

وزارة الجامعات والبحث العلمي
Ministère aux Universités et de la Recherche Scientifique

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

المدرسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

DEPARTEMENT *Electronique*

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

*Etude et synthèse de contrôleurs adaptatifs
~ à modèle de référence
~ à placement de pôles*

Proposé par :
T. CHIGARA

Etudié par :
M. S. HAMDAOUI
M. NOUCHIO

Dirigé par :
T. CHIGARA

PROMOTION
1992

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT *Electronique*

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

PROJET DE FIN D'ETUDES

SUJET

Etude et synthèse de contrôleur adaptatif.
~ A modèle de référence
~ A placement de pôles

Proposé par :
T. CHIGARA

Etudié par :
M. S. HAMDAOUI
M. ROUCHIO

Dirigé par :
T. CHIGARA

PROMOTION
1992

المدسة الوطنية المتعددة التقنيات
BIBLIOTHEQUE — المكتبة
Ecole Nationale Polytechnique

Dedicates

Je dedie ce travail

A mes parents
A ma soeur
A ma femme
A Babissou

Mohamed

Je dedie ce travail

A mon frere
A ma mere
A toute ma famille
A mes amis (S)
A la famille GHARBI
A tout ceux qui m'ont aides a arriver la.

Mohand Said

L'HISTOIRE NE PARDONNERA
JAMAIS AUX LÂCHES

SOMMAIRE

Introduction.....
Notions sur les systemes de commande adaptative
Gain scheduling
Modèle de référence.....
Contrôleur auto-ajustable.....
Contrôle adaptatif stochastique.....

1° PARTIE
CONTROL ADAPTATIF A MODELE DE REFERNCE

CHAP 1 Systemes adaptatifs à modèle de référence
 'MRAS: Model reference adaptativ System'

I/ Généralités.....
II/ Classification des M.R.A.S.....
III/ Modélisation mathématique des M.R.A.S.....
IV/ Représentation équivalente des M.R.A.S.....
V/ Résolution du problème des M.R.A.S.....

CHAP 2 Contrôle adaptatif à modèle de référencea

 'MRAC: Model Reference Adaptativ control'

I/ Commande linéaire à modèle de référence.....
II/ Commande adaptative à modèle de référence.....
III/ Remarques.....

CHAP 3 Contrôleur minimal synthetisé

 'MCS: Minimal Control synthesis

I/ Généralités.....

II/ Synthèse du contrôleur minimal.....

Exemples d'applications

- I/ Système du premier ordre
- II/ Système du deuxième ordre
- III/ Système du deuxième ordre instable

CHAP 4 Contrôle d'un bras manipulateur classe 1
 à 3 degrés de liberté

- I/ Généralités
- II/ Equation dynamique du bras
- III/ Application du M.R.A.C
- IV/ Application du M.C.S

2^{ème} PARTIE
 REGULATEUR AUTO-AJUSTABLE A PLACEMENT DE POLES

Chap 1 Introduction aux régulateurs auto-ajustables
 'S.T.R: Self Tuning Regulator'

- I/ Généralités
- II/ Définitions
- III/ Classification des S.T.R

Chap 2 Algorithme de contrôle à placement de pôles et de
 zeros par retour de sortie (cas S.I.S.O)

- I/ Algorithme de contrôle à placement de pôles.....
- II/ Algorithme de contrôle à placement de pôles et de zeros.

Chap 3 Algorithme de placement de poles et de zeros
 par retour de sortie (cas M.I.M.O)

- I/ Algorithme de contrôle à placement de pôles.....
- II/ Algorithme de contrôle à placement de pôles et de zeros.

CHAPITRE 4^e Algorithme d'estimation des moindres carrés pondérés 'M. C. P'

I/ Généralités	
II/ Estimation par la méthode des MCP récurrents.....	
III/ Introduction d'un facteur d'oubli.....	
IV/ Algorithme d'estimation pour les systèmes M.I.M.O.....	
V/ Exemples d'application.....	
CONCLUSION.....	
Annexe A: Résolution de l'intégrale de POPOV.....	
Annexe B: Discretisation des lois continues.....	

PRINCIPALES NOTATIONS

Les matrices sont représentées par des lettres majuscules.
Les scalaires sont représentés par des lettres minuscules.

A	matrice d'évolution du système
B	matrice de commande du système
C	matrice d'observation du système
X	vecteur d'état du système (n x 1)
Y	vecteur de sortie du système (m x 1)
U	vecteur d'entrée du système (r x 1)
A _m	matrice d'évolution du modèle
B _m	matrice de commande du modèle
C _m	matrice d'observation du modèle
X _m	vecteur d'état du modèle (n x 1)
Y _m	vecteur de sortie du modèle (m x 1)
r	signal de référence
e	erreur d'état
D	compensateur linéaire
K, K	des gains statiques
α β	des gains du signal d'adaptation
t	temps (continu)
T _e	période d'échantillonnage
H(Z)	transmittance échantillonnée
F(Z ⁻¹)	polynôme en Z ⁻¹
A ^T	transposée de la matrice A
A ⁻¹	inverse de la matrice A
λ_i	valeur propre de la matrice A
P _i	pôle du dénominateur
Z	= e ^{TP}
Z ⁻¹	décalage d'une période "retard unité".

I-INTRODUCTION

Le contrôle adaptatif a été défini comme étant un ensemble de techniques utilisées pour l'ajustement automatique des régulateurs des boucles de commande dans le but de maintenir un système à un certain niveau de performance désiré.

Les recherches sur le contrôle adaptatif des systèmes n'ont commencé à être sollicitées qu'après la seconde guerre mondiale (la première fois, par l'industrie de l'aviation militaire). Durant ces années, il n'y a pas eu de gros investissements dans ce domaine florissant vu les résultats peu convaincants qu'avaient donnés les recherches, lors de leur mise en application.

Avec l'utilisation d'artifices mathématiques complexes, durant les années 60, comme la théorie de LYAPUNOV [1] relative à la stabilité des systèmes, des résultats appréciables ont été obtenus.

Grâce à l'introduction du concept d'espace d'état et de la compréhension de la théorie d'hyperstabilité de POPOV [2], au début des années 70, des algorithmes de contrôle ont été généralisés à la fois, aux systèmes multivariables et à ceux d'une même classe. ASTROM, 1970, avait proposé le schéma de base des régulateurs auto-adaptatifs. En outre, les développements qu'ont connus l'électronique et la micro-informatique ont influé d'une manière significative sur le développement de ce domaine de recherche.

Durant les années 80, les recherches étaient orientées surtout vers les problèmes de robustesse des algorithmes et de leur convergence; c'est-à-dire, trouver des algorithmes adaptables à une plus large famille de systèmes [3] [7] [8].

Le succès qu'a connu le contrôle adaptatif, a amené les investisseurs à encourager les recherches dans ce domaine. Ce succès réside essentiellement dans :

- . le faible coût de production;
- . l'amélioration de la qualité du produit.

Notre travail qui consiste en la synthèse d'algorithmes de contrôle a pour but d'illustrer quelques performances des contrôleurs adaptatifs et auto-ajustables.

La première partie est consacrée au développement de deux algorithmes de contrôle adaptatif ,qui sont:

- . le MRAC;
- . le MCS.

Ces deux algorithmes seront appliqués pour quatre systèmes différents qui sont les suivants:

1 - trois systèmes mono-entrée mono-sortie linéaires (SISO: Single Input Single output):

a - un système du premier ordre (asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu), pour voir l'influence du choix de la période d'échantillonnage et les paramètres des contrôleurs sur l'évolution du système;

b - l'asservissement de position du moteur qui représente un système du second ordre) qu'on va stabiliser.

c - un système instable auquel on fait suivre une consigne; c'est-à-dire le stabiliser à un certain niveau désiré.

2 - un système multi-entrées multi-sorties (un bras manipulateur de classe une) non linéaire, pour voir aussi l'influence des paramètres des contrôleurs sur l'évolution de tels systèmes.

La seconde partie sera consacrée au développement d'un algorithme de contrôle à placement de pôles et de zéros auto-ajustable général, pour les systèmes SISO et MIMO. Cet algorithme sera appliqué pour l'asservissement de vitesse d'un moteur à courant continu. Pour les trois autres systèmes, on leur applique l'algorithme de contrôle à placement de pôles et de zéros en vue de les réguler.

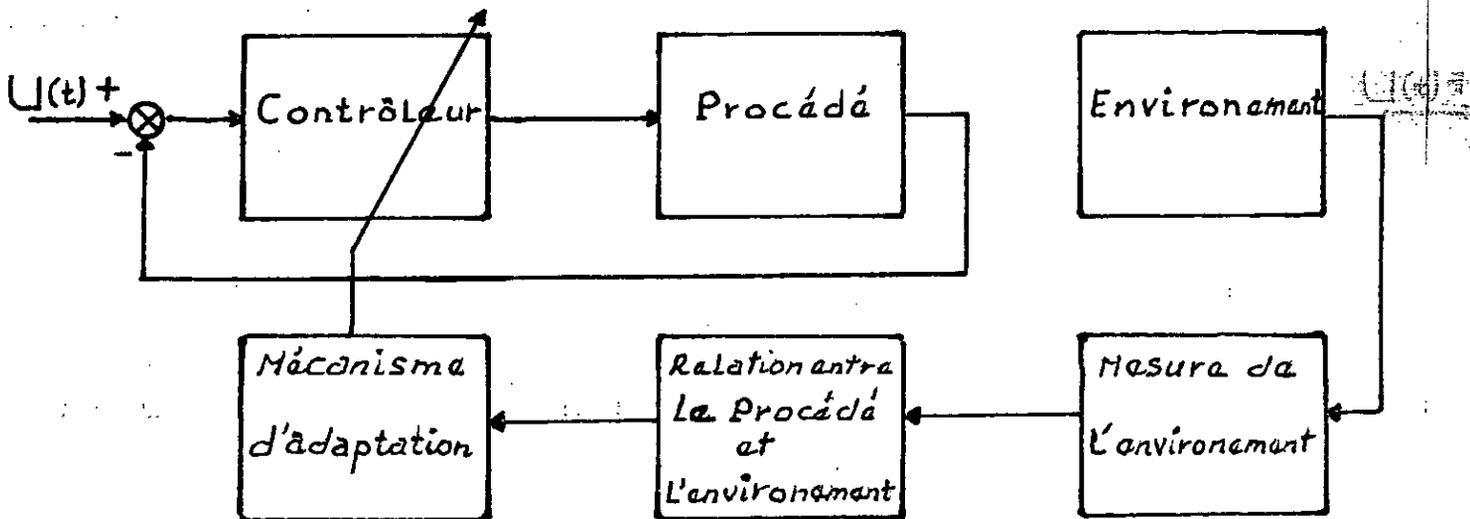
En fin de ce travail, une conclusion est donnée concernant les performances et les différents aspects traités avec chaque algorithme au cours de cette étude. De nouvelles perspectives y sont également proposées.

Notion de systèmes de commandes adaptatives

Plusieurs types de schémas destinés à assurer des performances acceptables quand les paramètres du procédé sont inconnus ou varient dans le temps, ont été étudiés par les chercheurs.

Gain Scheduling :

Le gain Scheduling où la commande adaptative programmée [4] est caractérisée par le fait qu'on suppose connue une relation entre certains paramètres de l'environnement et ceux du contrôleur. Dans ce cas les performances obtenues ne sont ni mesurées ni comparées.



Fig(1) : Commande adaptative programmée

La forme la plus simple consiste à définir à l'avance plusieurs modes de fonctionnement, et en choisir un à l'aide d'un programme et à chaque mode est associée un réglage du régulateur.

Cette structure de contrôle possède deux inconvénients majeurs :

* Elle exige pour être précise une très bonne connaissance d'un modèle mathématique qui régit le procédé.

* Elle exige aussi une très bonne mesure des perturbations contre lesquelles on veut prémunir le système.

Systèmes adaptatifs à modèle de référence

Ces techniques reposent sur deux notions fondamentales :

a) Le procédé à contrôler doit être représenté par un modèle mathématique dont la structure est invariante mais dont les valeurs de ces paramètres peuvent changer au cours du temps.

b) Pour toutes les valeurs que peuvent prendre ces paramètres variables, il doit exister un régulateur de structure donnée qui permet la réalisation des performances imposées. Ces dernières sont obtenues à l'aide d'un modèle de référence. Le système adaptatif fait en sorte que les sorties du procédé poursuivent celle du modèle.

Contrôleur auto ajustables :

Cette technique qui présente l'avantage de ne pas demander des mesures supplémentaires, exige une puissance accrue de traitement des informations. Elle se divise en deux grandes phases :

Phase 1 : Estimation des valeurs paramétrées du procédé.

Phase 2 : Calcul des paramètres du régulateur à partir des paramètres estimés dans la 1ère phase.

Contrôleur stochastique :

Pour les systèmes linéaires à paramètres connus, perturbés par des bruits de mesure blancs, la minimisation d'un critère quadratique conduit au régulateur classique linéaire quadratique gaussien (LQG). Cependant, cette méthode nécessite la connaissance complète du modèle représentant le système.

Les paramètres de celui ci sont souvent connus d'une manière imprécise; voire même inconnus et/ou peuvent varier. De même les perturbations dans la majorité des cas ne sont modélisés qu'approximativement.

Pour contourner ces difficultés, on considère les paramètres inconnus comme des variables aléatoires dont il faut identifier en temps réel les caractéristiques statistiques (moyenne, variance,...), ceci conduit à un problème de commande stochastique, non linéaire et auto adaptative.

PARTIE " A "

SYSTEME ADAPTATIF PAR MODELE DE REFERENCE

CHAPITRE I

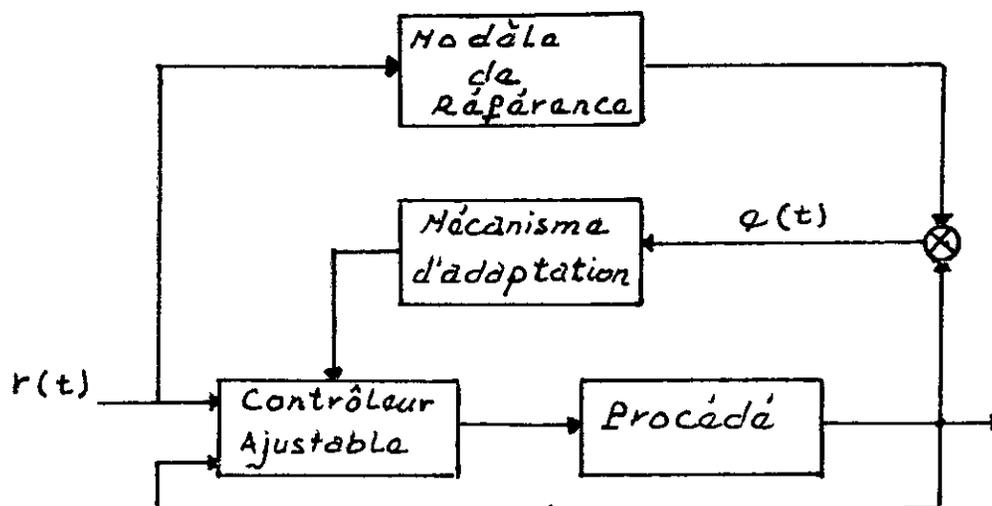
Système adaptatif à modèle de référence

I Généralités :

Le contrôle adaptatif à modèle de référence (M.R.A.C) joue un rôle important dans la réalisation de commandes à grande vitesse d'adaptation.

Dans cette technique, l'indice de performance est un indice dynamique, il est synthétisé à partir du modèle de référence, excité par le même signal d'entrée que celui du système ajustable. La différence entre les sorties des deux systèmes, comme le montre la figure (I.1), évalue la performance du système automatisé. Cette différence va attaquer le mécanisme d'adaptation qui ajustera les paramètres des régulateurs pour que le procédé ait le même comportement que le modèle; c'est à dire pour minimiser la différence entre les deux sorties.

Le schéma de base du contrôle adaptatif à modèle de référence est représenté par la figure suivante :



Fig(I.1) : Schéma de base d'un M.R.A.C

II Classification des M.R.A.S :

Il existe plusieurs types de systèmes adaptatifs à modèle de référence [5] qui peuvent être classés suivant leurs :

- a) Structures.
- b) Indices de performances.
- c) Types d'application.

2.a) Structure :

Il existe trois structures de base qui sont :

- 1) Parallèle : Fig (1.2) utilisé dans l'asservissement; c'est la plus utilisée.

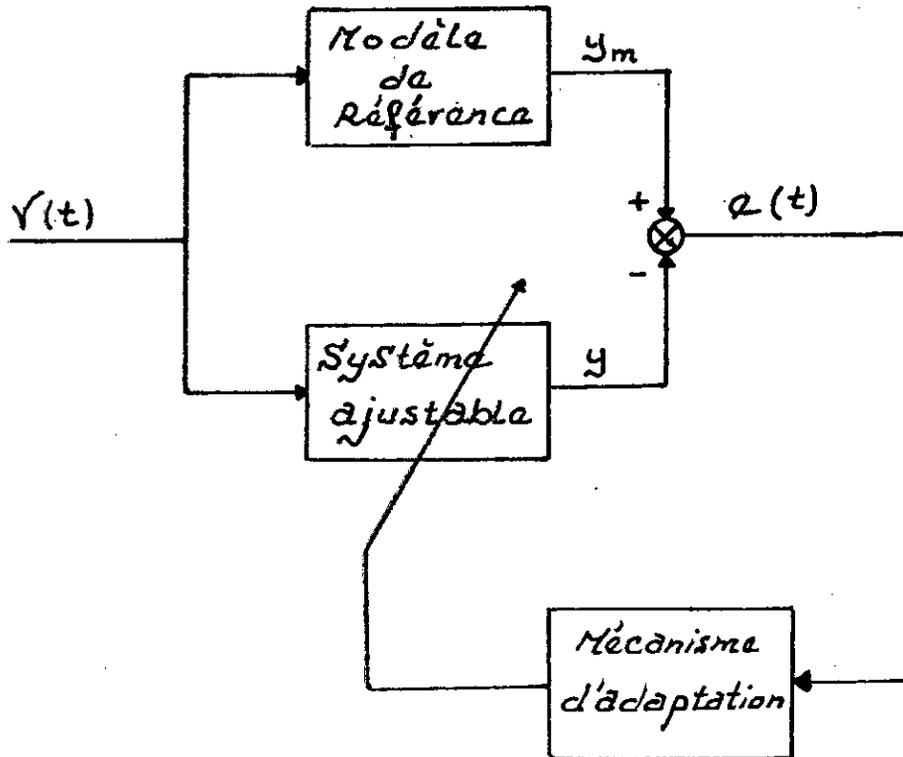
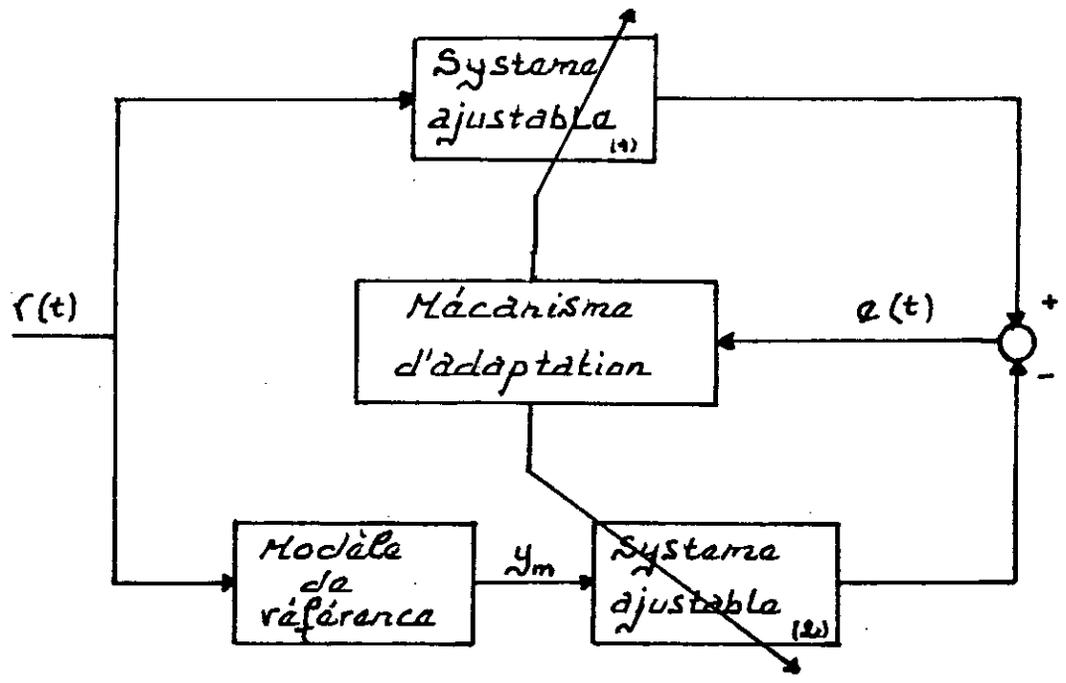


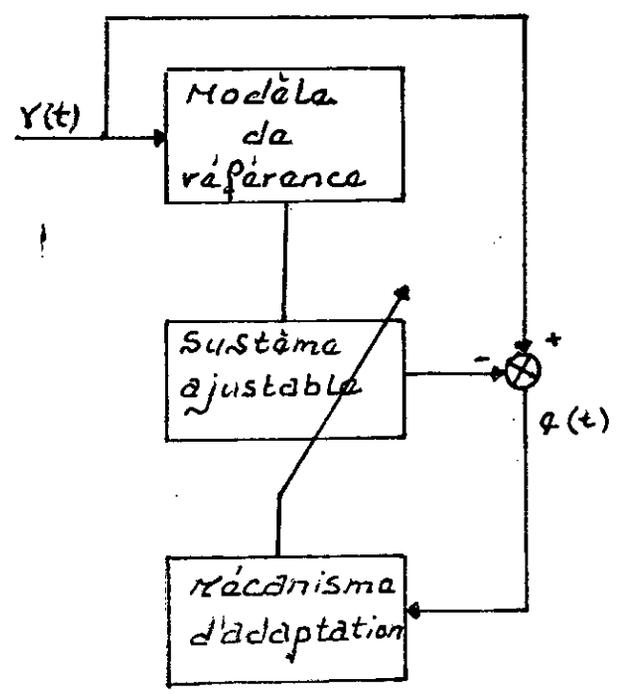
Fig (1.2)

- b) Série-parallèle : Fig (1.3), utilisée pour l'identification avec un modèle ajustable.



Fig(1.3)

3) Série: Fig (1.4), utilisée pour la régulation



Fig(1.4)

2.b) Indice de performance :

L'indice de performance d'un système M.R.A.S peut être représenté par :

La minimisation de l'erreur généralisée des sorties.

La minimisation de l'erreur d'état.

La minimisation d'un critère quadratique.

2.c) Type d'application :

Les différents types d'application sont :

Le contrôle de poursuite.

L'identification avec modèle ajustable.

L'estimation.

La régulation.

Le choix d'un indice de performance est conditionné par le type d'application, par exemple :

Pour l'identification on doit utiliser l'indice (c).

Pour la poursuite on utilise l'indice (b).

Le M.R.A.S peut être choisi suivant trois autres types conditionnés par la nature de la réalisation du modèle de référence ou du mécanisme d'adaptation et qui sont :

- Continu
- Discret
- Hybride

III Modélisation mathématique des M.R.A.S :

Soit la représentation de base de la commande adaptative à modèle de référence représentée par la Fig (1.1).

Les représentations dans l'espace d'état du modèle et du système ajustable sont respectivement :

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m \Gamma \quad (1.3.1)$$

$$Y_m = C_m X_m \quad (1.3.2)$$

$$\dot{X} = A_*(e, t) X + B_*(e, t) \Gamma \quad (1.3.3)$$

$$Y = C X \quad (1.3.4)$$

Soit l'erreur généralisée d'état $e(t)$, donnée par :

$$e = X_m - X \quad (1.3.5)$$

d'où

$$\dot{e} = \dot{X}_m - \dot{X} \quad (1.3.6)$$

Si l'on ajoute et on retranche $A_m Y$ au membre droit de (1.3.6)

on obtient :

$$\dot{e} = A_m e + (A_m - A_*(e, t)) Y + (B_m - B_*(e, t)) U \quad (1.3.6)$$

La stratégie des M.R.A.S. consiste en la synthèse d'une loi d'adaptation à partir de la minimisation de l'erreur de sortie (ou d'un autre indice) quant t augmente quelle que soit l'entrée $\Gamma(t)$ et pour n'importe quelles conditions initiales (convergence stabilité).

Dans de nombreux cas (ex. l'identification [5]), on a besoin des valeurs de A_* et B_* , d'où l'intérêt de les mémoriser ; cela est possible en utilisant un intégrateur dans le mécanisme d'adaptation. Dans ce cas, les valeurs de A_* et B_* dépendront aussi des anciennes valeurs de l'erreur. Elles deviennent donc :

$$A_m(e, t) = F(e, \tau, t) + A_g(0) \quad (1.3.8)$$

$$B_m(e, t) = G(e, \tau, t) + B_g(0) \quad (1.3.9)$$

1.3 a) Hypothèses de conception :

Pour concevoir un M.R.A.S., il faut remplir les conditions suivantes :

- a) le modèle de référence doit être un système linéaire invariant dans le temps.
- b) le modèle et le système ajustable doivent être de même ordre, sinon on fait appel à d'autres concepts [7].
- c) l'erreur généralisée d'état (ou de sortie) doit être mesurable.
- d) tous les paramètres du système ajustable sont accessibles.

1.4 Représentation équivalente des M.R.A.S. :

Le problème qui a été posé au début de ce chapitre, a été reformulé par LANDAU [5] qui l'a considéré comme étant un problème de stabilisation d'un système écarté de sa position d'équilibre définie par :

$$X_m = X, \quad A_g = A_m \quad \text{et} \quad B_g = B_m$$

La solution du problème consiste à trouver une loi d'adaptation qui permettra à ce nouveau système d'être globalement asymptotiquement stable ; c'est-à-dire en utilisant l'hyperstabilité.

En remplaçant les nouvelles valeurs de A_m et B_m données par les équations (1.3.8) et (1.3.9) dans l'équation (1.2.7), on aura :

$$\dot{e} = A_m e + [A_m - A_g(0) + F(e, \tau, t)] X + [B_m - B_g(0) + G(e, \tau, t)] \Gamma \quad (1.4.1)$$

$$V(t) = D e(t) \quad (14.4.4)$$

$\phi_1(v, \tau, t)$ et $\phi_2(v, \tau, t)$: matrice $N \times N$ et $M \times N$ qui remplissent la fonction de mémorisation.

ϕ_1 et ϕ_2 : matrice $N \times N$ et $M \times N$ dont le rôle est d'augmenter la vitesse d'adaptation.

En remplaçant A_m et B_m par leur nouvelle valeur dans l'équation (1.2.3) ; l'équation (1.4.1) devient :

$$\dot{e} = A_m e + I W$$

$$W1 = -W = \left[\int \phi_1(v, \tau, t) d\tau + \phi_2(v, t) + A_0 - A_m \right] * (t) + \left[\int \psi_1(v, \tau, t) d\tau + \psi_2(v, t) + B_0(0) - B_m \right] \Gamma(t)$$

D'où la représentation équivalente générale est donnée par la figure ci-dessous :

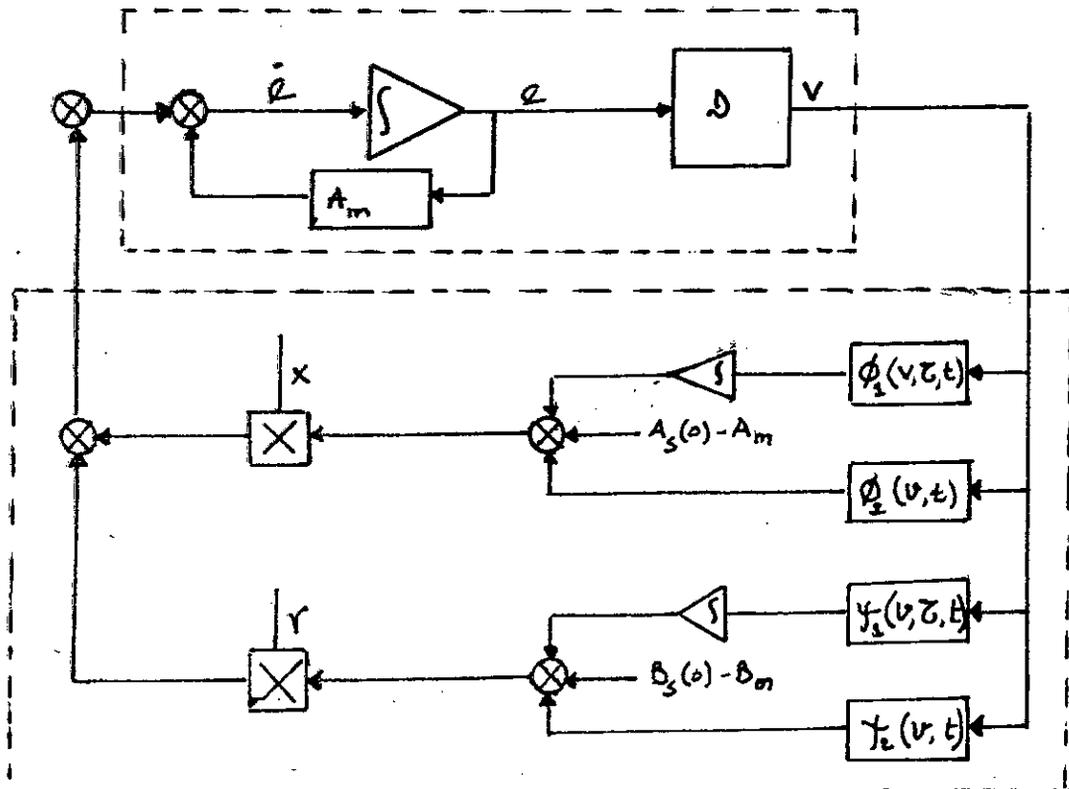


Fig (1.6) : Représentation des systèmes adaptatifs à modèle de référence

1.5 Résolution du problème du M.R.A.S. :

Il existe trois méthodes de base pour résoudre le problème de conception du M.R.A.S. Ces méthodes sont :

- a) l'optimisation paramétrique locale [5] [9]
- b) celle basée sur la théorie de LYAPUNOV [5]
- c) celle basée sur le concept d'hyperstabilité et positivité [2] [13].

Dans ce qui suit, on va utiliser cette troisième méthode. La résolution du problème se fait en quatre étapes :

Etape 1 : spécifier les équations d'état régissant le modèle de référence, puis trouver un système équivalent qui peut se mettre sous la forme donnée par la figure (1-6).

Etape 2 : chercher les fonctions $\phi_1(v, \tau, t)$, $\phi_2(v, t)$, $\psi_1(v, \tau, t)$, et $\psi_2(v, t)$ de telle sorte que le bloc de réaction vérifie l'inégalité de POPOV (voir annexe A).

Etape 3 : elle consiste à déterminer la condition que doit satisfaire le bloc linéaire, pour que le bloc non linéaire soit globalement asymptotiquement hyperstable ; cette condition est : la fonction de transfert $H(S)$ du bloc linéaire doit être strictement définie positive :

$$H(S) = (SI - A_m)$$

où D est solution de l'équation de LYAPUNOV suivante :

$$A_m^T D + D A_m = \Phi.$$

Φ est choisie de telle sorte qu'elle soit symétrique définie positive.

Etape 4 : cette étape est implicite car la loi d'adaptation est complètement définie par la connaissance de $\phi_1(v, \tau, t)$, $\phi_2(v, t)$,

$\psi_1(v, \tau, t)$ et $\psi_2(v, t)$, plus la matrice D .

Dans cette étape, on retourne vers le système initial.

1.6 Remarques :

- Comme le système est asymptotiquement hyperstable

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

D'où, si X et U sont linéairement indépendants, les paramètres du système ajustable vont converger vers ceux du modèle de référence,

$$\text{donc : } \lim_{t \rightarrow \infty} A_g(t) = A_m$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B_g(t) = B_m$$

- Si A_m admet une valeur propre nulle, l'erreur $e(t)$ dans ce cas va converger vers une constante mais restera toujours stable et en sortie on n'aura pas la sortie désirée.

- Une solution consiste à modifier le système ajustable fig (1.6) qui s'écrira :

$$\dot{X} = A_m(e,t) X(t) + B_m(e,t) \Gamma(t) - K e$$

d'où on aura :

$$\dot{e} = (A_m - K) e + I W_1.$$

A partir de cette équation, il faut s'arranger pour que la nouvelle matrice ait des valeurs propres à parties réelles négatives.

CHAPITRE III

Contrôle adaptatif à modèle de référence

Pour de très nombreux systèmes physiques, notamment parmi les procédés industriels, la minimisation d'un critère quadratique constitue l'un des moyens de parvenir à la détermination d'une structure de commande par retour d'état, pour les systèmes linéaires multidimensionnels. Ainsi, ce critère permet d'exprimer d'une manière convenable les qualités globales recherchées pour la commande [10].

Ces techniques montrent rapidement leurs limites d'application sur des systèmes non linéaires. D'où apparaît l'intérêt du contrôle adaptatif à modèle de référence, qui permet d'obtenir les performances exigées par les cahiers des charges sur des systèmes linéaires très complexes.

2.1 Commande linéaire à modèle de référence :

Le schéma de base d'une commande linéaire à modèle de référence est donné par la figure ci-dessous :

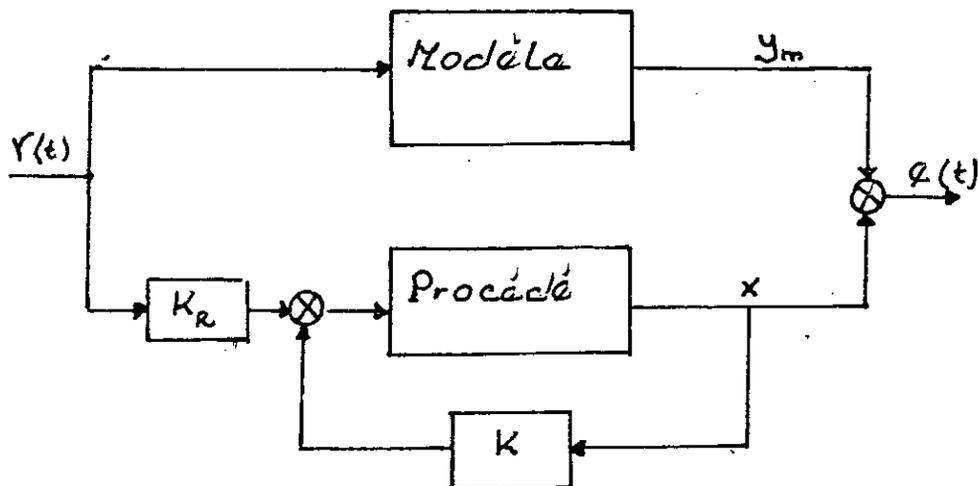


Fig (2.1) Commande linéaire à modèle de référence

La stratégie de conception consiste à trouver les matrices K et K_R qui assurent la minimisation de l'erreur de sortie $e(t)$ quelle que soit l'entrée $\Gamma(t)$.

Le système représenté par la figure 2.1 est régi par les équations d'états suivantes :

pour le modèle :

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m \Gamma(t) \quad (2.1.1)$$

pour le procédé :

$$\dot{X} = A X + B U \quad (2.1.2)$$

la commande synthétisée :

$$U = -K X + K_R \Gamma(t) \quad (2.1.3)$$

pour l'erreur d'état :

$$e(t) = X_m(t) - X(t) \quad (2.1.4)$$

La combinaison de ces quatre équations nous permet d'écrire :

$$\dot{e}(t) = A_m e(t) + (A_m - A + B * K) Y(t) + (B_m - B * K_R) \Gamma(t) \quad (2.1.5)$$

Pour que le procédé poursuive le modèle, il faut que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{e}(t) = 0 \quad (2.1.7)$$

Pour cela, il faut que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) A_m doit être une matrice d'HERWITZ

$$b) (A_m - A) + B * K = 0$$

$$c) (B_m - B * K_R) = 0$$

$$d'où K = B^+ (A - A_m) \quad (2.1.8)$$

$$K_R = B^+ B_m \quad (2.1.9)$$

$$\text{avec } B^+ = [B^T B]^{-1} B^T \quad (2.1.10)$$

Des équations (2.1.8), (2.1.9) et (2.1.10) on tire les conditions d'existence de la loi de commande donnée par (2.1.3) connue sous le nom de condition d'ERZBERGER

$$(I - B^+ B) (A - A_m) = 0 \quad (2.1.11)$$

$$(I - B^+ B) B_m = 0 \quad (2.1.12)$$

L'existence de la loi de commande est conditionnée par l'existence de B^+ . Ce qui constitue un inconvénient de la méthode.

2.2 Contrôle adaptatif à modèle de référence :

La commande linéaire présente l'avantage d'utiliser le modèle de référence d'une manière implicite (uniquement pour le calcul des gains statiques K et K_R), mais elle n'est appliquée que sur des systèmes linéaires invariants dans le temps. C'est pourquoi la commande adaptative apparaît la mieux placée et la plus générale pour le contrôle des systèmes évolutifs.

Le schéma de base d'une implémentation de commande adaptative qui apparaît la mieux placée et la plus générale à modèle de référence est donné par la figure (2.2).

L'adaptation se fait par un signal synthétisé par un mécanisme d'adaptation et réinjecté à l'entrée du procédé.

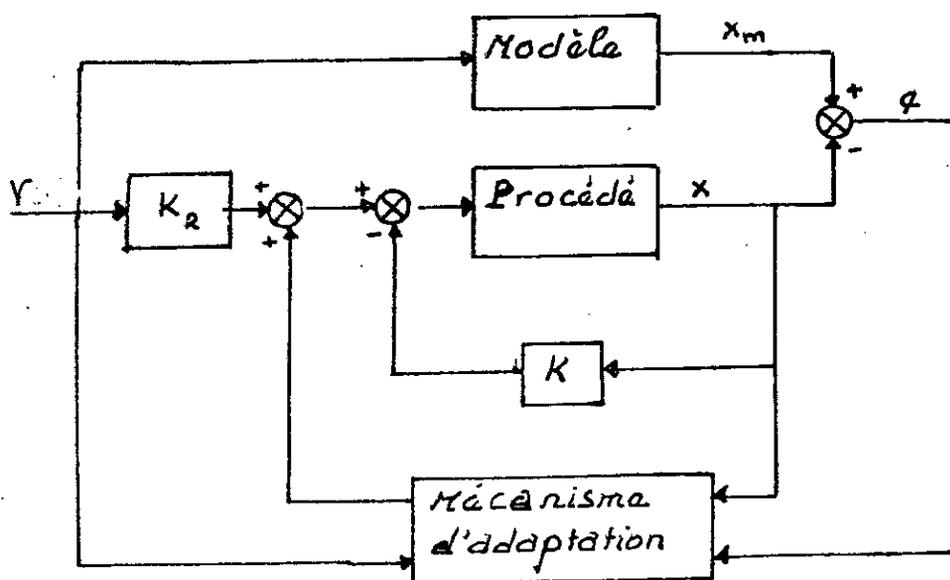


Fig (2.2) : Adaptation par signal synthétisé

Les équations qui régissent cette configuration sont :

- pour les modèles de référence

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m \Gamma \quad (2.2.1)$$

- pour le procédé

$$\dot{X} = A X + B U \quad (2.2.2)$$

- l'erreur d'état

$$e(t) = X_m(t) - X(t) \quad (2.2.3)$$

- le signal de commande linéaire

$$U_1 = -K X + K_R \Gamma \quad (2.2.4)$$

- le signal d'adaptation

$$U_2 = -K(e,t) X(t) + K_R(e,t) \Gamma(t) \quad (2.2.5)$$

- le signal de commande

$$U = U_1 + U_2 \quad (2.2.6)$$

Par la combinaison des équations (2.2.2) et (2.2.6), on tire le système suivant :

$$\dot{X}_m = A_m X_m + B_m \Gamma(t)$$

$$\dot{X} = [A - B * K + B * K(e,t)] X(t) + B [K_R + K_R(e,t)] \Gamma(t) \quad (2.2.7)$$

La stratégie de résolution du problème consiste à déterminer

$K(e,t)$ et $K_R(e,t)$ pour que la deuxième équation du système se comporte comme la première équation. Pour cela, on utilisera le procédé de résolution développé au chapitre I.

Par identification on obtient :

$$A_s(e,t) = A - B * K + B * K(e,t) \quad (2.2.8)$$

$$B_s(e,t) = B * [K_R + K_R(e,t)] \quad (2.2.9)$$

$$A_s(0) = A - B * [K - K(0)] \quad (2.2.10)$$

$$B_s(0) = B [K_R + K_R(0)] \quad (2.2.11)$$

avec $K(0)$ et $K_R(0)$ choisi de telle sorte à satisfaire les conditions d'ERZBERGER, Si $[B^T B]$ n'est pas inversible.

D'où la solution recherchée consiste à calculer :

$$K(e, t) = \int_0^t \Phi_1(e, \tau, t) d\tau + \Phi_2(e, t) + K(0) \quad (2.2.12)$$

$$K_R(e, t) = \int_0^t \Psi_1(e, \tau, t) d\tau + \Psi_2(e, t) + K_R(0) \quad (2.2.13)$$

Les matrices $\Phi_1(e, \tau, t)$, $\Phi_2(e, t)$, $\Psi_1(e, \tau, t)$ et $\Psi_2(e, t)$ sont données par la solution de l'intégrale de POPOV (annexe A) et les gains K et K_R donnés par l'équation (2.1.6) et 2.1.7).

Donc :

$$v(t) = e(t) \quad (2.2.14)$$

$$\phi_1(v, \tau, t) = F v(\tau) [X(\tau)]^T \quad (2.2.15)$$

$$\phi_2(v, t) = F' v(t) [X(t)]^T \quad (2.2.16)$$

$$\psi_1(v, \tau, t) = M v(\tau) [\Gamma(\tau)]^T \quad (2.2.17)$$

$$\psi_2(v, t) = M' v(t) [\Gamma(t)]^T \quad (2.2.18)$$

avec F et M qui sont des matrices strictement positives.

F' et M' des matrices positives ou nulles.

Une forme simplifiée de ces équations est donnée par STOTEN, où il a pris :

$$F = M = \alpha I \quad (2.2.19)$$

$$F' = M' = \beta I \quad (2.2.20)$$

avec : α constante positive

β constante positive ou nulle.

La matrice intervenant dans l'équation (2.2.14) est donnée par :

$$D = B^T p$$

avec : p solution de l'équation de LYAPUNOV.

$$A^T m p + p A m = - \delta$$

avec δ matrice symétrique définie positive.

L'algorithme qui résoud le problème de conception du contrôle adaptatif par modèle de référence est résumé dans le tableau suivant :

<p>Modélisation mathématique</p>	$\dot{X}_m(t) = A_m X_m(t) + B_m \Gamma(t)$ $\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$
<p>Calcul des gains statiques K et K_R</p>	<p>1°) $B^+ = [B^T B]^{-1} B^T$</p> <p>2°) $K = B^+ (A_m - a)$</p> <p>3°) $K_R = B^+ B_m$</p>
<p>Calcul du compensateur linéaire</p>	<p>1°) Résoudre $A^T m p + p A_m = \phi ; \phi > 0$</p> <p>2°) $D = B^T p$</p>
<p>Synthèse du signal d'adaptation</p>	<p>1°) $K(e,t) = \alpha v(t) X^T(t) d(t) + \beta v(t) X^T(t)$</p> <p>2°) $K_R(e,t) = \alpha v(t) \Gamma^T(t) d(t) + \beta v(t) \Gamma^T(t)$</p> <p>$\alpha > 0 ; \beta \geq 0$</p>
<p>Synthèse de la loi de commande</p>	$U(t) = - [K - K(v,t)] X(t) +$ $[K_R + K_R(e,t)] \Gamma(t)$

Tableau (2.1) Algorithme du M.R.A.C.

CHAPITRE III

CONTROLE MINIMAL

M.C.S. : MINIMAL CONTROLLER SYNTHESIS

3.1 Généralités :

L'application des algorithmes de commande basés sur la connaissance des paramètres des procédés est limitée ; soit par la complexité de ces derniers, soit par leur variation dans le temps. A cause de ces contraintes, les recherches entreprises ces dernières années consistaient à développer des algorithmes qui n'ont besoin que d'un strict minimum d'informations pour leurs applications.

STOTEN et BENCHOUBANE en 1990 [11] ont développé un algorithme de contrôle adaptatif. Une simplification du M.R.A.C. sous certaines conditions qu'on verra dans ce chapitre. Cet algorithme n'a besoin que de la connaissance de l'ordre du système, le nombre de ses entrées et de ses sorties pour son application.

3.2 Synthèse de l'algorithme de commande minimale :

Pour synthétiser la loi de commande minimale, on a besoin de la connaissance des paramètres du système, donc des matrices A et B. Pour l'élaboration de leur algorithme, STOTEN et BENCHOUBANE ont posé les gains statiques nuls soit :

$$K = 0_{m \times n} \quad (3.2.1)$$

$$K_R = 0_{m \times m} \quad (3.2.2)$$

A partir de cela, ils ont tiré le schéma d'adaptation paramétrique suivant :

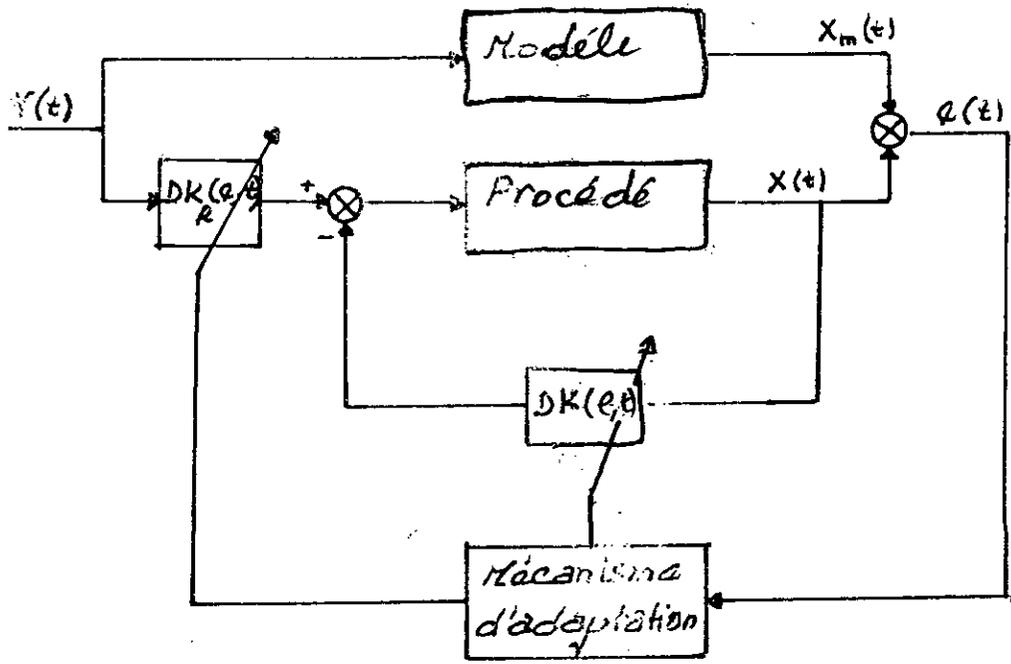


Schéma d'un M.C.S. "Adaptation paramétrique"

A partir de cette figure, la loi de commande minimale est de la forme :

$$U = K(e, t) X(t) + K_R(e, t) \Gamma(t) \quad (3.2.3)$$

L'équation d'état régissant le modèle est :

$$\dot{X}_m = A_m X_m(t) + B_m \Gamma(t) \quad (3.2.4)$$

En utilisant le concept d'hyperstabilité pour que le système soit asymptotiquement globalement hyperstable, il faut que $K(e, t)$ et

$K_R(e, t)$ et le compensateur linéaire D aient comme solution :

$$A_m^T p + p A_m = -\phi \quad (3.2.5)$$

$$K(v, t) = \int_0^t \phi_1(v, \tau, t) d\tau + \phi_2(v, t) \quad (3.2.6)$$

$$K_R(v, t) = \int_0^t \psi_2(v, \tau, t) d\tau + \psi_2(v, t) \quad (3.2.7)$$

Les matrices $\phi_1(v, \tau, t)$, $\phi_2(v, t)$, $\psi_1(v, \tau, t)$ et $\psi_2(v, t)$ sont de la même forme que celles trouvées au chapitre précédent.

Ces solutions sont valables pour un très grand nombre de systèmes dont la représentation d'état est une généralisation du cas

S.I.S.O.

Soit la représentation d'état d'un système :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{ni} & \dots & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{ni} & \dots & \dots & B_{nq} \end{bmatrix}$$

Pour $i = j$ on a :

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ -a_{ij1} & & & -a_{ijn1} \end{bmatrix} \quad B_{ii} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_{ini} \end{bmatrix}$$

Pour $i \neq j$, on a :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{ij1} & \dots & \dots & a_{ijn1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -b_{ijnj} \end{bmatrix}$$

avec n_i degrés du i ème sous-système

1er cas : S.I.S.O.

Soit $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_m]$ et $\beta = [\beta_1 \dots \beta_m]$ (3.2.8)

$X = [X_1 \dots X_n]$ et $V = [V_1 \dots V_m]$ (3.2.9)

Le critère de POPOV donne :

$$\int_{t_0}^{t_1} V^T(t) [B \int_{t_0}^t \alpha V(\tau) X^T(\tau) d\tau - A] X(t) dt \gg -\delta_{11}^2 \quad (3.2.10)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} V^T(t) B B V(t) X^T(t) X(t) dt \gg -\delta_{22}^2 \quad (3.2.11)$$

avec $\delta_{11}^2 + \delta_{22}^2 = \delta^2 \gg 0$ (3.2.12)

En prenant :

$\alpha = [0 \dots 0 \alpha_m]$ (3.2.16)

$\beta = [0 \dots 0 \beta_m]$ (3.2.17)

Les inégalités (3.2.10) et (3.2.11) deviennent :

$$\int_{t_0}^{t_1} b_1 \alpha_m \sum_{j=1}^m V_n X_j \left[\int_{t_0}^t V_n X_j d\tau - a_{1j} / b_1 \alpha_m \right] dt \gg -\delta_{11}^2 \quad (3.2.18)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} b_1 \beta_m V_n^2 \sum X_i^2 dt \gg -\delta_{22}^2 \quad (3.2.19)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} b_1 \alpha_m V_n \Gamma \left[\int_{t_0}^t V_n \Gamma d\tau - a_{1j} / b_1 \alpha_m \right] dt \gg -\delta_{22}^2 \quad (3.2.20)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} b_1 \beta_m V_n^2 r^2 dt \gg -\delta_{22}^2 \quad (3.2.21)$$

Les inégalités (3.2.19) et (3.2.21) sont vérifiées. Pour vérifier les deux autres inégalités, on utilise la propriété suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} K F' F dt \gg - K F^2(t_0)/2 \quad (3.2.22)$$

avec; pour l'équation (3.2.18)

$$f_1 = \left[\int_0^t V_n x_i d\tau - a_1/b_1 \alpha_n \right] \quad (3.2.23)$$

$$f_1' = V_n x_j \quad (3.2.24)$$

$$K_1 = b_1 \alpha_n \quad (3.2.25)$$

Pour l'équation (3.2.20) :

$$f_2 = \left[\int_0^t V_n \Gamma d\tau - a_2/b_2 \alpha_m \right] \quad (3.2.26)$$

$$f_2' = V_n \Gamma \quad (3.2.27)$$

$$K_2 = b_2 \alpha_m \quad (3.2.28)$$

Système M.I.M.O :

Soit le vecteur d'état X(t)

$$X^T = [x_{11} \dots x_{1n_1}, x_{21} \dots x_{2n_2}, \dots, x_{m1} \dots x_{mn_m}]$$

Soit le vecteur d'erreur V(t)

$$V^T = [V_{11} \dots V_{n_1}, V_{21} \dots V_{2n_2}, \dots, V_{m1} \dots V_{mn_m}]$$

Si on choisit les matrices α et \sim telles que :

$$\alpha = \text{diag} [[0 \quad 0\alpha_1] [0 \quad 0\alpha_2] \dots [0 \quad 0\alpha_m]] \quad (3.2.29)$$

$$\beta = \text{diag} [[0 \quad 0\beta_1] [0 \quad 0\beta_2] \dots [0 \quad 0\beta_m]] \quad (3.2.30)$$

L'inégalité (3.2.10) devient :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ b_{11} \alpha_1 \left[V_{1n_1} x_{11} \int_0^t V_{1n_1} x_{1n_1} d\tau - a_{11}/b_{11} \alpha_1 \right] \right. \\ + \dots + V_{1n_2} x_{m n_m} \int_0^t V_{1n_2} x_{m n_m} d\tau - a_{11}/b_{m n_m} \alpha_m \\ + \dots + b_{m m} \alpha_m \left[V_{m n_m} x_{1 n_1} \int_0^t V_{m n_m} x_{1 n_1} d\tau - a_{m m}/b_{m n_m} \alpha_m \right] \\ \left. + \dots + V_{m n_m} x_{m n_m} \int_0^t V_{m n_m} x_{m n_m} d\tau - a_{m m}/b_{m n_m} \alpha_m \right\} dt \quad (3.2.30)$$

Cette inéquation comporte m^2 termes identiques à celui de l'inéquation (3.2.18) qui satisfait le critère de POPOV.

De la même façon, on peut montrer que (3.2.19) jusqu'à (3.2.21) satisfait le critère de POPV.
 Le tableau suivant résume les principales étapes de l'algorithme de contrôle minimal.

Modélisation mathématique	1) $X_m = A_m X_m + B_m u$ 2) $\dot{x} = Ax + Bu$ 3) $c = x_m - X$
Calcul du compensateur linéaire	1°) résoudre $D_m + A_m D = -0, 0 > 0$ 2°) $V(t) = D e^{-\lambda t}$
synthèse du contrôleur	$1^\circ) DK(V, t) = \int_0^t \alpha V(\tau) X^T(\tau) d\tau + \beta V(t) r^T(t)$ $2^\circ) DKr(V, t) = \int_0^t \alpha V(\tau) r^T(\tau) d\tau + \beta V(t) r^T(t)$
calcul de la commande	$U = DK(V, t) X(t) + DKr(V, t) r$

Tableau 5.1 : Algorithme de contrôle minimal

Exemples d'applications

cas siso

Exemple N°1- Asservissement de vitesse:

Ce premier exemple d'application consacré au contrôle de vitesse d'un moteur à courant continu à partir duquel sera illustré l'intérêt des contrôleurs exposés dans les chapitres II et III.

Le but fixé est d'améliorer le temps de réponse du moteur.

L'équation régissant l'évolution dynamique du système peut être approximée à un système du 1^{er} ordre dont la fonction de transfert dans le domaine continu, est donnée par:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3.833}{s+5}$$

d'où on en déduit la représentation d'état suivante:

$$\dot{X}(t) = -5X(t) + 3.833 U(t)$$

Le modèle de référence choisi est donné par:

$$\dot{X}_m(t) = -10X_m(t) + 10 r(t)$$

M. R. A. C

Le contrôle du moteur consiste à trouver la loi de commande définie par l'équation suivante:

$$U(t) = -(K - DK(e, t))X(t) + (KR + DKR(e, t))r(t)$$

Calcul des gains statiques K KR :

$$\text{On a : } K = B^{-1} (A - A_m)$$

$$KR = B^{-1} B_m$$

$$B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$$

On trouve: $K=1.304$
 $K_R=2.609$

Calcul du compensateur linéaire:

Pour que le triplet (A_m, B, D) soit positif, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites .

$$A_m^T P + P A_m = -Q; \quad Q > 0$$
$$D = B^T P$$

En choisissant $Q=-1$ on trouve :

$$D=0.1917$$

Test N°1

Pour ce premier test, la période d'échantillonnage est prise de telle façon qu'elle soit inférieure au temps de montée de la réponse indicielle du moteur sur 2, soit $T_e=0.01$. α et β sont égaux respectivement à 100 et 1. La réponse donnée à l'aide du M.R.A.C., comme le montre la figure (III-1-a) est très bonne; on n'arrive pas à faire une distinction entre l'évolution du modèle et celle du procédé. La figure (III-1-c) qui représente l'erreur entre les deux sorties montre que celle-ci est pratiquement nulle

Sur la figure (III-1-b), on voit un saut de la commande $U(t)$ à l'instant initial qui est dû au produit du gain statique K_R par le signal de référence ; cela a pour but d'accélérer la réponse du système en régime transitoire.

Les figures (III-1-d) et (III-1-e) montrent que les gains oscillent au départ, puis se stabilisent tout en restant très faibles.

Test N°2

En choisissant une période d'échantillonnage $T_e=0.18s$, avec $\alpha=10$ et $\beta=1$, la sortie du système automatisé semble stable, durant le temps de simulation. Ce phénomène est observé dans un premier temps sur le graphe de l'erreur (fig III-2-c), mais ne peut être observé en sortie (fig III-2-a) en un temps court. Cela est dû au fait que la divergence de l'erreur ainsi que de la commande (fig III-2-b) et des gains dk et dk_R (fig III-2-d) et

Reponse indicielle

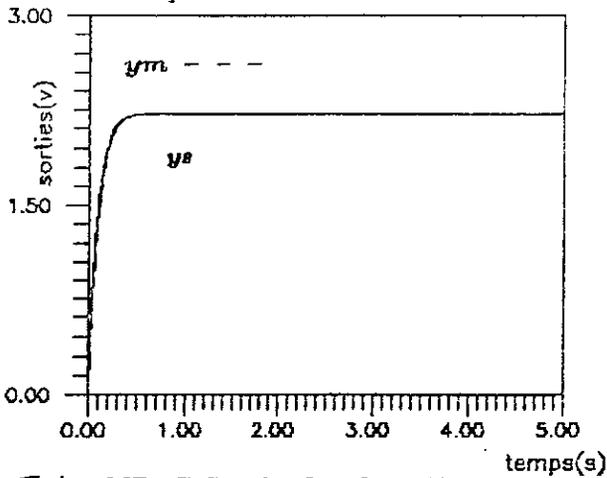


fig III-1-a: MRAC. Controle de vitesse du 'moteur'

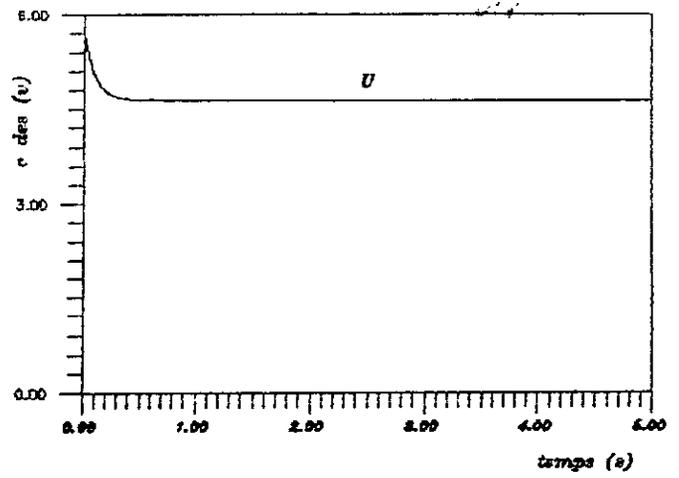


fig III-1-b: MRAC. Commande du moteur

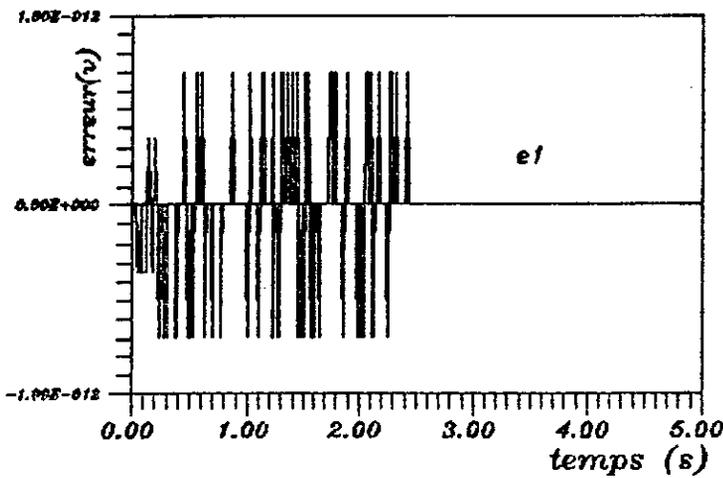


fig III-1-c: MRAC. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

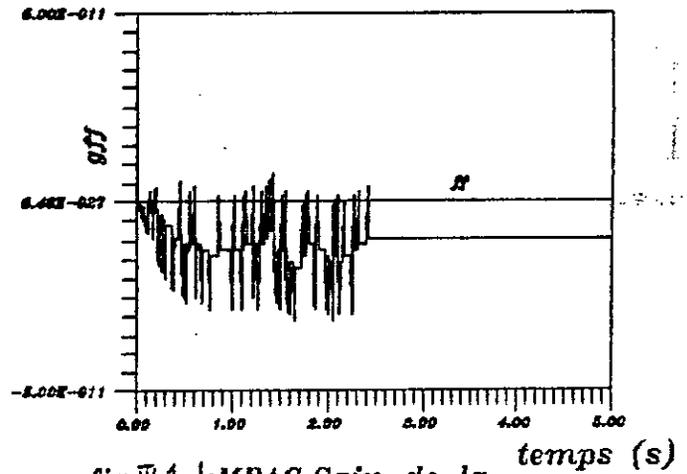


fig III-1-d: MRAC. Gain de la chaîne directe

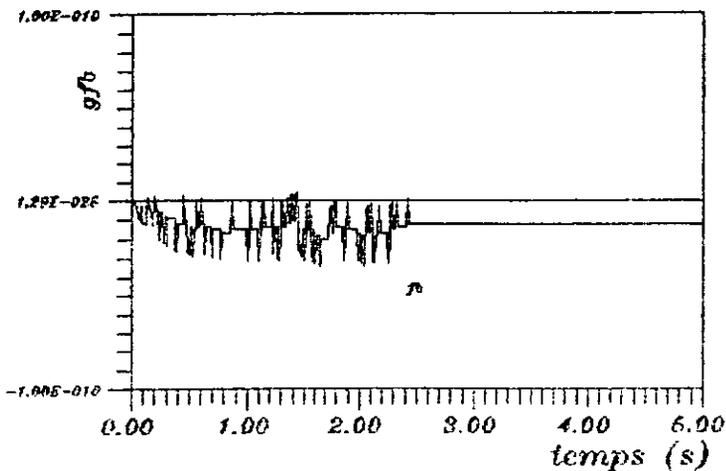


fig III-1-e: MRAC. Gain de contre-reaction

--: Reponse du modele de reference
Systeme:

$T_c = 0.01$
 $\alpha = 100$
 $\beta = 10$

Reponse indicielle

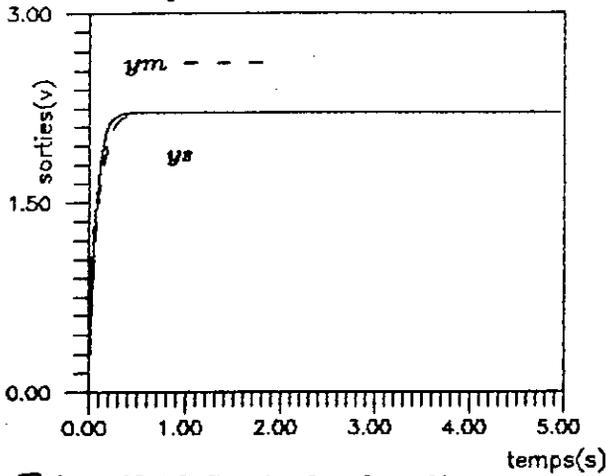


fig III-2-a: MRAC. Controle de vitesse du 'moteur'

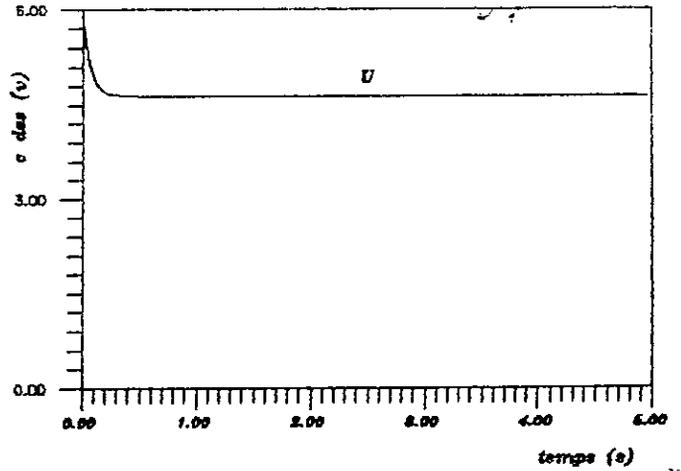


fig III-2-b: MRAC. Commande du moteur

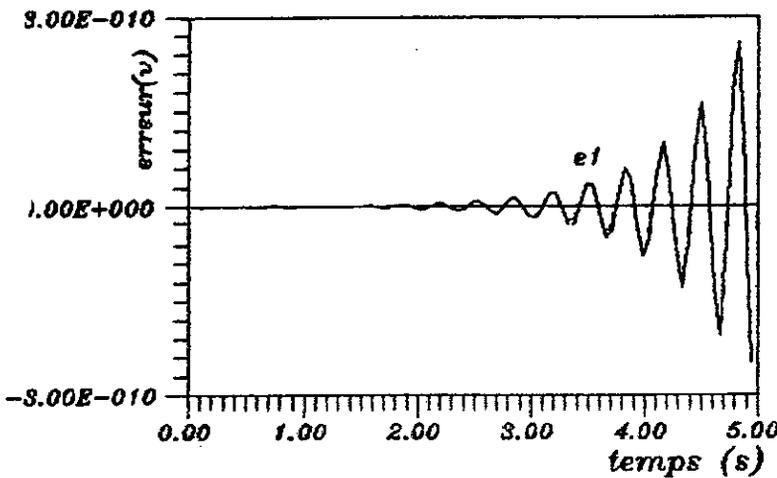


fig III-2-c: MRAC. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

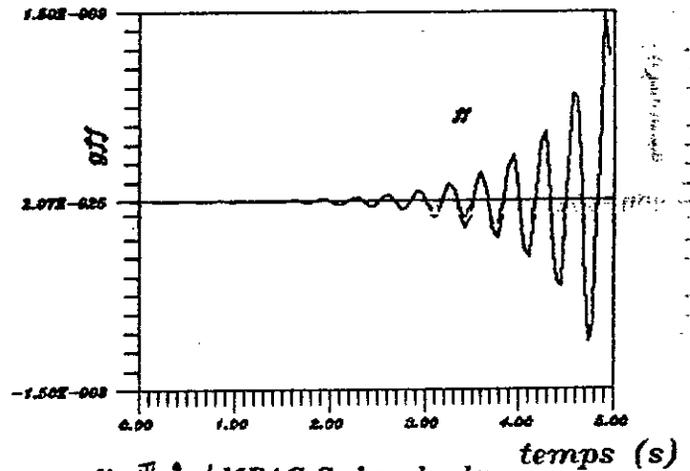


fig III-2-d: MRAC. Gain de la chaine directe

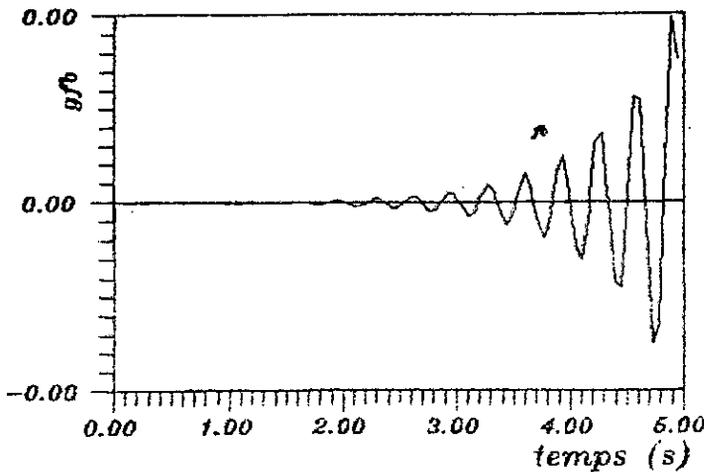


fig III-2-e: MRAC. Gain de contre-reaction

--: Reponse du modele de reference
 Systeme:
 $\tau_e = 0.180$
 $\text{Alpha} = 10$
 $\text{Beta} = 1$

Reponse indicielle

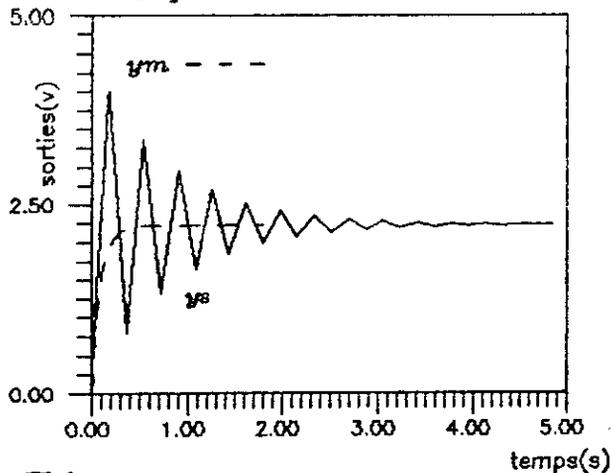


fig III-3-a: MRAC. Controle de vitesse du 'moteur'

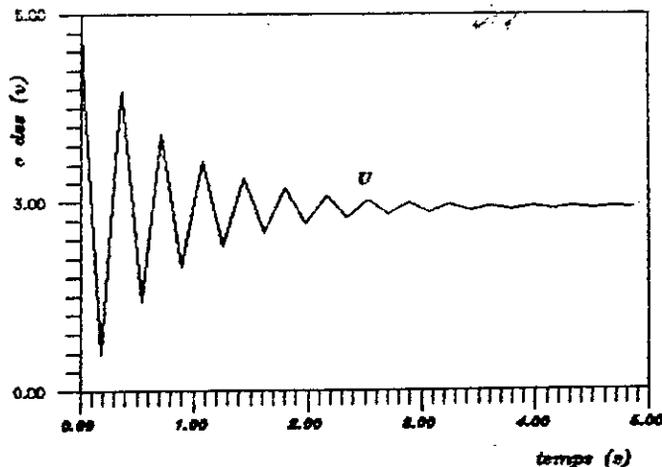


fig III-3-b: MRAC. Commande du moteur

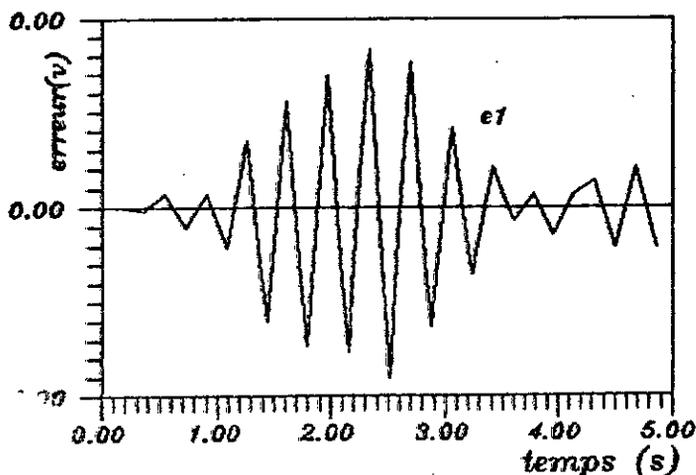


fig III-3-c: MRAC. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

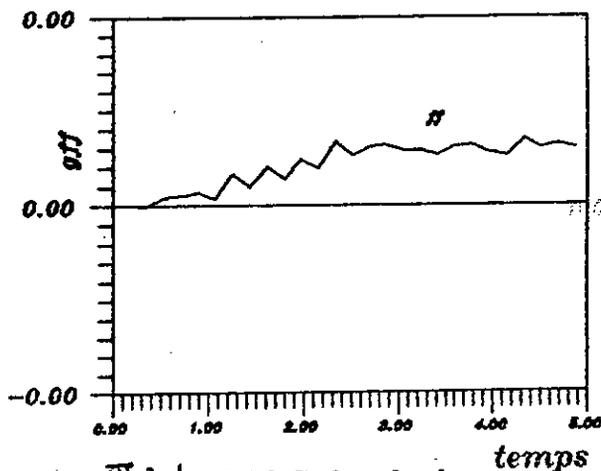


fig III-3-d: MRAC. Gain de la chaine directe

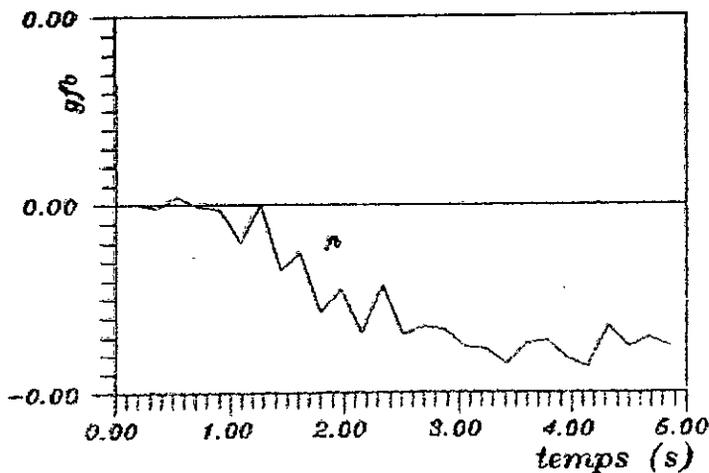


fig III-3-e: MRAC. Gain de contre-reaction

---: Reponse du modele de reference
 Systeme: $T_e=0.056$
 $\text{Alpha}=10$
 $\text{Beta}=1$

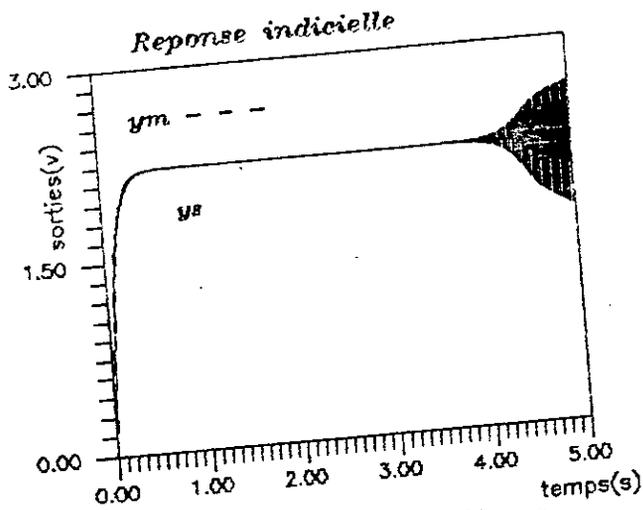


fig III-4-a: MRAC. Contrôle de vitesse du 'moteur'

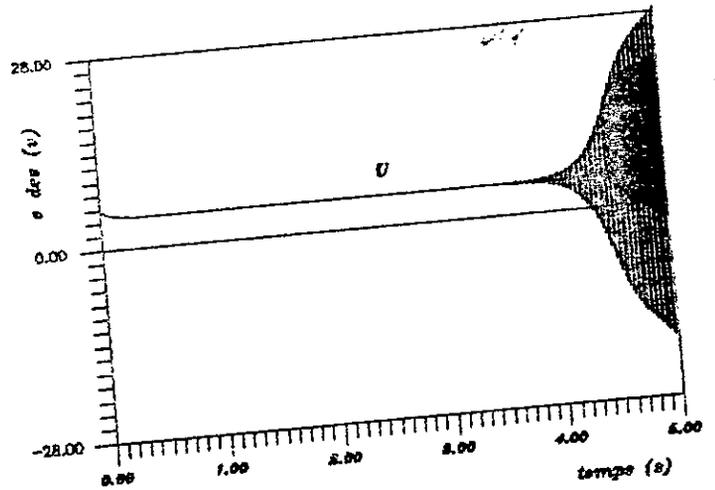


fig III-4-b: MRAC. Commande du moteur

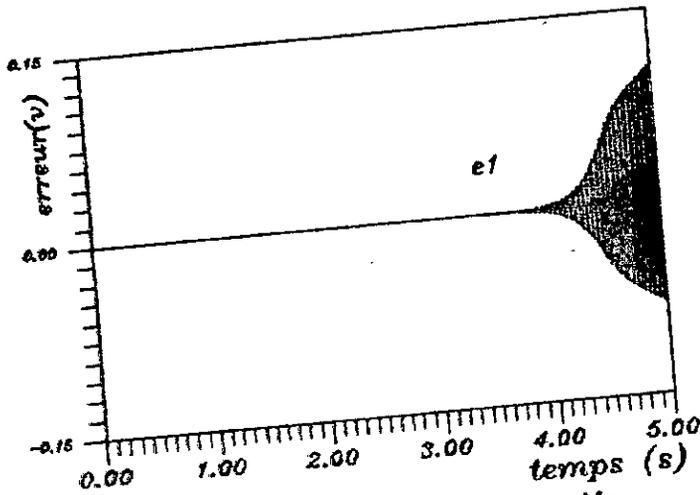


fig III-4-c: MRAC. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

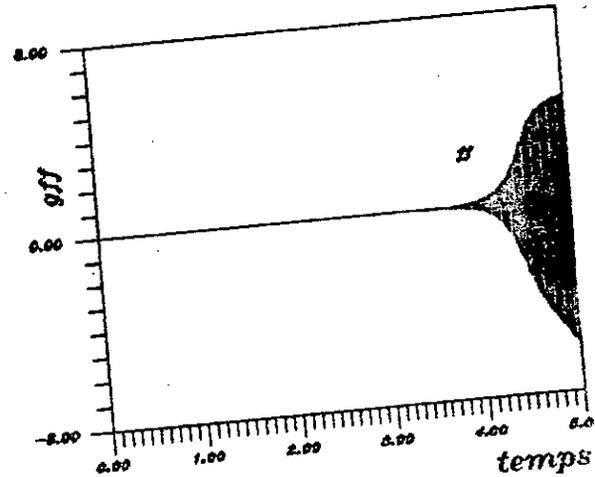


fig III-4-d: MRAC. Gain de la chaîne directe

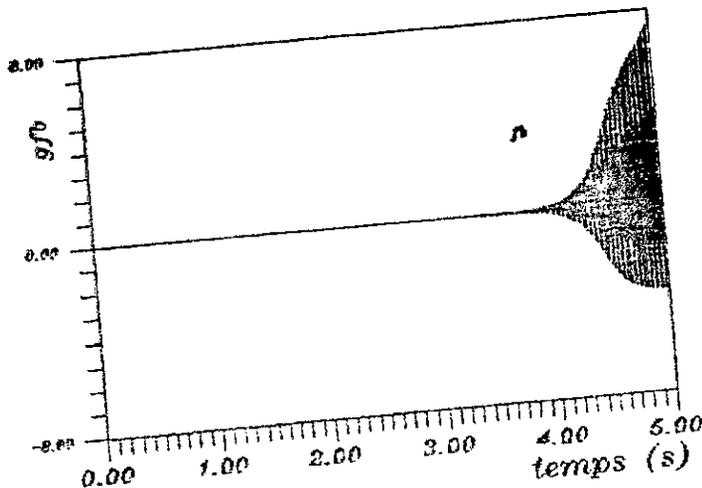


fig III-4-e: MRAC. Gain de contre-réaction

-- --: Réponse du modèle de référence
 Système: $T_e = 0.01$
 $\text{Alpha} = 100$
 $\text{Beta} = 27.7$

(fig III-2-e) se fait lentement vu le choix de α et de β . Par contre si on choisit une autre période d'échantillonnage $T_e=0.056$ s, avec les mêmes valeurs de α et β , la sortie du système automatisé oscille au début (fig III-3-a) puis revient à sa position d'équilibre, ce qui est aussi observable sur le graphe de la commande (fig III-3-b).

D'où l'importance du choix de la période d'échantillonnage et de son influence sur la stabilité de l'algorithme.

Test N°3

En choisissant $\alpha=100$ et $\beta=27.7$ pour une période $T_e=0.01$ s, on remarque que sur les figures (III-4-a) jusqu'à (III-4-e), le système converge au début, puis diverge après quelques secondes.

M.C.S

Test N°1

En choisira les mêmes données que celle du M.R.A.C lors du premier test. $T_e=0.01$, $\alpha= 100$, $\beta= 10$.

Ce premier test montre qu'avec la stratégie du M.C.S, on obtient de bonnes performances. Sur la figure (III-5-a) on observe que la sortie du système se confond avec la sortie du modèle après 0.5s .La figure(III-5-c) montre une convergence exponentielle de l'erreur vers 0. Les gains adaptatifs, figure(III-5-d) et (III-5-e) sont plus importants que ceux trouvés avec le MRAC.

Test N°2 :

Ce test illustrera l'influence de T_e vis-à-vis des paramètres α et β , pour cela on prend :

$$T_e=0.056$$

$$\alpha=10$$

$$\beta=1$$

Les figures(III-6-a) à (III-6-e) montrent qu'avec ces valeurs de T_e , α et β , la réponse obtenue est plus lente que celle obtenue lors du premier test.

Reponse indicielle

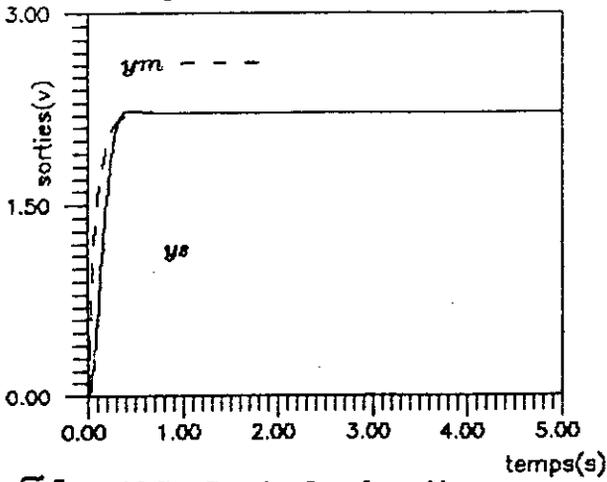


fig III-5-a: MCS. Controle de vitesse du 'moteur'

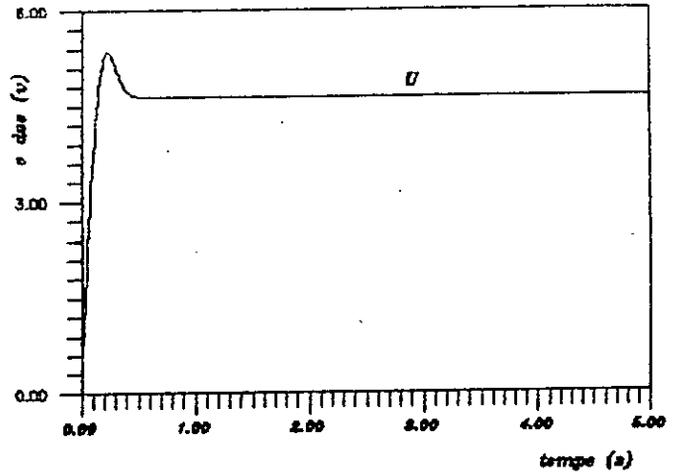


fig III-5-b: MCS. Commandes du moteur

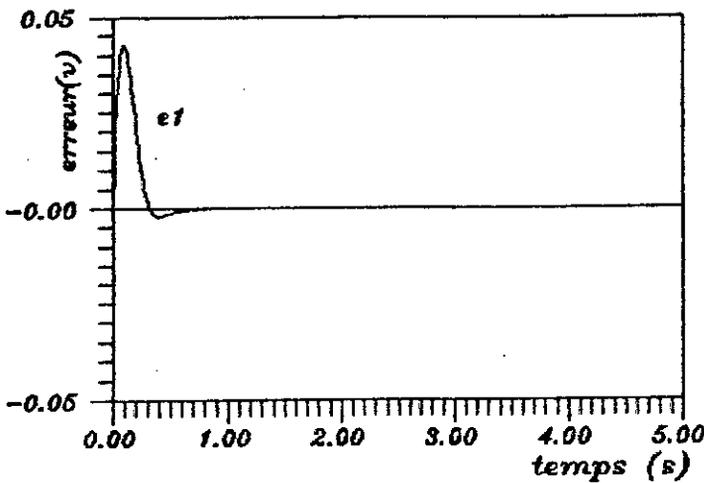


fig III-5-c: MCS. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

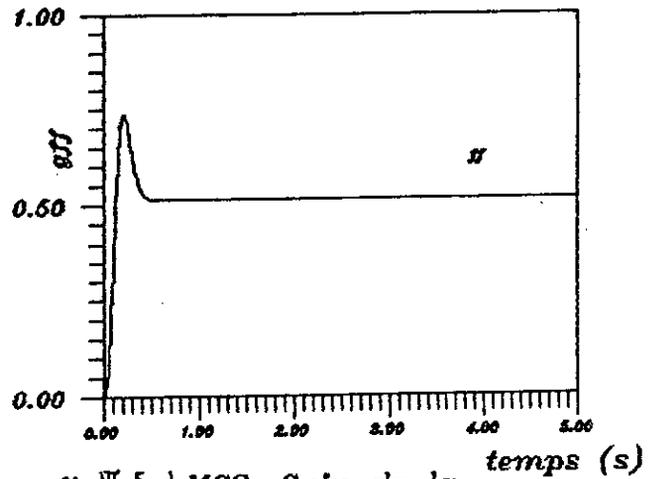


fig III-5-d: MCS. Gain de la chaîne directe

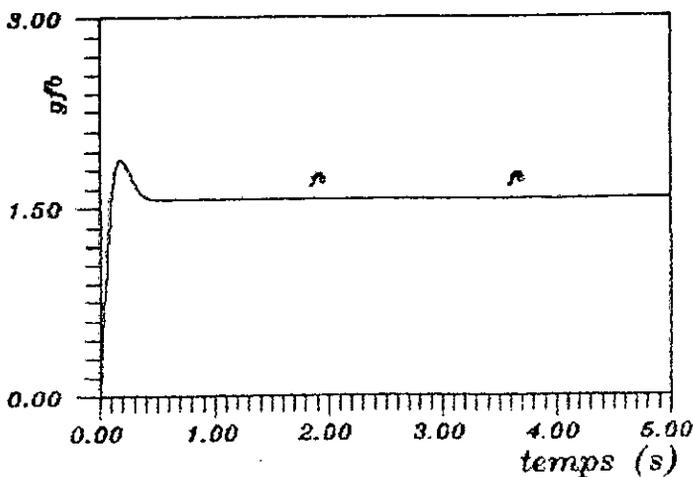


fig III-5-e: MCS. Gain de contre-réaction

--: Reponse du modele de reference
 Systeme: $T_e=0.01$
 $\text{Alpha}=100$
 $\text{Beta}=10$

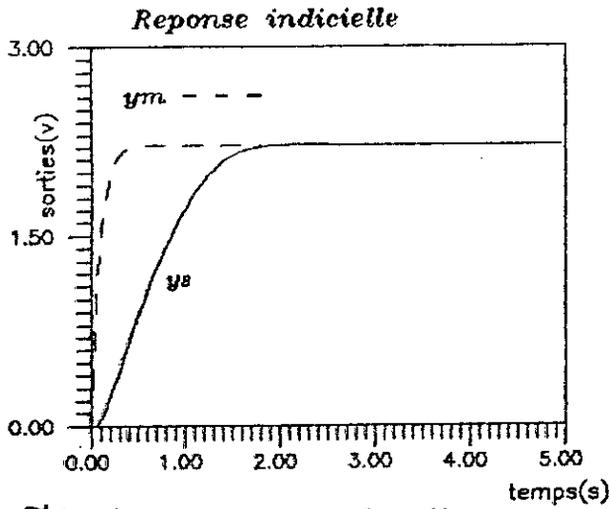


fig III-6-a: MCS. Controle de vitesse du 'moteur'

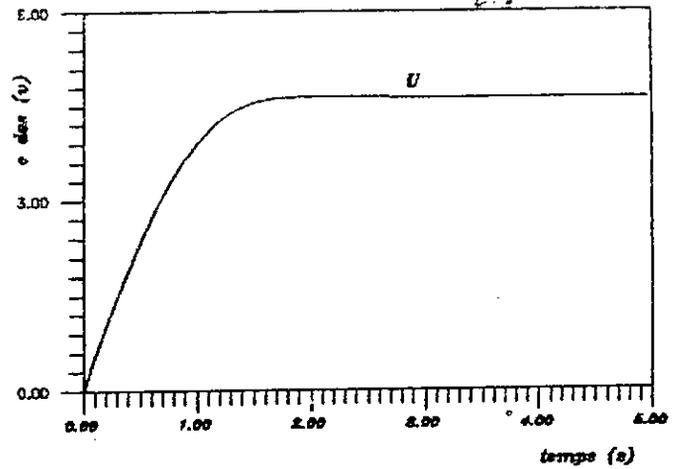


fig III-6-b: MCS. Commandes du moteur

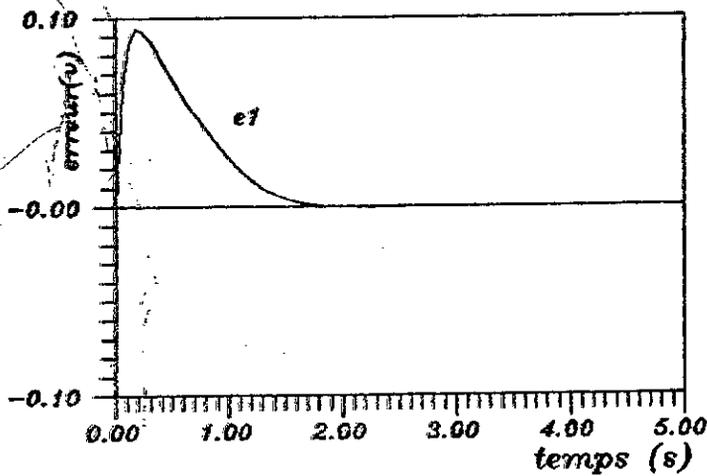


fig III-6-c: MCS. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

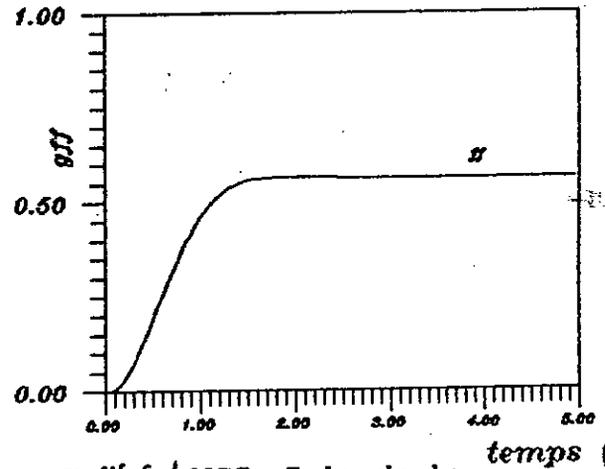


fig III-6-d: MCS. Gain de la chaine directe

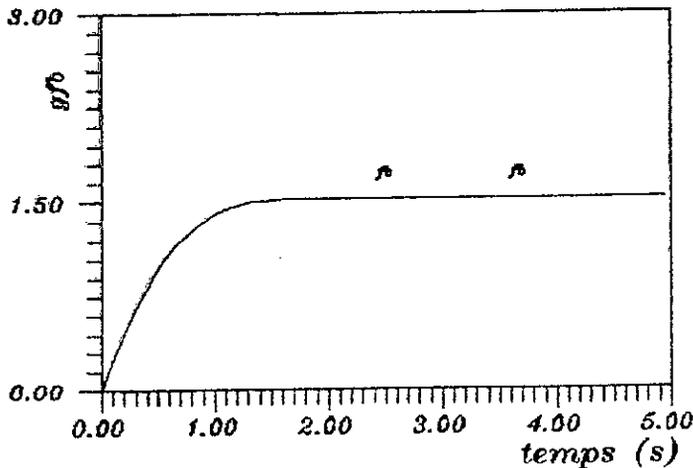


fig III-6-e: MCS. Gain de contre-reaction

--: Reponse du mode de reference
Systeme: $T_e=0.056$
 $\alpha=10$
 $\beta=1$

Reponse indicielle

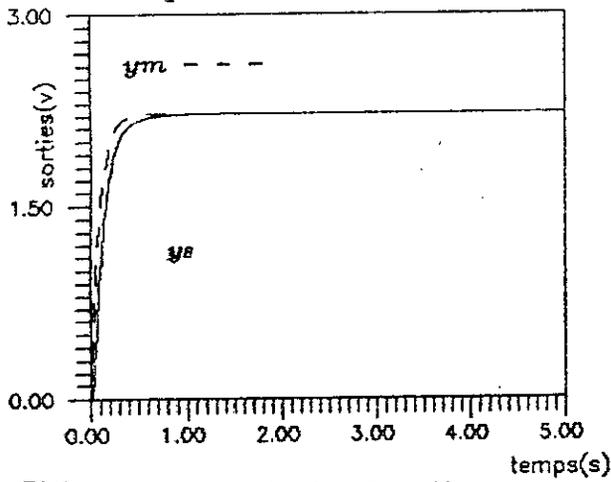


fig III-7-a: MCS. Controle de vitesse du 'moteur'

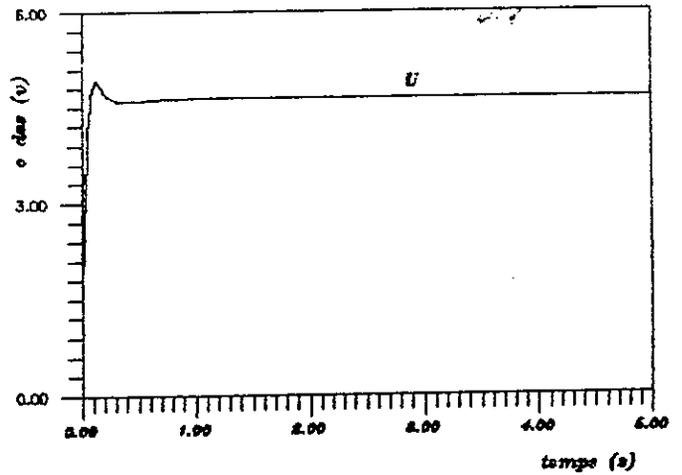


fig III-7-b: MCS. Commandes du moteur

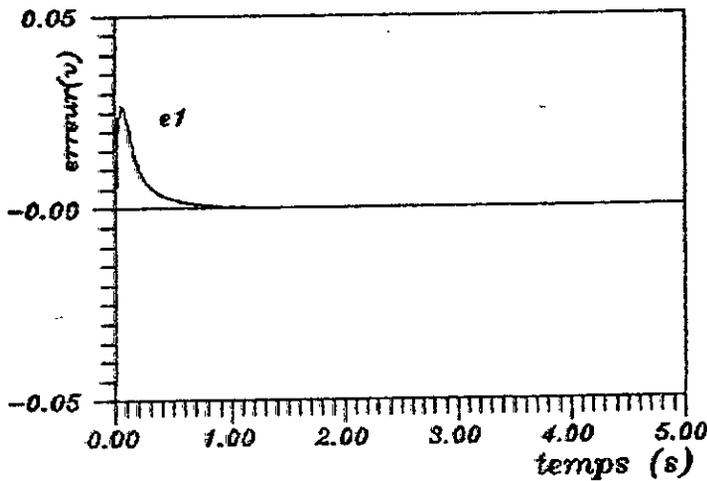


fig III-7-c: MCS. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

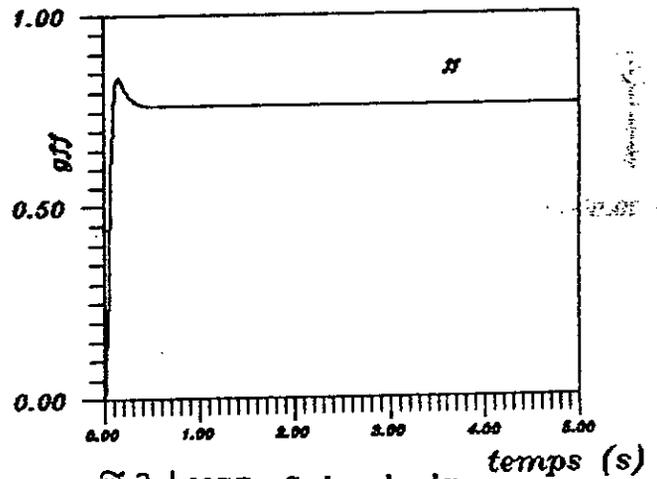


fig III-7-d: MCS. Gain de la chaine directe

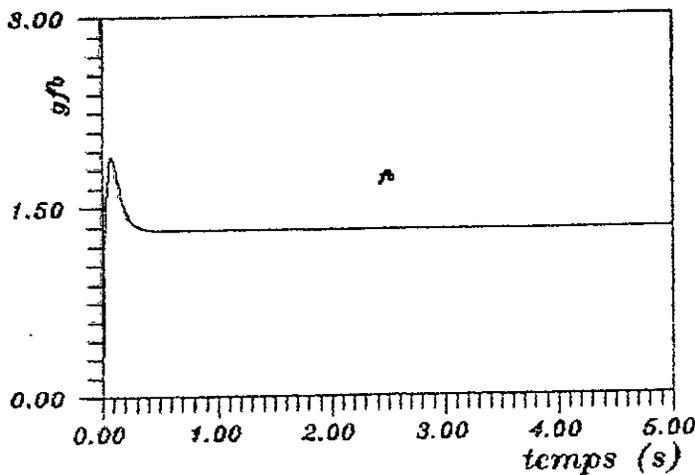


fig III-7-e: MCS. Gain de contre-reaction

--: Reponse du modele de reference

Systeme:
 $T_e=0.01$
 $\alpha=100$
 $\beta=27.7$

Test N°3 :

Ce test illustrera l'influence de β vis-à-vis des paramètres T_e et α , pour cela on prend :

$$T_e = 0.01$$

$$\alpha = 100$$

$$\beta = 27.7$$

Les figures (III-7-a) à (III-7-e) montrent qu'avec ces valeurs de T_e , α et β , la réponse obtenue est meilleur que celles obtenues lors des tests 1 et 2. D'où on peut dire que le gain β joue un rôle dans la rapidité de la réponse du système automatisé.

Exemple N°2-Asservissement de position .

L'équation régissant l'évolution de la position du moteur peut être approximée à un système du 2° ordre dont la fonction de transfert dans le domaine continu est donnée par:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3.833}{S(S+5)}$$

Ce qui nous donne dans l'espace d'état, pour le système:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3.833 \end{pmatrix} U(t)$$

Le modèle de référence est donné par:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{m1}(t) \\ \dot{x}_{m2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{m1}(t) \\ x_{m2}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} r(t)$$

M. R. A. C :

Les gains statiques calculés sont:

$$K = [9.39 \quad 1.82]$$

$$K_R = 12$$

Le compensateur linéaire D calculé, pour un choix de Q:

$$Q = \begin{pmatrix} 3.62 & 0.14 \\ 0.14 & 0.05 \end{pmatrix}$$

a pour matrice :

$$D = [0.54 \quad 0.20]$$

Pour cet exemple :

$$T_e = 0.01$$

$$\alpha = 100 \quad \text{et} \quad \beta = 1$$

Les performances obtenues sont comme celles du 1^{er} exemple; ce qui peut être vérifié sur la figure (III-8-a). L'erreur de sortie, comme on peut le voir sur la figure (III-8-c) est pratiquement nulle et les gains adaptatifs sont parfaitement constants, comme le montre les figures (III-8-d) et (III-8-e).

M.C.S

Pour le M.C.S, les performances obtenues sont aussi très bonnes. La sortie du système se confond avec la sortie du modèle après 1.2 s fig(III-9-a) et l'erreur entre les deux sorties converge rapidement vers zéro fig(III-9-c). Les normes des gains adaptatifs convergent plus lentement que celles du M.R.A.C (fig III-9-d) et (fig III-9-e).

Exemple N°3 -Stabilisation d'un système instable .

Soit un système instable défini par sa fonction de transfert suivante :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2.9}{(s+0.93)(s-1.02)}$$

Où sa représentation d'état est :

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t)$$

$$Y(t) = C X(t)$$

$$\text{Avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.49 & 0.09 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.9 \end{pmatrix} ; \quad C = [1 \ 0]$$

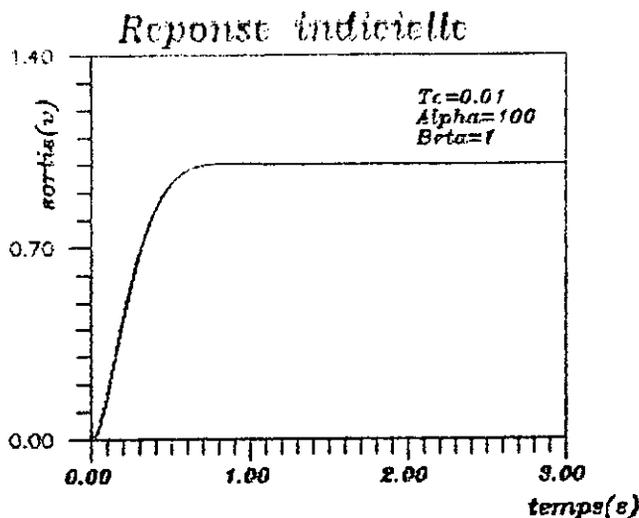


fig III-8-a: MRAC Controle de position du 'Moteur'
- - - - Modele

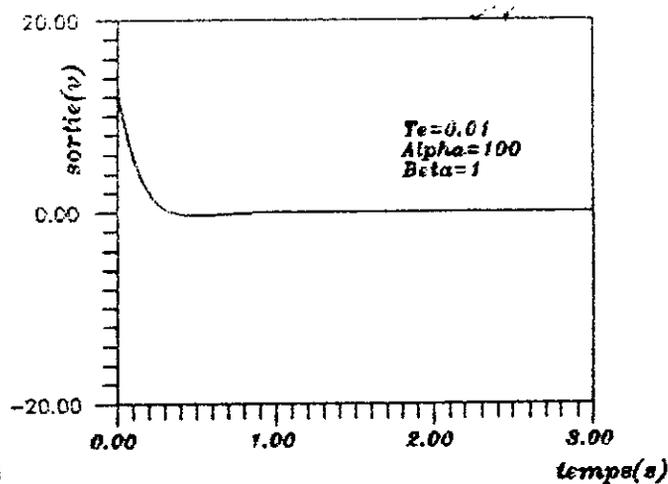


FIG III-1-b: MRAC Commande du moteur

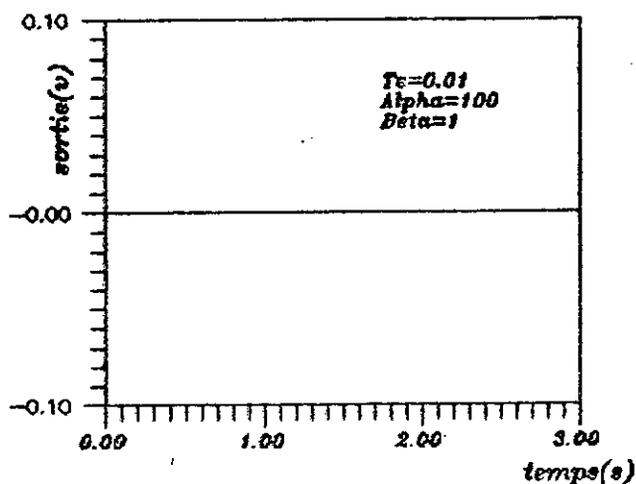


fig III-8-c: MRAC Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

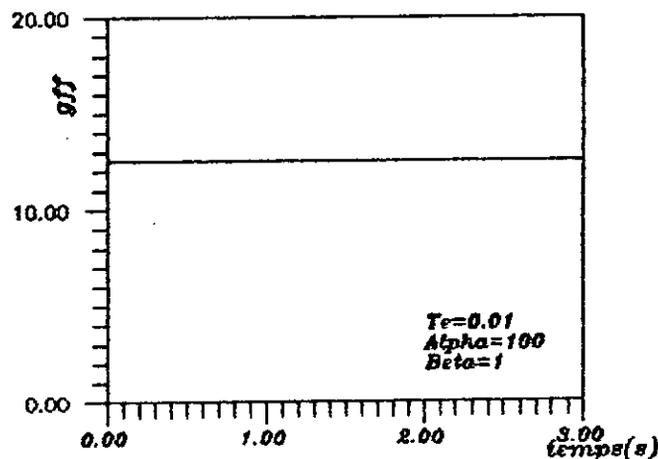


fig III-8-d: MRAC Gain de reaction

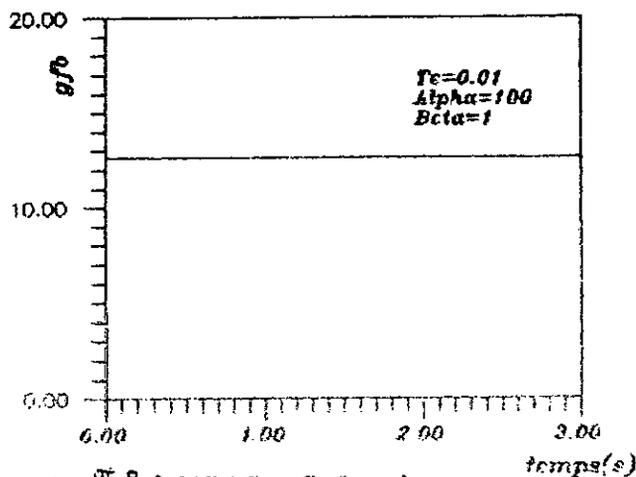


fig III-8-e: MRAC Gain de contre-reaction

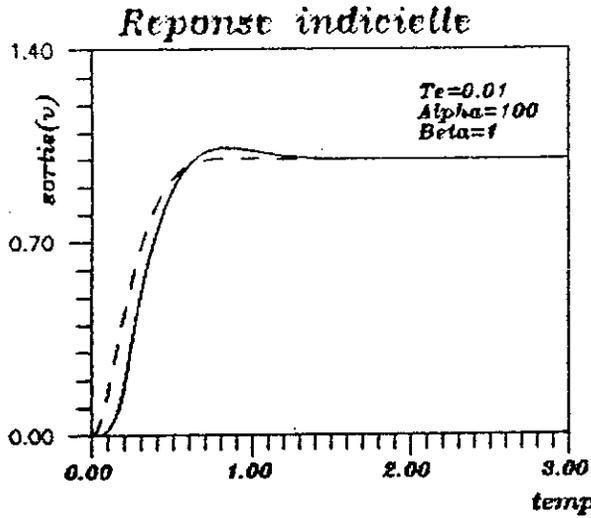


fig III-9-a: MCS Controle de position du 'Moteur'
- - - - Modele

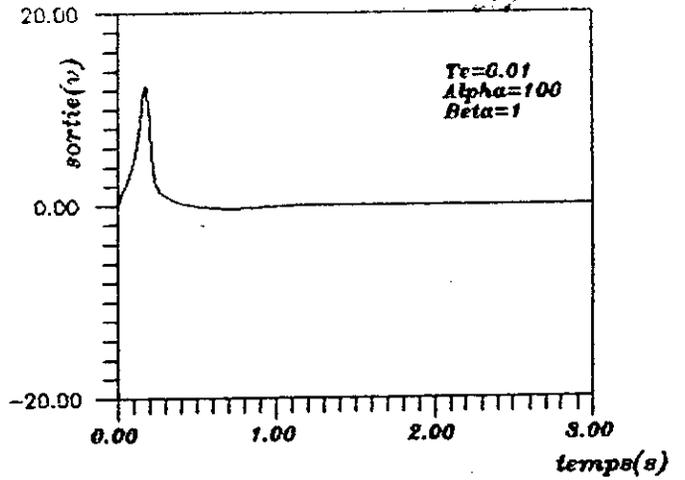


FIG III-9-b: MCS Commande du moteur

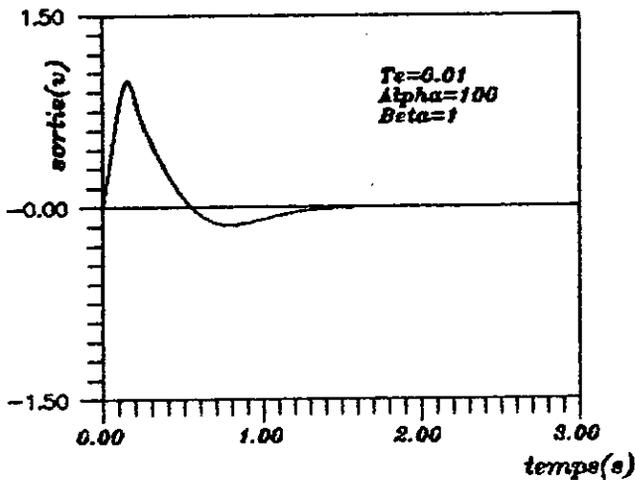


fig III-9-c: MCS Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

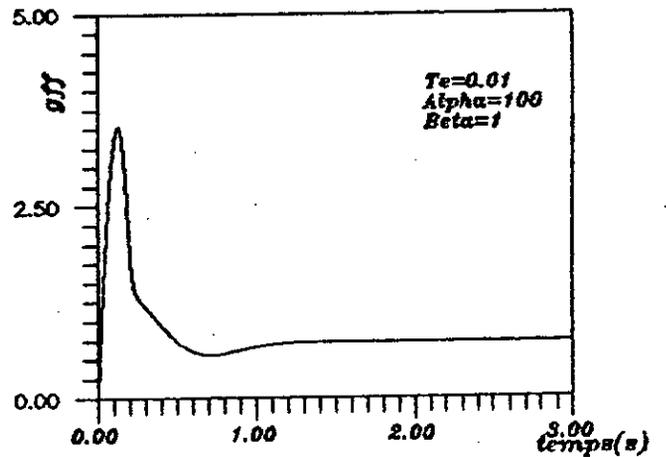


fig III-9-d: MCS Gain de reaction

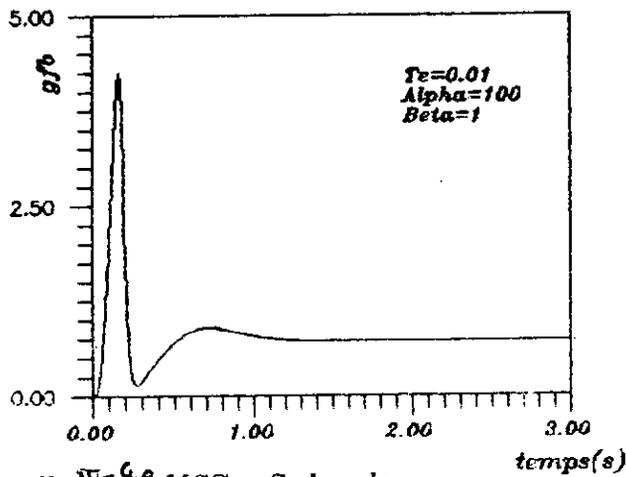


fig III-9-e: MCS Gain de contre-reaction

Il possède deux valeurs propres $\lambda_1 = -0.93$ et $\lambda_2 = 1.02$.

M. R. A. C :

Le contrôle du système revient à calculer $U(t)$ définie par :

$$U(t) = -(K - DK(e, t))X(t) + (KR + DKR(e, t))r(t)$$

pour que le système se comporte comme le modèle suivant:

$$\dot{X}_m(t) = A_m X_m(t) + B_m r(t)$$

$$\text{Avec } A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -36 & -12 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

* Calcul des gains statiques .

Le modèle et le système vérifient les conditions d'Ezerberger, ce qui donne :

$$K = [12.58 \quad 4.16] \quad \text{et } K_R = 15.86$$

* Calcul du compensateur linéaire .

Pour que le triplet (A_m, B, D) soit positif, il faut que

$$A_m^T P + P A_m = -Q; \quad Q > 0 \\ D = B^T P$$

En choisissant $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.49 & 0.09 \end{bmatrix}$, on trouve $D = [0.41 \quad 0.1537]$

La période d'échantillonnage T_e est prise égale à 10ms, les gains α et β sont égaux respectivement à $\text{diag}[0 \quad 100]$ et 1. On observe sur la figure fig(III-10-a) que le système est parfaitement stable; ce qui est dû directement à la stabilisation des gains (fig III-10-d) et (fig III-10-e) et à la convergence de l'erreur de sortie (fig III-10-c).

M. C. S:

Les gains statiques K et K_R sont nuls.

Le compensateur $D=P$.

La période d'échantillonnage T_e est prise égale à 10ms , les gains α et β sont égaux respectivement à 100 et 1. On observe sur la figure fig(III-11-a) que le système est poursuivi parfaitement la consigne; ce qui est dû directement à la stabilisation des gains (fig III-11-d) et (fig III-11-e) et à la convergence de l'erreur de sortie (fig III-11-c) vers 0.

le dépassement constaté ,sur la figure de la sortie est dû à la rapidité de la réponse

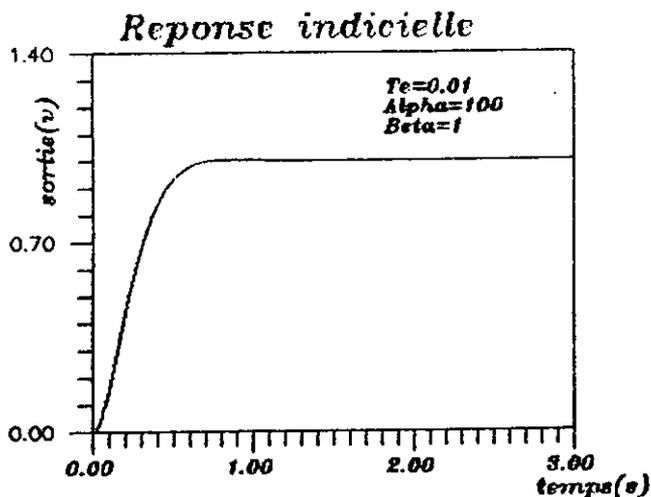


fig II-10-a: MRAC: systeme instable

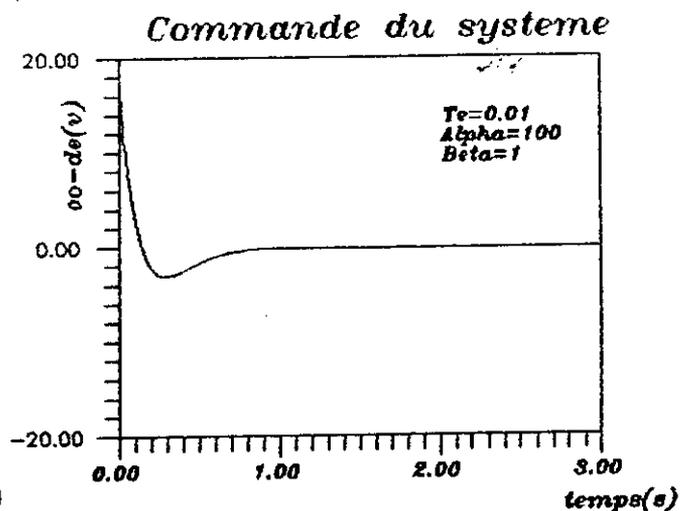


fig II-10-b: MRAC: systeme instable

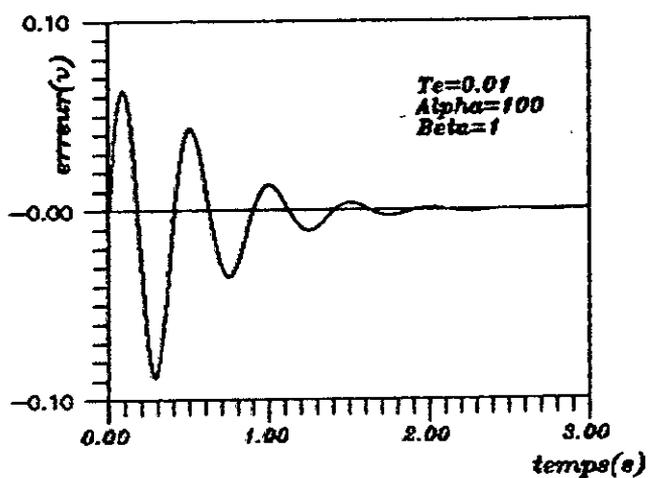


fig II-10-c: MRAC. erreur de sortie $Y_m - Y_s$

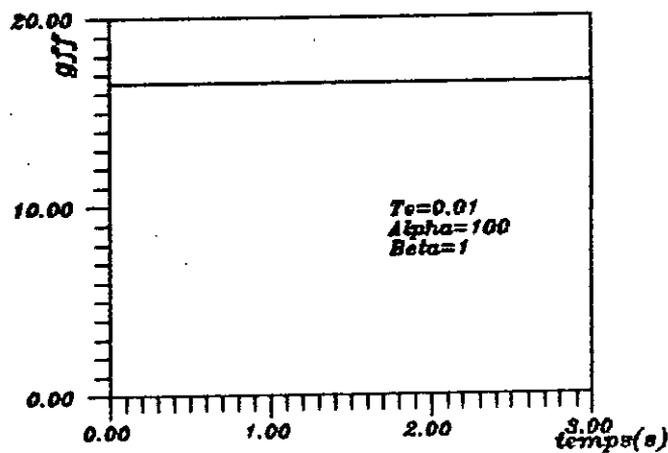


fig II-10-d: MRAC Gain de reaction

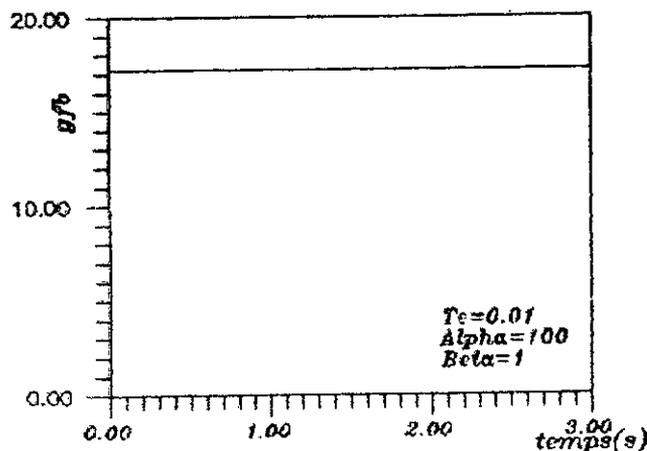


fig II-10-e: MRAC. Gain de contre-reaction

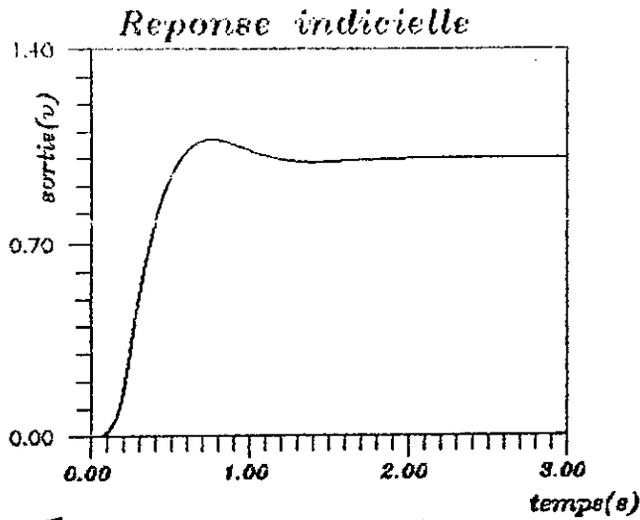


fig III-11-a: MCS. systeme instable
 - - - - - modele

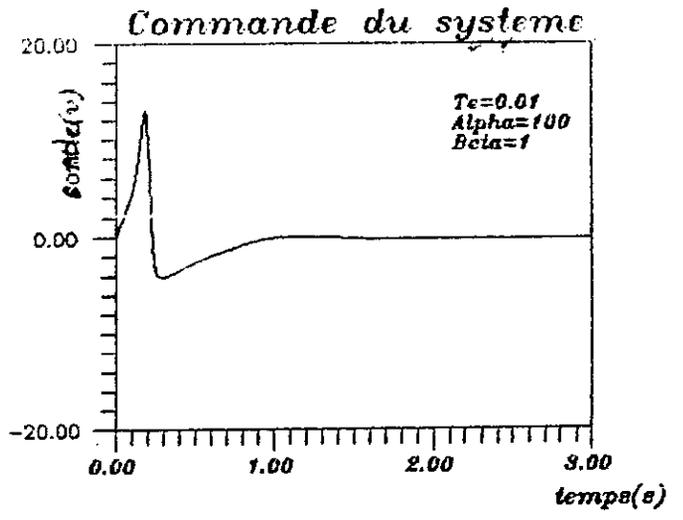


fig III-11-b: MCS systeme instable

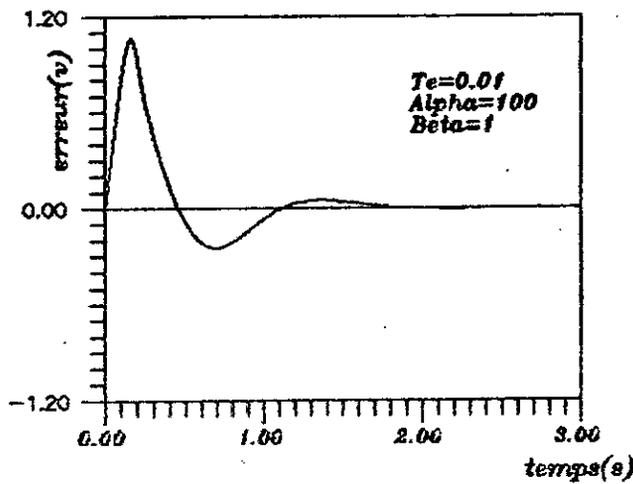


fig III-11-c: MCS. erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

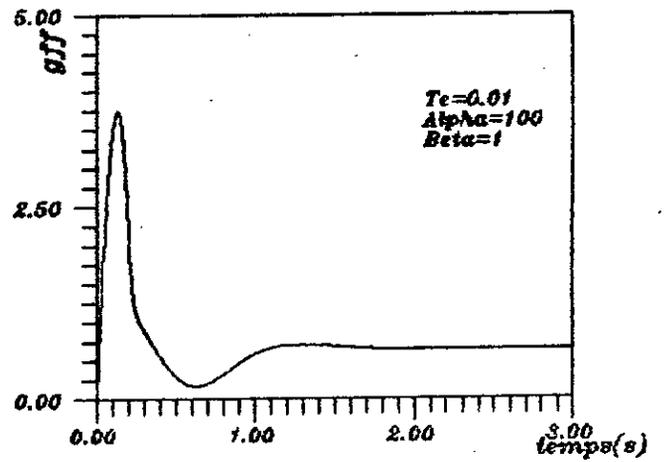


fig III-11-d: MRAC Gain de reaction

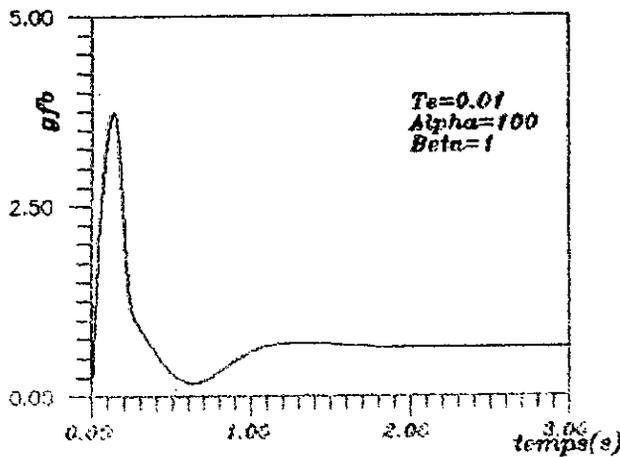


fig III-11-e: MCS. Gain de
 contre-reaction

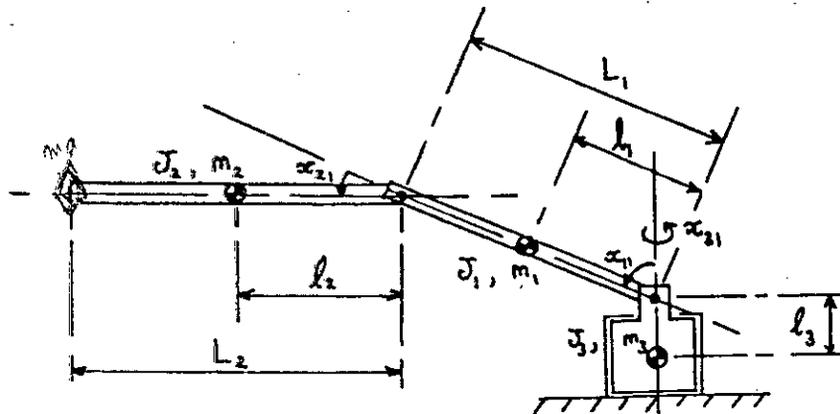
CHAP 4 COMMANDE D'UN BRAS MANIPULATEUR

1/GENERALITES:

Ce chapitre a pour but d'illustrer les possibilités des techniques du M.R.A.C. et du M.C.S. appliquées à l'asservissement d'un robot manipulateur (système M.I.M.O.: non linéaire). Ce dernier peut être considéré comme une chaîne de corps articulés rigides, en première approximation, destinés à positionner, orienter ou déplacer un organe terminal O.T. (pince outil).

2/MODELE DYNAMIQUE:

L'équation de mouvement du robot manipulateur classe 1 (figure ci-dessous) qui a été établie par STOTEN [12].



Avant d'établir les équations régissant la dynamique du bras les hypothèses suivantes sont requises:

- *Tous les éléments du bras sont rigides
- *Le signal de commande est directement proportionnel aux forces exercées par le moteur sur les articulations.
- *Les capteurs ont un gain unité et pas de composante dynamique.
- *La masse de chaque élément est supposée confondue avec

sont centre de gravité.

-La fonction de LAGRANGE, ou le LAGRANGIEN, du système s'écrit

$$L = T - U$$

Où T est l'énergie cinétique totale et U est l'énergie potentielle totale du mécanisme. Ces fonctions scalaires sont les sommes respectivement des énergies cinétiques et potentielles de tous les éléments du bras.

$$T = \sum_{i=1}^3 T_i$$

$$U = \sum_{i=1}^3 U_i$$

Avec $T_1 = 1/2 (J_{x1}) \dot{x}_{12}^2 + (1/2) J_{x1} \sin x_{11} + J_{1p} \cos^2 x_{11} \dot{x}_{32}^2$

$$T_2 = 1/2 (J_{x2}) \dot{x}_{22}^2 + m_2 L_1^2 + 2 m_2 L_1 l_2 \cos x_{21} \dot{x}_{12}^2 + 1/2 (J_{x2}) \dot{x}_{22}^2$$

$$+ 1/2 (J_{x2} \sin^2(x_{11} + x_{12}) + J_{2p} \cos^2(x_{11} + x_{12}) + m_2 L_1^2 \sin^2 x_{11} \sin(x_{11} + x_{21}) + (J_{x2}$$

$$+ m_2 L_1 l_2 \cos x_{21}) \dot{x}_{12} \dot{x}_{22}$$

$$T_3 = 1/2 (J_3) \dot{x}_{32}^2$$

$$U_1 = m_1 g l_1 \cos x_{11}$$

$$U_2 = m_2 g (L_1 \cos x_{11} + l_1 \cos(x_{11} + x_{21}))$$

$$U_3 = m_3 g l_3$$

Les équations de Lagrange s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{12}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{12}} = Q_1$$

Où q_i est la force généralisée correspondante à la i^{eme} articulation, définie par :

$$q_i = k_i u_i - c_i \dot{x}_{i2} \quad , \quad \dot{x}_{i2} = \dot{x}_{i1}$$

Avec

k_i gain du moteur

c_i coefficient de frottement visqueux

Après développement de calcul et regroupement des termes de l'équation de Lagrange. Elle s'écrira sous la forme suivante:

$$M \ddot{X}_L + C \dot{X}_L + D \dot{X}_L^2 + E \dot{X}_L \dot{X}_L + F g = K_L U$$

Avec $\ddot{X}_L = [\ddot{x}_{12} \quad \ddot{x}_{22} \quad \ddot{x}_{32}]^T$ vecteur d'accélération

$\dot{X}_L = [\dot{x}_{12} \quad \dot{x}_{22} \quad \dot{x}_{32}]^T$ vecteur vitesse

$\dot{X}_L^2 = [\dot{x}_{12}^2 \quad \dot{x}_{22}^2 \quad \dot{x}_{32}^2]^T$ vecteur centrifuge

$\dot{X}_L \dot{X}_L = [\dot{x}_{12} \dot{x}_{22} \quad \dot{x}_{12} \dot{x}_{32} \quad \dot{x}_{22} \dot{x}_{32}]^T$ vecteur de coriolis

Les matrices M, C, D, E, F et K_L sont définies comme suit:

$$M = \begin{bmatrix} J_1^* + J_{x2} + 2m_2 L_1 l_{12} \cos x_{21} + m_2 L_1 l_{12} \cos x_{21} & 0 & 0 \\ J_{x2} + m_2 L_1 l_{12} \cos x_{21} & J_{x2} & 0 \\ 0 & 0 & J_1^* \sin^2 x_{11} + J \cos^2 x_{11} \\ & & + J_{x2} \sin^2 (x_{11} + x_{21}) \\ & & + J_{2P} \cos^2 (x_{11} + x_{21}) \\ & & + 2m_2 L_1 l_{12} \sin x_{11} \end{bmatrix}$$

$$C = \text{diag} [c_1 \quad c_2 \quad c_3]$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -l_{22} \sin x_{21} & -(j_1^* - j_{1p}) \sin x_{11} \cos x_{11} \\ 0 & -(j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21}) \\ m_{21} L_{12} \sin(2x_{11} + x_{21}) \\ m_{21} L_{12} \sin x_{21} & -(j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21}) \\ 0 & -m_{21} L_{12} \sin x_{11} \cos(x_{11} + x_{21}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2m_{21} L_{12} \sin x_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(j_1^* - j_{1p}) \sin x_{11} \cos x_{11} & 2(j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \\ & +2(j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21}) \\ \cos(x_{11} + x_{21}) & 2m_{21} L_{12} \sin x_{11} \cos(x_{11} + x_{21}) \\ +2m_{21} L_{12} \sin(2x_{11} + x_{21}) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -(m_{11} l_{11} + m_{21} l_{12}) \sin x_{11} & -m_{22} l_{22} \sin(x_{11} + x_{21}) \\ -m_{22} l_{22} \sin(x_{11} + x_{21}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_L = \text{diag} [k_1 : k_2 : k_3]$$

En séparant les termes linéaires et les termes non linéaires dans l'équation de Lagrange, on déduit une représentation d'état suivante:

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) + d(t)$$

Avec:

$$X(t) = [x_{11} \ x_{12} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{31} \ x_{32}]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1/j_1^* & 0 & c_2/j_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1/j_1^* & 0 & -c_2(1/j_1^* + 1/j_{x2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_3/j_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k_1/j_1^* & -k_2/j_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_1/j_1^* & k_2(1/j_1^* + 1/j_{x2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3/j_3 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(t) = [0 \ d_1 \ 0 \ d_2 \ 0 \ d_3]^T$$

$$d_1 = (f_2 - f_1) / j_1^*$$

$$d_2 = -d_1 - f_2 / j_{x2}$$

$$d_3 = -f_3 / j_3$$

$$j_1^* = j_{x1} + m_2 L_2$$

$$j_{xi} = j_i + m_i l_i$$

$$f_1 = (2m_2 L_1 l_2 \cos x_{21}) x_{12} + (m_2 L_1 l_2 \cos x_{21}) x_{22} - (m_2 L_1 l_2 \sin x_{21}) x_{22}^2 \\ - ((j_1^* - j_{1p}) \sin x_{11} \cos x_{11} + (j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21})) \\ - m_2 L_1 l_2 \sin(2x_{11} + x_{21}) x_{32}^2 - 2m_2 L_1 l_2 \sin x_{21} x_{12} x_{22} \\ - ((m_1 l_1 + m_2 l_2) \sin x_{11} + m_2 l_2 \sin(x_{11} + x_{21})) g$$

$$f_2 = (m_2 L_1 l_2 \cos x_{21}) x_{12} + (m_2 L_1 l_2 \sin x_{21}) x_{12}^2 \\ - ((j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21}) + m_2 L_1 l_2 \sin x_{11} \cos(x_{11} + x_{21}) \\ + (m_2 l_2 \sin(x_{11} + x_{21})) g$$

$$)) x_{32}^2$$

$$\begin{aligned}
 f_3 = & (j_1^* \sin^2 x_{11} + j_{1p} \cos^2 x_{11} + j_{x2} \sin^2 (x_{11} + x_{21}) + j_{2p} \cos^2 (x_{11} + x_{21})) \\
 & + 2m_2 L_1 l_2 \sin x_{11} \sin(x_{11} + x_{21}) x_{32} \\
 & + 2((j_1 - j_{1p}) \sin x_{11} \cos x_{11} + j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21}) \\
 & + m_2 L_1 l_2 \sin(2x_{11} + x_{21}) x_{12} x_{32} \\
 & + 2((j_{x2} - j_{2p}) \sin(x_{11} + x_{21}) \cos(x_{11} + x_{21})) \\
 & + m_2 L_1 l_2 \sin x_{11} \cos(x_{11} + x_{21}) x_{22} x_{32}
 \end{aligned}$$

M. R. A. C

Soit le bras manipulateur classe 1 définie par une équation d'état, dont les matrices d'évolution A et de commande B sont:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,77 & 0 & 0,77 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5,77 & 0 & -4,10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3,07 & -1,538 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3,077 & 8,205 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

L'algorithme de contrôle consiste à calculer U(t) définie par:

$$u(t) = -(k - dk(e, t))X(t) + (k_R + dk_R(e, t))r(t)$$

Le bras doit se comporter comme le modèle suivant:

$$\dot{X}_m(t) = A_m X_m(t) + B_m r(t)$$

Avec

$$A_m = \text{diag} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -8 \end{pmatrix} \quad B_m = \text{diag} \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

3-1 calcul des gains statiques k et k_R :

On a:

$$K = B^+ (A - A_m)$$

$$K_R = E^+ E_m$$

Avec

$$E^+ = [B^T B]^{-1} B^T$$

$$K = \begin{pmatrix} 6,4 & 1,3 & 1,2 & 0,6 & 0 & 0 \\ 2,4 & 1,2 & 2,4 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,175 \end{pmatrix}$$

$$K_R = \begin{pmatrix} 6,4 & 1,2 & 0 \\ 2,4 & 2,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix}$$

3-2) Calcul du signal d'adaptation

Le triplet (A_m, B, D) doit être positif. Cette condition est réalisée si

$$P A_m + A_m^T P = -Q; \quad Q > 0$$

$$D = B^T P$$

Avec $Q = \text{diag} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

on trouve

$$D = \begin{pmatrix} 0,865 & 0,2769 & -0,8615 & -0,2769 & 0 & 0 \\ -0,430 & -0,1384 & 2,297 & 0,7384 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11,2 & 3,6 \end{pmatrix}$$

La période d'échantillonnage T_e est prise égale à 1ms.

Les valeurs de α et β sont respectivement 100 et 1.

Test d'asservissement:

Le signal de référence passe de 0(v) à 0,5(v), 1(v) et 1,5(v) pour les éléments 1, 2 et 3 du manipulateur robot. La figure (IV-1-a) qui représente les sorties $Y(t)$ du système et les sorties $Y_m(t)$ du modèle, montre que ces dernières sont difficilement distinguables de celles du système; ce qui met en évidence les bonnes performances obtenues par la stratégie du M.R.A.C. appliquée au manipulateur robot, pour un bon choix de la période d'échantillonnage et des paramètres du contrôleur.

Reponse indicielle

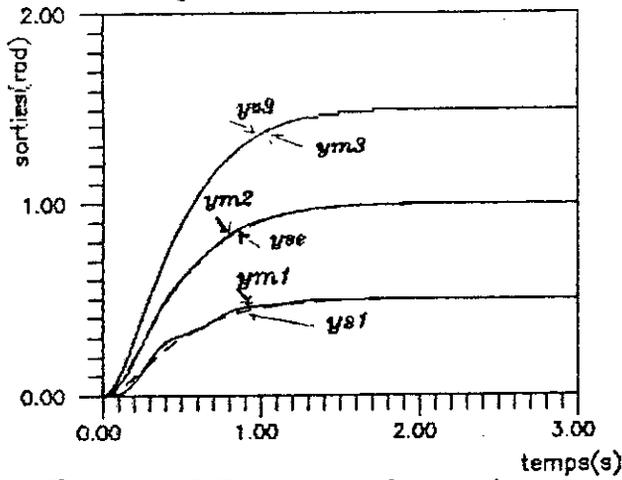


fig IV-1-a: MRAC. Reponses du systeme
- - - Reference

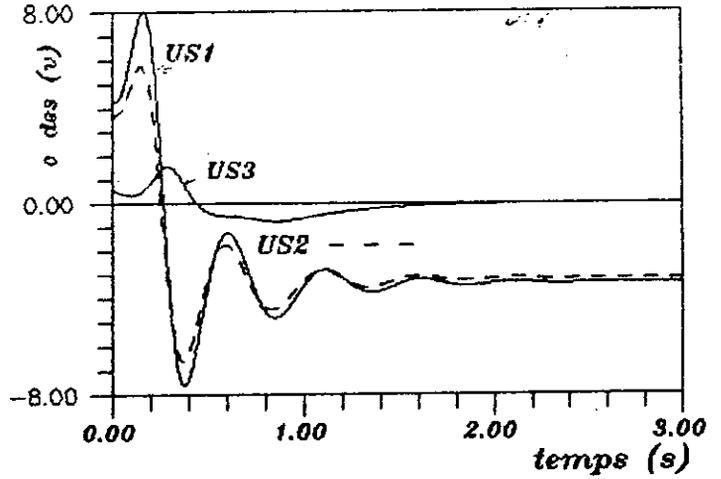


fig IV-1-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

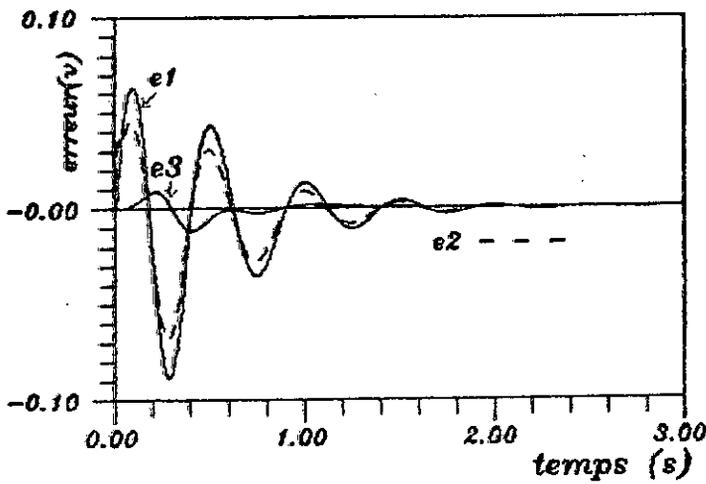


fig IV-1-c: MRAC. Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

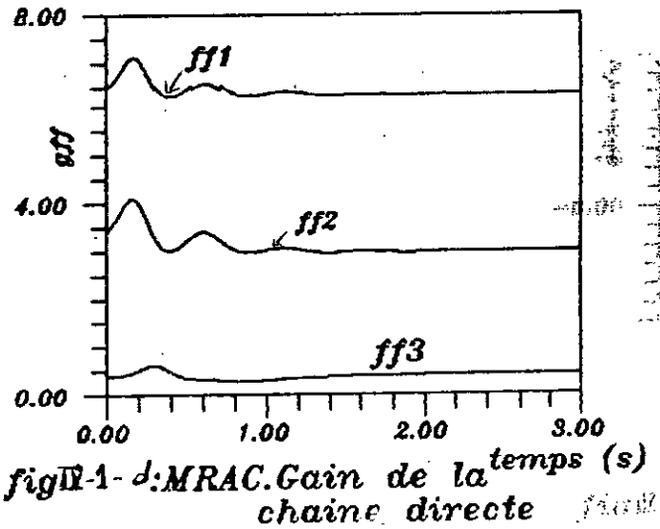


fig IV-1-d: MRAC. Gain de la chaîne directe

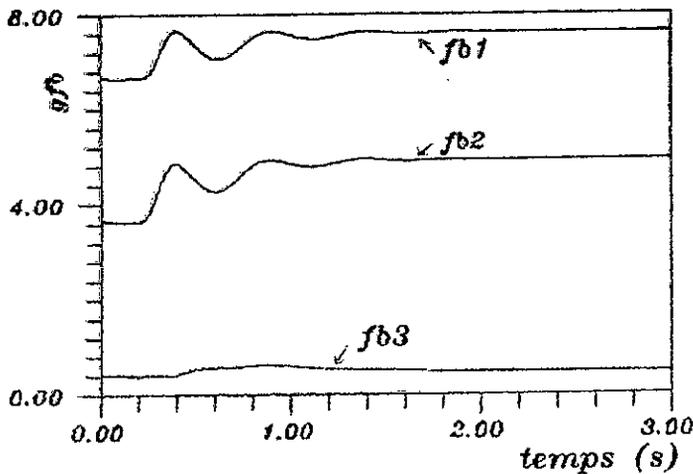


fig IV-1-e: MRAC. Gain de contre-reaction

$T_e = 0.001$
 $\alpha = 100$
 $\beta = 10$

(a) - - - : systeme
- - - - : Modele de reference

Test de robustesse N°1

Au cours de ce test, on fait introduire un changement sur les paramètres du système par addition d'une masse $m_e = 1\text{Kg}$ au deuxième élément du bras. A noté que ce changement n'intervient pas lors du calcul des gains statiques.

Sur la figure (IV-2-a) on constate, qu'avec la stratégie du MRAC on obtient les mêmes performances que celles du test d'asservissement. Mais sur les figures (IV-2-d) et (IV-2-e), on remarque un changement sur les gains adaptatifs pour compenser les variations des paramètres.

Test de robustesse N°2

On procède de la même façon que précédemment mais avec une masse $m_e = 5\text{Kg}$.

On remarque sur la figure (IV-3-a) une légère variation des performances et ce en dépit de l'introduction de changements assez importants sur les paramètres du système.

M. C. S

Test d'asservissement.

Sur la figure (IV-4-a) on observe une poursuite parfaite des sorties du modèle par celles du système; ce qui montre les bonnes performances du MCS en asservissement. Sur la figure (IV-4-d) on remarque que les normes des gains adaptatifs sont plus oscillantes que celles du MRAC.

Test de robustesse N°1

pour $m_e = 1\text{Kg}$, la figure (IV-5-a) montre que les performances obtenues restent toujours bonnes. Ce qui met en évidence la robustesse du MCS.

Test de robustesse N°2

Comme pour le MRAC, la figure (IV-6-a) montre uniquement l'existence d'une faible variation des performances.

Influence des gains α et β

En choisissant $\alpha=6$ et $\beta=1$ on remarque qu'il y a dégradation complète des performances. Les sorties du système divergent par rapport aux sorties du modèle et cela pour les deux stratégies comme le montre les figures (IV-7-a) à (IV-7-c), pour MCS.

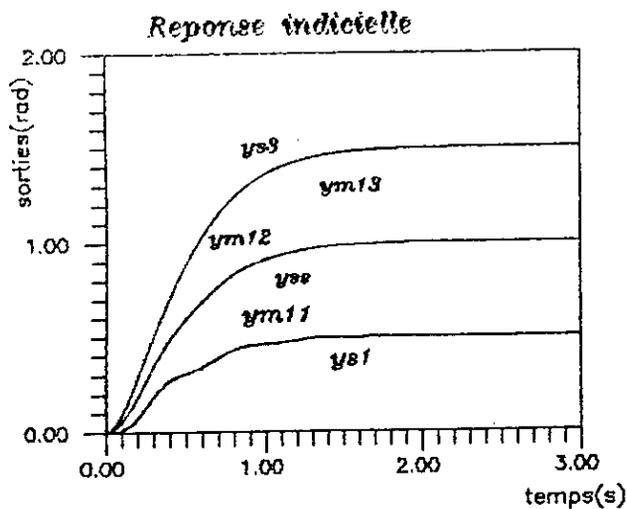


fig IV-1-a: MRAC. Reponses du systeme
- - - Reference

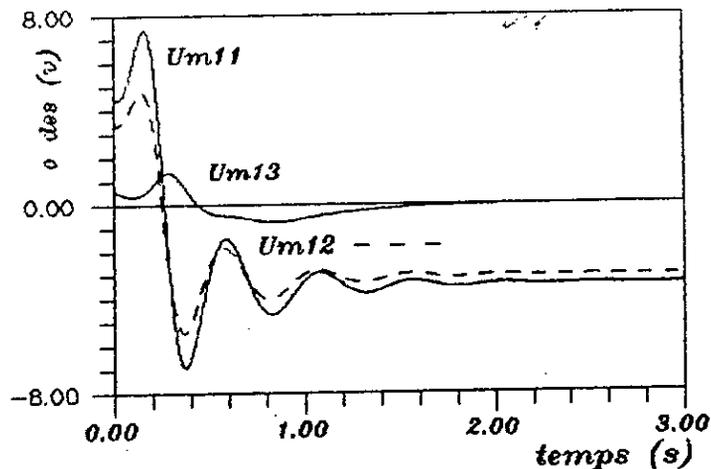


fig IV-1-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

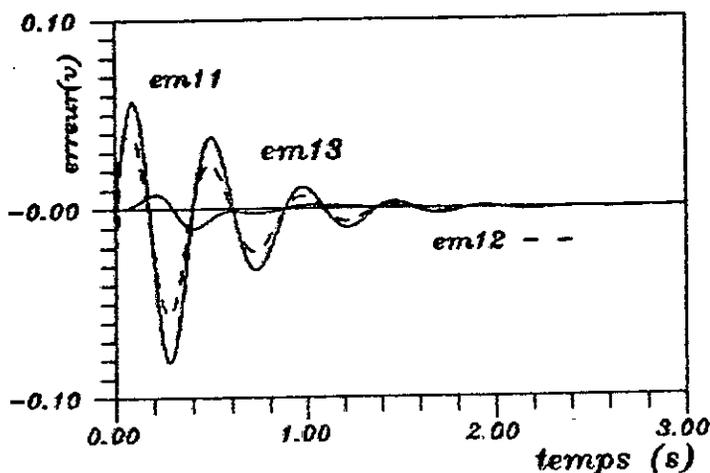


fig IV-2-a: MRAC. Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

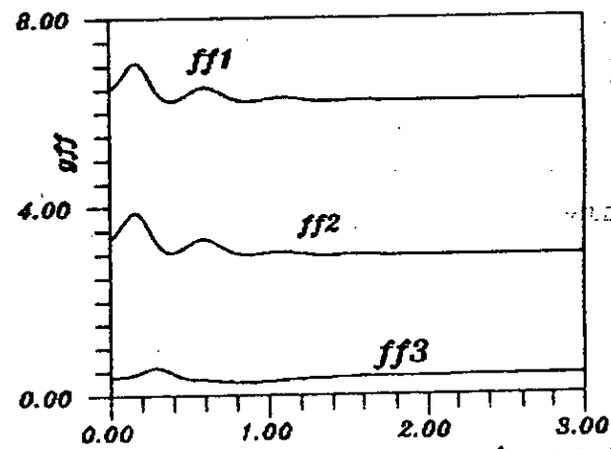


fig IV-2-b: MRAC. Gain de la chaine directe

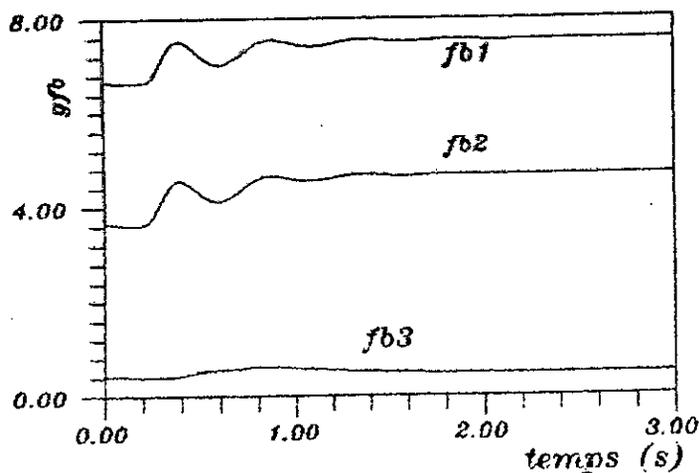


fig IV-2-c: MRAC. Gain de contre-reaction

$T_e = 0.001$
 $\alpha = 100$
 $\beta = 10$
 Systeme:
 - - - Sans Me
 (a) - - - Avec Me = 1Kg

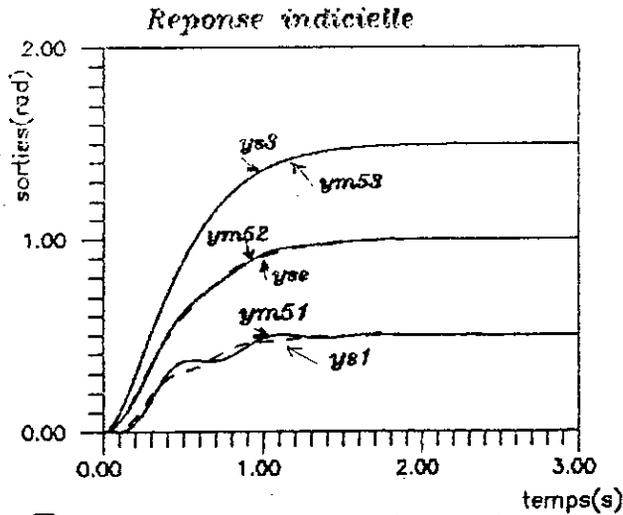


fig IV-3-a: MRAC. Reponses du systeme
- - - Reference

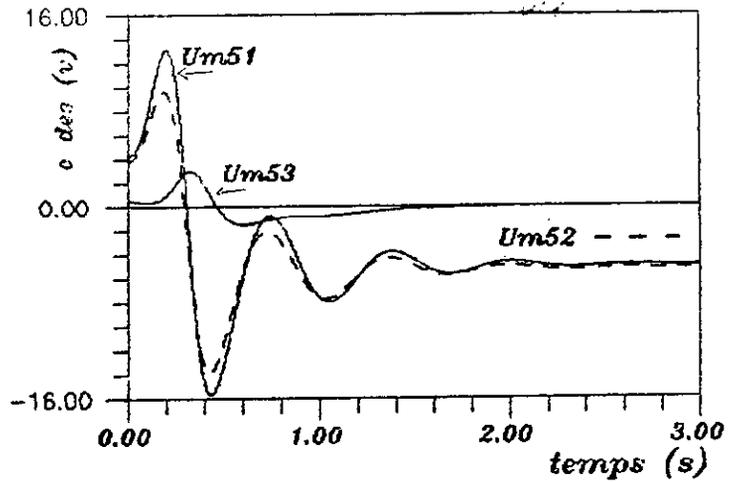


fig IV-3-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

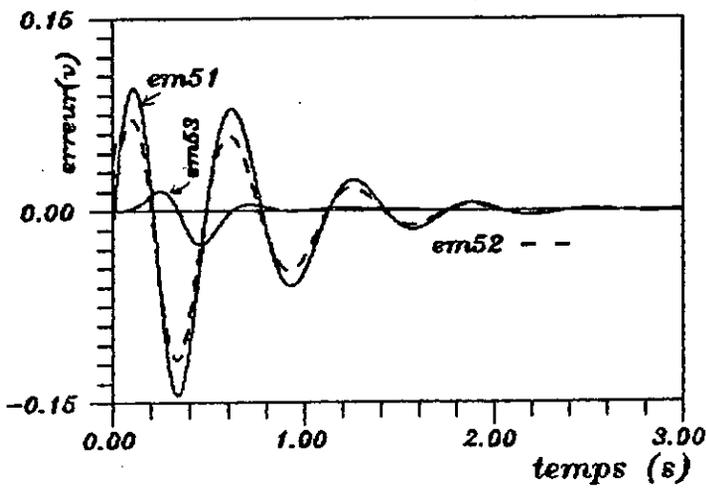


fig IV-3-c: MRAC. Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

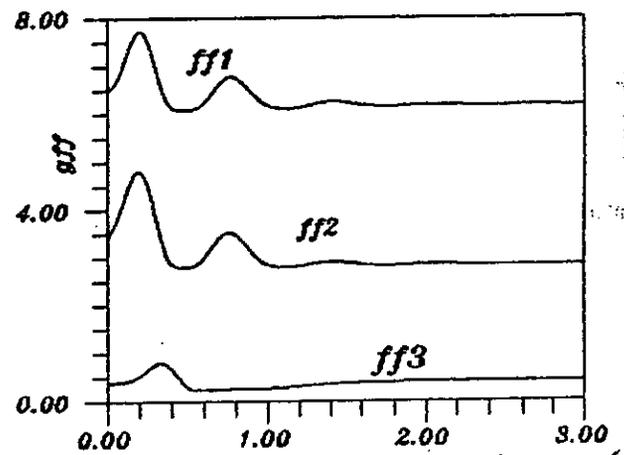


fig IV-3-d: MRAC. Gain de la chaine directe

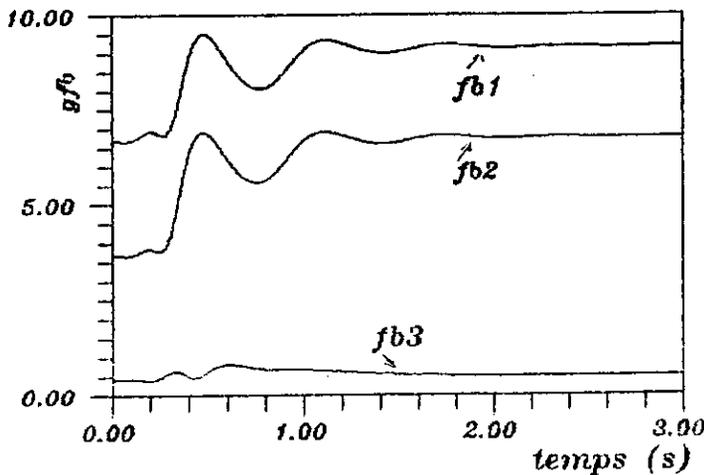


fig IV-3-e: MRAC. Gain de contre-reaction

$T_e = 0.001$
 $\alpha = 100$
 $\beta = 10$
 Systeme:
 (a) - - - Sans Me
 - - - - Avec Me=5Kg

Reponse indicielle

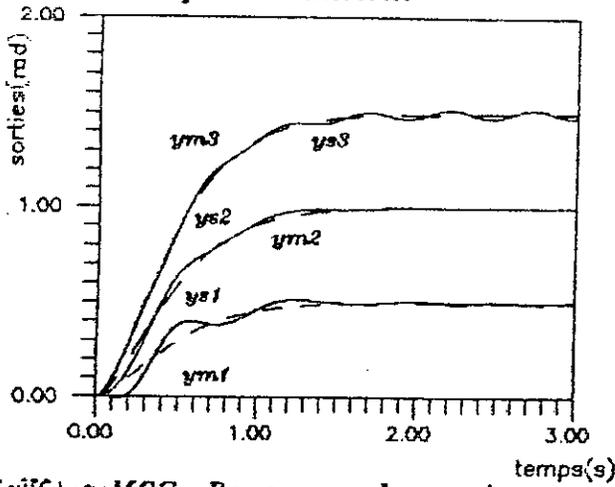


fig IV-4-a: MCS. Reponses du systeme
- - - modele

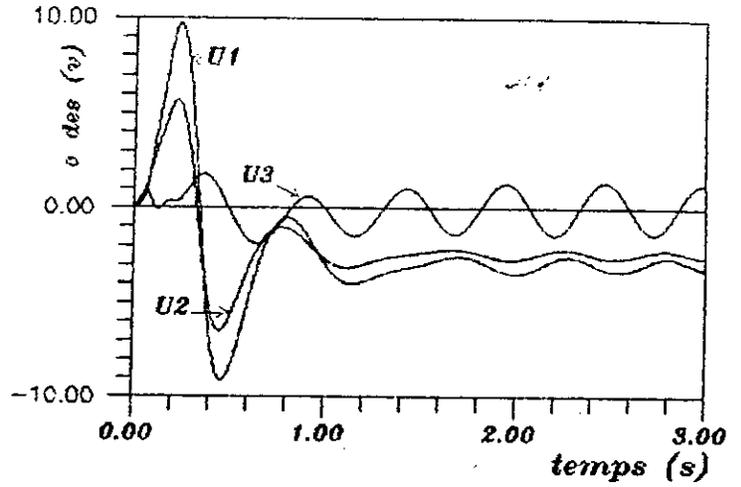


fig IV-4-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

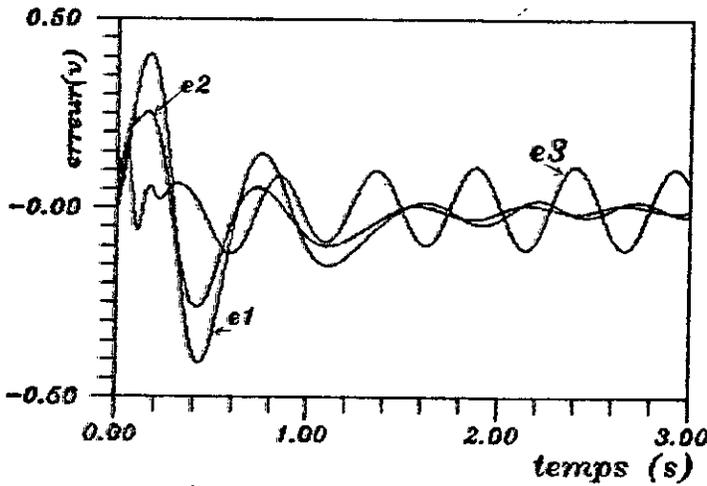


fig IV-4-c: MCS. Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

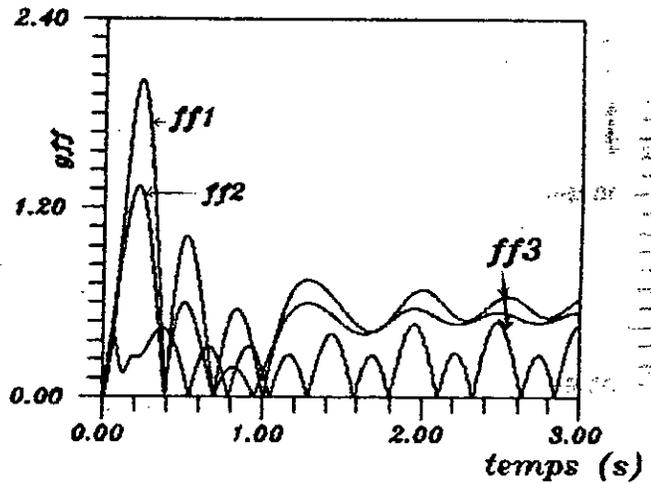


fig IV-4-d: MCS. Gain de reaction

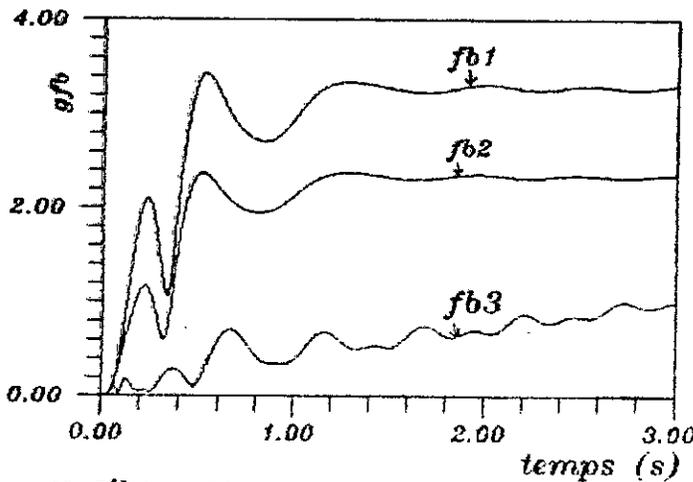


fig IV-4-e: MCS. Gain de contre-reaction

--- modele de référence

— Systeme

$\alpha = 100$

$\beta = 1$

$T_e = 0,001$

$m_e = 0 \text{ Kg}$

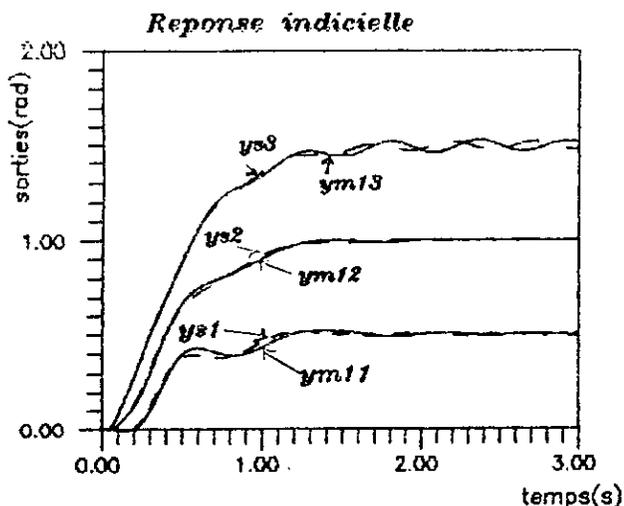


fig IV-5-a: MCS. Reponses du systeme
- - - Reference

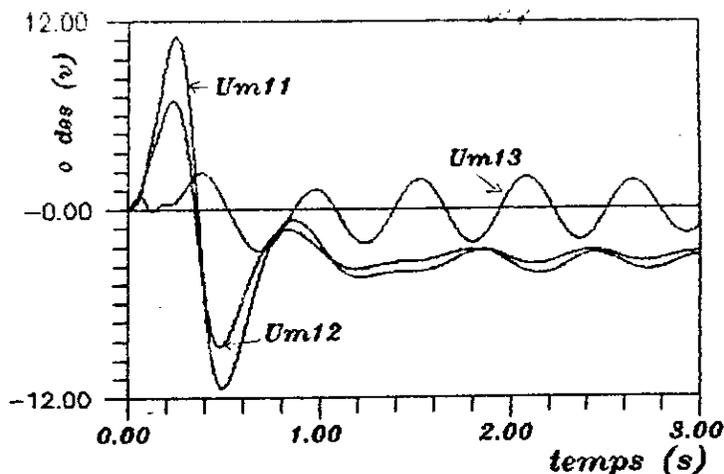


fig IV-5-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

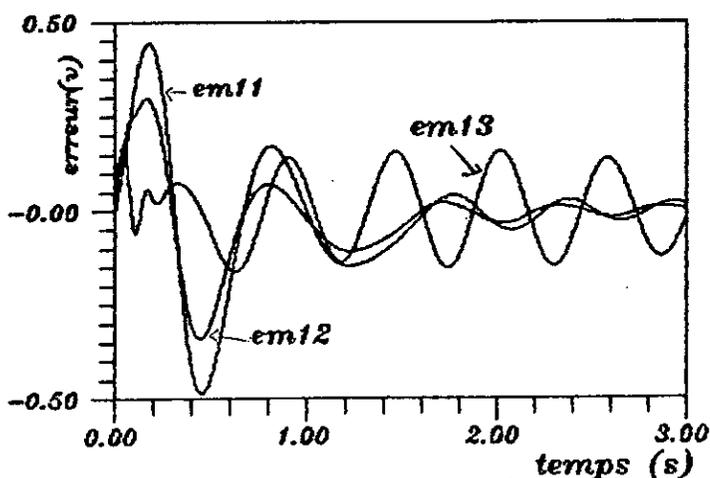


fig IV-5-c: MCS. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

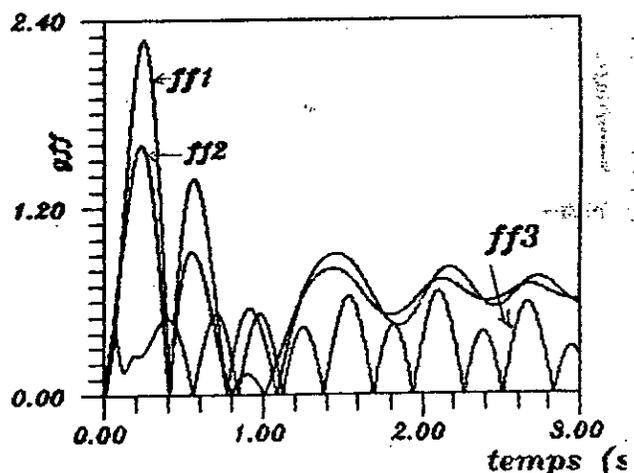


fig IV-5-d: MCS. Gain de reaction

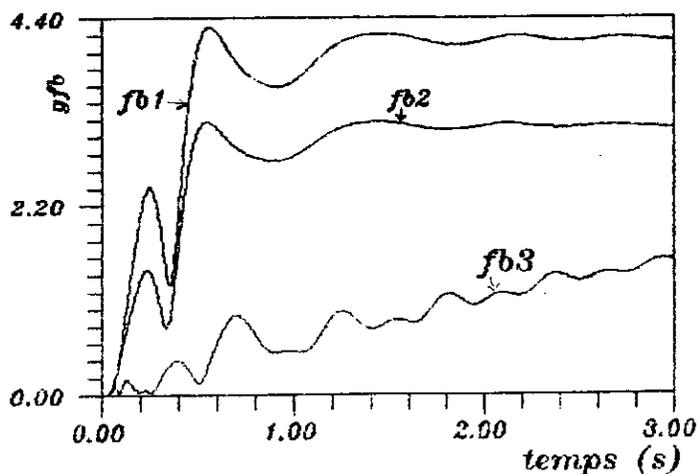


fig IV-5-e: MCS. Gain de contre-reaction

— $\tau_e = 0,041$
 $\alpha = 100$
 $\beta = 1$
 $m_e = 1 \text{ kg}$
 - - - : Systeme sans m_e

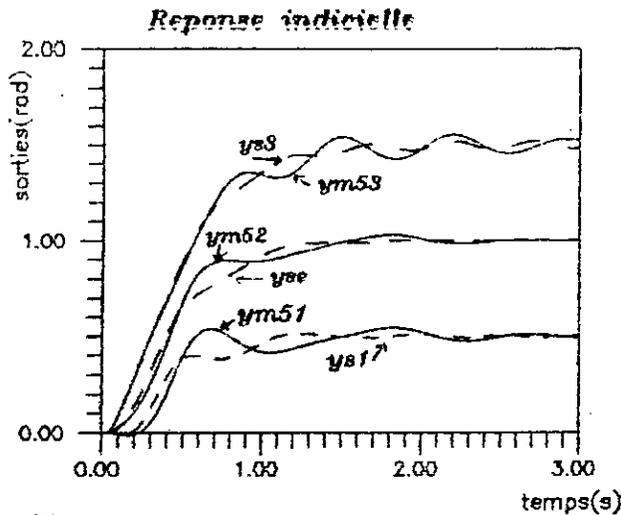


fig IV-6-a: MCS. Reponses du systeme
- - - Reference

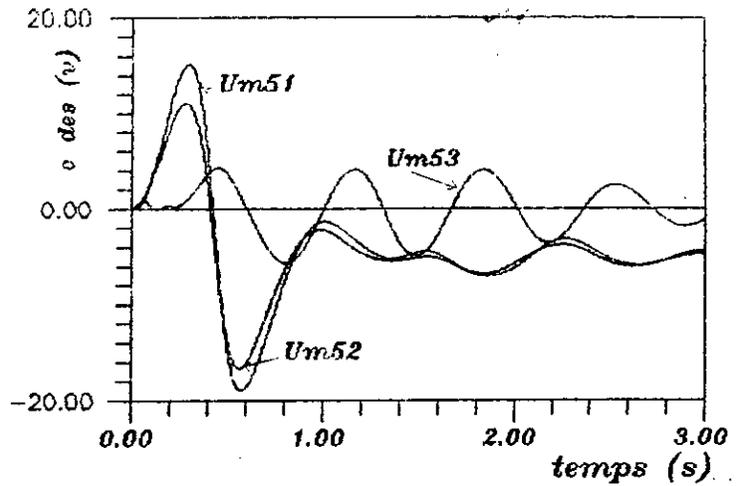


fig IV-6-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

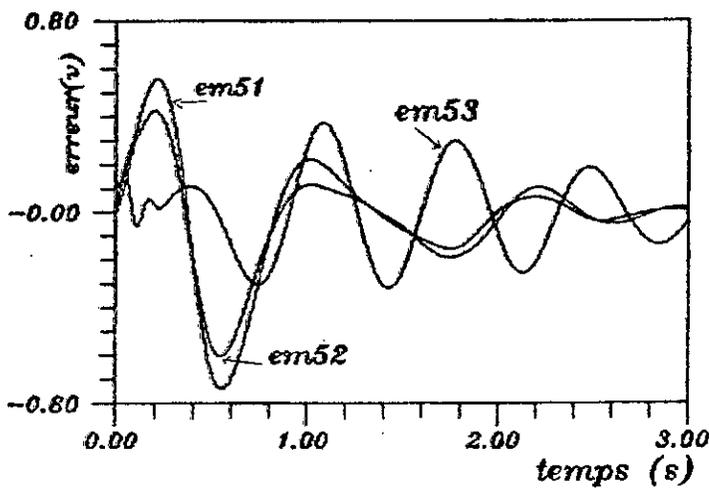


fig IV-6-c: MCS. Erreur de sortie $Y_m - Y_s$

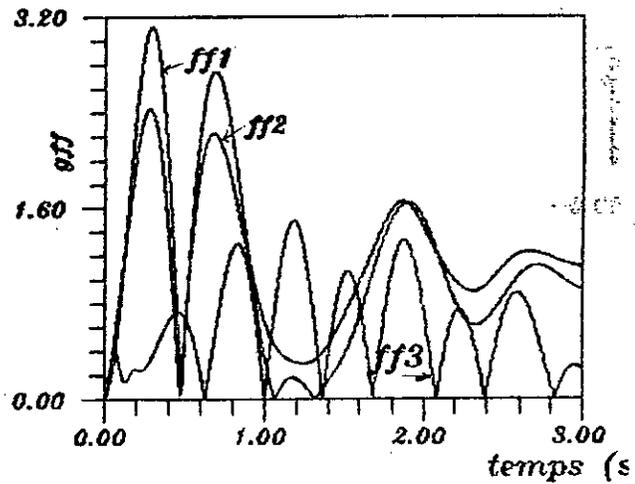


fig IV-6-d: MCS. Gain de reaction

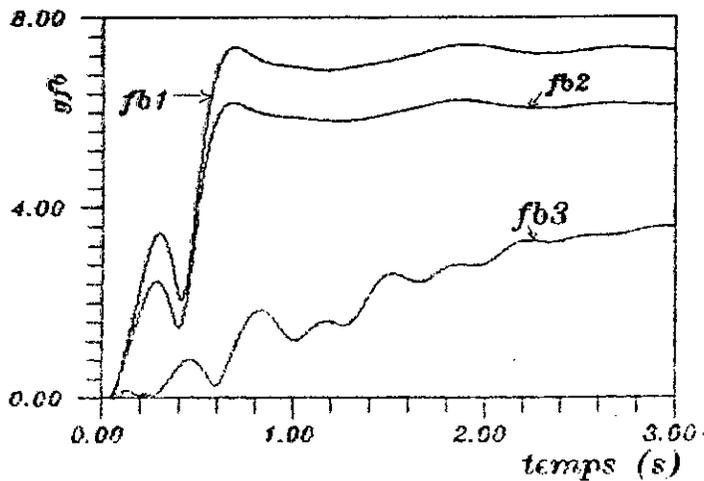


fig IV-6-e: MCS. Gain de contre-reaction

— : $T_e = 0,001$
 $\alpha = 100$
 $\beta = 1$
 $m_e = 5 \text{ Kg}$
 - - - : Systeme avec $m_e = 0 \text{ Kg}$

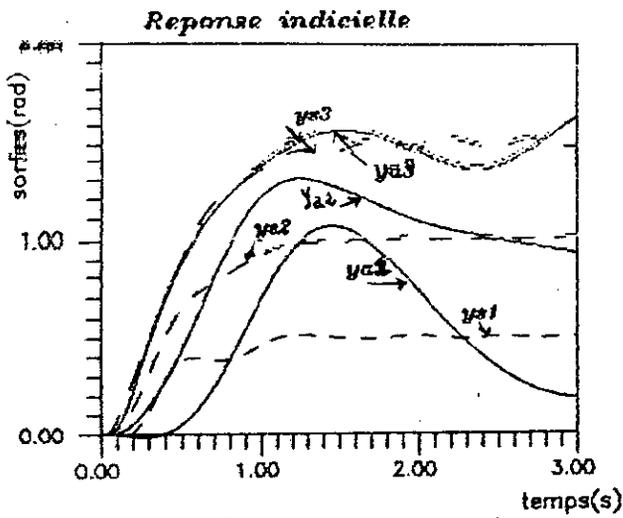


fig IV-7-a: MCS. Reponses du systeme
- - - Reference

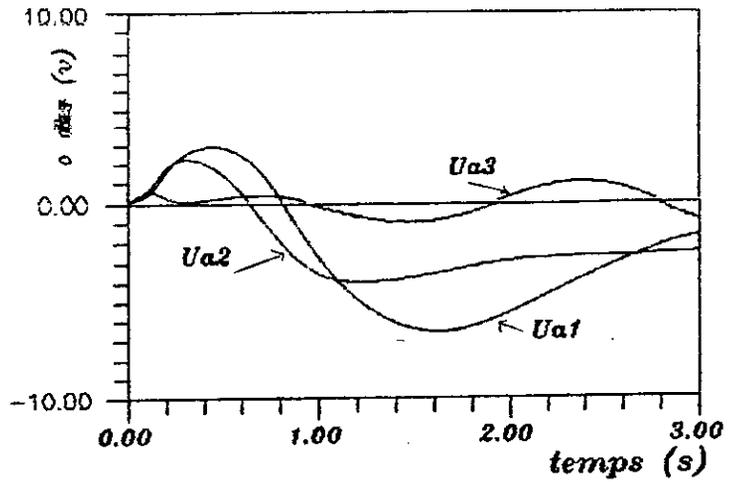


fig IV-7-b: MCS. Commandes du bras manipulateur 3DL

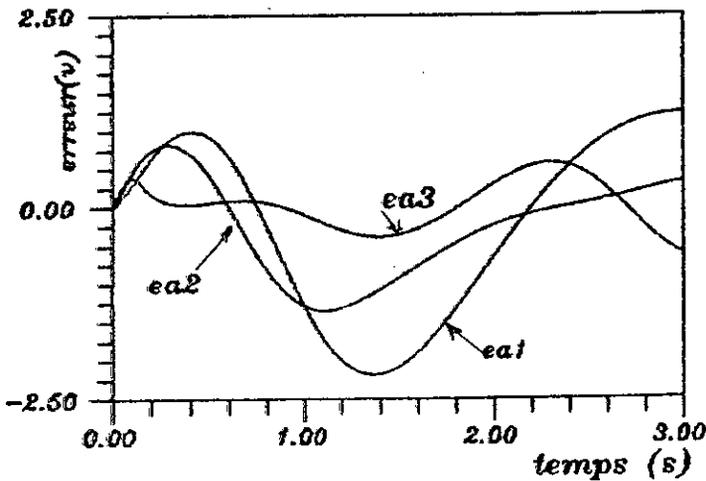


fig IV-7-c: MCS. Erreur de sortie
 $Y_m - Y_s$

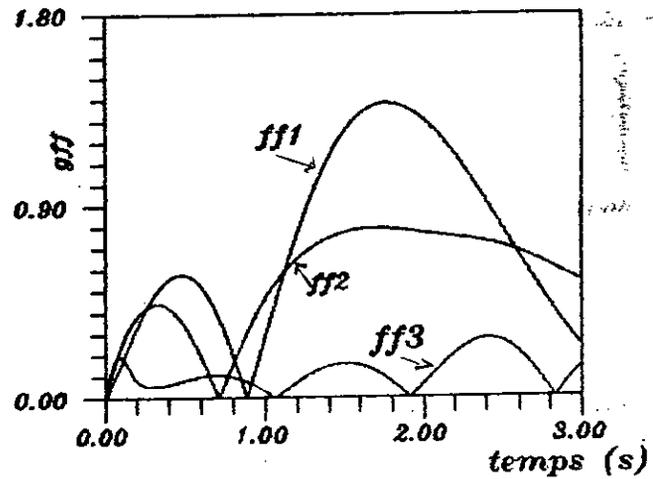


fig IV-7-d: MCS. Gain de reaction

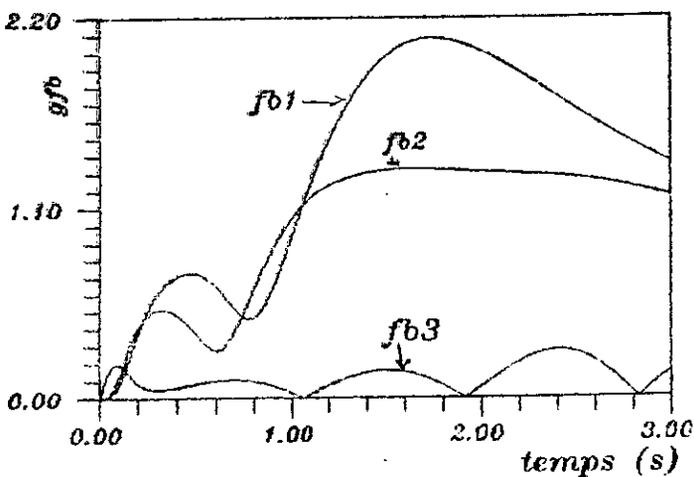


fig IV-7-e: MCS. Gain de contre-reaction

— $T_e = 0,001$
 $d = 6$
 $\beta = 1$
 $m_c = 0 \text{ Kg}$

- - - : Systeme avec :
 $\alpha = 100$
 $\beta = 1$

PARTIE " B "

REGULATEUR AUTO AJUSTABLE

CHAPITRE I
INTRODUCTION AU S.T.R.

Le régulateur auto-ajustable est basé sur le concept de séparation des phases d'estimation et de contrôle [15]. Le S.T.R. de base décrit dans [14] illustre le cas où le problème de contrôle est caractérisé par le problème de minimisation de la variance de la sortie. La figure ci-dessous illustre le schéma bloc d'un S.T.R.

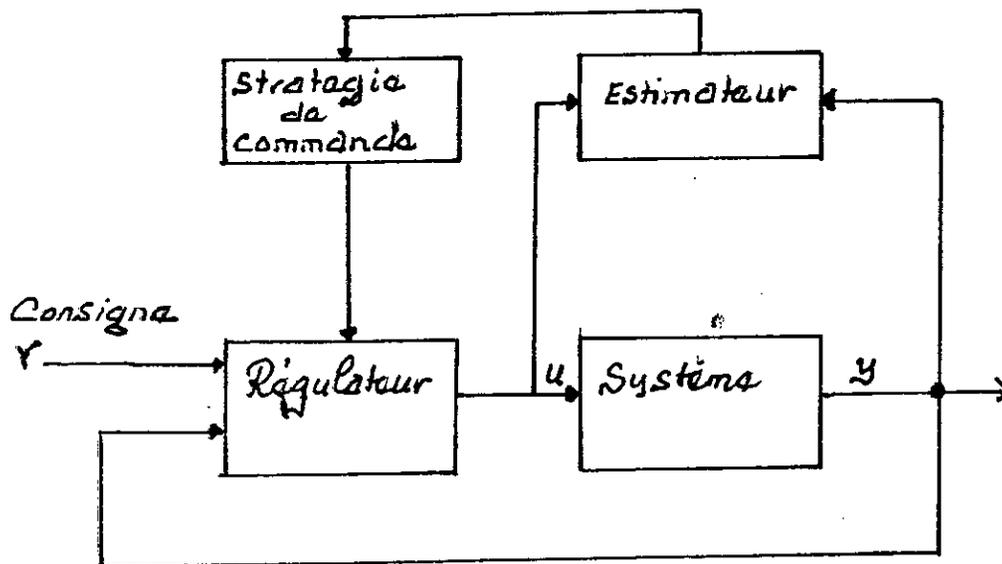


Fig (1.1.) : Schéma bloc d'un S.T.R.

Les trois blocs de base qui constituent un S.T.R. sont :

- 1 - Bloc d'estimation des paramètres du système à partir des données d'entrées-sorties,
- 2 - Un bloc de calcul des paramètres du régulateur suivant une stratégie bien déterminée,
- 3 - Un bloc de calcul de commande.

A l'aide des paramètres estimés et en utilisant une stratégie de synthèse des régulateurs, on pourra déterminer la commande $U(t)$ qui donne la sortie désirée au système.

Parmi les différentes stratégies de synthèse des S.T.R. qui ont été étudiées dans plusieurs ouvrages, on cite :

- 1) Stratégie basée sur la variance de sortie généralisée minimale,
- 2) Stratégie basée sur la variance minimale de la sortie [14] [15]
- 3) Stratégie basée sur les L.Q.G. [18]

Stratégie basée sur la prédiction [11]

Stratégie basée sur le placement de pôles et de zéros [14] [19]

Définitions :

Concept de neutralité : un problème de commande est neutre si la commande calculée n'a aucun effet sur la qualité de l'estimé de l'état du système.

Concept de dualité : une commande optimale possède un effet de dualité si en plus de son influence sur l'état du système, elle affecte la qualité de l'estimé.

Grossièreté : un système est dit grossier au sens d'ANDRONOV si son comportement qualitatif n'est pas modifié pour de petites variations de ses paramètres.

Classification des S.T.R. : dès le début des années 1970, deux grandes classes de stratégie de commandes du type auto-ajustable ont été dégagées :

- a) la stratégie de régulation explicite "S.T.R. indirect". Ici les algorithmes de commande sont basés sur l'estimation des paramètres

du système, à partir desquels est synthétisée la loi de commande. Généralement ce type de stratégie n'est utilisé que pour des systèmes stochastiques, vu leur complexité.

b) La stratégie de régulation implicite ou S.T.R. direct : dans ce cas les algorithmes sont obtenus en considérant un modèle modifié du processus, dit "modèle implicite", qui s'exprime directement en fonction des paramètres du régulateur.

CHAPITRE II

PLACEMENT DE POLES ET DE ZEROS

CAS S. I. S. O.

Nous présentons dans ce chapitre la stratégie de commande fondée sur le placement des pôles et des zéros du système en boucle fermée. La notion qualitative correspond à la spécification des performances à la fois statiques et dynamiques du système, tant au niveau de la sortie du système que de la commande appliquée au système. Ces performances sont exprimées en termes de placement de pôles et éventuellement de zéros.

2.1 Présentation du problème :

Soit un système mono-entrée mono-sortie dont la fonction de transfert est :

$$H(Z^{-1}) = B(Z^{-1}) Z^{-d} / A(Z^{-1}) \quad (2.1.1)$$

avec :

$$B(Z^{-1}) = b_0 + b_1 Z^{-1} + b_2 Z^{-2} + \dots + b_m Z^{-m} \quad (2.1.2)$$

$$A(Z^{-1}) = 1 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \dots + a_n Z^{-n} \quad (2.1.3)$$

A et B sont des polynomes premiers entre eux.

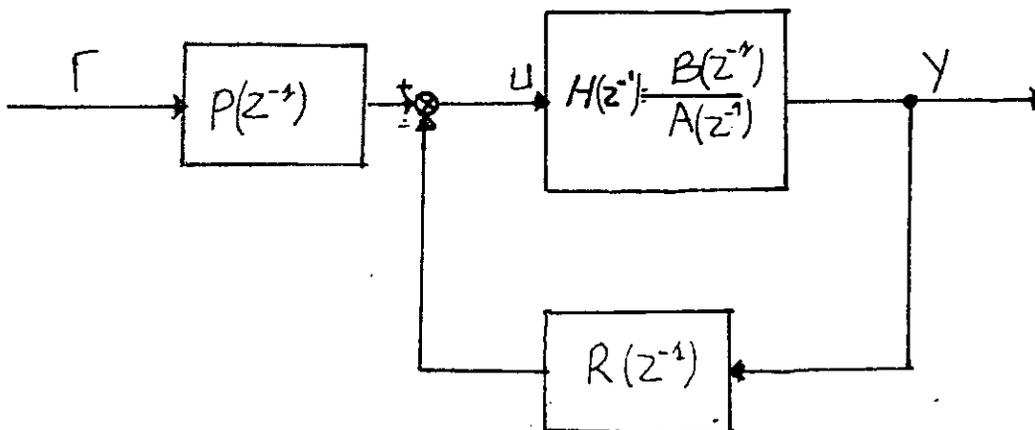


Fig (2.1) : Schéma de contrôleur d'un S.T.R. implicite

Le contrôleur est constitué de deux blocs :

- une action d'anticipation représentée par la fonction de transfert $p(Z^{-1})$.
- une action dans la boucle de retour directe avec le processus et qui est représentée par la fonction de transfert $R(Z^{-1})$.

La commande $U(t)$ est donnée par :

$$U(t) = p(Z^{-1}) \Gamma(t) - R(Z^{-1}) Y(t) \quad (2.1.4)$$

La stratégie consiste à évaluer les fonctions de transfert $R(Z^{-1})$ et $p(Z^{-1})$ suivant des spécifications sur le comportement désiré du système en boucle fermée (bf) à partir d'un choix de localisation de ses pôles et de ses zéros. Pour cela, le système en boucle fermée doit se comporter comme le modèle représenté par la fonction de transfert suivante :

$$H_m(Z^{-1}) = \gamma B_m Z^{-d} / A_m(Z^{-1}) \quad (2.1.5)$$

avec :

$$A_m(Z^{-1}) = 1 + a_{m1} Z^{-1} + a_{m2} Z^{-2} + \dots + a_{mn} Z^{-n}$$

$$B_m(Z^{-1}) = b_0 + b_m Z^{-1} + b_{m2} Z^{-2} + \dots + b_{mm} Z^{-m}$$

γ : un facteur de normalisation, égal à $A_m(1)/B_m(1)$

A_m et B_m sont premiers entre eux.

Le problème devient purement algébrique, dont la solution consiste à résoudre l'égalité suivante :

$$H_m(Z^{-1}) = \gamma B_m(Z^{-1}) / A_m(Z^{-1}) = G(Z^{-1}) / F(Z^{-1})$$

soit

$$H_m(Z^{-1}) F(Z^{-1}) = G(Z^{-1})$$

soit encore

$$R(Z^{-1}) = G(Z^{-1}) / F(Z^{-1}) \quad (2.1.6)$$

et

$$p(Z^{-1}) = D(Z^{-1}) / F(Z^{-1})$$

avec :

$$G(Z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots + g_q z^{-q}$$

$$F(Z^{-1}) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_k z^{-k}$$

$$D(Z^{-1}) = d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_t z^{-t}$$

L'égalité donnée par l'équation (2.1.6) devient :

$$\frac{D(Z^{-1}) B(Z^{-1}) Z^{-d_1}}{A(Z^{-1}) F(Z^{-1}) + G(Z^{-1}) B(Z^{-1}) Z^{-d_1}} = \frac{\gamma B_m(Z^{-1}) Z^{-d_1}}{A_m(Z^{-1})} \quad (2.1.10)$$

En général, le degré du polynôme $AF + GBZ^{-d_1}$ est supérieur à celui du polynôme A_m . Cela signifie que les polynômes $D(Z^{-1})$ et $AF + GBZ^{-d_1}$ ont des facteurs communs. Ces facteurs communs correspondent aux pôles d'un observateur qui permet de réaliser le placement de pôles à partir d'une commande par retour d'état. D'où la détermination de $F(Z^{-1})$ et $G(Z^{-1})$ se fera en résolvant l'équation de Diophantine suivante :

$$A(Z^{-1}) F(Z^{-1}) + G(Z^{-1}) B(Z^{-1}) Z^{-d_1} = A_m(Z^{-1}) D(Z^{-1}) \quad (2.1.11)$$

2.2 Stabilité du contrôleur :

La synthèse du contrôleur doit satisfaire aux trois points suivants (exigences) :

- 1) Le système en boucle fermée doit être asymptotiquement stable.
- 2a) Aucun pôle instable du processus ne doit être compensé par un zéro instable du contrôleur.
- 2b) Aucun pôle instable du processus ne doit être compensé par un zéro instable du correcteur.
- 3) Condition de causalité (réalisabilité du contrôleur).

2.3 Algorithme de placement des pôles :

A partir de l'égalité (2.1.10) on déduit que si $B_m(z^{-1})$ ne contient pas certains facteurs de $B(z^{-1})$ alors $D(z^{-1})$ doit les contenir.

Le polynôme $B(z^{-1})$ étant factorisé en $B^+ B^-$ avec :

$B^+(z^{-1})$: c'est le facteur contenant les zéros stables et suffisamment bien amortis de B ; $B^+(0) = 1$.

$B^-(z^{-1})$: c'est le facteur contenant les zéros instables ou mal amortis de B ; avec $B^-(0) = b_0$.

Le contrôleur étant supposé compenser le facteur $B^+(z^{-1})$, alors :

$$F(z^{-1}) = B^+(z^{-1}) F_1(z^{-1}) \quad (2.3.1)$$

$$B_m(z^{-1}) = B^-(z^{-1}) B_{m1}(z^{-1}) \quad (2.3.2)$$

$D(z^{-1})$ se factorise sous la forme

$$D(z^{-1}) = B_{m1}(z^{-1}) D_1(z^{-1}) \quad (2.3.3)$$

Où :

$B_{m1}(z^{-1})$ correspond aux zéros désirés de la fonction de transfert du système en BF.

$D_1(z^{-1})$ correspond aux pôles de l'observateur qui peuvent être choisis de façon arbitraire.

L'algorithme de contrôle associé à la stratégie du placement des pôles et des zéros du processus est résumé dans le tableau 2.1.

1ère étape	Choix des polynômes $A_m(z^{-1}), B_{m1}(z^{-1}), D_1(z^{-1})$
2ème étape	Factorisation du polynôme $B(z^{-1})$ en $B^+(z^{-1})$ et $B^-(z^{-1})$

3ème étape Résolution de l'équation de Diophantine

$$A(z^{-1}) F_1(z^{-1}) + B^-(z^{-1}) G(z^{-1}) Z^{-d_1} = A_m(z^{-1}) D_1(z^{-1})$$

4ème étape Calcul de la commande

$$U(t) = \frac{\gamma B_{m1}(z^{-1}) 1(z^{-1})}{B^+(z^{-1}) F_1(z^{-1})} e(t) - \frac{G(z^{-1})}{B^+(z^{-1}) F_1(z^{-1})} Y(t)$$

avec $\gamma = A_m(1) / B_m(1)$

Tableau 2.1 : Stratégie générale des placements des pôles

* Cas particuliers :

Il est intéressant de considérer les deux cas particuliers suivants qui permettent de supprimer l'étape 2 du tableau 2.1 et par conséquent réduire de manière appréciable le volume de calcul.

* Cas où le correcteur compense tous les zéros du processus. Les équations :

$$F(z^{-1}) = B(z^{-1}) F_1(z^{-1}) \quad (2.3.4)$$

$$B_m(z^{-1}) = B_{m1}(z^{-1}) \quad (2.3.5)$$

$$A(z^{-1}) F_1(z^{-1}) + G(z^{-1}) Z^{-d_1} = A_m(z^{-1}) D_1(z^{-1}) \quad (2.3.6).$$

Cette stratégie de commande ne peut être appliquée en pratique qu'au système à déphasage minimal du fait que le correcteur compense tous les zéros du processus.

* Cas où le contrôleur ne compense pas les zéros du processus ; nous avons alors :

$$F(z^{-1}) = F_1(z^{-1}) \quad (2.3.7)$$

$$B_m(z^{-1}) = B(z^{-1}) B_{m1}(z^{-1}) \quad (2.3.8)$$

$$A(z^{-1}) F(z^{-1}) + B(z^{-1}) G(z^{-1}) Z^{-d_1} = A_m(z^{-1}) D(z^{-1}) \quad (2.3.9)$$

Cette stratégie ne nécessite pas l'hypothèse "système à déphasage minimal".

2.4 Algorithme de placement de pôles et de zéros :

Soit la fonction de transfert de l'erreur relative à l'entrée figure ci-dessous :

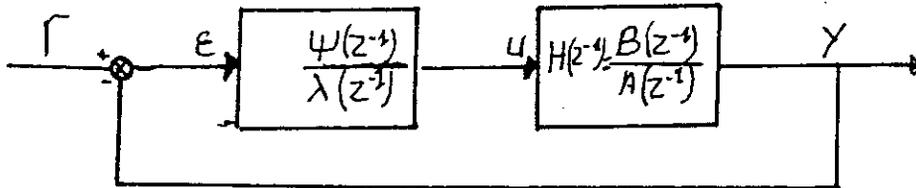


Fig 2.2 : Contrôleur par placement de pôles et zéros

$$\frac{e(z^{-1})}{\Gamma(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1}) F(z^{-1})}{A(z^{-1}) F(z^{-1}) + G(z^{-1}) B(z^{-1}) Z^{-d1}} \quad (2.4.1)$$

avec $\Gamma(z^{-1}) = \frac{\Psi(z^{-1})}{\lambda(z^{-1})}$ (2.4.2)

où $\Psi(z^{-1})$ et $\lambda(z^{-1})$ deux polynômes en z^{-1}

L'équation (2.4.1) devient :

$$\frac{e(z^{-1}) \lambda(z^{-1})}{\Psi(z^{-1})} = \frac{A(z^{-1}) F(z^{-1})}{A(z^{-1}) F(z^{-1}) + G(z^{-1}) B(z^{-1}) Z^{-d1}} \quad (2.4.3)$$

Pour que l'erreur de poursuite soit éliminée, il faut que les modes du signal d'entrée soient éliminés au niveau de e. D'où tous les facteurs de $\lambda(z^{-1})$ doivent être contenus dans $F(z^{-1})$, alors $F(z^{-1})$ se factorise en $F'(z^{-1})$ et $\lambda(z^{-1})$

$$F(z^{-1}) = F'(z^{-1}) \lambda(z^{-1}) \quad (2.4.4)$$

avec :

$$\lambda(z^{-1}) = \lambda_0 + \lambda_1 z^{-1} + \lambda_2 z^{-2} + \dots + \lambda_j z^{-j}$$

$$F'(z^{-1}) = f'0 + f'1 z^{-1} + f'2 z^{-2} + \dots + f'p z^{-p}$$

Avec cette nouvelle décomposition de $F(z^{-1})$, l'équation de Diophantine devient :

$$A(z^{-1}) \lambda(z^{-1}) F'(z^{-1}) + G(z^{-1}) B(z^{-1}) Z^{-d1} = A_m(z^{-1}) D(z^{-1}) \quad (2.4.5)$$

$$q = m + j - 1 \quad (2.5.8)$$

$$k = m + d1 - 1 \quad (2.5.9)$$

$$t = j + d1 + m \quad (2.5.10)$$

CHAPITRE III

PLACEMENT DE POLES ET DE ZEROS

CAS M.I.M.O

Nous présentons dans ce chapitre deux stratégies de commande basées sur le placement de pôles et de zéros pour les systèmes multi-entrées multi-sorties (19)

I - Algorithme de placement de pôles -

Cet algorithme développé par PAAGER est une extension de l'algorithme de placement de pôles des systèmes S.I.S.O avec comme différence que les polynômes A, B, G et F deviennent des matrices polynômiales de rang égal à celui de l'ordre du système "p".

Soit un système décrit par son équation de matrices polynômiales

$$A(z^{-1}) Y(t) = B(z^{-1}) U(t) \quad (3.1)$$

avec

$$A(z^{-1}) = I + A_1 Z^{-1} + \dots + A_n Z^{-n} \quad (3.2)$$

$$B(z^{-1}) = \theta_1 Z^{-1} + \theta_2 Z^{-2} + \dots + \theta_m Z^{-m} \quad (3.3)$$

où A_i et B_j sont des matrices $p \times p$

Le retard est introduit directement dans $B(z^{-1})$

I matrice identité de rang p .

La loi de commande est donnée par :

$$U(t) = G(z^{-1}) [I + F(z^{-1})]^{-1} Y(t) \quad (3.4)$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (3.4) par un intégrateur

$(1 - Z^{-1})$, on obtient :

$$A'(z^{-1}) Y(t) = B(z^{-1}) \Delta U(t) \quad (3.5)$$

avec :

$$A'(z^{-1}) = A(z^{-1}) (1 - z^{-1}) \quad (3.6)$$

$$\Delta U(t) = U(t) - U(t - 1) \quad (3.7)$$

Donc la loi de commande peut s'écrire :

$$\Delta U(t) = G(z^{-1}) [I + F(z^{-1})]^{-1} [y(t) - \Gamma(t)] \quad (3.8)$$

D'après les équations (3.5) et (3.8) l'équation caractéristique du processus en boucle fermée est donnée par :

$$A'(z^{-1}) F(z^{-1}) - B(z^{-1}) G(z^{-1}) = D(z^{-1}) \quad (3.9)$$

avec $D(z^{-1})$ et une matrice $p \times p$ qui donne les pôles désirés.

Pour que la solution de l'équation (3.9) existe, il faut que

$$\deg [G(z^{-1})] = \deg [A'(z^{-1})] - 1$$

$$\deg [F(z^{-1})] = \deg [B(z^{-1})] - 1$$

$$\deg [D(z^{-1})] \leq \deg [A'(z^{-1})] + \deg [B(z^{-1})] - 1$$

$$\text{avec } \deg [A'(z^{-1})] = \deg [A(z^{-1})] + 1$$

La loi de commande est déterminée comme suit :

$$\Delta U(t) = -\hat{F}(z^{-1}) U(t) + \hat{G}(z^{-1}) [Y(t) - Y(t)] \quad (3.10)$$

où $\hat{F}(z^{-1})$ et $\hat{G}(z^{-1})$ deux matrices polynomiales définies par :

$$[I + F(z^{-1})] G(z^{-1}) = G(z^{-1}) [I + F(z^{-1})] \quad (3.11)$$

II - Algorithme de placement de pôles et de zéros

Cet algorithme est développé avec comme hypothèse : le système est stable en boucle ouverte. Condition qui n'est pas trop restrictive car la majorité des procédés industriels sont stables.

Soit un système stable décrit par l'équation suivante :

$$A(z^{-1}) Y(t) = B(z^{-1}) U(t) \quad (3.2.1)$$

La loi de commande est donnée par :

$$F(z^{-1}) U(t) = G(z^{-1}) \xi(t) \quad (3.2.2)$$

$$\text{avec : } \xi(t) = \Gamma(t) - Y(t) \quad (3.2.3)$$

D'après les équations (3.2.1) et (3.2.2), le système en boucle

fermée est donné par :

$$Y(t) = [A(z^{-1}) + B(z^{-1}) F(z^{-1}) G(z^{-1})]^{-1} * [B(z^{-1}) F(z^{-1}) G(z^{-1})] \Gamma(t) \quad (3.2.5)$$

Soit deux matrices polynômiales $p(z^{-1})$ et $\phi(z^{-1})$ qui définissent respectivement le dénominateur et le numérateur du système en boucle fermée tels que (sans grande restriction),
 $p(1) = \phi(1)$ pour que l'erreur en régime permanent s'annule.

Soit :

$$G(z^{-1}) = \phi(z^{-1}) A(z^{-1}) \quad (3.2.6)$$

Ce choix est motivé par le fait que les zéros de $G(z^{-1})$ sont les zéros du système en boucle fermée ; ainsi pour placer les zéros, il suffit de mettre $\phi(z^{-1})$ en diviseur de $G(z^{-1})$.

Les équations (3.2.5) et (3.2.6) donnent :

$$Y(t) = A^{-1} B [F + \phi B]^{-1} \phi A \Gamma(t) \quad (3.2.7)$$

Soit :

$$F + \phi B = p K \quad (3.2.8)$$

avec K UNE MATRICE CONSTANTE DE RANG P .

Les équations (3.2.7) et (3.2.8) donnent :

$$Y(t) = A^{-1} B (pK)^{-1} \phi A \Gamma(t) \quad (3.2.9)$$

Calcul de K :

$$Y(\omega) = A^{-1}(1) B(1) K^{-1} F^{-1}(1) A(1) \Gamma(t) = I(t) \quad (3.2.10)$$

La résolution de cette équation donne :

$$K = B(1) \quad (3.2.11)$$

d'où

$$F = P^{-1} B(1) - \phi B \quad (3.2.12)$$

Le système en boucle fermée sera décrit par :

$$Y(t) = A^{-1} B B^{-1}(1) P^{-1} \phi A \Gamma(t) \quad (3.2.13)$$

Cette équation montre que les zéros du système en boucle fermée sont les zéros de $|B(z^{-1})|$ et $|\phi(z^{-1})|$ et ces pôles sont les zéros de $|p(z^{-1})|$.

L'algorithme de placement de pôles et de zéros est résumé dans le tableau suivant :

1ère étape	Choix de matrices polynômiales $P(z^{-1})$ et $\phi(z^{-1})$ avec $p(1) = \phi(1)$
2ème étape	Calcul de $G(z^{-1})$ $G(z^{-1}) = \phi(z^{-1}) A(z^{-1})$
3ème étape	Calcul de $F(z^{-1})$ $F(z^{-1}) = P(z^{-1}) B(1) - \phi(z^{-1}) B(z^{-1})$
4ème étape	Calcul de la commande $U(t)$ $F(z^{-1}) U(t) = G(z^{-1}) [\Gamma(t) - Y(t)]$

Tableau 3.1 : Algorithme de placement de pôles et de zéros pour des systèmes M.I.M.O stables

Remarques :

* L'équation montre que les zéros du processus ne sont pas compensés donc cet algorithme peut être appliqué sur des systèmes à déphasage non minimal.

* Si le placement des zéros n'est pas demandé, $\phi(z^{-1})$ peut être choisie égale à la matrice et l'algorithme devient :

$$G = A$$

$$F = P B(1) - B$$

$$[P B(1) - B] U(t) = A [y(t) - \Gamma(t)]$$

L'algorithme de placement de pôles et de zéros pour un système à minimum de phase "S.T.R indirect", se fait en quatre étapes :

Etape 1 : connaissant le retard du système ainsi que son degré, on estime les paramètres de B et A à l'aide des M.C.R.

Etape 2 : donner D_0 , A_m de B_m

- spécifier les modes de l'entrée.

Etape 3 : résoudre l'équation (2.1.11) de Diophantine pour déterminer F et G .

Etape 4 : calcul de la commande U donnée par l'équation (2.1.4).

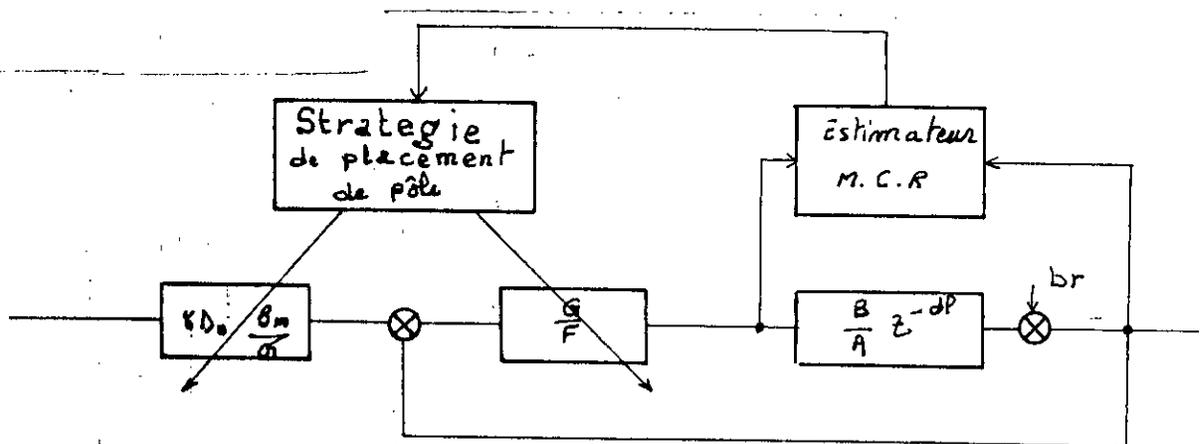


Fig 3.2 : Schéma bloc d'un S.T.R. basé sur le placement de pôle et de zéro "explicite"

CHAPITRE IV

ALGORITHME A ESTIMATION DES MOINDRES CARRES PONDERES

1 - Généralités :

Considérons le modèle (4.1.1) linéaire vis-à-vis du vecteur des paramètres θ , supposés déterministes et constants :

$$y(t) = \phi^T(t) \theta + \varepsilon(t, \theta) \quad (4.1.1)$$

$\varepsilon(t, \theta)$ représente l'erreur de modélisation, appelée aussi erreur d'équation.

$\phi^T(t)$ appelé vecteur d'observation, contient des valeurs passées des signaux d'entrée-sortie du système.

Le problème d'identification consiste à obtenir le meilleur estimé possible (au sens d'un certain critère) de θ à partir de la connaissance du vecteur d'observation sur un certain intervalle de temps.

La méthode des moindres carrés pondérés (M.C.P.) correspond à la minimisation du critère quadratique suivant :

$$J(k, \theta) = \sum_{t=1}^k w(t) \varepsilon^2(t, \theta) \quad (4.1.2)$$

où $w(t)$ est une pondération scalaire non négative. Le critère

(4.1.2) peut être réécrit sous la forme matricielle :

$$J(k, \theta) = E^T(k, \theta) w(k) E(k, \theta) = \|E(k, \theta)\|^2 w(k) \quad (4.1.3)$$

où $\|\dots\| w(k)$ représente la norme euclidienne pondérée à l'aide

de $w(k)$ et les quantités $w(k)$ et $E(k, \theta)$ sont définies par :

$$w(k) = \begin{bmatrix} w(1) & 0 \\ 0 & w(k) \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$E(k, \theta) = [\varepsilon(1, \theta) \dots \varepsilon(k, \theta)]^T \quad (4.1.5)$$

$$E[k, \theta] = Y(k) - \Phi(k) \theta \quad (4.1.6)$$

avec :

$$Y(k) = [y(1) \dots \dots \dots y(k)]^T \quad (4.1.7)$$

$$\Phi(k) = [\phi(1) \dots \dots \dots \phi(k)]^T \quad (4.1.8)$$

L'estimé $\hat{\theta}(k)$ de θ au sens de la minimisation du critère quadratique (4.1.2) est obtenu en écrivant que la dérivée partielle de $J(k, \theta)$ par rapport à θ est nulle pour $\theta = \hat{\theta}(k)$.

Cela nous donne :

$$[\Phi^T(k) w(k) \Phi(k)] \hat{\theta}(k) = \Phi^T(k) w(k) Y(k) \quad (4.1.9)$$

Ces équations sont appelées équations normales.

En supposant que la matrice $\Phi^T(k) w(k) \Phi(k)$ est non singulière, on obtient donc :

$$\hat{\theta}(k) = [\Phi^T(k) w(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k) w(k) Y(k)$$

 (4.1.10)

En remplaçant $Y(k)$ par son expression tirée de (4.1.6), nous avons :

$$E_s [\hat{\theta}(k)] = \theta + E_s \{ [\Phi^T(k) w(k) \Phi(k)]^{-1} \Phi^T(k) w(k) E(k, \theta) \}$$

Où E_s représente l'espérance mathématique. (4.1.11)

Par suite, nous pouvons conclure que dans le cas d'un système dynamique, c'est-à-dire lorsque le vecteur d'observation $\phi(t)$ dépend de valeurs passées $y(t - \tau)$ de la sortie, $\tau(1, n)$; l'estimateur des M.C.P. sera en général biaisé, le second terme du membre de droite de (4.10) n'étant pas nul pour toute valeur de k . Ce terme représente le biais de l'estimateur.

2 - Estimation des M.C.P. récursifs :

Afin de présenter de manière unifiée différentes versions des M.C.P. récursifs :

- algorithme avec pondération multiplicative
- algorithme avec porteur constant
- algorithme avec porteur variable,

nous allons supposer que la pondération $w(t)$ apparaissant dans le critère (4.1.2) a la forme générale suivante :

$$w(t) = \mu(t) \prod_{i=t}^k \lambda(i) \quad (4.2.1)$$

D'après l'expression (4.1.8) nous pouvons conclure que le calcul de l'estimateur des M.C.P. nécessite l'inversion de la matrice $\Phi^T(k) w(k) \Phi(k)$ de dimension (n_θ, n_θ) , où n_θ représente la dimension de θ . Le but de la formulation récursive des M.C.P. est de permettre le calcul de $\theta(k)$ à partir de $\theta(k-1)$ de manière à éviter l'inversion de cette matrice.

Les équations relatives à l'algorithme récursif peuvent être mises en évidence en partitionnant les matrices $Y(k)$, $\Phi(k)$ et $w(k)$ sous la forme suivante :

$$Y(k) = \begin{bmatrix} Y(k-1) \\ \dots \\ Y(k) \end{bmatrix}, \quad \Phi(k) = \begin{bmatrix} \Phi(k-1) \\ \dots \\ \phi^T(k) \end{bmatrix}, \quad w(k) = \begin{bmatrix} \lambda(k) w(k-1) & & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda(k) \mu(k) \end{bmatrix}$$

Définissant :

$$P(k) = [\Phi^T(k) w(k) \Phi(k)]^{-1} \quad (4.2.3)$$

Nous obtenons :

$$P^{-1}(k) = \frac{1}{\lambda(k)} [P^{-1}(k-1) + \mu(k) \phi^T(k)] \quad (4.2.4)$$

où en appliquant le terme d'inversion matricielle :

$$P(k) = 1/\lambda(k) \left[P(k-1) - \frac{P(k-1) \phi(k) \phi^T(k) P(k-1)}{1/\mu(k) + \phi^T(k) P(k-1) \phi(k)} \right] \quad (4.2.5)$$

ou encore, en définissant le gain $G(k)$ tel que :

$$G(k) = \frac{P(k-1) \phi(k)}{1/\mu(k) + \phi^T(k) P(k-1) \phi(k)} \quad (4.2.6)$$

nous avons :

$$P(k) = 1/\lambda(k) [I - G(k) \phi^T(k)] P(k-1) \quad (4.2.7)$$

D'autre part, le calcul récursif de $\hat{\theta}(k)$ peut être effectué à l'aide de la forme suivante :

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + G(k) [y(k) - \phi^T(k) \hat{\theta}(k-1)] \quad (4.2.8)$$

Une autre expression du gain $G(k)$, fonction de $P(k)$ peut être obtenue à partir de l'équation (4.2.5). En effet, multipliant à droite les deux membres de (4.2.5) par $\phi(k)$, nous obtenons après simplification :

$$G(k) = \lambda(k) \mu(k) P(k) \phi(k) \quad (4.2.9)$$

Cette expression met bien en évidence le fait que $G(k)$ est proportionnel à $P(k)$.

Remarque :

1. L'algorithme des M.C.P. récursifs nécessite d'initialiser le vecteur de paramètres estimés $\hat{\theta}$ ainsi que la matrice P .

- Dans le cas où l'on dispose de peu de mesures (faibles valeurs de k) ou lorsque les paramètres peuvent varier assez rapidement dans le temps, il est préférable d'effectuer l'initialisation à l'aide d'un bloc de données ($t \in [1, k_1]$ avec $k_1 \geq n\theta$), i.e

$$P(k_1) = [\Phi^T(k_1) W(k_1) \Phi(k_1)]^{-1} \quad (4.2.10)$$

$$\hat{\theta}(k_1) = P(k_1) \Phi^T(k_1) W(k_1) Y(k_1) \quad (4.2.11)$$

- Dans le cas où l'on dispose d'un assez grand nombre de mesures et si l'on a pas d'information à priori sur θ , on prendra comme valeurs d'initialisation :

$$\hat{\theta}(0) = 0 \quad P(0) = P_0 I \quad (4.2.12)$$

où P_0 est un scalaire et I la matrice identité.

3 - Introduction d'un facteur d'oubli :

Cette méthode est traitée ci-après en envisageant successivement :

- le cas d'un facteur d'oubli constant,
- le cas d'un facteur d'oubli variable.

3.1 Algorithme avec facteur d'oubli constant :

La formulation standard de l'algorithme avec facteur d'oubli constant est obtenue en faisant :

$$\mu(t) = 1/\lambda \quad \forall t \in [1, k] \quad (4.3.1)$$

$$\text{et } \lambda(t) = \lambda \quad \forall t \in [1, k] \quad (4.3.2)$$

avec :

$$\lambda_{\min} \leq \lambda \leq 1 \text{ en pratique } \lambda \in [0,95 - 0,99]$$

Analysant l'effet d'un tel facteur d'oubli, le critère minimisé s'écrit :

$$J(k, \theta) = \sum_{t=1}^k \lambda^{k-t} \epsilon^2(t, \theta) \quad (4.3.3)$$

$J(k, \theta)$ peut s'interpréter comme la sortie du système de fonction de transfert $1/(1 - \lambda z^{-1})$, ayant à l'entrée la séquence $\epsilon^2(t, \theta)$.

Les équations (4.2.4), (4.2.6) deviennent alors :

$$P^{-1}(k) = \lambda P^{-1}(k-1) + \phi(k) \phi^T(k) \quad (4.4.4)$$

$$P(k) = 1/\lambda \left[P(k-1) - \frac{P(k-1) \phi(k) \phi^T(k) P(k-1)}{\lambda + \phi^T(k) P(k-1) \phi(k)} \right] \quad (4.4.5)$$

$$G_r(k) = \frac{P(k-1) \phi(k)}{\lambda + \phi^T(k) P(k-1) \phi(k)} \quad (4.4.6)$$

L'utilisation d'un facteur d'oubli constant de valeur strictement inférieure à 1 peut présenter l'inconvénient de faire exploser l'algorithme (phénomène de blow up) dans l'une des deux situations suivantes :

- $\phi(k) \rightarrow 0$, ce qui peut arriver lorsque le système se trouve dans un état proche d'un état d'équilibre :
- $\phi(k) \perp \phi(k-1)$, c'est-à-dire $\phi^T(k-1) \phi(k) = 0$.

En effet, l'équation (4.4.5) de réactualisation de P se simplifie alors en :

$$P(k) = 1/\lambda P(k-1) \quad (4.4.7)$$

et P(k) grossit de manière exponentielle.

Un moyen d'éliminer l'explosion consiste à geler l'algorithme d'identification lorsque l'erreur de poursuite devient négligeable. Ceci revient à définir une zone morte relativement à l'algorithme d'identification.

3.2 Algorithme avec facteur d'oubli variable :

Il existe différentes manières de réactualiser le facteur d'oubli :

* Facteur d'oubli exponentiel :

La pondération $\lambda(t)$ étant fixée à l'aide de (4.3.1), la loi de variation d facteur d'oubli est alors telle que :

$$\lambda(k) = \lambda_0 \lambda(k-1) + (1 - \lambda_0) \quad (4.4.8)$$

avec :

$$\lambda_{\min} \leq \lambda_0, \quad \lambda(k) < 1 \quad (4.4.9)$$

Partant de la valeur initiale $\lambda(0)$, $\lambda(k)$ tend exponentiellement vers 1 quand $k \rightarrow \infty$. Ceci permet d'éviter le phénomène de blow up.

* Algorithme à trace constante :

Dans ce cas, la pondération $P(k)$ est calculée de façon à maintenir la trace de la matrice $P(k)$ à une valeur constante D_0 . A partir de l'équation (4.4.9), il est facile de déduire la valeur de $P(k)$.

$$P(k) = 1/D_0 \operatorname{Tr} \left[P(k-1) - \frac{P(k-1) \phi(k) \phi^T(k) P(k-1)}{1/P(k) + \phi^T(k) P(k-1) \phi(k)} \right]$$

(4.4.10)

5 - Algorithme d'estimation pour système M.I.M.O :

ASTROM et WITTENMARK [20] ont développé un algorithme d'estimation qui est une extension de l'algorithme d'estimation dans le cas S.I.S.O. :

Soit un système M.I.M.O. défini par :

$$A(Z) Y_n = B(Z) U_{n-1} \quad (4.5.1)$$

avec :

$$A(Z) = I + A_1 Z^{-1} + \dots + A_p Z^p \quad (4.5.2)$$

$$B(Z) = B_1 + B_2 Z^{-1} + \dots + B_q Z^{q-1} \quad (4.5.3)$$

On a A_i et B_i , ce sont des matrices carrées de dimensions bien définies.

$$\text{Soit : } \theta = [-A_1 \dots -A_p \quad B_1 \dots B_q] \quad (4.5.4)$$

L'algorithme d'estimation est défini comme suit :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + a_n P_n \phi_n (Y_{n+1})^T \quad (4.5.6)$$

$$P_{n+1} = P_n - a_n P_n \phi_n \phi_n^T P_n \quad (4.5.7)$$

$$\text{avec : } a_n = (1 + \phi_n^T P_n \phi_n)^{-1} \quad (4.5.8)$$

Exemples d applications

cas (S.I.S.O)

Les exemples qui seront traités dans cette partie sont les mêmes que ceux qui ont été traités dans la partie précédente.

Exemple N°1 Asservissement de vitesse

L'équation de transfert du moteur dans le plan Z est donnée par:

$$\frac{Y(Z^{-1})}{U(Z^{-1})} = \frac{0.027}{1-0.95 Z^{-1}} Z^{-1}$$

L'équation de transfert du modèle que doit suivre le système est donnée par:

$$\frac{Y(Z^{-1})}{r(Z^{-1})} = \frac{0.1}{1-0.9 Z^{-1}} Z^{-1}$$

L'asservissement de la vitesse du moteur consiste à calculer la commande U définie par:

$$F(Z^{-1}) U = G(Z^{-1}) Y + T(Z^{-1}) r$$

Où F et G sont solution de l'équation de Diophantine :

$$F(Z^{-1}) A(Z^{-1}) + G(Z^{-1}) B(Z^{-1}) Z^{-1} = D(Z^{-1}) A_m(Z^{-1})$$

Avec $D(Z^{-1})$ un polynôme de degré 1 soit:

$$D(Z^{-1}) = 1-0.4 Z^{-1}$$

La période d'échantillonnage est prise égale à 0.001 s. L'estimation des paramètres est faite avec l'estimateur des moindres carrés généralisés avec un facteur d'oubli exponentiel. La figure (V-1-a) montre que les performances du système en boucle fermée sont relativement bonnes, chose due à la convergence des paramètres estimés fig (V-1-c).

*Influence du choix de l'observateur fig (V-1-d) : en prenant

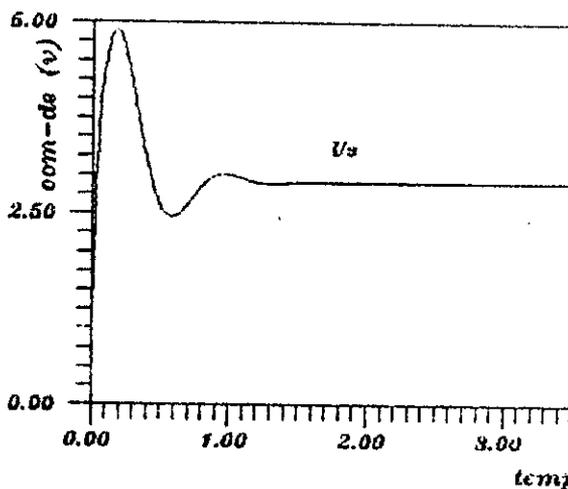
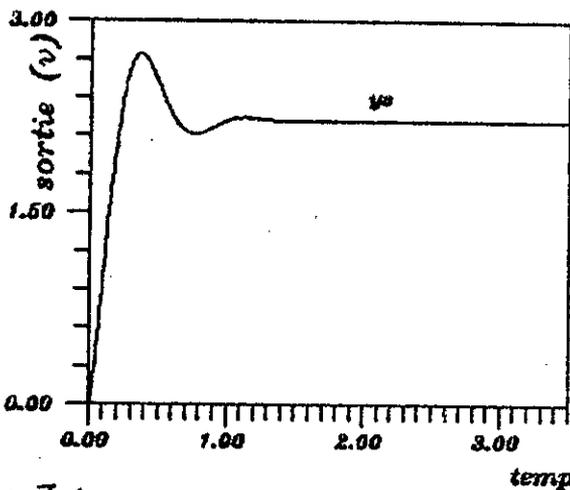
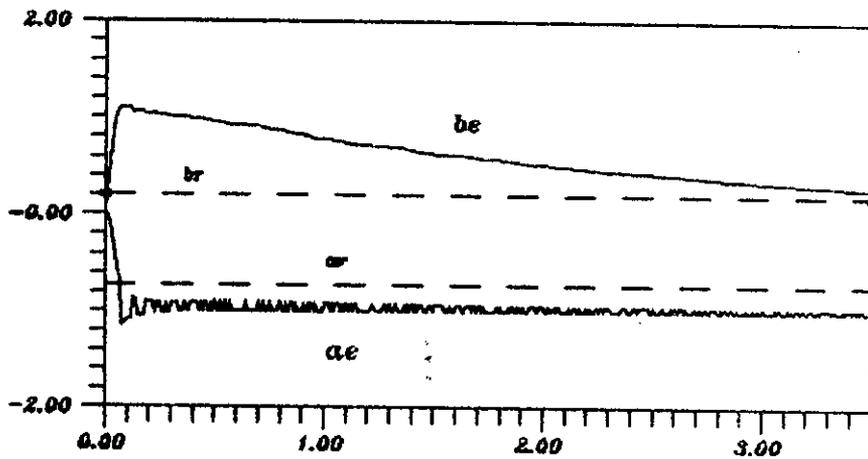


fig V-1-a: Asservissement de vitesse du moteur par placement de poles et de zeros

fig V-1-b: Commande du moteur



temps (s)

fig V-1-c: Parametres estimes du moteur
- - - - - parametres reel

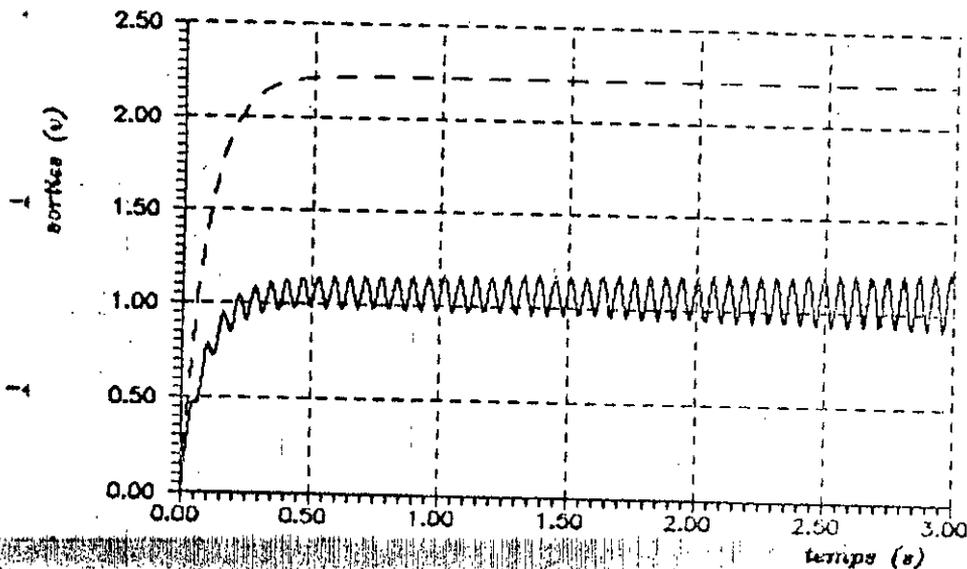


fig V-1-d: PLACEMENT DE POLES : Observateur $D = 1 - 0,82z^{-1}$

un observateur très amorti $D_o = 1 - 0,8z^{-1}$, on remarque que la sortie du système oscille, ce qui met en évidence l'influence du choix de l'observateur sur la stabilité de l'algorithme.

Exemple N°2 Asservissement de position

La fonction de transfert $H(Z^{-1})$ qui donne la position Y en fonction de l'entrée U est donnée par:

$$H(Z^{-1}) = \frac{0,033}{1 - 1,95z^{-1} + 0,45z^{-2}} z^{-1}$$

Elle possède deux pôles $P_1 = 0$ et $P_2 = -5$ qu'il faut déplacer vers $P_1' = -10$, et $P_2' = -10$

La loi de commande est définie par:

$$F'(Z^{-1}) U = G(Z^{-1}) Y + T^{-1}(Z^{-1}) r$$

Avec F et G solution de l'équation de Diophantine suivante:

$$F'(Z^{-1}) A'(Z^{-1}) + G'(Z^{-1}) B'(Z^{-1}) Z^{-2} = D'(Z^{-1}) A'_m(Z^{-1})$$

Avec

$$D'(Z^{-1}) = (1 - 0,2)(1 - 1,6z^{-1} + 0,64z^{-2})$$

on trouve:

$$F'(Z^{-1}) = 1 - z^{-1}$$

$$G'(Z^{-1}) = 43 - 18z^{-1}$$

$$T'(Z^{-1}) = D'(z^{-1})$$

Avec une période d'échantillonnage T égale à 0.01 s, sur la figure (V-2-4) on observe une convergence rapide de la sortie du système vers le signal de référence, ce qui met en évidence les bonnes performances du système en boucle fermée.

Exemple N°3 Stabilisation d'un système instable

L'équation de transfert $H(Z^{-1})$ du système est donnée par:

$$H(Z^{-1}) = \frac{-0.027 Z^{-1}}{(1-0.94 Z^{-1})(1-1.42 Z^{-1})}$$

Elle possède deux pôles

$$\begin{aligned} P_1 &= 0.94 && \text{stable} \\ P_2 &= 1.42 && \text{instable} \end{aligned}$$

Le contrôle de ce système consiste à calculer la commande $U(t)$ donnée par

$$F(Z^{-1}) U = G(Z^{-1}) Y$$

pour que le système soit stable et se comporte comme le modèle suivant:

$$H_m(Z^{-1}) = \frac{2.08 - 1.39 Z^{-1}}{1 - 0.43 Z^{-1}}$$

La résolution de l'équation de diophantine donne:

$$\begin{aligned} G(Z^{-1}) &= 0.48 - 0.66 Z^{-1} + 0.194 Z^{-2} \\ F(Z^{-1}) &= -0.014 \end{aligned}$$

La période d'échantillonnage T est prise égale à 0.01 s. Sur la figure (V-3-a) on observe que la sortie du système oscille au début puis elle se stabilise quand le temps augmente. de même pour la commande $U(t)$, figure (V-3-b).

Reponse indicielle

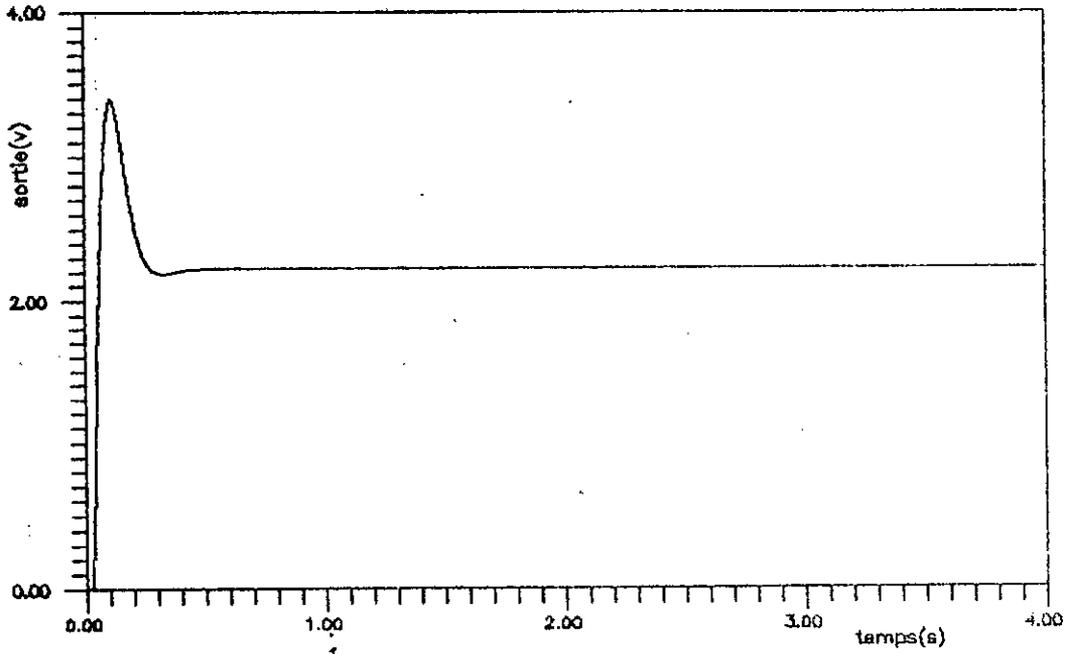


fig V- 2 -a Asservissement de position 'MOTEUR' par placement de poles et de zeros

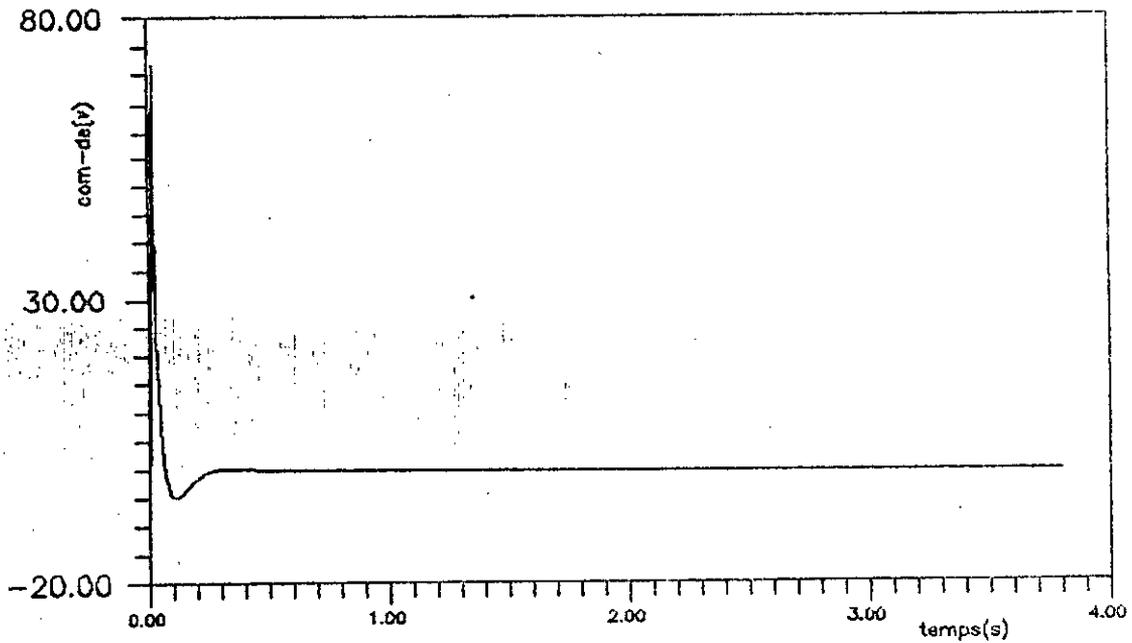
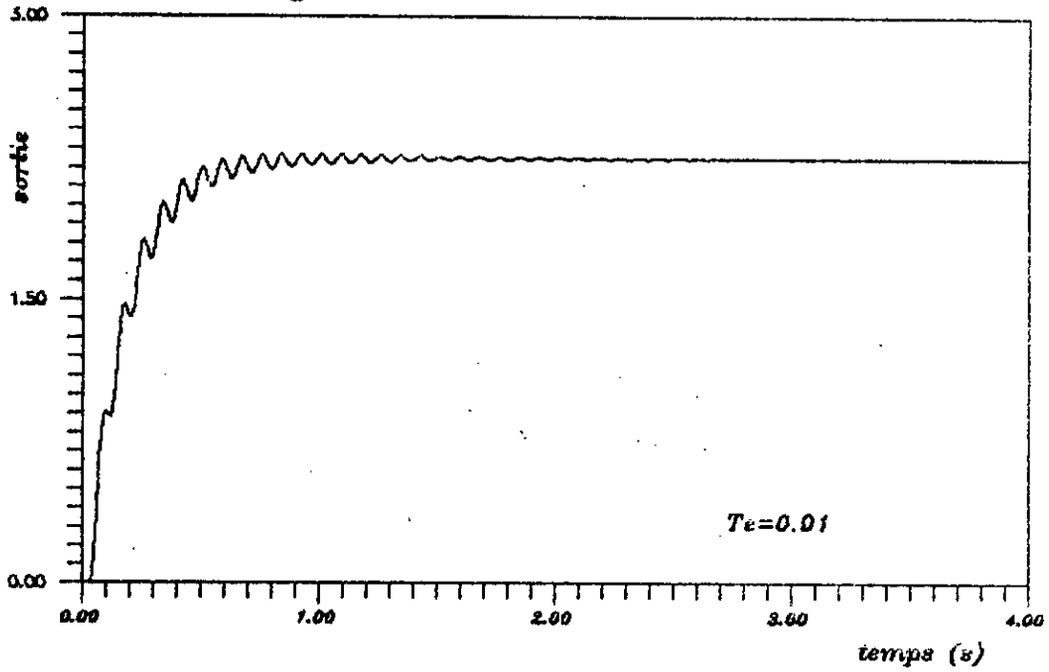
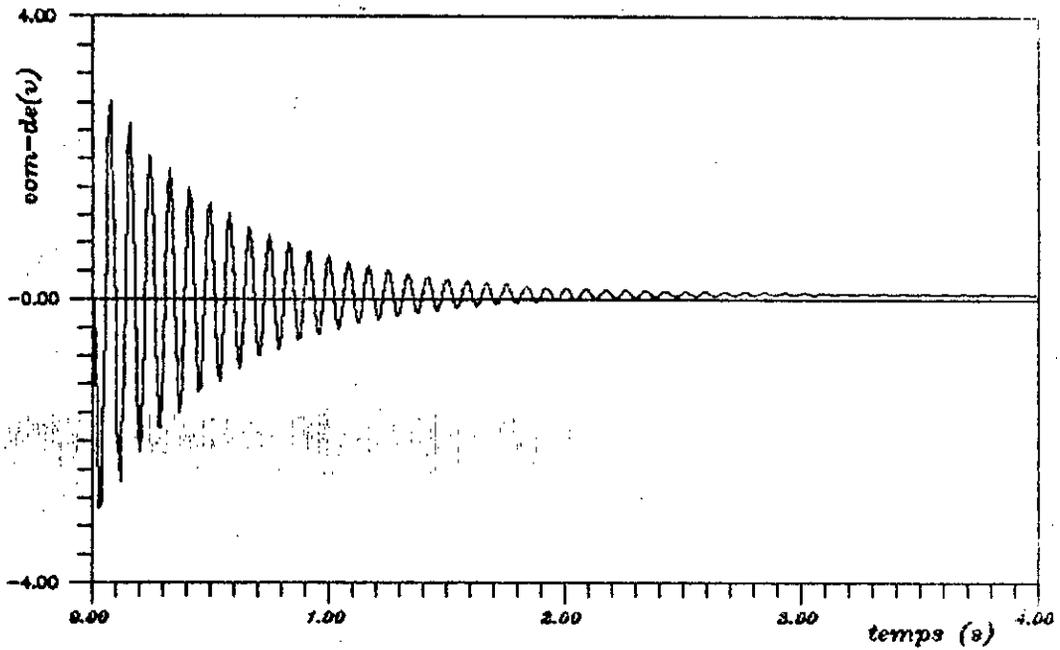


fig V- 2 -b Commande du 'MOTEUR'

Reponse indicielle



figV-3-a: Controle du systeme instable par placement de poles et de zeros



figV- :Commande du systeme instable

**Commande d'un bras manipulateur
par placement de poles**

Cette partie est consacrée au contrôle du bras manipulateur (première partie chap 4) par la stratégie du placement de poles et de zéros.

I) Bras manipulateur à deux degrés de libertés

En fixant le 3^{ème} degré de liberté ($x_{31} = x_{32} = 0$) on obtient un bras à deux degrés de liberté dont l'équation de la partie linéaire dans Z^{-1} est donnée par :

$$(I - A_1 Z^{-1} + A_2 Z^{-2}) Y(Z^{-1}) = B Z^{-2} U(Z^{-1})$$

Avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.994 & 0 \\ 0 & 1.996 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.994 & 0 \\ 0 & 0.996 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3.0776 & -1.538 \\ -3.076 & 8.205 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

Le contrôle du bras consiste à calculer $U(t)$ donnée par :

$$F(Z^{-1}) U = G(Z^{-1}) Y$$

Où F et G sont solution de l'équation polynomiale. Pour que le système se comporte comme le modèle suivant:

$$(I - A_{m1} Z^{-1} + A_{m2} Z^{-2}) Y(Z^{-1}) = B_m Z^{-2} U(Z^{-1})$$

Avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.992 & 0 \\ 0 & 1.992 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.992 & 0 \\ 0 & 0.992 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} 10^{-6}$$

La résolution de l'équation polynomiale nous donne:

$$F(Z^{-1}) = F_1 + F_2 Z^{-1}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0.682 & 0 \\ 0 & 0.840 \end{bmatrix}$$

$$G(Z^{-1}) = G_1 + G_2 Z^{-1}$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} 7.53 & 0 \\ 0 & 3.25 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 4.79 & 0 \\ 0 & 2.29 \end{bmatrix}$$

La période d'échantillonnage T_e est prise égale à 1ms.

Test d'asservissement :

La figure () montre les performances de ce contrôleur dans la stabilisation des deux sorties aux références choisies; c'est à dire à 0.5v et à 1v respectivement pour le bras 1 et le bras 2 du manipulateur.

Test de robustesse $m_0 = 1\text{Kg}$:

Sur la figure() on remarque la bonne aptitude du contrôleur déterminé à s'adapter aux changements des paramètres du système.

II) Bras manipulateur classe 1:

La transformée en Z^{-1} de la partie linéaire de l'équation dynamique du bras est donnée par:

$$(I - A_1 Z^{-1} + A_2 Z^{-2}) Y = (B_1 + B_2 Z^{-1}) Z^{-2} U$$

Avec

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.77 & 0 & 0 \\ 0 & -0.88 & 0 \\ 0 & 0 & -0.33 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.0053 & -0.00026 & 0 \\ -0.0067 & 0.0178 & 0 \\ 0 & 0 & 1.96 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.77 & 0 & 0 \\ 0 & 0.88 & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.0063 & -0.000031 & 0 \\ -0.00037 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & -0.06 \end{bmatrix}$$

La loi de commande est donnée par :

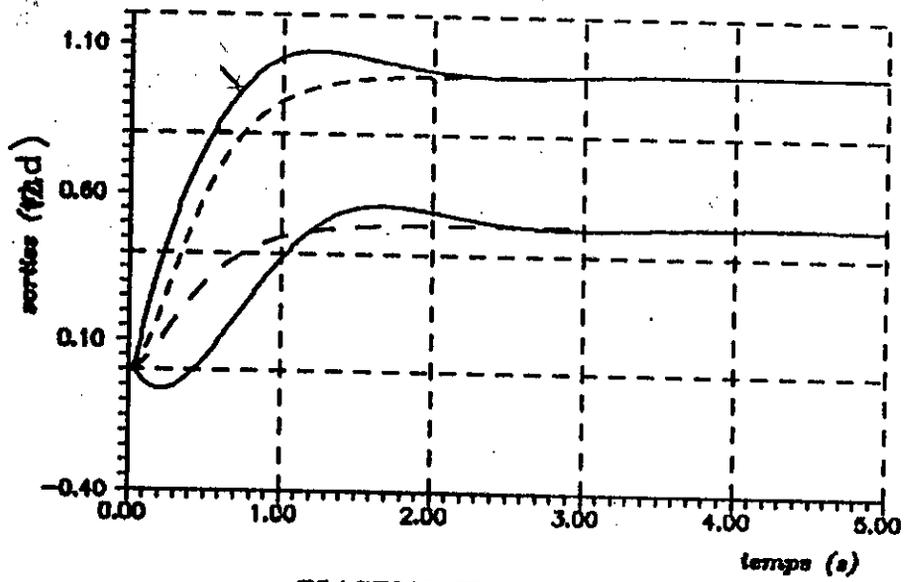
$$F(Z^{-1}) U = G(Z^{-1}) (r - Y)$$

Avec

$$G(Z^{-1}) = Q(Z^{-1}) A(Z^{-1})$$

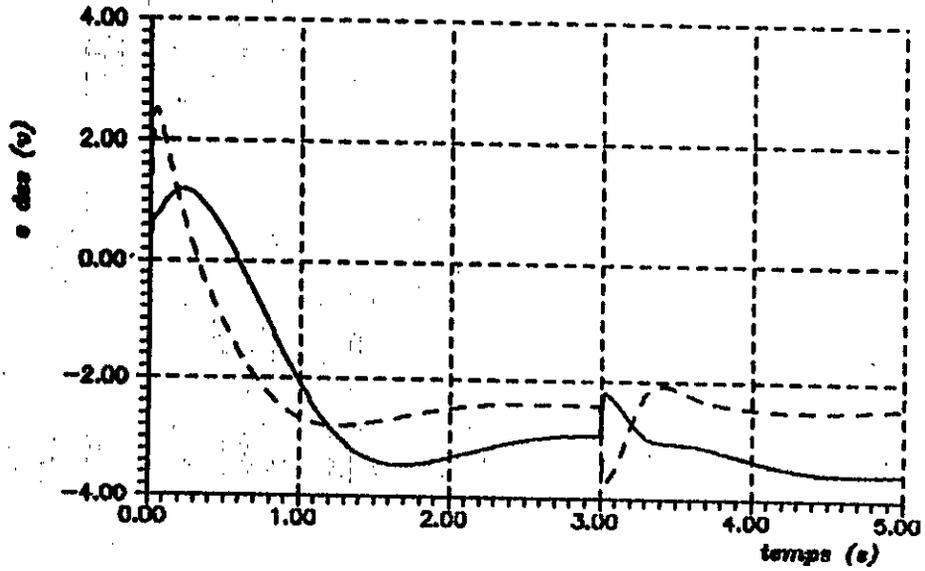
$$F(Z^{-1}) = P(Z^{-1}) B(1) - Q(Z^{-1}) B(Z^{-1})$$

$P(Z^{-1})$ et $Q(Z^{-1})$ deux matrices polynômiales donnés par :



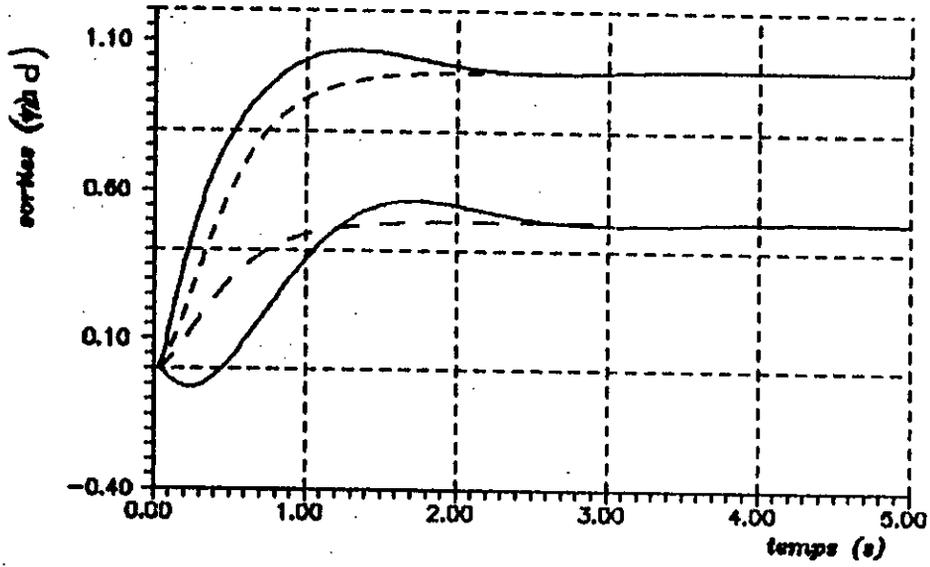
PLACEMENT DE POLES

BR 2



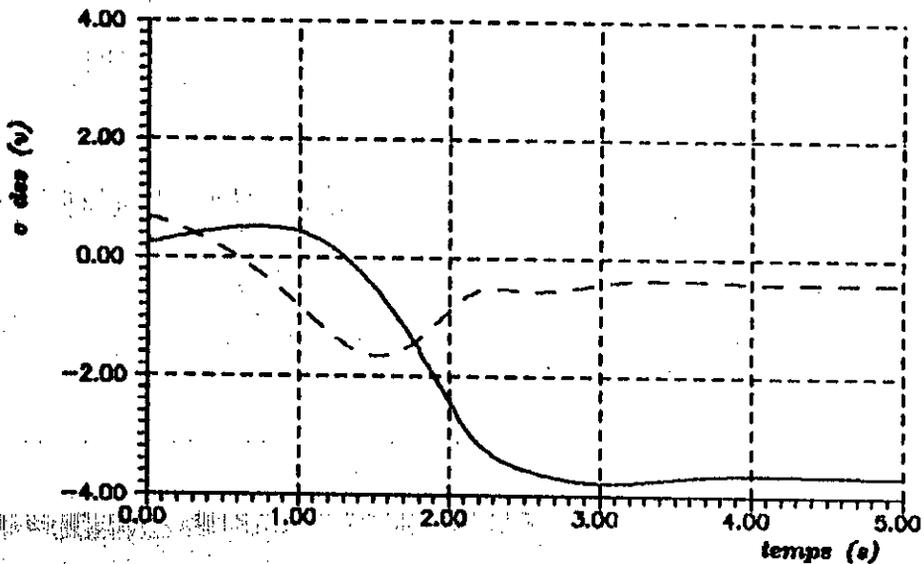
COMMANDES : Par placement de poles

BR 2



PLACEMENT DE POLES

Avec l'introduction de $m_e = 1 \text{ Kg}$



COMMANDES : Par placement de poles

BR 2 avec introduction de $M_e = 1 \text{ Kg}$

$$P_1 = I_3$$

$$P_2 = \text{diag} [-0.03 \quad -0.03 \quad -0.03 \quad 1]$$

$$P_3 = \text{diag} [0.08 \quad 0.14 \quad 0.30 \quad 1]$$

et

$$Q_1 = \text{diag} [0.2 \quad 0.30 \quad 0.50 \quad 1]$$

$$Q_2 = \text{diag} [-0.01 \quad -0.01 \quad -0.089 \quad 1]$$

Test d'asservissement :

Sur la figure () on constate que la première et la deuxième sortie du bras se stabilisent rapidement, par contre la troisième sortie oscille autour de la référence. Elle est très faiblement amortie.

Etant donné que la stabilité n'est pas assurée, le test de robustesse s'avère inutile dans ce cas.

Reponse indicielle

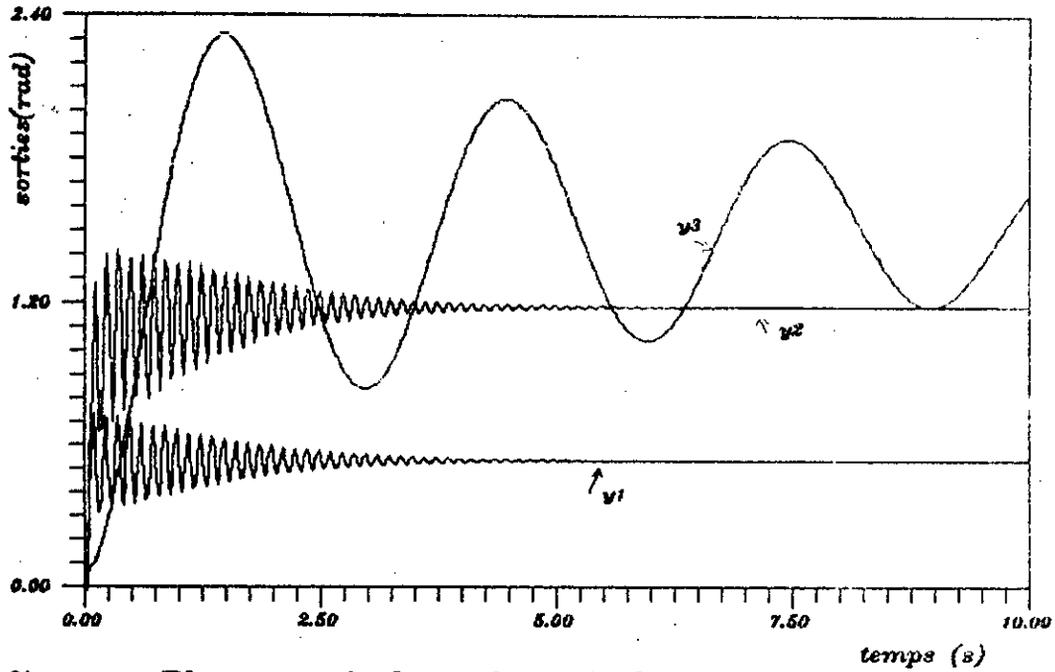


fig : Placement de poles et de zeros
Controlé du bras manipulateur 3DL

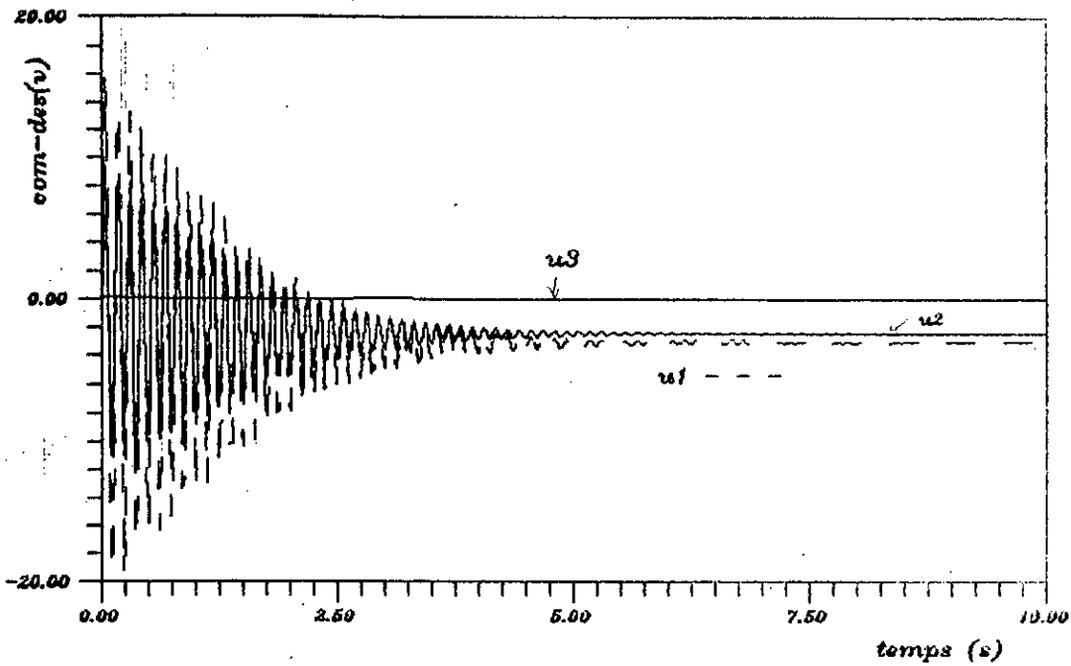


fig : Commandes du bras manipulateur 3DL

CONCLUSION

Cette étude nous a permis de mettre en évidence les avantages des contrôleurs adaptatifs appliqués aux systèmes linéaires et aux systèmes non linéaires là où les correcteurs (P I D) ne sont pas efficaces.

Compte tenu des résultats obtenus en simulation, dans la première partie, on peut dire que le MCS et le MRAC donnent de très bons résultats, pour un choix adéquat de la période d'échantillonnage, des gains α et β et du paramètre Q du contrôleur, sauf que:

Pour l'implémentation de l'algorithme du MRAC, le développement d'un modèle linéarisé du système est nécessaire pour pouvoir calculer les gains statiques, par contre l'algorithme du MCS, qui représente une extension considérable du MRAC, peut être implémenté connaissant uniquement le degré du système et le nombre de ses entrées et de ses sorties.

L'algorithme du MCS relaxe la condition de positivité sur le bloc linéaire imposé par l'algorithme du MRAC; puisque la matrice du compensateur linéaire existe toujours.

Concernant la deuxième partie, un choix adéquat des pôles et des zéros à imposer au système en boucle fermée ainsi que le choix de l'observateur influe directement sur les performances obtenues. Pour le régulateur auto-ajustable à placement de pôles et de zéros la stabilité de l'algorithme est assurée par la convergence des paramètres estimés vers les paramètres réels du système.

En conclusion générale, on peut dire que le MCS est le mieux adapté pour le contrôle des systèmes MIMO non linéaire de par sa simplicité de mise en oeuvre et sa robustesse.

D'autres perspectives peuvent être envisagées telle que la recherche d'algorithmes plus généraux de contrôleurs nécessitant un minimum d'information.

ANNEXE "A"

RESOLUTION DE L'INTEGRALE DE POPOV

L'élaboration de l'algorithme de commande par modèle de référence basé sur le concept d'hyperstabilité nécessite le choix des matrices $Q_1(v, \tau, t)$, $Q_2(v, \tau, t)$ ainsi que les matrices $\Psi_1(v, \tau, t)$, $\Psi_2(v, \tau, t)$ voir chapitre .

Le but de cet annexe consiste à donner une famille de matrices, Q_1 et Q_2 , qui satisfassent l'inégalité de Popov.

$$\eta(0, t) = \int_0^t v^T w dt \geq -\gamma_0^2 ; \quad \gamma_0 > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (A.1)$$

où

$v(t)$: est l'entrée du bloc non linéaire.

$w(t)$: est la sortie du bloc non linéaire décrite par :

$$w(t) = \left[\int_0^t Q_1(v, \tau, t) d\tau + Q_2(v, t) + A_0 \right] y(t) \quad (A.2)$$

Si on remplace $w(t)$ dans (A1) par sa valeur ci-dessus on obtient :

$$\eta(0, t) = \int_0^t v^T \left[\int_0^t Q_1(v, \tau, t) d\tau + Q_2(v, t) + A_0 \right] y(t) dt \quad (A.3)$$

Une condition suffisante pour que l'inégalité (A.3) soit satisfaite est que :

$$\eta_1(0, t) = \int_0^t v^T \left[\int_0^t Q_1(v, \tau, t) d\tau + A_0 \right] y(t) dt \geq -\gamma_0^2 \quad (A.4)$$

$$\eta_2(0, t) = \int_0^t v^T Q_2(v, t) y(t) dt \geq -\gamma_2^2 \quad (A.5)$$

$$\text{avec } \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_0^2 \quad (A.6)$$

Solution de la première intégrale.

Le membre gauche de l'inégalité (A.4) peut s'écrire :

$$\eta_1(0, t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t v^T y_j \left[\int_0^t Q_1^j(v, \tau, t) d\tau + A_0^j \right] dt \quad (A.7)$$

où Q et A des vecteurs colonnes des matrices Q et A .

Si on choisit :

$$Q_1^{ij} = \alpha_{ij} v_i y_j \quad (A.8)$$

(A.7) s'écrira :

$$\kappa_1(0, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^t v_i y_j \left[\int_0^t \alpha_{ij} v_j d\tau + A_0^{ij} \right] dt \quad (A.9)$$

$$= \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} \int_0^t v_i y_j \left[\int_0^t v_i y_j d\tau + A_0^{ij} / \alpha_{ij} \right] dt \quad (A.10)$$

Posons

$$f' = v_i y_j \quad (A.11)$$

$$f = \int_0^t v_i y_j d\tau + A_0^{ij} / \alpha_{ij} \quad (A.12)$$

ou utilisons la propriété de l'intégrale :

$$\int_{t_0}^{t_1} k f f' dt \geq -k f^2(t_0) / 2 \quad (A.13)$$

on déduit que

$$\kappa_1(0, t) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij} \int_0^{t_1} v_i y_j \left[\int_0^t v_i y_j d\tau + A_0^{ij} / \alpha_{ij} \right] dt \quad (A.14)$$

est toujours satisfaite.

. Solution de la deuxième intégrale :

Le membre gauche de l'inégalité (A.5) peut s'écrire

$$\kappa_2(0, t) = \sum_{j=1}^N \int_0^t v^T y_j \Phi_2^j(v, t) dt \quad (A.15)$$

ou $Q^j(vt)$ représente un vecteur colonne de la matrice $Q(vt)$:

Si on choisit

$$\Phi_{ij}(v, t) = \beta_{ij} v_i y_j \quad (A.16)$$

où β une constante positive ou nulle.

l'équation (A.15) s'écrira :

$$\kappa_2(0, t) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int_0^t v_i y_j \beta_{ij} v_i y_j dt = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \int_0^t \beta_{ij} v_i^2 y_j^2 dt \geq -\gamma_2^2 \quad (A.17)$$

on déduit que l'intégrale (A.17) est toujours satisfaite.

Conclusion :

En choisissant :

$$\Phi_1(v, \tau, t) = \int_0^t \alpha v(\tau) y(\tau) d\tau \quad (A.18) ; \quad : \text{matrice strictement positive.}$$

$$\Phi_2(v, t) = \beta v(t) \cdot y(t) \quad (A.19) ; \quad : \text{matrice positive ou nulle.}$$

L'inégalité de Popov donnée par (A.3) est satisfaite quelque soit

$Y(t), V(t), A_0$.

ANNEXE "B"

DISCRETISATION

I/ DISCRETISATION DE L'EQUATION DE L'ETAT :

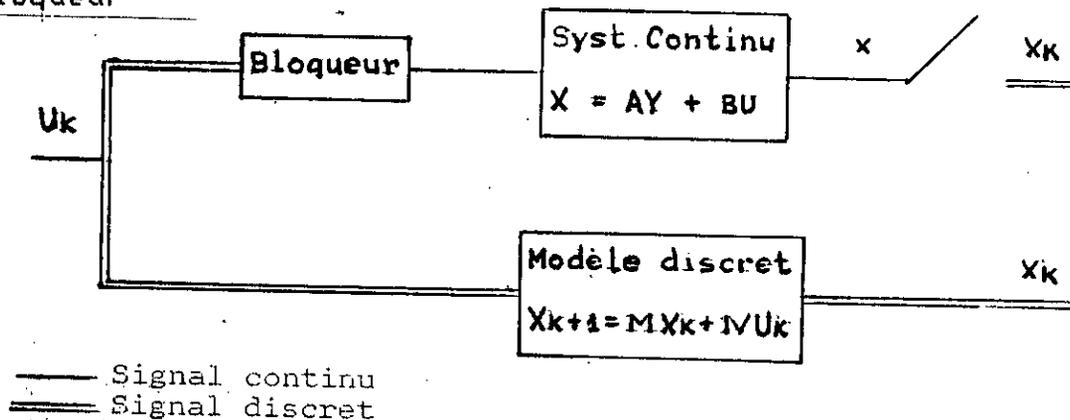
Le problème de la discrétisation d'une équation d'état continue :

$$\dot{X} = AX + BU \quad (B.1)$$

consistera à chercher un modèle discret

$$\dot{X}_{k+1} = MX_k + NU_k \quad (B.2)$$

tel que, si on fait agir une entrée discrète U_k sur celui-ci, le vecteur d'état discret X prend, à tout instant d'échantillonnage, les mêmes valeurs que le vecteur d'état continu X du système soumis à cette même entrée par l'intermédiaire d'un bloqueur



Le problème est donc chercher comment relier M et N à A et B .

Cette question peut être résolue par une intégration discrète de l'équation d'état continue.

Intégration discrète de l'équation d'état continue.

On sait que l'équation intégrale de l'équation (B.1) pour des conditions initiales X est, d'une manière générale :

$$\phi(t_1, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t-z) B U(z) dz \quad (B.3)$$

où

Φ est la matrice de transition qui, pour les systèmes invariants, est une fonction exponentielle $e^{A(T-d)}$

En convenant de prendre $t = 0$ (ce qui ne change rien à la généralité du problème et simplifie les écritures)

on a donc, aux instants

$$x_k = x[kT] = e^{AkT} x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B U(\tau) d\tau$$

$$x_{k+1} = x[(k+1)T] = e^{A(k+1)T} x_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]} B U(\tau) d\tau$$

$$x_{k+1} = e^{AT} \left[e^{AkT} x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)} B U(\tau) d\tau \right. \\ \left. + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT-\tau)} B U(\tau) d\tau \right]$$

on reconnaît dans les deux premiers termes à l'intérieur du crochet de l'expression de x_k .

Il résulte que :

$$x_{k+1} = e^{A \cdot d} x_k + e^{Ad} \int_{k_d}^{(k+1)d} e^{A(kT-\tau)} B U(\tau) d\tau$$

par identification on déduit que :

$$M = e^{Ad} \tag{B.4}$$

$$dP U_k = e^{Ad} \int_{k_d}^{(k+1)d} e^{A(kT-\tau)} B(\tau) d\tau$$

Si l'expression de M peut se calculer indépendamment de toute hypothèse sur la nature du bloqueur utilisé on voit par contre que la détermination de M nécessite des hypothèses sur le bloqueur.

* Cas du bloqueur d'ordre 0 :

Si on utilise un bloqueur d'ordre 0, la commande $U(t)$ dans l'intervalle $k, (k+1)$ est constante, égale à la valeur U_k prise au début de la période d'échantillonnage.

alors on a :

$$dP U_k = \int_{kT}^{(k+1)d} e^{A[(k+1)d-\tau]} B d\tau U_k$$

en faisant un changement de variable :

$$v = (k+1)d - \tau$$

on a
$$N = \int_0^T e^{Av} dv \cdot B \quad (B.5)$$

Remarque :

Si la matrice A est non singulière on peut écrire d'une manière explicite

$$N = A^{-1} [e^{Ad} - I] B \quad (B.6)$$

Si on fait un développement limité d'ordre 1 de e^{Ad} :

$$M \triangleq (I + dA)$$

$$N \triangleq dB \quad (B.7)$$

$$X(k+1) = (I + dA)X(k) + dB U(k) \quad (B.8)$$

II/ DISCRETISATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT :

1) Sachant que p est l'inverse d'une intégration, les différentes approximations discrètes d'une intégration fournissent autant de façons de remplacer l'opérateur p par un "équivalent" en z.

- l'approximation rectangulaire conduit à :

remplacer p par

$$\frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$$

- l'approximation trapézoïdale conduit à :

remplacer p par

$$\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

- l'approximation de Simpson conduit à :

remplacer p par

$$\frac{3}{T} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 4z + 1}$$

a) Technique heuristique :

Cette méthode classique consiste à remplacer non seulement les pôles mais également les zéros, par leur équivalent échantillonné, on remplace ainsi les pôles par e^{-TP}

Les zéros par e^{-TP} en complétant éventuellement le numérateur par un nombre convenable de zéros au point $(0, -1)$ afin que le degré du numérateur en z soit inférieur d'une unité au plus à celui du dénominateur.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C GILLE : Introduction aux systèmes asservis non linéaires
Ed DUNOD, 1977.
- [2] TSYPKIN : 'Adaptation and learning in automatic systems'
Academic press, 1971.
- [3] POPOV : 'Hyperstabilité des systèmes automatiques'
Ed DUNOD, 1971, P-174 - 389.
- [4] CHRISTIAN Melin : 'Structures de commande adaptatives' ;
R 7426, Technique de l'ingénieur, 4 1988, P 1 - 13.
- [5] YOAND LANDAU : 'Adaptative control "The model reference
approach "(NEW YORK: Marcel Dekker), 1979.
- [6] I. BAR-KANA , H. KAUFMAN : ' Some applications of direct
adaptative controle to large structural systems ',
IEE, AC, vol 7 N°6 , Dec 1984, P 717 - 724.
- [7] I. BAR-KANA , H. KAUFMAN : ' Robust simplified adaptative
controle for a class of multivariable continous-time
systems' IEEE proceeding, Dec 1985, P 141 - 145.
- [8] X. XIANYA , R.J EVANS: 'Adaptative controle of discrete
time ,Time-varying systems with unknow deterministic
distrubances ', IEEE ,Vol 131 N°3, May 1984, P 81 - 84.
- [9] SHANKAR SASTRY , M. BODSON : 'Adaptative control stabilite
convergence and robustness', Prentice-Hall Inc, 1989.
- [10] C.FOULARD: 'Commande et régulation par calculateur
numérique', Ed EYROLLES, 1979.

- [11] D.P STOTEN , H BENCHOUBANE : 'Empirical studies of minimal controller synthesis algorithm', INT.j.control, 1990, P 824 - 849.
- [12] D.P STOTEN : ' Generalized manipulator dynamics,with regard to model reference adaptative control', INT.j.control Vol 50 N°6, 1989, P 2249 - 2268.
- [13] D.P STOTEN , H BENCHOUBANE : 'Robustness of minimal controller synthesis algorithm ', INT.j.control,Vol 51 N°4, 1990, P 851 - 861.
- [14] K.J ASTROM, B WITTENMARK : 'On self tuning regulator ' Automatic, 9, 1973, P 185 - 189.
- [15] C FARGEON : 'Commande numérique des systemes ',Ed MASSON 1986 .
- [16] K J ASTROM , B WITTENMARK: 'Compter controlled systems' P-HALL, 1986 .
- [17] KJ ASTROM, G WESTRBERG, B WITTENMARK : 'Self tuning controllers based on pole placement design' ,Dept. of Aut. Cont, May 1978, P 1 - 21.
- [18] S.C PUTHENPURA, J.F MACGREGOR : 'Pole-zero placement controllers and self-tuning regulators with better set-point tracking ', IEE Proceeding, Vol 134 N°1, Jan 1987, P 26 - 30.
- [19] N. E.MENSOUR, D A. LINKENS: 'Self tuning pole placement multivariable control of brood pressure for post operative, amodel based study', IEE Proceedings,Vol 137 N°1, Jan 1990, P 13 - 29.
- [20] Lei Guo, Member, and Han-Fu Chen: 'The Aström-Wettenmark Self-Tuning Regulator Revisited and ELS-Based Adaptative Tracker', IEEE Transaction on automatic control,vol 2, N° 7, july 1991, P 802 - 804.