

UNIVERSITÉ D'ALGER

7/77

ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

NESC

DEPARTEMENT MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

BOITE DE VITESSES

Proposé par :

ME PIEROZAK

Etudié par :

A. CHERAIT

M.A. DJABELLA

Année : 1976-1977

REMERCIEMENTS

DANS LE CADRE DE NOTRE TRAVAIL, ET PAR LA MEME
DE NOS ETUDES, IL NOUS EST AGREABLE DE PRESENTER A
TOUS CEUX QUI ONT CONTRIBUE A NOTRE FORMATION , NO-
TRE PLUS SINCERE RECONNAISSANCE ET NOS CHALEUREUX
REMERCIEMENTS . EN PARTICULIER AUX MEMBRES DU JURY.

NOUS TENONS A FAIRE FIGURER CETTE PAGE
EN L'HONNEUR DE MONSIEUR PIEROZAK QUI A BIEN
VOULU PATRONNER NOTRE TRAVAIL ET EN LEQUEL NOUS
RECONNAISSONS UN PROFESSEUR DE HAUTE VALEUR ,
DONT LES ENSEIGNEMENTS SONT INOUBLIABLES.

DU FOND DE NOUS MEMES, NOUS LUI DI-
SONS : MERCI !

A/-ETUDE THEORIQUE.

- CHAPITRE (I) : RAPPELS DE MECANIQUE THEORIQUE.

- I:- Mouvement d'un plan sur un plan: I
 - Centre instantané de rotation.
 - Base et roulanta .
 - Courbe enveloppe.
- II:- Propriétés du C.I.R: 6
 - Détermination d'un profil.
 - Détermination des enveloppes.

- CHAPITRE (II) : LES ENGRENAGES.

- I: - Surfaces primitives: 9
 - Engrenages parallèles:
 - a/ extérieurs
 - b/ intérieurs
 - Engrenages concourants:
 - a/ extérieurs
 - b/ intérieurs
- II: - Surfaces de dentures: I4
 - Engrenages parallèles:
 - Détermination des profils conjugués
 - a/ Méthode générale
 - b/ Premier procédé
 - c/ Tracé de POCELET
 - d/ " " REULEAUX

- CHAPITRE (III) : ETUDE DE L'ENGRENEMENT.

- I: - Continuité de l'engrènement: I7
 - Période d'approche, période de retrait.

- Calcul du rapport de conduite

- II: - Interférences: 22

-III: - Glissement:..... 24

- Etude générale.

- Glissement relatif total du début à la fin de l'action.

- Glissement spécifique

- CHAPITRE (IV): CORRECTION DE DENTURE.

- I: - Mécanisme géométrique: 30

- Crémaillère génératrice.

- Denture normale , denture normalisée.

- " Déportée.

- Entraxe normal.

- II; - Déport de denture: 32

- Déport sans variation d'entraxe:

a/ engrenages extérieurs.

b/ " intérieurs.

- Déport avec variation d'entraxe:

a/ engrenages extérieurs à denture droite.

b/ " extérieurs " hélicoidale.

- III:- Equilibrage du glissement: 35

- CHAPITRE (V): EFFORTS SUR LES ARBRES
DENTURE
PALIERS

- I :- Efforts sur la denture (droite) 37

- II :- " " les arbres et paliers.

- CHAPITRE (VI): CALCUL DE LA DENTURE.

• I :- Rupture: 42

- Engrenages parallèle à denture droite.
 - a/ méthode de LEWIS.
 - b/ " du point de contact unique.
- Formule de base statique pour la denture droite.
- Denture hélic oïdale.
- Engrenages concourants.

- II:- Pression superficielle: 60

A/- Etude générale:

- Engrenages parallèles à denture droite.(extérieurs)
- " " " " ,intérieurs
- " extérieurs à denture hélicoidale.

B /- Formule de base statique

- Denture droite
- " hélicoidale.
- Engrenages intérieurs.
- " concourants à denture droite.

C/- Facteurs correctifs dynamiques.

- Divers facteurs.
- Formule définitive de vérification à la pression superficielle.

- III:- Grippage: 70

- Piquûtes ou "pitting".
- Grippage.
 - a/ influence de la pression superficielle.
 - b/ facteurs de grippages.
 - c/ "flash température ".

- CHAPITRE (VII): CHOIX DES MATERIAUX.

- I;- Généralités: 75

- II :- Les aciers: 75

- généralités.
- Désignation normalisée.

- III:- Bronzes et fontes: 79

- CHAPITRE (VIII):RENDEMENTS DES ENGRENAGES.

- I:- Engrenages parallèles: 80

- II :- Engrenages concourants; 82

B/- BOITE DE VITESSES. RESULTATS DES
CALCULS.

- I :- Introduction: 84

- II:- Choix du réseau: 85

- III:- Vérifications à la rupture et à la pression superficielle

A/- Rupture: 90

B/- Pression superficielle: 94

- IV :- Facteurs de grippage: 96

- Facteur: P.V.

- Facteur: P.V.T.

- Profondeur et contrainte de cisaillement maxi.

- Vitesses de rolement et de glissement.

- "Flash température".

- V :- Dimensionnement

A/- Des arbres: I00

B/- Etude aux vibrations: II2

C/- Roulements: II6

- VI :- Etude du graissage: II8

- VII:- RENDEMENTS: II9

- VIII:- Etude du levier: I20

- IX:- Etude du carter: I21

- XI:- Conclusion: I22

A - ETUDE THÉORIQUE DES ENGRENAGES

I) Rappels de mécanique rationnelle:

I.I: ~~M~~Mouvement d'un plan sur un plan

I.I.I: Centre instantané de rotation:

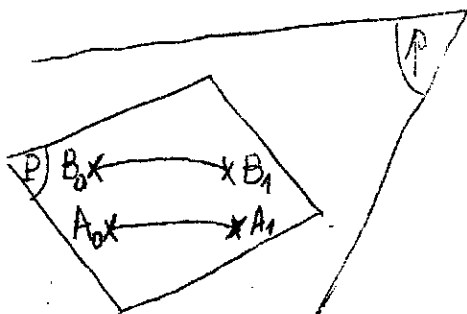


Fig: I.a

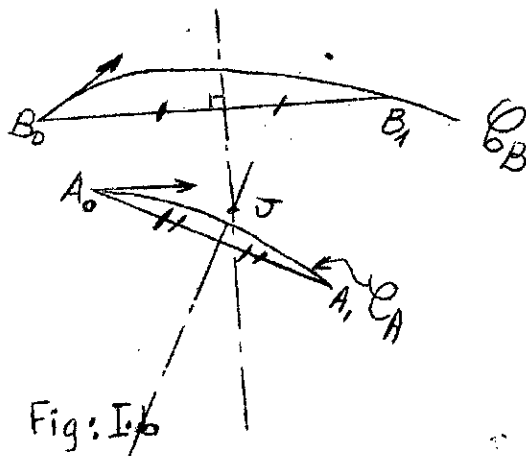


Fig: I.b

Considérons un plan fixe (p) sur lequel se déplace un plan (P) restant, à chaque instant, en coïncidence avec lui.

Soit alors un segment de droite du plan (P). Pour étudier son mouvement, nous le repérons comme suit:

- au temps (t): A_0B_0
- au temps ($t + \Delta t$): A_1B_1 .

Ile est très facile de voir que nous ^{pourrons} ramener le plan (P) à sa position de départ en effectuant une rotation simple de centre (J), telle que:

le point (J) soit l'intersection des médianes de A_0B_0 A_1B_1 (voir schéma Fig. I.b), où:

- C_A : trajectoire du point A (de A_0 à A_1)
- C_B : " " " " B (de B_0 à B_1)

Si maintenant nous faisons tendre (Δt) vers 0, ce qui se traduit physiquement par la réduction du déplacement et par la même des longueurs A_0A_1 et B_0B_1 , nous aboutissons à la ^{notion} de rotation instantanée autour d'un point (I) appelé: centre instantané de rotation.

Le point (I) considéré est la limite du point (J) quand (Δt) tend vers zéro.

La rotation instantanée ainsi définie peut être caractérisée par un vecteur ($\vec{\Omega}$) normal, en (I), aux plans: (P) et (p).

A l'instant (t) considéré, tout point M de (P) a une vitesse (\vec{v}):

- v : appartient à (P), perpendiculaire à IM.

- $v = \dot{I}M$.

Il est clair que le vecteur v est tangent à la trajectoire du point M. Nous en tirons la conséquence suivante:

- Les normales, à (t) donné, aux trajectoires des points de (P) concourent toutes au C.I.R.

I.I.2: Base et roulante du mouvement:

Comme nous l'avons défini précédemment, le point (I) appartient au plan (P). Si maintenant nous marquons par (i) les points successifs de (p) correspondants à ceux, (I), de (P) lors du mouvement, nous obtenons ^{les} courbes; voir Fig. I.c

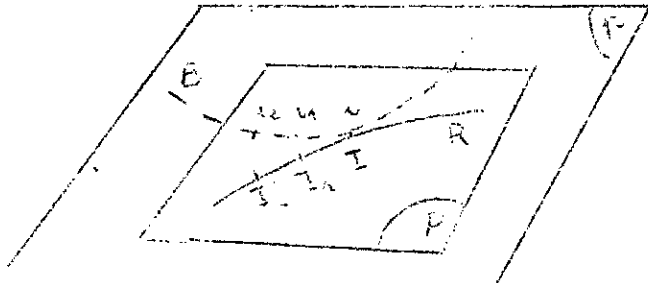


Fig. I.c

On démontre alors que durant le mouvement de (P) sur (p), la courbe (R) roule sans glisser sur la courbe (B).

Supposons, maintenant, que nous ayons un mobile quelconque (un insecte par exemple), pendant le mouvement étudié, se déplaçant sur (R) de telle sorte qu'il se trouve, à tout instant, au point (i) de la courbe (B). Nous définissons alors deux trajectoires:

- Une trajectoire relative, qui est (R) dans (P).

- Une trajectoire absolue, qui est (B) dans (p).

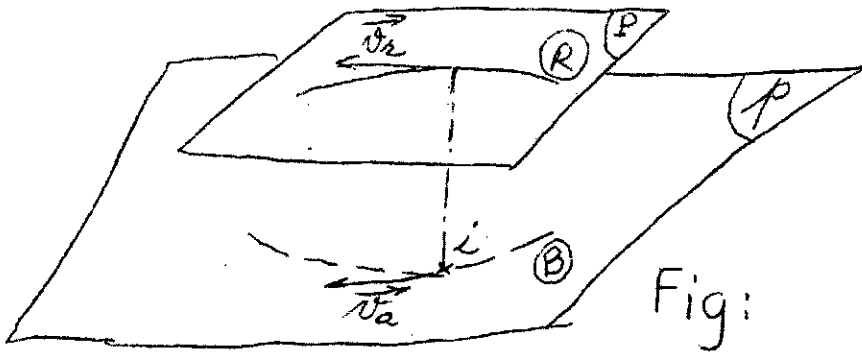
aux quelles nous associons les vitesses respectives:

V_r = vitesse relative.

V_a = " absolue.

Le théorème de la composition des vitesses nous dit;

$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ où V_e = vitesse d'entraînement. Pour expliquer les mouvements, écartons les plans: (P) et (p) - voir Fig. ci-après -



Nous avons les mouvements suivants:

- a/ Un mouvement relatif du mobile (en coincidence avec I)
- b/ " " d'entraînement du point (I) par rapport à (i)
- c/ " " absolu du point (I) par rapport au plan fixe.

Mais comme les points (I) et (i) sont confondus à l'instant (t), de plus (I) étant le centre instantané de rotation au même instant, la vitesse d'entraînement V_e du point (I) est nulle (le centre d'une rotation étant le seul point invariant du mouvement). Nous obtenons:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \implies \vec{V}_a = \vec{V}_r$$

Comme \vec{V}_a et \vec{V}_r ont un point commun (I, i), ils sont confondus;;

En tenant compte du fait qu'ils sont tangents, respectivement à (B) et (R), ces deux trajectoires roulent donc l'une sur l'autre.

Il nous reste maintenant à voir le non glissement -voir Fig. I.d -

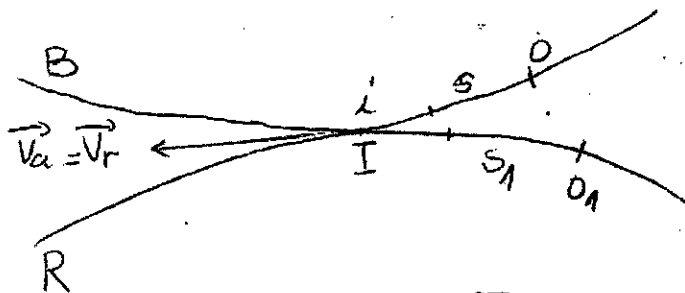


Fig: I. d

Soit le schéma précédent

$$\left. \begin{array}{l} S = \overbrace{O_i I} \\ S_I = \overbrace{O_I I} \end{array} \right\} \text{ au départ } iO_I = OI = 0$$

Nous avons vu: $\vec{V}_a = \vec{V}_r$ ce qui peut se traduire en notation différentielle par :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds_I}{dt} \quad \text{que nous transcrivons en:}$$

$ds \cdot dt = ds_I \cdot dt$ puisque la longueur de l'arc parcouru est une fonction du temps, intégrons par rapport à cette variable; nous obtenons :

$$s = S_I + k \quad (A)$$

Comme au temps $(t) = 0$ nous avons $O_i = O_I \neq 0$, donc $S = S_I = 0$ d'où $k = 0$. L'égalité (A) devient: $S = S_I$.

Nous pouvons dire alors qu'il n'y a pas de glissement.

I.1.3: COURBE ENVELOPPE

Considérons une courbe (C) quelconque appartenant à (P) différente de la roulante (R) . Lors du mouvement (P) sur (p) , la roulante (R) prend diverses positions ayant une ~~tangente~~ ^E commune dans (P) tangente à chacune d'elle en même temps.

Une telle courbe (E) , appelée enveloppe, possède la propriété suivante:

La normale au point de contact M d'une courbe (C) du plan mobile avec son enveloppe (E) , passe par le centre instantané de rotation; de plus cette courbe roule ^{en} glissant sur son enveloppe.

Démonstration:

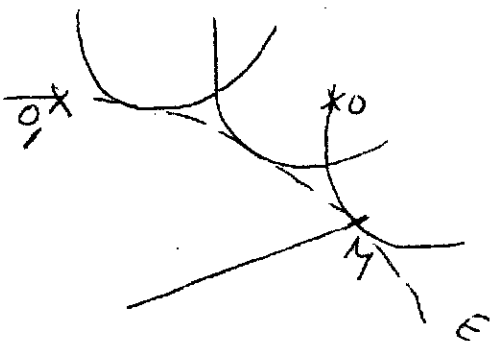


Figure: I.e.

Reprenons le cas de l'insecte, se déplaçant cette fois sur la courbe (\mathcal{C}) de manière à être à tout instant en M.

$$M = (\mathcal{C}) \cap (E)$$

La décomposition du mouvement sera alors:

$$V_r = \text{tangente à } (\mathcal{C})$$

$$V_a = \text{ " " à } (E)$$

de telle sorte que ces deux vitesses soient portées par le même support (\vec{A}) - puisque (\mathcal{C}) et (E) sont tangentes. La vitesse d'entraînement du point (M) de (P) , par rapport au plan fixe (p) est égale à la vitesse d'entraînement de l'insecte.

Appelons par (r) la distance IM et par $(\vec{\Omega})$ la vitesse angulaire de la rotation instantanée; nous obtenons la relation suivante:

$$|\vec{V}_e| = |\vec{\Omega}| \cdot r \text{ avec } \vec{V}_e \text{ perpendiculaire à } \vec{IM}$$

d'autre part, nous savons:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

comme \vec{V}_a et \vec{V}_r sont sur le même support (\vec{A}) il faut que \vec{V}_e le soit. Nous concluons donc que \vec{IM} est perpendiculaire à la tangente commune aux deux courbes (\mathcal{C}) et (E) .

Vitesse de glissement:

Soient alors:

$$OM = s$$

$$O_{IM} = s_I$$

tels que à $(t) = \text{zéro}$; $(0) \equiv (O_I)$

Nous avons:

$$V_a = \frac{ds_I}{dt}$$

$$V_r = \frac{ds}{dt}$$

$$V_e = V_a - V_r = \frac{ds_I}{dt} - \frac{ds}{dt} \text{ qui est la vitesse de}$$

glissement de (\mathcal{C}) sur (E) .

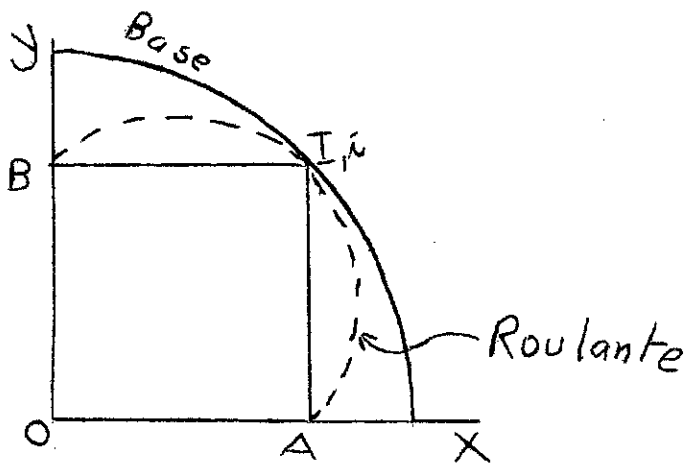
Cependant nous avons déterminé plus haut:

$$|\vec{V}_e| = |\vec{\Omega}| \cdot IM$$

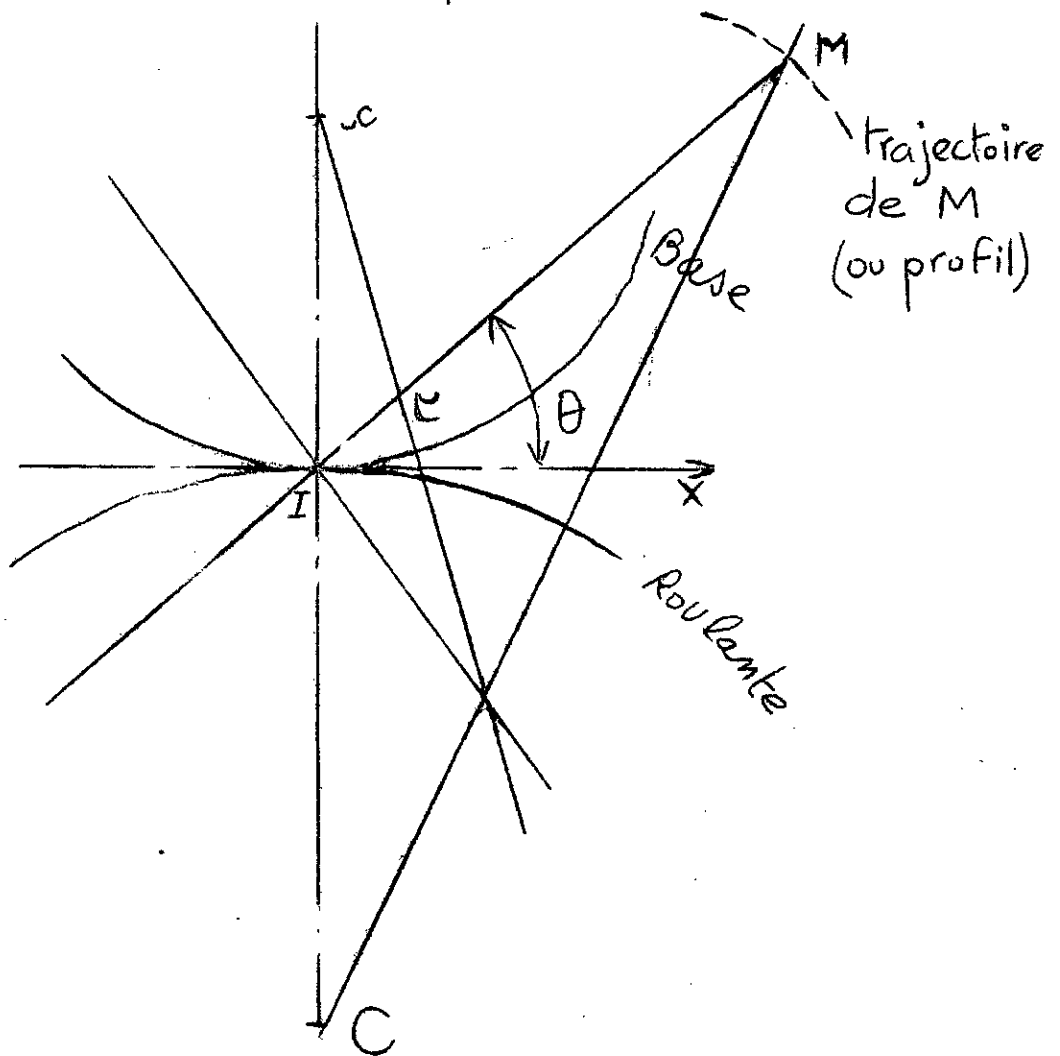
Conclusion:

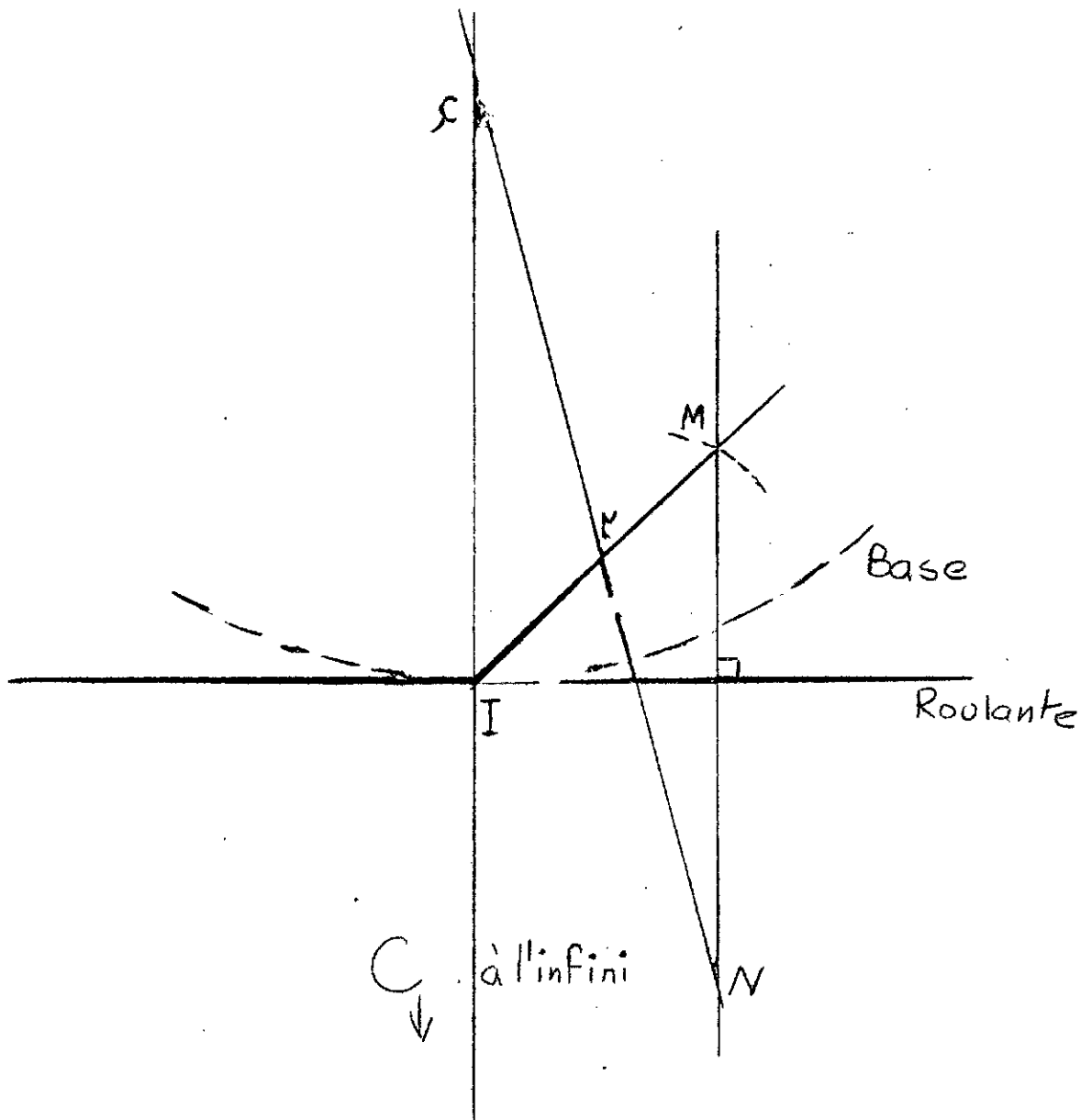
(\mathcal{C}) roule en glissant sur son enveloppe (E) ; la valeur de la vitesse de glissement, en un point M étant égale au produit de la vitesse angulaire de la rotation instantanée par la distance du point M au C.I.R. (I, i) . (5)

I.2: Propriétés du C.I.R

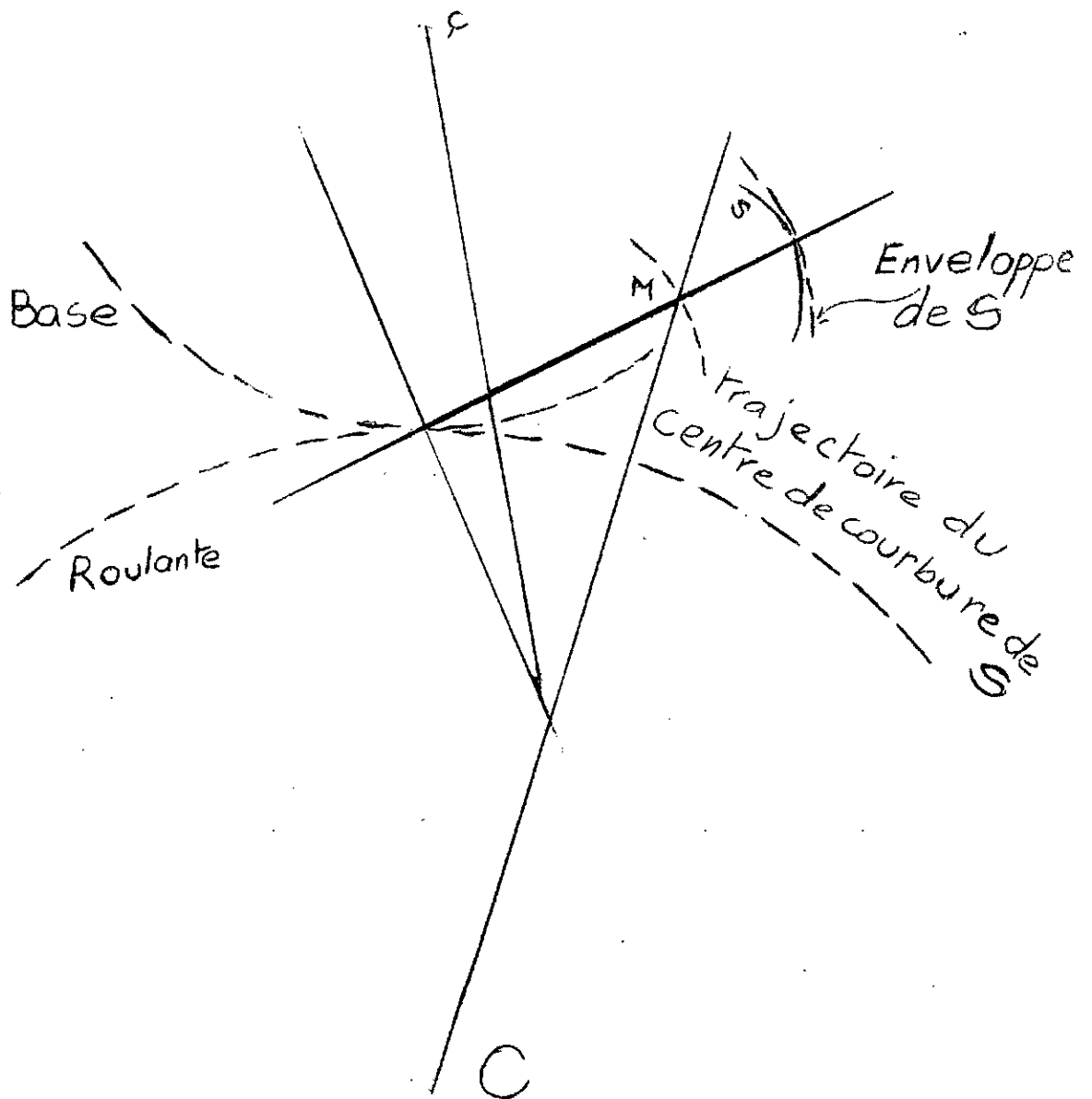


Determination d'un profil





Determination des enveloppes



La création des engrenages a pour but de transmettre un mouvement de rotation entre deux ou plusieurs arbres. La position dans l'espace, de deux d'entre eux consécutifs, détermine la classe des engrenages, nous en avons trois:

- a: Engrenages parallèles: les arbres sont //.
- b: " concourant: " " " X.
- c: " gauches : la position relative des deux arbres est quelconque.

L'application de cette troisième classe étant quasi inexistante (sinon d'un intérêt académique) nous limiterons l'étude aux deux premières classes.

II.I SURFACES PRIMITIVES

II.I.I: Engrenages parallèles:

Ils existent deux grands types d'engrenages parallèles

- Engrenage // intérieur
- " " extérieur

La différence réside dans la conservation du sens de rotation pour les premiers et de l'inversion de sens pour les seconds.

a/ Parallèles extérieurs:

les sens de rotation sont opposés.

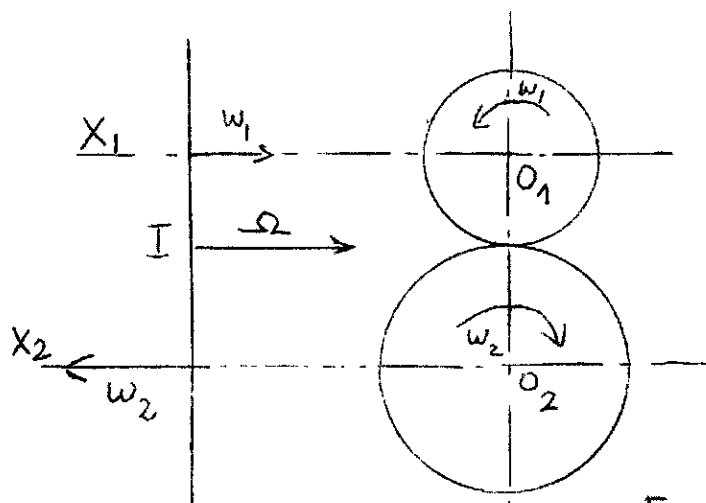


Fig II-a

Pour baser notre étude sur ce qui a été fait précédemment, associons à X_1 le plan (P) qui lui est normal en O_1 et à X_2 le plan (p), qui lui est normal en O_2 . Ainsi définis les plans (P) et (p) coïncident. L'étude se ramène donc à celle de deux plans animés de deux rotations centrées en (O_1) et (O_2). Pour retrouver le cas du chapitre précédent, il suffit de donner à l'ensemble des deux plans une rotation telle que:

-son centre soit : O_2

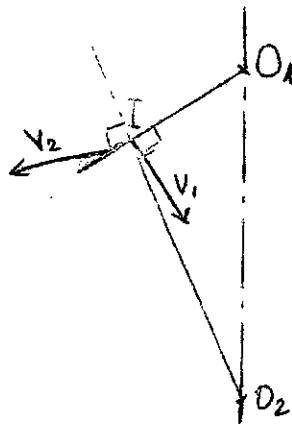
-sa vitesse angulaire: $\vec{W} = -\vec{W}_2$

Ainsi, le plan (p) est au repos dans un tel système.

L Mouvement de (P)/(p) se caractérise par les deux rotations \vec{W}_1 et $\vec{W} = -\vec{W}_2$ parallèles et de même sens que nous pouvons ramener à tout instant, à une rotation instantanée autour du point (I) et de vitesse ($\vec{\Omega}$). Ceci en vertu de la loi de composition de deux rotations de même sens et parallèles.

Nous savons que la vitesse du C.I.R (I) est nulle.

$\vec{V}(I) = 0$, mais $\vec{V}(I)$ est la somme des vitesses dues aux rotations: \vec{W}_1 et \vec{W}_2 . Pour exprimer cela, supposons (I) extérieur au segment : O_1O_2 (Fig. II.b)



$\vec{W}_1 \rightarrow \vec{V}_1$ perpendiculaire à O_1I
 $\vec{W}_2 \rightarrow \vec{V}_2$ " " à O_2I

avec

$$|\vec{V}_1| = |\vec{W}_1| \cdot O_1I$$

$$|\vec{V}_2| = |\vec{W}_2| \cdot O_2I$$

DE ce qui précède, nous avons:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{0} \text{ donc } \vec{V}_1 = -\vec{V}_2$$

avec un même support (\hat{A}) pour ces deux vecteurs; ce qui se traduit par:

(A) perpendiculaire à $O_I I$

(A) " " à $O_2 I$

Nous concluons alors que les segments $O_I I$ et $O_2 I$ sont sur la même droite, le point (I) est aligné avec O_I et O_2 .

La position du C.I.R est repérée sur la droite $O_I O_2$ par la relation suivante:

$$\begin{aligned} |\vec{V}_I| &= |\vec{V}_2| \\ |\vec{W}_I| \cdot IO_I &= |\vec{W}_2| \cdot IO_2 \quad \text{ou encore:} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{IO_I}{IO_2} = \frac{|\vec{W}_2|}{|\vec{W}_I|} = \text{constante}} \quad (I)$$

Cette expression fixe le point (I) sur $O_I O_2$. De même la rotation instantanée ($\vec{\Omega}$) autour de (I) sera:

$$|\vec{\Omega}| \cdot O_I I = |\vec{W}_2| \cdot O_I O_2 \quad (2)$$

En réajustant cette formule:

$$\boxed{\frac{|\vec{\Omega}|}{|\vec{W}_2|} = \frac{O_I O_2}{IO_I} = \frac{O_I I + IO_2}{IO_I} = 1 + \frac{IO_2}{IO_I}}$$

Or nous pouvons déduire la valeur de $\frac{IO_2}{IO_I}$ de l'expression (I)

$$\Rightarrow \frac{|\vec{\Omega}|}{|\vec{W}_2|} = \frac{|\vec{W}_I| + |\vec{W}_2|}{|\vec{W}_2|} \quad \text{ou encore: } \vec{\Omega} = \vec{W}_I + \vec{W}_2$$

Nous pouvons dire donc: puisque (I) est fixé par rapport à (O_I) et à (O_2)

- la base (B) du mouvement est une circonférence de centre (O_2) et de rayon IO_2 .

- la roulante (R), une circonférence de centre (O_I) et de

(II)

rayon IO_1 .

En conclusion:

Le mouvement des deux plans (p) et (P) se ramène au roulement sans glissement de ces deux circonférences l'une sur l'autre: ce sont les circonférences primitives de l'engrenage.

Un raisonnement dans l'espace nous aurait conduit à des surfaces primitives.

b/ Parallèles intérieurs:

Dans ce type d'engrenages, le sens de rotation du pignon se retrouve sur la roue. La théorie d'un tel système est identique à la précédente avec cependant:

- (I) extérieur à O_1O_2

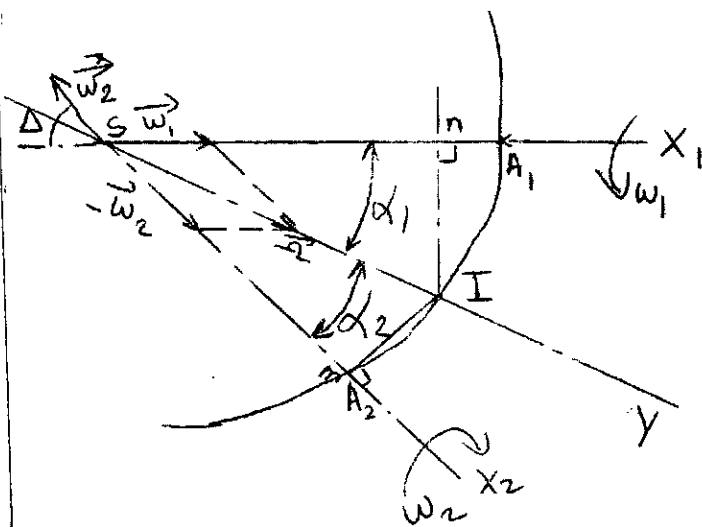
$$- |\vec{\Omega}| = |\vec{W}_1| - |\vec{W}_2|$$

II.1.2: ENGRENAGES CONCOURANTS:

a/ Engrenages extérieurs:

Dans ce qui suit il est plus pratique de considérer le mouvement d'une sphère par rapport à une seconde et nous utiliserons le même raisonnement que pour le cas du mouvement plan sur plan.

Soient alors deux sphères caractérisées par les axes X_1 et X_2 concourants. L'engrenage considéré est extérieur, les vitesses de rotations \vec{W}_1 ET \vec{W}_2 sont représentées par la Fig. II.c



Nota: Sur une figure bien faite, les pts m et A_2 sont distincts.

Fig II-c

$R_I = R_1$ distance de I à X_1

$R_2 = R_2$ " de I à X_2

Soient les deux sphères S_1 et S_2 telles que :

- S_1 : Centrée en (S), de rayon quelconque SA_1 associé à X_1

- S_2 : " " (S) , " $SA_2 = SA_1$, associé à X_2 .

Ramenons ce problème dans l'espace à un problème dans le plan; en coupant les deux sphères par le plan: $(SX_1; SX_2)$ après avoir immobilisé la sphère S_2 liée à X_2 en communiquant au système une rotation autour de X_2 opposée à \vec{W}_2 . Ainsi, le mouvement relatif de S_1/S_2 est le résultat de deux rotations \vec{W}_1/X_1 ET $-\vec{W}_2/X_2$.

Le mouvement résultant est une rotation déterminée par la construction du parallélogramme (Fig. II.c). Nous retrouverons ceci par le raisonnement suivant:

La rotation de S_1/S_2 donne naissance au C.I.R (I) appartenant à S_1 , tel que:

$$\begin{array}{l} \vec{W}_1: \longrightarrow \vec{V}_1 \text{ AU point (I).} \\ \vec{W}_2: \longrightarrow \vec{V}_2 \text{ " " (").} \end{array}$$

Comme (I) a une vitesse nulle, alors nous pouvons écrire:

$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$ ou encore: $\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$, avec pour valeurs des vitesses:

$$\begin{array}{l} \vec{V}_1 = R_1 \cdot \vec{W}_1 \\ \vec{V}_2 = R_2 \cdot \vec{W}_2 \end{array} \quad \text{ce que nous écrivons: } R_1 \cdot \vec{W}_1 = R_2 \cdot \vec{W}_2. \quad (2)$$

Les vecteurs vitesses \vec{V}_1 ET \vec{V}_2 ont même support ce qui implique (I) entre les points A_1 et A_2 . D'autre part la position exacte de ce point est donnée par relation suivante:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{|\vec{W}_2|}{|\vec{W}_1|} \quad (3)$$

Si maintenant nous faisons les projections orthogonales sur les axes X_1 et X_2 nous obtenons:

$$\begin{array}{l} R_1 = IS \cdot \sin \alpha_1 \\ R_2 = IS \cdot \sin \alpha_2 \end{array}$$

ce qui nous permet d'écrire:

$$(I3)$$

a/

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{|\vec{W}_2|}{|\vec{W}_1|}$$

$$\frac{|\vec{W}_1|}{\sin \alpha_2} = \frac{|\vec{W}_2|}{\sin \alpha_1}$$

b/

L'axe SY occupe une position fixe et bien déterminée. Il est appelé axe instantané de rotation.

Les positions de (I) par rapport à X_1 et X_2 étant invariantes, les bases fixe et roulante du mouvement sont alors des cercles inscrits sur les deux sphères S_1 et S_2 , tels que :

$-(O_2, R_2)$ appelés cercles primitifs. Comme nous pouvons le constater, ils sont extérieurs l'un à l'autre et d'axes concourants

d'où le nom de l'engrenage.

La vitesse de rotation instantanée: est donnée par

$$|\vec{\Omega}| = (W_1^2 + W_2^2 + 2W_1W_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2))^{1/2}$$

b/ Engrenage intérieur:

Les résultats sont identiques aux précédents de part le raisonnement. La seule différence réside dans l'expression de la vitesse angulaire:

$$|\vec{\Omega}| = (W_1^2 + W_2^2 - 2W_1W_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2))^{1/2}$$

II.2. SURFACES DE DENTURES:

II.2.I: ENGRENAGES PARALLELES:

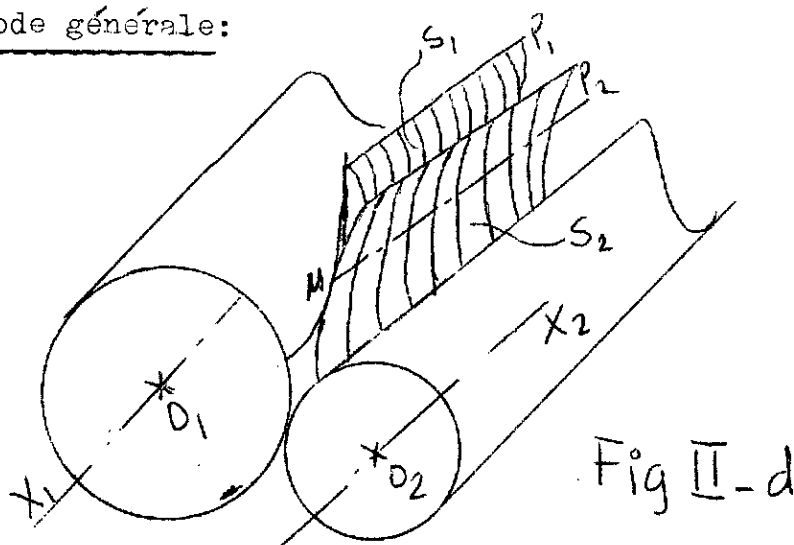
Parler de surfaces de dentures, c'est parler d'abord de profils de dentures; (on a simplement ramené le problème dans l'espace à un problème dans le plan.)

On appelle profil d'une dent, l'intersection d'une surface d'une dent avec le plan perpendiculaire à l'axe de la roue dentée.

Lors du mouvement, les surfaces de deux dents en contact restent tangentes. On dit alors que les profils sont conjugués.

a/-Determination des profils conjugués
par la méthode des enveloppes:

a.I./- Méthode générale:



Supposons connus, de part les calculs préalablement effectués, ^{des} cylindres primitifs d'axes X_I et X_2 .

Considérons une surface S_I liée, arbitrairement, à X_I . En faisant rouler sans glisser les deux cylindres primitifs l'un sur l'autre, la surface S_2 , enveloppe de S_I dans le mouvement, liée au cylindre d'axe X_2 , est la surface conjuguée de S_I (voir Fig. II.d).

Par là même, nous pouvons dire que le profil P_I est conjugué à P_2 . Ces derniers ont un point de tangence M ; en coupant S_I et S_2 par des plans (\perp) perpendiculaires aux axes X_I et X_2 , nous obtenons une suite de points M_i ($i=I, \dots, n$) définissant la ligne de contact.

Nous appliquerons cette méthode à certains cas particuliers de détermination de profils conjugués.

a.2./- Premier procédé: (Fig. II.e)

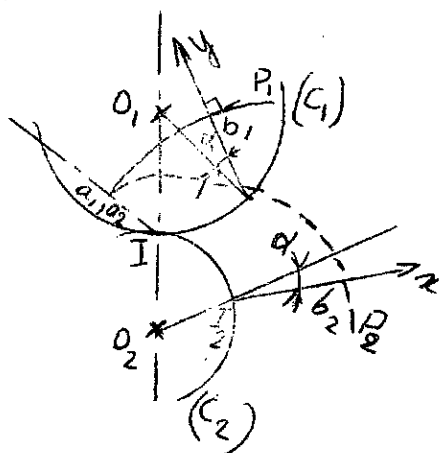


Figure: II-e.

Soient C_1 et C_2 , les cercles primitifs de l'engrenage, tangents en (I); (P_1) le profil générateur connu.

Nous pouvons connaître le point de contact de (P_1) avec son enveloppe (P_2) en utilisant la propriété du C.I.R (I), dans la position de la (Fig.II.e) : c'est le couple de points con fondus (a_1, a_2) obtenus en abaissant la normale issue de (I) sur le profil initial (P_1) .

Pour déterminer un autre point sur (P_2) , nous procédons comme ci après:

-Considérons deux points (I_1) appartenant à C_1 et (I_2) appartenant à C_2 tels que:

$$\text{les arcs } II_1 = II_2$$

Du point I_1 nous menons la perpendiculaire à (P_1) , nous obtenons $I_1 y \cap (P_1) = b_1$, le rayon $O_1 I_1$ forme avec $I_1 b_1$ un angle α . Traçons maintenant le rayon $O_2 I_2$ puis de I_2 une demi-droite $I_2 x$ telle que:

$(I_2 x, O_2 I_2)$ forme un angle $\alpha = \widehat{O_1 I_1 b_1}$, on obtient le point b_2 tel

$b_2 \equiv I_2 x \cap P_2$, ceci en portant $I_2 b_2 = I_1 b_1$. Nous avons ainsi un second point de (P_2) . Par la même méthode, nous pourrions générer tout le profil (P_2) .

a.3./- Tracé de POCELET:

Nous reprenons les memes cercles primitifs C_1 et C_2 que précédemment. Après avoir repérés les points I_1, I_1', I_1'', \dots de C_1 et I_2, I_2', I_2'', \dots de C_2 correspondants aux premiers, tels:

$$(I_1 I_1' = I_2 I_2'; II_1' = II_2', \dots)$$

Par une première normale issue de I_1 sur (P_1) , on obtient le point b_1 . Traçons un arc de cercle $(I_1, I_1 b_1)$ tangent à (P_1) , ce meme arc de cercle sera reproduit sur C_2 en le centrant sur I_2 . En continuant ainsi nous obtenons une série d'arcs decercle dont l'enveloppe sera le profil (P_2) cherché.

Seulement, la construction est fastidieuse et peu précise. Nous opterons pour une meilleure qui est la suivante:

a.4./- TRACE DE REULEAUX:

Ce procédé fait intervenir la ligne d'engrènement, lieu des points de contact successifs.

ETUDE DE L'ENGRENEMENT.

I. Continuité de l'engrènement:

Considérons la figure de la page 18, la droite $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$ est dite "ligne d'engrènement" ou encore " ligne d'action".

I.I: Période de retrait et d'approche:

Soit (I) le C.I.R. de l'engrènement supposé à denture droite et en développante de cercle.

a/ Période d'approche:

La période d'approche est celle qui est comprise entre le début du mouvement et le moment où le contact est en (I). On appelle longueur d'approche (l_a), la longueur du segment AI= à l'arc N_2Q_2 .

Si nous désignons par (δ_1), l'angle $N_2O_2Q_2$, la longueur d'approche sera :

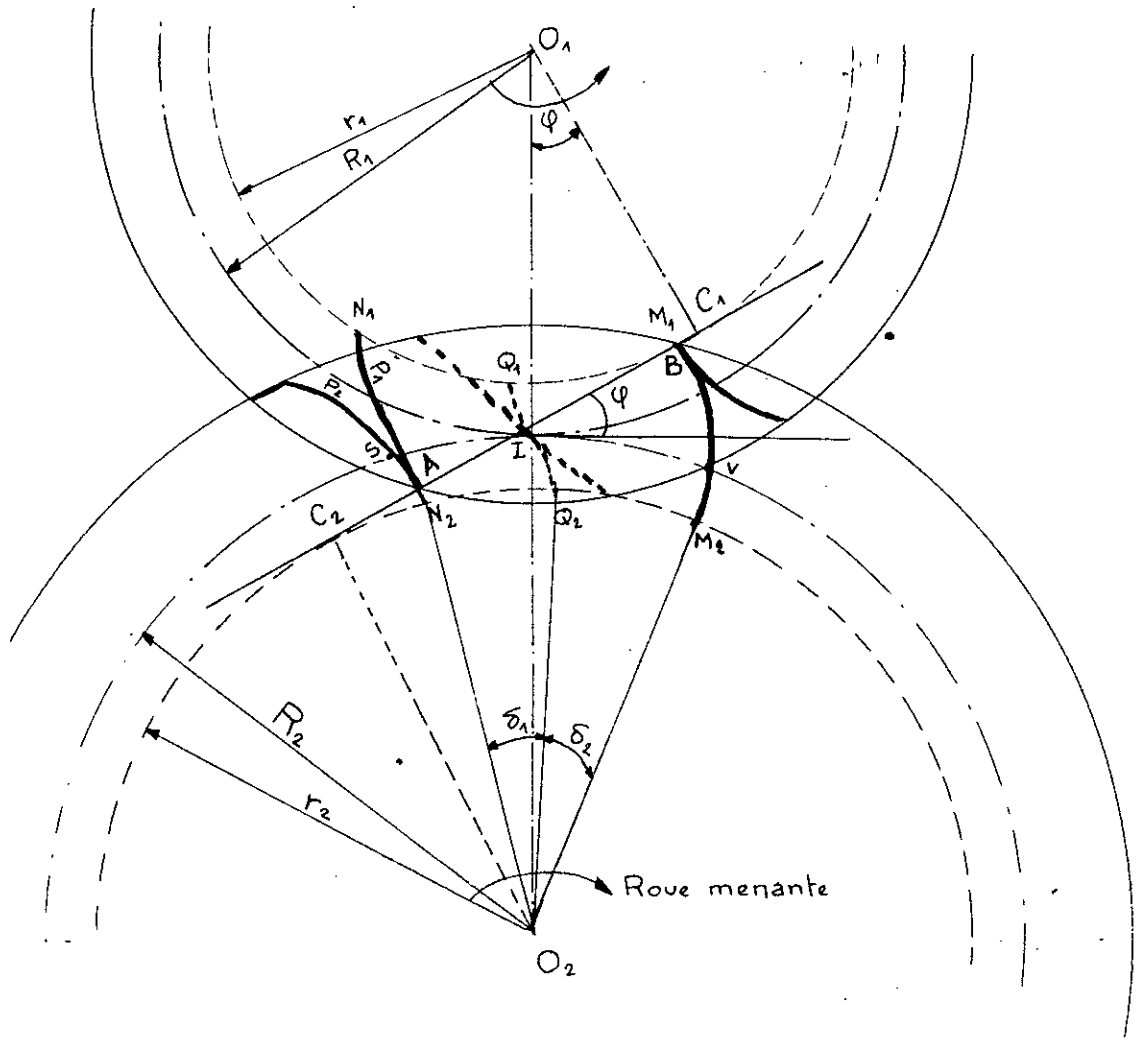
$$l_a = \int_{\delta_1} r_2 \quad \text{où } r_2 \text{ est le rayon d u cercle de base}$$

De la même façon, on définit un arc d'approche, noté (a_a), comme étant la longueur parcourue par un point de l'un, quelconque, des deux cercles primitifs pendant l'approche.

$$a_a = \int_{\delta_1} R_2$$

comme l'angle $\widehat{\mathbb{C}_2O_2I} = \varphi$, alors $r_2 / R_2 = \cos \varphi$; nous en déduisons la valeur de l_a

$$l_a = a_a \cdot \cos \varphi$$



Période comprise entre le moment où le point de contact est en (I) et la fin de l'action. ON définit la longueur de retrait l_r par:

$$l_r = \int_2 r_e$$

et de la même façon que précédemment, un arc de retrait a_r , par la longueur de l'arc parcouru par un point quelconque des deux cercles primitifs. pendant le retrait.

$$a_r = \int_2 R_2$$

$$a_r = l_r / \cos \varphi \quad \text{pour les mêmes raisons que plus haut}$$

On déduit alors:

$$a = a_a + a_r = \text{arc de conduite}$$

$a = l / \cos \varphi$ où $l = l_a + l_r$ dite longueur de retrait.

Pour assurer la continuité de l'engrènement, il faut que, lorsque les profils conjugués P_I et P_2 ne sont plus en contact, un autre couple de profils le soit déjà. Nous tirons de ceci:

AB plus grand que le pas normal.

a " " " " primitif

On appelle rapport de conduite (C), le rapport suivant:

$$C = a / P = l / p .$$

I.2. Calculs du rapport de conduite C :

Posons:

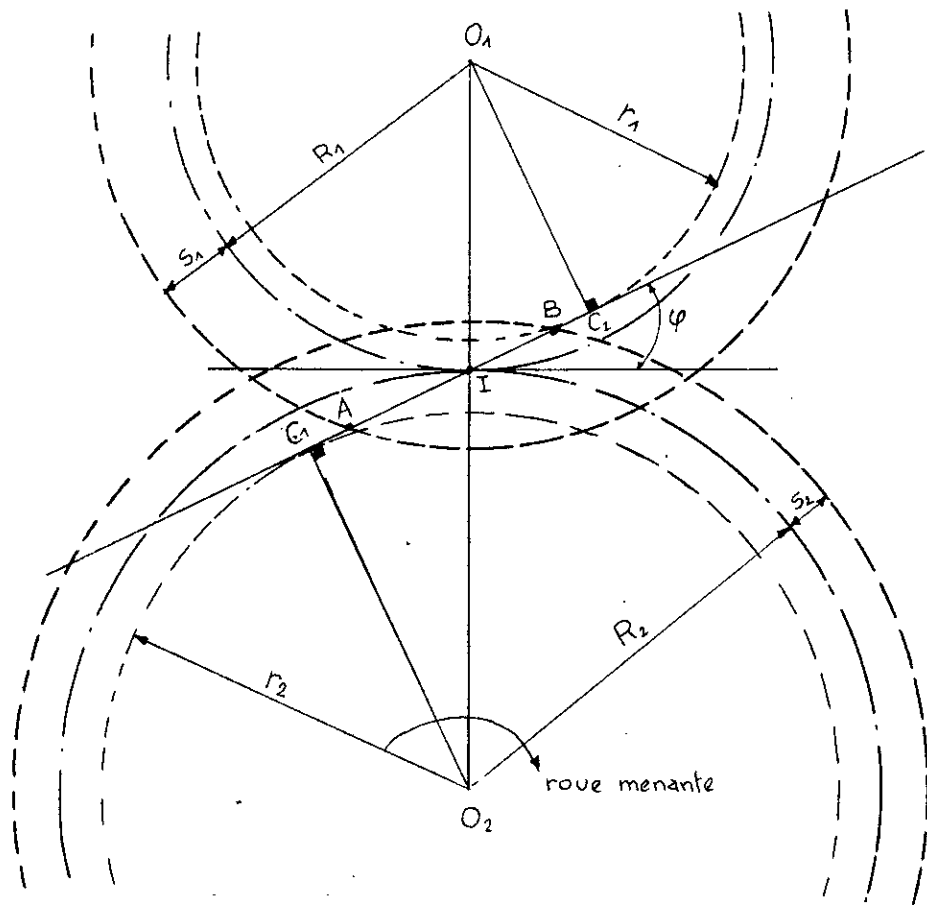
Z_i = Nbre de dents (pignon, roue)

s_i = Les saillies des pignons et roue.

Soit la figure I.b fournie en page 20. De part cette figure, nous pouvons écrire:

$$l_a = AI = AC_I - IC_I.$$

(I9)



ou encore:

$$l_a = ((R_I + s_I)^2 - (R_I^2 \cos^2 \varphi))^{\frac{1}{2}} - R_I \sin \varphi$$

De cette expression, nous tirons la valeur de $a_a = l_a / \cos \varphi$

Comme nous l'avons fait ici haut, nous obtenons l_r

$$\begin{aligned} l_r &= IB = r_2 B - IR_2 \\ &= ((R_2 + s_2)^2 - R_2^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} - R_2 \sin \varphi \end{aligned}$$

Cette expression connue, nous tirons la valeur de $a_r = l_r / \cos \varphi$

Ainsi, a_a et a_r déterminés nous obtenons la valeur de $a = a_a + a_r$

d'autre part, $c = a / \sqrt{M}$; si nous posons:

$$2R_I = Z_I \cdot M$$

$$2R_2 = Z_2 \cdot M$$

$$s_I = Y_I \cdot M$$

$$s_2 = Y_2 \cdot M$$

cù Y_I et Y_2 sont appelées saillies réduites

nous en déduisons l'expression du rapport de conduite $C = a / \sqrt{M}$
en remplaçant (a) et les R_i en fonction des Z_i et de l'angle de
pressio.

En posant aussi:

$$N_I = Z_I / Y_I$$

$$N_2 = Z_2 / Y_2$$

Le facteur de conduite peut se mettre sous la forme:

$C = Y_I \cdot U_I + Y_2 \cdot U_2$; U_I et U_2 étant deux fonctions correspon-
dantes du type:

$$U = (I / \sqrt{N} \cdot \cos \varphi) \cdot \frac{I + I/N}{(\sin \varphi / 2) \left[(\sin^2 \varphi / 4 + I/N^2 + I/N) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Remarque:

Le facteur de conduite croît avec les saillies et les
diamètres primitifs des pignon et roue

II. Interférences;

L'étude de ce phénomène est trop longue pour figurer ici. Nous donnons, en page (23), un graphe récapitulatif des résultats provenant des travaux de divers chercheurs, parmi lesquels nous nommons Mrs: HENRIOT ; JEAN-OLIVIER CAPELLE, etc...

L'utilisation de cet abaque est la suivante:

Soit un engrenage défini par:

Z_I et Z_2 : Nbre de dents des pignon et roue,
 φ : Angle de pression.

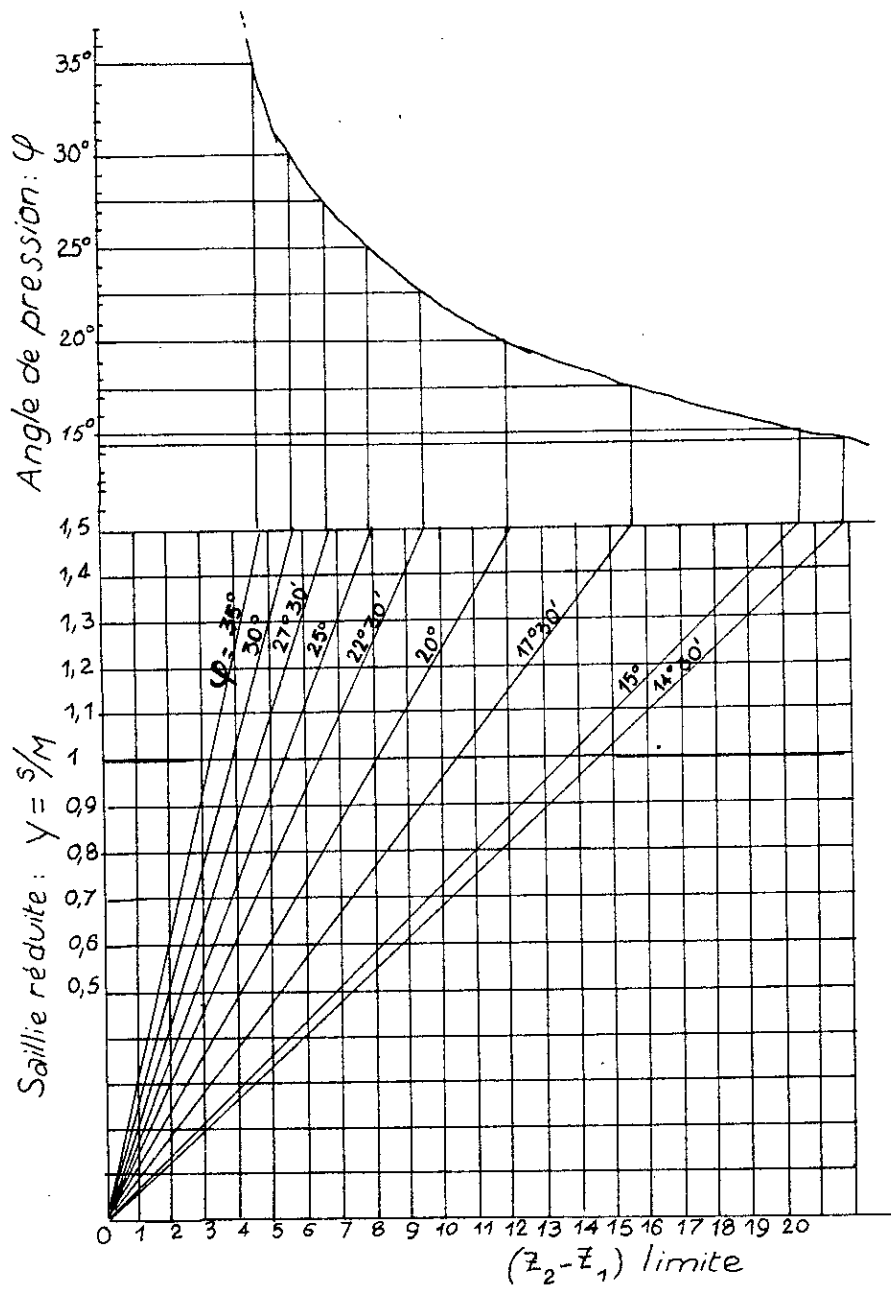
$Y = s/M$: Saillie réduite. Dans le cas d'un engrenage normal à denture droite, $Y = 1$, car la saillie est égale au module M . Pour éviter toute interférence, il faudra avoir une différence ($Z_2 - Z_I$) du cas réel supérieure ou égale à celle donnée par le graphe.

Pour le problème inverse de détermination du nombre de dents d'un élément de l'engrenage, on procède comme suit:

- + Connaitre l'angle de pression: φ
- + " le module de la denture.
- + Chercher $Y = s/M$.
- + " l'intersection des droites $Y = s/M$ et celle de la variation de φ correspondant, en fonction de la différence suivante ($Z_2 - Z_I$).
- + Projeter le point obtenu sur l'axe horizontal, vous obtenez la différence limite ($Z_2 - Z_I$) = a , où (a) est une certaine valeur positive.
- + Pour déterminer votre cas, il vous faudra alors:

$$(Z_2' - Z_I') \gg a$$

ainsi, si vous connaissez Z_I' par exemple, alors $Z_2' > Z_I' + a$.



III. Glissement.

III.I. Etude générale:

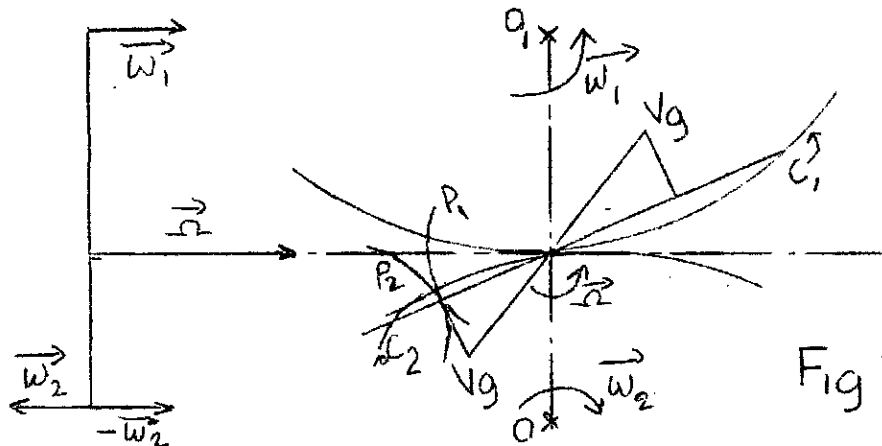


Fig III.1.

Nous avons vu au chapitre (I) que la vitesse de glissement est égale, à chaque instant , au produit de la vitesse angulaire de la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ par la distance du point de contact au C. I.R.

Dans un engrenage, l'engrènement n'est pas un roulement pur des profils conjugués, l'un sur l'autre; le roulement est accompagné d'un glissement relatif. Le vecteur vitesse de glissement \vec{v}_g est tangent aux profils conjugués en leur point de contact (M). Son intensité sera égale à :

$$|\vec{v}_g| = |\vec{\Omega}| \cdot IM$$

son sens dépend de celui de la rotation instantanée. Nous avons défini ultérieurement:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} &= \vec{\omega}_1 + (-\vec{\omega}_2) && \text{pour les engrenages intérieurs} \\ &&& \text{et extérieurs.} \\ |\vec{\Omega}| &= |\vec{\omega}_1| + |\vec{\omega}_2| && \text{pour les engrenages extérieurs.} \\ |\vec{\Omega}| &= |\vec{\omega}_1| - |\vec{\omega}_2| && \text{pour les engrenages intérieurs.} \end{aligned}$$

Si nous considérons:

N_I = Mbre de tours/mm du pignon.

$k = Z_2/Z_1$ le rapport de transmission.

IM = Distance (mm) du point M au C.I.R (I).

Nous obtenons l'expression de la vitesse de glissement:

$$V_g = 0,1047 \cdot N_I \cdot (k \mp 1) / k \cdot IM \cdot 10^{-3} \text{ en m/s}$$

Les signes: (+) pour les engrenages extérieurs.
(-) " " " intérieurs.

Remarques;

- Un sens de fonctionnement de l'engrenage étant choisi, la rotation instantanée $\vec{\Omega}$ garde toujours le même sens.

- La vitesse de glissement varie linéairement avec la position du point M sur la ligne d'action. Elle s'anule en I et son sens s'inverse de part et d'autre du C.I.R.

- Le glissement est plus important dans un engrenage extérieur que dans un engrenage intérieur (voir les signes).

III.2. Glissement relatif total de deux profils conjugués du début à la fin de l'action:

Considérons la figure III.2 ci-après. Nous supposons la roue (2) menante. Pendant la période d'approche, les arcs Im_I et IM_2 des profils P_I et P_2 se correspondent.

Nous appellerons " glissement relatif " des profils en approche la différence;

$$g_a = Im_I - In_2 \quad (\text{ en valeurs absolues })$$

De la même manière; on définit le " glissement relatif " des profils en retrait par:

$$g_r = Im_2 - In_I$$

Le glissement total des profils, du début à la fin de l'action, sera défini comme étant la somme arithmétique de g_r et g_a :

$g = g_a + g_r$. Attention: g est différent de la différence des arcs $m_2 n_2$ et $m_I n_I$.

CALCUL DE g_a et g_r :

a/ Calcul de g_a :

Considerons les deux profils conjugués en contact au point A. Soient $IM = l$, suivons l'engrènement pendant un temps dt très petit; le point d'action se déplace d'une quantité dl sur la ligne d'action. Pendant ce même temps, les deux cercles primitifs ont roulé sans glisser l'un sur l'autre des arcs égaux à:

$$ds = dl / \cos \varphi$$

les relations correspondantes des deux roues sont égales en valeurs absolues à:

$$w_I \cdot dt = ds / R_I = dl / R_I \cdot \cos \varphi \quad (\text{roue I})$$

$$w_2 \cdot dt = ds / R_2 = dl / R_2 \cdot \cos \varphi \quad (\text{" 2})$$

soit en faisant la somme membre à membre:

$$(w_I + w_2) dt = dl \cdot (1/R_I + 1/R_2) / \cos \varphi$$

La vitesse de glissement instantané en M est donnée par:

$V_g = (w_I + w_2) \cdot IM$; le glissement élémentaire instantané au point M et pendant un temps dt est alors:

$$dg = (w_I + w_2) \cdot IM \cdot dt = dl \cdot (1/R_I + 1/R_2) \cdot IM / \cos \varphi$$

Pendant l'approche, IM varie de l_a à zéro; le glissement des profils sera donc:

$$g_a = (1/R_I + 1/R_2) / \cos \varphi \cdot \int_{l=l_a}^{l=0} IM \cdot dt$$

$$g_a = (1/R_I + 1/R_2) \cdot l_a^2 / 2 \cos \varphi$$

b/ Calcul de g_r :

Les calculs sont identiques à ceux effectués pour g_a en remplaçant l_a par l_r ; nous obtenons alors:

$$g_r = (1/R_I + 1/R_2) \cdot l_r^2 / 2 \cos \varphi$$

Le glissement total sera:

$$g = (I/R_1 + I/R_2) \cdot (l_a^2 + l_r^2) / 2 \cdot \cos \varphi$$

Pour les engrenages intérieurs, la méthode de calcul est identique à celle ci. L'expression du glissement sera:

$$g = (I/R_1 - I/R_2) \cdot (l_a^2 + l_r^2) / 2 \cdot \cos \varphi$$

III.3. Glissement spécifique:

La vitesse de glissement ne suffit pas à elle seule pour caractériser les conditions d'usure des dentures; d'où la nécessité d'introduire le glissement spécifique: rapport du glissement total sur le roulement.

Considérons la figure de la page: (28). Elle représente l'engrènement de deux dentures conjuguées, le profil P_I étant menant.

Soient C_I et C_2 les ^{centres} de courbures des profils considérés, où la ligne d'action est tangente aux deux cercles de base. Nous pouvons remplacer les deux profils, au voisinage d'un point M de contact quelconque, par deux arcs de cercles de centres respectifs (C_I) et (C_2) et de rayons respectifs: $C_I M$ et $C_2 M$; les deux dentures peuvent être remplacées par deux galets cylindriques de même centres respectifs.

La vitesse de roulement de P_I est tangente au profil en M; elle aura pour expression:

$$V_{r.I} = w_I \cdot C_I M \quad \text{celle du point M de } P_I \text{ étant:}$$

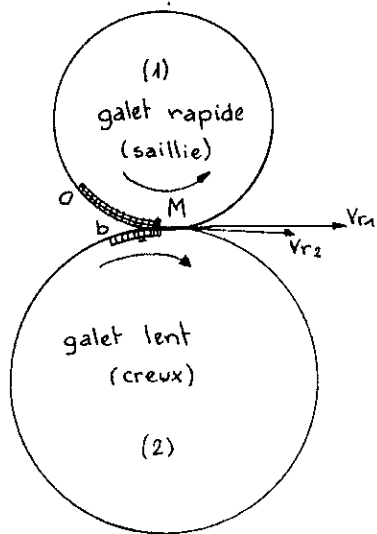
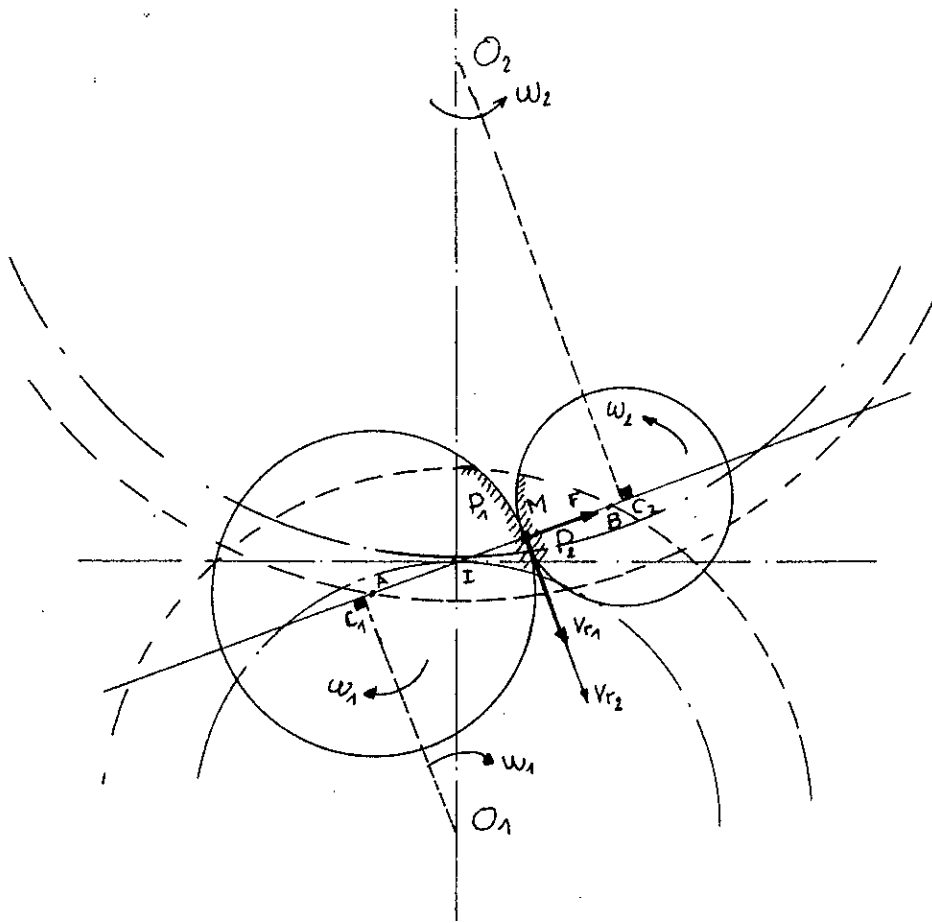
$$V = w_I \cdot O_I M$$

De la même façon, la vitesse de P_2 sera:

$$V_{r.2} = w_2 \cdot C_2 M$$

La vitesse de glissement en M sera donc:

$$V_g = V_{r.I} - V_{r.2}$$



Si nous considérons, maintenant, une paire de galets matérialisant les deux dentures, nous appellerons "galet rapide" celui ayant une vitesse tangentielle la plus forte; "galet lent" dans le cas inverse.

Pendant un certain temps (Δt), les galets des arcs Ma et Mb tels que:

$$Ma = V_{r.1} \cdot \Delta t$$

$$Mb = V_{r.2} \cdot \Delta t$$

Le glissement est alors mesuré par:

$$g = Ma - Mb .$$

Comme le glissement spécifique est le rapport du glissement au roulement, nous aurons:

$$\text{Glissement spécifique du galet (1): } (Ma - Mb)/Ma = \frac{(V_{r.1} - V_{r.2})}{V_{r.1}}$$

$$\text{Glis. spéci. du galet (2) : } (Ma - Mb)/Mb = (V_{r.1} - V_{r.2})/V_{r.2}$$

Bien que le GLISSEMENT RELATIF ait la même valeur pour les deux galets, il se fera plus marquant sur le galet lent. Ceci traduit donc l'importance du glissement spécifique. L'usure en est proportionnelle.

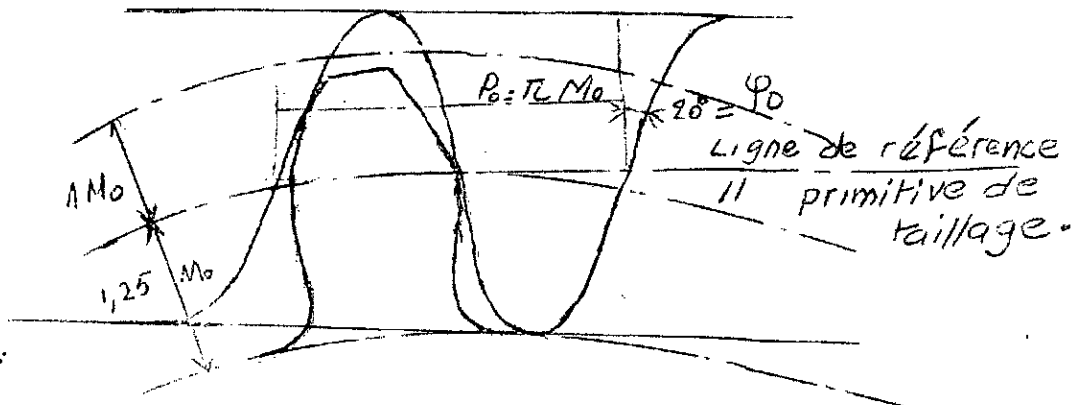
CORRECTION DE DENTURE.

I. Mécanisme géométrique:

I.I. Définitions:

I.I.1 Crémaillère génératrice normalisée:

Considérons la figure suivante: Fig. IV.1



Elle définit les éléments géométriques de la crémaillère génératrice normalisée. Nous avons sur la ligne de référence:

- Epaisseur: = pas/2 = $\pi \cdot M_0 / 2$ où M_0 est le module de la crémaillère.

- Angle de pression $\varphi_0 = 20^\circ$

- Saillie $s_0 = 1,25 \cdot M_0$.

I.I.2: Denture normalisée. Denture normale:

a/ Denture normalisée:

Une denture est dite normalisée si elle est engendrée par une crémaillère normalisée.

b/ Denture normale:

Une denture normale est une denture normalisée, pendant la génération de laquelle la ligne primitive de taillage de la crémaillère est confondue avec la ligne de référence. Nous avons:

$$R_p = Z \cdot M_0 / 2$$

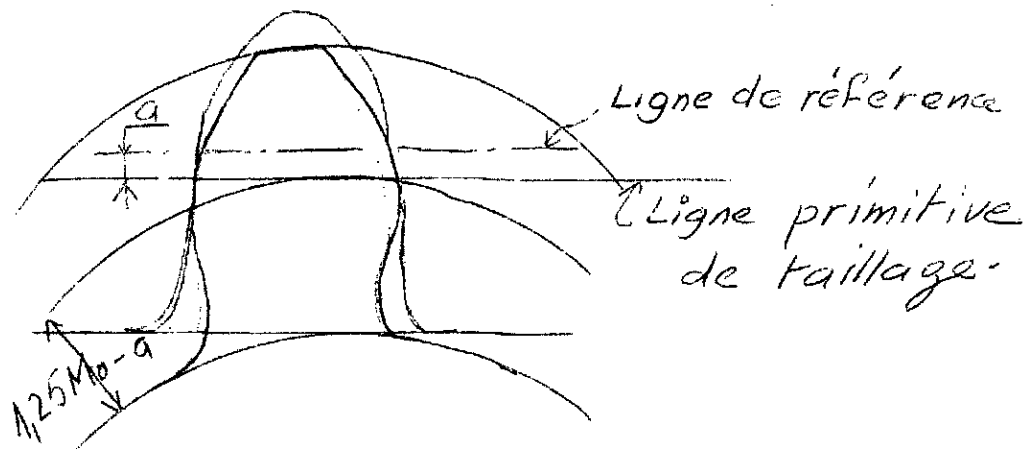
$$e = \text{identique.} \quad (30)$$

tous les autres paramètres gardent leurs valeurs.

I.1.3: Denture déportée:

Une denture normalisée est dite déportée, lorsque la ligne primitive de taillage de la crémaillère génératrice n'est pas confondue avec la figure de référence.

Fig: IV.2



Nous avons alors:

$$\text{saillie} + \text{creux} = 2,25 M_0 ; \text{ mais } (s) \text{ est différente de } M_0$$

le creux est aussi différent de $1,25 \cdot M_0$.

I.1.4: Entraxe normal:

IL est défini comme étant la somme de rayons primitifs de taillage de deux organes d'un engrenage:

$$\Delta_0 = M_0 \cdot (Z_1 + Z_2) / 2$$

D'autre part, pour avoir un fonctionnement correct à l'entraxe normal nous devons satisfaire la relation suivante:

$$e_1 + e_2 = e_1' + e_2' = M_0 \cdot \pi$$

Si les deux roues d'un engrenage sont à dentures déportées, il peut se produire deux cas:

a/ l'entraxe de fonctionnement peut être égal à l'entraxe normal, la denture est déportée sans variation d'entraxe.

b/ l'entraxe de fonctionnement est différent de l'entraxe normal, la denture est déportée avec variation d'entraxe.

II. DEPORT DE DENTURE

II.I. Déport sans variation d'entraxe:

II.I.I: Engrenages extérieurs:

Nous adopterons la convention suivante:

- Déport de denture positif, lorsque la ligne de référence de la crémaillère est extérieure au cercle primitif de taillage.

- Négatif dans le cas contraire.

Nous noterons par (d) le décalage de la ligne de référence de la crémaillère par rapport à la ligne primitive de taillage. Nous noterons par (δ) la quantité:

$$(\delta) = d/M_0$$

Par conséquent, pour un fonctionnement à entraxe normal, nous devons satisfaire à la relation algébrique suivante:

$$\delta_I + \delta_2 = 0$$

Pour vérifier cette relation, considérons la figure (.IV.III)

Cette Figure est fournie en annexe
(Engrenage extérieur, variation de Δ)

C_I et C_2 sont les deux cercles primitifs de taillage. Sur C_I les épaisseurs e_I et e_2 sont égales.

$e_I' = e_I = \text{arc IG}$. égales d'autre part, à l'intervalle de la crémaillère sur la ligne primitive de taillage, IF.

Nous obtenons les relations algébriques suivantes:

$$e_I' = \pi \cdot M_0 / 2 + 2 |\delta M_0| \cdot \text{tg} \varphi_0 = M_0 \left(\pi / 2 + 2 |\delta| \cdot \text{tg} \varphi_0 \right) \text{ - pignon -}$$

(32)

La même méthode sera appliquée pour la roue :

$e'_2 = \pi m_0 / 2 - 2 |\delta m_0| \cdot \operatorname{tg} \varphi_0$; comme le déport de la roue est négatif :

$$e'_2 = m_0 / 2 + 2 \delta m_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 = m_0 (\pi / 2 + 2 \delta \operatorname{tg} \varphi_0)$$

où (δ) est pris en valeur algébrique.

En faisant la somme $e'_1 + e'_2$ nous obtenons : πm_0 , condition pour un engrenement correct à l'entraxe normal.

Remarques :

- La denture déportée est obtenue avec des outils normaux
- La hauteur totale de la dent est conservée.
- L'épaisseur sur les cercles primitifs de taillage est modifiée. Nous obtenons la relation suivante :

$$E(\text{denture déportée}) = E(\text{denture normale}) + 2 \delta m_0 \operatorname{tg} \varphi_0$$

II.1.2 Engrenages intérieurs

Avec la même convention de signes que celle prise précédemment, nous obtenons les modifications suivantes pour la denture intérieure

$$e'_2 = m_0 (\pi / 2 - 2 \delta \operatorname{tg} \varphi_0)$$

Entraxe normal : $\Delta = m_0 (z_2 - z_1) / 2$ avec égalité des épaisseurs au primitif de taillage. Ceci traduit :

$$\delta_2 - \delta_1 = 0 \quad \text{ou encore} \quad \delta_1 = \delta_2$$

II.2 Déport avec variation d'entraxe

II.2.1. Engrenages extérieurs à denture droite :

Dans certains cas particuliers, on est amené à adopter des déports de somme algébrique différente de zéro. Ainsi, si cette somme est positive nous avons une augmentation d'entraxe ; une diminution dans le cas contraire.

$$\delta_1 + \delta_2 > 0 \Rightarrow \Delta > \Delta_0$$

$$\delta_1 + \delta_2 < 0 \Rightarrow \Delta < \Delta_0$$

ce qui nous permet de conclure:

$$* \delta_2 - \delta_1 = 0 \Rightarrow e'_1 + e'_2 = \pi M_0$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{et} \quad \Delta = \Delta_0$$

$$* \delta_2 - \delta_1 > 0 \Rightarrow e'_1 + e'_2 < \pi M_0 \quad \begin{matrix} \Delta > \Delta_0 \\ \varphi > \varphi_0 \end{matrix}$$

$$* \delta_2 - \delta_1 < 0 \Rightarrow e'_1 + e'_2 > \pi M_0 \quad \Delta < \Delta_0, \varphi < \varphi_0$$

II.2.2. Engrenages extérieurs à denture hélicoidale

Soient les notations suivantes:

$\varphi_{a,0}$: Angle de pression apparent de taillage.

φ_0 : " " " de fonctionnement.

Δ_0 : Entraxe normal.

Δ : " de fonctionnement.

Si nous nous plaçons dans un plan perpendiculaire aux axes, alors

$$\Delta = \Delta_0 \cdot \cos \varphi_{a,0} / \cos \varphi_a$$

$$\Delta = \Delta_0 (I + B_v)$$

$$\text{ou } B_v = (\cos \varphi_{a,0} / \cos \varphi_0) - I$$

En appelant par β_0 l'angle d'inclinaison primitive de taillage les déports auront les valeurs suivantes:

$$\delta_I \cdot \cos \beta_0 \quad \text{et} \quad \delta_2 \cdot \cos \beta_0$$

En nous plaçant dans un plan perpendiculaire aux axes, les formules deviennent:

$$\text{Inv } \varphi_a = \text{Inv } \varphi_{a,0} + 2 \cdot \text{tg } \varphi_{a,0} (\delta_I + \delta_2) \cdot \cos \beta_0 / (z_I + z_2)$$

D'autre part, comme $\text{tg } \varphi_{a,0} \cdot \cos \beta_0 = \text{tg } \varphi_0$

la formule précédente devient:

$$\text{Inv } \varphi_a = \text{Inv } \varphi_{a0} + 2 \text{tg } \varphi_0 (\delta_I + \delta_2) / (z_I + z_2)$$

N.B :

On appelle: Inv = Involute d'un angle φ quelconque, la fonction définie comme suit:

$$\text{Inv } \varphi = - (\varphi - \text{tg } \varphi)$$

De la même façon que précédemment, nous aurons pour les engrenages intérieurs la formule suivante:

$$\text{Inv } \varphi_a = \text{Inv } \varphi_{a0} + 2 \text{tg } \varphi_0 (\delta_2 - \delta_I) / (z_2 - z_I)$$

III- Equilibrage du glissement:

Dans le chapitre III, nous avons introduit la notion de glissement spécifique. Reprenons la figure (III.3) et notons par g_s le glissement spécifique.

Pour obtenir un équilibrage aux points A et B, il faut satisfaire à l'égalité suivante:

$$g_{s.1} \text{ en B} = g_{s.2} \text{ en A}$$

Posons alors:

$$c_{I.A} = \rho_{I.A}$$

$$c_{I.B} = \rho_{I.B}$$

$$c_{2.A} = \rho_{2.A}$$

$$c_{2.B} = \rho_{I.B}$$

Nous aurons alors:

$$\frac{\omega_1 \cdot \rho_{1.A} - \omega_2 \rho_{2.A}}{\omega_2 \rho_{2.A}} = \frac{\omega_2 \rho_{2.B} - \omega_1 \rho_{1.B}}{\omega_1 \rho_{1.B}} \quad (35)$$

Ce qui peut s'écrire:

$$\omega_1^2 P_{1A} \cdot P_{1B} = \omega_2^2 P_{2A} \cdot P_{2B}$$

Cherchons les valeurs des rayons de courbure en A et B:

$$\text{a/ En A: } \frac{1}{P_{1A}} + \frac{1}{P_{2A}} = \frac{C_1 C_2}{P_{1A} \cdot P_{2A}}$$

$$\text{b/ En B: } \frac{1}{P_{1B}} + \frac{1}{P_{2B}} = \frac{C_1 C_2}{P_{1B} \cdot P_{2B}}$$

les vitesses de glissement sont

$$V_{g.A} = \omega_1 P_{1A} - \omega_2 P_{2A}$$

$$V_{g.B} = \omega_2 P_{2B} - \omega_1 P_{1B}$$

La condition d'égalisation des glissements aux points A et B sera donnée en tenant compte des pressions superficielles qui y règnent:

$$s_A \cdot V_{g.A} = s_B \cdot V_{g.B} \quad \text{avec} \quad s_A \approx \sqrt{C_1 C_2 / P_{1A} \cdot P_{2A}}$$

$$s_B \approx \sqrt{C_1 C_2 / P_{1B} \cdot P_{2B}}$$

Après simplifications, nous obtenons les formes suivantes:

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{P_{2A} \cdot P_{2B}}} = \frac{\omega_2}{\sqrt{P_{1A} \cdot P_{1B}}}$$

ou encore:

$$\omega_1^2 P_{1A} \cdot P_{1B} = \omega_2^2 P_{2A} \cdot P_{2B}$$

En égalisant les glissements en A et B, nous y égalons aussi les facteurs de grippages. Tout en tirant cette déduction, nous introduisons une manière de calculer les deports pour éviter le grippage.

CHAPITRE V

EFFORTS SUR LES DENTURES

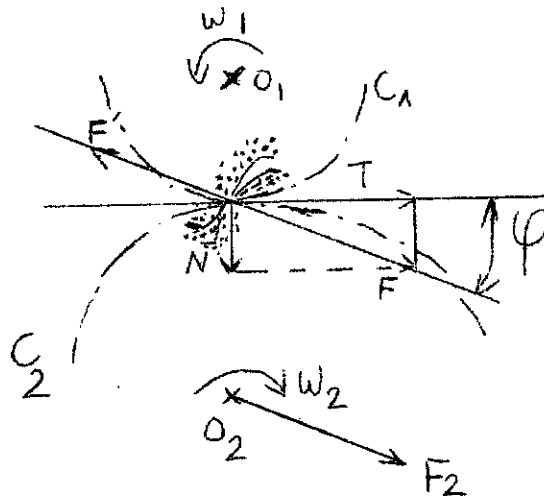
ARBRES

PALIER

I. Engrenages parallèles à denture droite:

I.I. Efforts sur les dentures:

Soit un engrenage de cercles primitifs C_1 et C_2 , de rayons respectifs R_1 et R_2 . (Voir fig. V.I)



Supposons le pignon moteur, transmettant une puissance de P H.P avec une vitesse angulaire ω_1 .

L'action de la denture du pignon sur celle de la roue se traduit par une force F , dirigée suivant la normale commune aux deux dentures en leur point de contact.

Cette force F a comme composantes: T tangentielle, N radiale; pour support: la ligne d'action pendant tout l'engrènement.

a / Composante tangentielle T:

$$T = (\text{puissance transmise}) / (\text{vitesse tangentielle})$$

$$T = 75 \cdot \frac{P}{R_I \cdot \omega_I}$$

où la puissance est en chevaux.

Si, en plus de cette considération, nous avons N_I en trs/mn et R_I en (mm) comme c'est souvent le cas, l'effort sera:

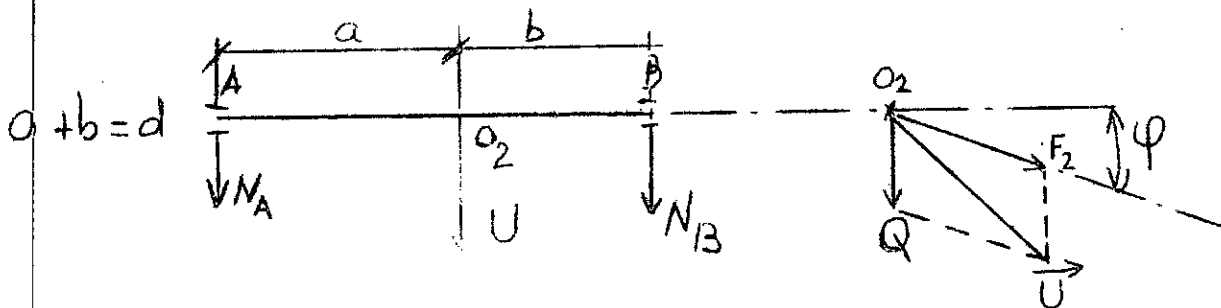
$$T = 716.500 \cdot \frac{P}{N_I \cdot R_I}$$

b / Composante radiale N

$$N = \operatorname{tg} \varphi \cdot T$$

Nous pouvons exprimer F en fonction de T; $F = T / \cos \varphi$.

I.2. Efforts sur les arbres et paliers:



L'effort F se traduit en un effort de flexion F_2 normal à l'arbre de la roue et en un moment de torsion d'intensité $T \cdot R_2$.

De même que l'arbre du pignon est soumis à un effort de flexion F_I et un moment de torsion d'intensité $T \cdot R_I$.

Appelons Q le poids de la roue, parfois très important, la charge supportée par l'arbre sera:

$$\vec{U} = \vec{F}_2 + \vec{Q}$$

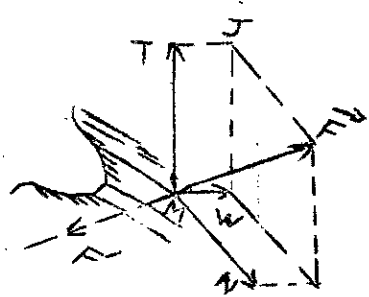
Plaçons nous dans le plan formé par l'arbre et U; déterminons les charges radiales U_A et U_B pour les paliers A et B

$$U = U_A + U_B \quad \text{ou encore :} \quad U_A \cdot a = U_B \cdot b \quad \text{avec} \quad a + b = d$$

il vient: $U_A = U \cdot b/d$ et $U_B = U \cdot a/d$.

II. Engrenages parallèles à denture hélicoidale:

II.1. Efforts sur la denture/



$$\widehat{TMJ} = \beta$$

$$\widehat{JMF} = \varphi_p$$

Nous adopterons les mêmes notations que précédemment avec, en plus,

φ_p : Angle de pression réelle.

De la même façon que précédemment, nous déterminons les efforts

a/ Tangentiel:

$$T = 716.500 \cdot \frac{P}{N \cdot R_{II}}$$

b/ Axiale W :

$$W = T \cdot \text{tg } \beta$$

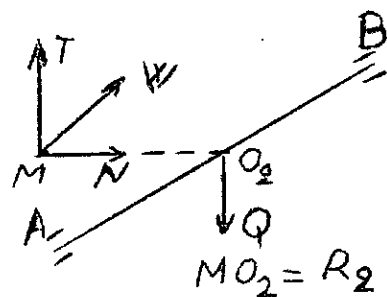
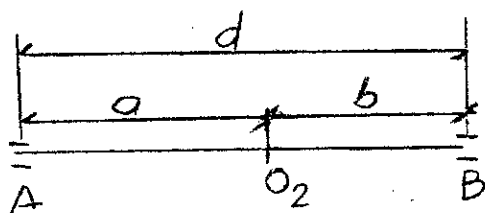
c/ Radiale N:

$$N = T \cdot \text{tg } \varphi_p / \cos \beta$$

d/ Effort total F:

$$F = T / \cos \varphi_p \cdot \cos \beta$$

II.2. Efforts sur les arbres: ET PALIERS



a/ Charge radiale U supportée par la roue:

$$\vec{U} = \vec{T} + \vec{N} + \vec{Q}$$

b/ Poussées sur les paliers A et B:

= palier A:

$$N_A = N \cdot b/d.$$

$$T_A = T \cdot b /d.$$

$$Q_A = Q \cdot b/d.$$

$$W_A = W \cdot R_2/d.$$

d'où :

$$\vec{U}_A = \vec{T}_A + \vec{Q}_A + \vec{N}_A + \vec{W}_A$$

= palier B :

$$N_B = N \cdot a/d.$$

$$T_B = T \cdot a/d$$

$$Q_B = Q \cdot a/d.$$

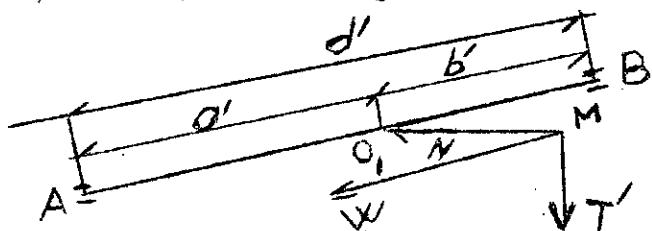
$$W_B = W \cdot R_2/d.$$

$$\vec{U}_B = \vec{T}_B + \vec{Q}_B + \vec{N}_B + \vec{W}_B.$$

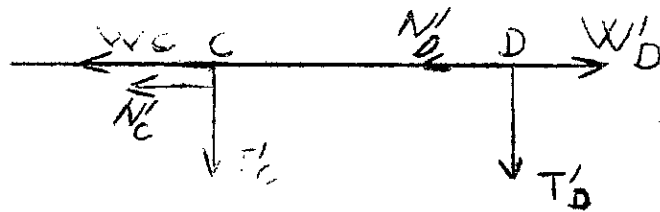
La poussée axiale W doit être absorbée par une butée. Elle est d'autant plus grande que l'angle d'inclinaison l'est.

En général, lorsque l'angle d'inclinaison dépasse 20° , nous utiliserons une denture enchevrons; ceci nous permet d'annuler les poussées.

c/ Poussée sur les paliers:



Dans tout ceci nous négligerons le poids du pignon.



≠ palier C;

$$T'_C = T' \cdot b' / d'$$

$$N'_C = N' \cdot b' / d'$$

$$W'_C = W' \cdot R_I / d' \quad \text{Ainsi: } \vec{U}'_C = \vec{T}'_C + \vec{N}'_C + \vec{W}'_C$$

≠ palier D:

$$T'_D = T' \cdot a' / d'$$

$$N'_D = N' \cdot a' / d'$$

$$W'_D = W' \cdot R_2 / d'$$

$$\vec{U}'_D = \vec{T}'_D + \vec{N}'_D + \vec{W}'_D$$

Nous la même remarque pour les poussées.
avons

CALCULS DE LA DENTURE.

I./ Rupture:

I.I.a: Engrenage parallèle à denture droite.

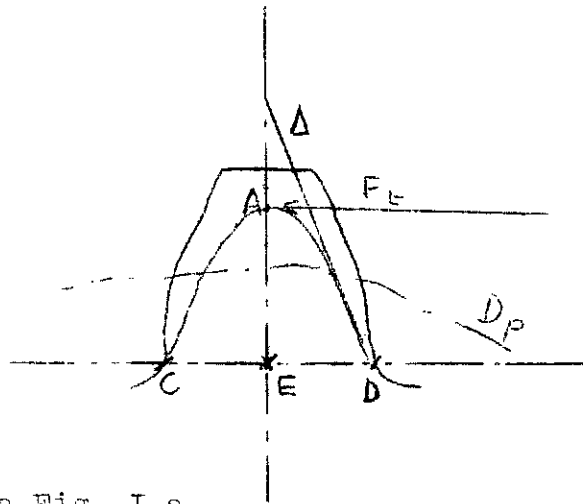
(I)-Formule de LEWIS:

LEWIS a posé comme hypothèses les points suivants:

- la charge est appliquée au sommet de la denture.
- Il n'y a qu'un seul couple de dents en contact.
- On ne considère que la composante de flexion, prise égale à l'effort tangentiel F_t .

Considérons tracé le profil de raccordement du pied de la dent. Cet élément est essentiel et dépend du nombre total de dents, du déport de la denture et de l'outil générateur.

Fig. I.a



Soit alors la Fig. I.a

$$AE = x \cdot \text{Module.}$$

$$CD = y \cdot \text{Module.}$$

Le point A étant le sommet de la parabole d'égale résistance et en même temps, le point d'application de l'effort F_t sur l'axe de la dent. Ceci nous permet de situer la section la plus sollicitée qui est d'ailleurs au niveau CD, niveau dit: "d'encastrement".

La propriété de la sous tangente Δ à la parabole nous permet d'écrire:

$$SA = AE.$$

La contrainte de flexion (t), au niveau de l'encastrement est

Moment de flexion

$$t = \frac{\text{Moment de flexion}}{\text{Moment resistant}}$$

$$t = \frac{F_t \cdot AE}{L \cdot \frac{CD^2}{6}}$$

étant donné que la dent est considérée comme une poutre pleine de section rectangulaire: L.CE; où L= largeur de la dent.

D'autre part; nous exprimons CD et AE en fonction du module:

$$\begin{aligned} CD &= x.M && \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des nombres relatifs.} \\ AE &= y.M \end{aligned}$$

L'expression de la contrainte de flexion (t) devient:

$$t = \frac{F_t}{L \cdot M \cdot Y} \quad \text{ou encore} \quad F_t = t \cdot L \cdot M \cdot Y$$

On désigne par:

$Y =$ un facteur dit de "forme" et ayant l'expression

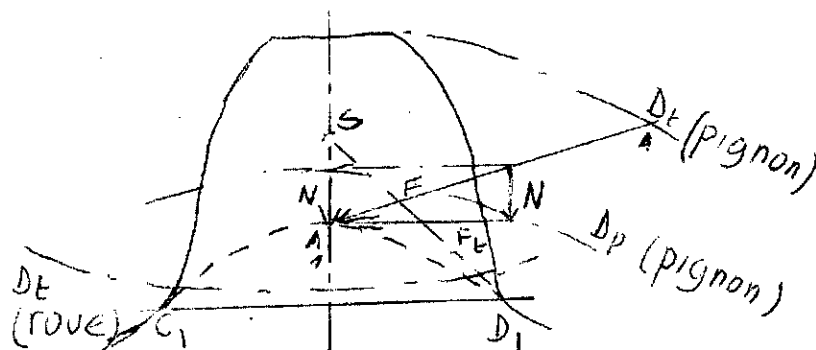
$$Y = \frac{y^2}{6x} \quad (\text{déduite de l'expression initiale de la contrainte de flexion.})$$

NOTA: Si l'on avait introduit le pas de base de la denture, au lieu du module, le facteur de forme sera divisé par λ .

Nous constatons bien que la formule de LEWIS est simple en soit mais ne repose pas sur des conditions réelles de fonctionnement. Nous affinerons les calculs en exposant la méthode dite "du point de contact unique".

(2)-Méthode du "point de contact unique":

Fig. 1b



Soit le point (I) tel que: BV = pas de base, au moment où le cône de dents est seul en prise donc à supporter toute la charge F. Supposons aussi que cet effort est appliqué en A_I sur l'axe de la dent (voir Fig. I.b). La parabole d'égalité de résistance a pour sommet: (A_I) et pour base: C_ID_I.

Toutes ces hypothèses, approchent assez bien la réalité et sont posées pour déterminer la contrainte maximale au niveau de l'encastrement.

Si nous appelons :

- φ : l'angle de pression.
- F_t : l'effort tangentiel.
- N : " normal.

$$F_D = F \cdot \cos \theta \quad \text{avec } \theta = \text{un angle défini sur la Fig. I.b}$$

$$N = F \cdot \sin \theta \quad \text{et légèrement supérieur à } \varphi.$$

Nous avons alors deux cas à considérer:

±. Effets de F_t :

En D_I: contrainte de tension } toutes deux d'expression
 En C_I: " " compression }

$$t_I^I = \frac{F_t \cdot x \cdot M}{L \cdot \frac{(y \cdot M)^2}{6}}$$

±. Effets de N:

Contrainte uniforme de compression sur toute la section d'encastrement; ayant pour valeur:

$$t_I^{II} = \frac{N}{L \cdot y \cdot M}$$

Nous en deduisons alors les contraintes résultantes maximales:

En D_I: tension $t_{I.t} = t_I^I - t_I^{II}$

" C_I: compression $t_{I.c} = t_I^I + t_I^{II}$

En remplaçant t_I^I et t_I^{II} par leurs valeurs, nous obtenons:

$$t_{I.t} = \frac{F_t}{L \cdot M \cdot Y_{I.t}} \quad \text{ou encore: } F_t = t_{I.t} \cdot L \cdot M \cdot Y_{I.t}$$

Où $Y_{I,t}$ = facteur de forme à la tension pour le pignon

$$Y_{I,t} = \frac{y_I^2 \cdot \cos^2 \varphi}{6x_I \cos \theta - y_I \cdot \sin \theta}$$

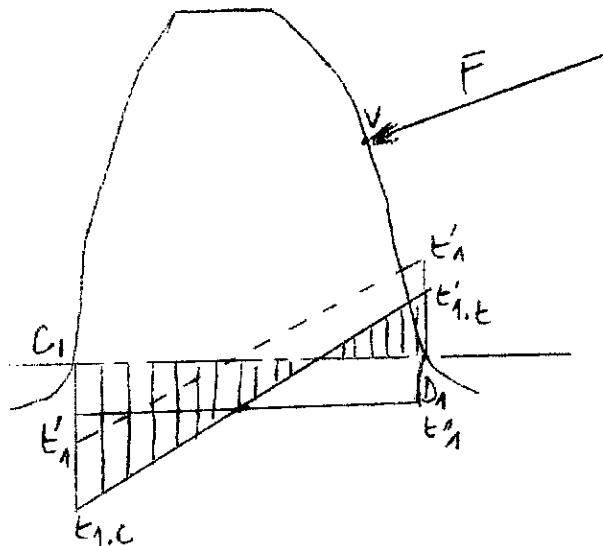
De la même manière que pour la tension, la valeur de la contrainte de compression sera:

$$t_{I,c} = \frac{F_t}{L \cdot M \cdot Y_{I,c}} \quad \text{ou encore: } F_t = t_{I,c} \cdot L; \cdot M \cdot Y_{I,c}$$

Où $Y_{I,c}$ = facteur de forme à la compression pour le pignon:

$$Y_{I,c} = \frac{y_I^2 \cdot \cos^2 \varphi}{6x_I \cos \theta + y_I \cdot \sin \theta}$$

La répartition des contraintes au niveau de l'encastrement est la suivante:



Nous constatons que la compression est plus importante que la flexion; mais cela peut se compenser par le fait que les aciers résistent beaucoup plus à la compression qu'à la flexion.

Nous venons de faire le calcul pour le pignon, pour la rioue, les résultats sont identiques en remplaçant:

$$\begin{array}{l} x_I \text{ par } x_2 \\ y_I \text{ " } y_2 \\ \theta_I \text{ " } \theta_2 \end{array}$$

Cette méthode est plus rigoureuse que la précédente, mais il en résulte un inconvénient majeur:

- Facteur de forme difficile à déterminer.
- Sa valeur varie pour l'organe conjugué.

(3).- Formule pratique (semi-empirique):

(voir graphe fourni en annexe)

Par convention, nous prenons la contrainte de compression pour critère de rupture.

Soit alors:

- c: le rapport de conduite (= rapport entre l'arc de conduite et le pas primitif.); voir pour cela le chapitre III. § I

$$- Y_c: \text{facteur de forme à la compression} = \frac{y^2 \cdot \cos^2 \theta}{6x_I \cos \theta + y_I \sin \theta}$$

$$- Y: \text{ " " de LEWIS} = \frac{6 \cdot x}{x}$$

La relation entre Y_c et (Y, c) s'écrit:

$$Y_c = Y \cdot c \cdot \left(1 + \frac{2,5}{Z} \right) \quad \text{où } Z = \text{nombre de dents de l'organe considéré.}$$

Y est fonction de l'angle de pression de l'outil générateur, du nombre de dents Z , du coefficient (δ) de déport de la denture et de l'arrondi au sommet de l'outil générateur.

Nous retranscrivons la formule en utilisant C_c dit: facteur de conduite, tel:

$$C_c = c \cdot \left(1 + \frac{2,5}{Z} \right)$$

$$Y_c = Y \cdot C_c$$

§.- Rapport de contraintes maxi. de compression et de tension:

$$\frac{t_c}{t_t} = \frac{Y_t}{Y_c} \quad \text{ceci déduit des formules précédentes.}$$

En exprimant Y_t et Y_c en fonction de: θ, x, y ; nous obtenons:

$$\frac{t_c}{t_t} = \frac{Y_t}{Y_c} = \frac{6x + y \tan \theta}{6x - y \tan \theta}$$

Le graphe $Y_t/Y_c = f(\varphi)$, fourni en annexe, donne une bonne approximation.

ximation et ceci pour:

- un nombre de dents quelconque.
- différentes proportions des dents.
- une large plage de valeurs des angles de pression.

§.- Facteur de concentration de contrainte: C_k

Dans ce qui suit nous essaierons de déterminer ce facteur avec autant de facilités que possible.

Dans les calculs de résistance, on suppose toujours que les contraintes sont uniformément réparties. Dans la réalité, les faits sont tout autres. En effet, on montre par photoélasticité qu'il existe des zones où les contraintes sont supérieures à celles données par le calcul. Dans le cas des roues dentées, l'une de ces zones est justement le pied de la dent.

Nous aurons donc une contrainte (σ), telle que:

$$(\sigma) = t \cdot C_k$$

Le facteur multiplicateur C_k est appelé: facteur de concentration de contraintes. Il dépend, en grande partie, du rayon de courbure (ρ) de raccordement du pied de la dent. Plusieurs méthodes, résultats de divers travaux de recherches, ont donné une, ou plusieurs, forme de C_k . Nous citerons la plus simple d'entre elles faisant suite aux travaux du docteur BAND :

$$C_k = 1 + 0,15 \cdot \frac{e}{\rho}$$

où (e) est l'épaisseur de la dent au niveau de l'encastrement.

Contrairement à ce que suggère cette expression, il est peu facile d'exprimer le rayon de courbure (ρ) de la trochoïde; car (ρ) est une fonction de plusieurs paramètres. La difficulté est contournée en utilisant des coefficients de sécurité élevés. Cependant, pour un calcul très poussé, nous nous référerons aux graphiques établis par les chercheurs spécialisés. Entre autres, nous joignons en annexe l'un d'entre eux:

$$C_k = f(Z); \text{ obtenu à partir de la formule de BAND.}$$

I.2.- Formule statique de base pour une denture droite:

F_t = effort tangentiel primitif (en Kg)

L = largeur de denture (mm)

M = module (mm)

C_c = facteur de conduite

Y = " " forme

C_k = " " concentration de contrainte

t_c = contrainte maxi de compression

Dans tout ce qui suit nous considérerons (t_c) comme étant le critère de rupture et nous appellerons simplement: $t_c = t$.

$$t = \frac{F_t \cdot C_k}{L.M.Y.C_c} \quad (\text{Kg/mm}^2)$$

comme il n'est pas commode de quantifier C_k , nous considérons le rapport:

$\frac{t}{C_k}$ dont la limite pratique admissible sera notée: t_0 , compte tenu de la valeur moyenne de la concentration de contrainte comprise entre: 1,7 et 1,8.

Nous en déduisons l'effort tangentiel admissible: $F_{t,ad}$

$$F_{t,ad} = \frac{t_0 \cdot L.M.Y.C_c}{I}$$

Bien que cette forme de l'effort admissible soit déjà assez élaborée, il convient de signaler qu'elle n'est pas suffisante à partir du moment où nous supposons que d'autres paramètres dynamiques peuvent affaiblir le matériau soumis à la fatigue. Parmi ces facteurs nous avons l'influence:

- de la vitesse, caractérisée par le facteur C_v
- " " durée de fonctionnement " C_t
- " " fréquence d'utilisation ou de service C_s

paramètres que nous pourrions appeler: facteurs correctifs dynamiques.

Nous déterminerons dans ce qui suit ces facteurs.

I.2.a: Facteur de vitesse C_v

Autre que l'influence directe de la vitesse uniforme, ce facteur tient compte des surcharges dynamiques qui pourraient intervenir lors du mouvement. Les travaux du professeur BUCKINGHAM ont indiqué une méthode de calcul où l'on retrouve les variables de surcharges suivantes:

- vitesse
- erreurs de denture
- inertie des organes en rotation

Pour simplifier les résultats des travaux cités plus haut, nous la forme générale de C_v :

$$C_v = \frac{a}{a + (V)^{\frac{1}{2}}}$$

où : V =vitesse tangentielle en m/s de l'élément denté.

a = une constante spécifique à la précision de la denture.

Dans cette formule, la principale préoccupation consiste à trouver la constante (a). Cette dernière variant avec le soin apporté à l'exécution des engrenages, nous donnerons ci-après quatre classes de précisions:

§. Première classe/

Denture de très grande précision pour engrenages à grande vitesse (turbine par exemple), obtenue avec des précautions spéciales par rectification, shaving sans traitement thermique ultérieur. La vitesse tangentielle étant égale et même supérieure à 100m/s.

$$C_v = \frac{30}{30 + V^{\frac{1}{2}}}$$

Dans cette formule nous inclurons tous les engrenages de très haute qualité.

§. Deuxième classe:

Denture de précision, obtenue par rectification, par shaving, sans traitement thermique ultérieur, ou sur des machines à tailler évoluées:

$$C_v = \frac{12}{12 + V^{\frac{1}{2}}}$$

§. Troisième classe:

Denture de bonne qualité commerciale, obtenue par taillage sur des machines récentes, en bon état et avec un soin particulier de l'opérateur. Denture finie par shaving plus un traitement thermique ultérieur soigné (pignons de boîtes de vitesses).

$$C_v = \frac{6}{6 + V^{\frac{1}{2}}}$$

§. Quatrième classe:

Avant toute chose, cette classe est à éviter. Elle englobe les dentures de qualité médiocre, obtenues sur des machines en mauvais état et un outillage défectueux etc....

$$C_v = \frac{3}{3 + V^{\frac{1}{2}}}$$

Nous joignons, en annexe un graphique donnant $C_v = f(a, V)$.

I.2.b: Facteur de durée: C_t

Il est hors de doute que le temps de fonctionnement a une profonde influence sur la résistance, à la fatigue, des matériaux en sollicitation dynamique. Mais il semblerait qu'il faille distinguer entre un fonctionnement continu et un fonctionnement discontinu à arrêts périodiques (un certain nombre d'heures par jour par exemple). Il est légitime de considérer, pour ce dernier cas, les périodes de

relaxation qui tendraient, à première vue, à libérer les organes des concentrations de contraintes. Il en ressort cependant, de la part des résultats de tests effectués en laboratoire, que ces relaxations n'ont qu'une influence favorable très minime et, en général, négligeable. Pour déterminer le facteur de durée, nous supposerons un régime continu.

Soit alors:

- N = vitesse de rotation en tours/mn.

- T_h = nombre d'heures de fonctionnement total.

- N_c = " de cycles de mise en marche.

- q = " de zones de contact d'engrènement.

ceci étant posé, nous obtenons les expressions suivantes:

$$N_c = 60 \cdot N \cdot T_h \cdot q$$

ce qui donne pour la valeur de C_t :

$$C_t = I / (N_c / 10^7)^{0,10}$$

I.2.c: Facteur de service:

Ce facteur est introduit pour tenir compte du degré de choc de fonctionnement et de la nature de l'organe considéré. Nous donnerons ci-après un extrait des tableaux du Rapport ISI de l'Ecole de Munich publié par le Professeur: Dr. Ing. NIEMANN:

Degré de choc	Organe récepteur
I Fonctionnement pratiquement sans choc.	Génératrice de courant. Engrenages d'avance de machines-outils.
	Transporteurs à courroies.
	Turbo-soufflantes.
	Montes charges légers.
	Agitateurs et émélangeurs pour liquides homogènes.
II	Commandes principales de machines-outils. Monte-charges lourds.

II	: Ventilateur de mines.
Fonctionnement avec chocs modérés.	: Agitateurs pour produits non homogènes. : Pompes à pistons multiples, pompes de distribution. Etc....
III.	: Presses d'emboutissage.
Fonctionnement avec chocs importants.	: Cisailles. : Laminoirs. : Pelles mécaniques. : Centrifugeuses lourdes. : Pompes lourdes. : Etc...

A partir du moment où nous aurons classé nos éléments dans le tableau ci-dessus, nous nous reportons au tableau qui suit pour déterminer la valeur du C_s :

Organe moteur.	Degré de choc du récepteur.	Durée de fonctionnement par jour (heures)		
		3	8 - 10	24
Moteur électrique	I	1,25	I	0,80
	II	I	0,80	0,67
	III	0,67	0,57	0,50
Turbines.	I	I	0,80	0,67
	II	0,80	0,67	0,57
Moteurs à pistons multiples.	III	0,57	0,50	0,44
Moteur à un seul cylindre.	I	0,80	0,67	0,57
	II	0,67	0,57	0,50
	III	0,50	0,44	0,40

Comme il en ressort de ces tableaux, le facteur C_s , dit de service, dépend de plusieurs paramètres:

- Du degré de choc:

Phénomène qu'il faudra d'abord étudier, puis quantifier pour pouvoir établir les divers degrés recherchés et classer le maximum de récepteurs possibles en fonction de ces derniers.

- Du temps de fonctionnement:

Il intervient, surtout, sous forme de fatigue des organes soumis à des efforts avec un degré de choc quelconque.

Ce que nous avons noté ici, n'est que l'essentiel de la théorie de détermination du facteur de service C_s . Pour une étude plus approfondie, il nous faudra nous référer aux travaux de Mr: NIEMANN.

Nous joignons, en annexe, un graphique donnant t_0 en fonction de la charge de rupture à cœur. Dans le cas d'une trempe superficielle localisée, pour réduire les risques de pitting, d'usure et de grippage, il convient de signaler que (t_0) décroît en raison de la discontinuité introduite, par ce type de traitement, dans la zone du pied de la dent. Il faudra donc, chaque fois que ~~faire sa part~~ ^{cela peut se faire}, préférer une trempe superficielle continue.

Nous attirons l'attention sur la meilleure résistance des aciers cémentés, provoquée par la précompression superficielle introduite par la cémentation. De plus, il y a intérêt à laisser cette couche brute de traitement thermique dans la zone du pied de la dent.

Les outils de taillage à protubérance sont recommandés pour toutes les dentures devant être finies par réctification après cémentation.

En récapitulation, nous établissons la formule définitive de vérification à la rupture, par fatigue; des engrenages:

SOMMAIRE:

- T_I = Effort tangentiel maxi admissible (Kg) pour le pignon
- T_2 = Effort " " " " (") pour la roue
- $t_{0.1}$ = Fatigue limite pratique pour le pignon: Kg/mm²
- $t_{0.2}$ = " " " " la roue : "
- M = Module (apparent dans le cas de la denture hélicoidale
extérieur dans le cas d'une roue conique.
- L = Largeur de denture (mm)
- Z_I = Nombre de dents du pignon.
- Z_2 = " " " de la roue.
- N_I = Vitesse en tours/mn. du pignon.
- N_2 = " " " de la roue.
- Y_I = Facteur de forme pour le pignon.

V_2 = vitesse de forme pour la roue.

$C_{c.1}$ = " " conduite pour le pignon.

$C_{c.2}$ = " " " " la roue.

C_v = " " vitesse (commun à la roue et au pignon).

$C_{t.1}$ = " " durée pour le pignon.

$C_{t.2}$ = " " " " la roue.

C_s = " " service (commun à la roue et au pignon).

La formule pour les engrenages parallèles à denture droite est la suivante:

$$T_I = t_{o.1} \cdot L \cdot M \cdot Y_I \cdot C_{c.1} \cdot C_v \cdot C_{t.1} \cdot C_s. \quad (\text{ceci pour le pignon})$$

$$T_2 = t_{o.2} \cdot L \cdot M \cdot Y_2 \cdot C_{c.2} \cdot C_v \cdot C_{t.2} \cdot C_s. \quad (\text{ceci pour la roue}).$$

Nous pourrions donner cette formule sous une autre forme; en fonction de la puissance transmise.

Il convient de signaler, pour les deux formules précédentes, que nous avons T_I et T_2 dans le cas où les matériaux diffèrent avec un grand écart du point de vue dimensions.

FORMULE EN FONCTION DE LA PUISSANCE TRANSMISE:

Soient P_I et P_2 les puissances transmises, respectivement, par le pignon et par la 2^e roue:

$$P_I = \frac{I}{I \cdot 432 \cdot 500} \cdot t_{o.1} \cdot L \cdot M^2 \cdot Z_I \cdot N_I \cdot Y_I \cdot C_{c.1} \cdot C_v \cdot C_{t.1} \cdot C_s.$$

(puissance en chevaux)

Nous aurons une formule identique pour la roue en remplaçant, dans la formule précédente, les indices (I) par (2).

2.2 - Denture hélicoïdale:

Déterminer la contrainte de rupture pour une denture hélicoïdale est un problème qui n'est pratiquement pas possible de résoudre par les mathématiques pures.

En effet, si l'on utilise effectivement les avantages d'un grand recouvrement, le contact s'effectue simultanément sur plusieurs couples de dents conjuguées; de plus, suivant des droites qui traversent obliquement la surface de denture.

Appelons par:

c = Rapport de conduite apparent.

(η) = " " recouvrement.

L = Largeur de denture.

(α) = Angle d'inclinaison de base.

Lorsque $c = (\eta)$, une ligne de contact, de largeur $\frac{L}{\cos(\alpha)}$,

couvre la totalité de la surface de la denture.

L'effort total F a alors une composante tangentielle de flexion égale à:

$$T' = T \cdot \frac{L}{L \cdot c \cdot \cos \beta} \quad \text{où } T = \text{effort tangentiel pur,}$$

$$\beta = \text{in clinaison primitive.}$$

En supposant que T' soit répartie uniformément sur la longueur totale des segments de contact, $\frac{T'}{L \cdot c}$, la charge maxi. que peut être amenée à supporter une dent $\cos \alpha$ est égale à:

$$\frac{T'}{c} = \frac{T}{c \cdot \cos \beta}$$

La flexion étant dirigée normalement à la direction de la dent, nous pouvons considérer le module réel M_r de la dent, une longueur $L \cdot \frac{L}{\cos \beta}$, un facteur de forme Y_r qui correspondrait à celui d'une denture droite de $\frac{Z}{(\cos \beta)^3}$ dents et l'angle de pression réelle identique.

En supposant que tout l'effort de flexion est appliqué au sommet de la dent (LEWIS), nous arriverions à une contrainte égale à:

$$\frac{\frac{T}{c \cdot \cos \beta}}{\frac{L}{\cos \beta} \cdot Mr} \cdot \frac{I}{Y r} = \frac{T}{L \cdot Ma} \cdot \frac{I}{c \cdot Yr \cdot \cos \beta}$$

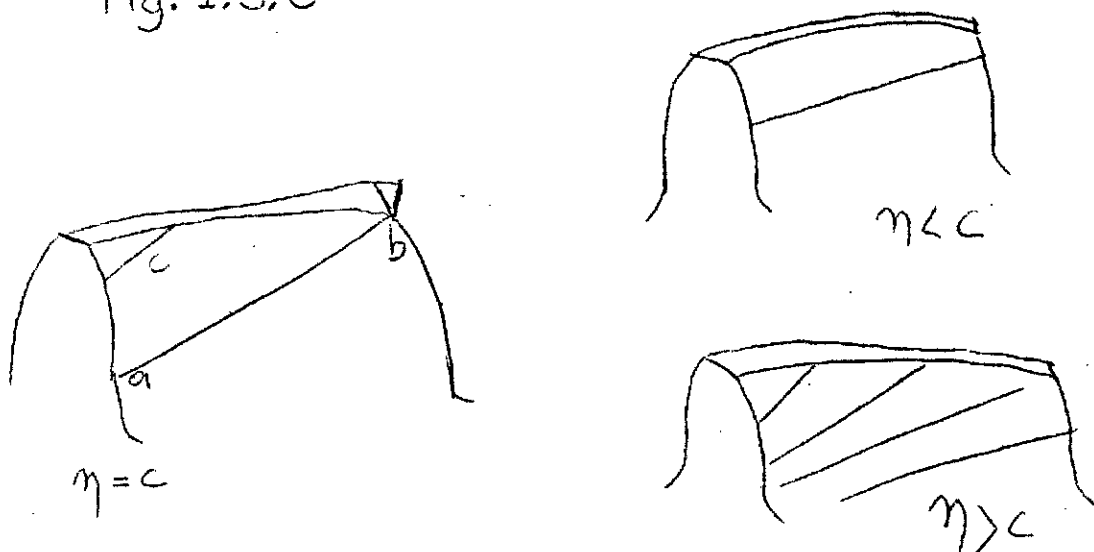
où Ma est le module apparent.

Le terme $Yr \cdot \cos \beta$ étant très voisin de Y correspondant à une roue à denture droite de Z dents et d'angle de pression φ , nous en déduisons que cette contrainte est voisine de celle que subirait une roue à denture droite correspondant aux caractéristiques apparents de la denture hélicoïdale de longueur L .

Signalons toutefois que la charge de la dent hélicoïdale est plus favorable, car la partie de charge voisine de l'extrémité (a) voir Fig. I.3.c- introduit une contrainte plus faible qu'une charge identique placée en (b). Mais quantifier l'amélioration est un problème très difficile.

En regardant la Fig. I.3.c, nous constatons aussi qu'à un certain moment, le contact se limite à un très petit segment dans le coin C de la dent; si nous n'avons pas d'erreurs d'exécution, la charge sur ce petit segment est faible en proportion; dans le cas contraire (le plus fréquent malheureusement) la charge qui y est concentrée est très forte. M. CAPELLE a montré dans ses travaux qu'il peut en résulter une contrainte très accentuée, cause de nombreuses ruptures d'angles. POUR remédier à cet inconvénient, on procède à des chanfreinages suffisamment grands des extrémités.

Fig. I.3.C



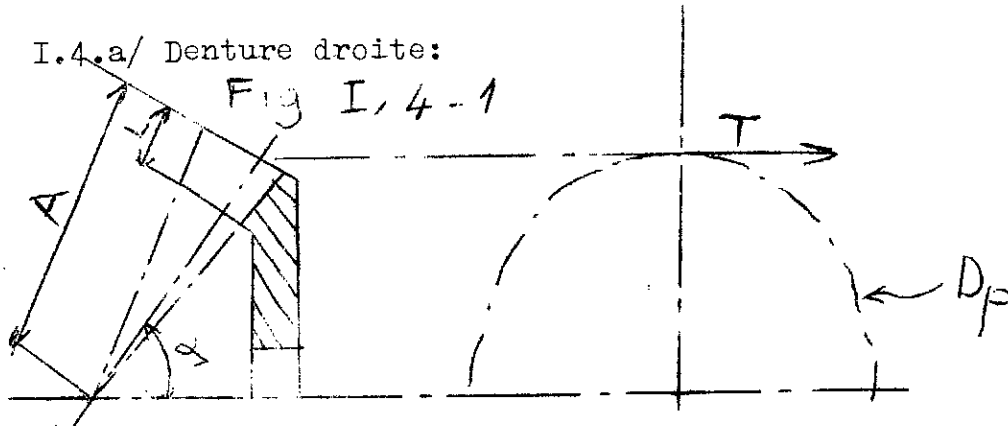
Nous pouvons conclure pour la denture hélicoidale en disant:

- Pour tous les problèmes pratiques, nous utiliserons encore la formule de la rupture valable pour la denture droite.

- Nous considérons une denture droite de largeur L , un nombre de dents Z et les caractéristiques apparentes de la denture hélicoidale.

I.4. EN GRENAGES concourants:

I.4.a/ Denture droite:



A = Génératrice primitive.

L = Largeur de denture.

D = Diamètre primitif.

$\hat{\phi}$ = Angle primitif.

M = Module extérieur.

φ = Angle de pression.

$$T = \frac{2 \cdot \text{couple}}{D}$$

NOTA : Cet effort tangentiel, introduit ici, n'est pas celui qui intervient pour la détermination des charges sur les paliers et arbres (voir CHAR .V). Le tracé de TREDGOLD nous a permis de ramener certain problèmes d'engrenages concourants à ceux, simples, d'engrenages parallèles complémentaires définis par:

- le module M .

- l'angle de pression γ .
- les nombres de dents fictifs

$$Z'_I = \frac{Z_I}{\cos \gamma_1} ; \quad Z'_2 = \frac{Z_2}{\cos \gamma_2}$$

Dans le cas d'engrenages concourants, il est évident que la roue résistera moins que celle identique d'un engrenage parallèle et tel le que:

- son diamètre primitif = $M.Z$
- de même largeur : L .

ceci est dû au fait que la roue d'un engrenage concourant a les dents de largeur plus faible quand on se rapproche du sommet (S) - voir la Fig. I.4.I -.

Le rapport appelé: " facteur de continuité " ^{cônicité}, permet de comparer les contraintes de rupture et les charges admissibles pour la roue cônica et la roue cylindrique définie précédemment. Divers auteurs ont proposé le facteur de cônica, le rapport suivant:

$$\frac{A - L}{A} \quad A = \text{génératrice primitive}$$

Pour la détermination de l'effort admissible, statique, on prend la précaution de multiplier ce rapport par : I, I ; nous obtenons alors:

$$T_{adm.} = t_0 \cdot L \cdot M \cdot Y \cdot \frac{A - L}{A} \cdot C_c$$

où Y = facteur de forme correspondant au nombre de dents fictif Z'_I (idem. pour Z'_2)

C_c = facteur de conduite correspondant à l'engrenage complémentaire.

La formule générale de vérification à la rupture, par la fatigue dynamique, sera du même type que celle établie pour un engrenage parallèle. Mais l'on doit faire attention à la spécification des paramètres C_c, Y

$$T_{adm.} = t_0 \cdot I \cdot L \cdot M \cdot Y \cdot I \cdot C_{cI} \cdot C_{tI} \cdot C_v \cdot C_s \cdot \frac{A - L}{A} \cdot \frac{I}{I, I}$$

Pour la roue, nous avons:

$$T_{adm.2} = t_{o2} \cdot L \cdot M \cdot Y_2 \cdot C_{c2} \cdot C_{t2} \cdot C_v \cdot C_s \cdot \frac{A - L}{I, I.A}$$

NOTA: Si on appelle surcharge instantanée, la surcharge dont la durée d'application est de l'ordre de 15 secondes; alors tous les engrenages calculés par les formules précédentes peuvent supporter des surcharges allant jusqu'à deux fois la charge maximale normalement transmise.

II. PRESSION SUPERFICIELLE:

A- Etude générale.

II.A.I. Engrenages parallèles extérieurs à denture droite:

Fig. II.A.a:

*Cette figure est établie
sur calque séparé et sera
glissée en annexe -*

Considérons deux dentures en contact au point (M); nous pouvons les associer à deux galets cylindriques de centres respectifs: C_1 et C_2 . Appelons par:

- F = Effort normal total.

- L = Largeur de denture

- F_u = L'effort normal unitaire = F/L.

- r_1 et r_2 les rayons de courbures des galets en contact.

- E_1 et E_2 les modules d'élasticité longitudinale des

matériaux.

Nous supposons, en première approximation, que la surface d'écrasement est un rectangle de largeur $2a$ où (a) est un réel, avec un maximum de pression au milieu (c.à.d au point de contact géométrique). La formule de HERTZ donne la valeur de la pression superficielle maximale suivant Oz (voir Fig. II.A.b)

$$s = 0,59. (E_u \cdot \frac{I/\rho_1 + I/\rho_2}{I/E_1 + I/E_2})^{\frac{1}{2}}$$

En considérant que $E_1 = E_2$ (ce qui est souvent le cas) et, de plus, si nous prenons des aciers

$$s = 62. (F_u \cdot (I/\rho_1 + I/\rho_2))^{\frac{1}{2}}$$

Dans le cas de la figure II. A .a, les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 sont constamment variables; ils peuvent s'annuler si le contact atteint C_1 et C_2 avec une valeur de la pression superficielle infinie. Comme ρ_1 et ρ_2 sont tels;

$$\rho_1 + \rho_2 = \text{constante} = C_1 C_2$$

le terme $I/\rho_1 + I/\rho_2$ a une valeur minimale pour $\rho_1 = \rho_2 = (D \cdot \sin \varphi) \cdot \frac{1}{2}$

où D est considéré comme étant l'entraxe.

Ce qui se traduit par le fait que la pression superficielle de HERTZ atteint son minimum s_m au milieu du segment $C_1 C_2$.

$$s_m = 0,834. (F_u \cdot E \cdot D \cdot \sin \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

pour le cas des aciers, $E = 22.000 \text{ Kg/mm}^2$ la pression superficielle minimale sera:

$$s_m = 124. (F_u \cdot D \cdot \sin \varphi)^{\frac{1}{2}}$$

La valeur de la pression superficielle au point primitif (I) s'obtient en prenant:

$$P_1 = R_1 \cdot \sin \varphi$$

$$P_2 = R_2 \cdot \sin \varphi$$

Si nous posons $k = R_2/R_1 = Z_1/Z_2$

$$s_I = \left(F_u \cdot \frac{k + I}{k \cdot R_1 \cdot \sin \varphi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad .62$$

Positionnons le point V puis W tels que:

$$AW = BV = \text{pas de base}$$

Entre V et W

$$F_u = F/L \quad (\text{courbe } I)$$

Entre AV et BW

$$F_u = F/2L \quad (\text{courbe } 2)$$

La fig. II.A.a, donne la variation théorique de la pression superficielle sur la portion utile AB de la ligne d'action. Avec des dentures idéales (convenablement dessinées et déportées pour un petit nombre), le maximum est en général atteint en W, avec:

$$s_w = s_I$$

Dans ce qui suit, nous calculons la pression en (I).

§. Facteur K :

L'apport des méthodes de calcul répugnent l'exploitation des formules de H. H. H. sous leur forme originale. A titre de simplification; on préfère caractériser la pression superficielle par la quantité sous la racine.

Un critère très répandu; et utilisé dans le calcul des engrenages de marine, est le facteur K défini par:

$$K = \left(T / L \cdot D_I \right) \cdot (k+I)/k$$

où D_I est le diamètre primitif du pignon.

k le rapport de l'engrenage.

La pression superficielle de HERTZ, au point (I), se retranscrit suivant la forme ci-après:

$$s_I = 87. (I / (\sin \varphi \cdot \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot (K)^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } K \text{ est en } \text{Kg/mm}^2$$

Pour établir cette formule, nous avons considéré un seul couple de dents en contact. Si nous en avons deux, alors:

$$s_I' = s_I \cdot (I/2)^{\frac{1}{2}}$$

Il est certainement péssimiste de considérer la pression superficielle au primitif avec un seul couple de dents en prise. Il semblerait plus raisonnable d'introduire le rapport de conduite à la puissance $\frac{1}{2}$ comme facteur diviseur de s_I . Nous verrons plus loin la formule générale.

§. Aplatissement général des dentures/

Il en ressort des travaux de M. J. CAPELLE, publiés dans le bulletin n°3 de la S.E.I.E., que l'aplatissement général est donné par:

$$u = 0,00005 \cdot F_u \quad (\text{en mm})$$

ceci pour des dentures en acier et F_u exprimé en Kg/mm.

Cet aplatissement, indépendant de la position du point de contact, est en général très faible; mais il convient d'en tenir compte pour des engrenages de très haute précision (gyroscope, engins spéciaux etc...). A titre d'exemple, pour un effort linéaire de 40 Kg/mm, nous obtenons: $u = 2$ microns.

Dans certains cas, il est nécessaire de connaître la largeur $2a$ de la surface d'engrènement. Nous donnons son expression dans le cas de l'acier:

$$2a = 0,02 \cdot \left(\frac{F_u}{\rho_1 + \rho_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{en mm.}$$

§. Contrainte de cisaillement dans la sous-couche:

Le calcul d'une telle contrainte est essentiel pour la profondeur minimale de cémentation, de nitruration (tout traitement de durcissement de surface)

Considerons le galet inférieur de la fig.II.A.b

Nous avons indiqué la variation de la contrainte à partir de la surface vers le cœur.

Contraintes principales:

σ_x = dans la direction Ox de l'axe.

σ_y = " " " Oy; σ_y = pression de HERTZ à la surface.

σ_z = " " " Oz, radiale; σ_z = pression de HERTZ à la surface.

La contrainte de cisaillement résultant de deux contraintes agissant dans deux directions orthogonales, est maxi. dans la direction à 45°; ce maxi. a pour valeur la demi-différence des contraintes normales. La contrainte de cisaillement est nulle à la périphérie, maxi. (notée s_c) à une certaine profondeur dite "dite profondeur de cisaillement maxi."

$$s_c = 0,3s = 18,6 \cdot \left(F_u \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \text{ pour les aciers.}$$

On en déduit la profondeur de cisaillement maxi. l_c

$l_c = 0,8.a = 0,4$ fois la largeur maxi. de la surface d'écrasement.

Cette notion de profondeur de cisaillement est primordiale car elle fournit les causes du pitting (piqûres).

Dans le cas des dentures cémentées, afin d'éviter l'écaillage, il faut avoir une profondeur de cémentation égale au moins à deux fois la profondeur de cisaillement maxi.

II.A.2: Engrenages intérieurs à denture droite:

Contrairement à l'engrenage extérieur, la pression superficielle est plus faible dans l'engrenage intérieur. Nous expliquons ceci par le fait que les deux rayons de courbure se soustraient en inverses, car les courbures sont de même sens. Nous aurons donc:

$$\left| \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right| \text{ (64) au lieu de } \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

L'expression de la pression superficielle de HERTZ sera:

$$s = 62. (F_u \cdot (1/\rho_1 - 1/\rho_2))^{1/2}$$

Au point C_I la pression est infinie, au fur et à mesure que la surface d'écrasement augmente, la différence des inverses des rayons de courbure diminue. Pour ce type d'engrenage, les problèmes de pression superficielle sont en général peu préoccupants que dans les engrenages extérieurs.

II.A.3. Engrenages extérieurs à denture hélicoidale:

(voir Fig. II.A.c)

Nous retrouvons/:

- les deux cylindres de base de l'engrenage.
- le plan d'action, tangent aux deux cylindres suivant $C_I t_I$ et $C_2 t_2$ respectivement;
- la génératrice de contact des deux hélicoides développables, inclinée d'un angle α dit de base.

$C_I C_2$ est la ligne d'action des deux profils P_I et P_2 sur la face avant; elle est inclinée d'un angle ψ , de pression apparent. Sur cette face, nous pourrions remplacer, au voisinage de M , les deux profils par deux arcs de cercle de centres respectifs: C_I et C_2

Les rayons de courbure apparents sont:

$$\rho_1 = C_I M \quad \text{et} \quad \rho_2 = C_2 M \quad \text{avec} \quad \rho_1 + \rho_2 = D \cdot \sin \psi$$

D étant l'entraxe.

Ces rayons varient linéairement lorsque le plan normal aux axes se déplace de t_I vers t_2 .

$$\text{En } t_I : \rho_1 = 0$$

$$\text{En } t_2 : \rho_2 = 0$$

$$\text{En } M : \rho_1 = C_I' M' \quad \text{et} \quad \rho_2 = C_2' M'$$

Au voisinage de la génératrice de contact, nous pouvons ainsi rem

placer les deux hélicoïdes par deux cônes de même diamètre de base et de même demi-angle au sommet α , de sommets t_1 et t_2 , d'axes t_1C_1 et t_2C_2 , tangents suivant t_1t_2 .

Étudions la variation de pression suivant t_1t_2 .

La pression superficielle au point de contact M_I est la même que celle du point M' de la génératrice.

Les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 des deux cônes, dans le plan perpendiculaire en M à t_1 et t_2 , sont donnés par le théorème de Meunier

$$\rho_1' = G_{1M} = \rho_1 / \cos \alpha$$

$$\rho_2' = G_{2M} = \rho_2 / \cos \alpha$$

La formule de HERTZ sera:

$$s = 62 \cdot (F_u \cdot (1/\rho_1 + 1/\rho_2) \cdot \cos \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Comme pour la denture droite, la valeur de $s_{(I)}$ de la pression de HERTZ sera obtenue pour les valeurs:

$$\rho_1 = R_r \cdot \sin \varphi \quad \text{et} \quad \rho_2 = R_2 \cdot \sin \varphi$$

$$s_{(I)} = (F_u \cdot \cos \alpha / R_1 \cdot \sin \varphi \cdot (k + 1)/k)^{\frac{1}{2}} \cdot 62$$

Valeur de F_u :

$$F = T / \cos \beta \cdot \cos \varphi_r$$

où

β = inclinaison primitive

φ_r = angle de pression réel

D'autre part, la somme des génératrices de contact des dentures conjuguées est:

$$l_g = L \cdot c / \cos \alpha$$

M.J.CAPELLE a démontré dans le bulletin n°3 de la S.E.I.E que la charge unitaire F_u par mm de longueur de génératrice de contact est constante:

$$F_u = (T/c \sin \beta \cdot \cos \varphi_r) / (L \cdot c / \cos \alpha)$$

de plus

$\cos \alpha \cdot \cos \varphi = \cos \beta \cdot \cos \varphi_r$ (déduite des relations entre les angles des engrenages à denture hélicoïdale)

Nous aurons alors:

$$F_u = T / L \cdot c \cdot \cos \varphi$$

Le facteur K étant identique à celui de la denture droite, la pression superficielle sera:

$$s_{(I)} = 87 \cdot (\cos \alpha / c \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}$$

Cette formule est la plus générale de toutes. En faisant $\alpha = \beta = 0$ nous retrouvons la denture droite et l'expression de pression de pression superficielle sera:

$$s_{(I)} = 87 \cdot (I / c \cdot \cos \varphi ; \sin \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{1}{2}}$$

nous avons bel et bien introduit, au dénominateur, le facteur c.

B. FORMULES DE BASE STATIQUES

II.B.I: Denture droite:

Si nous ne considérons que le facteur K au lieu de toute la formule de HERTZ et si nous appelons K_0 sa limite pratique admissible l'effort tangentiel admissible sera:

$$T_{adm.} = K_0 \cdot L \cdot D_I \cdot C_r$$

où C_r = facteur de rapport = $k / (k+1)$

Nous donnons en annexe la variation de $C_r = f(k)$ pour les engrenages intérieurs et extérieurs.

II.B.2. Denture hélicoidale:

§. Facteur d'inclinaison: C_β

Il doit être proportionnel à la valeur du rapport suivant;

$c \cdot \sin \varphi; \cos \varphi / \cos \alpha$ • on peut vérifier que l'on peut sans grande erreur, ne tenir compte que de la variation de l'angle d'inclinaison, sous forme de facteur d'inclinaison, que l'on prendra égal à un par convention pour un engrenage à denture droite. Nous fournissons, en annexe le graphe $C_\beta = f(\beta)$.

L'effort tangentiel admissible sera:

$$T_{adm.} = K_0 \cdot L \cdot D_I \cdot C_r \cdot C_\beta$$

II.B.3. Engrenages intérieurs:

En partant de la formule:

$$s = 62 \cdot (F_u \cdot (I/\rho_1 - I/\rho_2))^{1/2}$$

nous arriverons à un nouveau facteur K' tel que:

$$K' = T/L \cdot D_I \cdot (K - I)/k.$$

d'où nous déduisons un nouveau facteur C_r . La formule de l'effort tangentiel restant identique.

II.B.4. Engrenages concourants à denture droite/:

Comme pour le cas de la rupture, nous garderons les mêmes conventions et introduisons le même "facteur de côneité"

$$T_{adm.} = K_0 \cdot L \cdot D_I \cdot C_r \cdot (A - L)/I, I.A.$$

(68)

C.FACTEURS CORRECTIFS DYNAMIQUES

II.C.1: Facteur de vitesse C_v

Identique à celui calculé précédemment pour la rupture.

II.C.2: Facteur de durée C_t

Contrairement à celui calculé pour la rupture, nous avons dans ce cas ci un facteur ~~plus~~^{moins} important pour la vérification à la pression superficielle;

$$C_{t.pres.} = C_{t.rup.}^{\frac{1}{2}}$$

son expression est la suivante:

$$C_{t.pres.} = 1 / (N_c / 10^7)^{0,2}$$

toutes choses égales d'ailleurs.

NOTA: Le facteur de service restant identique à celui de la rupture

II.C.2: Limite pratique de base K_0 du facteur K

Nous donnons, tjs en annexe, des graphiques de K_0

$K_0 = f(HB)$. Tous les essais effectués en laboratoire et les constatations pratiques montrent la supériorité des engrenages en aciers alliés de cémentation.

Bien que certaines firmes spécialisées dans les engrenages utilisent la nitruration (avec pénétration accentuée par technique spéciale), nous préférons la prudence et toujours utiliser la cémentation lorsqu'un traitement de surface s'avère nécessaire.

II.C.3. Formule définitive de vérification à la pression superficielle:

$$T_{adm} = K_{oi} \cdot L \cdot D_1 \cdot C_r \cdot C_\beta \cdot C_s \cdot C_t \cdot C_v$$

III. GRIPPAGE:

III.I: Piqûres ou pitting:

On désigne sous le nom de pitting, le phénomène qui se traduit par des trous de dimensions plus ou moins importantes (parfois de véritables cratères) sur les surfaces de la denture.

Les piqûres peuvent être dues à plusieurs facteurs: une structure non homogène du matériau; un défaut d'usinage etc....Elles prennent ensuite un tour notoire et inquiétant avec l'influence de la pression superficielle.

En effet, nous avons montré précédemment que la pression superficielle engendre un cisaillement, dit cisaillement maximum (auquel correspond une profondeur du même type) par pression superficielle. Une telle contrainte provoque un glissement moléculaire et un échauffement suffisants pour donner naissance à la formation de criques. Plusieurs essais en laboratoire le prouvent. Ces détériorations sont accentuées par l'onde de déformation induite par le glissement de la denture. Si la pression superficielle n'est pas trop élevée, les piqûres se stabilisent et n'ont pas d'effet sur le fonctionnement; si, par contre, la charge des pignons est excessive, les piqûres se développent et deviennent destructives.

Les piqûres se localisent toujours sur le flanc de pied des dentures. Nous expliquons ceci en supposant:

Deux galets en contact, le plus lent matérialisant le galet de flanc de pied (voir plus haut: pression superficielle) de la roue ou du pignon. En avant de la zone de contact, la surface du galet lent est soumise à la tension, ce qui tend à ouvrir les criques, la surface du galet rapide est au contraire comprimée;

Nous pouvons dresser

le tableau suivant:

Sens du déplacement	Pied vers tête	Tête vers pied
sens du glissement sur le flanc de pied	Du primitif vers le pied; Pied vers primitif (glissement opposé au roulement)	
Sens du glissement sur le flanc de tête	primitif vers la tête. (glissement	De la tête vers le primitif de même sens que le roulement.)

Lorsque les criques, de flanc de pied, passent par la zone de contact, l'huile qui s'y trouve enfermée est soumise à une pression hydrostatique importante, qui provoque un fluage du métal (échelle d'environ $I/100$). Ainsi de suite, le phénomène se propage avec l'influence de la pression superficielle.

Les travaux de W.T.CHESTERS ont montré, entre autre, qu'avec de l'huile de haute viscosité, le phénomène se réduit en importance

III.2 :Grippage

Le grippage est un micro-soudage instantané entre deux points de deux surfaces conjuguées. En parlant soudage, on introduit la notion d'assemblage par contact sous haute pression et une élévation localisée de la température. Nous devons donc intervenir sur deux facteurs importants:

- la pression superficielle
- la température du milieu de fonctionnement (en particuliers le graissage et le glissement.)

III.2.1:Influence de la pression superficielle

Bien que nous sachions qu'il existe un procédé de soudage par pression sur deux pièces, l'influence de la pression superficielle se fait sentir indirectement. En effet la vitesse de glissement relatif des profils conjugués augmente quand on s'éloigne du point de contact au primitif (l'écart devient important pour les grandes vitesses) .Si on ajoute à ceci une charge importante, il se développera, au point de contact, une température très élevée pouvant provoquer le soudage momentané des matériaux (concentration d'énergie en un point) avec arrachage de métal, à l'instant suivant, dans le sens du glissement. Cette température instantanée de contact est appelée : " Température éclair " ou, en gardant la dénomination anglo-saxonne, la "Flash température " dûe au professeur BLOK.

III.2.2: Facteurs de grippage:

a/ Facteur $P.V$

Ce facteur est introduit par J.O.ALMEN pour essayer de quantifier le grippage.

P = pression superficielle de HERTZ (notée plus haut: s)

V = vitesse de glissement (notée plus haut V_g)

Nous optons pour cette nouvelle notation pour conserver la forme anglo-saxonne sous laquelle elle est mieux connue.

L'utilisation de ce facteur est assez répandue bien qu'à la base elle est issue d'un certain empirisme. IL intervient sous forme de valeurs limites pour un type d'engrenage déterminé. Nous dressons ci-après un petit tableau de ces valeurs:

P.V (Kg/mm ² m/s)	Observations pour dentures cémentées ou trempées
220	Limite de sécurité sans modification du profil de la denture et avec une huile normale. Valeurs atteintes en aviation avec modification adéquate de la denture et huile spéciale. Limite extrême.
440	
660	
880	
1100	
1320	

b/ Facteur: P.V.T.

Resultat des travaux de J.O.ALLEN et de STRAUB, le facteur ci dessus est une amelioration du facteur précédent pour les engrenages à grandes vitesses. il fait intervenir la distance (T) du point de contact , au point primitif. Nous donnons ci-après un extrait de ces valeurs /

P.V.T où P: Kg/mm ² V: m/s T: mm.	Observations pour denture cémentée ou trempée
5495	Limite de sécurité ss modification de la denture et huile normale. Valeurs possibles avec modification adéquate du profil de denture et huile spéciale.
8242	
10 990	
16 485	

III.2.3. "Flash Température "

Nous pouvons traduire cette dénomination par : "Température instantanée " ou "Température éclairé ".

Le professeur BLOK , de l'université de Delft, dès 1937 a mis au point un appareil pour mesurer cette température; grace à des résistances électriques très fines , fixées sur les flancs de denture

Si nous appelons par (t_f) la " Flash Température " alors t_f sera:

t_f = température effective \rightarrow température de corps au pignon

$$t_f = 1,17. \frac{f \cdot T/L. |V_{r.1} - V_{r.2}|}{b. (V_{r.1}^{\frac{1}{2}} + V_{r.2}^{\frac{1}{2}}). 2a^{\frac{1}{2}}}$$

où les paramètres sont:

f : Coefficient de frottement.

T/L: Effort tangentiel unitaire. (Kg/cm)

$V_{r.1}$ et $V_{r.2}$ sont les vitesses de roulement des pignon et roue. (cm/s)

2a : Surface d'écrasement (cm^2)

b : Conductibilité thermique des matériaux, supposés identiques.

En général (b) est compris entre 12 et 16 Kg/ ($cm s^{-1/2} ^\circ C$)

Remarquez : nous pourrions écrire la formule précédente en ne faisant figurer que la pression de HERTZ au lieu de T/L et $2a^{\frac{1}{2}}$

Ainsi nous obtenons:

$$t_f = 17.10^{-4} \cdot f/b |V_{r.1} - V_{r.2}| \cdot S^{3/2} \cdot \rho^{\frac{1}{2}}$$

avec

$$1/\rho = 1/\rho_1 + 1/\rho_2$$

Les travaux du professeur BLOK sont complétés par ceux de Mr. KELLEY en introduisant un facteur de service (tenant compte de l'uniformité de fonctionnement) et d'un facteur d'état de surface qui est d'ailleurs très difficile à préciser.

Nous obtenons le tableau suivant, donnant les valeurs de t_f

qu'il ne faut pas dépasser, en fonction de la viscosité (Engler):

Viscosité (Engler)	Limite de t_f	Observations
10	120°C	Huiles normales
30	190	
60	260	
30	210	Huiles dopées.
40	260	

Les huiles dopées contiennent des additifs anti-grippants (oléates de plomb, sulfures, chlorures, etc...). Cependant, nous pouvons intervenir directement sur la denture par une sulfinisation ou un dépôt électrolytique de laiton sur la denture finie.

CHOIX DES MATERIAUX

I. GENERALITES:

Le choix des matériaux, pour la fabrication des engrenages, dépend de plusieurs facteurs dont:

- Vitesses de rotation.
- Type d'engrenage.
- Résistance demandée à la rupture et à l'usure.
- Silence de fonctionnement.
- Dimensions de l'engrenage.
- Matériel d'usinage disponible.
- Etc...

Les matériaux pouvant être utilisés sont:

- Aciers de toutes les nuances.
- Fontes ordinaires et spéciales.
- Bronzes.
- Matières synthétiques.

Remarque:

Dans la quasi-totalité des cas, les aciers sont les plus utilisés parcequ'ils permettent d'avoir le maximum de sécurité pour un encombrement minimum. Seuls les engrenages à roue et vis sans fin utilisent le bronze pour la roue afin d'avoir une usure homogène sur les roue et vis.

II. LES ACIERS:

I.I: ~~Les~~ ^{né} généralités

Pour la fabrication de petits pignons arbrés, nous prenons de préférence des aciers forgés pour leur meilleure structure des couches de métal, bien qu'il soit possible d'utiliser des aciers laminés.

Pour les grandes roues, il convient d'utiliser une frette en acier forgé adaptée sur un centre en fonte ou en acier coulé; dans certains cas nous pouvons prendre des aciers coulés au four électrique.

De nos jours, les aciers spéciaux sont de plus en plus utilisés car ils permettent une augmentation très sensible de la capacité de

charge. Nous rappellerons, ci-après, les éléments d'alliage utilisés et leur influence sur les caractéristiques mécaniques des aciers:

NICKEL:

Favorise la pénétration de la trempe, rendant ainsi plus homogène le traitement thermique. Il augmente la résilience et rapproche la limite élastique de la charge de rupture, sans abaisser la résistance et l'allongement (en %). Il est particulièrement intéressant pour les engrenages très chargés et travaillant aux chocs.

CHROME:

Il accroît l'intensité de la trempe; de plus, étant un composant très dur, il augmente la dureté de l'acier et le rend plus résistant aux détériorations superficielles. Il est à signaler que cet élément accentue la fragilité de l'acier.

NICKEL-CHROME:

Ces deux éléments combinés donnent des pièces très résistantes à la rupture et à l'usure, sans abaisser la résilience.

MOLYBDENE:

Favorise la formation d'un grain fin et compact, permettant ainsi d'élever la résistance et la dureté, tout en améliorant l'allongement et la résilience.

MANGANESE:

Augmentation de la limite élastique et donne une bonne résistance à l'usure. Cependant il ne faut pas exagérer la teneur si l'on veut éviter la fragilité.

VANADIUM:

Amélioration de résistance à chaud et à la fatigue, tout en diminuant la fragilité.

ALUMINIUM:

Sa principale fonction est de favoriser la pénétration profonde de la nitruration en fixant l'azote.

I.1. Désignation normalisée d'un acier:

a:/ Cas général:

Un acier est désigné par un symbole comportant, dans l'ordre:

- un nombre représentant 100 fois sa teneur en carbone.
- une série de lettres correspondant chacune à un élément d'addition, ceci dans l'ordre décroissant des teneurs:

Groupe: (I)

- N: nickel
- C: chrome
- K: cobalt
- M: manganèse

Groupe: (II)

- D: molybdène.
- W: tungstène.
- V: vanadium.
- A: aluminium.

-Un nombre représentant 4 fois la teneur en (%) de l'élément d'addition ayant la plus forte teneur s'il est situé dans le groupe I et 10 fois s'il est du groupe II.

b:/ Acier très fortement allié:

Si l'un de ses éléments a une teneur supérieure à 5%, l'acier est précédé de la lettre Z, la teneur de l'élément le plus important est toujours portée à la fin et en vraie grandeur.

I.2: Traitement thermique:

I.2.a : Aciers alliés à trempe totale à l'huile:

Nous savons que la teneur en carbone détermine le maximum de dureté que l'on peut atteindre. Un choix convenable de la température du revenu, après trempe, permet d'obtenir toute une gamme de résistances et de duretés.

Quand la température de revenu augmente, la résistance et la dureté diminuent, la résilience s'améliore. Mais si l'on veut conserver la dureté obtenue de la trempe, un revenu à faible température est plus approprié pour réduire les tensions internes.

Notez bien la plus grande utilisation des aciers alliés N-C de teneur en nickel comprise entre 2,5 et 3%, ceci de part les propriétés de ces deux éléments.

I.2.b: Aciers alliés auto-tremnants:

Types d'aciers surtout utilisés quand on désire obtenir une grande résistance avec le minimum de déformations au traitement thermique. De tels aciers trouvent leur application pour des éléments tournant à vitesse modérée et pour lesquels la rectification ne peut être envisagée pour des raisons commerciales (prix de revient très élevé). Les nuances les plus utilisées sont: N-C, N-C-D de teneur en nickel variant entre 3 et 4%.

II.3. Aciers alliés de cémentation:

La cémentation permet d'obtenir les meilleures résistances à la rupture et à l'usure; elle concilie en effet une très grande dureté superficielle avec une grande résistance à cœur à la fatigue par flexion. Elle entraîne souvent des déformations importantes, ce qui nécessite une rectification des dentures après le traitement thermique.

REMARQUES:

a/ Le grand intérêt de la cémentation réside dans la haute résistance à la fatigue par flexion et l'introduction d'une précompression superficielle qui vient atténuer la contrainte dans la zone du pied de la dent. Il faudra donc éviter de rérectifier cet endroit, d'autant plus que la rectification a tendance à introduire une contrainte superficielle de tension. Il faut également éviter de provoquer un décrochement, dans la zone notée plus haut, la solution idéale serait de dégager le ^{pied} ~~dent~~ au taillage d'une quantité égale à la surépaisseur de rectification. En règle générale, nous devons étudier pour chaque cas particulier, les conséquences du traitement thermique que nous envisageons.

b / L'écaillage est aussi un facteur important. Pour l'éviter il convient de prendre une profondeur de cémentation suffisante, en particulier supérieure à la profondeur de cisaillement maximale (voir le chapitre VI: Pression superficielle). Nous donnons ci-après un tableau général de quelques profondeurs de cémentation en fonction du module de la denture:

MODULES	PROFONDEURS (mm)
1	0,2 à 0,3
2	0,35 à 0,45
3	0,5 " 0,75
4	0,75 " 1,00

Notez bien que les profondeurs données plus haut sont celles obtenues après réctification.

II.4. Aciers de nitruration.

LES aciers de nitruration sont très résistants mais leur fragilité restreint le domaine de leurs applications. Lors de ces dernières années, certains organismes spécialisés, ont pu obtenir un nouveau procédé de pénétration profonde de la nitruration; la méthode est actuellement en cours d'essais à grande échelle. Dans le cas de réussite la cémentation risque de perdre un peu de terrain

III. BRONZE ET FONTES:

III.1 : Les fontes:

Elles équipaient les anciennes roues dentées. Elles ^b subsistent encore actuellement dans certains engins. Elles sont employées sous leur forme sphéroïdale.

III.2 : Les bronzes:

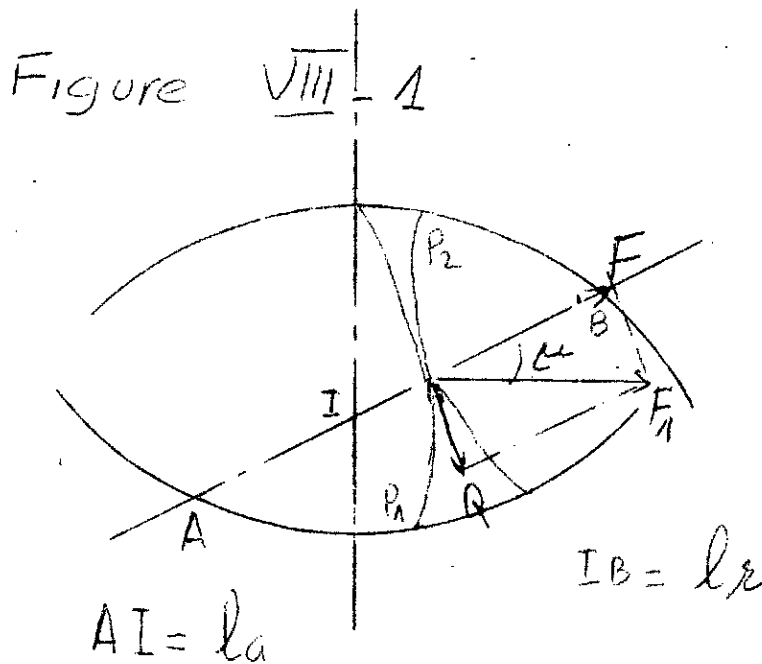
Il en existe tout une gamme; les variétés se distinguant par la nature et la teneur des éléments d'addition aux principaux composants: le cuivre et l'étain. Ils trouvent leur principale application dans les engrenages à roue et vis sans fin. En effet, pour des questions de résistance l'on est obligé de faire appel à eux.

En conclusion, le choix des matériaux, ou leur imposition, fixe dès le départ une certaine gamme d'engrenages bien définis. Il faut donc faire très attention lors du choix. Nous ne cachons pas que pendant que nous effectuons les calculs pour notre boîte de vitesses, nous avons été obligés de refaire notre choix pour satisfaire aux conditions de résistance à la rupture par flexion et cisaillement et de la vérification à la pression superficielle.

CHAPITRE VIII

RENDEMENT DES ENGRENAGES

I. ENGRENAGES PARALLELES:



La figure ci-dessus représente deux profils P_I et P_2 conjugués, en contact sur la ligne d'action.

$AI = l_a =$ longueur d'approche.

$BI = l_r =$ " de retrait.

Si nous supposons qu'il n'y a pas de frottement des dentures l'une sur l'autre, l'action de la dent du pignon sur celle de la roue se traduirait par la force F dirigée suivant la ligne d'action; or ce frottement existe, ce qui se traduit par la force F_f faisant un angle (μ) avec F . Cet angle est appelé : angle de frottement.

Appelons par Q la force de frottement, tangente aux profils considérés.

L'expression de l'effort Q sera:

$$Q = F \cdot \operatorname{tg} \mu \quad \text{si nous appelons} \quad f = \operatorname{tg} \mu$$

alors:

$$Q = F \cdot f \quad f : \text{est dit coefficient de frottement.}$$

Soit W_g le travail perdu par frottement du début à la fin de l'action; sa valeur sera:

$W_q = Q \cdot g$ où g est la longueur de glissement sur tout le parcours sur les deux profils. Cette longueur aura pour expression:

$$g = \frac{l_a^2}{2 \cos \varphi} + \frac{l_r^2}{2 \cos \varphi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

le travail perdu par frottement sera donc:

$$W_q = F \cdot f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \frac{l_a^2 + l_r^2}{2 \cdot \cos \varphi}$$

Appelons par T_f le travail perdu par frottement pendant un tour de la roue, son expression sera:

$$T_f = W_q \cdot 2\pi \cdot R_2 \cos \varphi / (l_a + l_r)$$

Soit T_m le travail moteur fourni, pendant ce temps, à la roue

$$T_m = T \cdot 2 \cdot R_2 \cdot \pi = F \cdot \cos \varphi \cdot 2 \cdot R_2 \cdot \pi$$

On définit alors le rendement de l'engrenage par

$$\rho = 1 - \frac{T_f}{T_m} = 1 - f \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \frac{l_a^2 + l_r^2}{2(l_a + l_r) \cos \varphi}$$

Les deux signes entre les premières parenthèses signifient:

(+) pour les engrenages extérieurs.

(-) " " " intérieurs. Quand les longueurs d'approche et de retrait sont importantes (avec le module de la denture) le rendement diminue. Il est nécessaire de prendre le plus faible module possible.

Il est peut-être surprenant, mais les rendements des engrenages sont excellents. Nous enregistrons ainsi une valeur de (η_p) comprise entre 98% et 99%; il arrive même d'avoir un supérieur pour des engrenages précis. Nous dirons même qu'il n'existe pas d'inférieurs à 97%.

II. ENGRENAGES CONCOURANTS

L'étude peut se ramener à celle des engrenages parallèles, à condition de considérer les engrenages complémentaires. Il est à noter que pour des engrenages concourants, correctement montés, les rendements sont voisins des précédents.

B. ETUDE DE LA BOITE DE VITESSES

RESULTATS DES CALCULS



Données de base.

- boîte de 6 vitesses allant de 200 à 1520 tours par minute avec une vitesse d'entrée de 730 tr/mn
- Puissance à transmettre : 5 C.V
- Manœuvre par un seul levier

I. Introduction.

Nous traiterons, dans ce qui suit, les diverses parties comme des cas particuliers de la théorie établie précédemment. on s'intéressera surtout aux calculs de vérifications: vérification à la rupture, à la pression superficielle, au grippage. Nous adopterons donc, le schéma suivant:

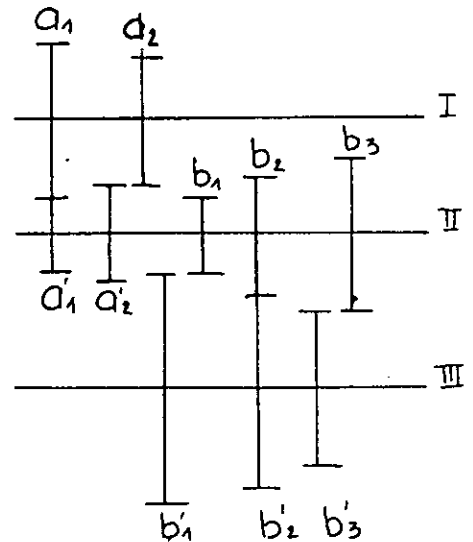
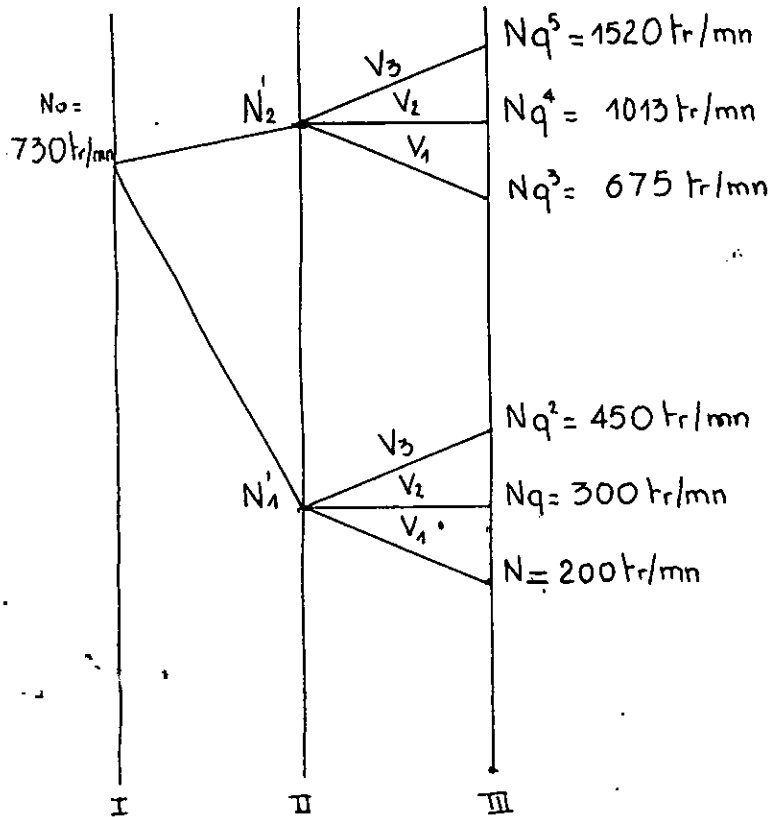
- Choix du réseau
 - denture des pignons
 - vitesses réelles
- Choix du module
 - Détermination complète des éléments dentés
 - Détermination des efforts
- Vérifications
 - à la rupture
 - à la pression superficielle
 - au Grippage
- Détermination des arbres
 - Dimensionnement
 - Vérifications aux vibrations
- Détermination des roulements
- Etude du graissage
- Rendement
- levier de manœuvre
- Carter

• Pour le calcul du rendement, de la "flash Température", il est nécessaire de déterminer des paramètres tels que les vitesses de roulement et de glissement, qui nous permettront par ailleurs de déterminer le coefficient de frottement, et par conséquent la nature de l'huile que l'on utilisera. Pour le levier de manœuvre et le carter, on s'intéressera au côté technologique, à savoir l'encombrement, la forme, les dimensions, les guidages, la protection et les problèmes de montage.

Choix du réseau

Nous optons pour le réseau ci-dessous ($V_2 = 1$) pour la raison suivante : éviter d'avoir une disproportion exagérée entre les diamètres primitifs des roues dentées, et avoir par la même, une répartition uniforme des efforts tangentiels (et normaux). Ce qui constitue le but recherché, pour l'utilisation d'une matière unique pour la réalisation de la pignonnerie.

1. schéma du réseau.



raison q est par hypothèse égale à 1,5. les vitesses de sortie sont prises sur une échelle logarithmique.

2. Détermination des U_i et V_i .

$V_2 = 1$ (par hypothèse)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{Nq}{N} = q \Rightarrow V_1 = \frac{V_2}{q} = 0,6666$$

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{Nq^2}{Nq} = q \Rightarrow V_3 = qV_2 = 1,5$$

$$N'_1 = Nq = N_0 U_1 \Rightarrow U_1 = \frac{Nq}{N_0} = 0,41095$$

$$N'_2 = Nq^4 = N_0 U_2 \Rightarrow U_2 = \frac{Nq^4}{N_0} = 1,38767$$

3. Détermination des nombres de dents:

$$a. \frac{a_1}{a'_1} = U_1 \Rightarrow a'_1 = \frac{a_1}{U_1}$$

$$\text{Prenons } a_1 = 18 \text{ dents} \Rightarrow a'_1 = 44 \text{ dents}$$

$$b. \begin{cases} \frac{a_2}{a'_2} = U_2 \\ a_2 + a'_2 = a_1 + a'_1 = 62 \end{cases} \Rightarrow a_2 = U_2 a'_2$$

$$62 = (U_2 + 1) a'_2 \Rightarrow a'_2 = \frac{62}{U_2 + 1} = 25,97$$

$$\text{on prendra : } a'_2 = 26 \text{ dents}$$

$$a_2 = 36 \text{ dents}$$

$$c. \frac{b_1}{b'_1} = V_1 \Rightarrow b'_1 = \frac{b_1}{V_1} \quad \text{posons } b_1 = 24 \text{ dents} \Rightarrow b'_1 = 36 \text{ dents}$$

$$d. \begin{cases} \frac{b_2}{b'_2} = V_2 \\ b_1 + b'_2 = b_2 + b'_2 = 60 \end{cases} \Rightarrow b_1 = b'_1 = 30 \text{ dents}$$

$$e. \begin{cases} \frac{b_3}{b'_3} = V_3 \\ b_3 + b'_3 = b_2 + b'_2 = b_1 + b'_1 = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} b_3 &= 36 \text{ dents} \\ b'_3 &= 24 \text{ dents} \end{aligned}$$

4. Détermination des nouvelles valeurs des U_i et V_i :

a. Valeurs des U_i :

$$U_1 = \frac{a_1}{a'_1} = \frac{18}{44} = \underline{0,4090909}$$

$$U_2 = \frac{a_2}{a'_2} = \frac{36}{26} = \underline{1,3846}$$

b. Valeurs des V_i :

$$V_1 = \frac{b_1}{b'_1} = \frac{24}{36} = \underline{0,6666}$$

$$V_2 = \frac{b_2}{b'_2} = \frac{30}{30} = \underline{1}$$

$$V_3 = \frac{b_3}{b'_3} = \frac{36}{24} = \underline{1,5}$$

5. Gamme des vitesses calculées à partir des nouvelles valeurs des U_i et V_i .

$$N = N_0 \cdot U_1 \cdot V_1 = 730 \cdot 0,409 \cdot 0,667 = 199,146 \text{ tr/mn}$$

$$Nq = N_0 \cdot U_1 \cdot V_2 = 730 \cdot 0,409 \cdot 1 = 298,570 \text{ tr/mn}$$

$$Nq^2 = N_0 \cdot U_1 \cdot V_3 = 730 \cdot 0,409 \cdot 1,5 = 447,855 \text{ tr/mn}$$

$$Nq^3 = N_0 \cdot U_2 \cdot V_1 = 730 \cdot 1,385 \cdot 0,667 = 674,370 \text{ tr/mn}$$

$$Nq^4 = N_0 \cdot U_2 \cdot V_2 = 730 \cdot 1,385 \cdot 1 = 1011,050 \text{ tr/mn}$$

$$Nq^5 = N_0 \cdot U_2 \cdot V_3 = 730 \cdot 1,385 \cdot 1,5 = 1516,575 \text{ tr/mn}$$

Nous noterons qu'il y a une légère différence entre les valeurs données par le réseau (calculées à partir de la raison q) et celles données par les U_i et V_i .

6. Calcul des Couples:

le couple est donné par: $C = \frac{P}{\omega}$ (N.m)

P : puissance à transmettre en Watts

ω : vitesse de rotation en rd/s

Dans les calculs des couples nous supposons que la puissance est transmise intégralement par les engrenages.

Pignons et roues	N (tours/minute)	ω (rd/s)	C (N.m)
A_1	730	76,445	48,14
A'_1	298,57	31,266	117,70
A_2	730	76,445	48,14
A'_2	1011,05	105,877	34,76
b_1	298,57	31,266	117,70
	1011,05	105,877	34,76
b'_1	199,146	20,855	176,46
	674,37	70,584	52,136
b_2	298,57	31,266	117,70
	1011,05	105,877	34,76
b'_2	298,57	31,266	117,70
	1011,05	105,877	34,76
b_3	298,57	31,266	117,70
	1011,05	105,877	34,76
b'_3	447,855	46,899	78,41
	1516,575	158,735	23,183

7. Calcul du module.

Nous nous proposerons, pour des facilités de réalisation et d'entretien de la pignonnerie, de prendre un module unique pour toute la boîte de vitesse. Nous considérerons donc le cas de contrainte le plus défavorable. De plus, les roues dentées seront usinées dans un acier de résistance pratique à l'écoulement (R_{pe}):

$$R_{pe} = 300 \text{ N/mm}^2 \text{ (Acier 30NC11 de trempe totale à l'huile)}$$

le module "M" est donné par :

$$M \geq \sqrt[3]{\frac{10,6 \cdot Q}{K \cdot R_{pe} \cdot Z}} = \left(\frac{10,6}{K \cdot R_{pe}}\right)^{1/3} \sqrt[3]{\frac{Q}{Z}}$$

où :

Z : nombre de dents du pignon ou de la roue

K = 10 Coefficient de largeur de denture

Q : couple en N.mm

Nous constatons d'après la formule donnant le module que "M" est d'autant plus grand que $\left(\frac{Q}{Z}\right)^{1/3}$ l'est. (la quantité $\left(\frac{10,6}{K \cdot R_{pe}}\right)^{1/3}$ étant constante pour tous les pignons et les roues). De part les calculs effectués plus haut des couples et des nombres de dents nous concluons que :

$$\text{Sup} \left\{ \left(\frac{Q_i}{Z_i} \right) \right\} = \frac{Q_{\max} b_1}{Z_{b_1}} = \frac{176,46}{30}$$

$$\text{d'où } M \geq \left(\frac{10,6}{K \cdot R_{pe}}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{176,46 \cdot 10^3}{30}\right)^{1/3} = 2,744 \text{ mm}$$

nous prendrons comme module normalisé $M_r = 2,75 \text{ mm}$

Nous allons dresser un tableau dans lequel figureront les éléments des pignons et des roues ainsi que les efforts tangentiels et normaux.

Remarque: nous prendrons des engrenages à denture droite à cause de leur prix de revient modéré et de leur facilité d'exécution.

Pignons et roues	Z	$D_p = M_r \cdot Z$ (mm)	$D_c = D_p - 2,5M_r$ (mm)	$D_t = D_p + 2M$ (mm)	φ (N.m)	$T = \frac{2\varphi}{D_p}$ (N)	$N = T \cdot \tan\varphi$ (N)
a_1	18	49,5	42,625	55	$48,14 \cdot 10^3$	1945	708
a'_1	44	121	114,125	126,5	$117,70 \cdot 10^3$	1945	708
a'_2	26	71,5	64,625	77	$34,76 \cdot 10^3$	973	354
a_2	36	99	92,125	104,5	$48,14 \cdot 10^3$	973	354
b_1	24	66	59,125	71,5	$117,70 \cdot 10^3$	3567	1298
b'_1	36	99	92,125	104,5	$176,46 \cdot 10^3$	3567	1298
b_2	30	82,5	75,625	88	$117,70 \cdot 10^3$	2853	1038
b'_2	30	82,5	75,625	88	$117,70 \cdot 10^3$	2853	1038
b_3	36	99	92,125	104,5	$117,70 \cdot 10^3$	2378	866
b'_3	24	66	59,125	71,5	$78,47 \cdot 10^3$	2378	866

Z: nombre de dent

$L = k \cdot M_r = 27,5 \text{ mm}$ (largeur de denture)

D_p : diamètre primitif (mm)

D_t : diamètre de tête (mm)

D_c : diamètre de creux (mm)

T: effort tangentiel (N)

N: effort normal (N)

φ : angle de pression $\varphi = 20^\circ$

Remarque: les efforts tangentiel et normal sur chaque engrenage sont égaux et de sens opposé sur le pignon et la roue.

Vérification à la rupture et à la Prou

Nous prendrons un acier au nickel - Chrome : 30 NC 11 (Acier de trempe totale à l'huile) de caractéristiques suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 160 \leq R_r \leq 190 \text{ Kg/mm}^2 \\ 550 \leq \text{HB} \leq 600 \end{array} \right\} \text{après revenu à } 200^\circ\text{C}$$

Cet acier est généralement utilisé pour des pièces soumises aux efforts répétés, vibrations et chocs. Mécanique soignée : axes, vilbrequins, essieux, engrenages etc....
Ce qui nous donne :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{0i} = 400 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{0i} = 15 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right\} \text{(voir annexe)}$$

Nous calculerons ci-après les divers coefficients entrant dans la formule de vérification.

1- Vérification à la rupture :

$$\underline{T_i = \sigma_{0i} \cdot L \cdot M \cdot Y_i \cdot C_{0i} \cdot C_v \cdot C_{ti} \cdot C_s} \quad T_i : \text{effort tangentiel admissible en N}$$

$$L = 27,5 \text{ mm (largeur de denture)} \quad M = 2,75 \text{ (Module normalisé)}$$

a. facteur de forme de LEWIS : Y_i

Pignons et roves	Z	Y_i
a_1	18	0,310
a'_1	44	0,384
a_2	36	0,370
a'_2	26	0,346
b_1	24	0,338

Pignons et roves	Z	Y_i
b'_1	36	0,370
b_2	30	0,355
b'_2	30	0,355
b_3	36	0,370
b'_3	24	0,338

$$s = 0 \text{ (déport)}$$

b. facteur de service : C_s

Nous avons considéré une durée de fonctionnement de 16h/j pour tous les pignons. Ceci constitue une sécurité dans le cas extrême où l'on est amené à utiliser toutes les vitesses 16h/j pendant des journées successives.

$$C_s = 0,75625 \approx 0,76$$

c. facteur de Conduite : C_{ci}

$$C_{ci} = c_z \left[1 + \frac{2,5}{Z} \right]$$

$$C_{ci} = \frac{a_i}{p} \quad \text{où} \quad a_i = \frac{AB}{\cos \varphi}, \quad p = \pi \cdot M = 8,64 \text{ mm}, \quad \varphi = 20^\circ$$

(Pour la détermination des AB, voir les épures en annexe.)

Pignons	Z	AB (mm)	a_i (mm)	C_i	C_{ci}
A_1	18	16	17	1,97	2,244
A'_1	44	16	17	1,97	2,082
A_2	36	16	17	1,97	2,107
A'_2	26	16	17	1,97	2,160
b_1	24	16,5	17,56	2,03	2,241

Pignons	Z	AB (mm)	a_i (mm)	C_i	C_{ci}
b'_1	36	16,5	17,56	2,03	2,171
b_2	30	17	18,09	2,09	2,264
b'_2	30	17	18,09	2,09	2,264
b_3	36	16,5	17,56	2,03	2,171
b'_3	24	16,5	17,56	2,03	2,241

d. facteur de durée : C_{ti}

$$C_{ti} = 1 / \left(\frac{N_c}{10^7} \right)^{0,1} \quad \text{où} \quad N_c = 60N \cdot T_h \cdot q$$

avec : N : nombre de tours par minute.
 T_h : durée de fonctionnement en heures.
 q : nombre de zones d'engrènement

Pour le calcul du temps de fonctionnement, nous poserons l'hypothèse suivante : Des résultats statistiques, il en ressort que les vitesses les plus utilisées sont celles qui sont situées vers le milieu de la gamme. Ainsi nous considérerons des temps de fonctionnement répartis comme suit :

— Pignons de l'arbre d'entrée I $\Rightarrow T_h = \frac{1}{2} \cdot T_h' = 10.000$ heures

— Pignons de l'arbre intermédiaire II $\Rightarrow T_h = 1 \cdot T_h' = 20.000$ heures

— Pignons de l'arbre de sortie III $\Rightarrow T_h = \frac{1}{3} \cdot T_h' = 6.667$ heures

De plus, de par la constitution de notre boîte de vitesses, chaque pignon ne possède qu'une zone d'engrènement, par conséquent : $q = 1$

Nous donnons ci-après le tableau des divers C_{ti} calculés pour les vitesses supérieures des pignons susceptibles d'en avoir deux.

Tableau des valeurs de C_{t_i}

Pignons	N (tr/mn)	q	Temps de fonction. en h (Tn)	$N_c = 60.N.T_n.q$	$C_{t_i} = 1/\left(\frac{N_c}{10^7}\right)^{0,1}$
A_1	730	1	10 000	$43,80 \cdot 10^7$	0,685
A'_1	298,64	1	20 000	$35,84 \cdot 10^7$	0,699
A_2	730	1	10 000	$43,80 \cdot 10^7$	0,685
A'_2	1011,05	1	20 000	$121,30 \cdot 10^7$	0,619
b_1	1010,76	1	20 000	$121,30 \cdot 10^7$	0,619
b'_1	674,37	1	6 667	$26,95 \cdot 10^7$	0,719
b_2	1011,05	1	20.000	$121,30 \cdot 10^7$	0,619
b'_2	1011,05	1	6 667	$121,30 \cdot 10^7$	0,619
b_3	1011,05	1	20 000	$121,30 \cdot 10^7$	0,619
b'_3	1516,575	1	6 667	$60,65 \cdot 10^7$	0,663

e. facteur de vitesse C_v

$$C_v = \frac{6}{6 + \sqrt{V}} \quad \text{où } V : \text{vitesse tangentielle en m/s} \quad V = \omega \cdot \frac{D_p}{2}$$

Cette formule est utilisée pour les dentures de bonne qualité commerciale, obtenues par machines outils et un outillage récent. (boîte de vitesse, pignonnerie de certaines machines etc....)

N.B.: Par mesure de sécurité, nous calculerons V pour les vitesses de rotation les plus élevées, car quand V augmente, C_v diminue donc l'effort T_i diminue.

Pignons	D_p (mm)	N (tr/mn)	V (m/s)	C_v
A_1	49,5	730	1,892	0,814
A'_1	121	298,57	1,892	0,814
A_2	99	730	3,785	0,755
A'_2	71,5	1011,05	3,785	0,755
b_1	66	1011,05	3,495	0,762

Pignons	D_p (mm)	N (Tr/mn)	V (m/s)	C_v
b'_1	99	674,34	3,495	0,762
b_2	82,5	1011,05	4,367	0,742
b'_2	82,5	1011,05	4,367	0,742
b_3	99	1011,05	5,241	0,724
b'_3	66	1516,575	5,241	0,724

Tableau des valeurs de C_v

Pignons	M_r (mm)	L (mm)	t_{oi} (N/mm)	Y_i	C_{ci}	$C_{\sigma i}$	C_{ti}	C_s	T_i (N)
a_1	2,75	27,5	400	0,310	2,244	0,814	0,685	0,76	8 917
a'_1	2,75	27,5	400	0,384	2,082	0,814	0,699	0,76	10 458
a_2	2,75	27,5	400	0,370	2,107	0,755	0,685	0,76	9 502
a'_2	2,75	27,5	400	0,346	2,100	0,755	0,619	0,76	7 832
b_1	2,75	27,5	400	0,338	2,241	0,762	0,619	0,76	8 214
b'_1	2,75	27,5	400	0,370	2,171	0,762	0,719	0,76	10 118
b_2	2,75	27,5	400	0,355	2,264	0,742	0,619	0,76	8 487
b'_2	2,75	27,5	400	0,355	2,264	0,742	0,691	0,76	9 474
b_3	2,75	27,5	400	0,370	2,171	0,724	0,619	0,76	8 276
b'_3	2,75	27,5	400	0,338	2,241	0,724	0,663	0,76	8 359

Tableau des valeurs de T_i (effort tangentiel admissible)

2. Vérification à la pression superficielle.

L'effort admissible est donné par:

$$T_i = K_{oi} \cdot L \cdot D_{ai} \cdot C_r \cdot C_\beta \cdot C_{ti} \cdot C_v \cdot C_s$$

où K_{oi} = limite pratique de base à la fatigue par pression superficielle (voir annexe)
 D_{ai} = diamètre du pignon de l'engrenage considéré.

$$C_{ti} = [C_{ti \text{ rupture}}]^2$$

$$C_r = \frac{K}{K+1} \quad \text{où } K = \frac{\text{nombre de dents de la roue}}{\text{nombre de dents du pignon.}}$$

$C_\beta = 1$ pour la denture droite (C_β : facteur d'inclinaison)

les facteurs C_s et C_r sont égaux à ceux calculés pour la vérification à la rupture.

Détermination des C_r et C_{ti}

Roues dentées	Z	K	C_r	C_{ti}
a_1	18	2,444	0,710	0,469
a'_1	44			0,489
a_2	36	1,385	0,581	0,469
a'_2	26			0,383
b_1	24	1,5	0,600	0,383
b'_1	36			0,517
b_2	30	1	0,500	0,383
b'_2	30			0,477
b_3	36	1,5	0,600	0,383
b'_3	24			0,440

Nous allons dresser un tableau donnant les T_i (vérification à la pression superficielle).

roues dentées	D_p (mm)	D_{ai} (mm)	L	K_{oi} (N/mm ²)	C_{ri}	C_β	C_{ti}	C_v	C_s	T_i (N)
a_1	49,5	49,5	27,5	15	0,710	1	0,469	0,814	0,76	4206
a'_1	121		27,5	15		1	0,489	0,814	0,76	4386
a_2	99	71,5	27,5	15	0,581	1	0,469	0,755	0,76	4611
a'_2	71,5		27,5	15		1	0,383	0,755	0,76	3766
b_1	66	66	27,5	15	0,600	1	0,383	0,762	0,76	3623
b'_1	99		27,5	15		1	0,517	0,762	0,76	4891
b_2	82,5	82,5	27,5	15	0,500	1	0,383	0,742	0,76	3675
b'_2	82,5		27,5	15		1	0,477	0,742	0,76	4577
b_3	99	66	27,5	15	0,600	1	0,383	0,724	0,76	3442
b'_3	66		27,5	15		1	0,440	0,724	0,76	3955

Tableau des valeurs de T_i (Vérification à la pression superficielle)

Determination des facteurs de Grippage

1. Facteur P.V

P: pression superficielle de Hertz exprimée en Kglmm^2 et donnée par: $P = 62 \sqrt{F_v \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} \right)}$

V: Vitesse de glissement en m/s

2. Facteur P.V.T

les Facteurs P et V sont ceux définis ci-dessus.

T: distance du point de contact au primitif en mm

Remarque: Ce facteur est très utilisé pour les engrenages à très grandes vitesses.

Tableau des valeurs de P.V, P.V.T

Pignons et roves	Rayons (mm)	Pression: P (Kglmm^2)	Vitesse de glissement V (m/s)	T (mm)	P.V	P.V.T
a_1	24,75	69,40	0,8524	9	59,16	532,42
a'_1	60,5			7		
a_2	49,5	46,09	1,4524	7	66,94	602,47
a'_2	35,75			9		
b_1	33	90,27	1,4293	8	129,03	1096,73
b'_1	49,5			8,5		
b_2	41,25	77,56	1,7991	8,5	139,54	1186,08
b'_2	41,25			8,5		
b_3	49,5	73,70	3,4127	8,5	251,51	2137,86
b'_3	33			8		

Contrainte de cisaillement maximum
Profondeur de Cisaillement maximum

Contrainte de cisaillement maximum en Kg/mm^2 : S_c

$$S_c = 0,35$$

Pression superficielle de Hertz en Kg/mm^2 : S

profondeur de cisaillement maximum en mm : p_c

$$p_c = 0,8a$$

demie largeur d'écrasement en mm : a

Tableau donnant S_c et p_c

Couples d'engrenages	Pression S (Kg/mm^2)	S_c (Kg/mm^2)	a (mm)	p_c (mm)
$a_1 - a'_1$	69,40	20,82	0,074	0,059
$a_2 - a'_2$	46,09	13,83	0,051	0,041
$b_1 - b'_1$	90,27	27,01	0,096	0,077
$b_2 - b'_2$	77,56	23,27	0,088	0,071
$b_3 - b'_3$	73,70	22,11	0,078	0,063

Calcul des vitesses de roulement et de glissement

V_{r1} : vitesse de roulement du pignon exprimée en cm/s et donnée par $V_{r1} = \omega_1 C_1 A$ ou $\omega C_1 B$

V_{r2} : vitesse de roulement de la roue en cm/s et donnée par $V_{r2} = \omega_2 C_2 A$ ou $\omega_2 C_2 B$

V_g : vitesse de glissement en cm/s donnée par $V_g = V_{r1} - V_{r2}$

Tableau de valeurs des V_{ri} et V_g

Pignons et roues	ω (rd/s)	$C_1 A$ et $C_2 A$ (cm)	V_{r1A} et V_{r2A} (cm/s)	$V_{gA} = V_{r1A} - V_{r2A}$ (cm/s)	$\sqrt{V_{r1A} \cdot V_{r2A}}$ (cm/s) ^{1/2}	$C_1 B$ et $C_2 B$ (cm)	V_{r1B} et V_{r2B} (cm/s)	$V_{gB} = V_{r1B} - V_{r2B}$ (cm/s)	$\sqrt{ V_{r1B} - V_{r2B} }$ (cm/s) ^{1/2}
A_1	76,445	1,65	126,077	87,014	4,978	0,05	3,821	-85,242	7,483
	A_1'	31,26	1,25			39,063	2,85		
A_2	76,445	2,40	183,384	146,343	7,456	0,80	61,128	-145,241	6,547
	A_2'	105,877	0,35			37,041	1,95		
b_1	31,266	1,90	59,85	44,205	3,781	-0,25	7,813	-42,251	4,280
	105,877		201,077			26,458			
b_1'	20,855	0,75	15,645	148,142	6,904	-2,40	50,064	-142,938	7,871
	70,58		52,935			169,392			
b_2	31,266	2,25	70,313	53,125	4,239	-0,55	17,188	-53,125	4,239
	105,877		238,118			58,207			
b_2'	31,266	0,55	17,188	179,911	7,802	2,25	70,313	-179,911	7,802
	105,877		58,207			238,118			
b_3	31,266	1,95	60,938	28,122	2,078	-0,30	9,375	-100,793	7,344
	105,877		206,369			31,749			
b_3'	46,899	0,70	32,816	95,258	3,825	2,35	110,168	-341,267	13,679
	158,73		111,111			373,016			

Remarque: A partir de la plus faible valeur de V_g , nous déterminerons le coefficient de frottement grâce à l'abaque donné en annexes (Pour une huile minérale).

Calcul de la "FLASH TEMPERATURE"

La "flash température" est donnée par : $t_f = 1,17 f \cdot \frac{T/L \sqrt{Vr_1 - \sqrt{Vr_2}}}{b \cdot \sqrt{2a}}$ (°C) où :

f : coefficient de frottement égal à 0,06

T/L : effort tangentiel unitaire exprimé en Kg/cm (L : largeur de denture)

Vr₁ et Vr₂ : vitesses de roulement du pignon et de la roue exprimées en cm/s

b : coefficient de conductibilité thermique égal à : 14 Kg/cm.s^{1/2}.°C

2a : largeur d'écrasement en cm . $2a = 0,02 \sqrt{\frac{F_u}{\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}}}$ (mm)

t_e : température effective au contact égale à : t_f + T° ambiante

La Température ambiante sera prise égale à 20°C

Tableau des valeurs de t_f et t_e

Rayons Pignon	Rayons (mm)	T/L (Kg/cm)	$F_u = \frac{T}{L \cos \varphi}$ (Kg/mm)	$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}$ (mm ⁻¹)	$\sqrt{2a}$ (cm ^{1/2})	$ \sqrt{Vr_1} - \sqrt{Vr_2} $	t _f (°C)	t _e (°C)
A ₁	24,75	70,727	7,527	0,1372	0,1217	7,483	22	42
A' ₁	60,5							
A ₂	49,5	35,382	3,765	0,1448	0,1010	6,547	12	32
A' ₂	35,75							
b ₁	33	129,709	13,803	0,1499	0,1385	7,871	37	57
b' ₁	49,5							
b ₂	41,25	103,745	11,040	0,1418	0,1328	7,802	31	51
b' ₂	41,25							
b ₃	49,5	86,473	9,202	0,1499	0,1252	13,679	48	68
b' ₃	33							

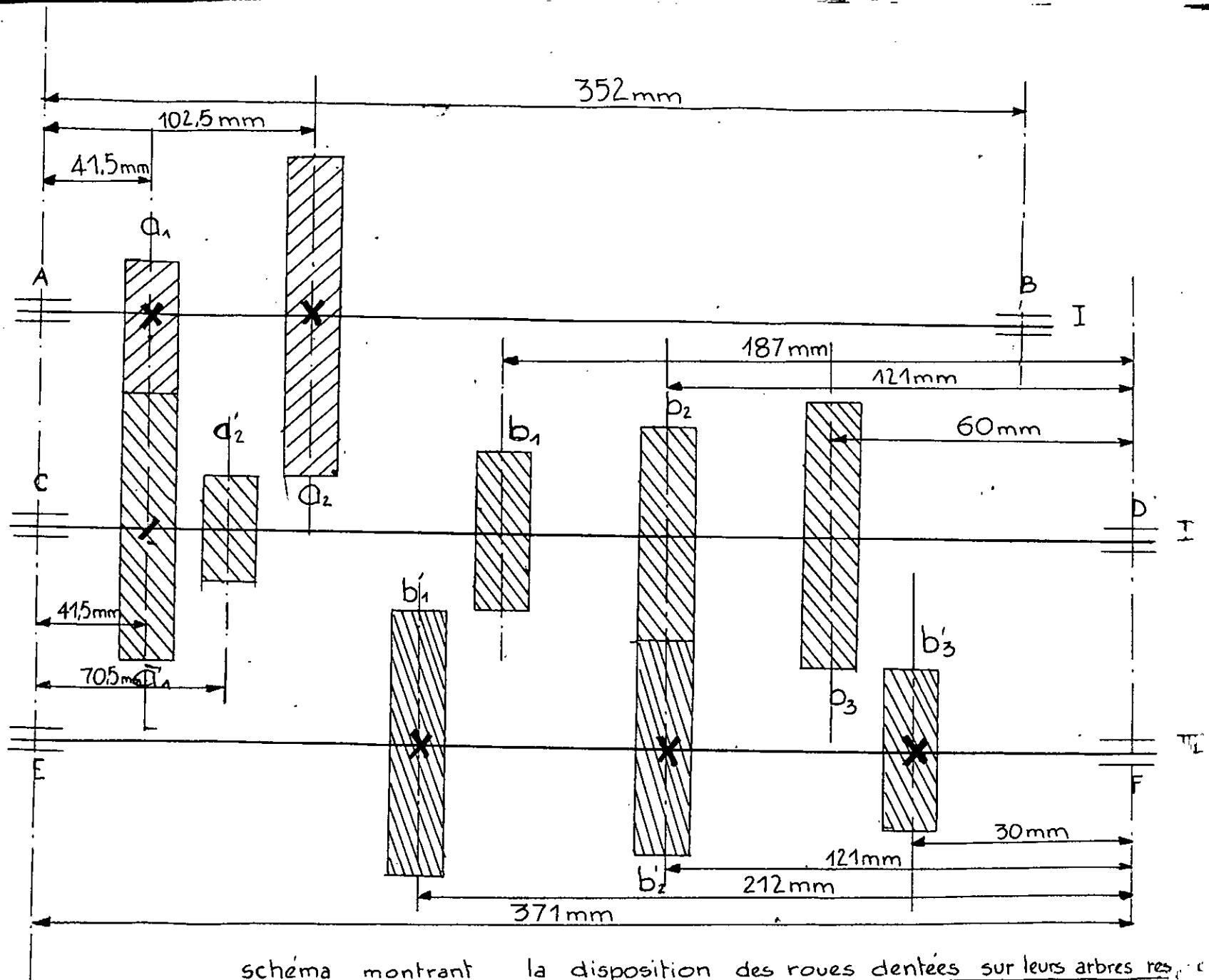


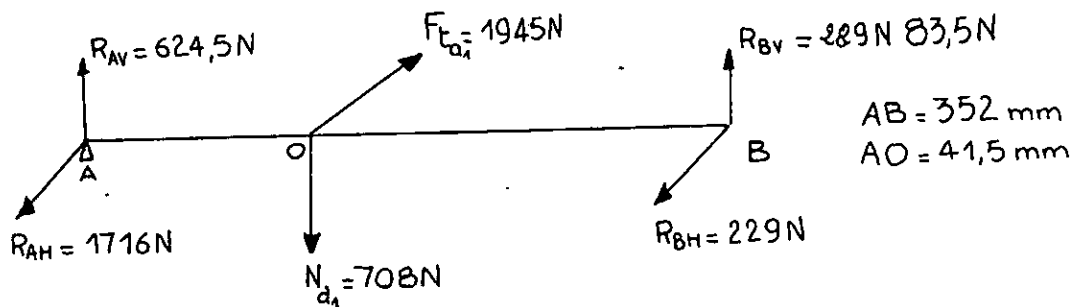
schéma montrant la disposition des roues dentées sur leurs arbres respectifs

Nb: les arbres sont perpendiculaires entre eux.

CALCUL DES ARBRES

A: Arbre d'entrée I

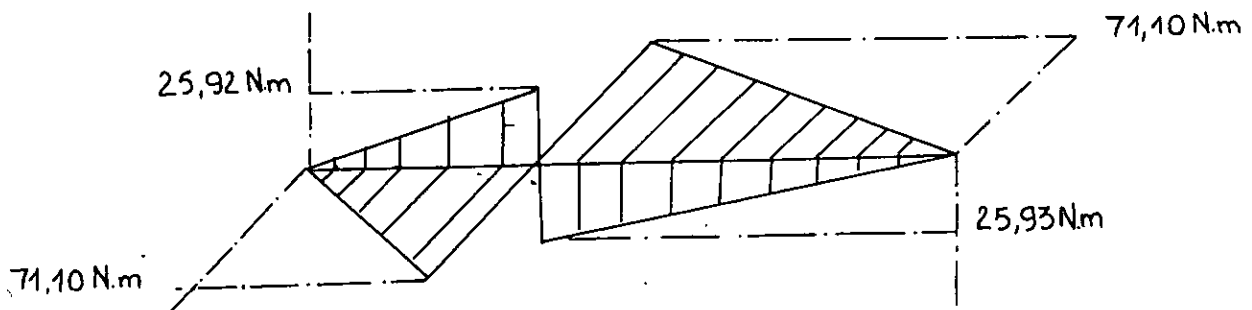
1/ Pignon a_1



$$R_{BH} = \frac{F_{t_{a_1}} \cdot OA}{AB} = 229,3 \text{ N} \approx 229 \text{ N} \Rightarrow R_{AH} = 1716 \text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{a_1} \cdot OA}{AB} = 83,47 \text{ N} \approx 83,5 \text{ N} \Rightarrow R_{AV} = 624,5 \text{ N}$$

Moments flechissants:



$$M_f = \sqrt{M_{fv}^2 + M_{fh}^2} = 75,78 \text{ N.m}$$

Moment de torsion:

$$M_t = 48,14 \text{ N.m}$$

Moment idéal:

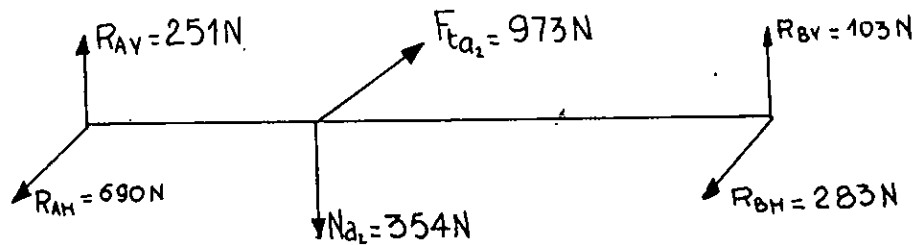
$$M_I = \sqrt{M_f^2 + M_t^2} = 89,78 \text{ N.m}$$

diamètre de l'arbre:

$$R_{pe} = 300 \text{ N/mm}^2$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{10 M_I}{R_{pe}}} = 14,41 \text{ mm}$$

2/ Pignon α_2



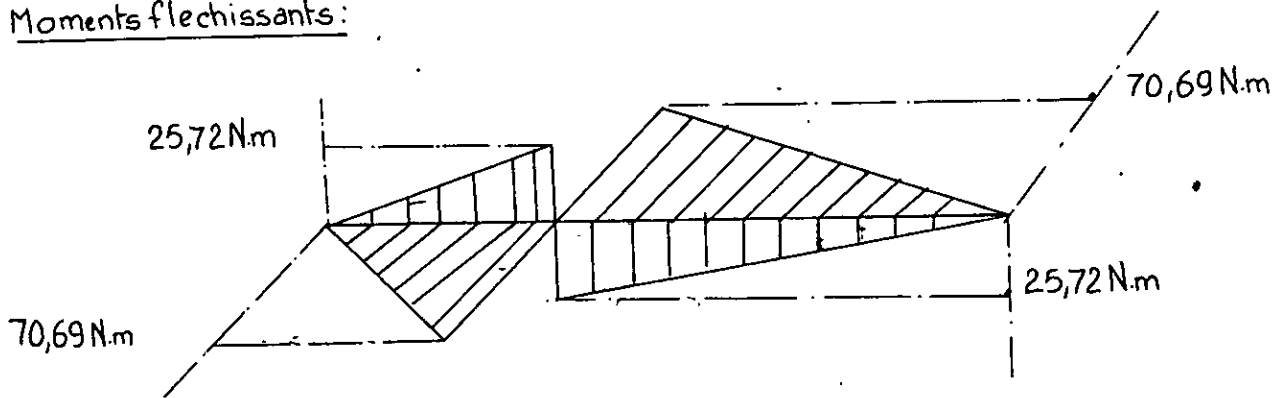
$$AB = 352 \text{ mm}$$

$$AO = 102,5 \text{ mm}$$

$$R_{BH} = \frac{F_{t_{\alpha_2}} \cdot AO}{AB} = 283,33 \text{ N} \approx 283 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AH} = 690 \text{ N}$$

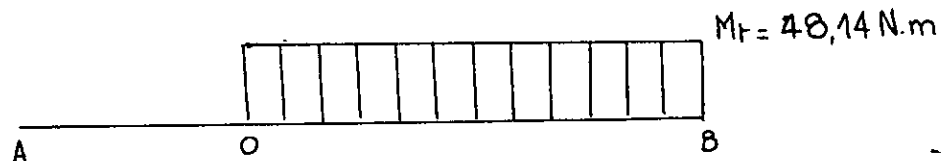
$$R_{BV} = \frac{N_{\alpha_2} \cdot AO}{AB} = 103,08 \text{ N} \approx 103 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AV} = 251 \text{ N}$$

Moments flechissants:



$$M_f = \sqrt{M_{fH}^2 + M_{fV}^2} = 75,22 \text{ N.m}$$

Moment de torsion:



Moment idéal:

$$M_I = \sqrt{M_f^2 + M_t^2} = 89,31 \text{ N.m}$$

diamètre de l'arbre: $R_{pe} = 300 \text{ N/mm}^2$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{10 M_I}{R_{pe}}} = 14,39 \text{ mm}$$

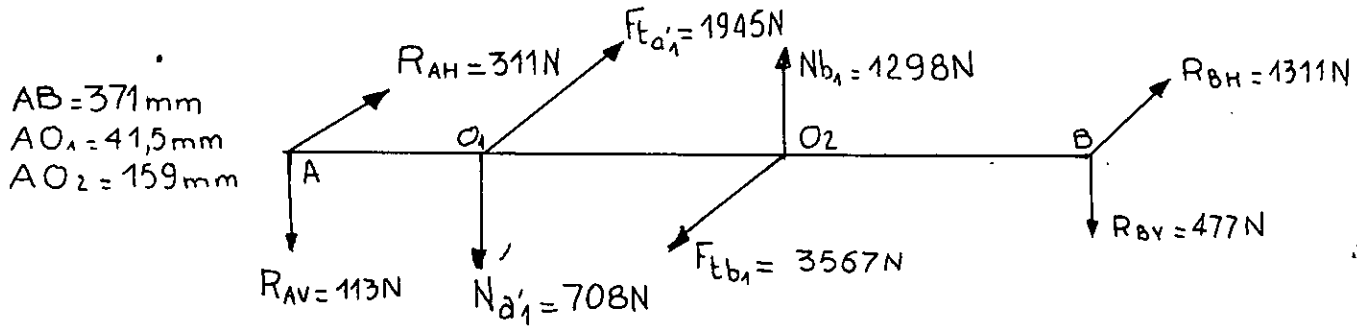
On prendra donc pour l'arbre d'entrée (I), un arbre cannelé de:

diamètre du noyau: $d_{\text{noyau}} = 16 \text{ mm}$

diamètre extérieur: $d_{\text{ext}} = 20 \text{ mm}$

C - Arbre intermédiaire II

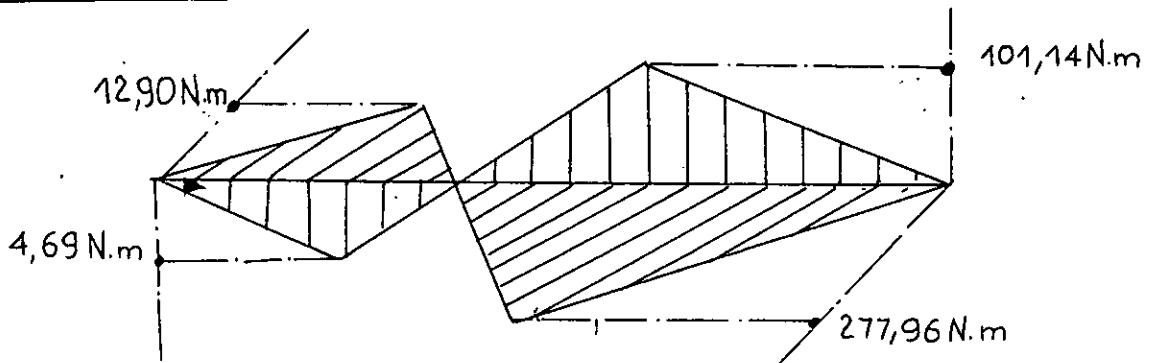
1/ Cas $(a_1, a_1) - (b_1, b_1)$



$$R_{BH} = \frac{F_{tb_1} \cdot AO_2}{AB} - \frac{F_{ta_1} \cdot AO_1}{AB} = 1311,15 \text{ N} \approx 1311 \text{ N} \Rightarrow R_{AH} = 311 \text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b_1} \cdot AO_2}{AB} - \frac{N_{a_1} \cdot AO_1}{AB} = 477,09 \text{ N} \approx 477 \text{ N} \Rightarrow R_{AV} = 113 \text{ N}$$

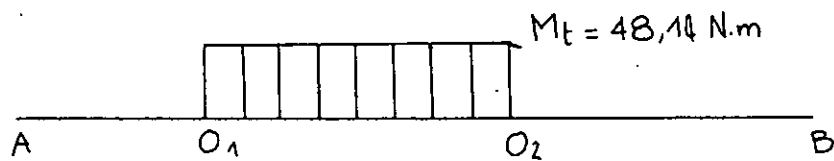
Moments flechissants:



la section dangereuse se situe au niveau du point O_2 , centre du pignon.

$$M_f = 295,79 \text{ N.m}$$

Moment de torsion:



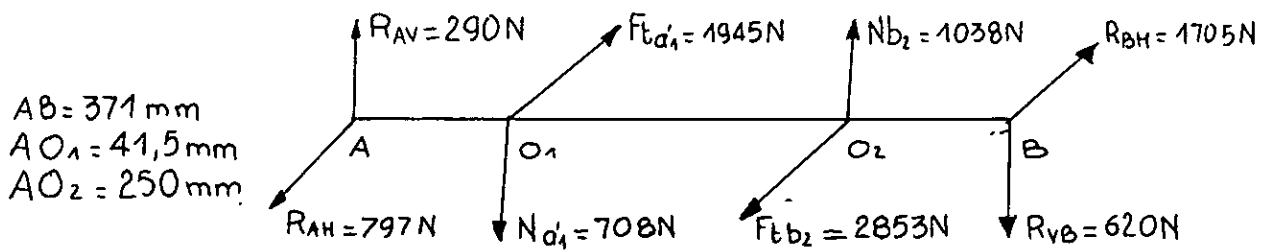
Moment idéal:

$$M_I = 318,35 \text{ N.m}$$

diamètre de l'arbre:

$$d \geq 21,97 \text{ mm}$$

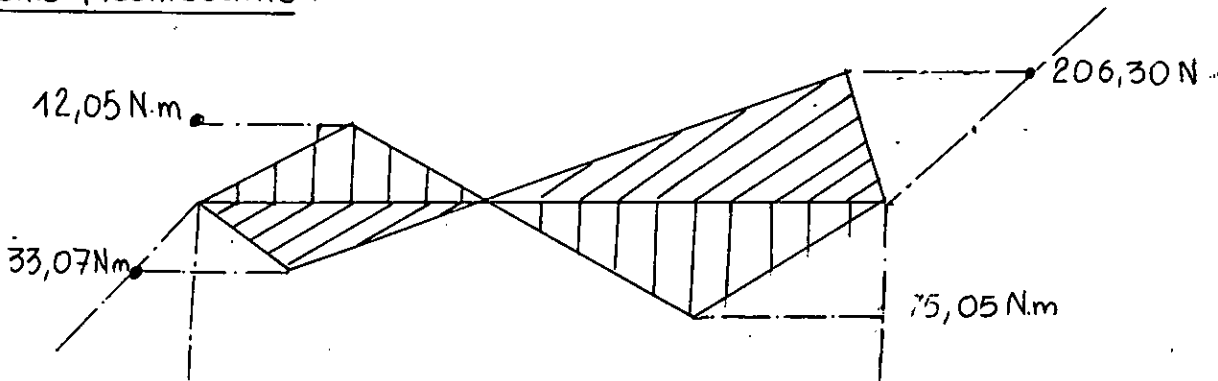
$\rightarrow d_3 (O_1, O_1) - (O_2, O_2)$



$$R_{BH} = \frac{F_{tb2} \cdot AO_2}{AB} - \frac{F_{td1} \cdot AO_1}{AB} = 1704,94 \text{ N} \approx 1705 \text{ N} \Rightarrow R_{AH} = 797 \text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b2} \cdot AO_2}{AB} - \frac{N_{d1} \cdot AO_1}{AB} = 620,26 \text{ N} \approx 620 \text{ N} \Rightarrow R_{AV} = 290 \text{ N}$$

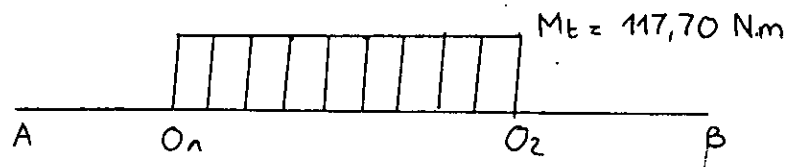
Moments flechissants :



la section dangereuse est située au niveau du point O_2

$$M_f = 219,53 \text{ N.m}$$

Moment de torsion :

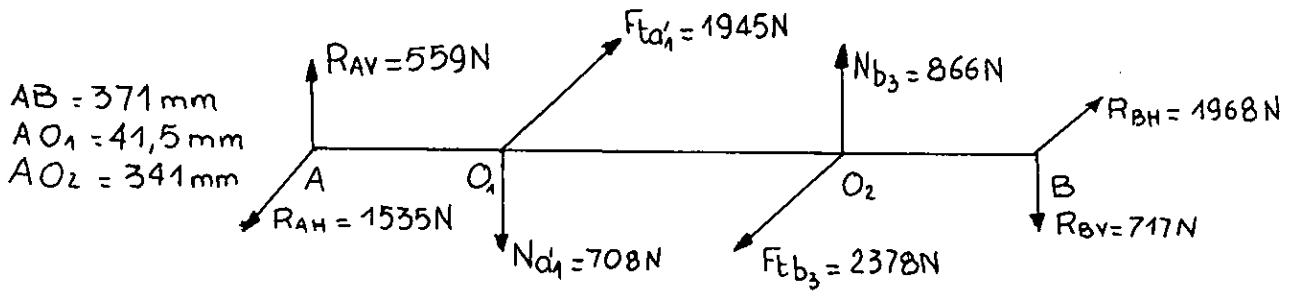


Moment idéal :

$$M_I = 249,09 \text{ N.m}$$

On constate que : $M_{I(a_1, a_1) - (b_1, b_1)} > M_{I(a_1, a_1) - (b_2, b_2)}$

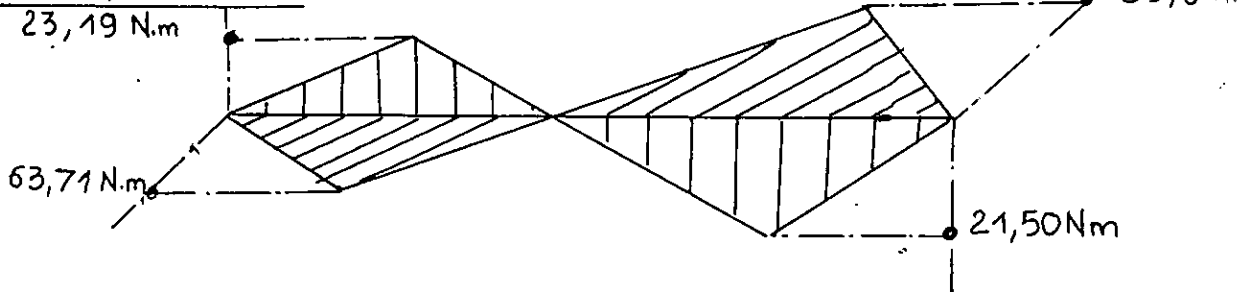
3/ $\cos(a_1, a'_1) - (b_3, b'_3)$



$$R_{BH} = \frac{F_{t b_3} \cdot AO_2}{AB} - \frac{F_{t a'_1} \cdot AO_1}{AB} = 1968,14 \text{ N} \approx 1968 \text{ N} \Rightarrow R_{AH} = 1535 \text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b_3} \cdot AO_2}{AB} - \frac{N_{d'_1} \cdot AO_1}{AB} = 716,78 \text{ N} \approx 717 \text{ N} \Rightarrow R_{AV} = 559 \text{ N}$$

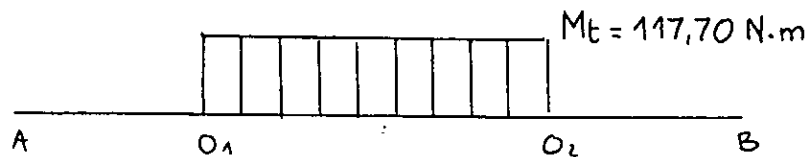
Moments flechissants :



la section dangereuse se situe au niveau du point O_1 centre de a'_1

$$M_f = 67,80 \text{ N.m}$$

Moment de torsion :



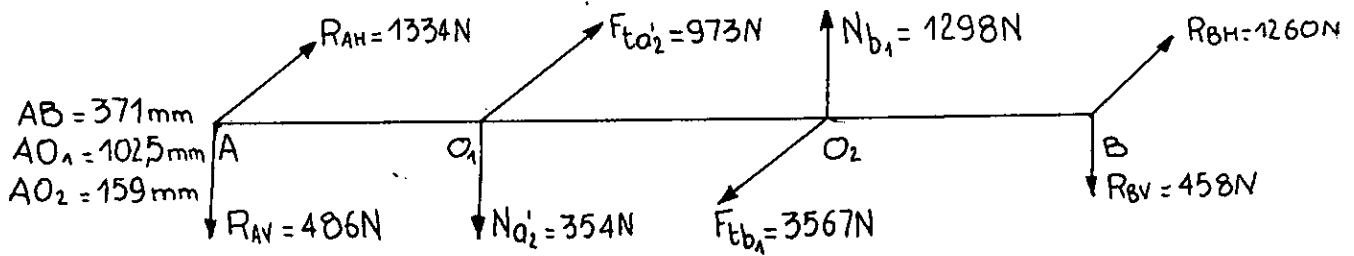
Moment idéal :

$$M_I = 135,83 \text{ N.m}$$

on constate que :

$$M_I(a_1, a'_1) - (b_1, b'_1) > M_I(a_1, a'_1) - (b_2, b'_2) > M_I(a_1, a'_1) - (b_3, b'_3)$$

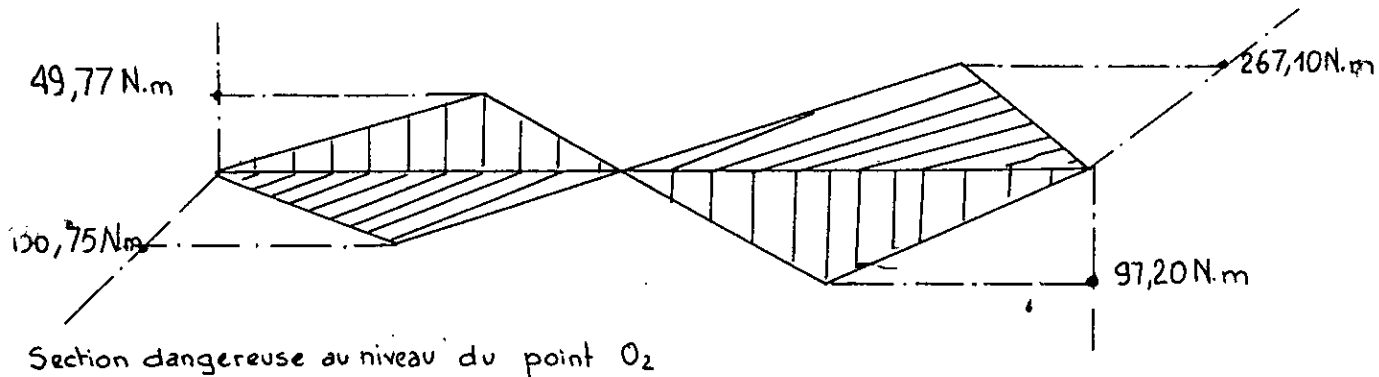
4° Cas (a₂, a'₂) - (b₁, b'₁)



$$R_{BH} = \frac{F_{tb_1} \cdot AO_2}{AB} - \frac{F_{to_2} \cdot AO_1}{AB} = 1259,89 \text{ N} \approx 1260 \text{ N} \Rightarrow R_{AH} = 1334 \text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b_1} \cdot AO_2}{AB} - \frac{N_{a'_2} \cdot AO_1}{AB} = 458,48 \text{ N} \approx 458 \text{ N} \Rightarrow R_{AV} = 486 \text{ N}$$

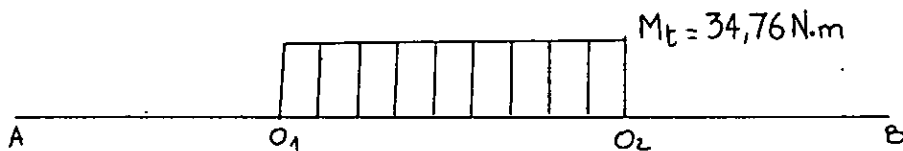
Moments flechissants:



Section dangereuse au niveau du point O₂

$$M_f = 284,24 \text{ N.m}$$

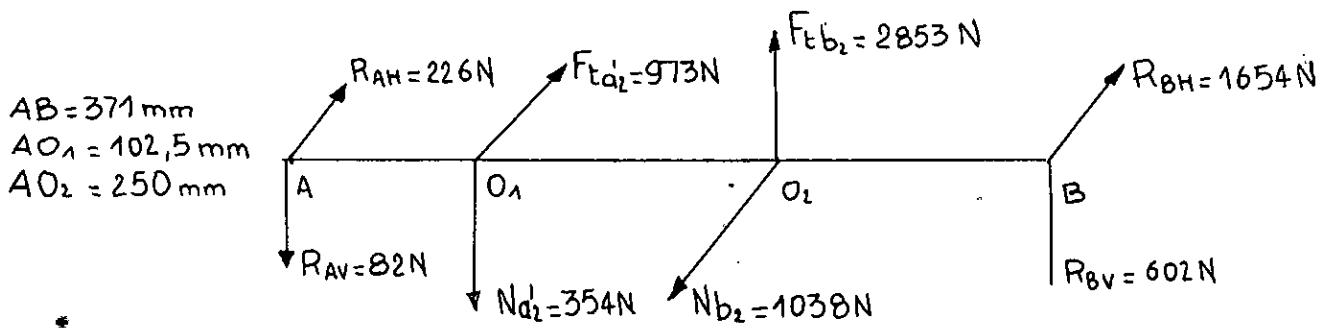
Moment de Torsion:



Moment idéal:

$$M_I = 286,35 \text{ N.m}$$

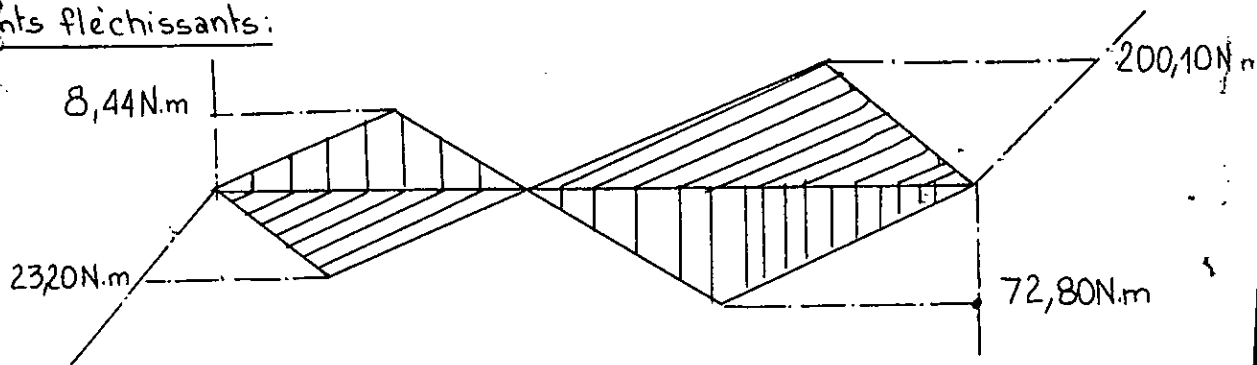
5° Cas $(a_2, a'_2) - (b_2, b'_2)$



$$R_{BH} = \frac{F_{t'b_2} \cdot AO_2}{AB} - \frac{F_{t'a_2} \cdot AO_1}{AB} = 1653,69 \text{ N} \approx 1654 \text{ N} \Rightarrow R_{AH} = 226 \text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b_2} \cdot AO_2}{AB} - \frac{N_{a'_2} \cdot AO_1}{AB} = 601,66 \text{ N} \approx 602 \text{ N} \Rightarrow R_{AV} = 82 \text{ N}$$

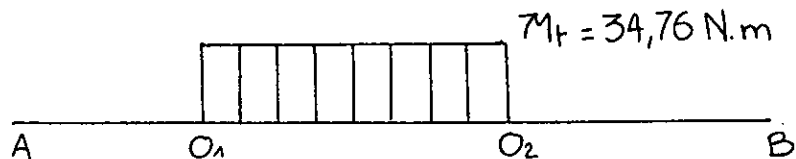
Moments fléchissants:



Section dangereuse au niveau du point O_2

$$M_p = 212,93 \text{ N.m}$$

Moment de torsion:

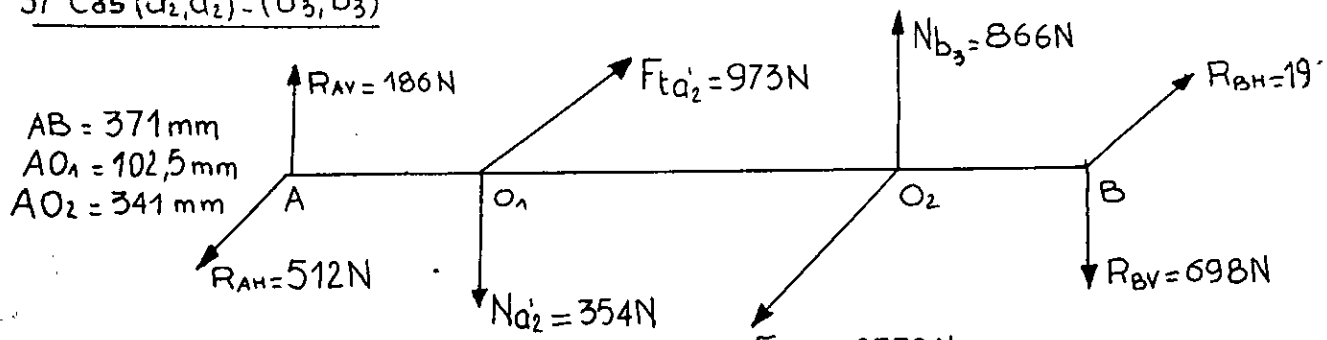


Moment idéal :

$$M_I = 215,75 \text{ N.m}$$

on constate que $M_I(a_2, a'_2) - (b_1, b'_1) > M_I(a_2, a'_2) - (b_2, b'_2)$

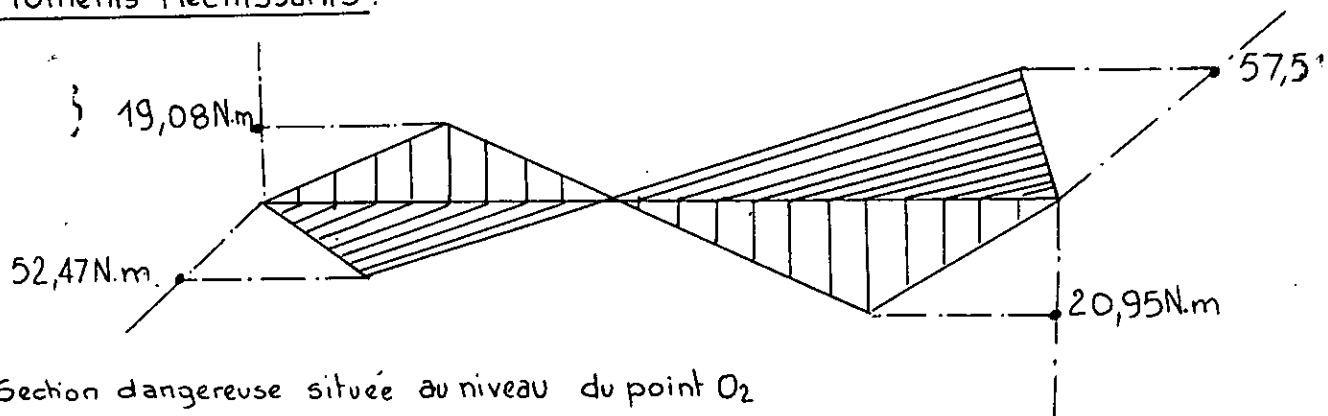
si Cas (a₂, a₂') - (b₃, b₃)



$$R_{BH} = \frac{F_{tb_3} \cdot AO_2}{AB} - \frac{F_{ta_2'} \cdot AO_1}{AB} = 1916,89N \approx 1917N \implies R_{AH} = 512N$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b_3} \cdot AO_2}{AB} - \frac{N_{a_2'} \cdot AO_1}{AB} = 698,17N \approx 698N \implies R_{AV} = 186N$$

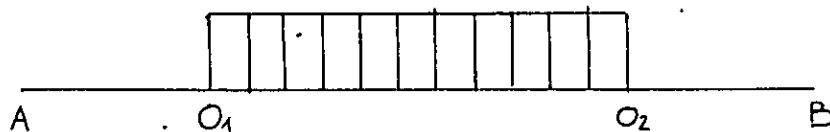
Moments flechissants:



Section dangereuse située au niveau du point O₂

$$M_f = 61,21 N.m$$

Moment de torsion:



Moment idéal:

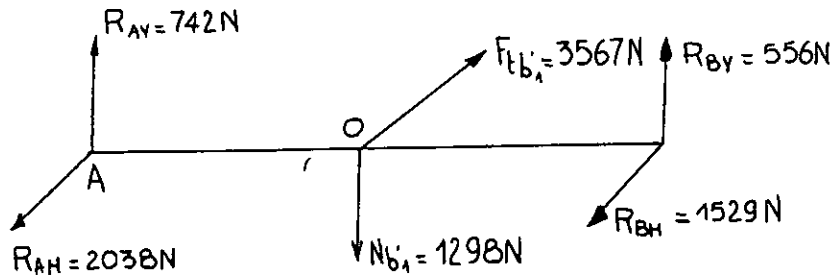
$$M_I = 70,39 N.m$$

on constate que pour le calcul de l'arbre, on ne doit considérer que le cas (a₁ - b₁, b₁') pour lequel le moment idéal est le plus important.
on prendra un arbre normalisé de:

diamètre du noyau : d_{noyau} = 23 mm
diamètre extérieur : d_{ext} = 28 mm

B. Arbre de Sortie : III

1^{er} roue b₁

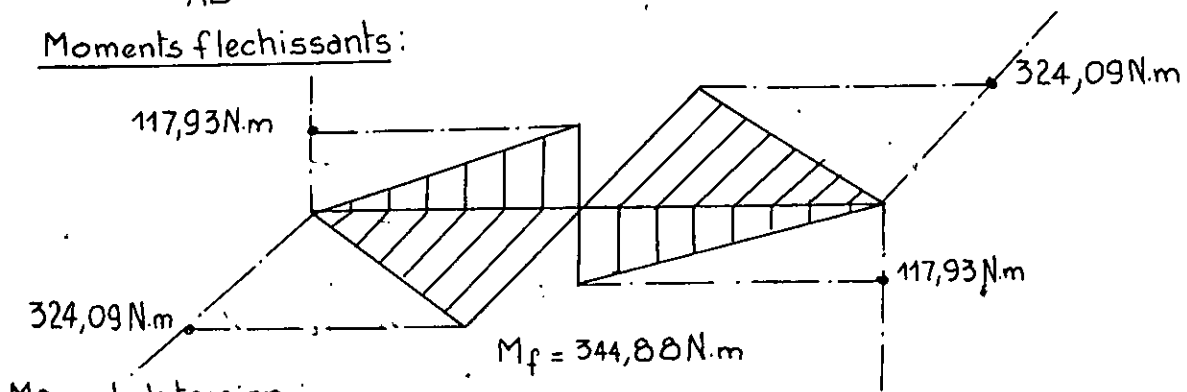


AB = 371 mm
AO = 159 mm

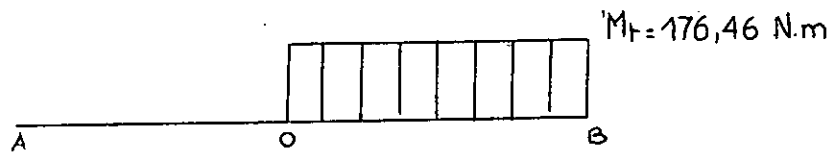
$$R_{BH} = \frac{F_{t b_1} \cdot AO}{AB} = 1528,71 \text{ N} \approx 1529 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AH} = 2038 \text{ N}$$

$$R_{BY} = \frac{N_{b_1} \cdot AO}{AB} = 556,29 \text{ N} \approx 556 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AY} = 742 \text{ N}$$

Moments flechissants :



Moment de torsion :

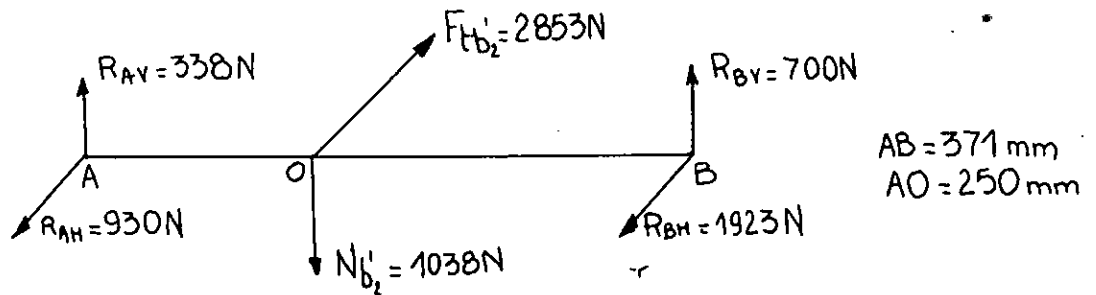


Moment idéal : $M_I = 387,40 \text{ N.m}$

diamètre de l'arbre : $R_{pe} = 300 \text{ N/mm}^2$

$$d \geq 23,46 \text{ mm}$$

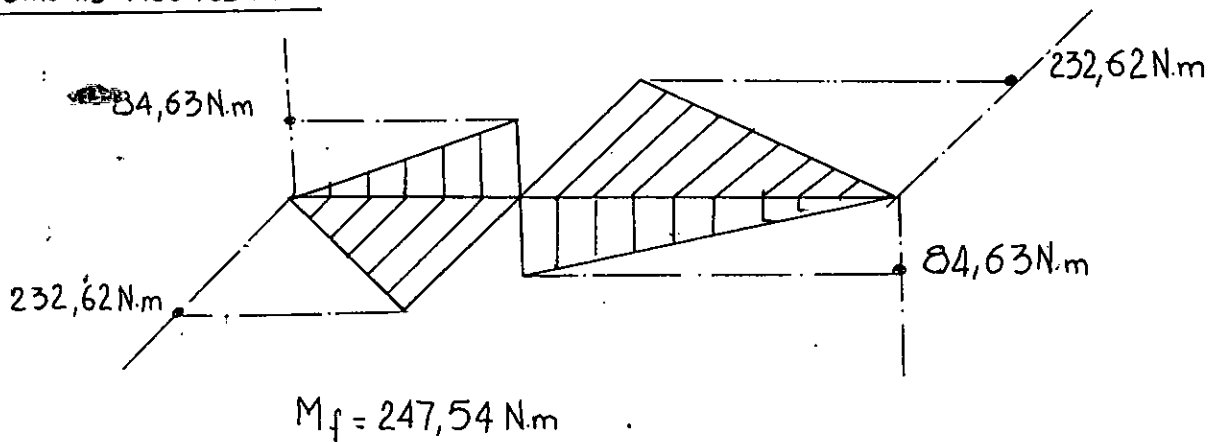
2/ Pignon b₂



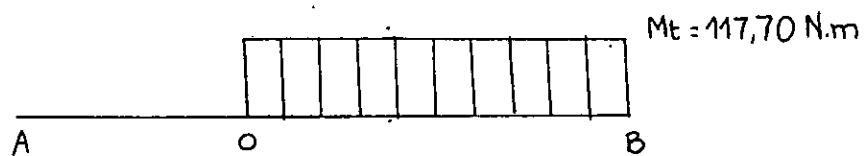
$$R_{BH} = \frac{F_{tb_2} \cdot AO}{AB} = 1922,51\text{ N} \approx 1923\text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AH} = 930\text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N'_{b_2} \cdot AO}{AB} = 699,5\text{ N} \approx 700\text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AV} = 338\text{ N}$$

Moments fléchissants:



Moment de torsion:

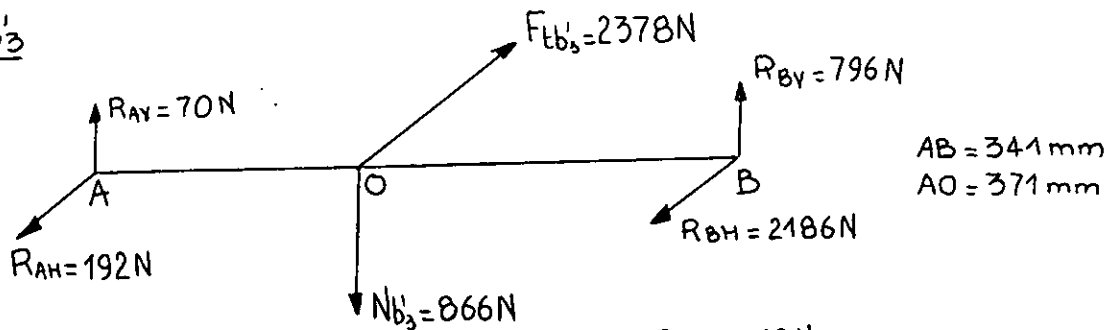


Moment idéal:

$$M_I = 274,09\text{ N.m}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer le diamètre de l'arbre puisque le moment idéal du pignon b₂ est inférieur à celui de la roue b₁.

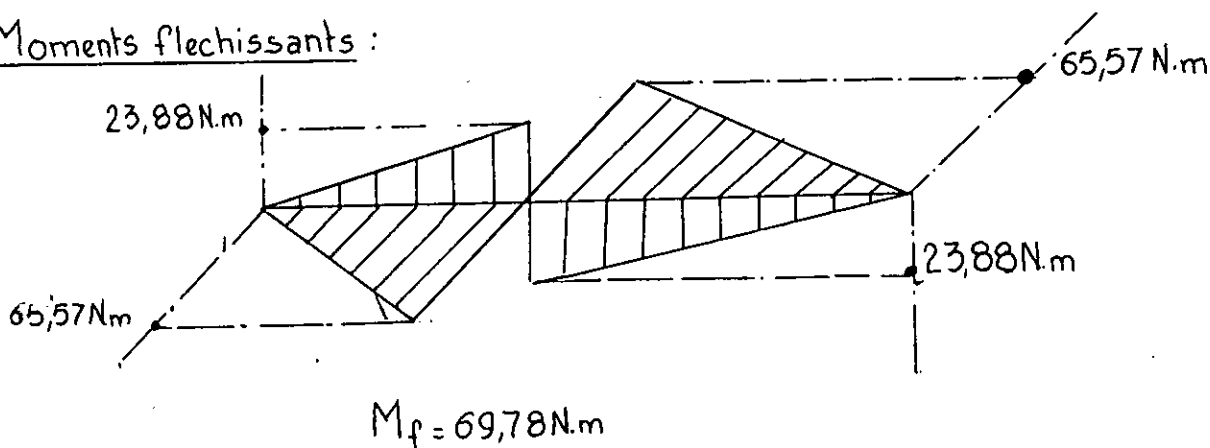
3°/ Pignon b₃'



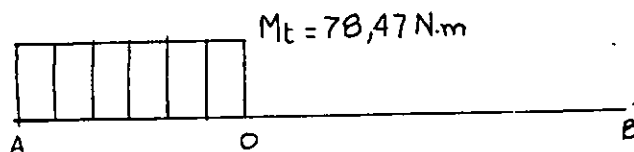
$$R_{BH} = \frac{F_{tb_3}' \cdot AO}{AB} = 2185,71\text{ N} \approx 2186\text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AH} = 192\text{ N}$$

$$R_{BV} = \frac{N_{b_3}' \cdot AO}{AB} = 795,97\text{ N} \approx 796\text{ N} \quad \Rightarrow \quad R_{AV} = 70\text{ N}$$

Moments flechissants :



Moment de torsion :



Moment idéal :

$$M_I = 105,01\text{ N.m}$$

$$M_{b_1}' > M_{b_2}' > M_{b_3}'$$

On prendra un arbre de sortie normalisé de :

diamètre extérieur : $d_{ext} = 32\text{ mm}$

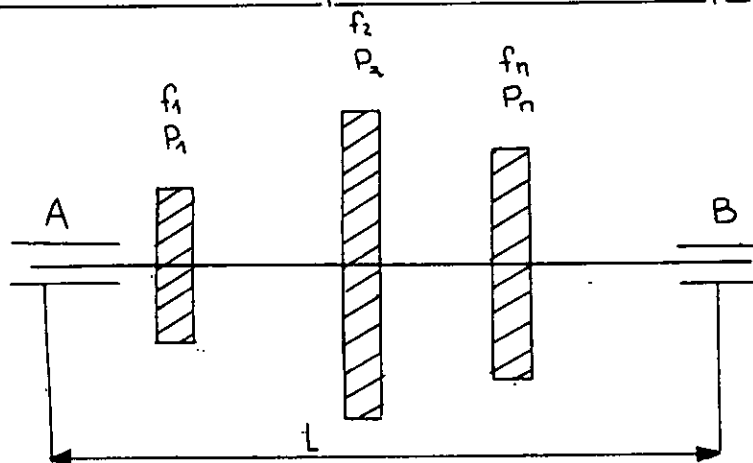
diamètre du noyau : $d_{noyau} = 26\text{ mm}$

ÉTUDE DES VIBRATIONS LATÉRALES

— Vitesses Critiques —

A certaines vitesses dites vitesses critiques, les arbres deviennent dynamiquement instables, ce qui veut dire que si le centre de gravité quitte l'axe de rotation, il est produit de fortes vibrations latérales pouvant amener la rupture de l'arbre. Pour éviter qu'un tel phénomène se produise, il faut adopter pour les arbres des dimensions permettant d'éloigner les vitesses critiques de la vitesse de régime.

Détermination mathématique de la vitesse critique.



Considérons un arbre horizontal porté par deux paliers A et B et supportant n disques de poids P_1, P_2, \dots, P_n , et soient f_1, f_2, \dots, f_n les flèches au droit de ces disques quand l'arbre est au repos. La vitesse angulaire critique est donnée par:

$$w_{cr} = \sqrt{\frac{g(P_1 f_1 + P_2 f_2 + \dots + P_n f_n)}{P_1 f_1^2 + P_2 f_2^2 + \dots + P_n f_n^2}}$$

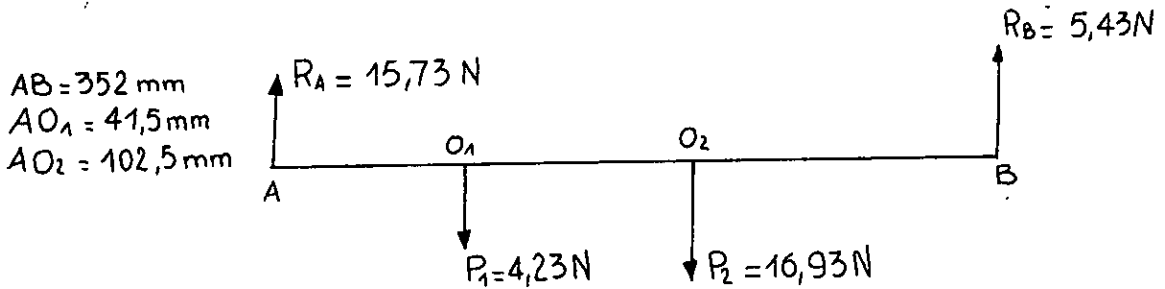
g : accélération de la pesanteur égale à 9,81.

Nous allons appliquer cette méthode afin de déterminer les vitesses critiques de la boîte de vitesse que nous avons à calculer.

Nous prendrons comme masse volumique ρ des éléments dentés égale à :

$$\rho = 8 \text{ kg/dm}^3$$

Vitesse Critique de l'arbre d'entrée I



$$R_B = \frac{P_1 \cdot AO_1}{AB} + \frac{P_2 \cdot AO_2}{AB} = 5,43 \text{ N} \implies R_A = 15,73 \text{ N}$$

Equation du moment:

$$M = 15,73x - 4,23(x - 41,5) - 16,93(x - 102,5)$$

or M est égale à EIf'' où :

E : est le module d'élasticité longitudinal de l'arbre égal à : $E = 21 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$

I : est le moment d'Inertie de l'arbre exprimé en mm^4 égal à : $I = \frac{\pi d^4}{4}$

f'' : dérivée seconde de la flèche

d : diamètre de l'arbre = 18 mm

Nous aurons donc:

$$EIf'' = 16,93(x - 102,5) + 4,23(x - 41,5) - 15,73x = 5,43x - 1910,87$$

en intégrant une fois nous aurons:

$$EIf' = \frac{5,43x^2}{2} - 1910,87x + K$$

en intégrant une deuxième fois nous déduirons la flèche f :

$$EIf = \frac{5,43x^3}{6} - \frac{1910,87x^2}{2} + Kx + K'$$

déterminons K et K' avec les conditions aux limites : quand $x = 0$ $f = 0 \implies K' = 0$

expression finale de la flèche:

$x = 352$ $f = 0 \implies K = 0,22418 \cdot 10^6$

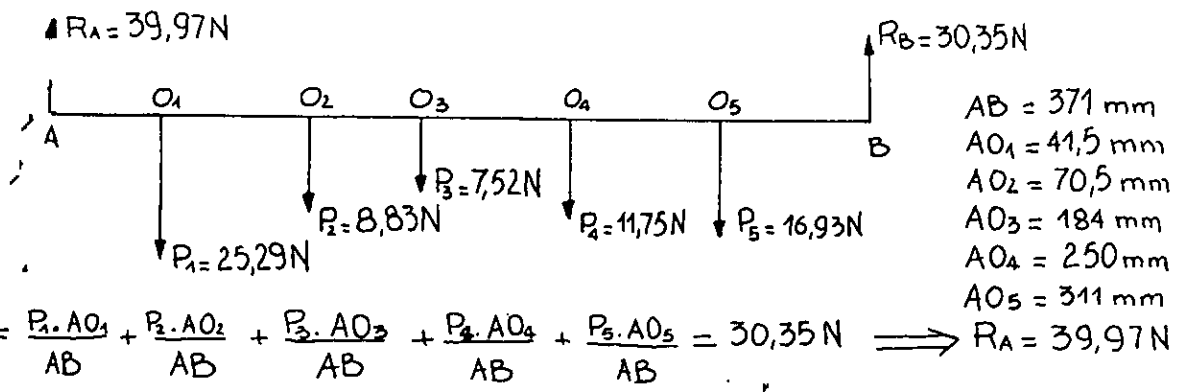
$$EIf = \frac{5,43x^3}{6} - \frac{1910,87x^2}{2} + 0,22418 \cdot 10^6 x$$

$I (\text{mm}^4)$	$x (\text{mm})$	EIf	$f (\text{mm})$	$P (\text{N})$
$0,82448 \cdot 10^5$	41,5	$7,722656 \cdot 10^6$	$0,4460333 \cdot 10^{-3}$	4,23
$0,82448 \cdot 10^5$	102,5	$13,914997 \cdot 10^6$	$0,803681 \cdot 10^{-3}$	16,93

Etant donné que l'arbre est cannelé, nous prendrons un diamètre $d = \frac{d_{ext} + d_{int}}{2}$ pour le calcul du moment d'Inertie I

$$W_{cr} = 35,92 \text{ rd/s} \text{ soit en tours par minute: } N_{cr} = \frac{30 W_{cr}}{\pi} = 343$$

l'arbre d'entrée tournant à 730 tours par minute, il n'y aura aucun risque de rupture de l'arbre car la vitesse critique est assez éloignée de la vitesse de rotation.



Equation du moment:

$$M = -EIf'' = 39,97x - 25,29(x - 41,5) - 8,83(x - 70,5) - 7,52(x - 184) - 11,75(x - 250) - 16,93(x - 311)$$

$$EIf' = \frac{30,35}{2} x^2 - 11258,46 x + K$$

$$EIf = \frac{30,35}{6} x^3 - \frac{11258,46}{2} x^2 + Kx + K'$$

Détermination des constantes K et K' :

quand $x=0$ $f=0 \implies K'=0$

$x=371$ $f=0 \implies K = 1,39221 \cdot 10^6$

$$EIf = \frac{30,35}{6} x^3 - \frac{11258,46}{2} x^2 + 1,39221 \cdot 10^6 x$$

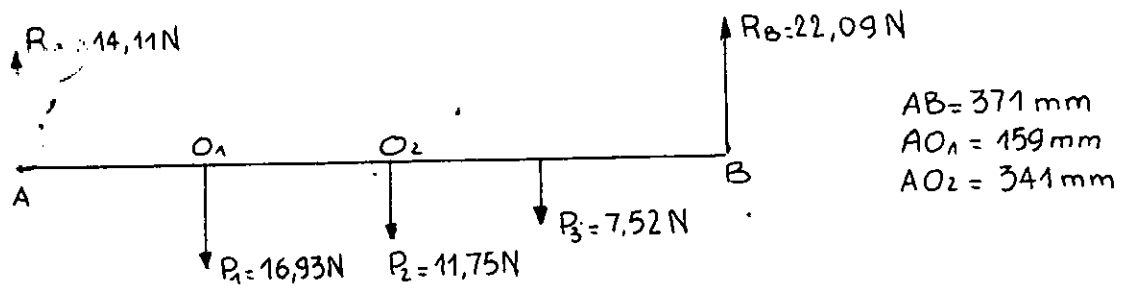
le diamètre moyen de l'arbre $d = 25,5\text{ mm}$

$I (\text{mm}^4)$	$x (\text{mm})$	$EIf (\text{Nm}^3)$	$f (\text{mm})$	$P (\text{N})$
$0,331918 \cdot 10^6$	41,5	$48,44331 \cdot 10^6$	$6,9499824 \cdot 10^{-4}$	25,29
$0,331918 \cdot 10^6$	70,5	$71,944578 \cdot 10^6$	$10,321622 \cdot 10^{-4}$	8,83
$0,331918 \cdot 10^6$	184	$97,094339 \cdot 10^6$	$13,929766 \cdot 10^{-4}$	7,52
$0,331918 \cdot 10^6$	250	$75,262085 \cdot 10^6$	$10,797573 \cdot 10^{-4}$	11,75
$0,331918 \cdot 10^6$	311	$40,668385 \cdot 10^6$	$5,8345428 \cdot 10^{-4}$	16,93

Vitesse Critique : $\omega_{cr} = 112,53 \text{ rad/s} \implies N_{cr} = 1075 \text{ tours/minute}$

Cette valeur n'entre pas dans la somme des vitesses de torsion.

Vitesse Critique de l'arbre de sortie II



$$R_B = \frac{P_1 \cdot AO_1}{AB} + \frac{P_2 \cdot AO_2}{AB} + \frac{P_3 \cdot AO_3}{AB} = 22,09 \text{ N} \implies R_A = 14,11 \text{ N}$$

Equation du moment :

$$M = -EI f'' = -16,93(x - 159) - 11,75(x - 250) - 7,52(x - 341) + 14,11x$$

$$EIF' = \frac{22,09}{2} x^2 - 8193,69x + K$$

$$EIF = \frac{22,09}{6} x^3 - \frac{8193,69x^2}{2} + Kx + K'$$

Détermination des constantes K et K' à partir des conditions aux limites.

quand $x=0$ $f=0 \implies K'=0$

$x=371$ $f=0 \implies K = 1,013181 \cdot 10^6$

forme générale de la flèche :

$$EIF = \frac{22,09x^3}{6} - \frac{8193,69x^2}{2} + 1,013181 \cdot 10^6 x$$

on prendra un diamètre moyen pour l'arbre égal à : $d = 29 \text{ mm}$

I (mm ⁴)	x (mm)	EIF	f (mm)	P (N)
$0,555216 \cdot 10^6$	159	$72,322562 \cdot 10^6$	$6,2028679 \cdot 10^{-4}$	16,93
$0,555216 \cdot 10^6$	250	$54,768478 \cdot 10^6$	$4,6973119 \cdot 10^{-4}$	11,75
$0,555216 \cdot 10^6$	341	$15,094277 \cdot 10^6$	$1,2945864 \cdot 10^{-4}$	7,52

Vitesse critique : $\omega_{cr} = 134,38 \text{ rd/s}$ ou encore $N_{cr} = 1284 \text{ tours/minutes}$

Cette valeur ne rentre pas dans la gamme des vitesses de l'arbre de sortie, par conséquent il n'y a pas lieu de faire une quelconque modification du diamètre de

Choix des Roulements

Si nous nous référons à la nature des efforts exercés sur les arbres nous voyons que nous avons à faire à des efforts tangentiels et radiaux les derniers sont généralement assez faibles. Nous pouvons donc utiliser des roulements à une rangée de billes à contact simple.

1. Calcul des roulements

soit L la durée du roulement en million de tours, elle est donnée par :

$$L = 60 \cdot N \cdot L_h \cdot 10^{-6} \quad \text{où } \begin{cases} L_h \text{ est la durée nominale en heures du roulement} \\ N: \text{ vitesse de rotation du roulement en tours / minute} \end{cases}$$

Nous allons maintenant définir la Capacité de charge dynamique C :

$$C = k \cdot F \cdot (L)^{1/3}$$

avec k : coefficient dynamique que l'on prendra égal à 1,3 pour les calculs.

F : charge axiale exercée sur le roulement.

2. Détermination des capacités de charges.

On ne fera les calculs que pour les vitesses de rotation les plus élevées des arbres susceptibles d'en avoir plusieurs.

a. arbre d'entrée I

roulements	EFFORT AXIAL (N)	N: (tr/mn)	Réactions	Paliers	L_h	L	C (N)
Q_1	708	730		A	20.000	876	7769
				B	20.000	876	1039
Q_2	354	730		A	20.000	876	3123
				B	20.000	876	1281

on choisira sur le catalogue : SKF N° 6302 [15-42-13]

D. 310 Intermediaire II

d. 310 cas	EFFORT AXIAL (N)	N(tr/mm)	Réactions	Paliers	Lh (heures)	L	C (N)
A ₁	708	298,57		C	20 000	358	1043
b ₁	1298			D	20 000	358	4401
A ₁	708	298,57		C	20 000	358	2678
b ₂	1038			D	20 000	358	5725
A ₁	708	298,57		C	20 000	358	5165
b ₃	866			D	20 000	358	6620
A ₂	354	1041,05		C	20 000	1213	5183
b ₁	1298			D	20 000	1213	4885
A ₂	354	1041,05		C	20 000	1213	875
b ₂	1038			D	20 000	1213	6420
A ₂	354	1041,05		C	20 000	1213	1984
b ₃	866			D	20 000	1213	7445

on prendra : SKF N° 6204 [20-47-14]

C. Arbre de sortie III

1041,05 cas	EFFORT AXIAL (N)	N(tr/mm)	Réactions	Paliers	Lh (heures)	L	C
b ₁	1298	674,37		E	20 000	809,24	8990
b ₂	1038			F	20 000	809,24	6737
b ₂	1038	1041,05		E	20 000	1213,26	4698
b ₃	866			F	20 000	1213,26	9687
b ₃	866	1516,575		E	20 000	1820	11
b ₃	866			F	2000	1820	12650

[25 60 177]

Etude du Graissage

I Graissage des éléments dentés

les points qui sont particulièrement importants à soulever sont :

- le Mode de graissage
- la nature du lubrifiant à utiliser

I.1. Mode de graissage

Vu les dimensions des éléments dentés et la disposition des axes (axes perpendiculaires), nous pouvons nous permettre un graissage par barbotage. En effet, les distances entre les divers points à lubrifier sont réduites, si on ajoute à cela des vitesses suffisantes, pour éclabousser l'huile, nous pouvons nous limiter à un barbotage.

I.2. Nature du lubrifiant

Trois possibilités s'offrent à nous : utilisation des huiles minérales, végétales ou d'origines animales. Mais pour des raisons économiques, nous excluons les deux dernières, au profit de la première qui est à bon marché. Ce choix n'étant fait, il reste à déterminer sa catégorie : normale ou dopée. à ce niveau là, interviennent plusieurs facteurs :

- les conditions de fonctionnement
 - la "flash température" assez basse
 - les charges supportées par les éléments dentés pas trop élevées.
- qui nous amènent à utiliser une huile minérale normale.

II Graissage des roulements

Afin d'éviter un renouvellement fréquent du lubrifiant, et permettre un graissage continu, nous prendrons une graisse minérale assez consistante pour pouvoir supporter les élévations de température lors du fonctionnement, que nous ne pouvons malheureusement pas évaluer à partir des données que nous avons

le rendement ρ est défini par: $\rho = 1 - f \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l_a^2 + l_r^2}{(l_a + l_r) 2 \cos \varphi}$ avec:

- f : coefficient de frottement égal à 0,06
- φ : angle de pression égal à 20°
- R_1 : rayon primitif du pignon en mm
- R_2 : rayon primitif de la roue en mm
- l_a : longueur d'approche en mm
- l_r : longueur de retrait en mm

Pignons et roues	Rayons (mm)	longueur d'approche l_a (mm)	longueur de retrait l_r (mm)	$l = l_a + l_r$	ρ (%)
A_1	24,75	9		16	98,52
A'_1	60,5		7		
A_2	49,5	7		16	98,76
A'_2	35,75		9		
b_1	33	8		16,5	98,67
b'_1	49,5		8,5		
b_2	41,25	8,5		17	98,68
b'_2	41,25		8,5		
b_3	49,5	8,5		16,5	98,67
b'_3	33		8		

rendement de chaque train

trains	$(a_1, a'_1) - (b_1, b'_1)$	$(a_1, a'_1) - (b_2, b'_2)$	$(a_1, a'_1) - (b_3, b'_3)$	$(a_2, a'_2) - (b_1, b'_1)$	$(a_2, a'_2) - (b_2, b'_2)$	$(a_2, a'_2) - (b_3, b'_3)$
ρ (%)	97,21	97,22	97,21	97,45	97,46	97,45

Etude du levier de vitesses

De part les données de base, la sélection des vitesses se fera par un seul levier. Ce dernier doit manoeuvrer deux trains de pignons baladeurs. Nous pouvons diviser la gamme des vitesses de notre boîte en deux grandes parties :

- les vitesses faibles : 200, 380, 450 tours par minute
- les vitesses élevés : 675, 1013, 1520 tours par minute

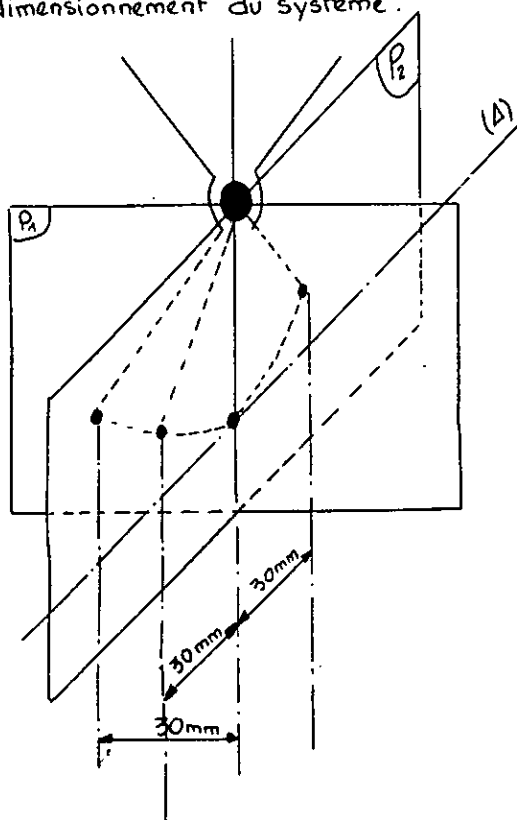
Le passage de l'une à l'autre de ces deux séries s'effectue par l'engrènement de l'un des deux couples de roues dentées notées (a_1, a'_1) ou (a_2, a'_2)

L'une des séries étant choisie, nous ferons la sélection d'une vitesse particulière de sortie en engrénant l'un des couples suivants : (b_1, b'_1) , (b_2, b'_2) , (b_3, b'_3) .

Le levier doit donc commander, deux mouvements rectilignes alternatifs de même axe, ou d'axes parallèles indépendants. Pour permettre cette indépendance de mouvement, et dans un souci d'encombrement minimum, nous conjuguerons deux mouvements :

- Une rotation dans un plan (P) : manoeuvre de (a_1, a'_1) , (a_2, a'_2)
- Une translation alternative suivant une droite (Δ) perpendiculaire à (P)

Le principe du mécanisme de sélection étant choisi, il ne reste qu'à définir les déplacements et le dimensionnement du système.



Nous avons alors deux pièces qui assureront ces mouvements. Elles coulissent sur un petit carter qui leur sera spécialement aménagé. Nous rapporterons ce dernier sur le carter de la boîte.

Étude du Carter

Comme tout carter, celui de notre boîte de vitesses doit remplir les fonctions suivantes :

1. Assurer la protection
2. servir de support des éléments
3. Positionner les arbres et les roulements
4. Permettre la fixation de l'ensemble.

Le premier et le quatrième points ne sont très intéressants en eux mêmes en ce sens qu'ils sont faciles à déterminer. Par contre, le second et le troisième sont plus importants. En effet, pour remplir la fonction de support, il convient de signaler que le carter est appelé à encaisser les efforts dus à la pignonerie. Dans une telle situation, nous devrions faire une étude de résistance et de rigidité des voiles de métal constituant le carter. Ceci nous aurait menés trop à l'écart de notre sujet. Nous signalerons toutefois, qu'une épaisseur minimale de huit mm de Fe14 est nettement suffisante.

Ces paramètres étant définis, considérons le carter comme une simple boîte appelée à recevoir des organes, avec le maximum de facilité de montage, et positionner les derniers. Dans notre cas pratique, nous envisageons un carter en deux pièces dont le plan de joint est perpendiculaire aux axes des pignons à la mi-distance des paliers. Nous pourrions ainsi monter aisément tous les éléments sans grande difficulté. Reste alors le positionnement : le mode d'usinage prévu pour les finitions du Carter permettra de déterminer la précision du positionnement et la surface de référence.

Nous pouvons donner l'exemple suivant :

— Ebauche - finition du plan de joint et mise en place de deux ou trois doigts de centrage pour permettre de situer les deux parties du Carter l'un par rapport à l'autre.

— Réalisation des logements des divers roulements et coussinets

Dans ce mode de réalisation, la surface de référence est alors le plan de joint du Carter. Il est à remarquer que nous aurions pu procéder de la manière inverse :

CONCLUSION:

Calculer une boîte de vitesses, c'est, avant tout, déterminer les éléments soumis à la rotation (pignons, arbres, roulements ...) et ceux appelés à la subir directement (coussinets, joints sur arbres) ou par l'intermédiaire des efforts qu'elle engendre (épaisseur du carter, point de fixation ...).

De tous ces organes, les plus importants sont les roues dentées. Nous en avons donc axé notre travail sur ce point. Il en découle alors un calcul assez poussé pour approcher, au mieux, les conditions réelles de fonctionnement. Malgré cela, ce que nous avons fait n'est, en réalité, qu'une application théorique.

En effet, pour pouvoir réaliser notre pignonnerie, il convient de déterminer chaque roue dentée avec le maximum de détail:

- état du matériau brut
- usinages spéciaux à effectuer.
- côtes et ajustements.
- modes de réalisation.
- finition envisagée.

et nous pouvons étendre ceci à tous les éléments.

Cependant, pour exécuter un tel travail, il nous faudra connaître les possibilités intrinsèques de l'atelier de réalisation. Nous avons donc préféré reléguer cet aspect au second plan.

Quant aux autres pièces de notre boîte, leur détermination dépend de ce que nous avons dit plus haut, d'une part; d'autre part, de leur place dans un ensemble bien défini.

Le carter, par exemple, peut avoir une forme autre que celle que nous avons proposée si l'emplacement dont nous disposons est réduit.

Ainsi, par manque de données spécifiques du problème, nous avons opté pour le côté théorique de l'objet.

Nous espérons que ce choix ne pourra que satisfaire.

BIBLIOGRAPHIE :

- COURS DE CONSTRUCTION MECANIQUE DE Mr. PIEROZAK.
- "TRAITE THEORIQUE ET PRATIQUE DES ENGRENAGES "
HENRIOT Tome I - DUNOD -
- A.B.C DU GRAISSAGE " - J.L.E GROFF.
Publications de l'Institut Français
du Pétrole collection Sc. et Téc. N°2.
- ELEMENT DE CONSTRUCTIONS MECANQUES. -Tome 3.

