638	0.2359
0.730	1.4384	0.4932	0.1428	0.960	10.9482	1.2112	0.2396
0.740	1.5035	0.5065	0.1457	0.965	12.5379	1.2648	0.2434
0.750	1.5736	0.5202	0.1486	0.970	14.6598	1.3270	0.2474
0.760	1.6493	0.5345	0.1516	0.975	17.6325	1.4012	0.2514
0.770	1.7315	0.5495	0.1546	0.980	22.0981	1.4924	0.2558
0.780	1.8210	0.5652	0.1578	0.985	29.5381	1.6102	0.2608
0.790	1.9188	0.5816	0.1610	0.990	44.4408	1.7762	0.2658

TABLEAU 4  
 FONCTIONS DE BASE  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{Y}$

$\psi = 2.5$

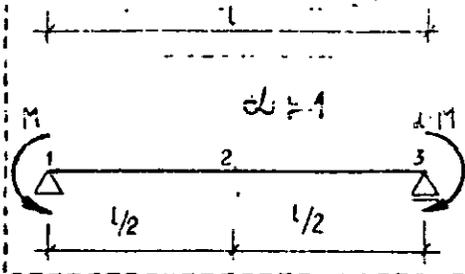
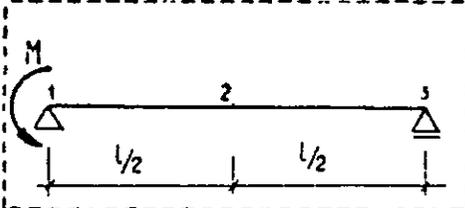
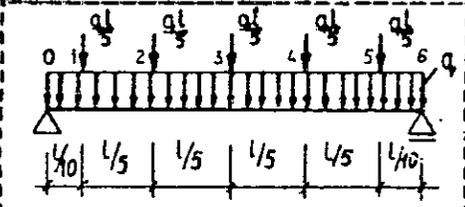
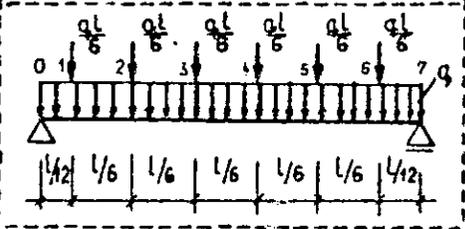
m	$\bar{P}$	$\bar{R}$	$\bar{Y}$	m	$\bar{P}$	$\bar{R}$	$\bar{Y}$
0.050	0.0500	0.0250	0.0083	0.800	1.8705	0.5685	0.1587
0.100	0.1003	0.0501	0.0167	0.805	1.9232	0.5768	0.1603
0.150	0.1513	0.0753	0.0250	0.810	1.9760	0.5853	0.1619
0.200	0.2038	0.1008	0.0335	0.815	2.0357	0.5941	0.1635
0.250	0.2581	0.1288	0.0420	0.820	2.0966	0.6030	0.1653
0.300	0.3144	0.1534	0.0506	0.825	2.1609	0.6122	0.1669
0.350	0.3773	0.1809	0.0594	0.830	2.2289	0.6216	0.1686
0.400	0.4450	0.2096	0.0684	0.835	2.3011	0.6316	0.1703
0.450	0.5207	0.2399	0.0776	0.840	2.3776	0.6417	0.1720
0.500	0.6074	0.2722	0.0872	0.845	2.4591	0.6521	0.1738
0.510	0.6263	0.2769	0.0892	0.850	2.5459	0.6631	0.1756
0.520	0.6459	0.2858	0.0911	0.855	2.6387	0.6743	0.1774
0.530	0.6662	0.2928	0.0931	0.860	2.7380	0.6859	0.1792
0.540	0.6872	0.2999	0.0952	0.865	2.8448	0.6981	0.1813
0.550	0.7091	0.3071	0.0972	0.870	2.9594	0.7107	0.1832
0.560	0.7317	0.3145	0.0993	0.875	3.0823	0.7240	0.1851
0.570	0.7552	0.3220	0.1013	0.880	3.2174	0.7376	0.1871
0.580	0.7797	0.3297	0.1034	0.885	3.3631	0.7521	0.1892
0.590	0.8053	0.3375	0.1056	0.890	3.5221	0.7670	0.1913
0.600	0.8320	0.3455	0.1077	0.895	3.6961	0.7829	0.1936
0.610	0.8598	0.3537	0.1099	0.900	3.8873	0.7998	0.1957
0.620	0.8890	0.3621	0.1121	0.905	4.0996	0.8170	0.1980
0.630	0.9197	0.3707	0.1143	0.910	4.3336	0.8357	0.2002
0.640	0.9518	0.3795	0.1166	0.915	4.5956	0.8554	0.2026
0.650	0.9857	0.3886	0.1189	0.920	4.8911	0.8764	0.2052
0.660	1.0214	0.3979	0.1212	0.925	5.2252	0.8989	0.2077
0.670	1.0591	0.4075	0.1236	0.930	5.6072	0.9230	0.2102
0.680	1.0990	0.4174	0.1260	0.935	6.0480	0.9491	0.2130
0.690	1.1413	0.4275	0.1285	0.940	6.5618	0.9772	0.2157
0.700	1.1862	0.4380	0.1310	0.945	7.1665	1.0083	0.2185
0.710	1.2341	0.4488	0.1335	0.950	7.8994	1.0422	0.2216
0.720	1.2852	0.4602	0.1360	0.955	8.7887	1.0801	0.2248
0.730	1.3400	0.4718	0.1387	0.960	9.9023	1.1227	0.2280
0.740	1.3988	0.4839	0.1413	0.965	11.3352	1.1711	0.2313
0.750	1.4621	0.4964	0.1441	0.970	13.2469	1.2276	0.2349
0.760	1.5305	0.5096	0.1469	0.975	15.8183	1.2943	0.2389
0.770	1.6047	0.5233	0.1498	0.980	19.0372	1.3766	0.2429
0.780	1.6855	0.5376	0.1527	0.985	23.6340	1.4831	0.2472
0.790	1.7737	0.5528	0.1557	0.990	30.0514	1.6322	0.2518

## RESULTATS DE FLECHES POUR CERTAINES POUTRES ISOSTATIQUES

	$y_{\max}$ $\xi = 0,5$ $y_{0,5} = -0,25 K (\bar{\varphi}_{11} - \bar{Y}_{11}) l$
	$y_{\max}$ $\xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K (0,111 \bar{\varphi}_{11} - 0,111 \bar{Y}_{11} + 0,069 \bar{\varrho}_{11}) l$
	$y_{\max}$ $\xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K (0,125 \bar{\varphi}_{11} + 0,5 \bar{Y}_{11} + 0,5 \bar{\varphi}_{22} - \bar{Y}_{22}) l$
	$y_{\max}$ $\xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K (-0,04 \bar{\varphi}_{11} + 0,12 \bar{Y}_{11} + 0,24 \bar{\varphi}_{22} - 0,36 \bar{Y}_{22} + 0,045 \bar{\varrho}_{22}) l$
	$y_{\max}$ $\xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K (-0,018 \bar{\varphi}_{11} + 0,049 \bar{Y}_{11} - 0,296 \bar{\varphi}_{22} + 1,581 \bar{Y}_{22} + 0,75 \bar{\varphi}_{33} - 2,25 \bar{Y}_{33}) l$
	$y_{\max}$ $\xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K (-0,01 \bar{\varphi}_{11} + 0,026 \bar{Y}_{11} - 0,102 \bar{\varphi}_{22} + 0,383 \bar{Y}_{22} + 0,365 \bar{\varphi}_{33} - 0,734 \bar{Y}_{33} + 0,035 \bar{\varrho}_{33}) l$
	$y_{\max}$ $\xi = 1,0$ $y_{1,0} = -K (\bar{\varphi}_{11} - \bar{Y}_{11}) l$

TABLEAU 6

RESULTATS DE FLECHES POUR CERTAINES POUTRES ISOSTATIQUES

 <p style="text-align: center;"><math>\alpha = 1</math></p>	$y_{\max} \quad \xi = 0,5$ $\alpha \neq 1$ $y_{0,5} = -\frac{0,5}{(1-\alpha)^2} K [\bar{Y}_{11} - 0,5(1+\alpha)^2 \bar{Y}_{12} + \alpha^2 \bar{Y}_{23}]$
	$y_{\max} \quad \xi = 0,5$ $y_{0,5} = -0,5K(\bar{Y}_{11} - 0,5\bar{Y}_{12})$
	$y_{\max} \quad \xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K(-0,0157\bar{\phi}_{11} + 0,0469\bar{Y}_{11} + 0,1875\bar{\phi}_{22} - 0,22\bar{Y}_{22} + 0,0547\bar{\phi}_{22}) \cdot l$
	$y_{\max} \quad \xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K(-0,0067\bar{\phi}_{11} + 0,0179\bar{Y}_{11} - 0,2199\bar{\phi}_{22} + 1,0753\bar{Y}_{22} + 0,65\bar{\phi}_{33} - 1,69\bar{Y}_{33}) \cdot l$
	$y_{\max} \quad \xi = 0,5$ $y_{0,5} = -K(-0,0035\bar{\phi}_{11} + 0,0087\bar{Y}_{11} - 0,0729\bar{\phi}_{22} + 0,2552\bar{Y}_{22} + 0,3125\bar{\phi}_{33} - 0,5625\bar{Y}_{33} + 0,0382\bar{\phi}_{33}) \cdot l$

ANNEXE E - TABLEAUX D'ITERATION METHODE CONTINUE

























TABLEAU XIII TABLEAU D'ITERATION - METHODE CONTINUE

Poutre : B II

$$\begin{aligned} \mu u &= 42.53 \quad \text{KN m} \\ K &= 18.76 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi &= 2.1 \\ m &= 0.638 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu' u &= 28.36 \quad \text{KN m} \\ K' &= 18.94 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$N^0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$M$	0	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.825	1.000
$z$		0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	0.9583

$M_0$	0	10.9	21.8	32.7	32.7	32.7	21.8	10.9	0	$\Delta =$ -11.89%
$M$	0	8.0625	16.125	24.1875	21.35	18.5125	4.775	-8.9625	-22.7	
$m$	0	0.1896	0.3791	0.5687	0.5020	0.4353	0.1123	0.3160	0.8004	
$\chi \cdot 10^3$	0	3.669	8.179	15.366	12.314	9.891	2.128	-6.570	-40.591	
$\Sigma$	0	0.917	4.089	11.524	12.314	12.364	3.192	-11.447	-38.898	

$M_0$	0	11.2	22.4	33.6	33.6	33.6	22.4	11.2	0	$\Delta =$ -4.5 %
$M$	0	8.362	16.725	25.0875	22.25	19.412	5.375	-8.6625	-22.7	
$m$	0	0.1966	0.39325	0.5899	0.52316	0.4564	0.1264	0.3054	0.8004	
$\chi \cdot 10^3$	0	3.813	8.587	16.519	13.201	10.605	2.409	-6.307	-40.591	
$\Sigma$	0	0.953	4.293	12.389	13.201	13.256	3.603	-11.037	-38.898	
$\Delta\psi = \chi / 16$										
$\psi$										
$\Delta z = \psi / 16$										

$M_0$	0	11.3	22.6	33.9	33.9	33.9	22.6	11.3	0	$\Delta =$ -1.9 %
$M$	0	8.462	16.925	25.387	22.55	19.712	5.575	-8.562	-22.70	
$m$	0	0.1990	0.3979	0.5969	0.5302	0.4635	0.1311	0.3019	0.8004	
$\chi \cdot 10^3$	0	3.863	8.725	16.925	13.511	10.854	2.494	-6.221	-40.591	
$\Sigma$	0	0.966	4.362	12.694	13.511	13.568	3.742	-10.887	-38.898	
$\Delta\psi = \chi / 16$	0	.2414 .2414	.5453 .5453	1.0578 1.0578	.8444 .8444	.6784 .6784	.1559 .1559	-.3888 -.3888	- - 2.5369	
$\psi$	3.7317	3.4903	2.7038	1.1007	-0.8015	-2.3243	-3.1586	-2.9257		
$\Delta z = \psi / 16$	0.2332	.2181 .2181	.1690 .1690	.0688 .0688	-.0501 -.0501	-.1453 -.1453	-.1974 -.1974	-.1828 -.1828		
$z$		0.4513	0.8383	1.0761	1.0948	0.8994	0.5567	0.1765	-0.0063	











BIBLIOGRAPHIE

## BIBLIOGRAPHIE

1. ALL BAKER  
Ultimate load design of concrete structures  
proceedings of the institution of civil engineers.  
Vol. 21, February 1962
2. ALL BAKER  
The inelastic reinforced concrete space frame  
constructional engineering concrete.  
Avril - juin 1963
3. BELAZOUGUI Med  
Initiation au calcul du béton armé aux états  
limités.  
Cours enseigné à l'École Nationale Polytechnique  
d'Alger - 1983
4. CAPRA A. ; DAVIDOVICI -V  
Guide pratique d'utilisation des règles  
BAEL 80, Eyrolles, 1981
5. CEB - FIP  
Recommandations internationales pour le calcul  
et l'exécution des ouvrages en béton.  
6ème Congrès de la FIP, Prague, 1970
6. Code modèle CEB - FIP  
Pour les structures en béton.  
Volume II. ; Paris, 1978.
7. CHAVESPI ; SILVA A. ; HALEK Ch ;  
CARNIERO  
Redistribution des moments flechissants dans  
les structures hyperstatiques en béton armé.  
RILEM 61 - 1978.
8. M.Z. COHN  
Dimensionnement à la limite des ossatures en  
béton armé.  
CEB N° 10 J, Février 1976.

9. FOGLI Michel ; LEMAIRE Maurice ;  
SAINT ANDRE Michel. L'approche de Monté-Carlo dans les problèmes de sécurité.  
Annales de l'ITBTP, Mars - Avril 1982.
10. T. GODYCKI - CWIRKO Le cisaillement dans le béton armé  
Dunod, 1972
11. H.J. GREENBERG - W. PRAGER Limite design of beams and frames  
Proceedings of the american society civil engineers.  
Vol. 77 ; 1951.
12. GRELAT Alain Calcul non linéaire des ossatures en béton armé.  
Eyrolles, 1978.
13. GUYON M.Y. Note sur le calcul à rupture des contributions hyperstatiques.  
CEB, Décembre 1969.
14. KUCZYNSKI W. Nouvelle théorie des variations de la rigidité des poutres en béton armé.  
Annales de l'ITBTP, N° 206 ; 1965.
15. KUCZYNSKI W. Les structures en béton armé, la théorie continue de flexion des éléments en béton armé.  
P.W.N., Varsovie, 1971.
16. KUCZYNSKI W. Quelques remarques sur la nouvelle interprétation du comportement plastique des structures en béton armé.  
Séminaire : "Evolution et théories modernes inélasticité et plasticité" ; Paris, St Remy les Chevreuses, 1977.

17. KUCZYNSKI W. ; GOSZCZYNSKI S. Behaviour of hyperstatic reinforced concrete beams subject to increasing load  
AIL, Volume XXVI ; 1, 1980.
18. KUCZYNSKI W. Théorie non linéaire des poutres hyperstatiques en béton armé d'après un exemple vérifié.  
INZ, i - Bud, cahier n° 3. 1981, pp. -96 - 100.
19. KUCZYNSKI W. TRACZYK S. Experimental investigations on reinforced concrete continuous beams of T - Cross ; section subject to increasing load.  
CEB Bulletin d'information n° 153, Volume 1 ; Paris 1981.
20. LEVI M. ROBERT Emploi de la théorie des probabilités aux calculs de résistance des constructions.  
Extrait du bulletin de l'association internationale du congrès des chemins de fer septembre 1957.
21. LEVI M. ROBERT Calculs probabilistes de la sécurité des constructions.  
CEB N° 26 , 1961.
22. LEVI Franco Phénomènes d'adaptation et calculs à la rupture dans les constructions hyperstatiques en béton armé.  
Revue c TIDDSCHRIFT, 8, 1961.
23. GIORGIO MACCHI Proposition de calcul basée sur la théorie des rotations imposées.  
CEB, n° 21, 1960/

24. GIORGIO MACCHI  
Limite states design of statically indeterminate structures composed of linear members.  
Volume 6, 1969.
25. MALDAGUE J.C.  
Détermination expérimentale des lois moments - courbures.  
Annales de l'ITBTP, n° 209, 1965.
26. MASSONNET Ch. ; SAVEM  
Calcul plastique des constructions.  
Volume 1, Editions Welissen ; Liège - Belgique 1976.
27. MOENAERT P.  
Calcul à la rupture.  
DUNOD, 1973
28. MONNIER Th.  
The behaviour of continuous beams in reinforced concrete institute ton for building materials and building structures.  
Delft, 1971 ; rapport n° 31, 69 - 71.
29. B.G. NEAL et P.S. SYMONDS  
The rapid calculation of the plastic collapse load for a framed structure.  
Proc Inst. Civ Engrs, London, 1952.
30. J. PERCHAT  
Basic asumptions.  
CEB N° 82, Avril 1972.
31. J. PERCHAT  
Réglements étrangers de béton armé. Etude comparative des règles.  
CEB - BSI - DIN - ACI. Editions Eyrolles, 1982.
32. Jean SALENCON  
Ecoulement plastique libre et analyse limite pour les matériaux standards et non standards.  
Annales de l'ITBTP N° 152, 1972.

33. Jean SALENCON  
Théorie des charges limites.  
Ecole Polytechnique, Paris ; Séminaire  
Plasticité et viscoélasticité, 1972.
34. Jean SALENCON  
Théorèmes généraux de l'analyse limite.  
Conférence présentée le 4 avril 1973 à la  
salle Chaieil, 11 avenue Hoche Paris 8ème.
35. Jean SALENCON et  
Bernoud HALPEN  
Cours de calcul des structures anélastiques,  
élastoplasticité.  
Ecole Centrale des Ponts et Chaussées, 1981.
36. P.S. SYMONDS  
"Discussion of the paper by CH YANG, L.S.  
BEEDLE and B - D JOHNSTON".  
Welding journal, Research Supp. , janvier 1952.
37. THONNIER H.  
Redistribution des moments d'une poutre continue  
en béton armé.  
Annales de l'ITBTP, N° 102 ; Février 1982.
38. THONNIER H.  
Comparaison pratique du code modèle.  
CEB 78 et des règles BAEL 80.  
Annales de l'ITBTP, N° 404 ; Mai 1982
39. TICHY M. et RAKOSMIK J.  
Calcul plastique des ossatures en béton armé.  
Editions Eyrolles, 1975.
40. TOLACCIA S.  
Contribution expérimentale au calcul plastique  
des poutres hyperstatiques en béton armé.  
mémoires AI PC, Volume 22, 1962.
41. Règles BAEL 80  
DTU, 1980.