

**THESE**

16/86<sup>18</sup>

1 seul  
ex

PRESENTÉE A

**L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE**

**DEPARTEMENT DE L'HYDRAULIQUE**

PAR

**BOUALEM SALAH**

**POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN  
HYDRAULIQUE**

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU REGIME  
TRANSITOIRE DANS UNE CONDUITE FORCEE  
A ECOULEMENT GRAVITAIRE**

Soutenu le 2 Juillet 1986 devant la commission d'examen composée de :

MM. M. AIT ALI  
S. BEDNARDCZYK  
B. UTRYSKO  
A. PIMENOV  
A. KETTAB  
A. BILEK

Président  
Rapporteur

Examineurs

# THESE

PRESENTÉE A



L'ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT DE L'HYDRAULIQUE

PAR

BOUALEM SALAH

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER EN  
HYDRAULIQUE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DU REGIME  
TRANSITOIRE DANS UNE CONDUITE FORCEE  
A ECOULEMENT GRAVITAIRE

Soutenue le 2 Juillet 1986 devant la commission d'examen composée de :

MM. M. AIT ALI  
S. BEDNARDCZYK  
B. UTRYSKO  
A. PIMENOV  
A. KETTAB  
A. BILEK

Président  
Rapporteur

Examineurs

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات  
BIBLIOTHEQUE — المكتبة  
Route Nationale 100, Algérie

REMERCIEMENTS.

Je ne saurais dire qui, dans notre département hydraulique (E.N.P) ne m'a apporté, un jour ou l'autre, une aide, un conseil ou un encouragement, c'est pourquoi je voudrai tout d'abord remercier tous mes collègues.

Néanmoins certaines personnes en raison des circonstances ou de leur fonction, ont été plus proches de ce travail :

Monsieur le professeur S. BEDNARDCZYK a accepté de suivre mes travaux, ses conseils et son aide ont toujours été très fructueux, je le remercie très vivement pour avoir bien voulu être Directeur de thèse.

Monsieur B.UTRYSKO qui m'a beaucoup conseillé et qui a toujours été disponible quand j'ai sollicité son avis aux différentes étapes de ce travail, je le remercie très vivement d'être rapporteur de cette thèse.

Messieurs A.THUMA et A. PIMENOV qui m'ont apporté beaucoup de conseils il m'est très agréable de les remercier d'être rapporteurs de cette thèse.

C'est avec grand plaisir que je remercie Monsieur AIT ALI qui a bien voulu accepter d'être président de Jury.

Je ne pourrai également oublier de remercier Monsieur A.KETTAB, notre Directeur de département hydraulique pour ses conseils et qui a accepté également d'être membre de Jury.

Je tiens également à remercier

Monsieur BILEK A. pour son aide et son soutien et qui a accepté également d'être membre de Jury.

Mes chaleureux remerciements vont également à Monsieur R.CAEN professeur à L'I.N.P. de TOULOUSE, qui a bien voulu m'accueillir au sein de son laboratoire et qui m'a cessé de m'apporter son aide dans l'étape expérimentale.

AVANT - PROPOS.

L'objet de notre thèse a pour but la contribution à l'étude du régime transitoire dans une conduite quelconque en charge gravitaire dotée d'un réservoir à niveau établi dans le temps, à son extrémité amont, et d'un organe de régulation de débit à son extrémité aval : c'est une installation typique soit de l'eau potable soit d'une centrale hydraulique.

L'étude porte un grand intérêt pour les conduites, étant donné qu'en pratique le régime transitoire provoqué par les manoeuvres de l'organe de régulation placé en bout d'une conduite, occasionne des effets nocifs caractérisés par les phénomènes de surpression et de dépression pour les canalisations telles que la fatigue et la fissuration, notamment lors d'une vibration due à la variation de pression.

Dans cette circonstance, nous sommes appelés à protéger la canalisation par un moyen approprié plus efficace, pour son entretien et sa longévité : c'est l'optique de notre étude.

Ainsi nous débiterons tout d'abord par examiner les équations fondamentales du régime transitoire occasionné par un changement quelconque du débit d'écoulement.

Nous résumons quelques différentes méthodes d'études sur les différentes hypothèses simplificatrices. Au point de vue mathématique, nous traitons le régime transitoire d'une manière plus expéditive. En se basant sur les équations de quantité de mouvement et de continuité nous mettons en évidence une équation générale donnant la description du régime transitoire dans une conduite forcée à dimension variable (diamètre) le long de sa longueur et à écoulement gravitaire. Nos formules générales du type hyperbolique donneront la relation entre les deux paramètres essentiels de l'écoulement (pression et vitesse) dans le temps et dans l'espace. En appliquant la méthode de caractéristiques nous les transformerons en deux équations quasi-linéaires où les coefficients varient légèrement. Ces équations peuvent être intégrées numériquement le long d'une perturbation quelconque, ainsi nous pourrions trouver la variation de paramètres d'écoulement cherchés (pression, vitesse, débit).

En se basant sur notre formule, nous examinerons l'influence d'une loi de variation de débit sur la répartition de pression et de vitesse dans le temps. Nous définissons un coup de bélier parfait comme étant un cas spécifique du régime transitoire pour lequel la pression du liquide reste constante dans la conduite au cours de la manoeuvre.

Nous donnerons les formules et les méthodes pour déterminer un coup de bélier parfait. Néanmoins la présentation d'une méthode de prédétermination d'une loi de manoeuvre parfaite est à étudier.

Celle-ci nous assure la meilleure répartition de pression pour le comportement de la conduite.

PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES.

- $Q_0$  - Débit d'écoulement permanent  
 $Q$  - Débit d'écoulement transitoire.  
 $V_0$  - Vitesse d'écoulement permanent.  
 $V$  - Vitesse d'écoulement transitoire.  
 $D$  - Diamètre de la conduite.  
 $e$  - épaisseur de la conduite.  
 $E_0$  - Module d'Young de la conduite.  
 $E$  - compressibilité volumique du liquide.  
 $l$  - Longueur de la conduite.  
 $X$  - Abscisse suivant l'axe de la conduite.  
 $A$  - aire de section droite de la conduite.  
 $\rho$  - Masse volumique du liquide.  
 $H_0$  - Charge statique.  
 $h$  - Valeur du coup de bélier.  
 $\xi$  - Grandeur addimensionnelle du coup de bélier.  
 $c$  - célérité d'onde dans le fluide.  
 $k$  - coefficient de la variation de l'aire de la section droite de la conduite suivant sa propriété mécanique et sa contraction.  
 $K_1$  - Coefficient de compressibilité du système liquide-conduite.  
 $P$  - Pression en régime transitoire.  
 $M$  - Masse du liquide.  
 $\phi$  - Vitesse relative de déplacement en régime transitoire.  
 $Q\psi$  - coefficient de vitesse.  
 $m$  - nombre réduit d'étapes de manoeuvre.  
 $K$  - Coefficient de perte de charge de la conduite.  $( K = \frac{\lambda l}{D} )$   
 $S$  - Perte de charge occasionnée dans la conduite.  
 $P_s$  - Pression due à la perte de charge.

- $E_c$  - énergie cinétique
- $C$  - coefficient de débit au niveau de l'organe de régulation
- $h_m$  - valeur du coup de bélier parfait.
- $T$  - temps de manoeuvre.
- $\gamma$  - coefficient de pertes de charge singulière;

CHAPITRE .A. : INTRODUCTION.

- I. Description du régime transitoire:..... 1
- II. Recherche et analyse des diverses formules et théories..... 3
  - II.1. Généralités..... 3
  - II.2. Equations différentielles du régime variable..... 3
  - II.3. Formule de Joukowski:Allievi..... 4
  - II.4. Formule de Michaud..... 4
  - II.5. Méthode graphique de S.Bergeron..... 5
- III. Discussion et critique des équations du régime transitoire..... 8

CHAPITRE .B. : AUTRE PROPOSITION THEORIQUE D'ANALYSE DES FORMULES :.....;... 10

- I. Equation de continuité ..... 10
- II. Equation de quantité de mouvement..... 12
- III. Analyse et solution..... 14
- IV. Analyse physique..... 16
- V. Analyse de la célérité d'une perturbation..... 17
- VI. Transformation de l'équation du mouvement transitoire le long  
d'une perturbation..... 18
- VII. Les conditions aux limites..... 21
- VIII. Solution numérique..... 23

DE

CHAPITRE .C. : MANOEUVRE PARFAITE D'UN ORGANE REGULATION DU DEBIT DANS UNE  
CONDUITE A ECOULEMENT GRAVITAIRE..... 26

- I. Généralités..... 26
  - I.1. Influence de la loi de manoeuvre de l'organe de régulation  
du débit sur la grandeur et forme du coup de bélier..... 26
  - I.2. Loi parfaite de manoeuvre de l'organe de régulation du débit....  
..... 28
  - I.3. Domaine d'analyse et recherche d'une loi de manoeuvre  
parfaite..... 29

II. Coup de bélier parfait dans une conduite gravitaire où la perte de charge est négligée.....	29
II.1. Description du phénomène physique et son modèle mathématique....	29
II.2. Variation de la vitesse d'écoulement à l'extrémité aval de la conduite gravitaire pendant la modification du débit.....	32
II.3. Variation du coup de bélier à l'extrémité aval d'une conduite gravitaire pendant la modification du débit.....	32
II.4. coup de bélier parfait dû à l'arrêt complet du débit.....	33
II.5. Vérification de la formule : $t = i \Delta t + \frac{L-j}{2} \Delta t$ .....	40
II.6. Coup de bélier dû à l'intensification du débit.....	42
CHAPITRE .D. : PERTES DE CHARGE. EN REGIME TRANSITOIRE.....	48
I. Généralités.....	48
II. Influence de la perte de charge sur le coup de bélier pour une variation lente du débit d'écoulement.....	48
II.1. Variation linéaire de la vitesse.....	48
II.2. Variation parabolique de la vitesse.....	50
III. Représentation graphique.....	51
IV. Influence de la perte de charge et l'élasticité de la conduite sur la pression dynamique dans le cas d'une fermeture brusque d'un organe de régulation de débit.....	54
CHAPITRE .E. DETERMINATION DES VITESSES ET COUPS DE BELIER EN TENANT COMPTE DES PERTES DE CHARGE.....	59
I. Détermination des vitesses.....	59
II. Détermination des surpressions <del>dans</del> aux coups de bélier.....	61
II.1. Coup de bélier parfait, pour une <del>fermeture</del> de l'organe de régulation tenant compte des pertes de charge.....	62
II.2. Coup de bélier parfait pour une ouverture de l'organe tenant compte des pertes de charge.....	67

CHAPITRE .F. PROCEDE GENERAL DE DETERMINATION D'UNE LOI DE MANOEUVRE PARFAITE.....	84
I. Description générale.....	84
II. Exemple de calcul.....	86
1er Cas : sans tenir compte des pertes charge.....	87
2er Cas : en tenant compte des pertes de charge.....	88
CHAPITRE. G. ETUDE EXPERIMENTALE.....	92
I. Fermeture.....	95
II. Ouverture.....	97
III. Remarques.....	98
CONCLUSION GENERALE.....	99
BIBLIOGRAPHIE.....	100
APPENDICE.....	102

C H A P I T R E A.

INTRODUCTION.

I. Description du régime transitoire :

Nous donnons une brève définition des écoulements permanents et par la suite une description détaillée de l'écoulement transitoire.

L'écoulement est dit permanent lorsque les propriétés du fluide et les caractéristiques du mouvement se manifestant dans chaque point de l'espace occupé par le fluide en mouvement ne subissent aucun changement dans le temps, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'écoulement est dit uniforme lorsque dans un instant, le vecteur vitesse a même intensité, direction et sens, en tout point du fluide en mouvement.

Un débit croissant ou décroissant passant par une tuyauterie donne naissance à un écoulement varié, on peut avoir :

$$\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$$

Le régime transitoire est un régime variable dans le temps et dans l'espace se manifestant entre deux régimes stationnaires.

. La vitesse  $v = f(x, t)$

. La pression  $P = f(x, t)$ .

on peut citer quelques exemples :

- écoulement dans un réseau d'alimentation
- écoulement dans les machines hydrauliques à puissance variable.
- phénomène du coup de bélier.

L'écoulement en régime transitoire étant un écoulement où les paramètres hydrauliques changent, peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert soit dans une conduite en charge.

Dans le cas de notre sujet, nous faisons abstraction du, première cas et nous nous intéressons uniquement au second, c'est-à-dire au régime transitoire dans une conduite en charge à écoulement gravitaire. Concrètement, ce régime peut être "visualisé" à partir des écoulements variés constitués par des ondes de translation positives et négatives : si la manoeuvre d'un organe de distribution placé à l'extrémité d'une conduite munie d'un réservoir à niveau constant à son autre extrémité, provoque un décroissement de la pression d'eau, l'onde engendrée sera négative.

Une onde positive peut se propager soit vers l'amont, soit vers l'aval suivant les conditions. Le long d'une conduite, un accroissement ou un décroissement de débit donnés par une manoeuvre de l'organe de distribution, engendrent une onde qui se propage à l'amont ou à l'aval de l'organe.

L'onde remontante ainsi formée se prograge suivant l'axe de la conduite avec une certaine célérité jusqu'au réservoir où elle sera réfléchie jusqu'à l'organe. Le phénomène se reproduit indéfiniment s'il n'est pas freiné, amorti, par les pertes de charge résultant des frottements du liquide contre les parois de la conduite.

Si l'eau est considérée comme incompressible et la conduite inélastique, au cours des oscillations, nous avons le déplacement des tranches d'eau en masse d'une extrémité à l'autre de la conduite: on a affaire à des oscillations en masse. Tenant compte de la compressibilité de l'eau et de l'élasticité de la conduite, il n'est plus question d'oscillations en masse, la pression et le débit varient à la fois dans le temps et en chaque point de la conduite. Dans la pratique on envisage deux sortes de manoeuvre par rapport au temps d'aller et retour de l'onde :

- Manoeuvre brusque : Elle est caractérisée par un temps de fermeture ( $T$ ) inférieur au temps d'aller et retour de l'onde ( $\theta = \frac{2l}{c}$ ), et la surpression atteint la valeur la plus grande qu'elle peut prendre compte tenue des caractéristiques de la canalisation. Cette valeur se produit quand l'organe de distribution est complètement fermé.

- Manoeuvre lente : Elle est caractérisée par une durée de fermeture ( $T$ ) qui est supérieure à un temps d'aller et retour ( $\theta = \frac{2l}{c}$ ) de l'onde. Dans ce cas la surpression est diminuée par suite de l'onde réfléchie qui vient se composer avec l'onde incidente.

## II. RECHERCHE ET ANALYSE DES DIVERSES FORMULES ET THEORIE.

### II.1. Généralités :

L'étude du mouvement varié dans les canalisations a donné lieu à de nombreux travaux dont les plus anciens paraissent être ceux de G. Menabréa (1858) et de Castiglione (1854).

La solution a été obtenue par Riemann concernant le cas d'une corde tendue. En se basant sur ceci, Allievi a trouvé un système d'équations en chaîne plusieurs auteurs ont repris les résultats fondamentaux obtenus par Allievi et ont étudié leur applications aux problèmes particuliers posés par les conditions à l'étude de ces phénomènes complexes dont nous ne citons que quelques exemples.

### II.2. Equations différentielles du régime variable.

Les deux formules différentielles définissant le phénomène du coup de bélier, sont obtenues en appliquant à une tranche de la canalisation :

- Le théorème de quantité de mouvement
- Le théorème de continuité, en faisant intervenir la compressibilité du liquide et l'élasticité des parois de la canalisation.

\* L'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x} \quad (A.1)$$

\* L'équation de continuité :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (A.2)$$

avec :

$$c^2 = \frac{1}{\rho \left( \frac{1}{E} + \frac{D}{E_0 \cdot e} \right)}$$

A partir des équations (A.1) et (A.2), Allievi a mis en évidence le système d'équations :

- L'une donnant la valeur de la surpression ou dépression.
- et l'autre la valeur de la vitesse :

$$h = y - y_0 = F \left( t - \frac{x}{c} \right) + f \left( t + \frac{x}{c} \right)$$

$$v - v_0 = -\frac{g}{c} \left[ F \left( t - \frac{x}{c} \right) - f \left( t + \frac{x}{c} \right) \right] \quad (\text{A.3})$$

Donc la théorie d'Allievi a montré que la surpression existant en un point quelconque d'une conduite à caractéristique unique à un instant déterminé, résulte de la superposition à la pression statique de deux ondes  $F$  et  $f$  se déplaçant le long de la conduite en sens inverse l'une de l'autre avec une même célérité ( $c$ ).

### II.3. Formule de Joukowski - Allievi :

Jusqu'à Allievi, en se basant sur les équations de quantité de mouvement, et de continuité, a donné deux équations montrant la variation de la pression,  $h$ , et de la vitesse  $v$  en fonction du temps ( $t$ ) et du déplacement ( $x$ ).

$$h = f(t, x).$$

$$v = f(t, x).$$

Pour l'étude du mouvement des ondes ( $F$ ) et  $f$ , en prenant comme repère un observateur se déplaçant avec une célérité ( $c$ ) le long de la conduite. En se basant sur ces deux équations d'Allievi valables pour les deux cas de fermeture; Joukowski étudie leur application pour le domaine de fermeture brusque, c.à.d le temps de fermeture ( $T$ ) est inférieur au temps  $\theta$  d'aller et retour de l'onde, à l'étude de la surpression maximale qui est donnée par  $h = \frac{cv}{g}$ .

### II.4. Formule de Michaud :

Suite à l'étude de Joukowski, en se basant également sur les équations d'Allievi, Michaud étudie le cas où le temps  $T$  de fermeture est supérieur au temps  $\theta = \frac{2l}{c}$  d'aller et retour de l'onde, en supposant que la fermeture de la vanne suive une loi telle que le débit  $Q$  dans la canalisation soit une fonction linéaire du temps de la forme :

$$Q = Q_0 \left( 1 - \frac{t}{T} \right)$$

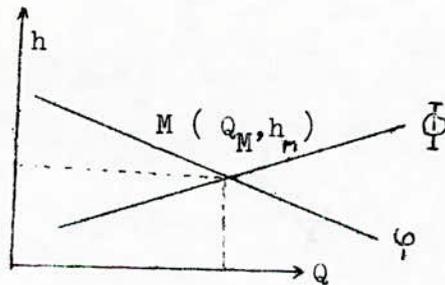
Il suppose également que le coup de bélier n'a pas d'incidence sur la loi de variation linéaire du débit  $Q$ .

Cette loi linéaire de diminution du débit correspond à des conditions très particulières de manoeuvre de la vanne; et effectivement ces conditions sont rarement réalisées dans le pratique. Mais seulement, elles permettent à Michaud de trouver la valeur de la surpression maximale d'après la formule:

$$h = \frac{2v_0 l}{g T} \quad (A.4.)$$

II.5. Méthode graphique de S. Bergeron :

Cette méthode permet d'aboutir d'une manière très élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes. Schneyder a proposé en 1929 une méthode graphique de calcul des coups de bélier dans les conduites de refoulement des pompes qu'il a ensuite étendu aux systèmes en charge quelconques en particulier aux conduites forcées. Bergeron considère un point (M) quelconque de la conduite et porte sur un graphique les valeurs du débit Q en abscisse et les valeurs de pression (h) en ordonnée.



avec  $\bar{I}$  et  $\bar{F}$  étant les pentes respectives de valeurs  $(\frac{c}{gA}$  et  $-\frac{c}{gA})$   $Q_M, h_M$  sont respectivement le débit et la pression en un point (M) de la conduite à un instant (t).

Il suppose également un observateur partant de ce point (M) au temps (t) où l'onde (F) passe en M et se déplaçant le long de la conduite avec la célérité (c) en sens inverse de la vitesse d'écoulement. Cet observateur verra l'onde (F) conserver sa valeur  $F = F_M$ , et en tout lieu où il passera; il constate que :

$$\frac{c}{gA} (Q_0 - Q) = F_M - f \quad (A.5.)$$

$$h - h_0 = F_M + \int$$

où  $F$  et  $f$  représentent les ondes de propagation au niveau de la conduite respectivement avec une célérité  $(+c)$  et  $(-c)$

$$h - h_M = \frac{c}{g A} (Q_0 - Q_M) \quad (A.6)$$

Au niveau de l'extrémité aval de la conduite (vanne) pour une ouverture, au temps  $(t)$ , égale à  $A_t < A$ , il trouve :

$$Q_t = C. A_t . \sqrt{2g (H_0 + h)} \quad (A.7)$$

II.6. Méthode de STREETER :

Streeter étudie également le coup de bélier pour les deux cas de fermeture, tout en négligeant les frottements et en supposant que le liquide et les parois de la conduite sont parfaitement élastiques.

De plus, l'étude se borne au cas où le dispositif de fermeture est placé à l'extrémité aval de la conduite.

L'auteur a démontré que la valeur maximum de l'accroissement de pression dans la région du dispositif de fermeture reste inchangée :

- Si la fermeture de la vanne reste inchangée.
- et si la durée de la fermeture est plus courte que la durée de parcours par l'onde entre la vanne et l'extrémité amont de la conduite.

L'action des frottements, l'élasticité imparfaite du liquide et de la conduite négligées dans les considérations de STREETER, aboutissent à l'amortissement graduel des vibrations occasionnées par le coup de bélier, et conduisent finalement à l'état de repos du liquide. Si la fermeture de la vanne se fait par étape successive comportant des fermetures partielles instantanées l'accroissement de pression occasionné par chacune des étapes est :

$$\Delta h = \frac{C \Delta v}{g} \quad (A.8)$$

$\Delta v$  - décroissement de vitesse provoqué par la fermeture partielle de la vanne  
 Dans le cas où la fermeture totale est effectuée avant que la première onde réfléchie soit arrivée à la vanne, l'accroissement de la hauteur piézométrique aura pour valeur :

$$\sum \Delta h = \frac{C \sum \Delta v}{g} = \frac{C v_0}{g} \quad (A.9)$$

soit la même que celle qui est occasionnée par une fermeture instantanée. Cette hauteur piézométrique atteinte à l'instant de la fermeture complète persiste jusqu'à l'instant :

$$t = \frac{2L}{c}$$

STREETER utilise un procédé numérique pour calculer la surpression se manifestant à la section de la vanne. Il considère la vanne comme un orifice caractérisé par un coefficient de débit C et une aire de section A<sub>v</sub> variable, ainsi il trouve :

$$Q = v.A = C A_v \cdot \sqrt{2g (H_0 + h)} \quad (A.10)$$

en régime permanent il voit que :

$$v_0 A = C \cdot A_{v_0} \cdot \sqrt{2g H_0}$$

d'où :

$$\frac{v}{v_0} = \frac{A_v}{A_{v_0}} \cdot \sqrt{\frac{H_0 + h}{H_0}}$$

$$\frac{\Delta h}{H_0} = \frac{cv}{g H_0} \cdot \frac{\Delta v}{v_0} \quad (a)$$

$$\frac{v - \Delta v}{v_0} = \left( \frac{A_v}{A_{v_0}} \right) \cdot \sqrt{\frac{h + \Delta h}{H_0}} \quad (b).$$

(a) et (b) permettent de déterminer  $\frac{\Delta h}{H_0}$  et  $\frac{\Delta v}{v_0}$  pour un temps  $t = t_1$

les nouvelles valeurs de v, h et  $\frac{A_v}{A_{v_0}}$  seront substituées dans (a) et (b) pour

calculer  $\left( \frac{\Delta h}{H_0} \right)_{t_2}$  et  $\left( \frac{\Delta v}{v_0} \right)_{t_2}$  pour un temps  $t = t_2$  et ainsi de suite.

### III. Discussion et critique des équations du régime transitoire.

#### III.1. Equations d'Allievi :

Les équations d'allievi ont été établies sans tenir compte des frottements du liquide contre la paroi de la conduite. Ces équations nous permettent de calculer la surpression en hauteur d'eau en chaque point de la conduite en la rapportant à la pression statique  $H_0$  cette surpression est donnée par :

$$Z = H_0 + h.$$

$h$  - valeur du coup de bélier en tel point.

La pression initiale effective est la pression dynamique  $H$  obtenue en diminuant la pression statique  $H_0$  de la perte de charge qui, pratiquement, n'est pas nulle.

D'autre part la valeur du coup de bélier est indépendante de la pression initiale. Donc en pratique on assiste à une pression totale effective au temps ( $t$ ) avec un coup de bélier de hauteur piézométrique ( $h$ ), qui est de :

$$Z = H + h \text{ au lieu de : } Z = H_0 + h.$$

Les équations d'Allievi sont valables, en effet, avec un diamètre et une épaisseur déterminés. De plus, il faut prendre ces équations sous leur forme initiale résultant de l'hypothèse faite qu'il existe un réservoir à niveau constant à l'amont de la conduite. De même, on peut citer que pour les conduites télescopiques les équations d'Allievi s'appliquent pour chaque tronçon, mais elles ne peuvent s'appliquer pour les tronçons de diamètre graduellement variable. Le champ d'application des équations d'Allievi au calcul analytique des coups de bélier est assez restreint et laborieux. Seuls quelques cas très simples peuvent être traités.

#### III.2. Formule de Joukowski

La formule de Joukowski a été obtenue en se basant sur les équations d'Allievi. Elle donne la surpression maximale  $\frac{c v_0}{g}$  et la dépression maximale  $-\frac{c v_0}{g}$  juste à l'amont d'une vanne, ceci sans tenir compte des frottements contre la paroi de la conduite, ce qui n'est pas conforme à la pratique. En outre la formule de Joukowski s'applique dans le domaine d'une fermeture (temps de fermeture inférieur au temps d'aller et retour de l'onde). brusque.

### III.3. Formule de Michaud :

D'une façon analogue, cette formule s'obtient en appliquant les équations d'Allievi à l'amont de la vanne pour le cas d'une fermeture lente (temps de fermeture supérieur au temp d'aller et retour de l'onde); bien entendu en négligeant les frottements du liquide contre les parois de la conduite. En fait cette formule n'est valable que pour une loi de fermeture correspondant à une variation linéaire du débit; mais cette loi est rarement réalisée en pratique. On adopte cette loi car c'est la seule qui permet une interprétation simple des résultats donnés par les équations d'Allievi les formules ci-dessus ne tiennent pas compte des caractéristiques variées des conduites.

### III.4. Méthode graphique de Sch. Bergeron :

Cette méthode permet d'aboutir d'une manière très élégante et relativement simple à une solution générale des problèmes qui, en première vue, paraissent les plus compliqués. Cette méthode touche le calcul du coup de bélier dans les conduites de refoulement des pompes et, a été ensuite étendue au système en charge quelconque. (Conduites forcées gravitaires).

En modifiant les équations d'Allievi, Bergeron trouve deux relations ayant des pentes égales et opposées ( $\frac{c}{gA}$  et  $-\frac{c}{gA}$ ) où les fonctions F et f n'apparaissent pas. De même, on peut citer également que cette méthode s'applique pour le refoulement dans une conduite à caractéristique unique dépourvue de système de protection.

Le cas du réseau de distribution et du tronçon de diverses sections est inclus dans le domaine d'application de la méthode de Bergeron.

C H A P I T R E . B .

AUTRE PROPOSITION THEORIQUE D'ANALYSE DES FORMULES.

Pour l'analyse des formules, S. BEDNARDCZYK, eut l'idée d'utiliser une méthode d'analyse, en considérant l'équation de continuité et celle de quantité de mouvement, pour trouver une équation générale du régime transitoire dans les conduites à section variable.

I. Equation de quantité de masse :

L'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial \rho Q}{\partial x} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.1})$$

en posant :  $Q = v.A.$

et  $\Omega = \rho A.$

L'équation ( II.1.) devient :

$$\frac{\partial v \cdot \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.2})$$

cequi donne :

$$\Omega \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.3})$$

en tenant compte que  $\Omega = \rho A$ , nous obtenons :

$$\rho A \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho A}{\partial x} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.4})$$

En dérivant (B.4), on obtient :

$$\rho A \frac{\partial v}{\partial x} + v.A. \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \rho \cdot \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.5})$$

En simplifiant l'équation (B.5) par  $\rho A$ :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.6})$$

ou bien :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\rho} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\partial t} \right) + \frac{\partial A}{A} \left( \frac{v}{\partial x} + \frac{1}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{B.7})$$

sous une forme plus simple :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{v}{\partial x} + \frac{1}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial A}{A} \right) = 0 \quad (\text{B.8})$$

En éliminant  $\rho$  et  $A$  ; on pose :

$$a) \frac{\partial \rho}{\rho} = \frac{\partial P}{E}$$

En divisant par le gradient du temps, on aura :

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

et  $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{E} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$

$$b) \frac{\partial A}{A} = \frac{k}{E_0} \partial P$$

de même on peut écrire :

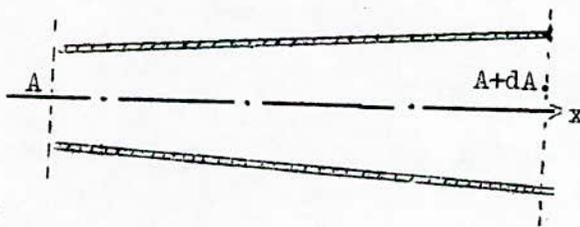
$$\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{k}{E_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial t}$$

avec :

$k$  - coefficient tenant compte de la variation de l'aire de la section droite de la conduite suivant sa propriété mécanique et sa contraction.

Dans le cas général, où nous avons la variation de l'aire en fonction de la distance, c'est-à-dire  $A = f(x)$ , comme l'indique le schéma suivant : (fig.a)

(fig.a)



Nous sommes conduits à écrire :

$$\frac{\partial A}{A \partial x} = f + \frac{k}{E_0} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \quad (B.9)$$

avec  $f = \frac{dA}{A \cdot dx}$

$da$  - étant la variation de la section sur une distance  $dx$  d'un élément infiniment petit.

$f$  - coefficient d'élargissement constant sur un élément  $dx$  déterminé.

Nous portons la formule (B.9) dans l'équation de continuité (B.6), tenant compte de (a) et (b); on obtient:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{E} \frac{\partial P}{\partial x} + v.f + v \frac{k}{E_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{k}{E_0} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{E} \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

ou bien :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + v \left( \frac{1}{E} + \frac{k}{E_0} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \left( \frac{k}{E_0} + \frac{1}{E} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + v.f = 0$$

pour plus de simplification, on pose :

$$k_1 = \frac{1}{E} + \frac{k}{E_0} ;$$

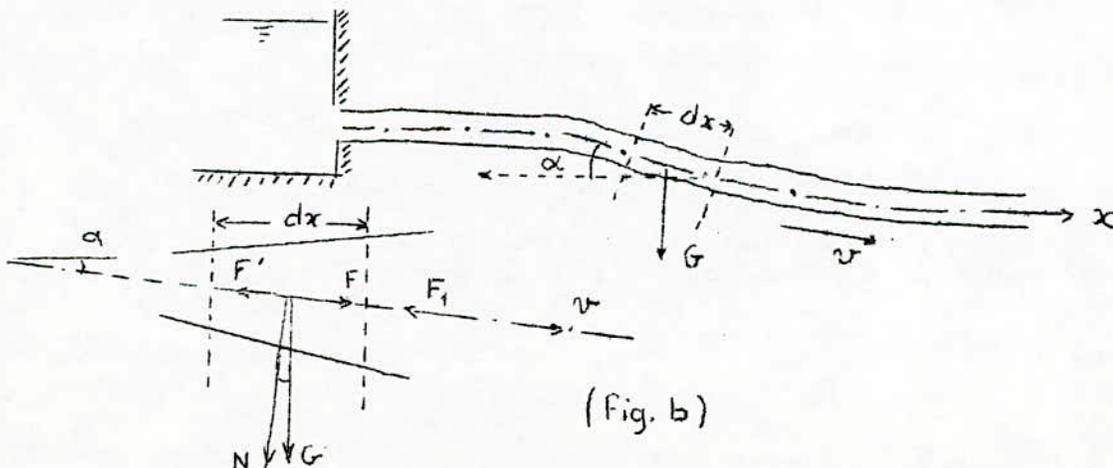
$$\text{d'où on tire : } \frac{\partial v}{\partial x} + v k_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + k_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + v f = 0 \quad (\text{B.10})$$

La formule (B.10) représente l'équation de continuité dans une conduite où l'aire de sa section varie suivant sa longueur.

## II. Equation de quantité de mouvement :

Prenons une conduite gravitaire, et examinons l'écoulement variable le long de la conduite suivant son axe "x"

Pour cela choisissons un élément de liquide sur la distance  $dx$  où l'axe de la conduite est incliné par rapport à l'horizon avec un angle  $\alpha$ . (schéma ci-dessous) (fig.b)



Si nous négligeons les valeurs très petites engendrées à la variation de section droite de la conduite, nous pouvons établir la masse d'eau contenue dans cet élément :

$$M = \rho A dx.$$

sur cet élément de liquide agissent les forces suivantes :

\* La force de gravité :

$$G = gM \text{ ou bien } G = \rho g A dx.$$

sa composante longitudinale à l'axe x de la conduite est donnée par :

$$F = G \sin \alpha \text{ ou bien } F = \rho g A dx \sin \alpha$$

\* La force due aux pertes de charge par frottement :

$$dP_s = \rho g dS = \rho g i dx.$$

$$Adp_x = F' = \rho A i dx.$$

Où le paramètre "i" représente la pente.

\* La force due à la variation de pression (poussée hydrostatique) qui suit l'axe (x)

$$F_1 = A \cdot \frac{\partial P}{\partial x} dx.$$

Cette force  $F_1$  n'est que la différence de poussée hydrostatique dans la section de sortie et la section en projection sur l'axe(x).

Pour trouver l'équation de quantité de mouvement qui suit l'axe (x).

nous appliquons le théorème de d'Alembert :

$$\frac{dv}{dt} \cdot M = \sum F_i \text{ ou bien } \frac{dv}{dt} \cdot M = F - F' - F_1 \quad (\text{B.11})$$

En tenant compte des expressions déjà établies, nous obtenons :

$$\frac{dv}{dt} \cdot \rho A dx = \rho g A dx \sin \alpha - g A i dx - A \frac{\partial P}{\partial x} dx \quad (\text{B.12})$$

en divisant par  $\rho A dx$ .

cette formule est semblable à la formule d'Euler établie pour le liquide parfait.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x}$$

où la force massique de mouvement rapportée à l'unité de masse du liquide (accélération du mouvement) suivant l'axe (x) est :

$$X = g (\sin \alpha - i).$$

Notre équation de mouvement établie pour le liquide réel tient compte

de l'inclinaison de la conduite et de la perte de charge.  
 En régime non permanent quand la vitesse de mouvement varie avec le temps pour l'écoulement unidimensionnel, l'accélération suivant l'axe (x) est :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{B.14})$$

En conséquence l'équation de quantité de mouvement non permanent une conduite gravitaire est donnée par l'expression :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial x}{\partial t} = g (\sin \alpha - f) \quad (\text{B.15})$$

### III. Analyse et solution :

Dans le régime transitoire : on a :

- Deux variables indépendantes x et t (longueur, temps).
- Deux variables dépendantes v (x, t) et p (x, t).

c'est à dire la vitesse en fonction de la longueur et du temps, et la pression en fonction de la longueur et du temps.

On obtient le système à partir des équations B.10) et (B.15)

$$\frac{\partial x}{\partial t} + v k_1 \frac{\partial x}{\partial p} + k_1 \frac{\partial t}{\partial p} + v f = 0$$

$$v \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial v} + g (1 - \sin \alpha) = 0 \quad (\text{B.16})$$

Nous avons donc deux équations de type hyperbolique à quatre inconnues :

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial p} \\ 1 & v k_1 & 0 & k_1 \\ v & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\rho}{\rho} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial p} & 0 \end{array} \quad (\text{B.16.a})$$

Il faut avant tout trouver ces quatre inconnues pour cela, il faut résoudre le système (B.16).

En prenant en considération deux autres équations qui sont :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial t} dt \rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (a) \quad (B17)$$

et  $dp = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt \rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{dt} - \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (b)$

Introduisons ces deux équations dans le système (B.16), nous obtenons :

\*A partir de l'équation de continuité : (1ere équation de B.16)

$$\frac{\partial v}{\partial x} + vk_1 \frac{\partial P}{\partial x} + k_1 \frac{dP}{dt} - k_1 \frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + vf = 0.$$

ou  $\frac{\partial v}{\partial x} + k_1(v - \frac{dx}{dt}) \frac{\partial P}{\partial x} + k_1 \frac{dP}{dt} + vf = 0 \quad (B.18)$

\*A partir de l'équation de quantité de mouvement :

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + g(i - \sin \alpha) = 0$$

ou bien  $(v - \frac{dx}{dt}) \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} + g(i - \sin \alpha) = 0 \quad (B.19)$

si nous posons :

$$\phi = v - \frac{dx}{dt}$$

$$a_x = -g(i - \sin \alpha).$$

Nous avons un système d'équations avec deux inconnues :

$$\frac{\partial v}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial x}; \text{ en remplaçant } \phi \text{ et } (a_x) \text{ dans (B.18) et (B.19)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + k_1 \phi \frac{\partial P}{\partial x} + k_1 \frac{\partial P}{\partial t} + vf = 0 \quad (1) \quad (B.20)$$

$$\phi \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - a_x = 0 \quad (2)$$

on résoud le système (B.20), en multipliant (1) et (2) respectivement par

$\frac{1}{\rho}$  et  $(-k_1 \phi)$ . La solution donne  $\frac{\partial v}{\partial x}$  et  $\frac{\partial P}{\partial x}$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k_1 \phi}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{k_1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \frac{vf}{\rho} = 0$$

$$-k_1 \phi^2 \frac{dv}{dx} - k_1 \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - k_1 \phi \frac{dv}{dt} + k_1 \phi a_x = 0 \quad (B.21)$$

en sommant, les deux équations de ( B.21), nous trouvons :

$$\left( \frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{k_1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} - k_1 \phi^2 \frac{dv}{dt} + \frac{vf}{\rho} + k_1 \phi a_x = 0 \quad ( B.22)$$

ou :

$$\left( \frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left( k_1 \frac{\partial P}{\partial t} + vf \right) - k_1 \phi \frac{dv}{dt} + k_1 \phi a_x = 0$$

$$d'où : \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k_1 \phi \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) - \frac{1}{\rho} \left( k_1 \frac{\partial P}{\partial t} + vf \right)}{\left( \frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2 \right)} \quad ( B.23)$$

Reprenons le système ( B.20), et multiplions respectivement (1) et (2) par  $(-\phi)$  et par (1), nous obtenons :

$$-\phi \frac{\partial v}{\partial x} - k_1 \phi^2 \frac{\partial P}{\partial x} - k_1 \phi \frac{\partial P}{\partial t} - \phi vf = 0 \quad (B.24)$$

$$\phi \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - a_x = 0$$

Additionnons membre à membre :

$$\left( \frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2 \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - a_x - k_1 \phi \frac{\partial P}{\partial t} - \phi vf = 0 \quad ( B.25)$$

où bien :

$$\left( \frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2 \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{dv}{dt} - a_x - \phi \left( k_1 \frac{\partial P}{\partial t} + v.f \right) = 0$$

$$d'où on tire : \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\phi \left( k_1 \frac{\partial P}{\partial t} + v.f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right)}{\frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2}$$

Remarque :

Dans les formules (B.23) et (B.26), on constate que les dénominateurs sont les mêmes, par contre les numérateurs se distinguent avec une même structure.

#### IV.) Analyse physique :

$\frac{\partial P}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  représentent respectivement la pente de la ligne de pression et de la vitesse successivement dans un point d'abscisse (x) pour un temps constant. Supposons maintenant que dans un point, il existe une discontinuité de la ligne, ceci entraîne que le dénominateur soit égal à zéro.

$$d'o\grave{u} \quad \frac{1}{\rho} - k_1 \phi^2 = 0$$

$$\frac{1}{\rho} = k_1 \phi^2 \quad (B.27)$$

et dans ce cas les numérateurs des formules (B.23) et (B.26) doivent être nuls puisque  $\frac{\partial P}{\partial x}$  et  $\frac{\partial v}{\partial x}$  ont des valeurs bien déterminées.

$$\text{Nous avons donc ;} \quad k_1 \phi \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) - \frac{1}{\rho} \left( k_1 \frac{dP}{dt} + v f \right) = 0 \quad (1)$$

$$- \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) + \phi \left( k_1 \frac{dP}{dt} + v f \right) = 0 \quad (2)$$

Multiplions l'équation (2) du système par  $(k_1 \phi)$ , nous obtenons :

$$k_1 \phi \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) - k_1 \phi^2 \left( k_1 \frac{dP}{dt} + v f \right) = 0$$

$$\text{or} \quad k_1 \phi^2 = \frac{1}{\rho} \quad \text{d'après (B.27.)}$$

$$\text{donc :} \quad k_1 \phi \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) - \frac{1}{\rho} \left( k_1 \frac{dP}{dt} + v f \right) = 0 \quad (B.29)$$

Nous obtenons ainsi la même formule que (1) (B.22) elle représente le régime transitoire dans un point de discontinuité, qui se déplace le long de la conduite. Ce déplacement est décrit par la formule déjà trouvée :

$$\frac{1}{\rho} = k_1 \phi^2$$

$$\text{avec} \quad \phi = v - \frac{dx}{dt}$$

$\frac{dx}{dt}$  - représente la vitesse réelle de déplacement de cette discontinuité, pour l'analyse du régime transitoire nous retenons la formule la plus simple qui est la suivante :

$$\phi \left( k_1 \frac{dP}{dt} + v f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) = 0 \quad (B.30)$$

#### V - Analyse de la célérité d'une perturbation.

Nous avons déjà obtenu la formule suivante :

$$\frac{1}{\rho} = k_1 \phi^2$$

Signalons que cette équation représente la relation entre la célérité d'une perturbation et les propriétés physiques du liquide de dt de la conduite.

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{1}{\rho k_1}}$$

si nous posons  $\phi = v - \frac{dx}{dt}$  ., nous pouvons écrire :

$$k_1 = \frac{1}{E} + \frac{k}{E_0} = \frac{1}{E} \left( 1 + k \frac{E}{E_0} \right) = \frac{1 + k \frac{E}{E_0}}{E}$$

$$\text{et } \frac{1}{k_1} = \frac{E}{1 + k \frac{E}{E_0}}$$

Alors, nous avons :

$$v - \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{E}{\left(1 + k \frac{E}{E_0}\right)}} \quad (B.30)$$

ou bien :

$$v - \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1 + k \frac{E}{E_0}}}$$

d'où on tire :

$$\frac{dx}{dt} = c \pm \frac{c_0}{\sqrt{1 + k \frac{E}{E_0}}} \quad (B.31)$$

le signe (+) pour une perturbation montante (fig.a)

le signe (-) pour une perturbation descentante (fig a).

L'équation (B.30 a) donne le cheminement d'une perturbation dans la conduite. La vitesse v est négligeable en comparaison avec c<sub>0</sub>, de l'ordre de 0,1% dont nous ne tenons pas compte dans le calcul.

donc c: =  $\pm \frac{c}{\sqrt{1 + k \frac{E}{E_0}}}$  (B.32.)

- positive pour une perturbation qui se déplace suivant le sens positif de l'axe (x).
- négative pour une perturbation qui se déplace dans le sens contraire de l'axe (x).

VI. Transformation de l'équation de mouvement transitoire de long d'une perturbation :

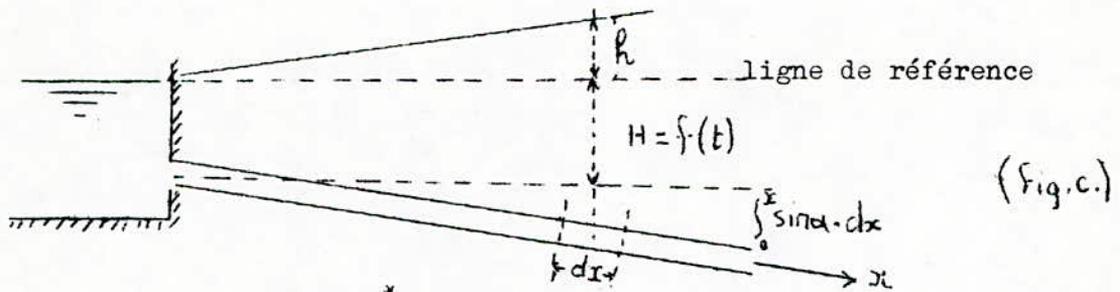
l'équation (B.30) donne :

$$\phi \left( k_1 \frac{dP}{dt} + v f \right) - \left( \frac{dv}{dt} - a_x \right) = 0$$

cette formule n'est pas commode pour le calcul de plus elle comporte des grandeurs qui se distinguent trop entre elles. Alors qu'en Hydraulique les formules utilisées pour le calcul se basent <sup>sur</sup> la hauteur de pression: de ce fait nous introduisons le principe ci-dessous :

- Déterminons d'abord la pression :

soit (h) la hauteur de pression par rapport à un niveau de référence (niveau du plan d'eau), en un point dont l'abscisse est (x.) (Fig.C.)



$$P = \rho g \left( \int_0^x \sin \alpha \, dx + H + h \right)$$

$$dP = \rho g \left( \sin \alpha \, dx + dh \right).$$

$H_0$  - étant une constante pour un élément (dx) très petit (faible variation).

Nous avons maintenant :

$$dP = g \left( dx \cdot \sin \alpha + dh \right) \tag{B.33}$$

$$a_x = g \left( \sin \alpha - i \right).$$

$$k_1 = \frac{1}{\rho \phi^2}$$

En remplaçant  $a_x$  et  $k_1$  par leurs valeurs dans (B.30), nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{1}{\rho \phi} \cdot \frac{dP}{dt} + \phi v f - \frac{dv}{dt} + g \left( \sin \alpha - i \right) = 0 \tag{B.34}$$

remplaçons dp par sa valeur pour tenir compte du terme dh (coup de bélier), on aura :

$$\frac{\rho g}{\rho \phi} \sin \alpha \frac{dx}{dt} + \frac{\rho g}{\rho \phi} \frac{dH}{dt} + \phi v f - \frac{dv}{dt} + g \left( \sin \alpha - i \right) = 0$$

EN multipliant cette équation par la quantité  $\frac{\bar{\Phi}}{g} \frac{dt}{g}$ , on a :

$$\sin \alpha \cdot dx + dh + \frac{\bar{\Phi}^2}{g} \frac{dt}{g} v f - \frac{\bar{\Phi}}{g} dv + \bar{\Phi} \sin \alpha dt - \bar{\Phi} i dt = 0 \quad (\text{B.34 a})$$

rappelons que  $\bar{\Phi}$  est la vitesse relative, donnée par :

$$\bar{\Phi} = v - \frac{dx}{dt}$$

Cette vitesse relative ne se distingue pas de la vitesse réelle de la propagation d'une perturbation.

Notons que  $dx$  est toujours positif si nous nous déplaçons dans le sens  $(x)dx > 0$  :

Remplaçons  $\bar{\Phi}$  par sa valeur dans (B.34 a).

$$\sin \alpha dx + dh + \frac{\bar{\Phi} \cdot f \cdot v}{g} \left( v - \frac{dx}{dt} \right) dt - \frac{\bar{\Phi}}{g} dv + v \sin \alpha dt - \frac{dx}{dt} \sin \alpha dt - v \cdot i dt + \frac{dx}{dt} \cdot i dt = 0$$

Sachant que  $idx = ds$  désigne la perte de charge.

on obtient :

$$dh - \frac{\bar{\Phi}}{g} dv + ds - \frac{\bar{\Phi} f v}{g} dx + \frac{\bar{\Phi} \cdot f \cdot v^2}{g} dt + v \sin \alpha dt - v \cdot i dt = 0$$

$$\text{or : } v \sin \alpha dt - v i dt = v dt (\sin \alpha - i).$$

et

$$\sin \alpha - i = \frac{dx}{v dt} = \frac{dv}{g dt}$$

ce qui donne :

$$v dt (\sin \alpha - i) = v dt \cdot \frac{dv}{g dt} = \frac{v}{g} \cdot dv$$

on obtient donc :

$$dh + \frac{v}{g} dv - \frac{\bar{\Phi}}{g} dv + ds - \frac{\bar{\Phi} \cdot f \cdot v \cdot dx}{g} + r = 0 \quad (\text{B.35})$$

$r$  - signifie reste.

De même nous constatons que :

$$\frac{v}{g} dv - \frac{\bar{\Phi}}{g} dv = \frac{dv}{g} (v - \bar{\Phi}) = \frac{dv}{g} \cdot \frac{dx}{dt} = \pm \frac{c}{g} dv.$$

En outre nous avons pour l'élargissement :  $\frac{dA}{Adx} = f$

la formule (B.35) donne :

$$dh \pm \frac{c}{g} dv + ds \pm \frac{cv}{g} \frac{dA}{A} + r = 0 \quad (\text{B.36}).$$

r - sera égal à :

$$r = \frac{\bar{\Phi} \cdot f \cdot v^2 \cdot dt}{g} + v \cdot \sin \alpha \cdot dt - \frac{v}{g} dv - v i dt. \quad (B.37)$$

Puisque :  $v \sin \alpha dt - v i dt - \frac{v}{g} dv = v dt (\sin \alpha - i) - \frac{v}{g} dv = 0$ .

étant donné que v est très petit vis-à-vis de  $\frac{dx}{dt}$ , nous pouvons poser :

$$\bar{\Phi} = \pm \frac{dx}{dt} \quad dt = \pm \frac{dx}{\bar{\Phi}}$$

remplaçons dt par sa valeur dans (B.37), nous obtenons :

$$r = - \frac{\bar{\Phi} \cdot f \cdot v^2}{g} \frac{dx}{\bar{\Phi}} - \frac{v \cdot \sin \alpha \cdot dx}{\bar{\Phi}} - \frac{v}{g} dv + v \cdot i \cdot \frac{dx}{\bar{\Phi}}$$

étant donné que  $f = \frac{dA}{A \cdot dx}$ .

d'où :

$$r = - \frac{v^2}{g} \frac{dA}{A} - \frac{v}{g} dv + \frac{v}{\bar{\Phi}} (\sin \alpha - i) dx.$$

on constate que le deuxième et troisième termes sont égaux d'après (B.37) et que  $\frac{dA}{A} = 0$ , on peut poser sans faute importante que r tend vers zéro étant donné que les termes sont petits en comparaison avec les termes de (B.36), en effet l'équation (B.36). s'écrit :

$$dh \pm \frac{c}{g} dv + ds \pm \frac{cv}{g} \frac{dA}{A} = 0 \quad (B.38)$$

si la section est constante le long de (x), nous aurons :

$$dh \pm \frac{c}{g} dv + ds = 0 \quad (B.39)$$

(B.38) est une équation générale se résolvant par méthode approchée s'appliquant aux conduites forcées de section variable alimentant les centrales hydro-électriques. Elle décrit le régime transitoire qui suit une perturbation.

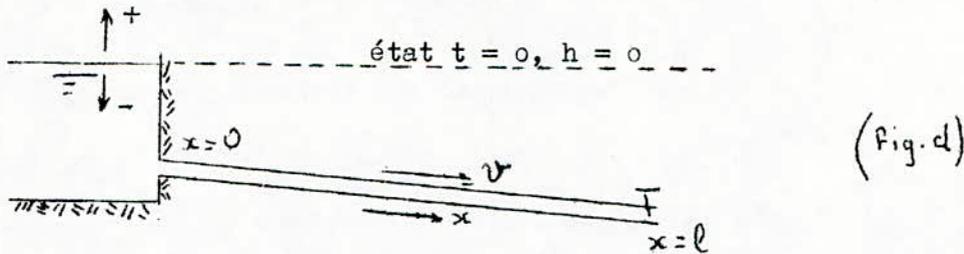
### VII. Les conditions aux limites :

On considère l'origine des "x" égale à "zero", à l'extrémité amont, et l'origine des temps (t=0) à l'extrémité aval de la conduite au droit de l'organe; nous aurons ainsi deux limites à ces deux extrémités de la conduite qui seront formulées par deux fonctions à savoir :

\* Une fonction dépendant de la valeur (h) du coup de belier.

\* Une autre fonction dépendant de la vitesse (v).

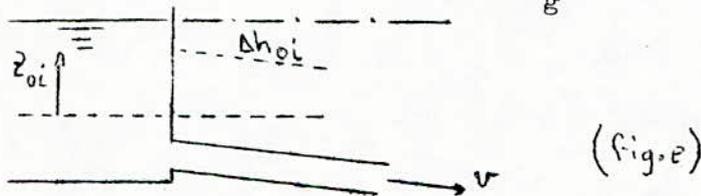
Nous allons voir ce qui se passe au niveau du réservoir, c'est-à-dire à l'amont de la conduite pour  $x = 0$ . En ce qui concerne les conditions à la limite ( $x = \ell$ ) au droit du dispositif (aval de la conduite) ça fera l'objet d'une étude plus détaillée dans les prochains chapitres.



1) vitesse positive  $v > 0$  si son vecteur est dans le même sens que  $x$  les pas de calcul  $\Delta t = \frac{\theta}{i}$ ; ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) avec  $\theta = \frac{2\ell}{c}$

Au niveau du réservoir, on tient compte de la perte de charge singulière (Fig. e)

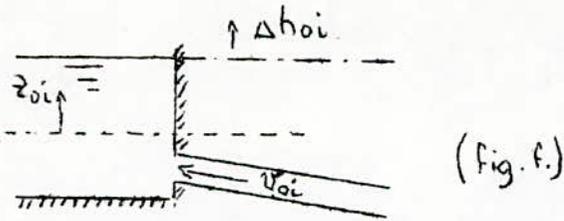
$$\Delta h = \gamma \cdot \frac{v^2}{2g}$$



Pour une étape "i" la perte de charge sera  $\Delta h_{0i} = \gamma \cdot \frac{v_{0i}^2}{2g}$

dans ce cas  $h_{0i} = z_{0i} - \gamma_{0i} \cdot \frac{v_{0i}^2}{2g}$  avec  $v_{0i} > 0$

le coefficient  $\gamma_{0i}$  est le coefficient de perte de charge quand l'eau sort du réservoir :



La vitesse est dans le sens contraire à celui de l'axe, l'eau tend à entrer dans le réservoir. (Fig.F)

$$\text{Dans ce cas } h_{oi} = Z_{oi} + \gamma_{o2} \frac{v_{oi}^2}{2g}$$

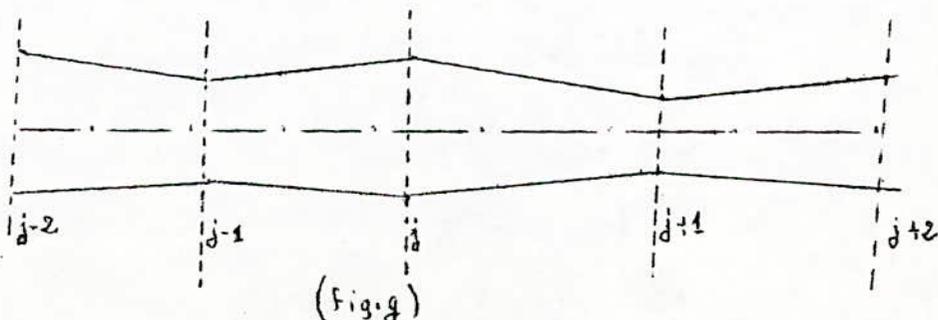
$\gamma_{o2}$  - coefficient de perte de charge quand l'eau entre dans la cuve. Dans le cas général quand le raccordement est classique, on peut écrire pour :

$$v_{oi} < 0 ; \gamma_{o2} = 1$$

Solution Numérique :

Les équations (B.30 a) et (B.38) nous servent à établir sur toute la longueur de la conduite et dans le temps, des lignes représentant le mouvement de certaines perturbations choisies arbitrairement en fonction de la propriété hydraulique de la conduite et du fluide. En coordonnées (x;t) ces lignes nous donnent un réseau : (fig. 00)

Chaque point d'intersection est déterminé sur les coordonnées (longueur, n° de perturbation examinée). Un tel procédé dit de la méthode des caractéristiques nous amène à établir un modèle mathématique du comportement de la conduite qui se compose d'un certain nombre de tronçons de longueur égale (fig.g.).



Au point de jonction de deux tronçons voisins, nous calculons la vitesse ( $v$ ) et la surpression ( $h$ ) du régime transitoire en fonction du temps déterminé de la fonction explicite :

$$t = (L - j) \frac{\tau}{2} + \tau_i$$

$\tau$  étant le pas de calcul :  $\tau = \frac{2L}{cL_t}$ .

$L_t$  = nombre total de tronçons

Il nous serait utile de mener le calcul suivant les caractéristiques montantes; c'est-à-dire suivant les perturbations numérotées : 1, 2, 3, ... i...N et pour chaque section de la conduite à partir de  $L, L-1, \dots, j+1, j, \dots, j-1$  jusqu'à "0". Dans notre calcul, nous trouvons trois types de section:

- Section à l'extrémité aval ( $L$ )
- Section à l'extrémité amont ( $0$ )
- Section intermédiaire  $1 \leq j \leq L - 1$

\* A l'extrémité amont, on tient compte, des conditions aux limites qui sont données dans notre cas par :

$$h_{0i} = Z_{0i} (t) + \frac{\gamma_0 v_{0i}^2}{2g}$$

et la forme du régime transitoire sur le 1er tronçon :

$$h_{1i} + \frac{v_{1i}^2}{2g} - h_{0i} - \frac{v_{0i}^2}{2g} - \frac{c_{0i}}{g} - \frac{c_{0i}}{g} (v_{1i} - v_{0i}) + \frac{\lambda(x_1 - x_0)}{2g(D_1 + D_0)}$$

$$\left( v_{0i}^2 + v_{1i}^2 \right) - \frac{c_{0i}}{g} (v_{1i} + v_{0i}) \frac{D_0^2 - D_1^2}{D_0^2 + D_1^2} = 0$$

\* l'extrémité Aval :

$$h_{L,i+1} + \frac{v_{L,i+1}^2}{2g} - h_{L,i} - \frac{v_{L,i}^2}{2g} - \frac{c_{L,i}}{g} (v_{L,i+1} - v_{L,i}) + \frac{\lambda (x_{L,i+1} - x_{L,i})}{2g (D_{L,i+1} + D_{L,i})} \times (v_{L,i+1}^2 + v_{L,i}^2) + \frac{c_{L,i-1}}{g} (v_{L,i} - v_{L,i-1}) \frac{D_{L,i}^2 - D_{L,i-1}^2}{D_{L,i}^2 + D_{L,i-1}^2} = 0$$

conditions aux limites :

Pour un organe de débit nous avons :

$$v_{L,i+1} = \frac{A_v(t)}{A_L} \cdot C(A_v) \sqrt{2g (H_0 + h_{L,i+1})}$$

$C(A_v)$  - coefficient du débit variable en fonction de l'ouverture de l'organe

\* Pour section intermédiaire quelconque de coordonnées ( j,i ) ( fig.a)

$$h_{j,i} + \frac{v_{j,i}^2}{2g} - h_{j,i+1} - \frac{v_{j,i+1}^2}{2g} - \frac{c_{j,i+1}}{g} (v_{j,i+1} - v_{j,i}) + \frac{\lambda (x_{j,i+1} - x_{j,i})}{2g(D_{j,i+1} + D_{j,i})}$$

$$(v_{j,i+1}^2 + v_{j,i}^2) - \frac{c_{j,i+1}}{g} (v_{j,i+1} + v_{j,i}) \frac{D_{j,i+1}^2 - D_{j,i}^2 + 1}{D_{j,i+1}^2 + D_{j,i}^2} = 0$$

$$h_{j,i} + \frac{v_{j,i}^2}{2g} - h_{j,i-1} - \frac{v_{j,i-1}^2}{2g} - \frac{c_{j,i-1}}{g} (v_{j,i} - v_{j,i-1}) + \frac{\lambda (x_{j,i} - x_{j,i-1})}{(D_{j,i} + D_{j,i-1})2g}$$

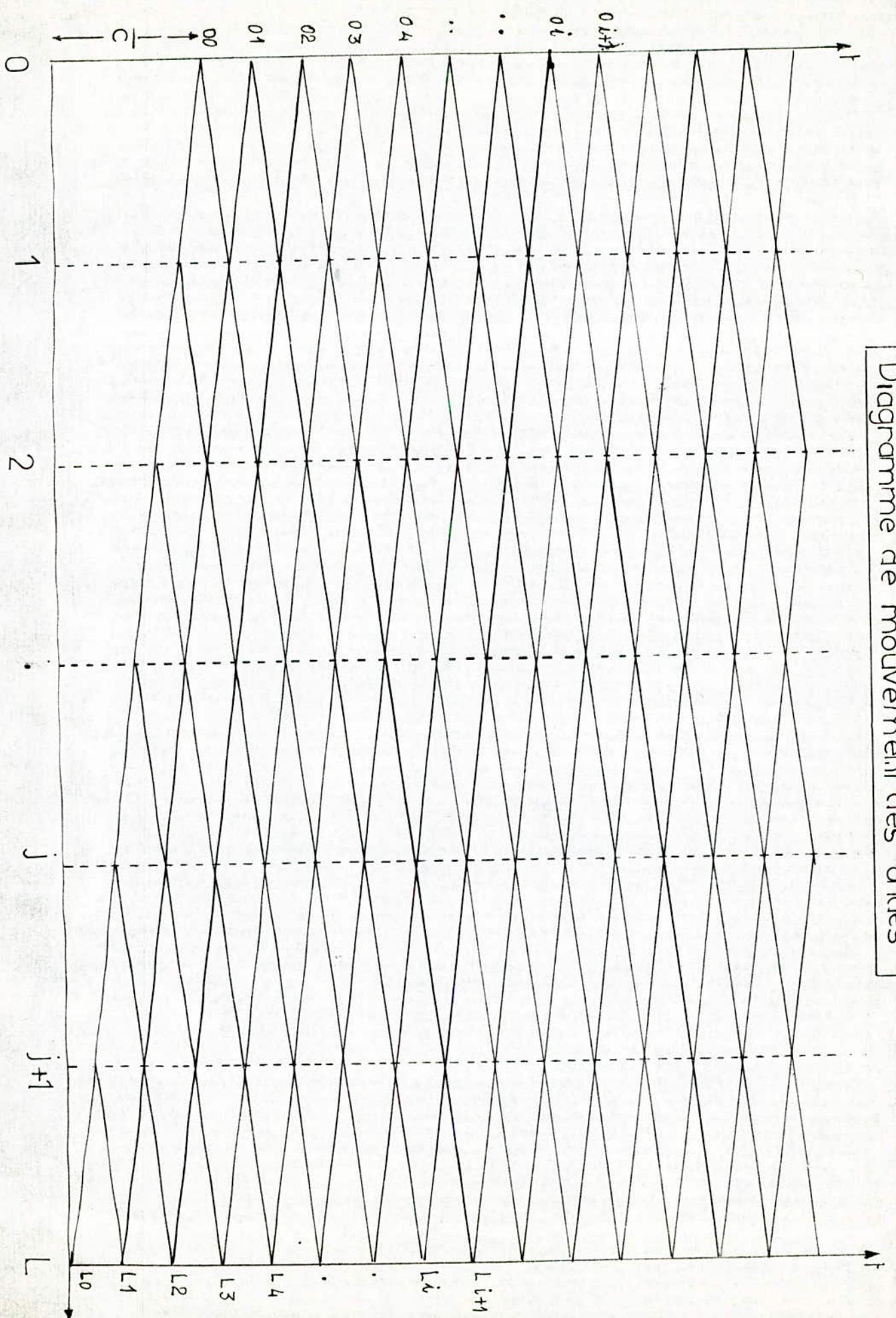
$$(v_{j,i}^2 + v_{j,i-1}^2) + \frac{c_{j,i-1}}{g} (v_{j,i} + v_{j,i-1}) \frac{D_{j,i}^2 - D_{j,i-1}^2}{D_{j,i}^2 + D_{j,i-1}^2}$$

Dans tous les cas, nous avons deux équations à deux inconnues (v,h) qui sont facilement résolubles.

Dans la suite, nous nous sommes limités à une conduite de section constante et

à un cas où  $L_t = 1$ .

Diagramme de mouvement des ondes



C H A P I T R E C.

MANOEUVRE PARFAITE D'UN ORGANE DE REGULATION DU DEBIT  
DANS UNE CONDUITE A ECOULEMENT GRAYITAIRE.

I. Généralités :

Nous allons examiner les problèmes remarquables posés par le phénomène résultant du coup de bélier, et le domaine des études en examinant la manoeuvre parfaite de l'organe de **régulation**. , dans une conduite longue ayant un diamètre constant, un réservoir à son extrémité amont à niveau supposé constant, et un organe de régulation à son extrémité aval.

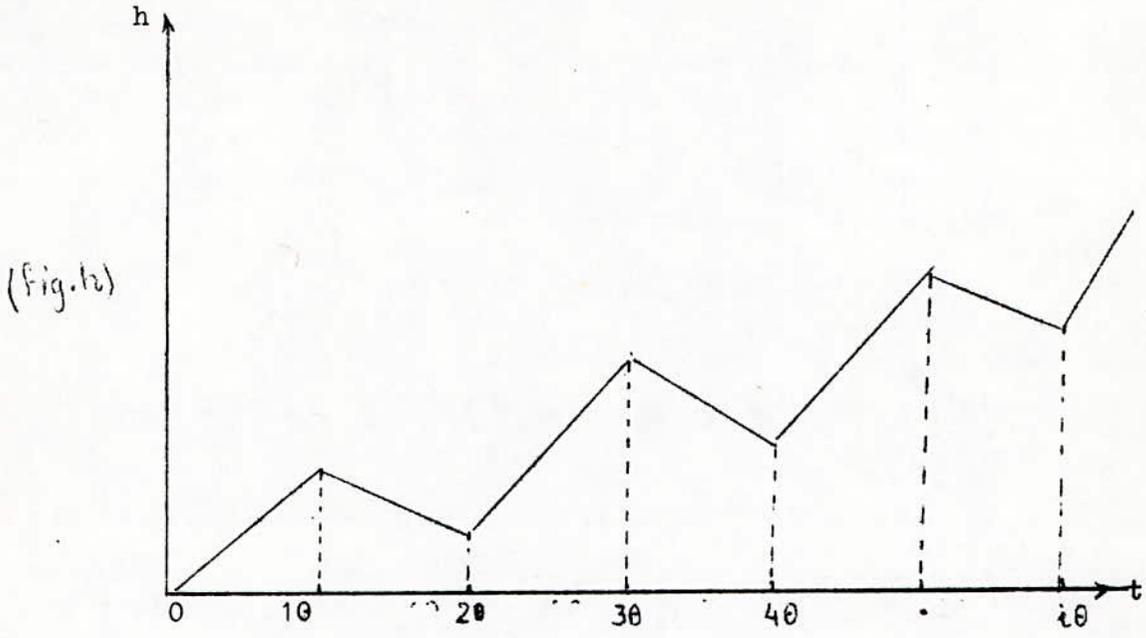
I.1 Influence de la loi de manoeuvre de l'organe de régulation du débit sur la grandeur et forme du coup de bélier:

Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire résultant des surpressions et des dépressions à la suite d'une ouverture ou fermeture instantanées ou trop rapides d'un organe de régulation du débit placé au bout d'une conduite. La variation de pression qui en résulte et la pression elle-même présentent les risques néfastes pour la conduite. Couramment en pratique, on a deux façons de variations de la pression :

\* Une variation qui donne l'augmentation de pression (coup de bélier croissant); cas de l'exemple(a).

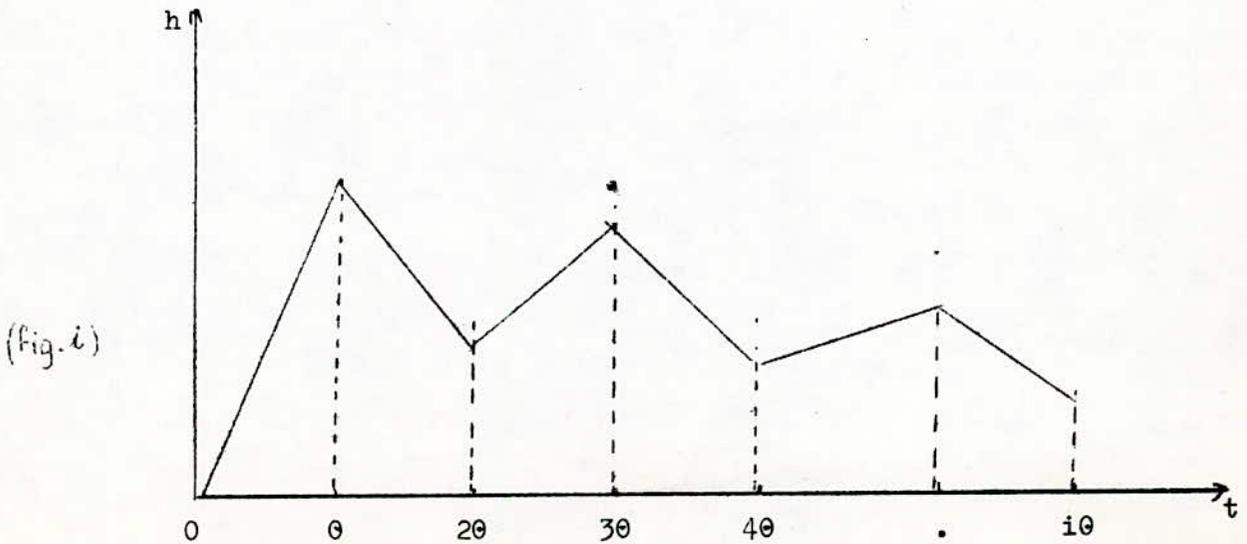
\* Une variation donnant la diminution de pression (coup de bélier décroissant), durant la manoeuvre de l'organe de régulation, cas de l'exemple(b).

exemple (a) coup de béliier croissant résultant d'une faible variation de débit donné par les premiers pas de manoeuvre de fermeture de l'organe.(Fig.h)



avec  $\theta = \frac{2l}{c}$

exemple (b) : coup de béliier décroissant résultant de la variation importante de débit pendant les premiers pas de manoeuvre de fermeture de l'organe.(Fig.i).



I.1.1. Observation :

Les deux formes de manoeuvre ne sont pas favorables pour la conduite, étant donné que :

\* Il y a variation de pression dans la conduite au fur et à mesure de la manoeuvre de la vanne.

\* On obtient relativement un coup de bélier important soit à la fin, soit au début de la manoeuvre.

I.1.2. Conclusion.

Pour remédier à ce qui a été cité ci-dessus, il serait utile de chercher une loi de fermeture qui assurera un coup de bélier constant au cours de la manoeuvre de la vanne, ne provoquant pas la variation de la pression. Ce qui permet de diminuer la fatigue de la conduite.

Ceci permet un avantage substantiel pratique pour l'entretien de la conduite; moyen de protection contre la dilatation et la contraction de la conduite.

I.2. Loi parfaite de manoeuvre de l'organe de régulation du débit :

La loi parfaite est définie comme étant une loi qui, pour un temps de fermeture ou ouverture donné de l'organe  $T = m.\theta$ , où  $(m)$  désigne le nombre de phases, assure :

- \* un coup de bélier minimum possible.
- \* La disparition de variations de pression.

En tenant compte des propriétés hydrodynamiques de l'organe de régulation et celles de la conduite, nous imposons qu'un coup de bélier parfait doit se manifester comme suit :

- \* Augmentation de la pression pendant la première phase.
- \* Pression dynamique constante à partir de la première phase jusqu'à la fin de manoeuvre.

Donc une conduite sujette à une telle loi parfaite, présente une longévité importante avec le minimum de fatigue.

### I.3. Domaine d'analyse et recherche d'une loi de manoeuvre parfaite :

Pour trouver la loi parfaite de manoeuvre, nous allons envisager deux cas :

- \* Loi parfaite en négligeant les pertes de charge, cas idéal
- \* Loi parfaite en considérant les pertes de charge, cas réel.

Nous examinons le problème du coup de bélier pour la manoeuvre de fermeture (coupure du débit), et pour la manoeuvre d'ouverture (intensification du débit), au niveau de l'organe de régulation en un temps donné.

Nous donnons également une méthode de procédé pour trouver une telle loi pour une vanne classique. La méthode étudiée pourrait être applicable aussi pour le distributeur d'une machine hydraulique.

## II. COUP DE BELIER PARFAIT DANS UNE CONDUITE GRAVITAIRE OU LA PERTE DE CHARGE EST NEGLIGEE

### II.1. Description du phénomène physique et son modèle mathématique :

Nous allons étudier la variation de la vitesse à l'extrémité amont et aval de la conduite, ainsi que la variation du coup de bélier à l'extrémité aval de la conduite gravitaire au fur et à mesure de la modification de débit.

Pour illustrer cette étude, traçons un diagramme (t,x) ayant son ordonnée le temps (t) et son abscisse (x) l'axe de la conduite (fig.k) suivons nous le parcours des ondes de perturbation qui prennent naissance dans notre cas à l'extrémité aval de la conduite, ce phénomène pourra avoir lieu à l'amont, et arrivent au réservoir. (Fig.j.)

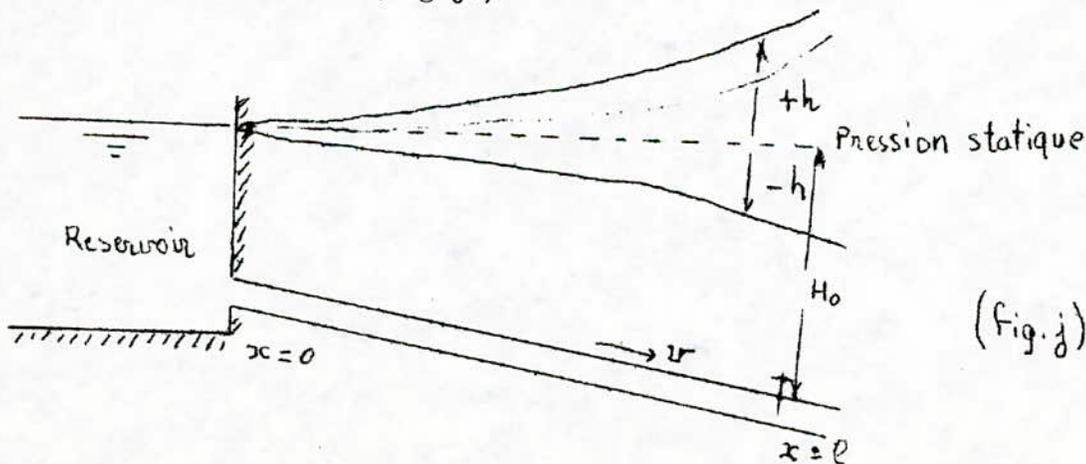
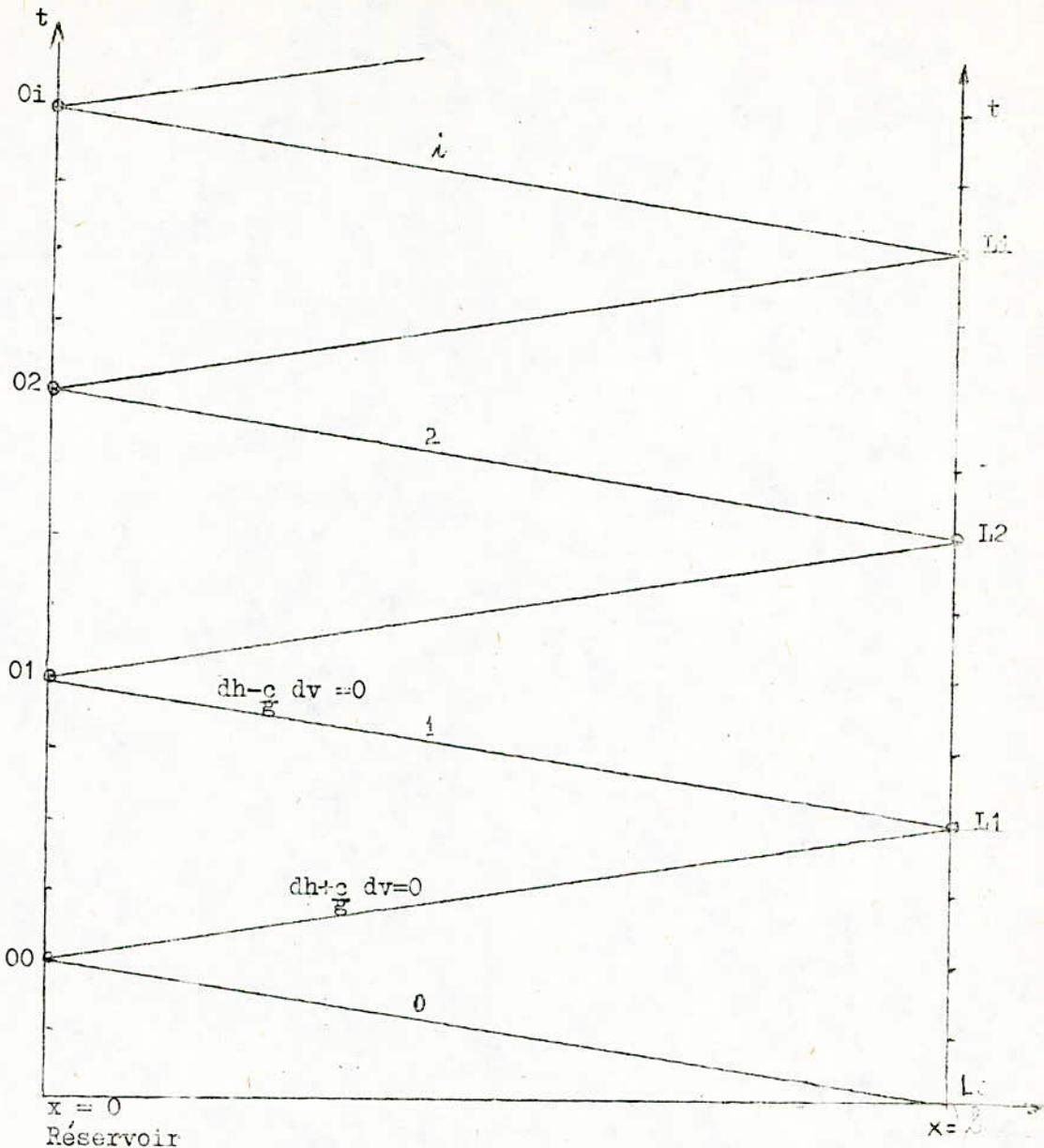


Diagramme de mouvement des perturbations --



( Fig.k )

Dispositif de régulation.

Par la méthode numérique, nous cherchons la répartition de la vitesse à l'entrée et à la sortie et la répartition du coup de bélier à la sortie de la conduite. La zone de recherche est établie par les coordonnées de longueur (x) et temps (t)

Au point (L) qui représente l'extrémité aval de la conduite de diamètre constant se trouve la vanne de régulation du débit. Une infiniment petite manoeuvre de cette vanne crée une onde de perturbation, qui se déplace de l'extrémité aval vers l'extrémité amont avec une certaine célérité (c) et arrive au réservoir (R) au bout d'un temps  $\frac{\theta}{2} = \frac{l}{c}$ .

Pendant le parcours, cette onde provoque une surpression infiniment petite qui se dissipe au point (R); quant à la vitesse à l'entrée du réservoir (R), elle ne pourrait être nulle. Sous l'action de la masse d'eau dans le réservoir cette onde se réfléchit et revient vers (L) sous forme d'une onde de dépression, elle atteindra le dispositif de régulation au bout d'un temps  $\theta = \frac{2l}{c}$ . Pendant ce temps, la vitesse d'écoulement et la pression sont modifiées.

Notre calcul des paramètres du régime transitoire sera basé sur la formule déjà trouvée, en négligeant le terme  $\frac{v^2}{2g}$  et en considérant une conduite de diamètre constant.

$$dh \pm \frac{c}{g} dv = 0 \quad (C.1)$$

Le second terme est affecté du signe "moins", lorsque l'onde de perturbation part du dispositif de manoeuvre jusqu'au réservoir "R", du signe "+" Lorsque l'onde de perturbation revient du réservoir vers le dispositif. Grâce à cette formule (C.1), nous allons calculer la vitesse à la sortie du réservoir pendant la durée du régime transitoire, la vitesse d'écoulement et le coup de bélier (soit surpression, soit dépression) à l'extrémité aval de la conduite, Pendant que l'organe de régulation fasse une manoeuvre, soit fermeture soit ouverture.

Comme référence de la pression dynamique, nous prenons la ligne horizontale engendrée par le niveau du plan d'eau dans le réservoir, nous allons faire l'intégration de l'équation différentielle sur toute la longueur de la conduite c'est-à-dire soit de  $x=0$  à  $x=l$ , soit de  $x=l$  à  $x=0$ . Les pas d'intégration sera donc : égal à  $\frac{l}{c}$

Le but de cette analyse numérique est de trouver une loi de manoeuvre de l'organe de régulation qui nous permettra d'assurer la constance de la pression dynamique durant la manoeuvre.

II.2. Variation de la vitesse d'écoulement à l'extrémité aval.  
de la conduite gravitaire pendant la modification du débit.

A partir du diagramme du mouvement des perturbations, nous déterminons l'équation générale suivante, donnant la vitesse  $v_{Li}$  à l'extrémité aval de la conduite (voir appendice -A-):

$$v_{Li} = v_0 - \frac{L}{c} h_{Li} - \frac{2L}{c} \sum_{k=0}^{i-1} h_{Lk} \quad (C.2).$$

II.2.1. Observation :

C'est une formule générale du régime transitoire qui permet de donner la valeur de la vitesse, à chaque étape  $i$  de manoeuvre de l'organe, obtenue à partir de la vitesse en régime permanent de laquelle on déduit le cumul des valeurs des coups de bélier.

II.2.2. Conclusion :

Il est toujours utile de connaître la vitesse lorsqu'on fait manoeuvre le distributeur à chaque instant pour avoir un débit voulu, notamment pour les usines hydro-électriques dotées d'une certaine loi de manoeuvre.

Maintenant, à partir du même diagramme, nous allons déterminer la variation du coup de bélier ( $h$ ) à chaque manoeuvre de fermeture de l'organe en fonction de la vitesse.

L'équation ainsi obtenue, a pour forme :

$$h_{Li} = \frac{c}{g} (v_0 - v_{Li}) - 2 \sum_{k=0}^{i-1} h_{Lk} \quad (C.3)$$

II.3.1. Observation :

En suivant le parcours des ondes entre les deux extrémités de la conduite nous avons déterminé la valeur du coup de bélier à chaque étape (i) en fonction de la vitesse initiale et la vitesse correspondant au dit coup de bélier. De même le coup de bélier à l'étape (i) est obtenu par le cumul des coups de bélier entre les étapes 0' et (i - 1).

II.3.2. Conclusion :

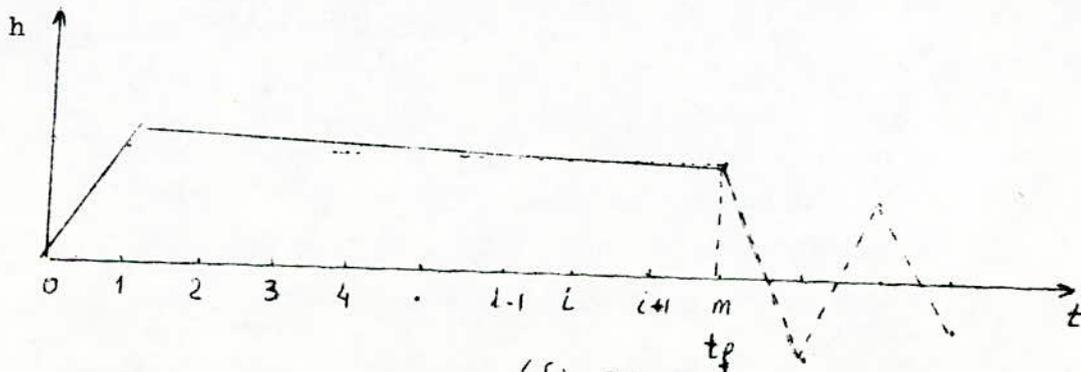
La formule générale (C.3) donnant le coup de bélier à l'extrémité aval de la conduite ( $h_{Li}$ ), a été également et directement obtenue à partir de la formule (C.2) générale donnant la vitesse ( $v_{Li}$ ). Nous avons obtenu donc un système de deux équations ayant comme inconnues  $v_{Li}$  et  $h_{Li}$  à l'étape "i"; étant donné que l'un des paramètres dépend de l'autre, au niveau de l'extrémité aval de la conduite. La résolution de ce système ne présente pas de difficulté si la condition aux limites est connue.

II.4. Coup de bélier parfait dû à l'arrêt complet du débit :

On désire avoir, dès l'arrêt complet du débit, un coup de bélier parfaite pour la conduite, c'est -à-dire un coup de belier qui augmente pendant la première phase de fermeture (i=1) et demeure constant, durant les autres phases de fermeture (Fig.1).

Ainsi la formule (C.3) nous donne :

$$h_{Li} = \frac{c}{g} ( v_0 - v_{Li} ) - 2 ( i - 1 ) h_{Li}$$



( Fig. 1. )

d'où il vient :

$$v_{Li} = v_o - \frac{g}{c} h_1 - 2 \frac{g}{c} (i - 1) h_1$$

ce qui donne :

$$v_{Li} = v_o - \frac{g}{c} (2i - 1) h_1 \quad (C.4)$$

La formule (C.4) donne la vitesse  $v_{Li}$  à chaque étape "i" au niveau de l'organe  $L_i$  avec une pression constante.

#### II.4.1. Remarque :

Les conditions ci-dessus garantissent la stabilité de la pression jusqu'à la fin de manoeuvre de fermeture. Au delà de ce temps, les oscillations reprendront, mais il faut voir qu'en réalité, à cause des pertes de charge, la pression diminue, et ces oscillations seront d'une amplitude nettement inférieure à celles des oscillations primitives en période de fermeture.

#### II.4.2. fermeture complète :

Supposons que nous avons une fermeture complète à l'étape  $i = m$ , nous aurons donc  $v_{Lm} = 0$ , d'où nous pouvons écrire :

$$v_{Lm} = v_o - \frac{g}{c} h_1 + 2 (m - 1) h_1 = 0$$

et nous tirons :

$$v_o = \frac{g}{c} h_1 + 2 (m - 1) h_1$$

ce qui donne :

$$\frac{c}{g} v_o = h_1 + 2 (m - 1) h_1$$

$$\frac{c}{g} v_o = 2mh_1 - h_1$$

et

$$h_1 = \frac{cv_o}{g(2m-1)}$$

(C.5)

Si nous divisons par la charge  $H_0$  en régime permanent, nous obtenons une valeur adimensionnelle soit :

$$\frac{h}{H_0} = \frac{cv_0}{gH_0} \cdot \frac{1}{2m - 1} \quad (C.6)$$

en posant :

$$\xi_1 = \frac{h}{H_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \frac{cv_0}{gH_0}$$

ce qui nous donne :

$$\xi_1 = \frac{\mathcal{H}}{2m - 1} \quad (C.7)$$

#### II.4.3. Constatation :

Le rapport adimensionnel  $\mathcal{H}$  englobe le régime initial permanent ( $v_0, H_0$ ) et la propriété hydrodynamique de la conduite. D'une façon plus ample, essayons d'interpréter ce rapport d'une autre façon, et de voir sa signification.  $\mathcal{H}$  peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathcal{H} = \frac{2cv_0}{2gH_0} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\mathcal{H}}{2} = \frac{cv_0}{2gH_0}$$

Le rapport peut s'écrire aussi :

$$\mathcal{H} = \frac{c}{\sqrt{2gH_0}} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{2gH_0}}$$

on constate que  $\frac{c}{\sqrt{2gH_0}}$  désigné par " $\beta$ " indique le coefficient de vitesse

d'onde pour le régime transitoire et que  $\frac{v_0}{\sqrt{2gH_0}}$  ; , indique le coefficient

de vitesse d'écoulement noté par " $\varphi$ "

$$\beta = \frac{c}{\sqrt{2gH_0}} \quad ; \quad \varphi = \frac{v_0}{\sqrt{2gH_0}} \quad (C.7 a)$$

D'une façon classique, "φ" sera égal à  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum Y}}$  (C.7 a)  
 où le coefficient de perte de charge est supposé pour le moment égal à zéro.

on peut écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{2} = \beta \cdot \varphi \implies \mathcal{L} = 2 \cdot \beta \cdot \varphi \quad (\text{C.7 b}).$$

Nous concluons que le paramètre  $\mathcal{L}$  qui est adimensionnel, représente le produit de deux paramètres adimensionnels :  $\beta$  et  $\varphi$

\*  $\beta$  - coefficient tenant compte du régime non permanent (transitoire)

$\varphi$  - coefficient de vitesse tenant compte de la perte de charge.

#### II.4.4. Discussion :

Nous examinons maintenant la formule (C.7) dans deux sens :

- Quelle est l'influence de la durée de fermeture sur le coup de béliet optimal ?
- Quelle est l'influence d'une surpression donnée sur le temps de fermeture nécessaire ?

Pour répondre à la 1ere question, nous faisons une abaque de courbes

$$\xi = \frac{h}{H_0} = f(m) \text{ pour le coefficient constant. Fig.01.}$$

Pour  $m < 1$ , nous avons un coup de béliet simple où la surpression ne dépend pas du temps de fermeture et elle reste constante.

Cependant le temps de fermeture supérieur à un aller et retour de l'onde connu dans la pratique.

. Pour répondre à la deuxième question, transformons la formule (C.7) sous la forme suivante :

$$\xi \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{2m - 1} \quad ; \quad \xi (2m - 1) = \partial \mathcal{L}$$

$$2m = \frac{\partial \mathcal{L}}{\xi} + 1$$

$$\text{ce qui donne : } m = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\xi} + 1 \right) \quad (\text{C.8})$$

Etant donné que (m) représente le nombre des périodes, donc la formule (C.8) nous permet de déterminer le temps de fermeture d'un organe de régulation du débit, installé à l'extrémité aval de la conduite pour  $\mathcal{H}$  donné, et pour  $\xi$  demandé.

Le coefficient  $\xi$  c'est le rapport du coup de bélier et la charge initiale  $H_0$  au niveau de l'organe de régulation. Pour la raison pratique, et en tenant compte de la résistance de la conduite, on impose ce rapport ( $\xi$ ) pour chaque installation comme la valeur admissible. Dans cette circonstance, il serait pratique de créer une abaque de la formule (C.8) pour le calcul, (fig 02). Nous essayons de voir comment les paramètres  $\mathcal{H}$  et  $\xi$ , influent sur le temps de la fermeture.

II.4.5. Constatation :

L'abaque fig 02. met en évidence que :

- Le temps de fermeture augmente brusquement si le coefficient diminue.
- Pour  $\mathcal{H}$  donné et pour coefficient  $\xi$ , exigé, on trouve le temps de fermeture à partir de la formule :

$$T = m \cdot \theta = m \cdot \frac{2l}{c} \quad (-C.9)$$

soit  $T = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial l}{\xi} + 1 \right)$

ce temps peut nous assurer une surpression qui ne dépasse pas la valeur imposée et que cette surpression soit constante au temps de fermeture. Cette fermeture assurera la variation de vitesse linéaire établie par la formule (C.4)

1 - Représentation graphique de la formule (C.7) pour chaque caractéristique

$\mathcal{H} = \frac{cv_0}{g H_0}$  d'installation, en fonction de (m).

$$\xi = \frac{h}{H_0} = \frac{cv_0}{g H_0} \frac{1}{2m - 1} = \frac{\mathcal{H}}{2m - 1} = f(m) = f\left(\frac{T}{\theta}\right)$$

voir tableau fig.01.

variation du paramètre  $\xi = \frac{h}{H_0}$  en fonction du nombre d'étapes (m) pour une installation donnée.

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi = 0,2$	0,2	0,067	0,04	0,028	0,022	0,0182	0,015	0,013	0,012	0,010
$\xi = 1,0$	1,00	0,33	0,20	0,14	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,052
$\xi = 2,0$	2,00	0,66	0,40	0,28	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,104
$\xi = 3,0$	3,00	0,99	0,60	0,42	0,33	0,27	0,24	0,21	0,18	0,16
$\xi = 4,0$	4,00	1,32	0,80	0,56	0,44	0,36	0,32	0,28	0,24	0,21
$\xi = 5,0$	5,00	1,65	1,00	0,70	0,55	0,45	0,40	0,35	0,30	0,26
$\xi = 6,0$	6,00	1,98	1,20	1,84	0,66	0,54	0,48	0,42	0,36	0,31
$\xi = 7,0$	7,00	2,31	1,40	0,98	0,77	0,63	0,56	0,49	0,42	0,36

TAB.01.

Variation du coup de belier parfait en fonction du temps (m)  
reduit de fermeture pour  $\mathcal{H}$  donné

$$\xi = \frac{\mathcal{H}}{2m-1} = f(m)$$

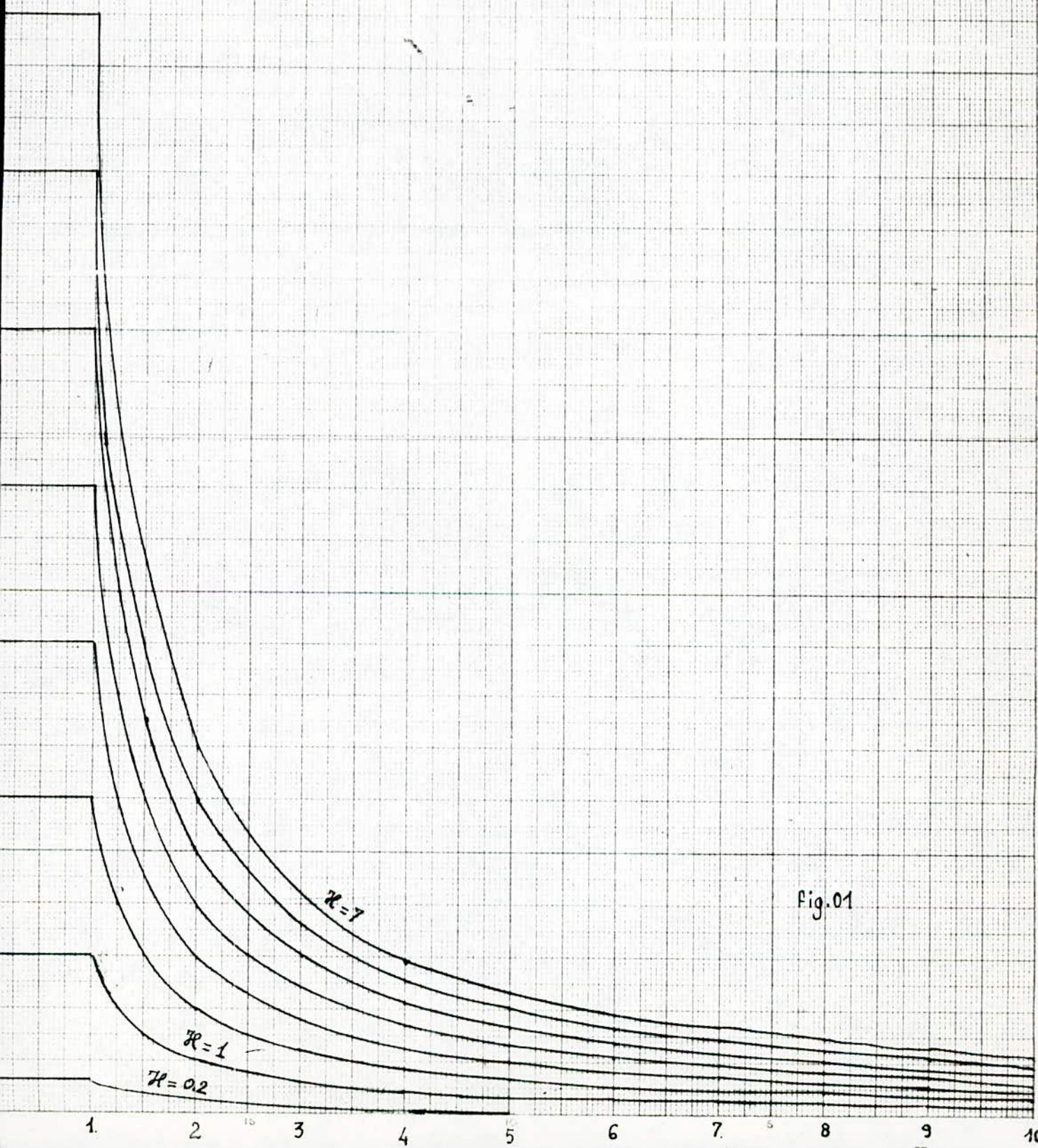


Fig.01

2- Représentation graphique de la fonction

(C.8)

Maintenant nous examinons comment varie le temps de fermeture en fonction de la caractéristique d'installation  $\frac{cV_0}{gH_0}$  Pour cela nous faisons un tableau de calcul. Fig.02.

En effet :

$$m = \frac{T}{\theta} = 0,5 \left( \frac{H}{\xi} + 1 \right) = f(H).$$

Valeurs de m en fonction de H et ξ

H	0,2	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
ξ=0,2	1,00	3,00	5,5	8,0	10,5	13,0	15,5	18,0
ξ=0,4	---	1,75	3,00	4,25	5,50	6,75	8,00	9,25
ξ=0,6	----	1,33	2,17	3,00	3,83	4,66	5,50	6,33
ξ=0,8	--	1,12	1,75	2,37	3,00	3,62	4,25	4,87
ξ=1,0	--	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00

TAB.02

Influence du paramètre  $\mathcal{R}$  sur le nombre ( $m$ ) relatif de fermeture pour une surpression  $\xi$  donnée.

$$m = f(\mathcal{R}) = 0.5 \left( \frac{\mathcal{R}}{\xi} + 1 \right)$$

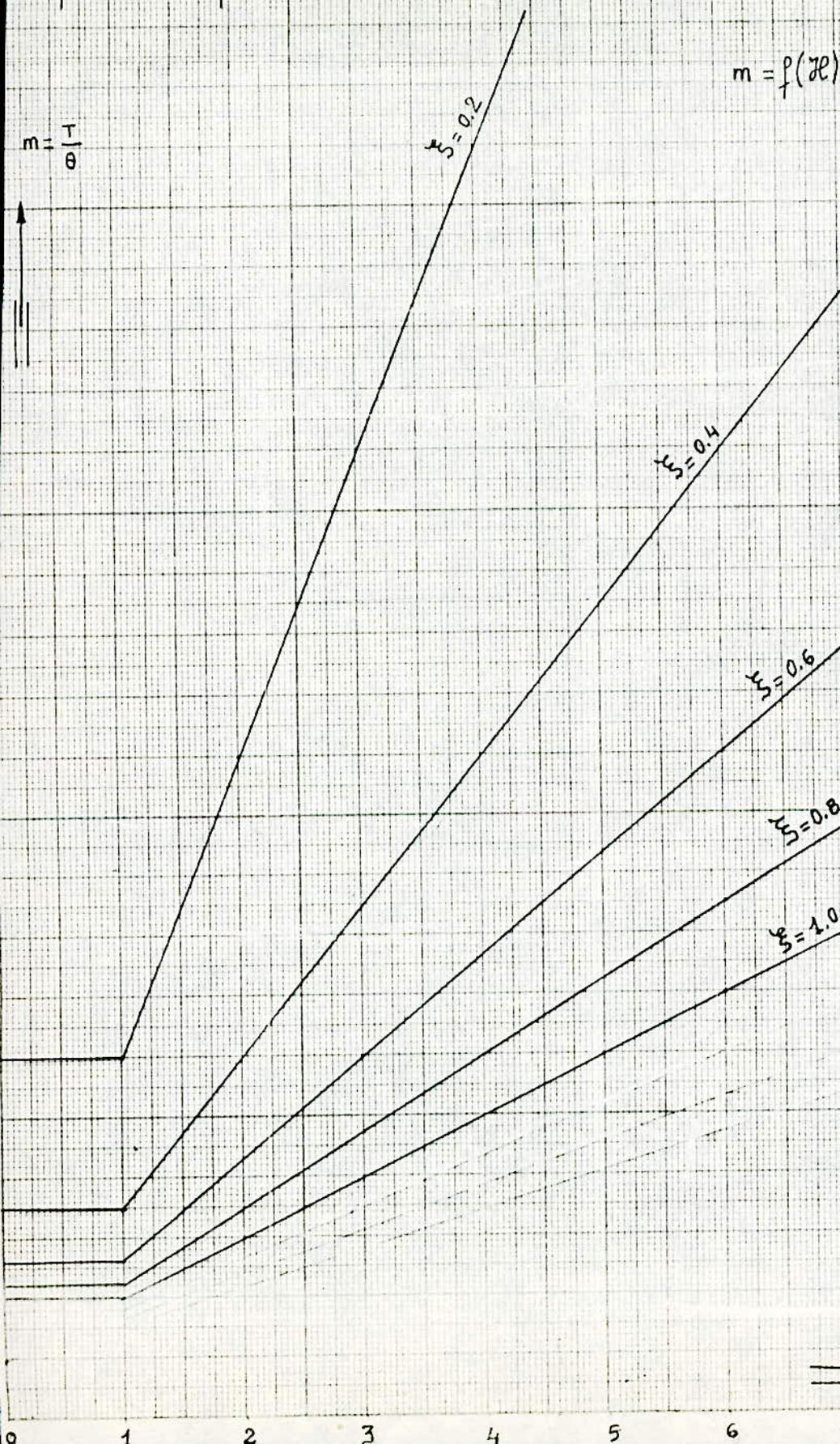
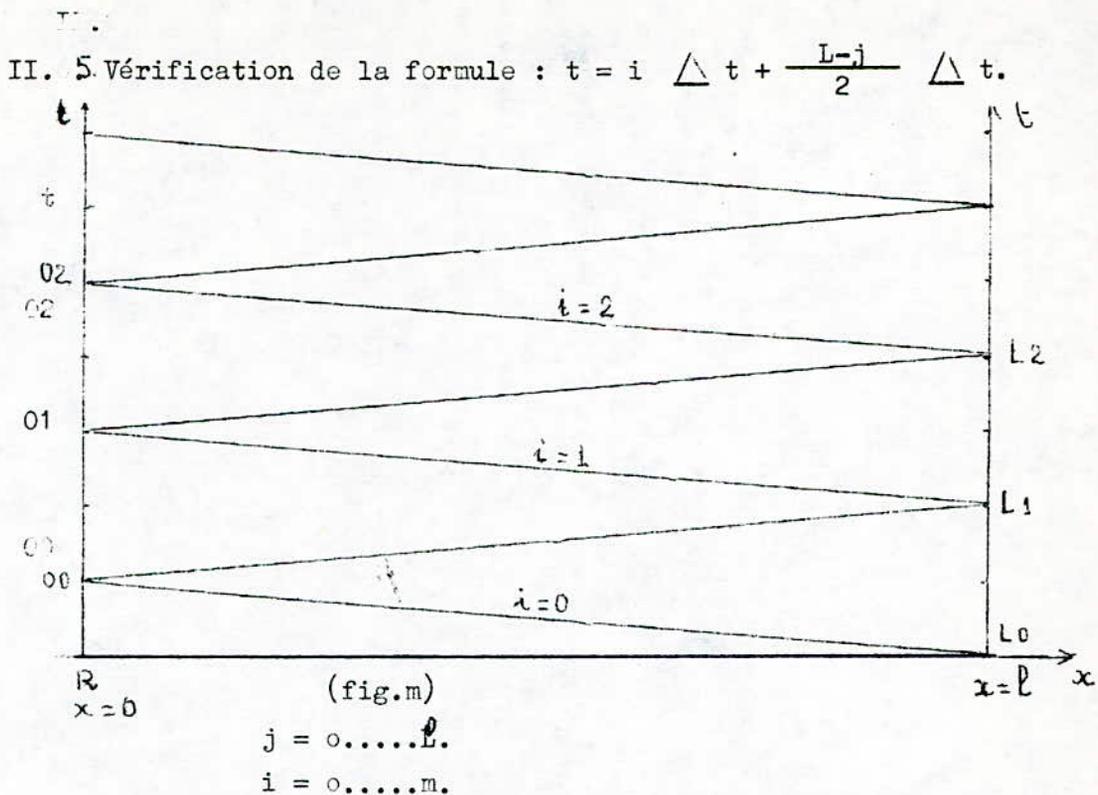


Fig. 02

$$\mathcal{R} = \frac{c v_0}{g H_0}$$



La formule a été vérifiée en prenant en considération un système d'axes, ayant pour abscisse la longueur de la conduite où (j) désigne le nombre de sections le long de la longueur de cette conduite. L'axe des ordonnées (t) désigne le temps.

Ce diagramme nous indique en une section quelconque (j) de la conduite le temps mis par une  $i^e$  perturbation depuis sa naissance au niveau de l'organe de régulation.

A l'extrémité aval de la conduite ( $x=L$ ) au niveau de l'organe du distributeur la naissance de la perturbation donnant l'onde sera provoquée par le 1er mouvement de l'organe dans un écart de temps  $\Delta t$  ; on la désigne par  $1. \Delta t$ , la 2ème perturbation naîtra au temps  $t_r = 2. \Delta t$ ... La  $i^e$  perturbation naîtra au temps  $t_i = i \Delta t$ . Ceci par rapport au temps d'origine  $t = 0$ . Pour expliciter cette formule, nous suivons le parcours de chaque perturbation à partir de l'organe de régulation jusqu'au réservoir.

Le temps de passage de la 1er perturbation à travers les différentes sections le long de la conduite :

L : point au niveau de l'organe :  $t_1 = 1 \Delta t + 0 \cdot \Delta t = 1 \cdot \Delta t$   
 au point L-1 :  $t_1 = 1 \cdot \Delta t + \frac{\Delta t}{2}$   
 au point L.2 :  $t_1 = 1 \Delta t + \frac{2}{2} \Delta t$

la 2e perturbation naissant au point  $x = L$ , au temps  $2 \Delta t$

au point (L-1), son temps sera  $t_2 = 2 \Delta t + \frac{\Delta t}{2}$

au point (L-2), son temps sera  $t_2 = 2 \Delta t + \frac{\Delta t}{2}$

au point (L-3), son temps sera  $t_2 = 2 \Delta t + 3 \frac{\Delta t}{2}$

la 3e perturbation naître au temps  $3 \Delta t$

au niveau de l'organe  $t_3 = 3 \cdot \Delta t + 0$ .

à (L-1)  $t_3 = 3 \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t$

à (L-2)  $t_3 = 3 \Delta t + \frac{2}{2} \Delta t$

à (L-3)  $t_3 = 3 \Delta t + \frac{3}{2} \Delta t$

.....

La  $i^e$  perturbation aura lieu au temps  $i \Delta t$

on remarque que le numérateur du nombre fractionnaire correspond au numéro de la section prise sur la conduite le long de l'abscisse (x) d'une façon générale:

à  $x = L$   $t_i = i \Delta t + (L-L) \frac{\Delta t}{2}$

à L - 1  $t_i = i \Delta t + (L-1) \frac{\Delta t}{2}$

a L - 2  $t_i = i \Delta t + (L-2) \frac{\Delta t}{2}$

à (L-j)  $t_i = i \Delta t + (L-j) \frac{\Delta t}{2}$

$$t = i \Delta t + (L-j) \frac{\Delta t}{2}$$

## II.6 Coup de bélier dû à l'intensification du débit :

Si nous avons une ouverture à partir de zéro jusqu'à une certaine valeur  $a'_0$ , nous pouvons imposer d'après la formule (C.4)

$$v_0 = 0$$

$$\text{donc } v_{Li} = -\frac{g}{c} \left[ h_1 + 2(i-1)h_1 \right]$$

et pour  $i = m$

$$v_{Lm} = -\frac{g}{c} \left[ h_1 + 2(m-1)h_1 \right]$$

Etant donné que pour une ouverture constante ( $a_0$ ), le coefficient de vitesse passant sous la vanne reste constant, et nous pouvons écrire :

$$v_{Lm} = v_0^o \sqrt{2g(H_0 + h_1)}$$

$$v_m^o = v_0^o \sqrt{2g H_0}$$

$v_m^o$  - c'est la vitesse d'écoulement dans la conduite pour la charge  $H_0$  en régime permanent pour la même ouverture ( $a_0$ )

Donc nous avons droit d'écrire :

$$\frac{v_{Lm}}{v_m^o} = \frac{\sqrt{2g(H_0 + h_1)}}{\sqrt{2g H_0}} = \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}}$$

d'où on tire :

$$v_{Lm} = v_m^o \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}} \quad (\text{C.10})$$

$$\text{et } v_m^o \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}} = -\frac{g}{c} \left[ h_1 + 2(m-1)h_1 \right]$$

$$\text{soit } \frac{cv_m^o}{g} \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}} = -h_1 (1 + 2m - 2)$$

$$\frac{cv_m^0}{g} \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}} = -h_1 (2m - 1).$$

En divisant par la charge initiale  $H_0$ , on a :

$$\frac{cv_m^0}{g H_0} \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}} = \frac{h_1}{H_0} (1 - 2m).$$

Si nous posons :

$$\frac{cv_m^0}{g H_0} = \mathcal{X} \quad \text{et} \quad \frac{h_1}{H_0} = \mathcal{Y}$$

Nous trouvons :

$$\mathcal{X} \sqrt{1 + \mathcal{Y}} = \mathcal{Y} (1 - 2m) \quad (C.11).$$

. Analogiquement comme pour le cas d'une fermeture lente, examinons maintenant l'influence du temps de l'ouverture sur la dépression dite optimale, et l'influence de la dépression imposée et la caractéristique du régime demandé sur le temps de l'ouverture nécessaire, pour cette raison nous faisons une représentation graphique de :

a)  $\mathcal{Y} = f(m)$  pour  $\mathcal{X} = c^{te}$

b)  $m = f(\mathcal{X})$  pour  $\mathcal{Y} = c^{te}$

Pour faire la 1ere representation, mettons la formule (C.11) sous la forme suivante :

$$\sqrt{1 + \mathcal{Y}} = \mathcal{Y} (1 - 2m)$$

$$\mathcal{X}^2 (1 + \mathcal{Y}) = \mathcal{Y}^2 (1 - 2m)^2$$

$$\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y} \mathcal{X}^2 = \mathcal{Y}^2 (1 - 2m)^2$$

ce qui donne :  $\mathcal{Y}_1^2 (1 - 2m)^2 - \mathcal{Y} \mathcal{X}^2 - \mathcal{X}^2 = 0$

Le problème c'est de résoudre cette équation par rapport à  $\mathcal{Y}$  ~~en~~ ~~avant~~  $m$  :  
et  $\mathcal{X} > 0$ ,  $\mathcal{Y} < 0$ .

Le discriminant  $\Delta = \mathcal{X}^4 + 4(1 - 2m)^2 \cdot \mathcal{X}^2 \gg 0$ .

Nous obtenons les valeurs des racines :

$$\xi_1 = \frac{\mathcal{H}^2 + \sqrt{\mathcal{H}^4 + 4(1-2m)^2 \mathcal{H}^2}}{2(1-2m)^2}$$

$$\xi_2 = \frac{\mathcal{H}^2 - \sqrt{\mathcal{H}^4 + 4(1-2m)^2 \mathcal{H}^2}}{2(1-2m)^2} \quad (C.11a)$$

avec  $m \neq \frac{1}{2}$  pour l'existence des racines.

De plus  $m > 1$

Nous essayons de représenter graphiquement la 2e racine  $\xi_2$

$\xi_2 = \xi = f(m)$  pour une caractéristique donnée  $\mathcal{H} = \text{Cte}$ , puisque dans ce cas

$\xi_2 < 0$ . (fig.03).

#### II.6.1. Observation

La graphie fig.03 montre que pour une même installation ( $\frac{cv}{g H_0} = \text{Cte}$ ) la dépression tend vers zéro quand ( $m$ ) le nombre d'ouverture augmente. Pour une même ouverture, le gradient  $\Delta \xi$  va en diminuant quand le  $\frac{cv_0}{g H_0}$  augmente, cette diminution se fait de plus en plus sentir à la première  $g H_0$  ouverture et que pendant celle-ci le  $\xi$  tend vers -1, quand  $\mathcal{H}$  augmente.

Par comparaison avec le graphie N°1 représentant le cas d'une surpression, les courbes présentent la même allure, c'est-à-dire pour un même  $\frac{cv_0}{g H_0}$ , dépression ou surpression tendent vers zéro quand le nombre d'ouvertures ou fermetures ( $m$ ) augmente - Cependant la nature de variation du gradient est différente quand  $\mathcal{H}$  augmente.

II.6.1.1. Representation graphique de la formule ( C.11 a) :

$$\xi = \frac{dl^2 - \sqrt{dl^4 + 4(1-2m)^2 \cdot dl^2}}{2(1-2m)^2} = f(m) \text{ pour } dl = c \cdot e$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f = 0,2	- 0,181	-0,065	-0,039	-0,028	-0,022	-0,018	-0,015	-0,013	-0,011	-0,010
f = 1	- 0,618	-0,282	-0,181	-0,133	-0,105	-0,087	-0,074	-0,064	-0,057	-0,051
f = 2	- 0,828	-0,481	-0,328	-0,248	-0,199	-0,166	-0,142	-0,125	-0,111	-0,099
f = 3	- 0,908	-0,618	-0,446	-0,346	-0,282	-0,238	-0,206	-0,181	-0,162	-0,146
f = 4	- 0,944	-0,713	-0,542	-0,431	-0,36	-0,303	-0,0264	-0,233	-0,209	-0,190
= 5	- 0,963	-0,781	-0,618	-0,503	-0,422	-0,363	-0,317	-0,282	-0,254	-0,231
= 6	- 0,973	-0,828	-0,679	-0,565	-0,481	-0,417	-0,367	-0,328	-0,296	-0,270
= 7	- 0,980	-0,863	-0,729	-0,618	-0,532	-0,465	-0,412	-0,370	-0,336	-0,307

TAB.03.

Variation de la dépression en fonction du temps réduit  
d'ouverture (ouverture complète) pour  $\mathcal{H} = \text{cte.}$

$$\xi = f\left(\frac{r}{R}\right) = f(m) = \frac{\mathcal{H}^2 - \sqrt{\mathcal{H}^4 + 4(1-2m)^2 \cdot \mathcal{H}^2}}{2(1-2m)^2}$$

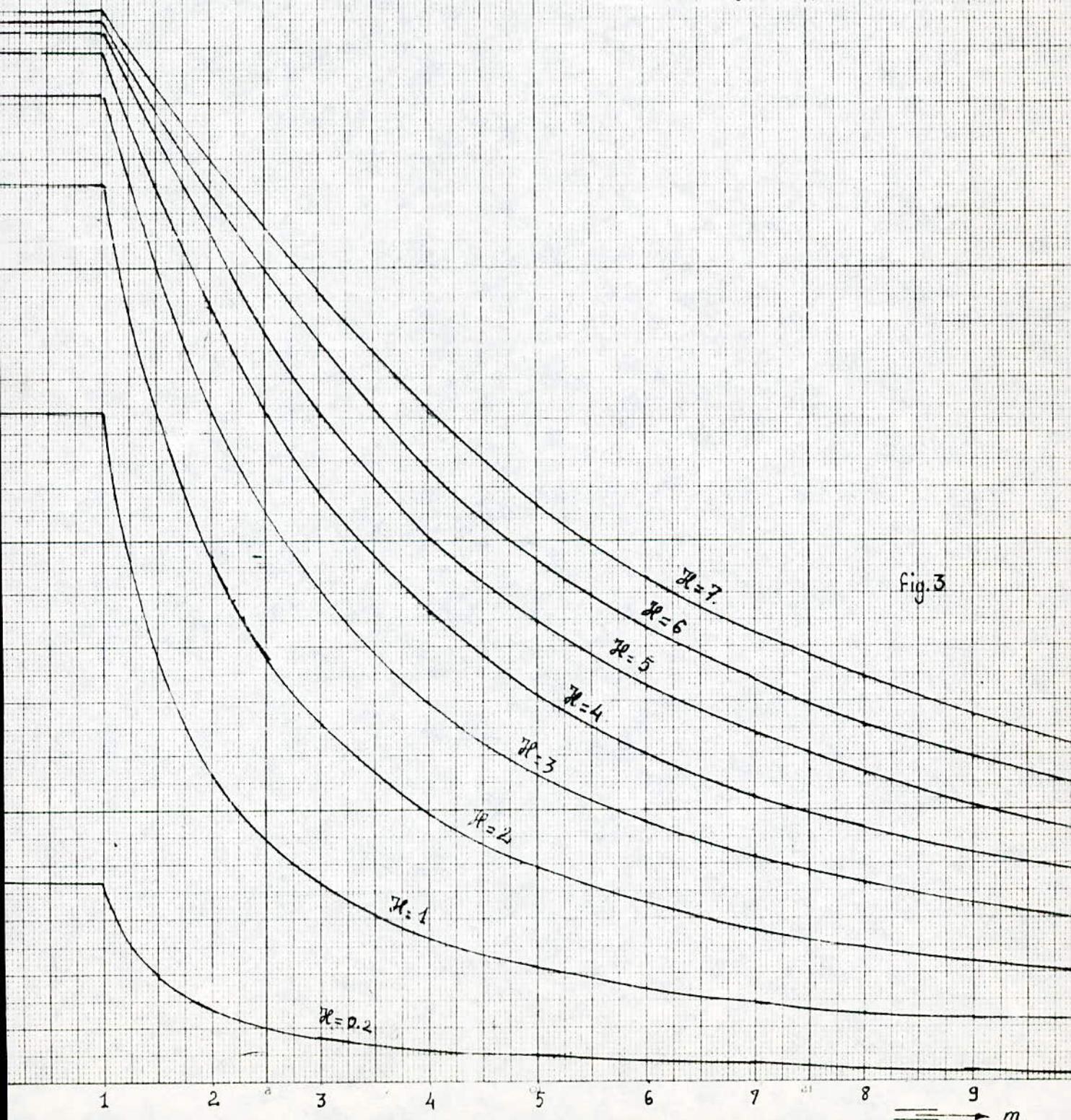


Fig. 3

II.6.3. Influence du paramètre  $\mathcal{H}$  sur le nombre d'étapes d'ouverture pour une dépression constante.  $\xi$ .

Pour connaître cette influence, nous devons représenter graphiquement l'équation suivante :

$$m = f(\mathcal{H}) = 0,5 - \frac{\mathcal{H}}{2\xi} \sqrt{1 + \frac{\xi}{\mathcal{H}}} \quad (C.12)$$

Les résultats de calcul sont par le tableau suivant (tab.04).

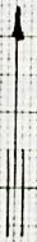
$\mathcal{H}$	0,2	1	2	3	4	5	6	7
$\xi=0,2$	0,947	2,736	4,972	7,208	9,444	11,680	13,916	16,152
$\xi=0,4$	0,694	1,468	2,436	3,404	4,373	5,341	6,309	7,278
$\xi=0,6$	0,605	1,027	1,556	2,081	2,608	3,135	3,662	4,189
$\xi=0,8$	0,556	0,779	1,059	1,338	1,618	1,897	2,177	2,456
$\xi=1,0$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Tab.04.

Influence du paramètre  $\mathcal{H}$  sur le nombre ( $m$ ) réduit d'étapes d'ouverture pour une dépression  $\xi$  donnée,

$$m = f(\mathcal{H}) = 0.5 - \frac{\mathcal{H}}{2\xi} \sqrt{1 + \xi}$$

$m$   
/ /  
 $\theta$



$\xi = -0.2$

$\xi = -0.4$

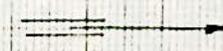
$\xi = -0.6$

$\xi = 0.8$

Fig. 04

$$\mathcal{H} = \frac{c v_0}{g H_0}$$

1 2 3 4 5 6 7 8



Pour examiner l'influence du régime d'écoulement et la propriété hydrodynamique de la conduite sur le temps de l'ouverture nous transformons la formule (C.11). comme suit :

$$H \sqrt{1 + \xi} = \xi (1 - 2m).$$

$$\frac{H \sqrt{1 + \xi}}{\xi} = 1 - 2m$$

$$2m = 1 - \frac{H \sqrt{1 + \xi}}{\xi}$$

$$m = 0,5 - \frac{H}{2\xi} \sqrt{1 + \xi}$$

( C.12 )

$$T = m \cdot \theta = m \cdot \frac{2l}{c}$$

$$T = \frac{2l}{c} \left( \frac{1}{2} - \frac{H}{2\xi} \sqrt{1 + \xi} \right)$$

La formule ci dessus nous permet de tracer les abaques pour  $\xi = c^{te}$  Nous avons interêt de tracer cet abaque pour  $\xi = c^{te}$  puisque chaque telle installation peut supporter une dépression bien établie qui assure la stabilité de la conduite et qui n'admet pas de cavitation.

$$m = f(H) \text{ pour } \xi = c^{te} \quad (\text{Fig.04})$$

Observation :

L'abaque N°04, montre que pour  $\xi = c^{te}$ , le temps d'ouverture augmente sensiblement quand la dépression diminue ( $\xi$ ). Cependant quand la dépression est importante, le temps d'ouverture est faible.

De même, pour  $\xi$  exigé, on peut trouver le temps d'ouverture (m) pour  $H$  donné.

C H A P I T R E D.

PERTES DE CHARGE EN REGIME TRANSITOIRE.

I. GENERALITES:

La perte de charge ou perte d'énergie le long d'un courant liquide est due aux frottements des molécules liquides entr'elles et contre les parois du dispositif solide qui guide le courant. Ces frottements interviennent dès que le mouvement se produit, puisqu'ils résultent de la viscosité du liquide et de la turbulence du régime : Ils apparaissent aussi bien dans un écoulement rectiligne de section constante, ou très progressivement variable, que lorsqu'il se rencontre une singularité brusque dans la direction du courant ou dans la forme ou l'étendue de section transversale.

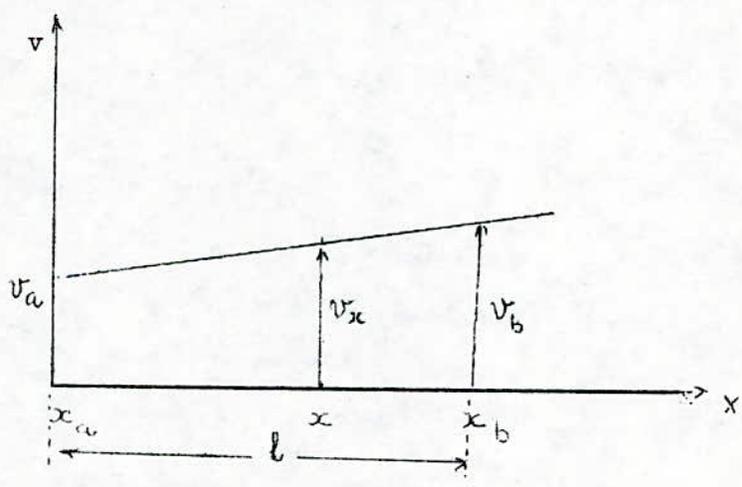
Nous commençons donc à établir l'expression de la perte de charge dans un écoulement en régime transitoire.

II. INFLUENCE DE LA PERTE DE CHARGE SUR LE COUP DE BELIER POUR UNE VARIATION LENTE DU DEBIT.

Nous allons voir les différentes formes de variation de la vitesse le long de la conduite.

1er cas : variation linéaire de la vitesse suivant la longueur de la conduite, c'est à dire la répartition des vecteurs vitesses est linéaire (Fig. n)

(fig.n.)



La tangente qui représente la pente de la droite est désigné par :

$$\alpha = \frac{v_b - v_a}{x_b - x_a}$$

Le gradient de perte de charge :  $J_x = K_1 \cdot v_x^2$

$K_1$  désigne une constante avec un diamètre constant et un coefficient de perte de charge fonction de la conduite. Pour un élément infinitésimal de la longueur de la conduite représenté par  $dx$ , la perte de charge vaut :

$$dx = J_x \cdot dx$$

En l'étalant sur la longueur "l".

$$S = \int_{x_a}^{x_b} J_x \cdot dx$$

et en fonction de la vitesse, ceci nous donne :

$$S = K_1 \int_{x_a}^{x_b} v_x^2 \cdot dx$$

La vitesse  $v_x$  à une abscisse (x) quelconque est :  $v_x = v_a + \frac{v_b - v_a}{l} x$

, ce qui donne :

avec :

$$S = K_1 \int_0^l \left( v_a + \frac{v_b - v_a}{l} x \right)^2 \cdot dx.$$

$$v_x^2 = v_a^2 + \left( \frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 \cdot x^2 + 2 v_a \frac{v_b - v_a}{l} x$$

$$S = K_1 \int_0^l \left[ v_a^2 + \frac{v_b - v_a}{l} \cdot x^2 + 2 v_a \frac{v_b - v_a}{l} x \right] dx.$$

Après intégration, on obtient :

$$S = K_1 \left[ v_a^2 \cdot x + \left( \frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + v_a \cdot \frac{v_b - v_a}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^l$$

$$S = K_1 \left[ v_a^2 \cdot l + \left( \frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 \cdot \frac{l^3}{3} + v_a \cdot \frac{v_b - v_a}{l} \cdot l \right]$$

$$S = \frac{\lambda l}{2gD} \left[ v_a^2 + \frac{(v_b - v_a)^2}{3} + \frac{v_a}{2} (v_b - v_a) \right]$$

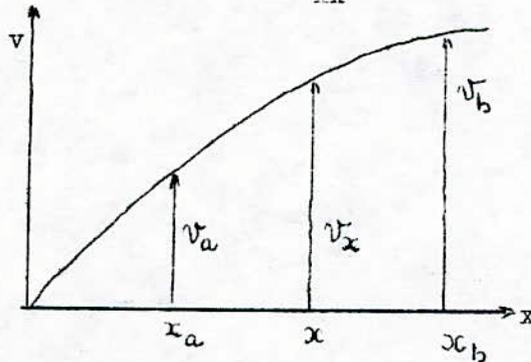
Finalement nous obtenons :

$$S = \frac{\lambda l}{2gD} \cdot \frac{1}{6} \left[ 5 v_a^2 + 2 v_b^2 - v_b \cdot v_a \right]$$

Si  $v_a = v_b$ , nous retrouvons l'équation de Darcy en écoulement uniforme.

2ème cas : Variation parabolique de la vitesse suivant la longueur de la conduite

a/ variation suivant la forme :  $x = \alpha \cdot v^2$  ( fig.v )



( Fig.v )

On peut écrire que :  $v_x = \sqrt{\frac{x}{\alpha}}$

et  $v_x^2 = \frac{x}{\alpha}$  avec  $x = K_1 \cdot v_x^2$ .

La perte de charge pour une longueur dx sera :  $ds = \int_x dx$ , en intégrant entre  $x_a$  et  $x_b$ .

$$S = \int_{x_a}^{x_b} \int_x dx = \int_{x_a}^{x_b} K_1 \cdot v_x^2 dx.$$

$$S = K_1 \int_{x_a}^{x_b} \frac{x}{\alpha} dx = \frac{K_1}{\alpha} \int_{x_a}^{x_b} x \cdot dx = \frac{K_1}{\alpha} \frac{x^2}{2} \Big|_{x_a}^{x_b} = \frac{K_1}{2\alpha} (x_b^2 - x_a^2)$$

d'où :  $S = \frac{K_1}{2\alpha} (x_b - x_a) (x_b + x_a)$ .

aux points différents de la conduite, nous avons :

$$x_b = \alpha v_b^2 ; \text{ et } x_a = \alpha v_a^2.$$

III. REPRESENTATION GRAPHIQUE :

III.1. Variation parabolique des vitesses : (cas a)

$$S = \frac{\lambda l}{2D} \cdot \left( \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_a^2}{2g} \right) = \frac{K}{2} \left( \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_a^2}{2g} \right).$$

avec  $K = \frac{\lambda l}{D}$ .

Si  $v_a = v_0$  et  $v_b = v_L$

Nous pouvons écrire que :

$$S = \frac{K}{2} \cdot \frac{1}{2g} (v_L^2 + v_0^2) = \frac{K}{2} \cdot \frac{v_0^2}{2g} \left[ 1 + \left( \frac{v_L}{v_0} \right)^2 \right]$$

$$\left[ 1 + \left( \frac{v_L}{v_0} \right)^2 \right]$$

$K \cdot \frac{v_0^2}{2g}$  - perte de charge en régime permanent.

représentons graphiquement  $\eta = f \left( \frac{v_L}{v_0} \right)$ . avec  $0 \leq \frac{v_L}{v_0} \leq 2$ .

$\frac{v_L}{v_0}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$\eta$	0.5	0.52	0.58	0.68	0.82	1.0	1.22	1.48	1.78	2.12	2.5

On prend la fourchette de variation de  $\frac{v_L}{v_0}$  de 0 à 2, car on considère que lors d'une ouverture brusque de la vanne, la vitesse  $v_L$  (au niveau de la vanne) pourra atteindre dans le cas général 2 fois la vitesse  $v_0$  de l'écoulement permanent.

III.2. Pour variation parabolique des vitesses : (cas b).

reprenons l'équation suivante :

$$S = \frac{\lambda l}{2g D^5} (v_L^2 + v_0 v_L + v_0^2) + \frac{\lambda l}{2g D^5} (v_0 + v_L) \cdot \sqrt{v_0 v_L}$$

$$S = \frac{1 \lambda}{2g D} \cdot \frac{1}{5} \left[ v_L^2 + v_0 v_L + v_0^2 + (v_0 + v_L) \sqrt{v_0 v_L} \right]$$

avec toujours  $K = \frac{\lambda l}{D}$

$$S = K \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{5} \left[ v_L^2 + v_0 v_L + v_0^2 + \sqrt{(v_0 + v_L)^2 \cdot v_0 v_L} \right]$$

$$S = K \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{5} \left[ v_L^2 + v_0 v_L + v_0^2 + \sqrt{(v_0^3 v_L + 2v_0^2 v_L^2 + v_0 v_L^3)} \right]$$

$$S = \frac{K_1}{5\alpha} (x_b - x_a) (\alpha^4 v_b^2 + \alpha^4 v_a^{1/2} v_b^{3/2} + 4\alpha v_a v_b + \alpha^4 v_b^{3/2} + \alpha^4 v_a^2)$$

$$S = \frac{K_1}{5\alpha} (x_b - x_a) \alpha^4 (v_b^2 + v_a^{1/2} v_b^{3/2} + v_a v_b + v_a^{3/2} v_b^{1/2} + v_a^2)$$

$$S = \frac{K_1}{5} (X_b - X_a) (v_b^2 + \sqrt{v_a v_b} + v_a v_b + \sqrt{v_a^3 v_b} + v_a^2)$$

en posant :  $X_b - X_a = 1$ .

d'où on peut écrire que :

$$S = \frac{K_1}{5} \cdot 1 \cdot (v_b^2 + v_a v_b + v_a^2) + \frac{K_1}{5} \cdot 1 \cdot (\sqrt{v_a v_b^3} + \sqrt{v_a^3 v_b})$$

ce qui donne :

$$S = \frac{K_1}{5} \cdot 1 (v_b^2 + v_a v_b + v_a^2) + \frac{K_1}{5} \cdot 1 (v_a + v_b) \cdot \sqrt{v_a v_b} \quad (D.3)$$

$$S = k \cdot \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{5} \left[ v_0^2 + v_0 v_L + v_L^2 + v_0^2 \sqrt{\frac{v_L}{v_0} + 2 \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^3} \right]$$

Ce qui nous donne :

$$S = k \cdot \frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{v_L}{v_0} + \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^2 + \sqrt{\frac{v_L}{v_0} + 2 \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^3} \right] \quad (D.5)$$

Dans ce cas :

$$\eta = \frac{1}{5} \left[ 1 + \frac{v_L}{v_0} + \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^2 + \sqrt{\frac{v_L}{v_0} + 2 \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{v_L}{v_0}\right)^3} \right]$$

$\frac{v_L}{v_0}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\eta$	0.2	0.35	0.48	0.64	0.81	1.0	1.21	1.44	1.69	1.96

Représentation graphique de la fonction  $\eta = f\left(\frac{v_L}{v_0}\right)$

pour : - Variation linéaire (v.L)

- Variation parabolique : cas(a), cas(b).

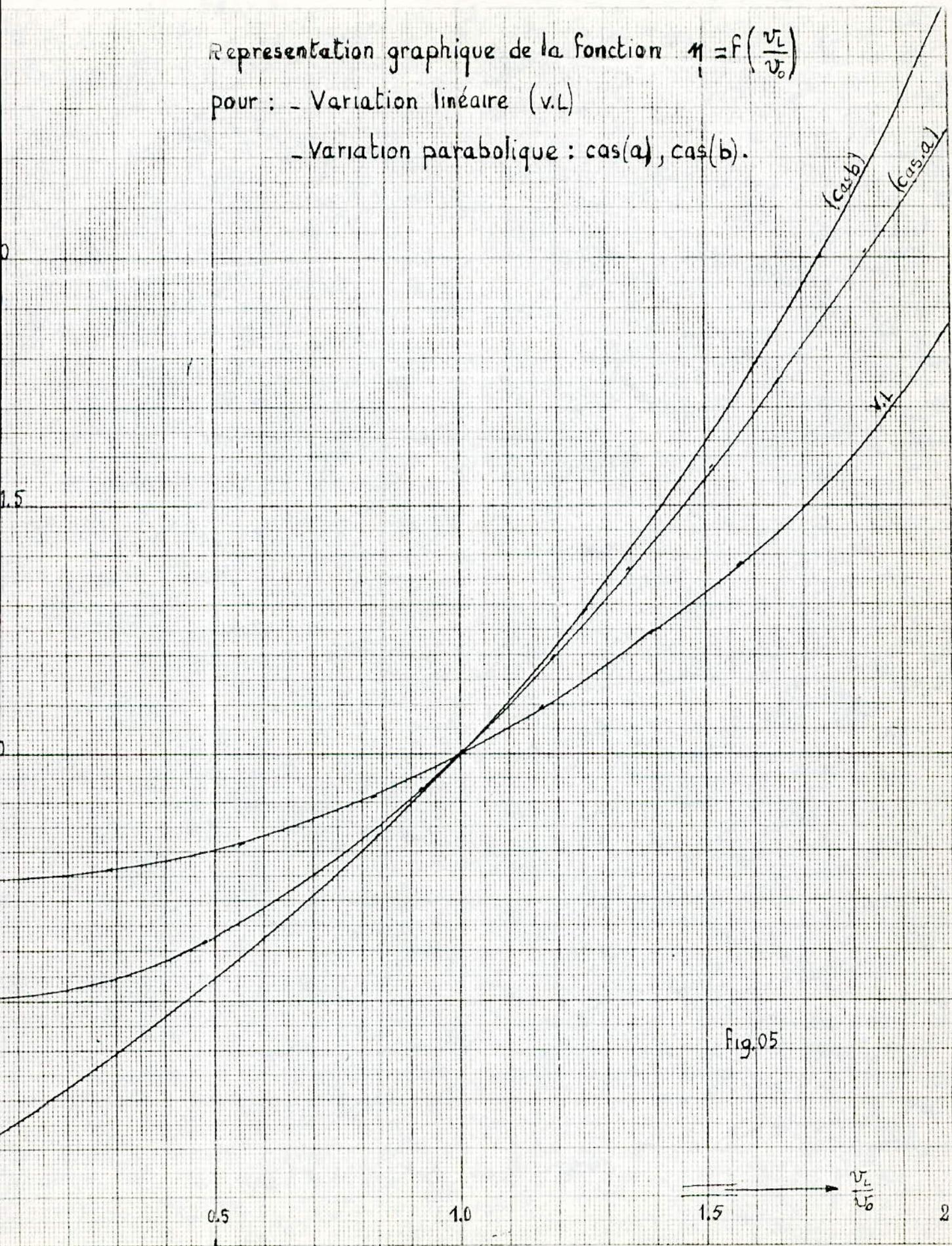


Fig.05

III.3. Pour variation linéaire de vitesse :

Nous reprenons la formule donnant la perte de charge (D.1).

$$S = \frac{1}{2gD} \cdot \frac{1}{6} (5 v_a^2 + 2 v_b^2 - v_a v_b)$$

Si nous avons  $V_a = V_o$  et  $V_b = V_L$ , et après simplification, nous obtenons :

$$S = \frac{\lambda l}{2gD} \cdot \frac{1}{6} \cdot V_o^2 \left[ 5 + 2 \left( \frac{V_L}{V_o} \right)^2 - \frac{V_L}{V_o} \right]$$

en posant :

$$\eta = \frac{1}{6} \left[ 5 + 2 \left( \frac{V_L}{V_o} \right)^2 - \frac{V_L}{V_o} \right]$$

Nous aurons :

$$S = \frac{\lambda l}{2gD} \eta \cdot V_o^2$$

$\frac{V_L}{V_o}$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$\eta$	0.730	0.81	0.82	0.85	0.91	1.0	1.18	1.25	1.42	1.61

III.4. Comparaison des trois cas :

Les trois courbes tracés présentent une comparaison bien notable entr'elles suivant l'allure qu'elles présentent.  $\frac{V_L}{V_o}$  on constate également que lorsque le rapport  $\frac{V_L}{V_o}$  sera égal à l'unité (régime permanent) les trois courbes se coupent entr'elles et que le coefficient  $\eta$  sera égal à 1.

Parallèlement à cela, on voit que les courbes données par les deux formes de  $\frac{V_L}{V_o}$  variation parabolique se rapprochent l'une de l'autre lorsque le rapport  $\frac{V_L}{V_o}$  est inférieur à l'unité.

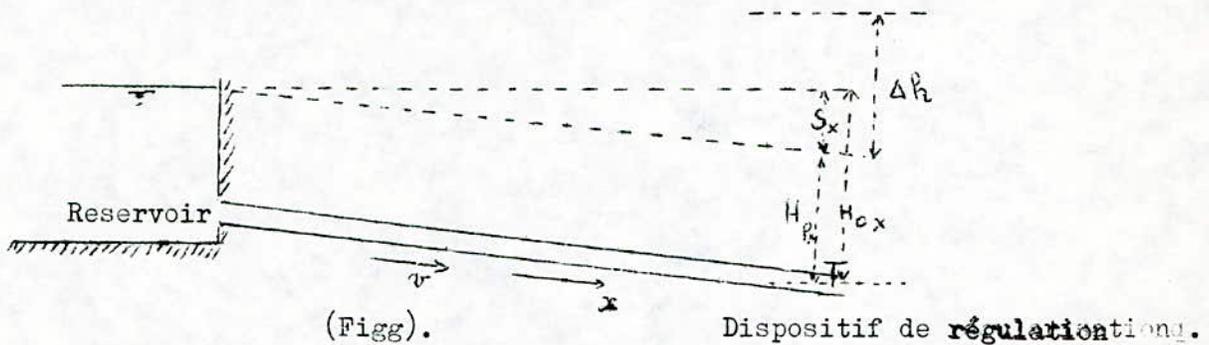
III.4.1. Conclusion :

Comme il est difficile de déterminer la variation de la vitesse de long de la conduite en régime transitoire, pour les pertes de charge, nous avons mis en évidence trois formules donnant la perte de charge en fonction des différentes variations de la vitesse le long de la conduite, et nous avons opté pour la formule la plus simple qui est celle de la variation parabolique de vitesse, c'est-à-dire :

$$S = \frac{K}{2} \left( \frac{V_a^2}{2g} + \frac{V_b^2}{2g} \right)$$

IV. INFLUENCE DE LA PERTE DE CHARGE ET L'ELASTICITE DE LA CONDUITE  
SUR LA PRESSION DYNAMIQUE DANS LE CAS D'UNE FERMETURE D'UN  
ORGANE DE REGULATION DE DEBIT:

Prenons une conduite qui véhicule le liquide à partir d'un réservoir, le débit étant réglé par une vanne se trouvant à l'extrémité aval de la conduite.



Supposons que la vanne se ferme brusquement et qu'un coup de bélier se produise; il aura la valeur :

$$\Delta h = \pm \frac{C \cdot v_0^2}{g}$$

juste après.

La pression dynamique dans une section de la conduite aura pour valeur : (Fig;g).

$$H_{xi} = H_{0x} - S_x + \Delta h.$$

où  $S_x$  - désigne la perte de charge au point d'abscisse (x). la vitesse de l'écoulement sera engendrée à la perte de charge au régime permanent qui règne dans la conduite juste avant l'arrivée du coup de bélier.

Cette vitesse donne naissance: à une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{M}{2} \cdot v^2$$

égale au travail fait par la pression perdue due à la perte de charge.

Si nous posons :

$$M = \Pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho \quad (D.7)$$

$$E_c = \frac{\Pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \rho}{2} \cdot v^2 \quad (D.8)$$

Puisque hors du front d'onde, la pression monte, donc cette énergie est récupérée par l'eau et par l'enveloppe de la conduite grâce à son élasticité.

$$E_c = E_{pe} + E_{pc} \quad (D.9)$$

L'énergie cinétique apportée par l'eau se divise en deux parties :

- . La première est transformée par l'eau.
- . La deuxième partie est transformée par la conduite.

Suivant la théorie de Clapeton, la croissance d'énergie potentielle de la conduite est :

$$dE_{pc} = \frac{dr}{2} F_1 \quad (D.10)$$

$F_1$  - désigne la force tangentielle sur toute la longueur de la conduite et ayant pour valeur :

$$F_1 = 2 \Pi \cdot r \cdot l \cdot P_s$$

ou bien :

$$F_1 = 2 \Pi \cdot r \cdot l \cdot \rho \cdot g \cdot S \quad (D.11)$$

Pour une conduite élastique, on peut écrire :

$$dr = \frac{r}{E_0} \cdot d\sigma_a \cdot n \quad (D.12)$$

$n = 1$  - pour une conduite élastique (conduite assemblée par le joint)

$n = 1 - \nu^2$  pour une conduite assemblée par le joint rigide (par exemple soudage).

étant donné que la contrainte annulaire est :

$$d\sigma_a = \frac{dP_s \cdot r}{e} \quad (D.13)$$

$$dr = dP_s \cdot \frac{r^2 \cdot \nu}{E_0 \cdot e}$$

$P_s$  - désigne la pression qui n'est pas constante, elle varie sur la longueur de la conduite, on peut écrire que :

$$P_s = \rho \cdot g \cdot S \cdot \frac{x}{l} \quad \text{et} \quad dP_s = \rho \cdot g \cdot S \cdot \frac{dx}{l}$$

Dans ce cas l'accroissement de l'énergie potentielle de la conduite est :

$$dE_{pc} = \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot r^2}{2 E_0 \cdot e} \cdot \nu \cdot \frac{dx}{l} \cdot 2 \cdot \Pi \cdot r \cdot l \cdot \rho \cdot g \cdot S \cdot \frac{x}{l} \quad (D.14)$$

$$\text{soit : } dE_{pc} = \frac{\Pi \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot S^2 \cdot r^3}{E_0 \cdot e \cdot l} \cdot n \cdot x \cdot dx$$

En integrant de 0 à 1, on obtient :

$$E_{pc} = \frac{II \cdot r^3 \cdot \rho^2 \cdot g^2 \cdot S^2 \cdot l}{2E_0 e} \quad (D.15)$$

l'énergie potentielle du liquide est respectivement :

$$dE_{pc} = \frac{dl}{2} \cdot F_2$$

avec

$$F_2 = II \cdot r^2 \cdot \rho \cdot S.$$

d'où l'accroissement de l'énergie potentielle du liquide sera :

$$dE_{pe} = \frac{1}{2} II r^2 \rho g S \cdot \frac{x}{l} \cdot dl. \quad (D.16)$$

Suivant la loi de Hook, on peut écrire :

$$\frac{dV}{V_0} = \frac{dP}{E}$$

Pour la conduite, dont la section droite soit constante, nous avons :

$$\frac{dl}{l} = \frac{dPs}{E} \quad \text{et} \quad dl = l \cdot \frac{dPs}{E}$$

et

$$dl = \frac{l}{E} \cdot \rho g S \cdot \frac{dx}{l}$$

soit :

$$dl = \frac{\rho g S}{E} \cdot dx.$$

dl - représente la longueur de la variation du volume dV.

dx - variable d'intégration.

En conséquence, nous avons :

(D.17)

$$dE_{pe} = \frac{1}{2} \cdot II r^2 \cdot \frac{\rho^2 g^2}{E} \cdot S^2 \cdot \frac{x}{l} \cdot dx$$

En intégrant de 0 à 1, nous obtenons :

$$E_{pe} = \frac{1}{4} \cdot II r^2 \cdot \frac{\rho^2 g^2}{E} \cdot S^2 \cdot l$$

Si nous portons les formules de l'accroissement de l'énergie cinétique et potentielle du liquide et de la conduite à l'équation de base nous obtenons :

$$\frac{1}{2} \text{II } r^2 \cdot \rho V_s^2 = \frac{1}{4} \cdot \text{II } r^2 \cdot \frac{\rho g^2}{E} \cdot S^2 \cdot 1 + \frac{\text{II} r^3}{2E_0 e} \rho^2 g^2 \cdot S^2 \cdot 1 \cdot n$$

( D.18)

après simplification, il vient :

$$V_s^2 = \frac{1}{2} \frac{\rho g^2}{E} \cdot S^2 + \frac{r}{E_0 e} \rho g^2 \cdot S^2 \cdot n$$

en divisant par S; nous obtenons :

$$\left( \frac{V_s}{S} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho g^2 \left[ \frac{1}{E} + \frac{D}{E_0 e} n \right]$$

ou bien :

$$\left( \frac{V_s}{S} \right)^2 = \frac{1/2 \cdot g^2 \cdot \rho}{E} \left[ 1 + n \frac{D \cdot E}{E_0 e} \right] \quad ( D.18)'$$

En considérant maintenant la formule pour la célérité d'onde :

$$c = \frac{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{\sqrt{1 + n \frac{D \cdot E}{E_0 e}}}$$

Sous une autre forme soit :

$$c^2 = \frac{E/\rho}{1 + n \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 e}} = \frac{E}{\rho \left[ 1 + n \cdot \frac{D \cdot E}{E_0 e} \right]}$$

d'où :

$$\rho \left[ 1 + n \frac{D \cdot E}{E_0 e} \right] = \frac{E}{c^2}$$

Si nous l'introduisons dans la formule (D.18)', nous obtenons :

$$\left( \frac{V_s}{S} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot g^2 \frac{E}{E c^2} \Rightarrow \left( \frac{V_s}{S} \right)^2 = \frac{1}{2} g^2 \cdot \frac{1}{c^2}$$

d'où nous avons :

$$\frac{V_s}{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{g}{c} \text{ ce qui donne : } V_s = \frac{S}{\sqrt{2}} \cdot \frac{g}{c}$$

Soit :

$$\frac{c}{g} V_s = \frac{S}{\sqrt{2}} \quad ( D.19)$$

L'expression  $\frac{CV_s}{g}$  représente le coup de bélier dû à la vitesse perdue à cause de la perte de charge S.

D'où nous tirons une conclusion :

Dans le cas d'une fermeture brusque, la ligne de pression dynamique va monter jusqu'à la hauteur :

$$H_X = H_{px} + \frac{CV^0}{g} + \frac{\sqrt{2}}{2} S_x \quad (D20)$$

Soit :

$$H_X = H_{0x} - S_x + \frac{\sqrt{2}}{2} S_x + \frac{CV_0}{g}$$

et  $H_X = H_{0x} - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) S_x + \frac{CV_0}{g}$

la valeur  $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) S_x = 0,293 S_x$  est consommée par la conduite.

Remarque :

Dans notre calcul, nous avons négligé la pression engendrée par la vitesse d'écoulement  $\frac{v^2}{2g}$ .

Nos calculs n'ont pas une grande conséquence pratique. Dans les calculs techniques, on prend comme pression dynamique :

$$H_X = H_{0X} + \frac{CV^0}{g}$$

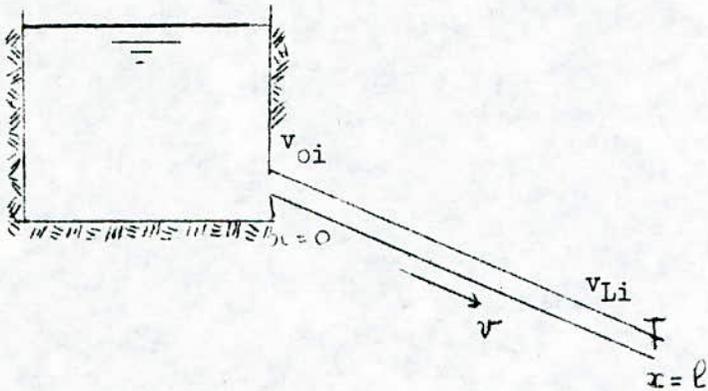
pour la raison de sécurité.

Cependant nous avons prouvé que les déplacements de la conduite peuvent avoir une influence sur l'amortissement du coup de bélier, dès que nous fermons complètement la vanne de régulation.

CHAPITRE -E-

DETERMINATION DES VITESSES ET COUPS DE BELIER EN TENANT COMPTE DES PERTES DE CHARGE.

I. DETERMINATION DES VITESSES :



Nous posons par hypothèse qu'à l'étape  $i = 0$  :

$$V_0 = V_{00} = v_{L0}$$

La détermination des vitesses se fait, moyennant le diagramme cité en appendice, à partir de l'équation de l'écoulement transitoire suivante :

$$dH \pm \frac{c}{g} dv + \Delta S = 0$$

Les formules donnant les pertes de charge, qui ont été déterminées, vérifient la formule de Darcy-Weisbach en régime uniforme.

Pour plus de simplicité, nous avons opté pour la formule (D.2) qui est la suivante :

$$\Delta S = \frac{K}{2} \left( \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_a^2}{2g} \right) = \frac{\lambda l}{2D} \left( \frac{v_b^2}{2g} + \frac{v_a^2}{2g} \right)$$

Le raisonnement cité en appendice -C- nous permet d'obtenir l'équation générale des vitesses :

$$V_{Li} = v_{L0} - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} \frac{v_{oi}^2}{2g} - h_{Li} \right] - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} \frac{v_{Li}^2}{2g} + \sum_{i=0}^{i-1} \frac{v_{oi}^2}{2g} \right] - \frac{g}{c} \left( \frac{K}{2} + 1 \right) \times \left( \frac{v_{L0}^2}{2g} + \frac{v_{Li}^2}{2g} \right)$$

Après transformation, on peut écrire :

$$V_{Li} + \frac{g}{c} (2+k) \sum_{l=0}^{i-1} \frac{V_{Li}^2}{2g} + \frac{g}{2c} (k+2) \frac{V_{Li}^2}{2g} = V_o - \frac{2g}{c} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{V_{oi}^2}{2g} - \frac{g}{c} (k+2) \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{l=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} \right]$$

Simplifions avec  $V_{Lo} = V_{oo}$ . Après simplification, on trouve :

$$V_{Li} + \frac{g}{c} (K+2) \sum_{l=0}^{i-1} \frac{V_{Li}^2}{2g} + \frac{g}{2c} (K+2) \frac{V_{Li}^2}{2g} = V_o - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{l=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} \right]$$

$$+ \frac{g}{c} (2-K) \sum_{l=0}^{i-1} \frac{V_{oi}^2}{2g} - \frac{g}{2c} (K+2) \frac{V_{Lo}^2}{2g}$$

$$V_{Li} + \frac{g}{2gc} \left[ (2+k) \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] = V_o - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{l=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} \right] + \frac{2-K}{2c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

$$\left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right] \rightarrow V_{Li} + \frac{1}{2c} \left[ (2+k) \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] = V_o - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{l=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} \right] + \frac{2-K}{2c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

Au niveau du réservoir, le niveau est supposé invariable:  $h_{oi} = 0$ , on écrit :

$$V_{Li} + \frac{1}{2c} \left[ (2+k) \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] = V_o - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right] + \frac{2-K}{2c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

En isolant les termes contenant les pertes de charge, on écrit :

$$V_{Li} = V_o + \frac{1}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right] - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right] - \frac{1}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} \right]$$

$$- \frac{K}{2c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} + \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} \right]$$

La différence des carrés des vitesses  $V_{oi}$  et  $V_{Li}$  est très faible, de même, on peut négliger cette différence devant la valeur de la célérité (c). A partir de l'équation suivante :

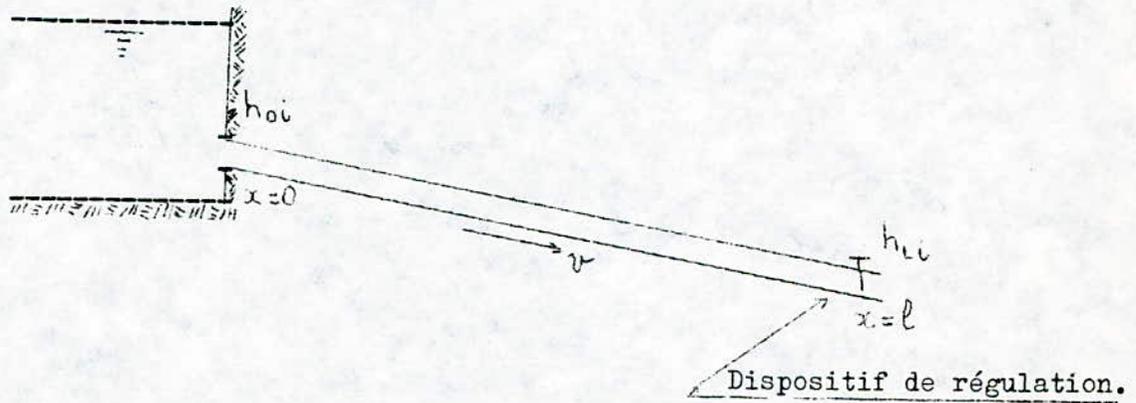
$$V_{Li} = V_o + \frac{1}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 - \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 \right] + \frac{1}{2c} \left[ V_{Lo}^2 - \frac{V_{Li}^2}{2} \right] - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right] - \frac{K}{2c} \left[ \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} + \frac{V_{Lo}^2}{2} + \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 \right]$$

Nous pouvons écrire :

$$V_{Li} = V_0 - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right] - \frac{k}{2c} \left[ \sum_{i=0} V_{li}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} \right] + \frac{V_{Lo}^2}{2} + \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 \quad (E.1)$$

La différence entre les formules (C.2) et (E.1) réside uniquement dans le terme donnant les pertes de charge qui vient d'être retranché, d'où l'influence des pertes de charge qui tend à réduire la vitesse.

II. DETERMINATION DES SURPRESSIONS DUES AUX COUPS DE BELIER ( h<sub>Li</sub> )



1/A Partir de la formule déjà trouvée :

$$\begin{aligned} * V_{Li} + \frac{1}{2c} \times \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] &= V_0 - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{i=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} \right] \\ &+ \frac{2-k}{2c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right] \\ * \frac{2g}{c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{i=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} \right] &= V_0 - V_{Li} - \frac{1}{2c} \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] \\ &+ \frac{-k+2}{2c} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right] \\ * \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{i=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Li}}{2} &= \frac{c}{2g} (V_0 - V_{Li}) - \frac{1}{4g} \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 \right. \\ &+ \left. \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] + \frac{2-k}{4g} \times \left[ \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$* \cdot \frac{h_{Li}}{2} = -\frac{c}{2g} (V_o - V_{Li}) - \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} + \sum_{i=0}^{i-1} h_{oi} - \frac{1}{4g} \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] + \frac{2-k}{4g} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

$$* \cdot h_{Li} = -\frac{c}{g} (V_o - V_{Li}) - 2 \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} + 2 \sum_{i=0}^{i-1} h_{oi} - \frac{1}{2g} \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] + \frac{2-k}{2g} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

Au niveau du reservoir  $h_{oi} = 0$ , coup de béliers s'annulent, d'où :

$$h_{Li} = -\frac{c}{g} (V_o - V_{Li}) - 2 \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} - \frac{1}{2g} \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{k+2}{2} V_{Li}^2 \right] + \frac{2-k}{2g} \left[ \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right] \quad (E.2)$$

II.1. Coup de béliers parfait pour une fermeture de l'organe de régulation.

Pour  $i=m$ , en considérant que  $h_{Li}$  augmente pendant la première phase et demeure constant, nous pouvons poser  $V_{Li} = V_{Lm} = 0$ . La formule tenant compte des pertes de charge s'écrit :

$$h_{Lm} = -\frac{c}{g} (V_o - 0) - 2 \sum_{i=0}^{m-1} h_{Lm} - \frac{1}{2g} \left[ (2+k) \sum_{i=0}^{m-1} V_{Li}^2 + 0 \right] + \frac{2-k}{2g} \left( \sum_{i=0}^{m-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right)$$

ou bien, on peut écrire :

$$h_{Lm} + 2(m-1)h_{Lm} = \frac{c}{g} V_o - \frac{2+k}{2g} \sum_{i=0}^{m-1} V_{Li}^2 + \frac{2-k}{2g} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

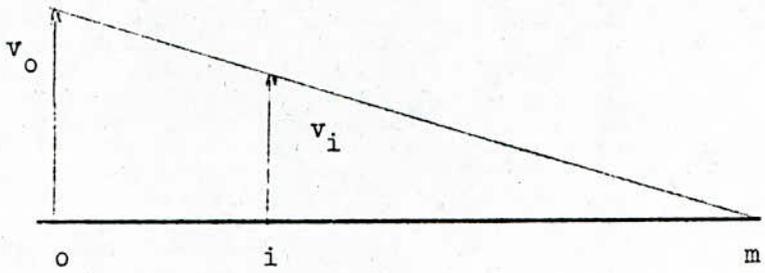
$$(2m-1)h_{Lm} = \frac{c}{g} V_o - \frac{2+k}{2g} \sum_{i=0}^{m-1} V_{Li}^2 + \frac{2-k}{2g} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} V_{oi}^2 + \frac{V_{Lo}^2}{2} \right]$$

D'autre part, nous avons  $V_{Lo} = V_o$ .

Donc on peut écrire :

$$(2m-1)h_{Lm} = -\frac{c}{g} V_o + \frac{2-k}{4g} \cdot V_o^2 - \frac{2+k}{2g} \sum_{i=0}^{m-1} V_{oi}^2$$

Pour le calcul des pertes de charges  $\Delta S$ , nous avons supposé que la répartition de la vitesse dans la conduite sera linéaire soit presque linéaire pendant la manoeuvre de l'organe de régulation du débit qui arrêtera le débit d'écoulement dans la conduite. Par conséquent  $V_{Li}$  va varier de  $V_0$  pour  $i=0$  à  $V_{Lm} = 0$ .



Nous pouvons écrire :

$$V_i = \frac{V_0}{m} (m - i) \text{ - ce qui donne :}$$

$$V_i^2 = \frac{V_0^2}{m^2} (m - i)^2$$

ou bien :

$$\sum_0^{m-1} V_i^2 = \sum_0^{m-1} \frac{V_0^2}{m^2} (m - i)^2 = \frac{V_0^2}{m^2} \sum_0^{m-1} (m - i)^2$$

Donc :

$$(2m - 1) h_{Lm} = \frac{c}{g} V_0 + \frac{2 - K}{4g} V_0^2 - \frac{2 - K}{2g} \frac{V_0^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2 + \frac{2 - K}{2g} \frac{V_0^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2$$

Ceci peut s'écrire comme suit :

$$(2m - 1) h_{Lm} = \frac{c}{g} V_0 + \frac{2 - K}{4g} V_0^2 - \frac{V_0^2}{gm^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2 - \frac{K V_0^2}{2gm^2} \times \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2 + \frac{V_0^2}{2gm^2} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2 - \frac{K}{2gm^2} V_0^2 \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2$$

Finalement, nous obtenons :

$$(2m - 1) h_{Lm} = \frac{c}{g} V_0 + \frac{2 - K}{4g} V_0^2 - \frac{K V_0^2}{2gm^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2 - \frac{K}{2gm^2} V_0^2 \times \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2$$

Ou bien :

$$(2m - 1) h_{hm} = \frac{cV_o}{g} - \frac{K - 2}{4g} V_o^2 - \frac{K}{g} \frac{V_o^2}{m^2} - \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2.$$

En déterminant  $h_L$ , on aura :

$$h_L = \frac{cV_o}{g(2m-1)} - \frac{k-2}{4g(2m-1)} V_o^2 - \frac{K}{4(2m-1)m^2} V_o^2 - \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2$$

En divisant les deux membres par  $H_o$  :

$$\frac{h_L}{H_o} = \frac{cV_o}{g(2m-1)H_o} - \frac{K-2}{4g(2m-1)H_o} V_o^2 - \frac{K V_o^2}{4(2m-1)m^2 H_o} - \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2$$

En général  $K \gg 2$ ,  $(K-2) \approx K$ , on ne fait pas une grande faute, si on néglige le terme  $\frac{V_o^2}{4g}$ , on peut donc écrire :

$$\frac{h_L}{H_o} = \xi = \frac{cV_o}{(2m-1)gH_o} - \frac{KV_o^2}{(2m-1)gH_o} \left[ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2 \right]$$

$$\xi = \frac{cV_o}{(2m-1)gH_o} - \frac{KV_o^2}{(2m-1)4gH_o} \left[ 1 + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2}{m^2} \right]$$

En tenant compte des formules III. 10 a et III.3a :

$$\psi^2 = \frac{V_o^2}{2gH_o} \text{ et } \beta = \frac{cV_o}{gH_o}$$

On peut écrire :

$$\xi = \frac{\beta}{2m-1} - \frac{K \psi^2}{2(2m-1)} \left[ 1 + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2}{m^2} \right] \quad (E.3)$$

Remarque :

C'est une formule approchée qui peut servir pour trouver  $\xi$  étant donné  $m$ .

Pour trouver  $m$  étant donné  $\xi$  . ( Voir fig.6).

### II.1.1. Représentation graphique :

Pour pouvoir tracer la courbe correspondant à cette équation, nous avons conçu un programme à l'ordinateur HP permettant de trouver la valeur du coup de bélier en fonction des valeurs attribuées à (m). Le calcul est donné par deux variantes :

1ère variante :  $V_0 = 2\text{m/s}$  ,  $H_0 = 50\text{m}$  ,  $c = 1000\text{ m/s}$ .

2ème variante :  $V_0 = 1\text{m/s}$  ;  $H_0 = 100\text{m}$  ;  $c = 1000\text{ m/s}$ .

#### Programme de calcul sur HP.

```

10 READ V,H,C
20 PRINT "m/k"
30 FOR I = 1 TO 4
40 READ K (I)
50 PRINT USING GX,DDD,k(I)
60 NEXT I
70 A = C.V/H/9.81
80 B = V*V/H/19.62
90 FOR M = 1 TO 30
100 S = 0
110 FOR I = 0 TO M-1
120 S = S + (M-I)M-2
130 NEXT I
140 F1 = A/(2.M-1)
150 F2 = B/(4.M-2).(1 +S/M/M)
160 PRINT
170 PRINT M,
180 FOR I = 1 TO 4
190 F = F1 - K (I) F2
200 PRINT USING 4X,D.DDD,F
210 NEXT I
220 NEXT M.
230 DATA 2,50,1000
240 DATA 0,200,600
250 END.

```

Variation de  $\xi = f(m,k)$ .

		1ere Variante				2eme Variante			
m	k =	0	200	400	600	0	200	400	600
1		4.077	3.261	2.446	1.630	1.019	0.917	0.815	0.713
2		1.359	1.053	0.747	0.441	0.339	302	263	225
3		0.815	0.007	0.398	0.190	203	177	151	125.
4		0.582	0.415	0.247	0.080	145	124	103	082
5		453	308	163	018	113	095	077	058
6		370	239	109	022	092	076	059	043
7		313	192	071	050	078	063	048	033
8		271	158	044	070	067	053	039	025
9		239	131	023	086	059	046	032	019
10		214	110	006	098	053	040	027	014
11		194	093	008	108	048	035	023	010
12		177	079	019	116	044	032	019	007
13		163	067	028	123	040	028	016	005
14		151	057	036	129	037	026	014	002
15		146	049	043	135	035	029	012	0
16		131	041	049	139	032	021	010	001
17		123	034	054	143	030	019	008	003
18		116	029	059	146	029	018	007	004
19		110	023	063	150	027	016	005	005
20		0.104	0.019	0.067	0.152	0.026	0.015	0.004	0.006

TAB.06.

Influence du temps réduit ( $m$ ) de fermeture sur la surpression  $\xi$  pour  $\frac{H_0}{g} = \frac{Cv_0}{gH_0} = Ck$   
 tenant compte des pertes de charge.

$$\xi = f\left(\frac{I}{\theta}\right) = f(m) = \frac{\gamma H_0}{2m-1} \cdot \frac{K\varphi^2}{2(2m-1)} \left[ 1 + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2}{m^2} \right]$$

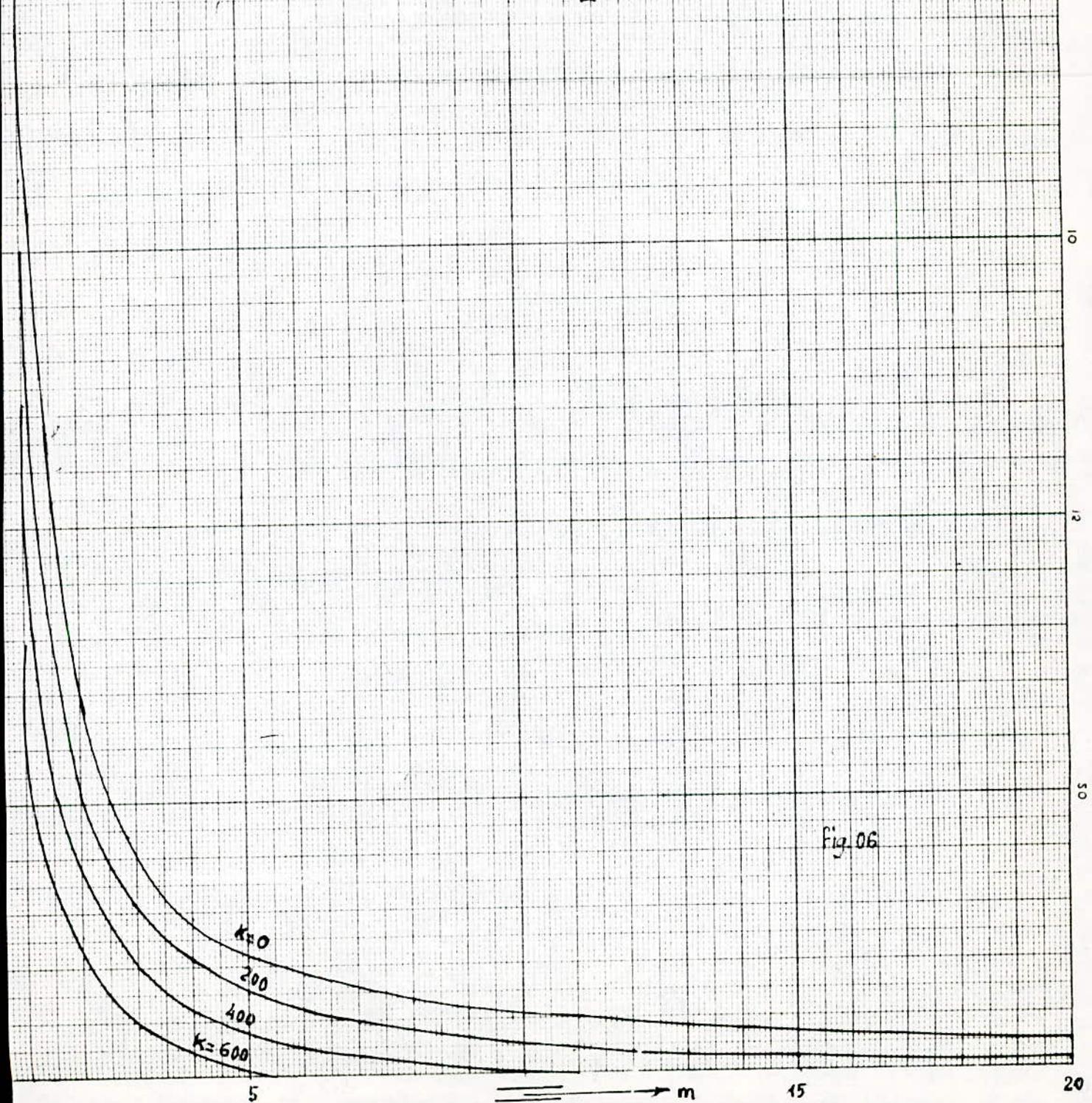


Fig. 06

II.2. Coup de béliier parfait pour une ouverture  
de l'organe de régulation tenant compte des  
pertes de charge :

Pour étudier le coup de béliier parfait et sa valeur en fonction du temps d'ouverture de l'organe de régulation installé à l'extrémité aval d'une conduite, nous reprenons l'équation (D.1.) donnant la répartition des vitesses pendant la manoeuvre de l'ouverture en tenant compte des pertes de charge :

$$V_{Li} = V_0 - \frac{2g}{c} \left( \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right) - \frac{K}{2c} \left( \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} + \frac{V_{Lo}^2}{2} + \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 \right)$$

Pour une ouverture, au début nous pouvons imposer que :

$$V_{L0} = V_{o0} = V_0 = 0$$

L'équation précédente devient :

$$V_{Li} = - \frac{2g}{c} \left( \sum_{l=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right) - \frac{K}{2c} \left( \sum_{l=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} + \sum_{l=0}^{i-1} V_{oi}^2 \right)$$

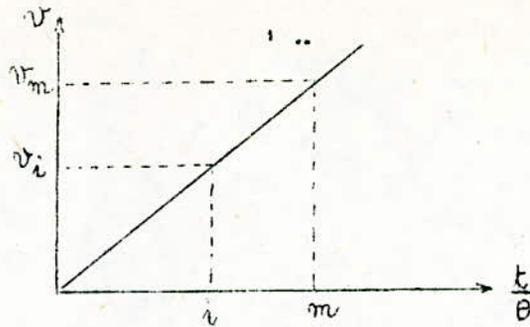
Pour un coup de béliier parfait, nous posons que :

$h_{\phi i} = h_1 = C^{te}$ , pendant d'ouverture de l'organe de régulation laquelle dure  $T = m\theta$ .

Au moment de l'ouverture complète nous avons :  $T = m\theta$

$$V_{Lm} = - \frac{2g}{c} \left[ (m-1) h_1 + \frac{h_1}{2} \right] - \frac{K}{2c} \left[ \sum_{l=0}^{m-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Lm}^2}{2} + \sum_{l=0}^{m-1} V_{oi}^2 \right]$$

En négligeant la perte de charge pour un coup de béliier parfait, nous avons obtenu la répartition linéaire de la vitesse en fonction du temps de manoeuvre de l'organe de régulation. Par conséquent nous supposons aussi une variation linéaire cette fois-ci.



(m) étant le temps réduit de la durée de la manoeuvre d'ouverture,

nous avons :

$$\frac{v_i}{i} = \frac{v_m}{m} \quad ; \quad v_i = i \frac{v_m}{m}$$

ou bien :

$$v_i^2 = i^2 \cdot \frac{v_m^2}{m^2} \quad \text{ce qui donne :} \quad \frac{v_{Li}^2}{i^2} = \frac{v_{Lm}^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2$$

d'où nous pouvons écrire :

$$v_{Lm} = - \frac{2g}{c} \left[ (m-1) h_1 + \frac{h_1}{2} \right] - \frac{k}{2c} \left( \frac{v_{Lm}^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 + \frac{v_{Lm}^2}{2} + \sum_{i=0}^{m-1} v_{oi}^2 \right)$$

En tenant compte des résultats obtenus pour la même manoeuvre en négligeant la perte de charge :

nous donnons une hypothèse, en posant que la vitesse  $v_{oi}$  à la sortie du réservoir sera dans un rapport  $\mu$  avec la vitesse  $v_{Li}$  au niveau de l'organe de régulation où le coefficient  $\mu$  sera une fonction de (m) :  $\mu = f(m)$ ,

$$\begin{aligned} v_{oi} &= \mu v_{Li} = \mu(m) v_{Li} \\ \frac{v_{oi}}{i} &= \mu(m) \frac{v_{Lm}}{m} \Rightarrow v_{oi} = \mu(m) \cdot \frac{v_{Lm}}{m} i \\ v_{oi}^2 &= \mu^2 \cdot \frac{v_{Lm}^2}{m^2} i^2 \Rightarrow \sum_{i=0}^{m-1} v_{oi}^2 = \mu^2 \cdot \frac{v_{Lm}^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} v_{Lm} &= - \frac{2g}{c} \left/ \left[ (m-1) h_1 + \frac{h_1}{2} \right] \right. = - \frac{k}{2c} \left( \frac{v_{Lm}^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 + \frac{v_{Lm}^2}{2} + \mu^2 \frac{v_{Lm}^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 \right) \\ v_{Lm} &= - \frac{2g}{c} \left/ \left[ \left( m - \frac{1}{2} \right) h_1 \right] \right. / - \frac{k}{2c} v_{Lm}^2 \left[ 0,5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 \right] \end{aligned}$$

D. plus nous avons au niveau de l'organe :

$$V_{Lm} = \varphi \cdot \sqrt{2g (H_0 + h_1)}$$

Quand le régime permanent s'établit avec une même ouverture "a"

nous pouvons écrire :

$$V^0 = \varphi \sqrt{2g H_0}$$

où  $V^0$  - c'est la vitesse en régime établi pour l'ouverture "a"

Cependant si nous considérons que le coefficient de vitesse reste constant pour une ouverture "a" donnée nous écrivons que :

$$\text{nous aurons : } V_{Lm} = V^0 \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}}$$

nous avons :

$$V_{Lm}^2 = (V^0)^2 \left( 1 + \frac{h_1}{H_0} \right)$$

Tenant compte que  $\frac{h_1}{H_0} = \xi$

En remplaçant dans l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$V^0 \sqrt{1 + \frac{h_1}{H_0}} = - \frac{2g}{c} \left( m - \frac{1}{2} \right) h_1 - \frac{k}{2c} (V^0)^2 \left( 1 + \xi \right)$$

$$\left( 0.5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} i^2 \right)$$

en multipliant par le terme  $\frac{c}{gH_0}$ , nous obtenons:

$$\frac{cV^0}{gH_0} - \sqrt{1 + \xi} = -2 \left( m - \frac{1}{2} \right) \xi - \frac{K}{2gH_0} (V^0)^2 (1 + \xi)$$

$$\left( 0.5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 \right)$$

Ce qui donne, en tenant compte que  $2\varphi^2 = \frac{V^0{}^2}{2gH_0}$ ,  $\mathcal{H} = \frac{cV^0}{gH_0}$

$$\mathcal{H} \sqrt{1 + \xi} = -2 \left( m - \frac{1}{2} \right) \xi - K \varphi^2 (1 + \xi) \left( 0.5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 \right)$$

En posant  $N = 0.5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2$ , on obtient :

$$\mathcal{H} \sqrt{1 + \xi} = -2 \left( m - \frac{1}{2} \right) \xi - \varphi^2 K N (1 + \xi).$$

Comme précédemment, nous allons répondre à deux questions concernant le coup de bélier parfait :

a/ quelle est l'influence d'ouverture sur la dépression pour une installation de caractéristique donnée ?

b/ Quelle est l'influence de la dépression imposée et de la caractéristique de l'installation sur le temps d'ouverture ?

a) Pour répondre à la 1ere question, nous devons tracer une courbe de  $\xi = f(m)$  pour  $\mathcal{H} = \text{Cte}$ .

Pour cela, nous résolvons l'équation (E.3) ci-dessus par rapport à  $\xi$  :

$$-2 \left( m - \frac{1}{2} \right) \xi - K \varphi^2 N (1 + \xi) = \mathcal{H} \sqrt{1 + \xi}$$

Posons  $R = K \varphi^2 N$ , désignant le coefficient de perte de charge :

$$\text{avec } N = 0.5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2$$

$$\mathcal{H} \sqrt{1 + \xi} = -2 \left( m - \frac{1}{2} \right) \xi - R(1 + \xi).$$

Ce qui donne :

$$\left[ 4 \left( m - \frac{1}{2} \right)^2 + R^2 + 4 \left( m - \frac{1}{2} \right) R \right] \xi^2 + \left[ 2R^2 + 4R \left( m - \frac{1}{2} \right) - \mathcal{H}^2 \right] \xi + R - \mathcal{H}^2 = 0$$

C'est une équation du second degré, ayant pour racines :

$$\xi_1 = f(m) = \frac{- \left( 2R^2 + 4R \left( m - \frac{1}{2} \right) - \mathcal{H}^2 \right) - \sqrt{4 \left( 4m^2 - 4m + 6Rm - R + 1 \right) + \mathcal{H}^2}}{2 \left[ 4 \left( m - \frac{1}{2} \right)^2 + R^2 + 4 \left( m - \frac{1}{2} \right) R \right]} \quad (1)$$

$$\xi_2 = f(m) = \frac{- \left( 2R^2 + 4R \left( m - \frac{1}{2} \right) - \mathcal{H}^2 \right) + \sqrt{4 \left( 4m^2 - 4m + 6Rm - R + 1 \right) + \mathcal{H}^2}}{2 \left[ 4 \left( m - \frac{1}{2} \right)^2 + R^2 + 4 \left( m - \frac{1}{2} \right) R \right]}$$

II.2.1. Représentation graphique :

L'application numérique consiste à trouver une courbe, montrant l'influence du temps d'ouverture sur la depression pour une caractéristique  $\mathcal{H}$  de l'installation imposée :

De ce fait l'équation (E.3a) nous donne deux racines, seule la racine(1) qui donne la solution à notre problème :

$$\xi = f(m) = \frac{- ( 2R^2 + 4R (m - 1/2) - \frac{1}{4} ) - \sqrt{4m^2 - 4m + 6Rm - R + 1} + R^2}{2 \sqrt{4 (m-1/2)^2 + R^2 + 4 (m - 1/2) DR}}$$

Faisons des variantes pour chaque valeur de  $R = K\psi^2 N$

$$R = K\psi^2 N = 1.5.$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{H} = 0.5$	-0.814	-0.452	-0.312	-0.238	-0.192	-0.161	-0.139	-0.122	-0.109
$\mathcal{H} = 0.1$	-0.993	-0.559	-0.388	-0.296	-0.240	-0.201	-0.173	-0.152	-0.136
$\mathcal{H} = 2$	-1.266	-0.743	-0.523	-0.403	-0.328	-0.276	-0.239	-0.210	-0.188
$\mathcal{H} = 3$	-1.454	-0.892	-0.840	-0.499	-0.408	-0.346	-0.300	-0.265	-0.237
$\mathcal{H} = 4$	-1.583	-1.011	-0.740	-0.584	-0.482	-0.410	-0.357	-0.316	-0.283
$\mathcal{H} = 5$	-1.672	-1.107	-0.826	-0.659	-0.548	-0.469	-0.410	-0.364	-0.327
$\mathcal{H} = 6$	-1.736	-1.185	-0.900	-0.726	-0.608	-0.524	-0.459	-0.409	-0.360

Tab.08.

Influence du temps réduit ( $m$ ) d'ouverture sur la dépression  $\xi$  pour  
une caractéristique  $\mathcal{R}$  de l'installation imposée.

Coefficient de perte de charge :  $R = K\varphi^2 N = 1.5$ .

$\frac{h}{H_0} = \xi$

$$\xi = f(m)$$

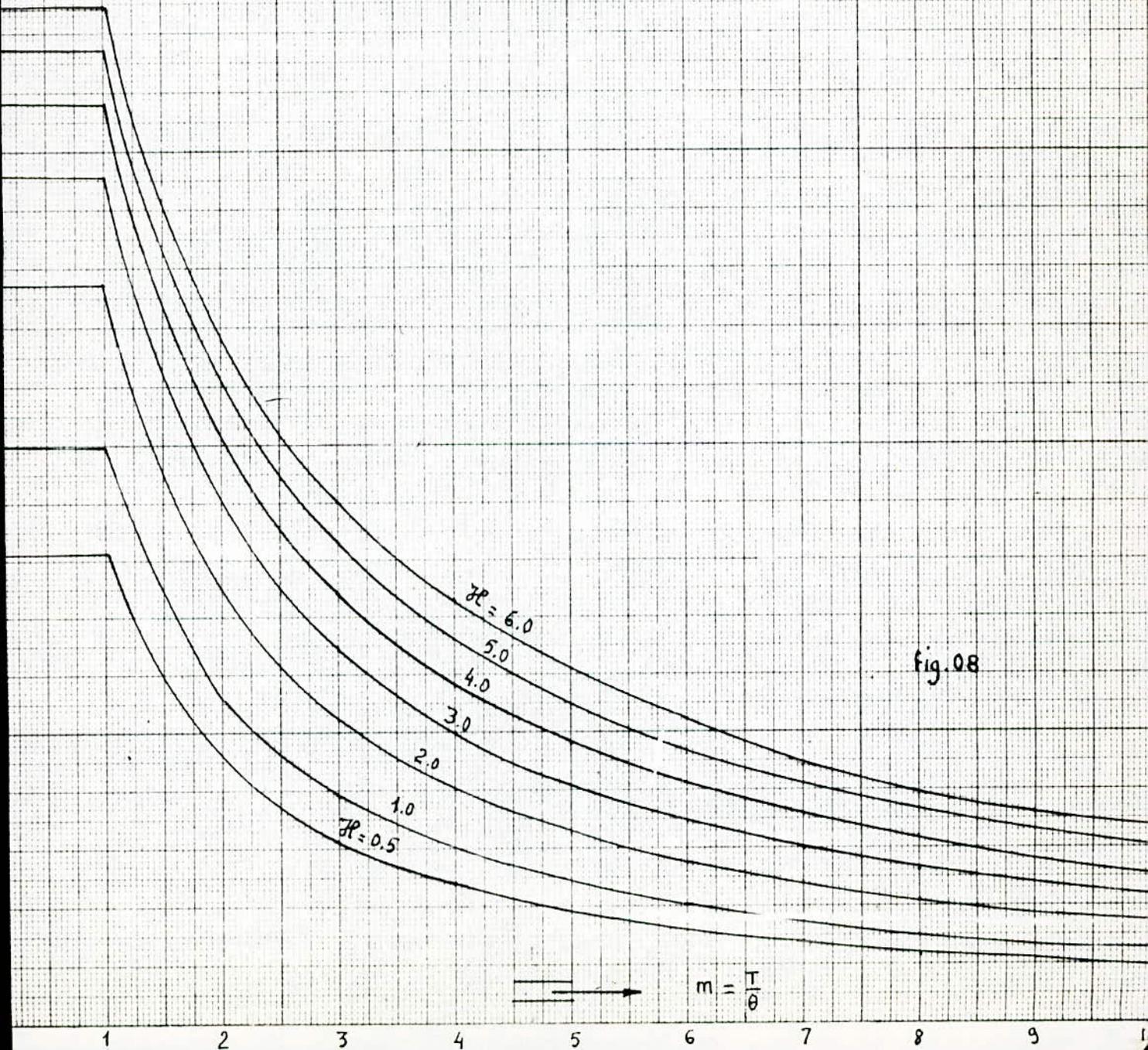


Fig. 08

$$R = K\psi^2 N = 2.$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{H}=0.5$	-0.838	-0.505	-0.362	-0.281	-0.230	-0.194	-0.168	-0.148	-0.132
$\mathcal{H}=1.0$	-0.984	-0.604	-0.433	-0.336	-0.275	-0.233	<b>-0.202</b>	-0.178	-0.159
$\mathcal{H}=2.0$	-0.214	-0.773	-0.561	-0.439	-0.361	-0.306	-0.265	-0.234	-0.209
$\mathcal{H}=3.0$	-1.380	-0.912	-0.673	-0.532	-0.439	-0.374	-0.326	-0.288	-0.258
$\mathcal{H}=4.0$	-1.499	-0.027	-0.770	-0.616	-0.511	-0.437	-0.382	-0.339	-0.304
$\mathcal{H}=5.0$	1.585	-1.121	-0.855	-0.689	-0.577	-0.495	-0.434	-0.386	-0.348
$\mathcal{H}=6.0$	1.648	-1.198	-0.928	-0.755	-0.636	-0.540	-0.483	-0.431	-0.383

Tableau 0.9,

$$R = K\psi^2 N = 3.$$

$\mathcal{H}$ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
= 0.5	-0.867	-0.586	-0.441	-0.353	-0.294	-0.252	-0.220	-0.196	-0.198
= 1.0	-0.971	-0.661	-0.504	-0.404	-0.337	-0.288	-0.252	-0.224	-0.262
=2.0	-1.140	-0.809	-0.618	-0.498	-0.414	-0.358	-0.313	-0.279	-0.251
=3.0	-1.270	-0.929	-0.719	-0.584	-0.491	-0.423	-0.371	-0.330	-0.298
=4.0	-1.368	-1.031	-0.809	-0.662	-0.559	-0.483	-0.425	-0.379	-0.343
=5.0	-1.443	-1.118	-0.888	-0.782	-0.622	-0.539	-0.476	-0.426	-0.385

TAB.10.

Influence du temps reduit (m) d'ouverture sur la depression  $\xi$  pour  
 une caracteristique  $\mathcal{R}$  de l'installation imposee  
 coefficient de perte de p charge :  $R = k\varphi^2 N = 2.0$

$$\xi = \frac{h}{H_0}$$

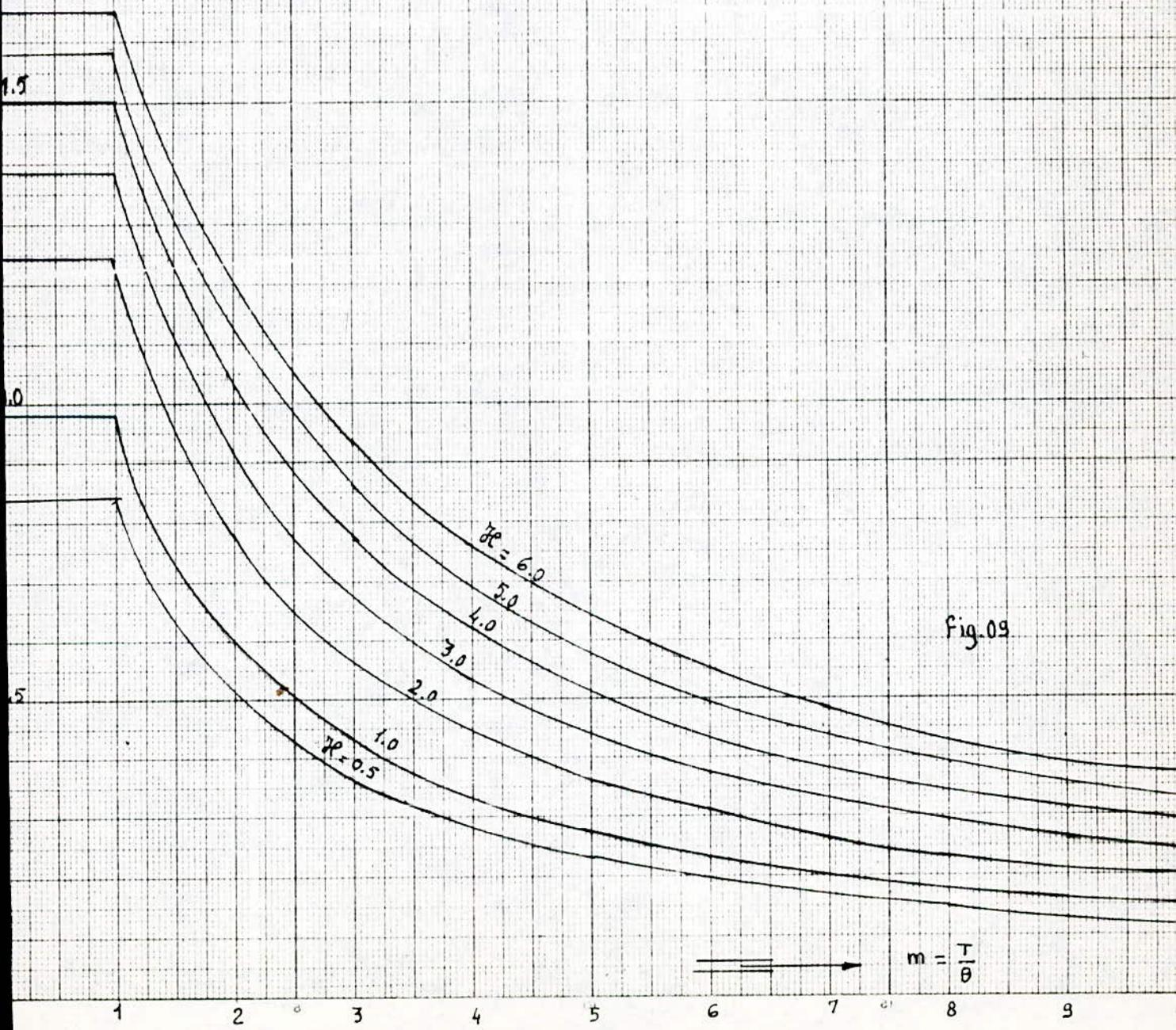


Fig.09

Influence du temps réduit (m) d'ouverture sur la dépression  $S$  pour une caractéristique d'installation imposée  $R$ .

Coefficient de pertes de charge :  $R = K \varphi^2 N = 3.0$

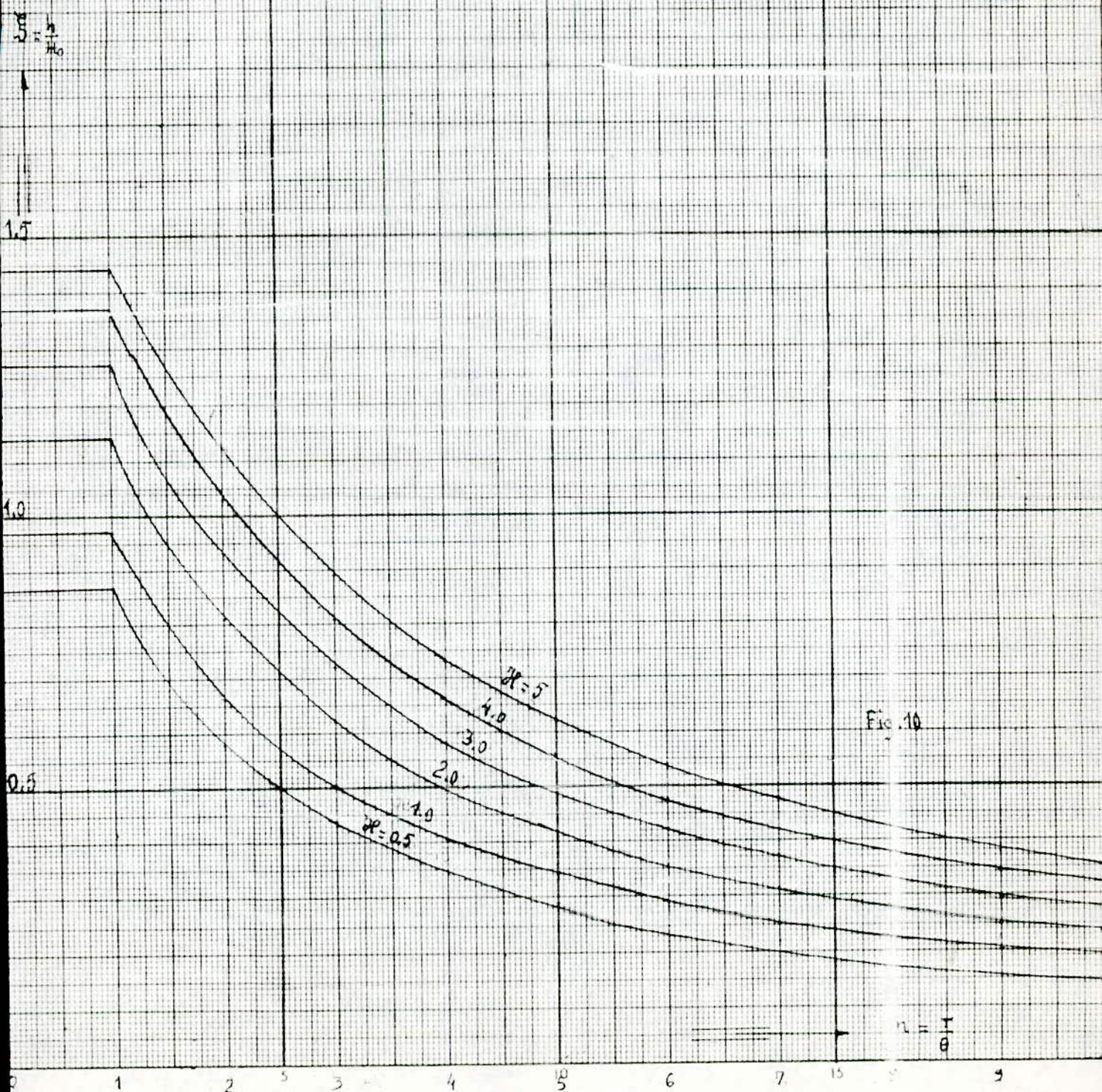


Fig. 10

$$n = \frac{I}{\theta}$$

$$R = K \varphi^2 N = 4.$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{H} = 0.5$	-0.886	-0.643	-0.502	-0.411	-0.348	-0.302	-0.266	-0.238	-0.215
$1 = \mathcal{H}$	-0.964	-0.710	-0.557	-0.458	-0.388	-0.336	-0.297	-0.265	-0.240
$2 = \mathcal{H}$	-1.095	-0.831	-0.659	-0.544	-0.462	-0.402	-0.355	-0.318	-0.288
$3 = \mathcal{H}$	-1.199	-0.935	-0.750	-0.623	-0.532	-0.463	-0.410	-0.367	-0.333
$4 = \mathcal{H}$	-1.280	-1.024	-0.832	-0.696	-0.596	-0.521	-0.462	-0.415	-0.376
$5 = \mathcal{H}$	-1.344	-1.102	-0.905	-0.762	-0.656	-0.574	-0.511	-0.459	-0.414

Tab.11.

a/ Conclusion :

Pour une installation de caractéristique donnée  $\mathcal{H} = \text{Cte}$ , au fur et à mesure que la durée d'ouverture  $T = m \cdot \theta$  augmente, la dépression diminue.

. De même, le gradient de dépression décroît lorsque la durée  $T = m \cdot \theta$  d'ouverture augmente.

. Sur les abaques (Fig.8,9,10,11), on constate que les courbes se rapprochent entre elles en descendant quand (m) augmente, ce qui montre que pour n'importe quelle installation de caractéristique donnée, la dépression diminue quand la durée d'ouverture augmente et ceci est d'autant plus important quand le coefficient  $R = K \varphi^2 N$  augmente ce qui est évident étant donné que les pertes de charges tendent à amortir le coup de bélier.

b) Remarque :

Le coefficient (R) est le produit résultant de trois paramètres à savoir :

- Le coefficient de perte de charge K. concernant la conduite elle même
- le coefficient de vitesse  $\varphi Q$ .

Influence du temps réduit d'ouverture sur la dépression  $\xi$  pour  
 une caractéristique  $\mathcal{R}$  d'installation imposée  
 Coefficient de perte de charge  $R = K\psi^2 N = 4$ .

$$\xi = \frac{h_a}{H_0}$$

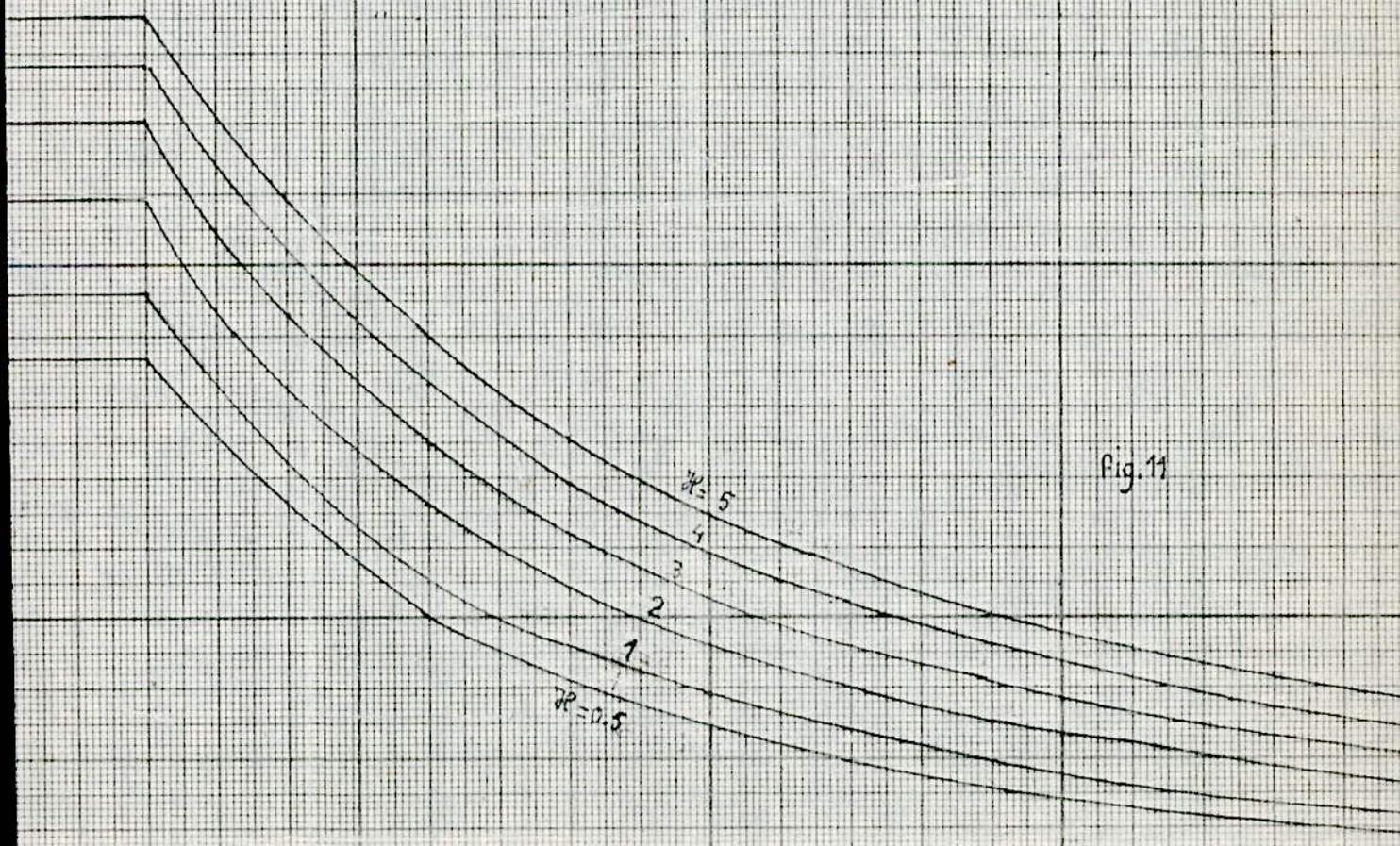


Fig. 11

$$m = \frac{T}{G}$$

- Le paramètre N qui est lui même fonction de  $\beta$  et qui est une fonction de la durée d'ouverture.

Il est également intéressant de connaître l'influence de la variation de R sur le paramètre  $\xi$  de la dépression pour une installation de caractéristique donnée et un nombre (m) d'étapes d'ouverture constant, pour cela traçons quelques courbes montrant cette influence.

II.2.2. Influence de paramètre  $R = Kv^2 N$  sur le paramètre  $\xi$  de la dépression pour  $\mathcal{H} = Cte$  et  $m = Cte$  :

m=2.

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{H} = 1$	-0.282	-0.500	-0.604	-0.667	-0.710	-0.742	-0.768	-0.788	-0.80
$\mathcal{H} = 2$	-0.481	-0.698	-0.773	-0.809	-0.831	-0.846	-0.857	-0.867	-0.87
$\mathcal{H} = 3$	-0.618	-0.853	-0.912	-0.929	-0.935	-0.936	-0.937	-0.937	-0.937

Tab. 12

m = 4 :

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{H} = 1$	-0.133	-0.250	-0.337	-0.404	-0.458	-0.502	-0.540	-0.571	-0.599
$\mathcal{H} = 2$	-0.248	-0.361	-0.439	-0.498	-0.544	-0.581	-0.612	-0.638	-0.660
$\mathcal{H} = 3$	-0.346	-0.459	-0.532	-0.584	-0.623	-0.654	-0.679	-0.700	-0.718
$\mathcal{H} = 4$	-0.431	-0.545	-0.615	-0.662	-0.696	-0.721	-0.741	-0.758	-0.771
$\mathcal{H} = 5$	-0.503	-0.621	-0.689	-0.732	-0.762	-0.783	-0.799	-0.811	-0.822
$\mathcal{H} = 6$	-0.565	-0.688	-0.755	-0.796	-0.822	-0.840	-0.852	-0.861	-0.868

TAB. 13.

Variation du paramètre  $\xi$  en fonction du paramètre  $R = K\varphi^2 N$   
pour  $\mathcal{H} = C_t$  et  $m = C_t$

$$m = 2$$

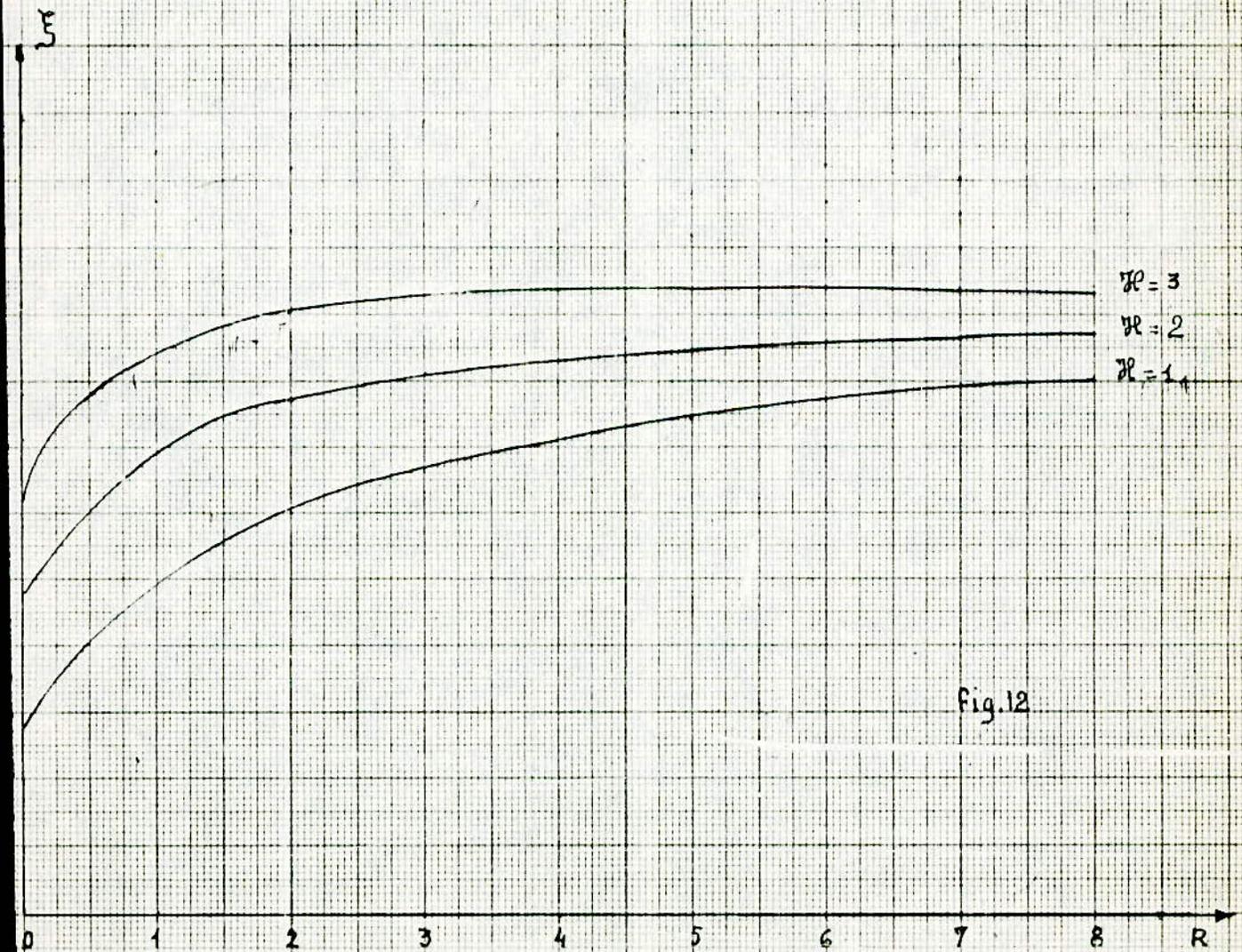


Fig.12

Variation du parametre  $\xi$  en fonction du parametre  $R = k\varphi^2 N$   
pour  $\mathcal{H} = Ct$  et  $m = Ct$

$$m = 4$$

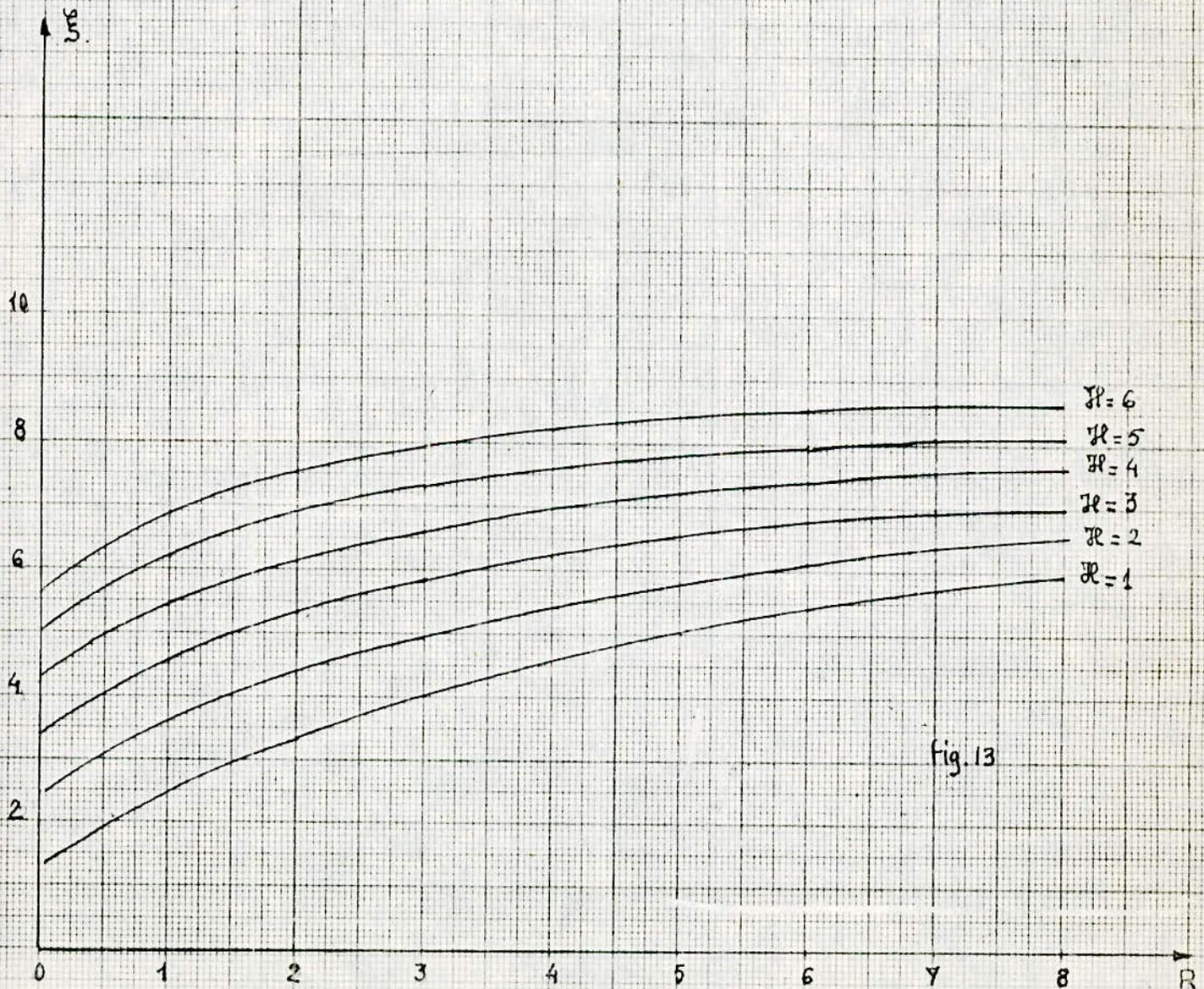


fig. 13

m=6:

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{H} = 1$	0.087	-0.167	-0.233	-0.288	-0.336	-0.378	-0.414	-0.446	-0.475
$\mathcal{H} = 2$	-0.166	-0.243	-0.306	-0.358	-0.402	-0.439	-0.472	-0.501	-0.527
$\mathcal{H} = 3$	-0.238	-0.314	-0.374	-0.423	-0.463	-0.497	-0.527	-0.553	-0.575
$\mathcal{H} = 4$	-0.303	-0.379	-0.437	-0.483	-0.521	-0.552	-0.579	-0.602	-0.622
$\mathcal{H} = 5$	-0.363	-0.439	-0.495	-0.539	-0.574	-0.603	-0.627		-0.666
$\mathcal{H} = 6$	-0.417	-0.494	-0.549	-0.592	-0.625	-0.652	-0.673	-0.692	-0.708

Tableau N°14

a/ Conclusion :

1/ Pour un nombre ( $m$ ) d'étapes d'ouverture faible, on constate que pour chaque cas de caractéristiques d'installation donnée  $\mathcal{H}$ , le paramètre  $\xi$  de la dépression augmente quand le paramètre R est faible.

Au fur et à mesure que ce dernier devient important, on constate que la dépression commence à diminuer; et ceci est d'autant plus remarquable lorsque le paramètre  $\mathcal{H}$  augmente.

2/ Lorsque le nombre ( $m$ ) augmente, on constate que pour chaque cas de caractéristique d'installation donnée  $\mathcal{H}$ , le paramètre  $\xi$  augmente avec une certaine pente faible par rapport au 1er cas dans le cas où le coefficient R est faible au début.

Cependant lorsque R commence à augmenter, la dépression augmente encore mais avec une pente très faible qui se fait sentir lorsque la caractéristique de l'installation augmente.

b/ Remarque :

Dans le cas où  $m=2$ , on constate que lorsque la caractéristique de l'installation dépasse la valeur 3, le paramètre de la dépression  $\xi = \frac{h}{H_0}$  dépasse la valeur négative (-1), qui sera en contradiction avec nos calculs.

Variation du paramètre  $\xi$  en fonction du paramètre  $R = K\varphi^2 N$ .  
pour  $\mathcal{K} = cte$  et  $m = cte$ .

$m = 6$

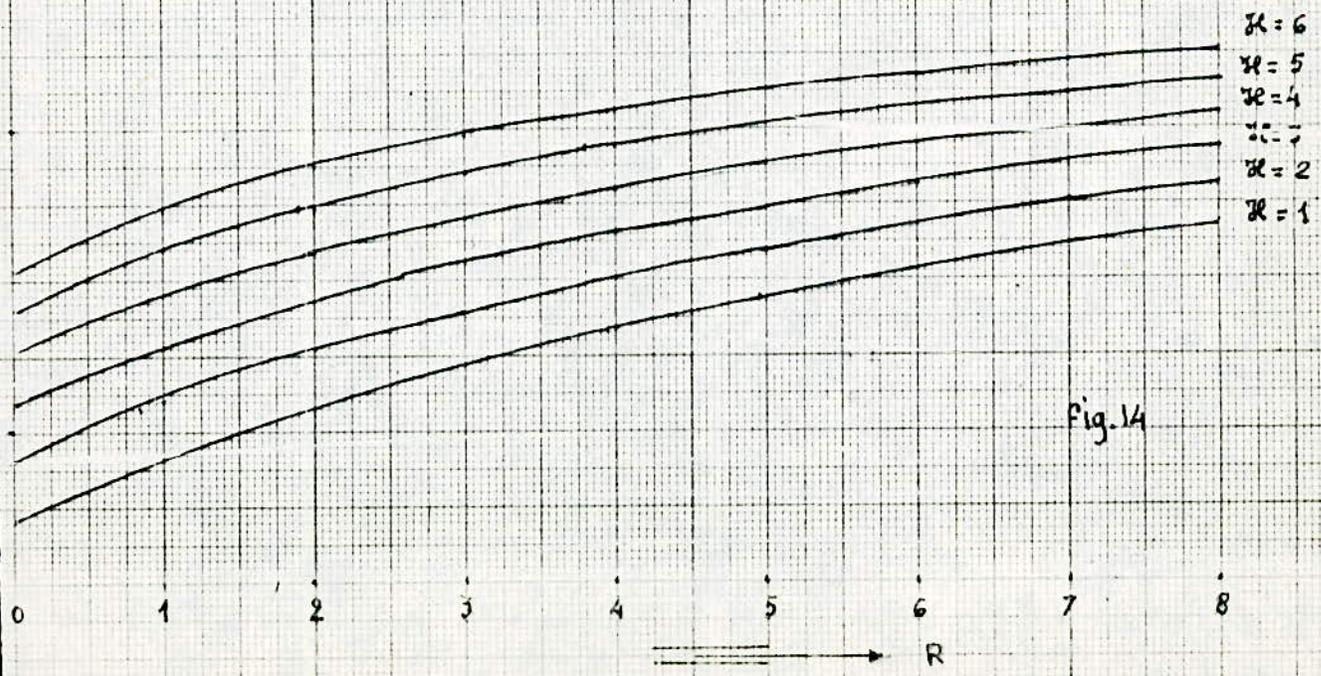


Fig. 14

b/ Maintenant nous allons voir l'influence de la caractéristique de la conduite ( $\mathcal{H}$ ), caractérisée par un coefficient de perte de charge  $R = K_V^2 N$  sur le nombre d'étapes ( $m$ ) réduit d'ouverture pour une dépression imposée  $\xi$ . Pour cela, déterminons ( $m$ ) à partir de l'équation suivante :

$$\mathcal{H} \sqrt{1 + \xi} = - 2(m - 1/2)\xi - R(1 + \xi)$$

Ce qui donne :

$$m = f(\mathcal{H}) = 1/2 - R(1 + 1/\xi) - \mathcal{H} \cdot \frac{\sqrt{1 + \xi}}{\xi} \quad (E.5)$$

Pour  $R = K_V^2 N = 1,5$ .

$\xi; \mathcal{H} \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-0.2	10.972	15.444	19.916	24.389	28.861	33.333	37.805	42.277	46.749	51.22
-0.4	4.686	6.623	8.559	10.496	12.432	14.369	16.305	18.242	20.178	22.115
-0.6	2.554	3.608	4.662	5.716	6.770	7.825	8.879	9.933	10.987	12.041
0.8	1.434	1.993	2.552	3.111	3.670	4.229	4.788	5.347	5.906	6.465
1.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

Tab.15

Pour  $R = K_V^2 N = 2.0$

$\xi; \mathcal{H} \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.2	12.972	17.444	21.916	26.389	30.861	35.333	39.805	44.277	48.749	53.22
0.4	5.436	7.373	9.309	11.246	13.182	15.119	17.055	18.992	20.928	22.86
0.6	2.886	3.942	4.996	6.050	7.104	8.158	9.212	10.266	11.320	12.376
0.8	1.559	2.118	2.677	3.236	3.795	4.354	4.913	5.472	6.031	6.590
1.0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

Tab.16.

Influence de la caractéristique  $\mathcal{R}$  de la conduite sur le  
temps réduit (m) d'ouverture pour :

$$R = K\varphi^3 N = 1.5$$

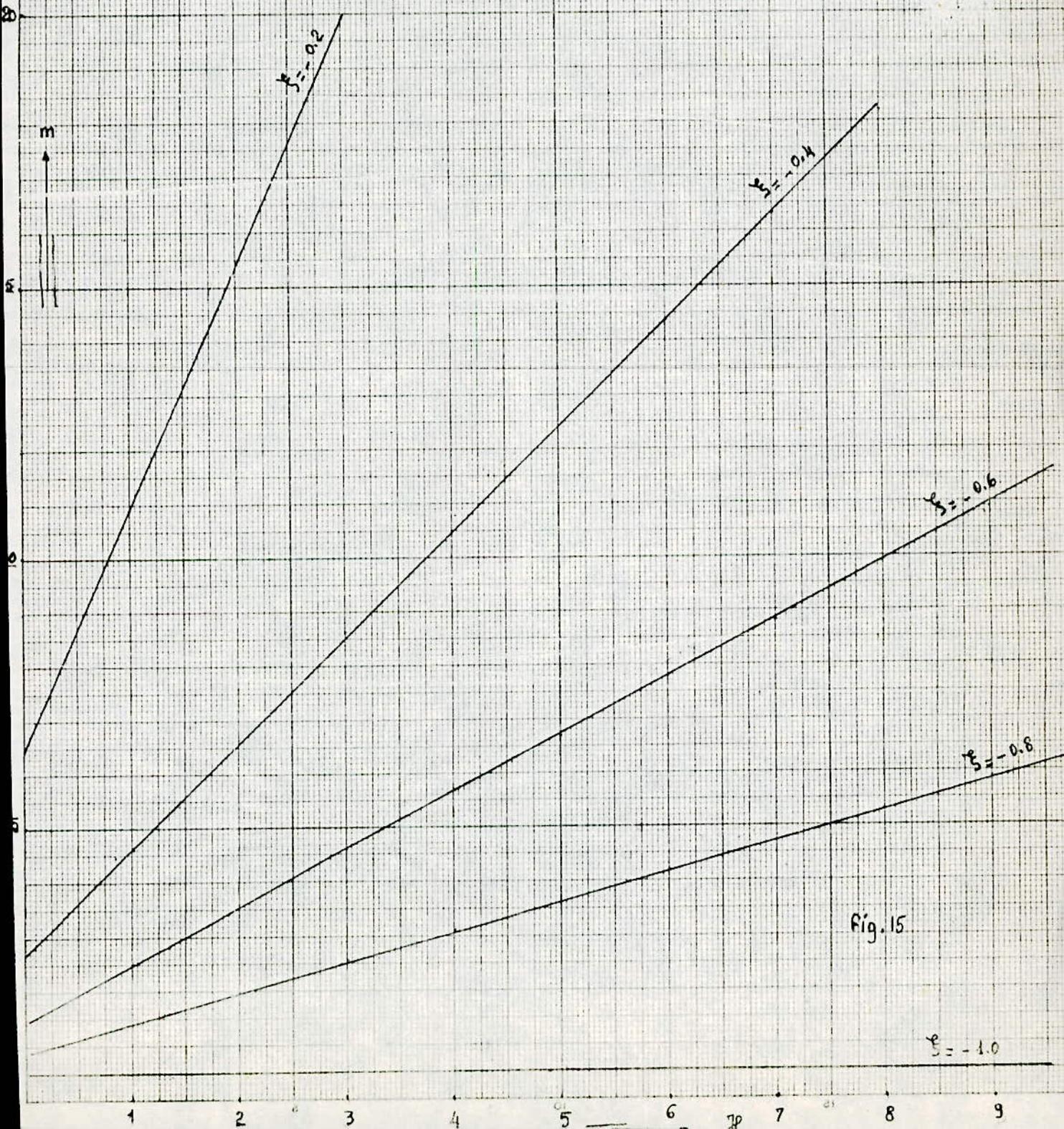


Fig. 15

Influence de la caractéristique  $\mathcal{R}$  de la conduite sur  
le nombre cm d'étapes d'ouverture pour :

$$R = K\varphi^2 N = 2.$$

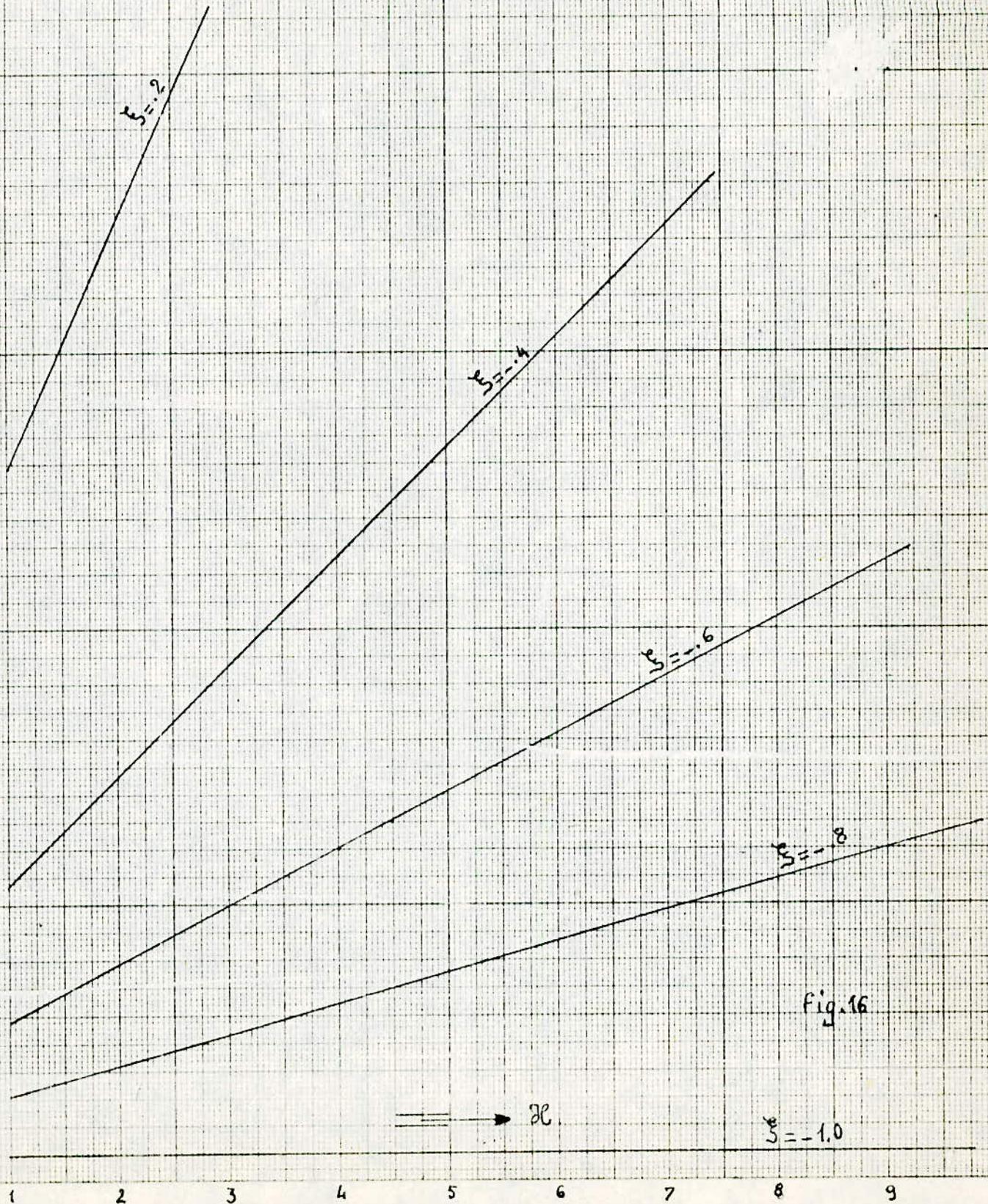


fig. 16

Pour  $R = \frac{K}{N^2} = 3$ .

$H$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S = -.2$	20.972	25.444	29.907	34.389	38.861	43.333	47.805	42.277	56.749
$S = -.4$	8.436	10.373	12.309	14.246	16.182	18.119	20.055	21.992	23.928
$S = -.6$	4.221	5.275	6.329	7.383	8.437	9.491	10.545	11.599	12.653
$S = -.8$	2.059	2.618	3.177	3.736	4.295	4.854	5.413	5.972	6.531
$S = -1.0$	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

TAB. 17

Pour  $R = \frac{K}{N^2} = 4$

$H$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$S = -.2$	16.972	21.444	25.916	30.389	34.861	39.333	43.805	48.277	52.749
$S = -.4$	6.936	8.873	10.809	12.746	14.682	16.619	18.555	20.492	22.428
$S = -.6$	3.554	4.608	5.662	6.716	7.770	8.825	9.879	10.933	11.987
$S = -.8$	1.809	2.368	2.927	3.486	4.045	4.604	5.163	5.722	6.281
$S = -1.0$	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500

TAB. : 18

CONCLUSION :

Pour une caractéristique d'installation donnée et une dépression <sup>de</sup> coup de bélier parfait imposée, on peut trouver le temps d'ouverture de l'organe de régulation

.De même pour un temps d'ouverture (m) demandé et une dépression exigée, on peut avoir une caractéristique d'installation de conduite qui leurs correspond.

Influence de la caractéristique  $\kappa$  de la conduite  
 sur le nombre (m) d'étapes d'ouverture pour :

$$R = K\varphi^2 N = 3.$$

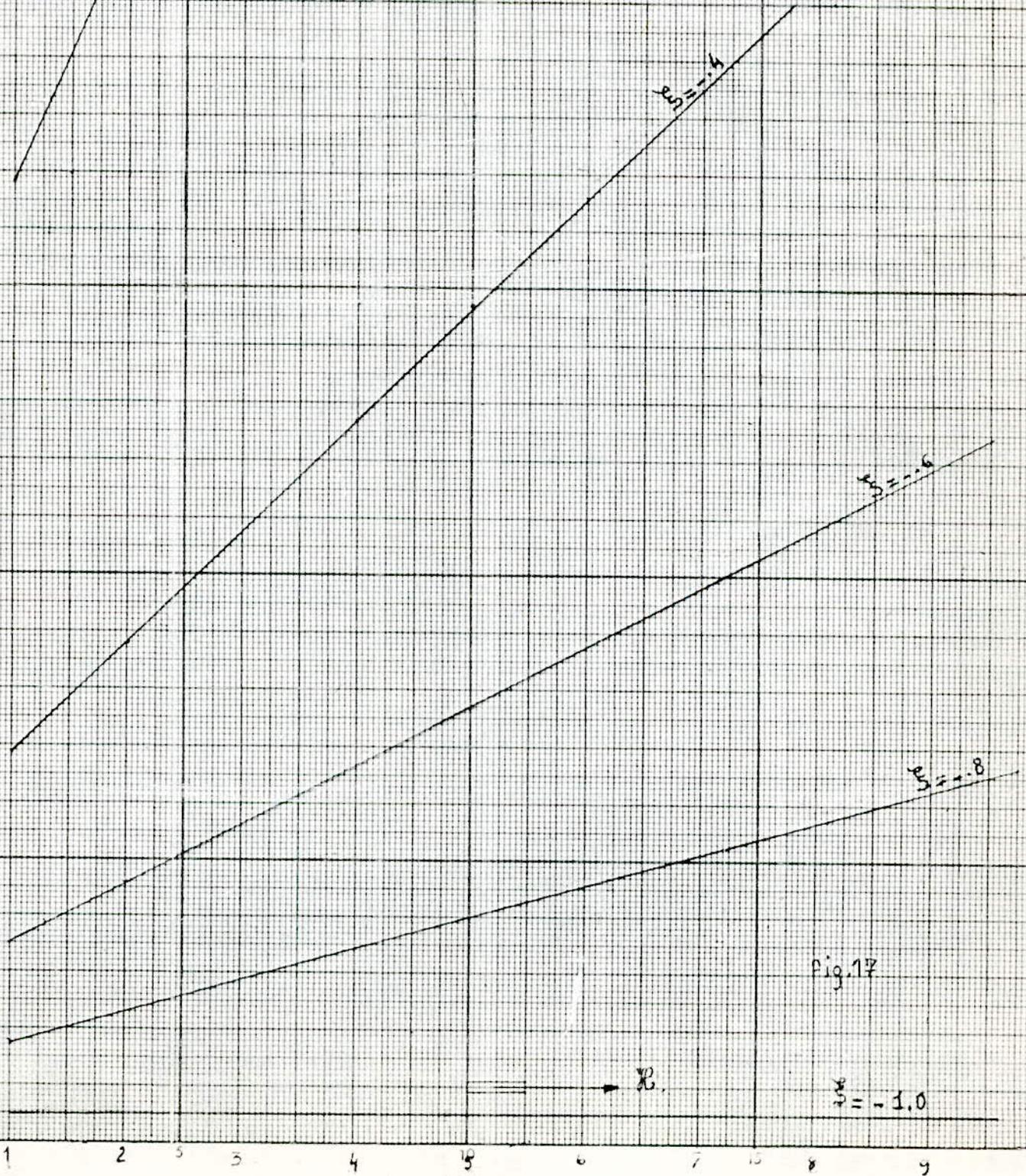


Fig. 17

Influence de la caractéristique  $\mathcal{R}$  de la conduite  
sur le nombre ( $m$ ) d'étapes d'ouverture.

$$R = K\varphi^2 N = 4$$

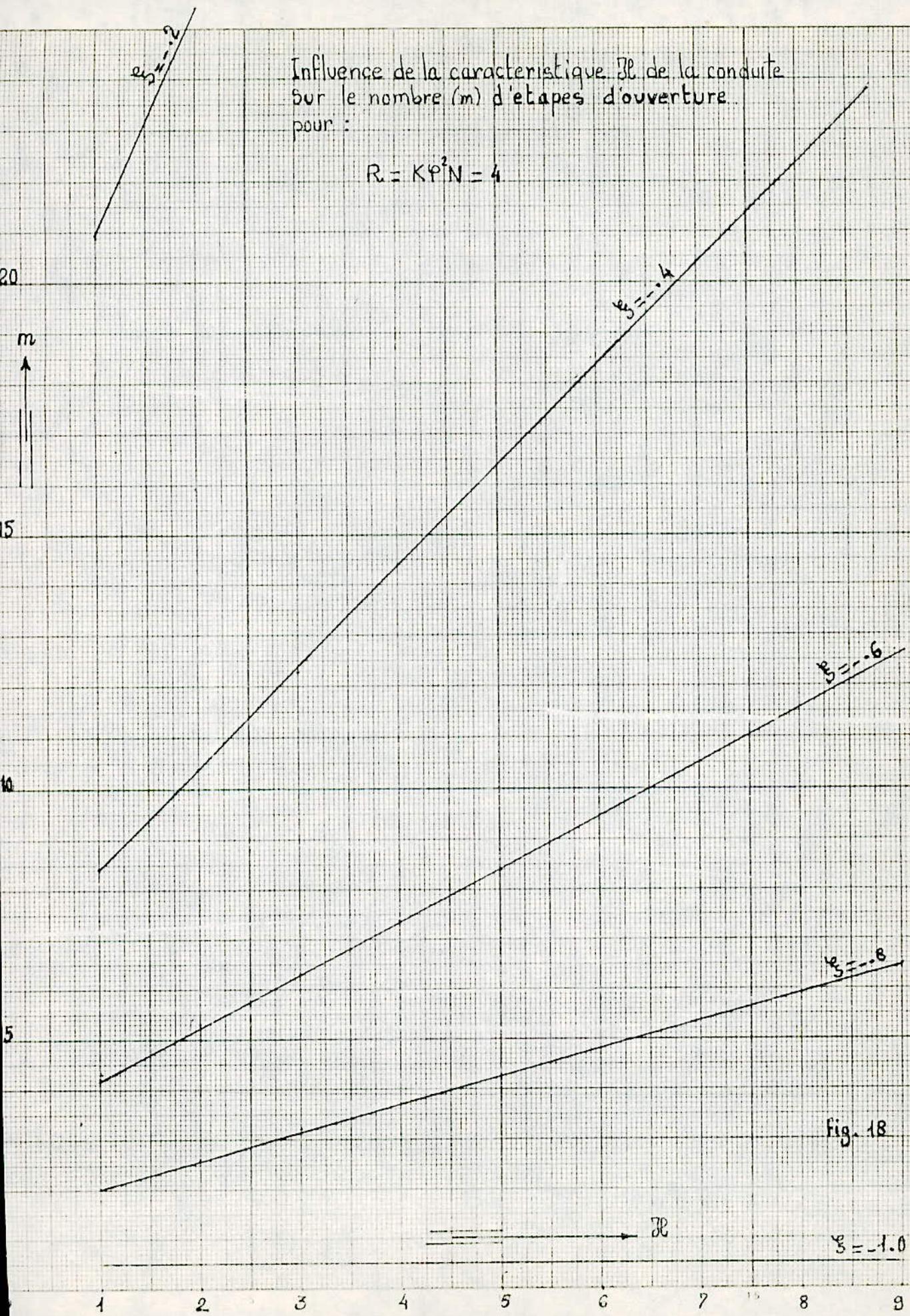


Fig. 18

$$\varphi_s = 1.0$$

. Pour une installation donnée, à n'importe quelle dépression exigée, on peut trouver facilement son temps d'ouverture. Celui-ci est d'autant plus faible lorsque la dépression du coup de bélier parfait exigée augmente. Et il augmente au fur et à mesure que le coefficient  $R=K_0^2 N$  caractérisant la perte de charge, augmente.

c/ En analysant la formule (E.5), quelle serait l'influence du paramètre  $R=K_0^2 N$  sur le nombre (m) d'étapes d'ouverture de l'organe pour une dépression  $\xi$  imposée au niveau d'une installation de caractéristique donnée ;

Pour illustrer cette influence, traçons quelques courbes pour différentes valeurs de  $\xi$ , et pour chaque caractéristique d'installation.

II.2.3. Influence du paramètre  $R=K_0^2 N$  sur le nombre (m).

pour  $\xi = Cte$  :

Pour  $\xi = -0.2$  :

R	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
=1.0	8.972	12.972	16.972	20.972	24.972	28.972	32.972	36.972
=2.0	13.444	17.444	21.444	25.444	29.444	33.444	37.444	41.444
=3.0	17.916	21.916	25.916	29.916	33.916	37.916	41.916	45.916
=4.0	22.389	26.389	30.389	34.389	37.389	41.389	45.389	49.389
=5.0	26.861	30.861	34.861	38.861	42.861	46.861	50.861	54.861
=6.0	31.333	35.333	39.333	43.333	47.333	51.333	55.333	59.333

TAB.19.

Influence du paramètre  $R = KP^2N$  sur le nombre ( $m$ ) d'étapes d'ouverture:  
 pour  $\xi = 0.6$

$$m = f(R) = 0.5 \cdot R \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) - \frac{R \sqrt{1 + \frac{1}{\xi}}}{\xi}$$

$$\xi = 0.6$$

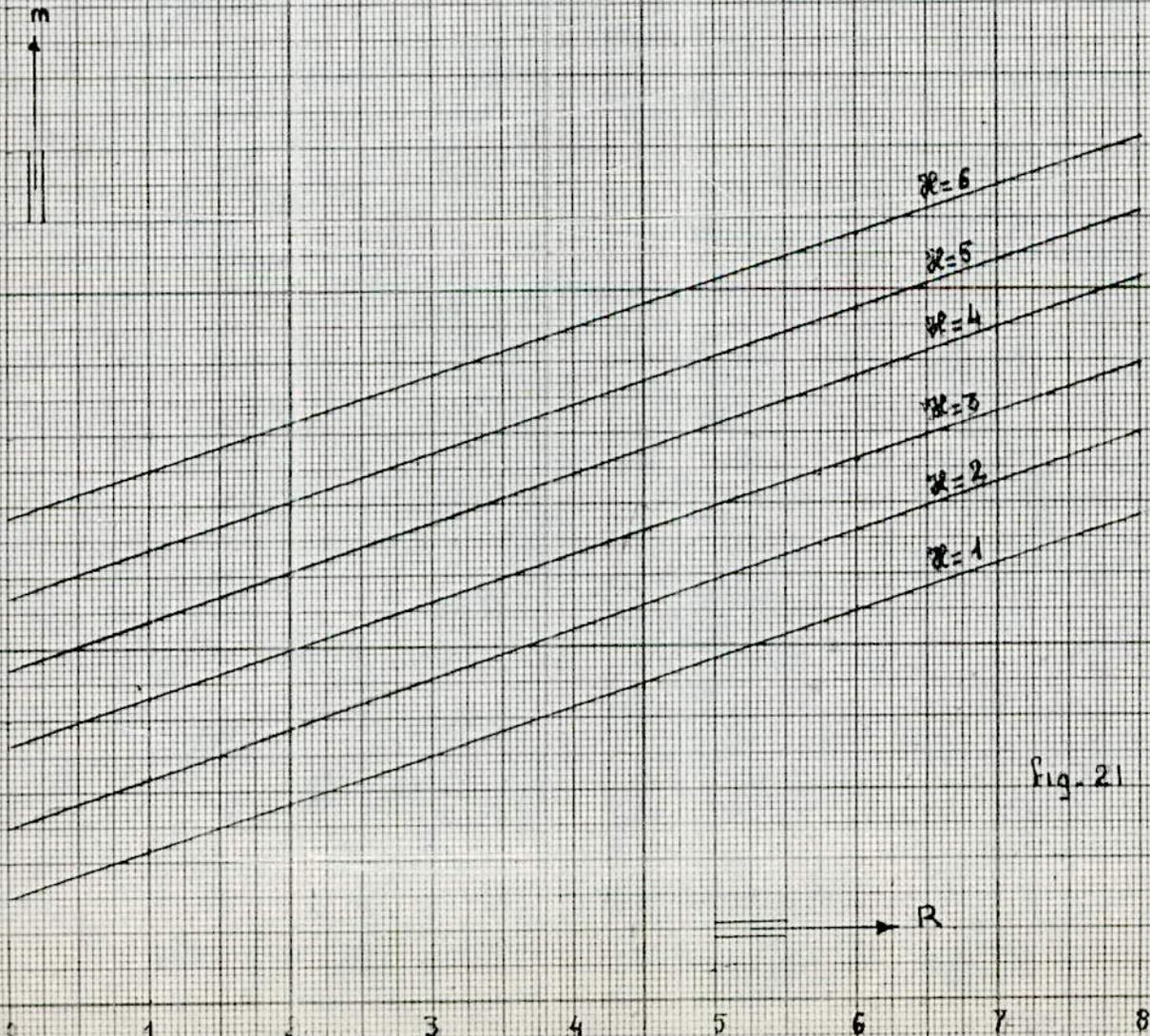


Fig. 21

Pour  $\xi = -0.4$ :

R	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
$\mathcal{H}=1.00$	3.936	5.436	6.936	8.436	9.936	11.436	12.936	14.436
$\mathcal{H}=2.00$	5.879	7.373	8.873	10.373	11.873	13.737	14.873	16.373
$\mathcal{H}=3.00$	7.809	9.309	10.809	12.309	13.809	15.809	16.809	18.309
$\mathcal{H}=4.00$	9.746	11.246	12.746	14.682	15.746	<del>17.246</del> 18.746	18.746	20.246
$\mathcal{H}=5.00$	11.682	13.182	14.682	16.182	17.682	19.182	20.682	22.182
$\mathcal{H}=6.00$	<del>13.619</del> 15.119	15.119	16.619	18.119	19.619	21.119	22.619	22.619

TAB.20

Pour  $\xi = -0.6$ 

R	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
$\mathcal{H}=1.0$	2.221	2.887	3.554	4.221	4.887	5.554	6.221	6.887
$\mathcal{H}=2.0$	3.275	3.942	4.608	5.275	5.942	6.608	7.275	7.942
$\mathcal{H}=3.0$	4.329	4.996	5.662	6.329	6.996	7.662	8.329	8.996
$\mathcal{H}=4.0$	5.383	6.050	6.716	7.383	8.050	8.716	9.383	10.050
$\mathcal{H}=5.0$	7.491	8.158	8.825	9.491	10.158	11.491	12.158	11.104
$\mathcal{H}=6.0$	7.491	8.158	8.825	9.491	10.158	11.491	12.158	

TAB.21.

CONCLUSION :

On constate que pour une dépression  $\xi$  faible composée pour une installation de caractéristique  $\mathcal{H}$  donnée, le nombre (m) d'étapes d'ouverture augmente linéairement à mesure que le paramètre R, caractérisant la perte de charge, augmente. De même le nombre (m) d'étapes augmente avec la caractéristique de l'installation ceci pour éviter à ce que la dépression résultant de la manoeuvre de l'organe ne dépasse pas la dépression imposée.

Influence du parametre  $R = K \varphi^2 N$  sur le nombre (m) d'etapes  
 d'ouverture pour  $\xi = 0.4$

$$m = f(R) = 0.5 - R \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{R}{\xi}}}{\xi} \quad \xi = 0.4$$

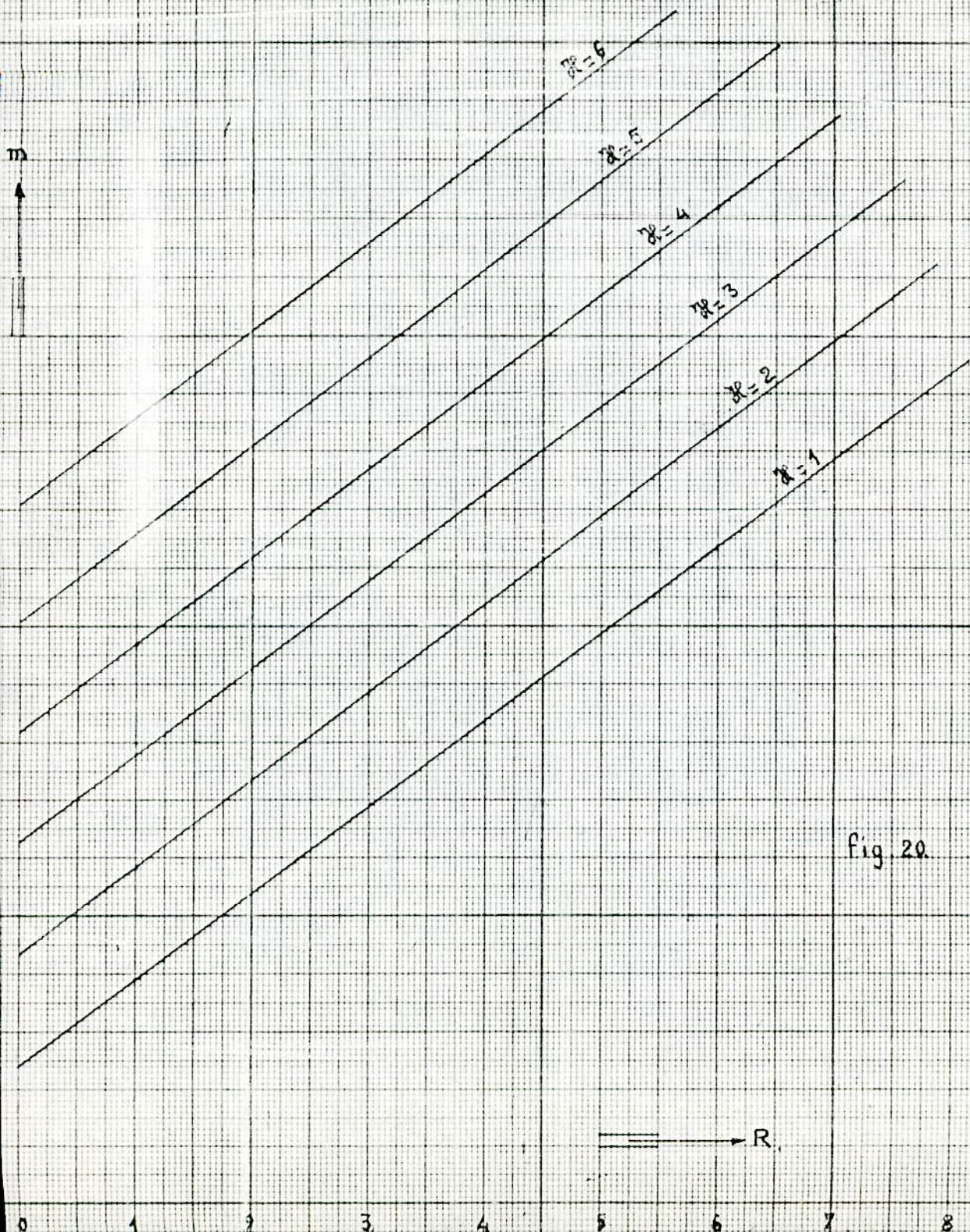


fig. 20

Influence du parametre  $R = K\varphi^2 N$  sur le nombre  $(m)$  pour  $\xi = C \frac{t}{l}$

$$m = f(R) = \frac{1}{2} - R \left( 1 + \frac{1}{\xi} \right) - \mathcal{R} \frac{\sqrt{1+\xi}}{\xi}$$

$\xi = -.2$

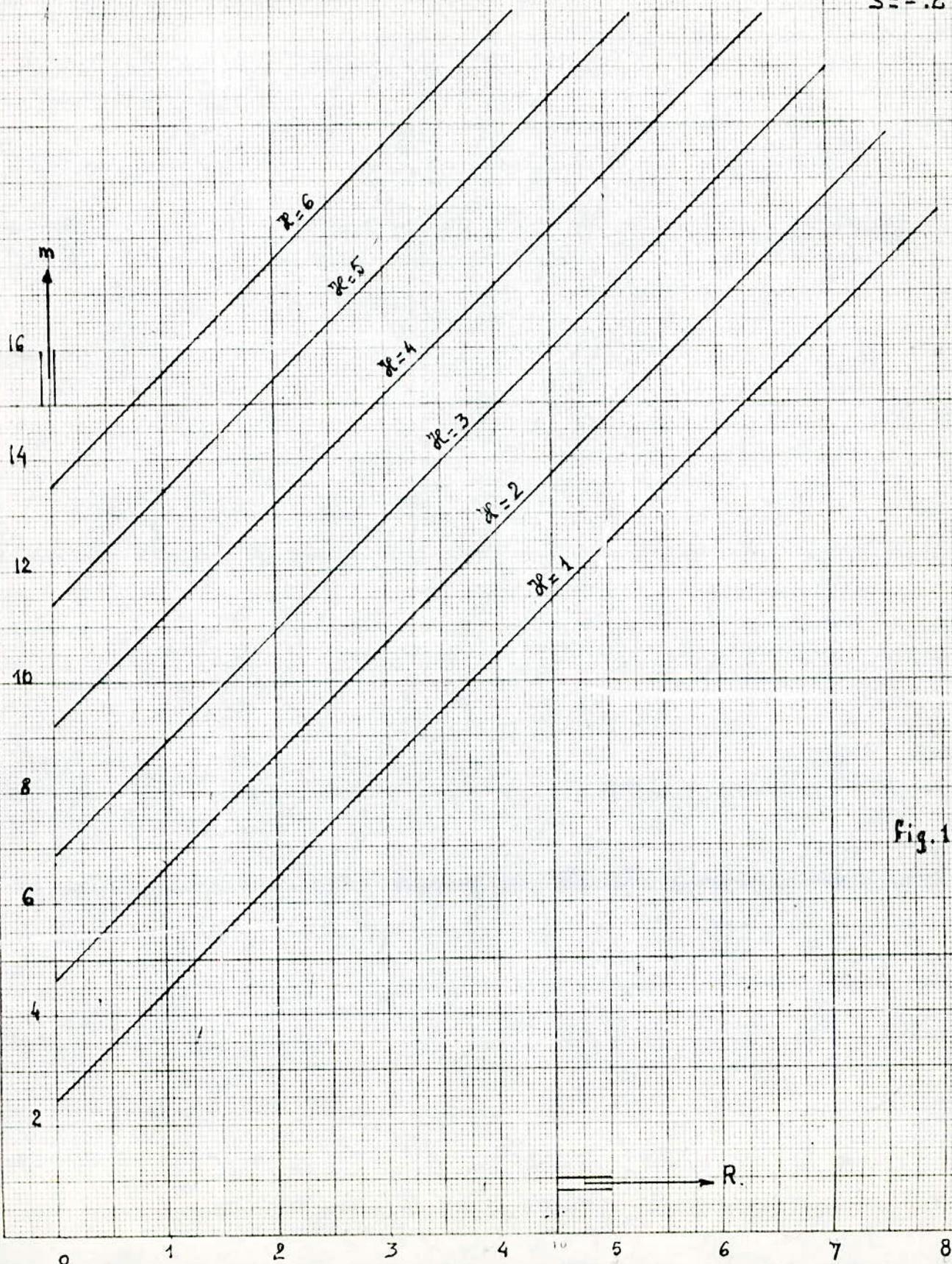


Fig. 19

Au fur à mesure que la dépression imposée augmente pour une installation donnée, ce qui augmente le champ d'adaptation aux dépressions pour cette installation, dans ce cas le nombre (m) d'étapes d'ouvertures diminue.

II.2.4. Analyse physique du coefficient  $\mu$ :

Le coefficient  $\mu$  désigne le rapport entre la vitesse à l'entrée de la conduite  $V_{oi}$  et celle  $V_{Li}$  au niveau de l'organe de régulation à l'extrémité aval de la conduite.

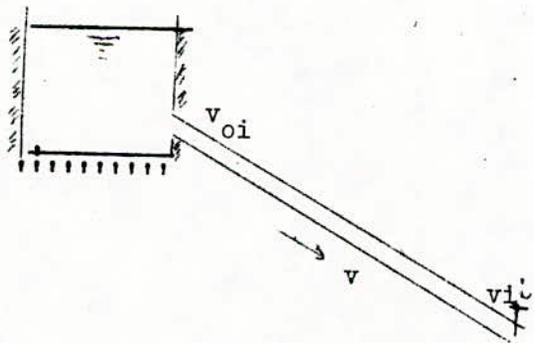
$$\mu = \frac{V_{oi}}{V_{Li}} = f(m)$$

Dans ce cas, toute variation de vitesse au niveau de l'organe entraîne une variation de vitesse à l'entrée de la conduite.

Pour simplifier le problème, nous pouvons faire cette analyse du coefficient  $\mu$  en négligeant la perte de charge, moyennant la formule de l'écoulement transitoire dans une conduite de diamètre constant :

$$dh \pm \frac{c}{g} dV + \Delta S = 0, \text{ c'est à dire } dh \pm \frac{c}{g} dV = 0$$

Nous avons droit, sans commettre une grande erreur, de supposer une répartition linéaire des vitesses dans la conduite, au cours de la manoeuvre de l'organe de régulation du débit.



- 011

Cette formule a été déjà manipulée <sup>lors</sup> de la détermination des vitesses aux deux extrémités de la conduite à diamètre constant en prenant comme hypothèse à ce que les valeurs du coup de bélier ( $h_{oi}$ ) au niveau du réservoir sont nulles. En se référant au diagramme (appendice), nous pouvons déterminer les vitesses  $V_{oi}$  : ainsi on a :

0.0 - L.1.

$$V_{L1} = V_0 - \frac{g}{c} h_{L1}$$

L.1 - 0.1

$$V_{oi} = V_0 - 2 \frac{g}{c} h_{L1}$$

0.1 - L.2

$$V_{L2} = V_0 - \frac{g}{c} h_{L.2}$$

L.2 - 0.2

$$V_{02} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2})$$

0.2-L.3

$$V_{L3} = V_0 - \frac{g}{c} h_{L3} - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2})$$

L.3 - 0.3

$$V_{03} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2} + h_{L3})$$

0.3 - L.4

$$V_{L4} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2} + h_{L3}) - \frac{g}{c} h_{L4}$$

L.4. - 0.4.

$$V_{04} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2} + h_{L3} + h_{L4}) - \frac{g}{c} h_{L5}$$

$$V_{oi} = V_0 - \frac{2g}{c} \sum_{i=0}^i h_{Li}$$

Supposons un coup de bélier parfait  $h_L$ , on peut donc écrire :

$$V_{oi} = V_0 - \frac{2g}{c} \cdot i \cdot h_{Li}$$

On peut écrire également :

$$V_{oi} = V_0 - \frac{2g}{c} \cdot i \cdot \frac{H_0}{H_0} \cdot \frac{V^0}{V^0} h_{Li}$$

où  $V^0$  - représente la vitesse pour une certaine ouverture "à" de l'organe de régulation, lorsque le régime permanent s'établit.

Sachant que  $\mathcal{H} = \frac{cV^0}{gH_0}$ ,  $\xi = \frac{h_{Li}}{H_0}$  d'après le chapitre précédent.

La formule devient :

$$V_{oi} = V_0 - 2iV^0 \frac{\xi}{\mathcal{H}}$$

Au début de l'ouverture, nous avons la vitesse  $V_0$  qui est nulle :

$$\text{donc } V_{01} = -2i \cdot V^0 \frac{\xi}{\mathcal{H}}$$

à l'étape  $i=m$ , nous pouvons écrire :

$$V_{om} = -2m V^0 \frac{\xi}{\mathcal{H}}$$

Calcul de la vitesse  $V_{Lm}$  :

Pour simplifier son calcul, on peut négliger la perte de charge dans la formule suivante :

$$V_{Lm} = V_0 - \frac{2g}{c} \left[ (m-1) h_1 + \frac{h_1}{2} \right] - \frac{k}{2c} \left[ \sum_{i=0}^{m-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Lm}^2}{2} + \sum_{i=0}^{m-1} V_{oi}^2 \right]$$

tenant compte également que  $V_0 = 0$ , on peut écrire pour  $i=m$

$$V_{Lm} = - \frac{2g}{c} \left[ (m-1) h_1 + \frac{h_1}{2} \right] = - \frac{2g}{c} \left( m - \frac{1}{2} \right) h_L$$

De même, la formule peut se mettre sous la forme suivante :

$$V_{Lm} = - \frac{2g}{c} \cdot \frac{V^0}{V^0} \cdot \frac{H_0}{H_0} \left( m - \frac{1}{2} \right) h_L$$

$$\text{avec } \mathcal{H} = \frac{cV^0}{gH_0} ; \quad \xi = \frac{h_L}{H_0}$$

$$\text{d'où } V_{Lm} = - \frac{2\xi}{\mathcal{H}} V^0 \left( m - \frac{1}{2} \right)$$

Pour  $i = 1$ ,

$$V_{Li} = -2 \frac{\xi}{H} \cdot V^0 (i - 0.5)$$

d'après l'hypothèse qui a été imposée, au début, en ce qui concerne le coefficient nous écrivons :

$$V_{oi} = \mu \cdot V_{Li} = \mu(m) \cdot V_{Li}$$

Le coefficient  $\mu$  est donné par le rapport :

$$\mu = \frac{V_{oi}}{V_{Li}}$$

tenant compte des formules trouvées, on a :

$$\mu = \frac{V_{oi}}{V_{Li}} = \frac{-2i V^0 \cdot \frac{\xi}{H}}{-2 \frac{\xi}{H} V^0 (i - 0.5)} = \frac{i}{i - 0.5}$$

pour  $i = m$ , nous avons :

$$\mu(m) = \frac{m}{m - 0.5} \quad (V.6)$$

montrons l'influence du nombre (m) d'étapes d'ouverture sur le coefficient  $\mu$ .

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(m)$	2	1.33	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.05

TAB. 22.

Remarque :

On constate que lorsque le nombre d'étapes d'ouverture (m) est égal à 1 (ouverture brusque), la vitesse à l'entrée de la conduite sera deux fois la vitesse au niveau de l'organe de régulation au fur et à mesure que le nombre m augmente pour donner suite à une ouverture lente, le rapport des deux vitesses tend vers l'unité. c'est-à-dire que les vitesses aux deux extrémités tendent à s'égaliser.

Variation du coefficient ( $\mu$ ) en fonction du nombre  
( $m$ ) d'étapes d'ouverture.

$$\mu = f(m)$$

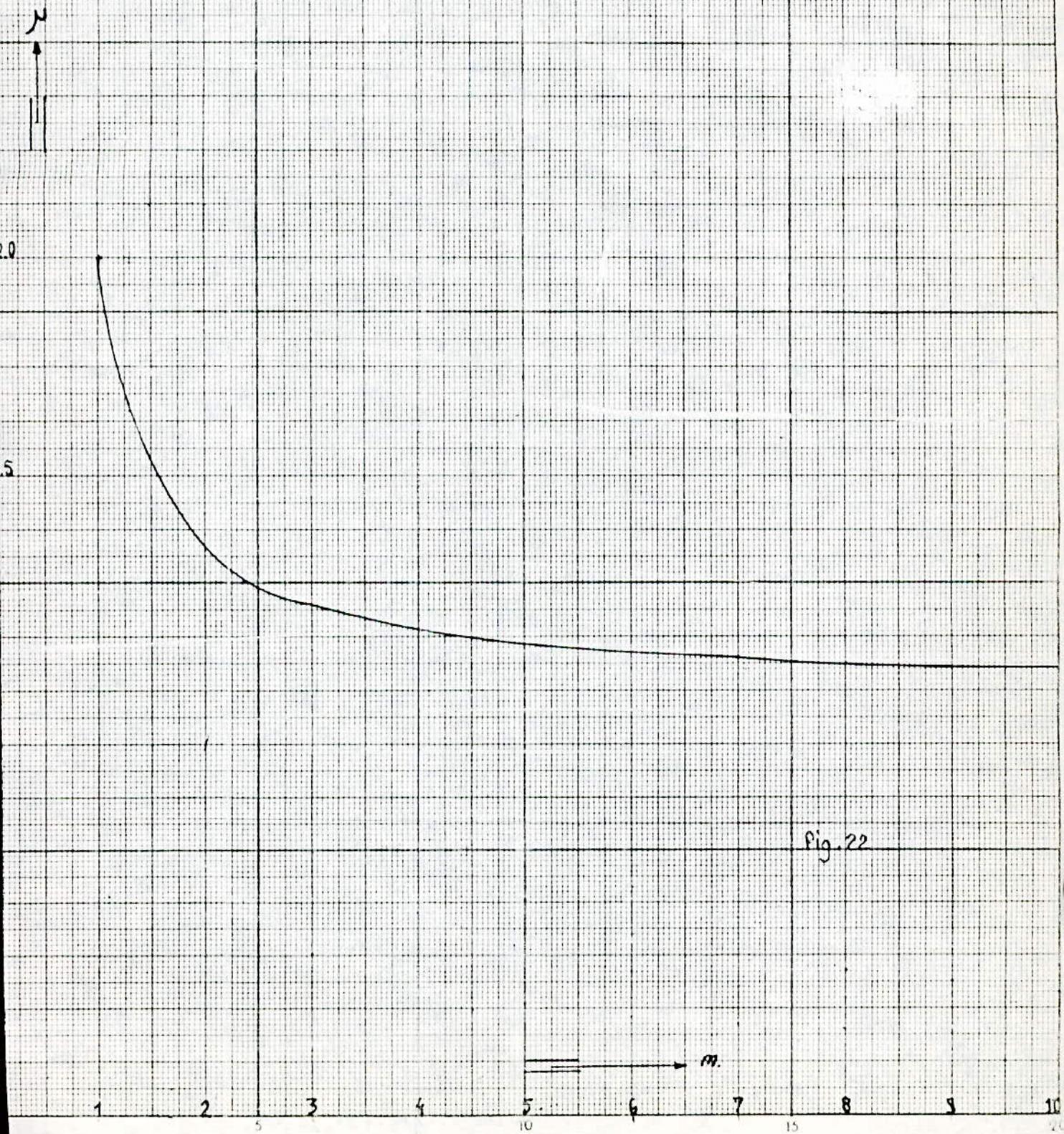


Fig. 22

C H A P I T R E - F -

PROCEDE GENERAL DE DETRMINATION D'UNE LOI DE MANEOUVRE PARFAITE.

I. DESCRIPTION GENERALE :

Une loi de manoeuvre parfaite est définie comme étant, pour une installation donnée et pour un temps de manoeuvre donné, une loi qui permet de nous assurer un coup de bélier parfait. La loi de manoeuvre trouvée doit être imposée au dispositif faisant cette manoeuvre pour assurer la répartition du coup de bélier parfait demandé. Nous donnons une telle loi sous forme de courbe  $\frac{a}{a_0} = f(t)$ , où le rapport  $\frac{a}{a_0}$  représente la position de l'organe de régulation du débit. La détermination d'une telle caractéristique englobe :

- a/ Le calcul d'un coup de bélier parfait pour la conduite donnée,
- b/ Le calcul du débit en fonction de la position de l'organe de régulation en tenant compte des propriétés hydrauliques.

Nous pouvons faire les calculs ci-dessus, soit :

- . en négligeant la perte de charge,
- . en tenant compte de la perte de charge, qui s'occasionne dans la conduite.

Une conduite qui est munie d'un réservoir à l'amont et d'un organe de régulation de débit placé à l'extrémité aval, se caractérise par les paramètres suivants :

- La charge statique  $H_0$ ,
- le coefficient de perte de charge  $K = \frac{\lambda l}{D}$
- le coefficient hydrodynamique  $\gamma C = \frac{cV^0}{gH_0}$

Pour une telle installation, nous pouvons déterminer (voir chap. G) un coup de bélier parfait (hm), et le temps réduit de variation total du débit ( $m = \frac{T}{\theta}$ ), en tenant compte de la résistance de la conduite et toutes les conditions d'exploitation de l'installation.

En appliquant les formules (voir chap. E) du régime transitoire, nous trouvons facilement la répartition de la vitesse au niveau de la section de vannage (à l'extrémité d'aval) de la conduite au fur et à mesure de la manoeuvre de l'organe de régulation et ensuite la répartition analogue du débit passant par cet organe.

$$Q_{Li} = V_{Li} \cdot A = f(i). \quad (F.1)$$

où  $i$  représente le nombre d'étapes de 0 à  $m$ .

La fonction de débit trouvée pourrait être facilement présentée sous forme d'une courbe facilitant le procédé de calcul. Cette courbe doit engendrer une autre courbe de débit  $Q_k$  fonction du degré d'ouverture, autrement dit de la section de passage  $A_k$ . Pour trouver la variation de débit en fonction du degré d'ouverture de l'organe de régulation, nous devons tenir compte des propriétés hydrauliques, qui sont :

. Le coefficient de résistance  $\zeta$  dû à l'organe, variable en fonction du degré d'ouverture.

. Le coefficient de vitesse  $\psi$  déduit à partir de la formule (C.7 a)'

. le coefficient de contraction " $\epsilon$ ".

. L'ouverture de la section de vannage imposée.

Le débit qui passe par l'organe de régulation pour une charge donnée  $H = H_0 + h_m$  se calcule d'après la formule suivante :

$$Q_k = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \zeta}} \cdot A_k \cdot \sqrt{2g(H_0 + h_m)} \quad (F.2)$$

$$Q_k = c_k \cdot A_k \cdot \sqrt{2g(H_0 + h_m)}$$

$$c_k = \frac{\epsilon}{\sqrt{1 + \zeta_k}}$$

La valeur  $h_m$  évoquant un coup de bélier parfait pendant un nombre réduit ( $m$ ) d'étapes de manoeuvre est déterminée :

- dans le cas sans pertes de charge par la formule C.7 Chap.C

$$\xi = \frac{h_m}{H_0} = \frac{\mathcal{H}}{2m - 1} \quad \text{avec } \mathcal{H} = \frac{cV_0}{gH_0}$$

- dans le cas avec perte de charge, moyennant la formule (E.3) chapitre E.

Dans le cas général, les coefficients  $\epsilon$  et  $\zeta$  pouvant être variables en fonction de la position de l'organe de manoeuvre, cette variation doit être bien connue pour faire les calculs.

En tenant compte de ces formules, nous arriverons à trouver la relation entre le débit  $Q$  et la position d'organe de régulation  $\left(\frac{k}{a_0}\right)$  qui est donnée sous forme d'une courbe.

A partir des courbes données par les équation (F.1) et (F.2), nous déduisons une troisième courbe en valeurs réduites  $\frac{a_k}{a_0} = f(t)$ , représentant la fonction cherchée d'ouverture  $\frac{a_k}{a_0}$  par rapport au temps (t) qui nous donne la caractéristique du dispositif à chercher ou à fabriquer pour répondre à la question du coup de bélier parfait ffg.24,25.

Nous donnons d'abord une illustration de ces courbes à travers des tableaux de calcul numérique, par la suite une représentation graphique. En conséquence, nous pouvons déterminer pour cette installation la caractéristique de son organe de régulation qui est appelé à nous donner un coup de bélier parfait pour un temps réel réduit de fermeture (m) pour certains paramètres au dispositif et qui sont donnés d'après le tableau suivant en <sup>imposés.</sup> ~~en~~ <sup>exemple</sup> ~~un~~ <sup>exemple</sup>.

II. EXEMPLE DE CALCUL :

Nous illustrerons le procédé présenté ci-dessus par un exemple simple numérique. De ce fait, nous prenons une installation qui porte les caractéristiques suivantes :

a/ Conduite :

$$H_0 = 50 \text{ m}, \quad \kappa = \frac{\lambda L}{D} = 200, \quad c = 1000 \text{ m/s}; \quad D = 100 \text{ mm}; \quad V_0 = 2,2 \text{ m/s}.$$

b/ Vanne de régulation.

Pour chaque type de vanne, les paramètres  $\xi$ ,  $\psi$  sont dépendants l'un de l'autre (sch.s).

Pour notre installation, nous avons estimé une valeur de 0,8 pour le coefficient de contraction  $\xi$ .

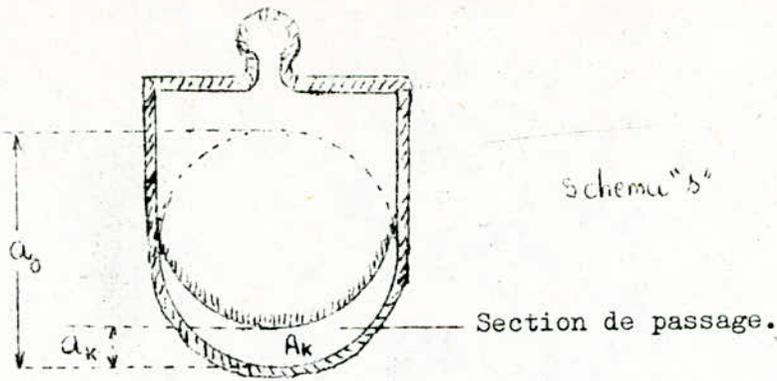


Tableau définissant les caractéristiques du dispositif :

$\frac{a_k}{a_0}$	1.00	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8
$\frac{A_k}{A_0}$	1.00	0.948	0.856	0.740	0.609	0.466	0.315	0.159
$\sum \zeta_k$	0.00	0.07	0.260	0.810	2.06	5.52	17.0	97.8
$\gamma_k$	1.00	0.966	0.891	0.743	0.572	0.392	0.235	0.101
$C_k$	1.00	0.773	0.713	0.594	0.457	0.314	0.189	0.081

Nous prenons pour temps de fermeture réduit  $m = 5$ , et nous examinons les deux cas de calcul :

- a/ sans pertes de charge.
- b/ avec pertes de charge.

Pour chaque cas, nous déterminons le coup de bélier parfait suivant la méthode présentée.

1er cas : variation de débit pour le coup de bélier parfait : sans pertes de charge..

i	0	1	2	3	4	5
$\frac{V_{Li}}{m/s}$	2.20	1.96	1.47	0.98	0.49	0.00
$\frac{Q_{Li}}{m^3/s}$	0.0173	0.0154	0.045	0.0077	0.0040	0.000

Courbe de debit

Variation de debit pour  
coup de belien parfait sans perte  
de charge.

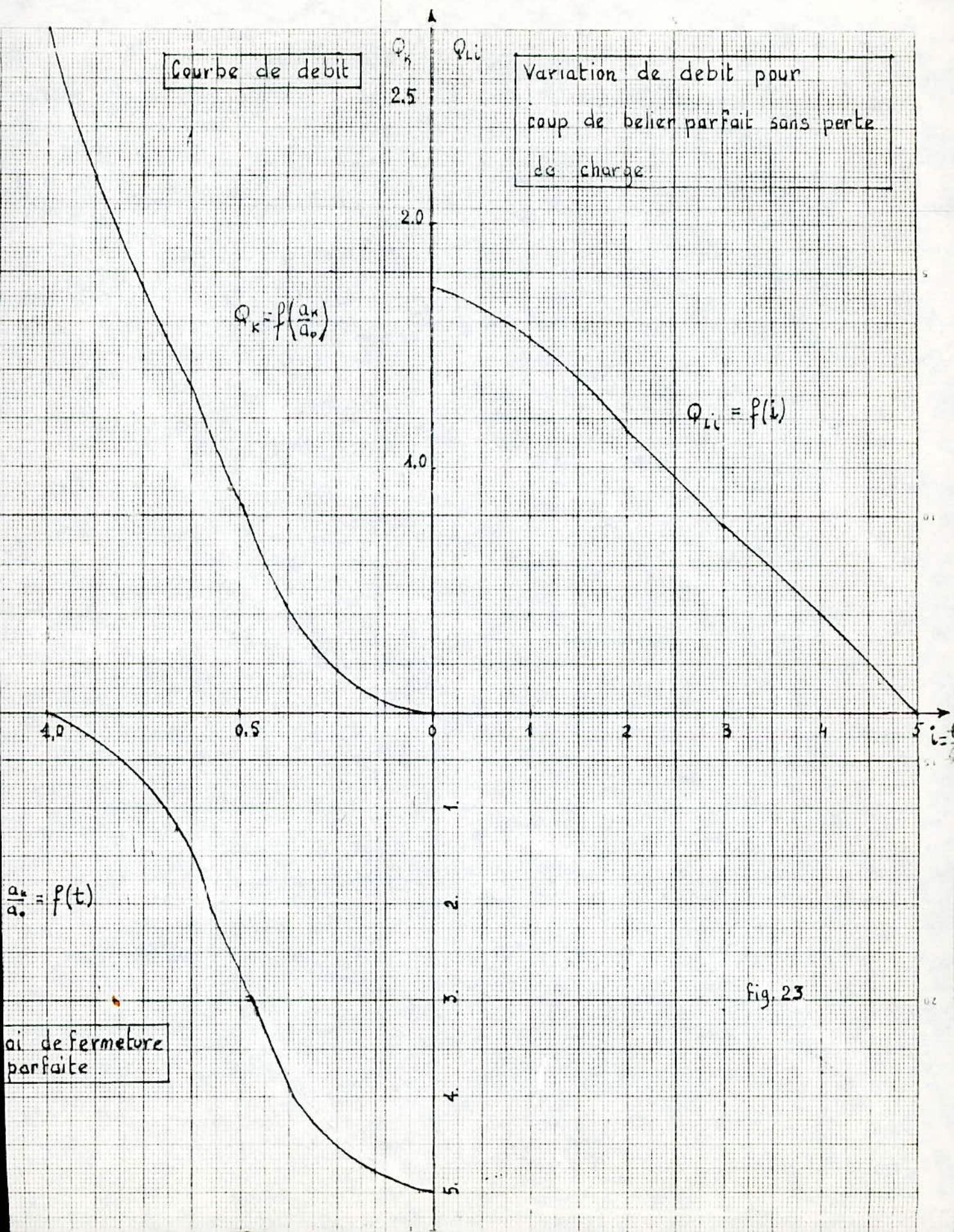
$$Q_k = f\left(\frac{a_k}{a_0}\right)$$

$$Q_{li} = f(i)$$

$$\frac{a_k}{a_0} = f(t)$$

ai de fermeture  
parfaite.

Fig. 23



2/ Pour la charge due au coup de bélier parfait ( $H_0 + h_m$ ) où la valeur  $h_m = 24.943$  déterminée d'après la formule (G.7) chap.C, la courbe de débit est donnée par le tableau suivant :

$\frac{a_k}{a_0}$	1.00	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8
$\frac{Q_k}{Q_0}$	0.3007	0.2204	0.1836	0.1322	0.0837	0.044	0.0179	0.0038

La courbe  $\frac{a_k}{a_0} = f(t)$ , étant la caractéristique cherchée, sera imposée au dispositif autrement dit l'organe de régulation du débit pour notre installation citée à l'exemple, qui sera appelé à donner le coup de bélier parfait. Cette courbe est déduite à partir des courbes  $Q_{Li} = f(t_i)$  et  $Q_k = f(\frac{a_k}{a_0})$  (fig.23 ou 24) par méthode graphique et elle a pour coordonnées :

i	0	1	2	3	4	5
$\frac{a_k}{a_0}$	1.00	0.69	0.58	0.47	0.35	0.00

2eme cas : Tenant compte des pertes de charge :

Pour ce calcul, nous reprenons la formule générale (E.1) donnant la répartition de la vitesse  $V_{Li}$  à l'extrémité aval de la conduite à chaque étape "i" au niveau de l'organe de régulation pour un coup de bélier parfait :

$$V_{Li} = V_{0i-1} - \frac{2g}{c} \left( \sum_{i=0}^{i-1} h_{Li} + \frac{h_{Li}}{2} \right) - \frac{K}{2c} \left( \sum_{i=0}^{i-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{Li}^2}{2} + \frac{V_{L0}^2}{2} + \sum_{i=0}^{i-1} V_{oi}^2 \right) \quad (E.1)$$

Pour  $h_{Li} = h_{Lm} = Cte$ , nous pouvons écrire :

$$-\frac{K}{2c} \left( \sum_{i=1}^{m-1} V_{oi}^2 + \sum_{i=1}^{m-1} V_{Li}^2 + \frac{V_{L0}^2}{2} + \frac{V_{Li}^2}{2} \right) + V_{Li} - V_{00} + \frac{2g}{c} (i-0.5) h_{Lm} = 0$$

Par rapport à  $V_{Li}$ , c'est une équation du 2ème degré, dont nous pouvons le résoudre et trouver la racine  $V_{Li}$  qui nous convient :

Tout de même, nos calculs garderons aussi une bonne précision, si nous introduisons les simplifications déjà acceptées :

$$\sum_{i=0}^{m-1} V_i^2 = \frac{V_0^2}{m^2} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2$$

et nous pouvons écrire :

$$\frac{k}{2c} \left( \frac{v_0^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2 + \frac{v_0^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2 + \frac{v_{Lo}^2}{2} + \frac{v_{Li}^2}{2} \right) + v_{Li} - v_0 + \frac{2g}{c} (i-0.5) h_{Lm} = 0$$

$$\frac{k}{2c} v_0^2 \left( \frac{2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2 + 0.5 \right) + \frac{k}{2c} \cdot \frac{v_{Li}^2}{2} + v_{Li} - v_0 + \frac{2g}{c} (i-0.5) h_{Lm} = 0$$

Pour plus de simplification, posons :

$$\alpha_i = \frac{2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2 + 0.5$$

Ce qui donne :

$$\frac{k}{2c} \alpha_i v_0^2 + \frac{k}{4c} v_{Li}^2 + v_{Li} - v_0 + \frac{2g}{c} (i-0.5) h_m = 0 \quad (E.1)'$$

$\alpha_i$  - est une fonction du temps de manoeuvre en valeurs réduites ( $m$ ) et du temps de déroulement de la manoeuvre ( $i \theta$ ).

Cependant nous pouvons trouver les valeurs  $\alpha_i$  pour différentes valeurs de ( $m$ ) et ( $i$ ) d'après le tableau suivant :

$\begin{matrix} m \\ i \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.5	1.00	1.39	1.63	1.78	1.89	1.97	2.03	2.08	2.12
2	--	--	1.61	2.13	2.50	2.78	2.99	3.16	3.29	3.40
3	--	--	--	2.25	2.82	3.28	3.64	3.94	4.17	4.38
4	--	--	--	--	2.90	3.50	4.01	4.40	4.79	5.10
5	--	--	--	--	--	3.56	4.17	4.71	5.19	5.60
6	--	--	--	--	--	--	4.21	4.84	5.41	5.92
7	--	--	--	--	--	--	--	4.87	5.51	6.10
8	--	--	--	--	--	--	--	--	5.54	6.18
9	--	--	--	--	--	--	--	--	--	6.20
10	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

A partir de la formule (E.1), nous pouvons trouver la vitesse  $V_{Li}$  pour chaque étape  $i$  et en conséquence on peut trouver la répartition du débit autrement dit  $Q_{Li} = A \cdot V_{Li}$  en fonction  $ti=i \theta$ .

La valeur  $h_m$  évoquant le coup de bélier parfait est déterminée moyennant la formule (E.3) du chap. "E" et a pour valeur :  $h_m = 18.901 \text{ m.}$

1. Variation du débit pour coup de bélier parfait :

$i$	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
$V_{Li}$ m/s.	2.20	1.093	0.426	0.92	0.020	0.000
$Q_{Li}$ $m^3/s.$	0.1173	0.0085	0.0033	0.00072	0.00016	0.000

2. Pour la charge due au coup de béliier parfait ( $H_0 + h_m$ ) tenant compte des pertes de charge, la courbe de débit est donnée par les coordonnées suivantes :

$\frac{a_k}{a_0}$	1.00	7/8	6/8	5/8	4/8	3/8	2/8	1/8
$Q_k$	0.288	0.211	0.176	0.126	0.080	0.042	0.017	0.037

3. D'une façon analogue au 1er cas, la courbe de la caractéristique chargée  $\frac{a_k}{a_0} = f(t)$  pour le dispositif, sera déduite des courbes données par  $Q_{Li} = f(i) = f(t_i)$  et  $Q_k = f\left(\frac{a_k}{a_0}\right)$  et elle a pour coordonnées graphiques :

i	0	1	2	3	4	5
$\frac{a_k}{a_0}$	1.00	0.53	0.37	0.23	0.13	0.00

Nous reportons les résultats trouvés sur le graphe (fig.24)

Courbe de debit

$$Q_k = f\left(\frac{a_k}{a_0}\right)$$

variation du debit pour  
Coup de belier parfait  
Tenant compte des pertes de  
Charge:  $Q_i = f(i)$

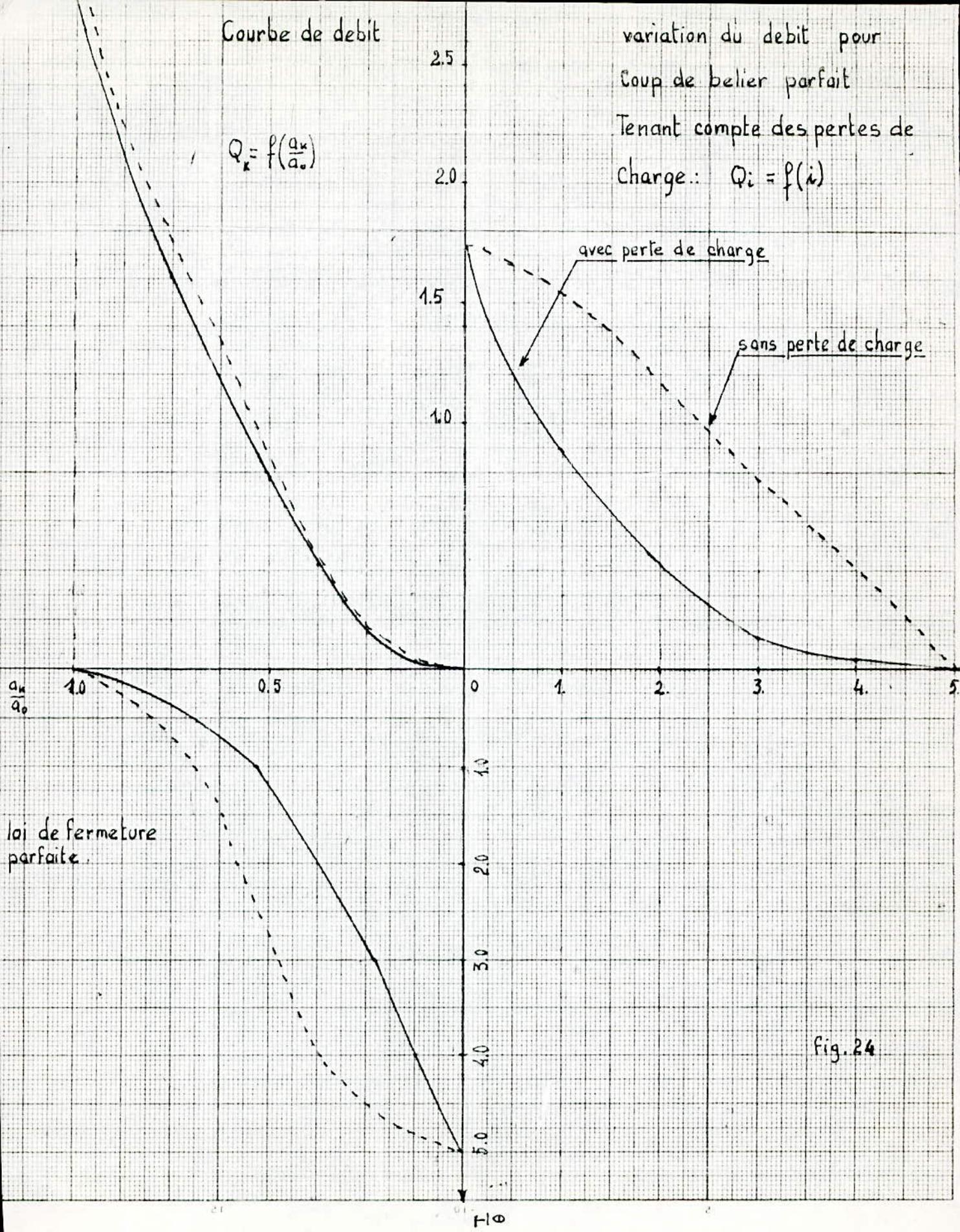


Fig. 24

C H A P I T R E G.

E T U D E . EXPERIMENTALE.

L'étude expérimentale a été faite sur une installation au laboratoire de l'E.N.S.E.E.I.H.T à Toulouse. C'est une installation pilote pour l'adduction d'eau potable, où le régime transitoire est engendré par la manoeuvre d'une vanne-robinet. L'expérience porte sur une ouverture et fermeture complète pour une loi de manoeuvre déterminée.

1. Régime permanent dans la conduite :

La charge totale  $H_0 = 5.03$  m soit constante.

Longueur de la conduite enroulée en spires : (en cuivre)  $l = 36$  m.

Aire de la section de la conduite :  $A = 0.0003017$  m<sup>2</sup>

Le débit d'écoulement  $Q_0 = 0.255$  l/s

La vitesse d'écoulement  $V_0 = 0.845$  m/s.

Pour le régime permanent, vanne étant complètement ouverte, il y a une perte de charge singulière (étranglement) au niveau de cette vanne :  $S_v = 2.890$  m.

La perte de charge sur la longueur de la conduite  $S'_{oc} = 2.104$  m

Le coefficient de la perte de charge  $K = \frac{S'_{oc}}{V_0^2/2g} = 57.79$ .

2. Etalonnage de la vanne :

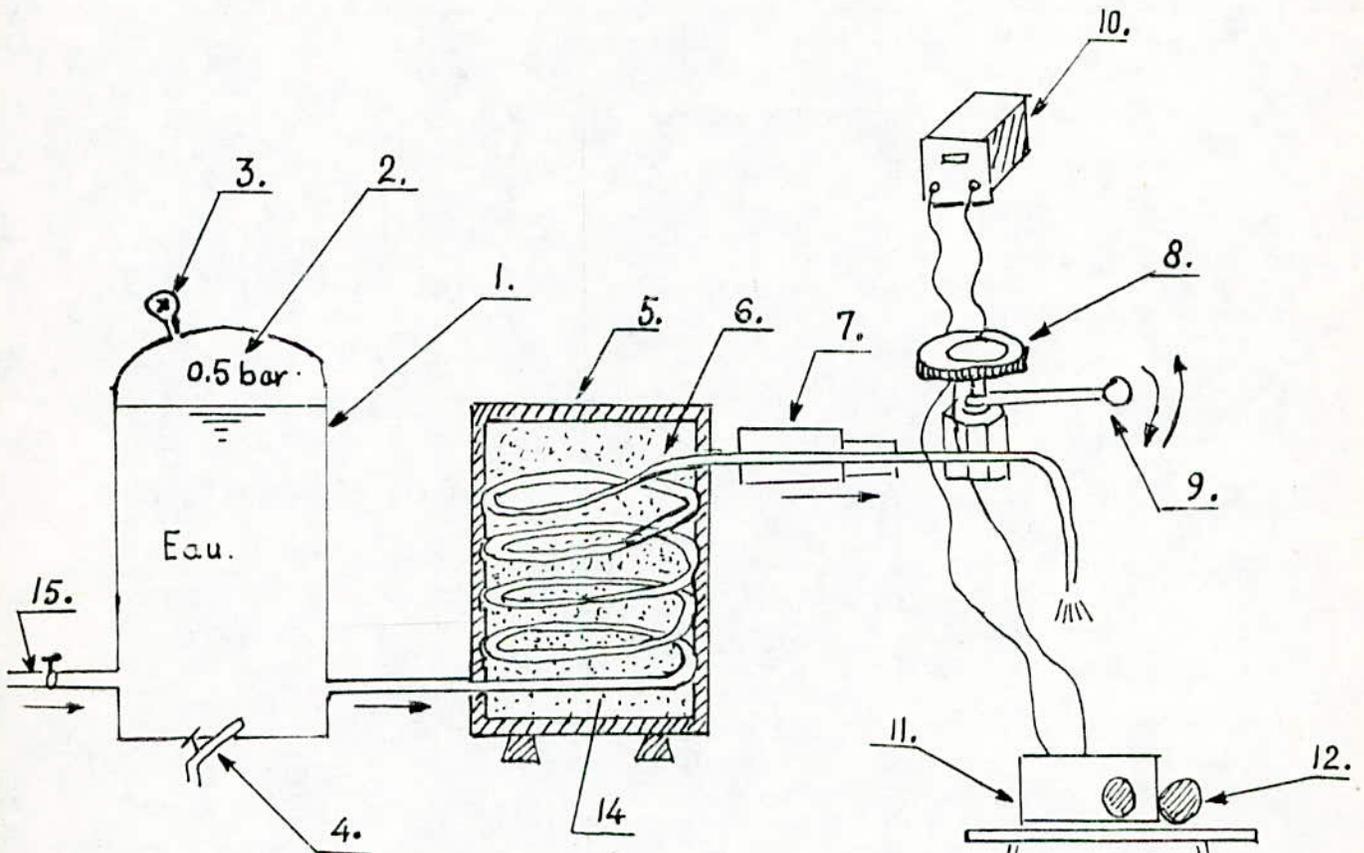
A chaque étape d'ouverture, nous avons un débit d'écoulement mesuré par volumétrie, dont on calcule la vitesse, la perte de charge, et le coefficient de débit mesuré à partir de la formule :

$$\psi = \frac{Q}{A \sqrt{2g H_v}} \quad \text{soit } \psi = \frac{v_c}{\sqrt{2g H_{Lv}}}$$

La charge au niveau de la vanne :

$$H_v = S_v + \frac{v^2}{2g} = 2.890 + 0.036 = 2.926 \text{ m}$$

# SCHEMA D'INSTALLATION DE MESURE DU COUP DE BELIER.



1. Cuve d'eau.

2. Air comprimé

3. Manomètre.

4. Vanne de vidange.

5. Bac en ciment.

6. Conduite en serpentín (cuivre)

7. Bac en plexi-glass.

8. Dispositif de fermeture.

9. Manette de manoeuvre

10. Amplificateur.

11. Enregistreur de pression.

12. Moteur d'entraînement.

13. Poste d'alimentation de l'enregistreur

14. Sable

15. Conduite d'alimentation de la cuve.

Résultats de mesure :

Ouverture ( en degré)	90	75	60	45	30	15
$Q_0$ (l/s)	0.255	0.250	0.220	0.158	0.055	0.006
$V_c$ (m/s)	0.845	0.828	0.729	0.524	0.180	0.002
p.d.c dans la conduite Sc	2.104	2.020	1.563	0.806	0.098	0.000
$V_c^2 / 2g$	0.036	0.035	0.027	0.014	0.002	0.000
$H_{Lv} = H_0 - Sc$	2.926	3.010	3.467	4.224	4.932	5.03
$\sqrt{2g H_{Lv}}$	7.5728	7.6848	8.2476	9.1036	9.837	9.9342
$\varphi_2$	0.1115	0.1077	0.0839	0.0576	0.0183	0.0002

A partir du débit initiale  $Q_0 = 0.255$  l/s, nous avons procédé à une fermeture linéaire de la vanne. Le capteur de pression relié au potentiomètre à vanne par deux fils électriques nous donne la valeur de la surpression au niveau de la vanne en fonction du temps (en sec.) :

temps (sec)	0	0.059	0.119	0.178	0.238	0.297	0.360
h (m)	2.90	3.40	5.10	9.10	33.50	33.10	vers cavitation.

TAB. Fig.24.

D'autre part, à partir du débit nul  $Q=0$ , nous avons procédé à une ouverture linéaire de la vanne, pour donner suite à une dépression ; les valeurs de la dépression en fonction du temps, enregistrées par le capteur de pression relié au potentiomètre à vanne : (fig.25).

Variation du coefficient de vitesse en fonction du degré de fermeture.

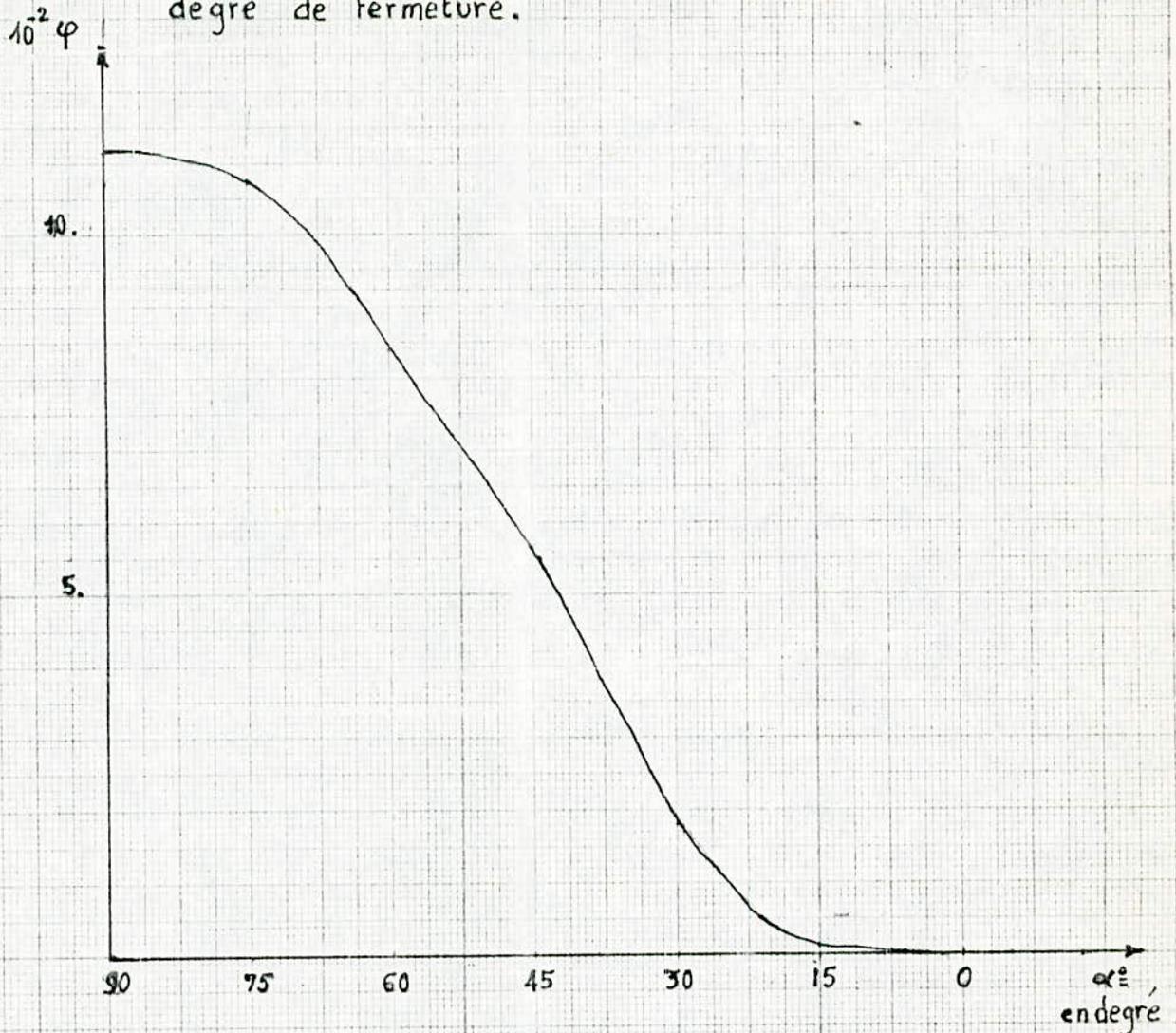


Fig.25

temps (sec)	0.00	0.059	0.119	0.178	0.238	0.297	0.357	0.416
h (m)	5.03	4.80	0.50	0.38	0.31	0.41	0.50	0.70

D'autre part, en considérant notre formule du régime transitoire que nous avons mise en évidence :

$$dh \pm \frac{c}{g} dV + \Delta S = 0$$

Nous procédons à la répartition des vitesses et coups de bélier dans la conduite

le signe (+) pour une perturbation descendante.

Le signe (-) pour une perturbation montante.

D'une façon générale, nous avons :

$$I \begin{cases} H_{Li} - H_{oi-1} + \frac{c}{g}(V_{Li} - V_{oi-1}) + \frac{K}{2} \left( \frac{V_{oi-1}^2}{2g} + \frac{V_{Li}^2}{2g} \right) = 0 \\ H_{oi} - H_{Li} - \frac{c}{g} (V_{oi} - V_{Li}) - \frac{K}{2} \left( \frac{V_{oi}^2}{2g} + \frac{V_{Li}^2}{2g} \right) = 0 \end{cases}$$

D'autre part, au niveau de la vanne, on peut écrire :

$$H_{Li} = \frac{V_{Li}^2}{2g \varphi^2}$$

Le système (I) pourra s'écrire :

$$II \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\varphi^2} + \frac{K}{2} \right) V_{Li}^2 + \frac{c}{g} V_{Li} - H_{oi-1} - \frac{c}{g} V_{oi-1} + \frac{K}{2} \frac{V_{oi-1}^2}{2g} = 0 \\ \frac{K}{2} \cdot \frac{V_{oi}^2}{2g} + \frac{c}{g} V_{oi} + H_{Li} - H_{oi} + \frac{K}{2} \cdot \frac{V_{Li}^2}{2g} - \frac{c}{g} V_{Li}^2 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système permet de donner la solution de  $V_{Li}$ ,  $V_{oi}$  et  $H_{Li}$  en conséquence. Nous appliquons ce système pour le cas de fermeture et ouverture.

i	$V_{Li}$	$V_{oi}$	$H_{Li}$	Q	t(sec)
0	0.845	0.845	2.926	0.1115	0.00
1	0.0843	0.840	3.128	0.1077	0.059
2	0.824	0.809	4.925	0.0839	0.119
3	0.762	0.717	8.942	0.0576	0.178
4	0.473	0.234	34.076	0.0183	0.238
5	0.000257	-0.233	33.698	0.0002	0.297
6	0.0000	---	-23.738	0	0.357

TAB.26.

a/ Si nous déterminons le coup de bélier parfait pour cette installation, nous devons déterminer la valeur adimensionnelle de la surpression  $\xi = \frac{hm}{H_0}$  moyennant l'équation suivante déjà déterminée.

$$\xi = \frac{\delta l}{2m - 1} - \frac{K \varphi Q^2}{2(2m - 1)} \left( 1 + \frac{\sum_{i=0}^{m-1} (m-i)^2}{m^2} \right)^2 \quad 2$$

Les caractéristiques de l'installation sont :

celerité d'onde  $c = 1210$  m/s.

$$\mathcal{H} = \frac{c \cdot V_0}{g H_0} = 20.742.$$

Le nombre réduit d'étapes de fermeture  $m = 6$ .

par conséquent  $\xi = 1.770$ .

La valeur du coup de bélier parfait  $h_m = 8.905$  m.

b/ Détermination de la loi de manoeuvre parfaite pour la fermeture :

b.1/ Courbe de débit pour coup de bélier parfait :

Nous déterminons la vitesse  $V_{Li}$  pour chaque étape "i" de fermeture moyennant l'équation suivante :

FERMETURE.

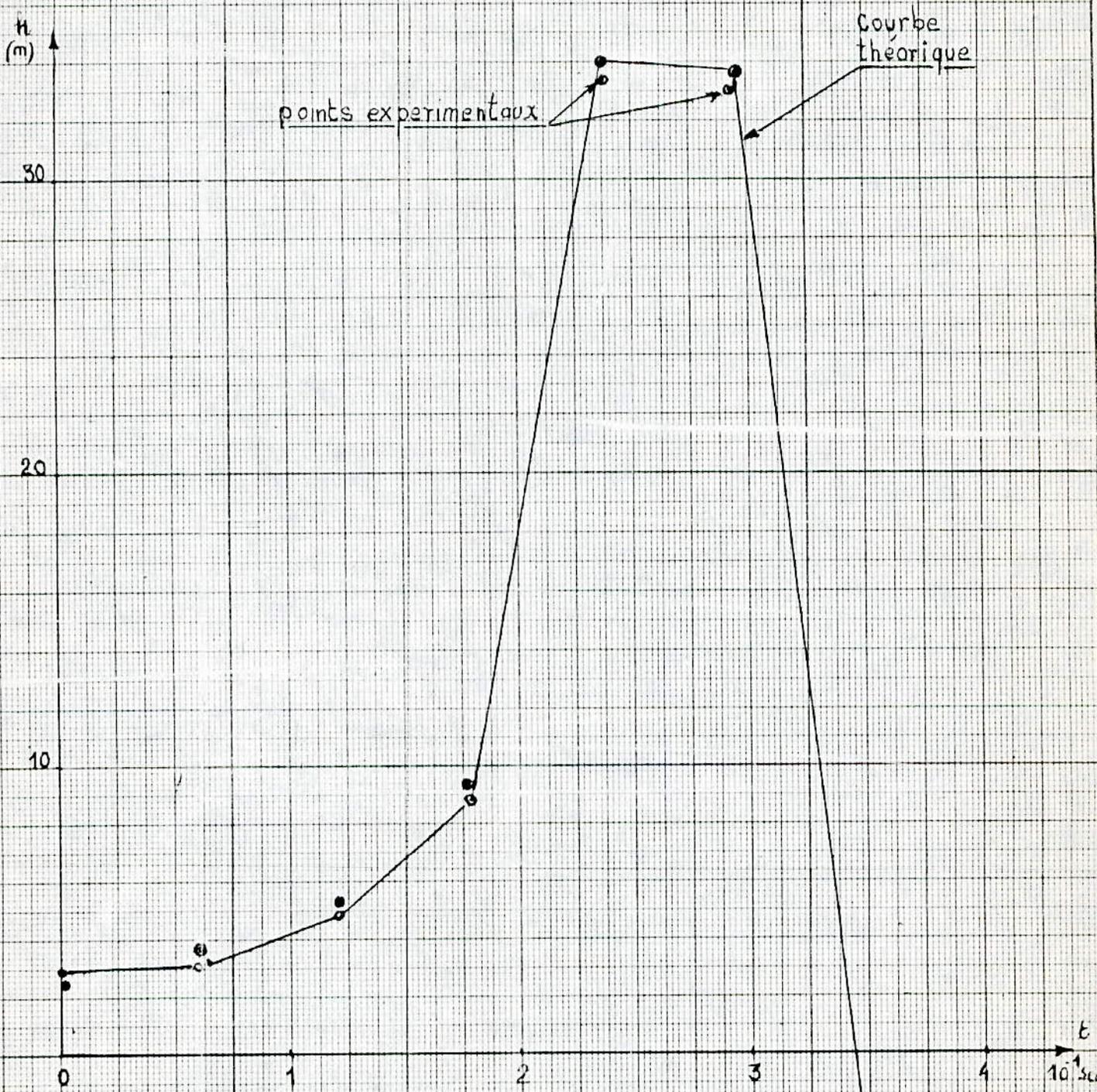


Fig. 26.

$$\frac{k}{2c} \alpha_i \cdot V_o^2 + \frac{k}{4c} V_{Li}^2 + V_{Li} - V_{oo} + \frac{2g}{c} (i - 0.5) h_m = 0$$

avec  $\alpha_i = \frac{2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} (m - i)^2 + 0.5$

Pour  $m = 6$ , nombre réduit d'étapes de fermeture, nous avons les valeurs de  $i, \dots, i$ .

i	1	2	3	4	5
$\alpha_i$	1.89	2.78	3.28	3.50	3.56

i	0	1	2	3	4	5	6
$V_{Li}(m/s)$	0.805	0.714	0.577	0.426	0.279	0.135	0.00
$Q_{Li}(l/s)$	0.255	0.215	0.174	0.128	0.084	0.0407	0.000

TAB.27 (a)

b.2/ Courbe de débit dû à la charge  $(H_o + h_m) = 5.03 + 8.905$

$$Q_k = \varphi A_k \cdot \sqrt{2g (H_o + h_m)} \quad \text{ou bien} \quad V_k = \varphi \sqrt{2g (H_o + h_m)}$$

Position de v. anne	90°	75	60	45	30	15	0
$\varphi$	0.1115	0.1077	0.0839	0.0576	0.0183	0.00002	0.00
$V_k(m/s)$	1.843	1.779	1.386	0.952	0.302	0.000165	0.000

TAB. 27 (b).

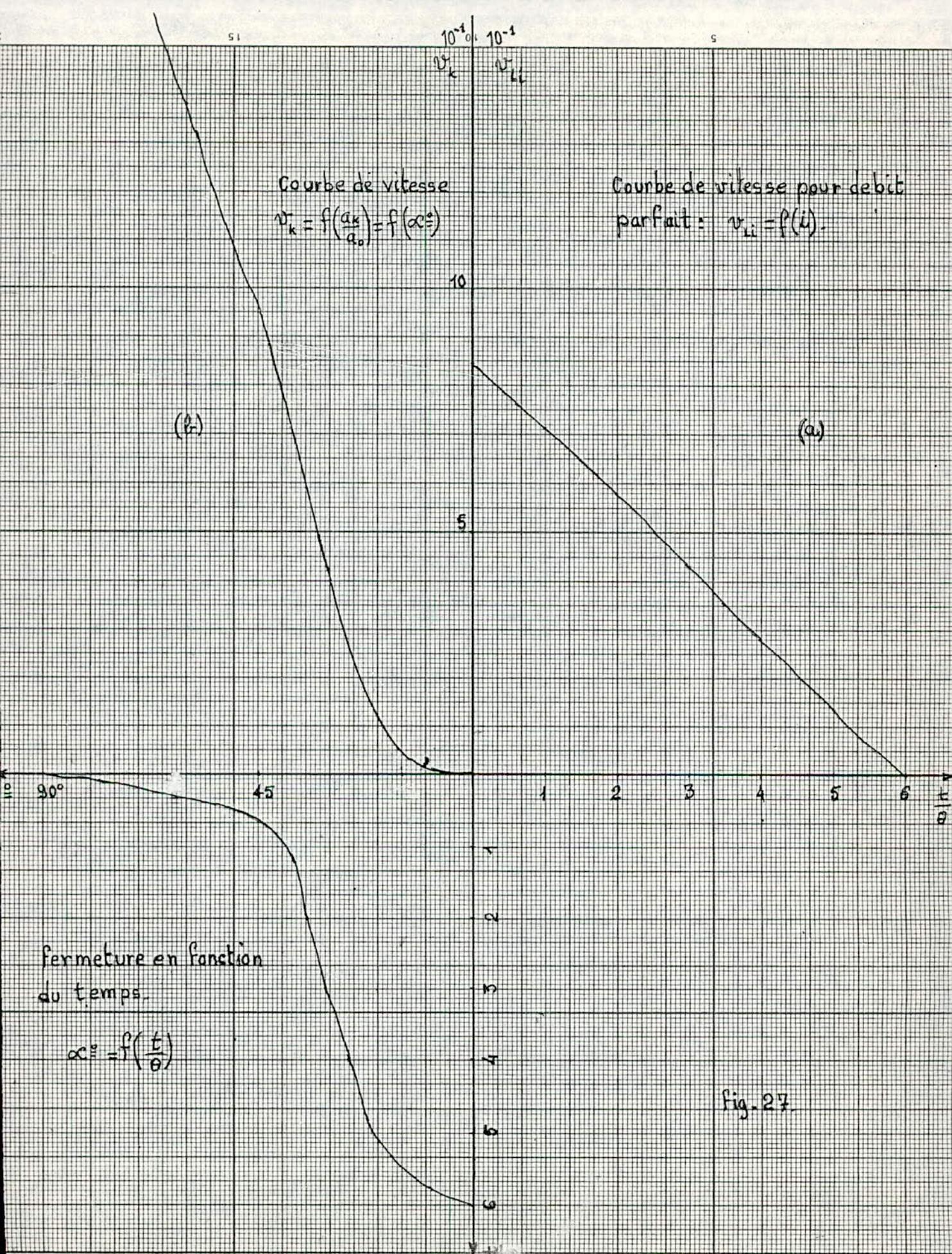


Fig. 27.

Ces courbes représentées graphiquement, nous donnent la loi de manoeuvre parfaite en fonction du temps,  $\alpha = f\left(\frac{t}{\theta}\right)$ . ( voir Fig.27 )

IIe/ Ouverture :

Le nombre réduit (m) d'étapes d'ouverture est égal à 7 moyennant le graphe  $\mu = f(m) = \frac{V_{oi}}{V_{Li}}$  nous obtenons pour m=7 la valeur de  $\mu = 1.80$ .

a/ Répartition des vitesses et coup de bélier pour ouverture :

i	$V_{Li}$	$V_{oi}$	$H_{Li}$	$Q_i$	t(m)
0	00	00	5.03	0.00	0.000
1	0.0001	0.0225	5.0116	0.000015	0.059
2	0.0371	0.074	0.4871	0.012	0.119
3	0.113	0.145	0.405	0.0395	0.178
4	0.182	0.219	0.356	0.069	0.238
5	0.255	0.291	0.384	0.093	0.297
6	0.326	0.361	0.1456	0.109	0.346
7	0.393	0.424	0.634	0.1115	0.415

TAB. 28

b/ Pour la détermination du coup de bélier parfait, nous déterminons la valeur adimensionnelle  $\xi = \frac{h_m}{H_0}$  moyennant la formule (E 3).

Tenant compte que :

$$m = 7, \text{RS} = \frac{cV_0}{gH_0} = 20.742$$

$$N = 0.5 + \frac{1 + \mu^2}{m^2} \sum_{i=0}^{m-1} i^2 = 4.023$$

$$K = 57.79, R = K \sqrt{N} = 2.891.$$

nous obtenons  $\xi = - 0.963$

et par conséquent  $h_m = - \xi H_0 = - 4.843 \text{ m.}$

OUVERTURE

H  
(m)

5

25

Courbe  
theorique

Points  
experimentaux

0

0.1

0.2

0.3

0.4

t  
(s)

Fig 28

b-1/ Courbe de débit pour coup de bélier parfait (ouverture) :

i	0	1	2	3	4	5	6	7
$V_{Li}$ m/s	0.00	0.036	0.108	0.081	0.252	0.324	0.396	0.468
$Q_{Li}$ l/s	0.00	0.011	0.033	0.055	0.076	0.094	0.119	0.141

TAB. 29

b-2/ Variation de vitesse due à la charge (  $H_o + h_m$  )

$\alpha$ en degré	0	13	26	39	52	65	78	90
i	0	1	2	3	4	5	6	7
$\psi_i$	0.00	0.00015	0.012	0.0395	0.069	0.093	0.109	0.1115
$V_k$	0.00	0.00003	0.02297	0.0756	0.1321	0.1781	0.2089	0.2135

TAB. (29a).

III. Remarque :

La courbe donnant la loi de manoeuvre parfaite  $\alpha = f(t)$  est obtenue par la combinaison de deux courbes données par les tableaux ci-dessus (b-1, b-2), voir graphe fig.29.

Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux calculés suivant notre formule que nous avons mise en évidence. La concordance entre les résultats calculés et mesurés est relativement bonne (erreur env. de 2%). Comme exemple, nous citons les résultats obtenus pour une manoeuvre de fermeture complète linéaire durant 0.36 sec (tableau et graphe fig.26) et pour une ouverture durant 0.416 sec (tabl. et graphe fig.28). Sur la base de notre recherche au laboratoire, nous avons établi une loi de fermeture et une loi d'ouverture de manoeuvre parfaite pour cette installation. En appliquant ces lois à la manoeuvre de la vanne, on peut sensiblement atténuer la surpression dans l'installation étudiée. Par exemple, pour une fermeture durant 0.36 sec, on obtient par application de la loi de manoeuvre parfaite une diminution de surpression de 7.5 fois, c.à.d de 29 à 3.9m.

Dans le cas d'une ouverture, nous pouvons obtenir à la fin de manoeuvre un débit plus important pour application de la loi parfaite que pour la loi linéaire. Nous avons droit donc de constater que l'application de loi de manoeuvre parfaite pourrait être très efficace pour certaines installations des centrales hydrauliques et d'alimentation en eau potable.

O U V E R T U R E

Courbe de vitesse due à la charge:  $(H_0 + h_m)$

$v_k$

$v_{LL}$

Courbe de vitesse pour coup de hélium parfait.

$v_k = f(\alpha)$

$v_{LL} = f(i)$

78    65    52    39    26    13    1    2    3    4    5    6

Courbe de loi de manœuvre parfaite

$\alpha = f(t)$

5  
4  
3  
2  
1  
1  
2  
3  
4  
5  
6  
7

$t/t_0$

fig. 29

CONCLUSION GENERALE

Dans cette recherche portant sur la contribution à l'étude du régime transitoire, nous avons établi un système d'équations qui nous permet de tenir compte de la perte de charge et la variation du diamètre de la conduite suivant sa longueur.

La solution est basée sur la méthode des caractéristiques. Le système d'équations obtenu donne la description du régime transitoire dans une conduite en charge, qui se fait le long d'une perturbation quelconque. Donc elle donne une solution générale de variation de la vitesse et de la pression dans le temps et dans l'espace sur la longueur de la conduite.

Cependant, au cours du régime transitoire, la détermination de la perte de charge était très délicate. De ce fait, pour avoir une idée plus proche de la réalité, nous avons "cerné" la solution de cette détermination en supposant une variation de vitesse parabolique, linéaire.

En raison de la simplicité, nous avons opté à la variation parabolique; la résolution de ces équations se fait par une méthode numérique appropriée aux conditions se basant sur le pas de calcul choisi librement. Dans la deuxième partie nous avons présenté une large analyse de l'influence de la loi de variation du débit à l'aval tenant compte des formules déjà établies.

En ayant comme optique toutes les circonstances nocives à la conduite déjà signalées nous avons mis en évidence une méthode pour obtenir un coup de bélier parfait une devant pas dépasser une certaine limite admissible exigée par l'installation en fonction de ces propriétés hydrodynamiques. Cependant pour assurer un tel coup de bélier, nous avons déterminé une loi de manoeuvre parfaite, autrement dit le positionnement de l'organe en fonction du temps qui sera imposé au dispositif. Celui-ci aura comme avantages de :

. Protéger la conduite contre les vibrations dues à la variation de pression en assurant un coup de bélier parfait.

. régulation du débit en fonction de la demande.

cette étude est accompagnée par un simple exemple qui met en évidence la méthode d'établissement d'une loi parfaite de manoeuvre pour la vanne couramment utilisée en génie-hydraulique.

B I B L I O G R A P H I E

- 1 - S.BEDNARCZYK, Rozprzestrzenianie się tal ciśnienia w rurociągach i sztolniach ciśnieniowych. Zeszyty Naukowe polytechniki nr 16 Gdanskiej 1970.
- 2 - S. BEDNARCZYK, Ruch nieustalony cieczy w przewodach pod ciśnieniem q Archiwum Hydrotechniki, tXXI, z.4.1974.
- 3 - L.BERGERON, Du coup de béliier en hydraulique au coup de foudre en électricité", Dunod Paris, 1950.
- 4 - P.BERGERON, Complexité des phénomènes du coup de béliier sur les installations de pompage et essai de classification des solutions générales pour y remédier, la Houille Blanche, br Dp.B 1949.
- 5 - H.CARLIER, "Manuel d'Hydraulique générale appliquée", Eyrolles, Paris, 1972.
- 6 - A.DUPONT, "Hydraulique urbaine" tome 2, Eyrolles, Paris, 1979.
- 7 - G.EVANGELISTI, Water hammer analysis by the method of characteristics Energie Electric, nr 9 - 11.12, 1969.
- 8 - E.A. BRUN, "Mécanique des fluides" tome 3, Dunod, Paris 1968.
- 9 - L.ESCANDE, coup de béliier dû à la fermeture instantanée dans une conduite à caractéristiques multiples, Mémoires et travaux de la S.H.F., n°1, 1958
- 10 - M.HUG, "Mécanique des fluides appliquée", Eyrolles, Paris 1975.
- 11 - CH.LAEGER, "théorie générale du coup de béliier", Dunod, Paris, 1933.
- 12 - Y.LABYE, Etude du mouvement transitoire dans les réseaux comportant des réservoirs, thèse de doctorat es-science, faculté des sciences de Toulouse 1965.
- 13 - M.MEUNIER, "Coup de béliier dans les réservoirs sous pression", ENGREF Paris, 1978.
- 14 - H.K MUKHTAR, "Changement d'équilibre. Méthode de calculs à l'aide d'une calculatrice digitale", Dunod, Lausanne, 1966.

- 15 - J.PARMAKKIAN, Waterhammer Analysis. Théorie et calcul du coup de bélier Prentice.Hall.New (Yourk, 1955.
- 16 - G.REMENIERAS Maurice Gabriel, l'étude du coup de bélier, Mémoire et travaux de la S.H.F, vol.11, 124-130, (1960).
- 17 - A.SCHLAG, l'introduction des pertes de charge dans le calcul du coup de bélier, le Génie-Civil, 15 Février (1961).
- 18 - A.SCHLAG, le coup de bélier dans un réseau de ville ou d'immeubles de forme telescopique, la tribune de Cébédeau, Vol.15, 223-224, Juin-Juillet (1962).
- 19 - V.L.STREETER et LAI.C. Water hammer Analysis including fluide friction American.Society of civil Enginiring.Journal of Hydraulic- Division n°3, volume 88, Mai 1962.
- 20 - C.THIRRIOT, Méthodes approchée de calcul du coup de bélier dans les conduites relativement longues, la Houille Blanche, nr2, (1967).
- 21 - A.VIBERT, Influence des pertes de charge sur l'amortissement du coup de bélier dans les conduites, le Génie-Civil, n°9, 113, (1948).
- 22 - L.A.VOELTZEL, Protection des réseaux d'eau potable contre les coups de bélier, revue l'eau, n°2, 95, (1961).



A- VARIATION DE LA VITESSE D'ECOULEMENT A L'EXTREMITE  
AVALE DE LA CONDUITE GRAVITAIRE PENDANT LA MODIFICATION DU  
DEBIT.

La détermination de la variation de la vitesse se fait moyennant le  
diagramme du mouvement des perturbations. (Fig....):

Le raisonnement se fait par étape comme suit :

$$\text{Posons } V_o = V_{oo} = V_{Lo}$$

où :

$V_{oo}$  - c'est la vitesse à l'entrée du réservoir à l'étape  $i=0$

$V_{Lo}$  - c'est la vitesse au niveau de l'organe de régulation.

a)  $o, o - L.1$  :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0$$

$$dh = - \frac{c}{g} dv$$

$$h_{L1} - h_{oo} = - \frac{c}{g} (V_{L1} - V_{oo})$$

$$V_{L1} = V_o - \frac{g}{c} h_{L1}.$$

b)  $L1 - 01$

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 \quad dh = \frac{c}{g} dv.$$

$$h_{01} - h_{L1} = \frac{c}{g} (V_{01} - V_{L1})$$

$$V_{01} = V_{L1} - \frac{g}{c} h_{L1}$$

car  $h_{01} = 0$ , au niveau du réservoir, niveau supposé constant.  
tenant compte de (a) :

$$V_{01} = V_o - 2 \frac{g}{c} h_{L1}.$$

c) 01 - L.2 :

$$dh + \frac{c}{g} dv \quad dh = - \frac{c}{g} dv$$

$$h_{L2} - h_{01} = - \frac{c}{g} (v_{L2} - v_{01})$$

$$h_{L2} = - \frac{c}{g} (v_{L2} - v_{01})$$

$$h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{01} - v_{L2})$$

tenant compte de (b) :

$$h_{L2} = \frac{c}{g} (v_0 - 2 \frac{g}{c} h_{L1} - v_{L2})$$

$$v_{L2} = v_0 - \frac{g}{c} h_{L2} - 2 \frac{g}{c} h_{L1}$$

d) L2 - 0.2 :

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 = dh - \frac{c}{g} dv$$

$$h_{02} - h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{02} - v_{L2})$$

avec  $h_{02} = 0$  au niveau du réservoir. (point R).

$$h_{L2} = - \frac{c}{g} (v_{02} - v_{L2})$$

$$v_{02} = v_{L2} - \frac{g}{c} h_{L2}$$

tenant compte de (c), nous avons :

$$v_{02} = v_0 - \frac{g}{c} (h_{L1} + h_{L2})$$

e) 0.2-L.3 :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = - \frac{c}{g} dv$$

$$h_{L3} - h_{02} = - \frac{c}{g} (v_{L3} - v_{02})$$

avec  $h_{02} = 0$

. A j =

$$h_{L3} = - \frac{c}{g} ( v_{L3} - v_{02} )$$

$$v_{L3} = v_{02} - \frac{g}{c} h_{L3}.$$

tenant compte de (d).

$$v_{L3} = v_0 - \frac{g}{c} ( h_{L1} + h_{L2} ) - \frac{g}{c} h_{L3}.$$

$$v_{L3} = v_0 - \frac{g}{c} h_{L3} - 2 \frac{g}{c} ( h_{L1} + h_{L2} ).$$

g) L.3. - 0.3 :

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = \frac{c}{g} dv.$$

$$h_{03} - h_{L3} = \frac{c}{g} ( v_{03} - v_{L3} )$$

avec  $h_{03} = 0$  au niveau du réservoir point (R).

$$h_{L3} = - \frac{c}{g} ( v_{03} - v_{L3} )$$

$$h_{L3} = \frac{c}{g} ( v_{L3} - v_{03} )$$

$$v_{03} = v_{L3} - \frac{g}{c} h_{L3}$$

tenant compte de (e)

$$v_{03} = v_0 - \frac{g}{c} ( h_{L3} + h_{L2} ) - \frac{g}{c} h_{L3} - \frac{2g}{c} ( h_{L1} + h_{L2} )$$

$$v_{03} = v_0 - 2 \frac{g}{c} ( h_{L1} + h_{L2} + h_{L3} )$$

g) 0.3 - L.4 :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = - \frac{c}{g} dv.$$

$$h_{03} - h_{L4} = - \frac{c}{g} ( v_{03} - v_{L4} )$$

$$h_{L4} = \frac{c}{g} ( v_{03} - v_{L4} ).$$

$$v_{L4} = v_{03} - \frac{g}{c} h_{L4}.$$

h.) L.4 - 0.4 :

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = \frac{c}{g} dv$$

$$h_{L4} - h_{04} = \frac{c}{g} (V_{L4} - V_{04})$$

$$\text{avec } h_{04} = 0.$$

$$h_{L4} = \frac{c}{g} (V_{L4} - V_{04})$$

$$V_{04} = V_{L4} - \frac{g}{c} h_{L4}$$

$$V_{04} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2} + h_{L3}) - \frac{g}{c} h_{L4} - \frac{g}{c} h_{L4}.$$

$$V_{04} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2} + h_{L3} + h_{L4}) /$$

i) o.4 - L.5 :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0$$

$$dh = - \frac{c}{g} dv.$$

$$h_{04} - h_{L5} = - \frac{c}{g} (V_{04} - V_{L5})$$

avec  $h_{04} = 0$  au niveau du réservoir.

$$h_{L5} = \frac{c}{g} (V_{04} - V_{L5}).$$

$$V_{L5} = V_{04} - \frac{g}{c} h_{L5}.$$

tenant compte de h

$$V_{L5} = V_0 - \frac{2g}{c} (h_{L1} + h_{L2} + h_{L3} + h_{L4}) - \frac{g}{c} h_{L5}.$$

D'une façon générale, on peut écrire que la vitesse à la sortie de la conduite suit la formule :

$$V_{Li} = V_0 - \frac{g}{c} h_{Li} - \frac{2g}{c} \sum_{k=0}^{i-1} h_{Lk}.$$

B - VARIATION DU COUP DE BELIER (h) A L'EXTREMITE AVAL DE LA  
CONDUITE PENDANT LA MODIFICATION DU DEBIT.

Supposons une fermeture lente, et les pertes de charge négligeables.  
Calculons le coup de belier (h) pour différentes périodes de fermeture d'organe  
de régulation.

Posons  $V_0 = V_{00} = V_{L0}$  et supposons que le coup de béliier au niveau du réservoir  
est nul,  $h_{0i}$  ( $i=0,1,2\dots m$ ) = 0 calculons.

successivement entre :

a) 00 - L.1

c'est le passage d'une perturbation de 0,0 à L.1,

au temps  $t = \frac{2L}{c}$ , nous trouvons le coup de béliier, à l'extrémité aval de la  
conduite, à partir de la formule suivante :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0 \implies dh = -\frac{c}{g} (V_{L1} - V_{00})$$

d'où

$$h_{L1} = \frac{c}{g} (V_0 - V_{L1})$$

b) L.1 - 0.1

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 \implies dh = \frac{c}{g} dv.$$

au temps  $t = \frac{3}{2} \theta$  on a :

$$h_{01} - h_{L1} = \frac{c}{g} (V_{01} - V_{L1})$$

$$h_{L1} = \frac{c}{g} (V_{L1} - V_{01}) \implies V_{01} = V_{L1} - \frac{c}{g} h_{L1}.$$

c) 0.1 - L.2

Au temps  $t = 2\theta = 2 \cdot \left(\frac{2L}{c}\right)$ , le coup de béliier à l'extrémité aval  
de la conduite est dérivé à partir de la formule :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0 \implies dh = -\frac{c}{g} dv$$

$$h_{L2} - h_{01} = \frac{c}{g} (V_{01} - V_{L2})$$

$$h_{01} = 0$$

$$h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{01} - v_{L2}).$$

En tenant compte de la formule (b) (au temps  $-\frac{3}{2}\theta$ ) à l'extrémité amont de la conduite nous aurons :

$$h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{L1} - \frac{g}{c} h_{L1} - v_{L2}).$$

d'où

$$h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{L1} - v_{L2}) - h_{L1}.$$

d) L.2 - 02 :

au temps  $t = 2\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{5}{2}\theta$ , la vitesse à l'amont de la conduite est donnée par :

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = \frac{c}{g} dv$$

$$h_{02} - h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{02} - v_{L2})$$

$$h_{02} = 0 \Rightarrow h_{L2} = \frac{c}{g} (v_{L2} - v_{02})$$

$$v_{02} = v_{L2} - \frac{g}{c} h_{L2}.$$

e) 02 - L.3 :

au temps  $t = \frac{5}{22}\theta + \frac{\theta}{2} = 3\theta$  le coup de bélier est donné par ;

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = -\frac{c}{g} dv.$$

$$h_{L3} - h_{02} = -\frac{c}{g} (v_{L3} - v_{02})$$

$$h_{02} = 0 \Rightarrow h_{L3} = \frac{c}{g} (v_{02} - v_{L3})$$

tenant compte vitesse au temps  $t = \frac{5}{2}\theta$  à l'amont de la conduite :

$$h_{L3} = \frac{c}{g} (v_{L2} - \frac{g}{c} h_{L2} - v_{L3})$$

$$h_{L3} = \frac{c}{g} (v_{L2} - v_{L3}) - h_{L2}$$

f) L3 - 03 m

Au temps  $t = 3\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{7}{2}\theta$ , la vitesse à l'amont de la conduite sera donnée par :

$$dh - \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = \frac{c}{g} dv.$$

$$h_{L3} - h_{03} = \frac{c}{g} (v_{L3} - v_{03})$$

$$h_{03} = 0 \quad h_{L3} = \frac{c}{g} (v_{L3} - v_{03}) \quad v_{03} = v_{L3} - \frac{g}{c} h_{L3}.$$

g) 0.3 - L.4 :

au temps  $t = \frac{7}{2}\theta + \frac{\theta}{2} = 4\theta$ , le coup de bélier est donné par : à l'extrémité aval de la conduite :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0 \quad dh = -\frac{c}{g} dv$$

$$h_{L4} - h_{03} = -\frac{c}{g} (v_{L4} - v_{03})$$

$$h_{L4} = \frac{c}{g} (v_{03} - v_{L4}).$$

tenant compte de la vitesse de terminée au temps  $\frac{7}{2}\theta$  à l'amont de la conduite :

$$h_{L4} = \frac{c}{g} (v_{D3} - v_{L3} - \frac{g}{c} h_{L3} - v_{L4})$$

$$h_{L4} = \frac{c}{g} (v_{L3} - v_{L4}) - h_{L3}.$$

h) L.4 - 0.4 :

au temps  $t = 4\theta + \frac{\theta}{2} = \frac{9}{2}\theta$ , la vitesse à l'amont de la conduite sera donnée par  $dh - \frac{c}{g} dv = 0 \Rightarrow dh = \frac{c}{g} dv.$

$$h_{04} - h_{L4} = \frac{c}{g} (v_{04} - v_{L4})$$

$$\text{au point (R), } h_{04} = 0 \Rightarrow h_{L4} = -\frac{c}{g} (v_{04} - v_{L4})$$

$$h_{L4} = -\frac{c}{g} (V_{L4} - V_{O4})$$

d'où 
$$V_{O4} = V_{L4} - \frac{g}{c} h_{L4}.$$

i) 0.4 ÷ L.5 :

Au temps  $t = \frac{9}{2} \theta + \frac{\theta}{2} = 5 \theta$ , l'onde de perturbation arrive à la vanne et provoque un coup de bélier donné par :

$$dh + \frac{c}{g} dv = 0$$

$$h_{L5} - h_{O4} = -\frac{c}{g} (V_{L5} - V_{O4})$$

$h_{O4} = 0$  au niveau du réservoir, ce qui donne :

$$h_{L5} = -\frac{c}{g} (V_{L5} - V_{O4})$$

$$h_{L5} = \frac{c}{g} (V_{O4} - V_{L5})$$

tenant compte de la vitesse à l'arrêt de la conduite au temps  $t = \frac{9}{2} \theta$ , on peut écrire :

$$h_{L5} = \frac{c}{g} V_{L4} - \frac{g}{c} h_{L4} - V_{L5}$$

d'où : 
$$h_{L5} = \frac{c}{g} (V_{L4} - V_{L5}) - h_{L4}.$$

d'une façon générale, on peut écrire que la valeur du coup de bélier au niveau de l'organe de régulation, suit la formule :

$$h_{Li} = -\frac{c}{g} (V_{L,i-1} - V_{Li}) - h_{L,i-1}$$

Si nous additionnons membre à membres les formules obtenues en a, b...i

nous obtenons :

$$h_{Li} = \frac{c}{g} (V_0 - V_{Li}) - 2 \sum_{k=0}^{i-1} h_{Lk}.$$

C - DETERMINATION DES VITESSES EN TENANT COMPTE DES PERTES DE CHARGE.

o/ L.o - oo : au temps  $t = \frac{\theta}{2}$ , c.a.d. à l'extrémité amont de la conduite, la vitesse sera : (Fig.r.)

$$H_{Lo} - H_{oo} - \frac{c}{g} (V_{Lo} - V_{oo}) + \Delta S_{ooLo} = 0$$

$$V_{oo} = V_{Lo} - \frac{g}{c} (H_{Lo} - H_{oo}) - \frac{g}{c} \Delta S_{ooLo}$$

1/ o.o - L.1 : Au temps  $t = 2\theta$ , c.a.d. au niveau de l'organe de distribution, la vitesse sera :

$$dH + \frac{c}{g} dV + \Delta S = 0$$

$$dH = -\frac{c}{g} dV - \Delta S = 0$$

$$V_{L1} = V_{oo} - \frac{c}{g} (H_{L1} - H_{oo}) - \frac{c}{g} \Delta S_{L1.oo}$$

Tenant compte de (o); on trouve :

$$V_{L1} = V_{Lo} - \frac{g}{c} (H_{L1} + H_{Lo} - 2H_{oo}) - \frac{g}{c} (\Delta S_{Lo.oo} + \Delta S_{L1.oo})$$

2/ L.1 - O1 :

$$V_{O1} = V_{Lo} - \frac{g}{c} (H_{O1} - H_{L1} - \Delta S_{L1.O1})$$

en remplaçant  $V_{L1}$  par sa valeur :

$$V_{O1} = V_{Lo} - \frac{g}{c} (H_{L1} + H_{Lo} - 2H_{oo}) - \frac{g}{c} (\Delta S_{Lo.oo} + \Delta S_{L1.oo})$$

$$+ \frac{g}{c} (H_{O1} - H_{L1}) - \frac{g}{c} \Delta S_{L1.O1}$$

$$V_{O1} = V_{Lo} - \frac{g}{c} (H_{L1} - H_{Lo} - 2H_{oo} + H_{L1.O1}) - \frac{g}{c}$$

$$x (\Delta S_{Lo.oo} + \Delta S_{L1.oo} + \Delta S_{L1.O1})$$

$$V_{O1} = V_{Lo} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{Lo} - 2H_{oo} - H_{O1}) - \frac{g}{c} (\Delta S_{Lo.oo} + \Delta S_{L1.oo} + \Delta S_{L1.O1})$$

$$(\Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01})$$

3/ 01 - L2 :

$$dH + \frac{c}{g} dV + \Delta S = 0$$

$$H_{L2} - H_{01} = -\frac{c}{g} (V_{L2} - V_{01}) - \Delta S_{L2.01}.$$

$$V_{L2} = V_{01} - \frac{c}{g} (H_{L2} - H_{01} + \Delta S_{L2.01}) = V_{01} - \frac{g}{c} (H_{L2} - H_{01}) - \frac{g}{c} \Delta S_{L2.01}$$

Tenant compte de (2), nous avons :

$$V_{L2} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} - 2H_{00} - H_{01}) - \frac{g}{c} (\Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01}) - \frac{g}{c} (H_{L2} - H_{01}) - \frac{g}{c} \Delta S_{L2.01}.$$

$$V_{L2} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} - 2H_{00} - H_{01} + H_{L2} - H_{01}) - \frac{g}{c} \times (\Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01}).$$

$$V_{L2} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + H_{L2} - 2H_{00} - 2H_{01}) - \frac{g}{c} (\Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01}).$$

q4/ L.2 - 0.2 :

$$H_{02} - H_{L2} = \frac{c}{g} (V_{02} - V_{L2}) + \Delta S_{0.2L2}$$

$$V_{02} = V_{L2} + \frac{g}{c} (H_{02} - H_{L2}) - \frac{g}{c} \Delta S_{0.2L2}.$$

Tenant compte de (3).

$$V_{02} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + H_{L2} - 2H_{01}) - \frac{g}{c}$$

$$\left( \Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01} \right) + \frac{g}{c} (H_{02} - H_{L2}) - \frac{g}{c} \Delta S_{02.L2}$$

$$V_{02} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + 2H_{00} - 2H_{01} - H_{02}) - \frac{g}{c} \left( \Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01} + \Delta S_{02.L2} \right) /$$

5/ 02 - L3 :

$$dH + \frac{c}{g} dv + \Delta S = 0$$

$$V_{02} - V_{L3} = \frac{g}{c} (H_{L3} - H_{02}) - \Delta S_{02.L3}$$

Tenant compte de (4).

$$V_{L3} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + 2H_{L2} + 2H_{00} - 2H_{01} - 2H_{02} + H_{L3}) - \frac{g}{c} \left( \Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01} + \Delta S_{02.L2} + \Delta S_{02.L3} \right)$$

6/ L3 - 03 :

$$H_{03} - H_{L3} - \frac{c}{g} (V_{03} - V_{L3}) - \Delta S_{03 - L3} = 0$$

$$V_{03} = V_{L3} - \frac{g}{c} (H_{L3} - H_{03}) - \frac{g}{c} \Delta S_{03.L3}$$

tenant compte de (5) :

$$V_{03} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + 2H_{L2} + 2H_{L3} - 2H_{00} - 2H_{01} - 2H_{02} - H_{03}) - \frac{g}{c} \left( \Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01} + \Delta S_{02.L2} + \Delta S_{02.L3} + \Delta S_{03.L3} \right)$$

7/ 0.3 - L 4

$$H_{03} - H_{L4} + \frac{c}{g} (V_{03} - V_{L4}) + \Delta S_{03.L4} = 0.$$

$$V_{L4} = V_{03} + \frac{g}{c} (H_{03} - H_{L4}) - \frac{g}{c} \Delta S_{03.L4}.$$

Tenant compte de (6):

$$V_{L4} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + 2H_{L2} + 2H_{L3} - H_{03} + H_{L4} - 2H_{00} - 2H_{01} - 2H_{02} - H_{03}) - \frac{g}{c} (\Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{02.L2} + \Delta S_{02.L3} + \Delta S_{03.L3} + \Delta S_{03.L3} + \Delta S_{03.L4}).$$

$$V_{L4} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + H_{L0} + 2H_{L2} + 2H_{L3} + H_{L4} - 2H_{00} - 2H_{02} - \Delta S_{02.L3} + \Delta S_{03.L3} + \Delta S_{03.L4}).$$

La dernière équation peut se mettre comme suit :

$$V_{L4} = V_{L0} - \frac{g}{c} (2H_{L1} + 2H_{L2} + 2H_{L3} + H_{L0} + H_{L4}) - \frac{g}{c} \times (-2H_{00} - 2H_{01} - 2H_{02} - 2H_{03} + \Delta S_{L0.00} + \Delta S_{L1.00} + \Delta S_{L1.01} + \Delta S_{L2.01} + \Delta S_{02.L2} + \Delta S_{02.L3} + \Delta S_{03.L3} + \Delta S_{03.L3} + \Delta S_{03.L4}).$$

$$-\frac{K}{c} \left( \frac{v_{Li}^2}{2g} + \frac{v_{oi}^2}{2g} - \frac{K}{c} \left( \frac{K}{2} + 1 \right) \left( \frac{v_{Lo}^2}{2g} + \frac{v_{Li}^2}{2g} \right) \right)$$

$$V_{L4} = V_{L0} + \frac{2g}{c} (H_{00} + H_{01} + H_{02} + H_{03}) - \frac{2g}{c} (H_{L1} + H_{L2} + H_{L3}) -$$

$$\frac{K}{c} (H_{L0} + H_{L4}) - \frac{K}{c} \sum \Delta s$$

$$\sum \Delta s = \frac{K}{2} \left[ \frac{v_L^2}{2g} + \frac{v_{00}^2}{2g} + \frac{v_L^2}{2g} + \frac{v_{00}^2}{2g} + \frac{v_{L1}^2}{2g} + \frac{v_{01}^2}{2g} + \frac{v_{L2}^2}{2g} + \frac{v_{01}^2}{2g} \right. \\ \left. + \frac{v_o^2}{2g} + \frac{v_{L0}^2}{2g} + \frac{v_{02}^2}{2g} + \frac{v_{L3}^2}{2g} + \frac{v_{03}^2}{2g} + \frac{v_{L3}^2}{2g} + \frac{v_{03}^2}{2g} + \frac{v_{L4}^2}{2g} \right]$$

$$\sum \Delta s = \frac{K}{2} \left[ \frac{v_{L0}^2}{2g} + 2 \frac{v_{00}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L1}^2}{2g} + \frac{2 v_{01}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L2}^2}{2g} + 2 \frac{v_{02}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L3}^2}{2g} + \right. \\ \left. 2 \frac{v_{03}^2}{2g} + \frac{v_{L4}^2}{2g} \right]$$

$$\Delta s = \frac{K}{2} \left( \frac{v_{L0}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L1}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L2}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L3}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L4}^2}{2g} \right) + \frac{K}{2} \\ \left[ 2 \frac{v_{00}^2}{2g} + 2 \frac{v_{01}^2}{2g} + 2 \frac{v_{02}^2}{2g} + 2 \frac{v_{03}^2}{2g} \right]$$

$$\Delta s = \frac{K}{2} \left( 2 \frac{v_{L1}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L2}^2}{2g} + 2 \frac{v_{L3}^2}{2g} \right) + \frac{K}{2} \left( \frac{v_{L0}^2}{2g} + \frac{v_{L4}^2}{2g} \right) + \frac{K}{2} \\ \left( 2 \frac{v_{00}^2}{2g} + 2 \frac{v_{01}^2}{2g} + 2 \frac{v_{02}^2}{2g} + 2 \frac{v_{03}^2}{2g} \right)$$

$$\sum \Delta s = K \sum_{i=1}^{i-1} \frac{v_{Li}^2}{2g} + K \sum_{i=0}^{i-1} \frac{v_{oi}^2}{2g} + \frac{K}{2} \left( \frac{v_L^2}{2g} + \frac{v_{Li}^2}{2g} \right)$$

en posant  $H = h + \frac{v^2}{2g}$

Nous obtenons d'une façon générale, en tenant compte de (7) :

$$v_{Li} = v_{Lo} - \frac{2g}{c} \left[ \sum_{\lambda=0}^{i-1} h_{Li} - \sum_{\lambda=0}^{i-1} h_{oi} + \frac{h_{Lo} + h_{Li}}{2} \right] - \frac{2g}{c} \times$$

$$\left[ \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{v_{Li}^2}{2g} - \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{v_{oi}^2}{2g} \right] - \frac{g}{c} K \left[ \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{v_{Li}^2}{2g} + \sum_{\lambda=0}^{i-1} \frac{v_{oi}^2}{2g} \right]$$

$$- \frac{g}{c} \left( \frac{K}{2Q} + 1 \right) \left( \frac{v_{Lo}^2}{2g} + \frac{v_{oi}^2}{2g} \right)$$