

UNIVERSITE D'ALGER

5/77

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

DEPARTEMENT GENIE - MECANIQUE

Avec

PROJET DE FIN D'ETUDES

POMPE A PISTON DUPLEIX

$Q_v = 60 \text{ l/mn}$

Pression de refoulement : 700 bars

2 PLANS

Proposé et dirigé par :

I. TUDOR

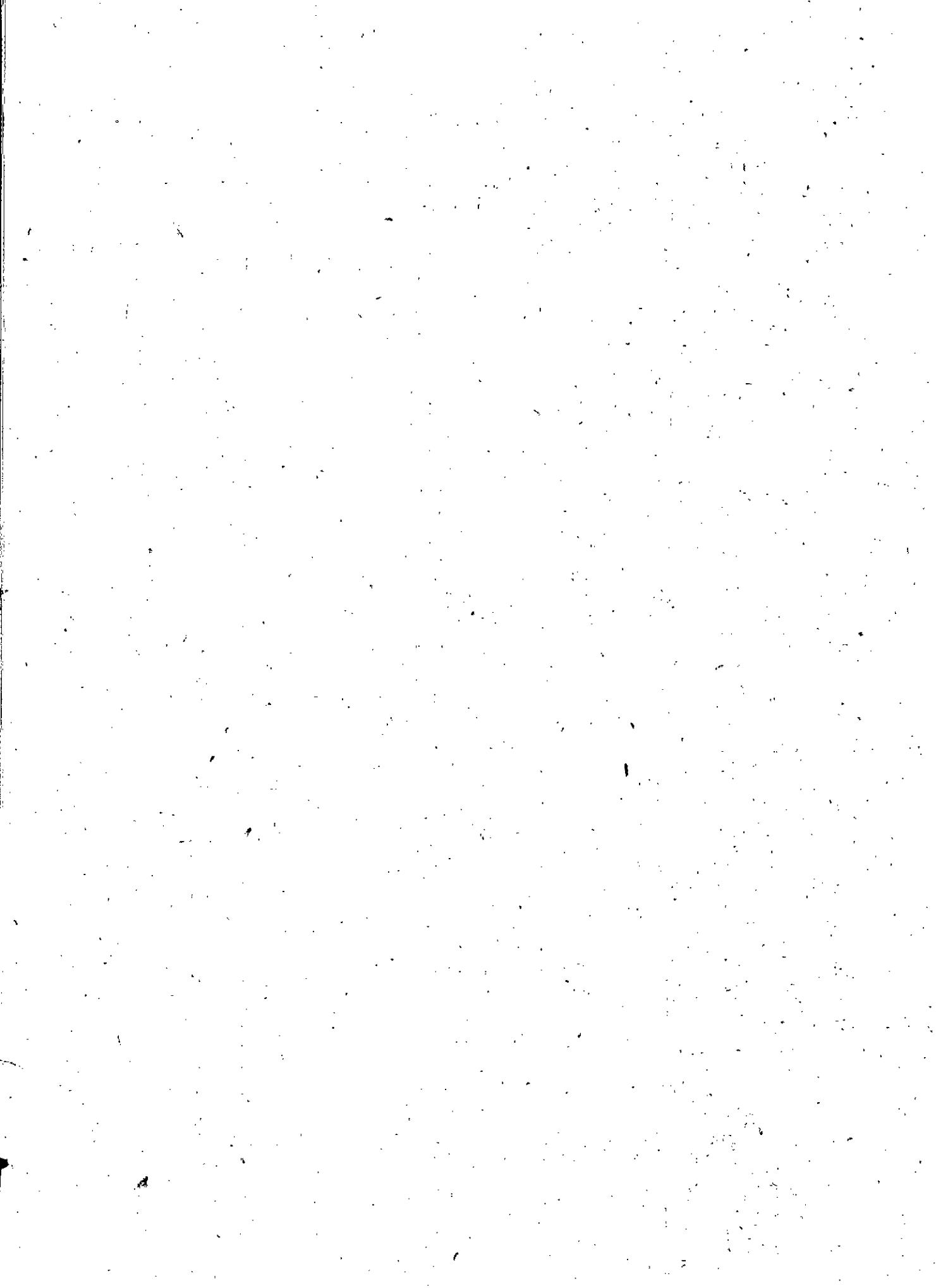
- Docteur Ingénieur

- Professeur à l'E.N.P.A.

Etudié par :

A. BOUZIANE

Promotion : Juin 1977



UNIVERSITE D'ALGER
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
DEPARTEMENT GENIE - MECANIQUE

PROJET DE FIN D'ETUDES

POMPE A PISTON DUPLEIX
 $Q_v = 60 \text{ l/mn}$
Pression de refoulement : 700 bars

Proposé et dirigé par :

I. TUDOR

- Docteur Ingénieur

- Professeur à l'E.N.P.A.

Etudié par :

A. BOUZIANE

Promotion : Juin 1977

TABLE DES MATIERES

	Pages.
- Introduction	2
- Fonctionnement	3
- Dimensions et caractéristiques de la pompe.	4 - 11.
Etude mécanique du système bielle-manivelle	12
1 ^o) Mouvement du pied de bielle.	
2 ^o) Etude algébrique	
1.1.1 Loi des espaces	
1.1.2. Loi des vitesses	
1.1.3 loi des accélérations	
1.2 Etude graphique	16
1.2.1 Diagramme des espaces	
1.2.2 Diagramme des vitesses	
1.2.3 Diagramme des accélérations	
1.2.4 valeur de la vitesse	19
1.2.5. Calcul des valeurs maxima de l'accélération.	
2 ^o) Etude du mouvement oscillatoire de la bielle	23
2.1 Loi de variation de β .	
2.2. loi des vitesses	
2.3. loi des accélérations	
Etude dynamique:	26-38
- Système bielle manivelle immobile	28-32
- Système bielle manivelle en mouvement	32. 38.
- Calcul des bielles	38-44
- Tableaux et graphes des efforts mis en jeu	44. 49
- Reducteur : roue et pignon.	49. 56
- Calcul des dentures	56-61
- Recherche du couple moyen résultant	61-63.
- Calcul des arbras	71-74
- Calcul de la clavette utilisée au pied de bielle	75
- Epaisseur des bielles (à la tête et au pied).	76
- Graissage	77
- Bibliographie	78.

REMERCIEMENT.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude,
à monsieur TUDOR qui a dirigé mon
travail et m'a beaucoup aidé par ses
Conseils précieux.

Aussi je n'oublie pas de remercier tous
les professeurs qui ont contribué à ma
formation, ainsi que les personnes qui
de près ou de loin ont contribué à
l'élaboration de ce projet.

Je n'oublie pas aussi mes camarades
en particulier ceux de ma promotion.

BOUZIANE Ahmed.

-INTRODUCTION-

- Les pompes sont des appareils destinées à la manutention des liquides ou à une transmission d'énergie par ces mêmes liquides ; ils agissent par variation de vitesse ou de volume.
- Le fluide déplacé est pratiquement incompressible aux pressions moyennes.
- Ces appareils conviennent pour faibles débits, fortes et moyennes pressions (2 à 1000 bars) et pour liquides pouvant être brassés sans inconvenients.
(Dans notre cas ; Le fluide est l'eau).
- Une telle pompe est utilisée pour des opérations d'injection :
 - d'eau
 - de matériau plastique
 - de ciment
- On l'utilise aussi dans le domaine pétrolier, notamment dans les stations de forage, son objectif est d'amener le fluide sous pression, à des profondeurs tel que le trepan, instrument de forage, puisse être constamment lavé, (lubrifié) faute de quoi, Les dents du trepan seront bouchées et par conséquent le trepan ne pourra plus remplir sa fonction.

FONCTIONNEMENT

C'est une pompe à deux pistons pleins et à simple effet. Elle est dite à simple effet, car chacun des deux pistons n'a qu'une seule face active.

Chaque piston décrit un mouvement alternatif dans son cylindre ; il est relié au coulisseau (servant comme mécanisme de commande de bielle-manivelle).

Chaque face inactive communique d'une manière permanente avec l'atmosphère.

- Les deux pistons sont disposés tel que, lorsque l'un d'eux aspire, l'autre refoule.
- À l'aspiration, il en résulte une dépression dans le cylindre, ce qui entraîne une ouverture de la soupape d'aspiration ; et l'inverse se produit en même temps dans l'autre cylindre, c'est à dire que la pression augmente, de sorte que la soupape de refoulement s'ouvre et l'eau s'écoule dans le tuyau de refoulement.
- La pompe est entraînée par un moteur électrique.
- La transmission est assurée par courroie et engrenage.

DIMENSIONS ET CARACTERISTIQUES DE LA POMPE.

- Phase : aspiration :

la soupape d'aspiration est ouverte et le volume du liquide admis dans le corps de pompe est égal au volume engendré par le piston:

$$V = S_p \cdot C \quad (m^3)$$

V : volume engendré.

S_p : section du piston.

C : course du piston.

- Phase : refoulement :

Le volume de liquide transvasé dans la conduite de refoulement est encore :

$$V = S_p \cdot C \quad (m^3)$$

- Débit volumique théorique.

Si la manivelle tourne à n tr/mn, le volume aspiré ou refoulé par minute est :

$$q_v = \frac{n}{60} \cdot V \quad (m^3/s)$$

- Débit massique théorique.

$$q_m = \rho \cdot \frac{n}{60} \cdot V \quad (kg/s)$$

ρ (kg/m³) : masse volumique du liquide.

Dans notre cas; c'est de l'eau: $\rho = 10^3$ kg/m³.

- vitesse moyenne du piston:

$$C_m = \frac{n.c}{30} \text{ (m/s)}$$

Les valeurs normales sont convenant aux moyens ou faibles débits sont de : 60 à 150 tr/mn.

Dans notre cas le débit est de 60 l/mn.

On prend $n_c = 60$ tr/mn.

Introduisons le rapport $\frac{c}{D}$ dans l'équation du débit volumique théorique : $q_v = \frac{n}{60} \cdot S \cdot c$; où

c : course du piston

D : diamètre du piston.

$$q_v = \frac{n}{60} \cdot S \cdot c$$

$$q_v = \frac{n}{60} \cdot \pi \frac{D^2}{4} \cdot c$$

$$\text{où } S = \pi \frac{D^2}{4} = S_p$$

le produit $S \cdot c$ a donc une valeur imposée.

Comme notre pression de refoulement est élevée, on choisit une pompe qui a une course élevée, d'où une section faible du piston (en restant toujours dans des limites acceptables) et le rapport $\frac{c}{D}$ varie de 1,2 à 2 pour le calcul on prend $\frac{c}{D} = 2$ approximativement.

Problème de la pompe réelle

Nous considérons la pompe seule, à l'entrée et à la sortie.

Par suite de l'imperfection de la pompe, en particulier dans le fonctionnement des soupapes, la masse de fluide de 1kg reçoit une quantité de travail $W(J/kg)$ plus grande que celle du travail utile Wh . D'où le rendement hydraulique ou manométrique de la pompe:

$$\eta_h = \frac{Wh}{W}$$

η_h a une valeur en général plus élevée que celle des pompes centrifuges : 0,95 à 0,98 si la pompe est bien troquée.

Dans notre cas, on prend: $\eta_h = 0,95$.

- Il faut également faire état d'un rendement volumétrique

$$\eta_v = \frac{\text{Débit réel de la pompe}}{\text{Débit théorique de la pompe}}$$

La soupape de refoulement ne se ferme pas instantanément lorsque le piston est à son point mort haut; il s'en suit qu'une certaine quantité de fluide, d'abord refoulée et ayant reçu du travail, retourne dans le corps de pompe.

Le choix de η_v dépend de la vitesse moyenne du piston. D'après un pré-calcul du diamètre et de la course du piston, la vitesse moyenne du piston est au plus égale à 0,3 m/s (qui est une valeur faible).

D'où $\eta_v = 0,97$ (valeur qui convient pour cette vitesse).

- Calcul du diamètre du piston.

soit q'_v : le débit volumique réel

$$q'_v = 60 \text{ l/mn} = 10^{-3} (\text{m}^3/\text{s}) \quad (\text{donnée}).$$

$$\eta_v = \frac{q'_v}{q_v} \Rightarrow q_v = \frac{q'_v}{\eta_v} = \frac{10^{-3}}{0,97} (\text{m}^3/\text{s})$$

Comme on a deux (2) pistons \Rightarrow

$$\frac{q_v}{2} = \frac{q'_v}{2 \eta_v} = \frac{n}{60} \cdot V = \frac{n}{60} \cdot \pi \frac{D^2}{4} \cdot C = \frac{n}{60} \cdot \pi \frac{D^2}{4} \cdot 2D$$

$$\text{d'où} \quad q'_v = 2 \eta_v \cdot \frac{n}{60} \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot 2D = \eta_v \cdot \frac{n}{60} \pi D^3$$

$$D^3 = \frac{60 q'_v}{\eta_v n \pi} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{0,97 \cdot 60 \cdot \pi} \Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{10^{-3}}{0,97 \cdot \pi}}$$

$$D = 68,975 \text{ mm} ; \quad \text{On prend:}$$

$$D = 70 \text{ mm}$$

- Calcul de la course du piston.

$$S = S_p = \pi \frac{D^2}{4} \quad (\text{section du piston}).$$

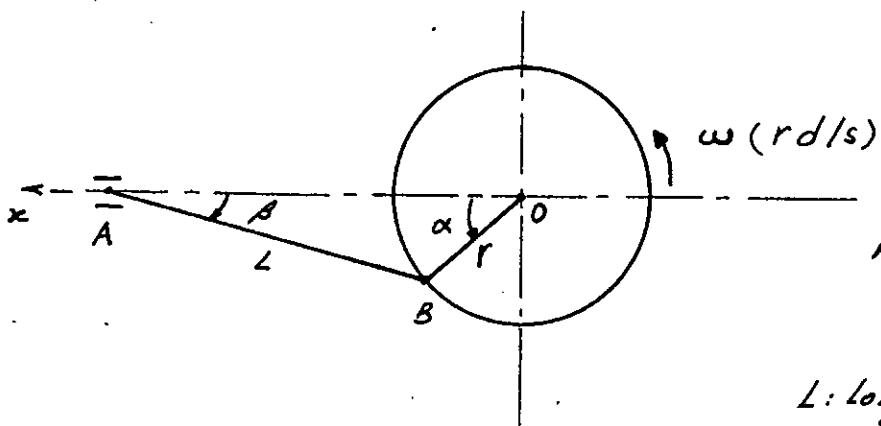
$$\text{or} \quad \frac{q_v}{2} = \frac{n}{60} \cdot S \cdot C = \frac{q'_v}{2 \eta_v} \Rightarrow C = \frac{60 q'_v}{n \cdot S \cdot 2 \eta_v}$$

$$C = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{60 \cdot \pi \frac{0,07^2}{4} \cdot 2 \cdot 0,97} = 0,13394 \text{ m}$$

On prend

$$C = 134 \text{ mm.}$$

- Courbe de débit de notre pompe.



r: rayon de la manivelle

$$r = \frac{c}{2} = \frac{134}{2} = 67 \text{ mm}$$

L: longueur de la bielle.

vitesse du piston: $C_p = \frac{dx}{dt}$ en fonction de l'angle α de la manivelle.

le débit instantané de la pompe est donc:

$$q_v = S_p \cdot C_p = S_p \cdot \frac{dx}{dt}$$

pour simplifier le calcul, on considère la bielle infinie

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \alpha \quad \text{d'où}$$

$$q_v = -S_p \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \alpha$$

La refoulement se produit, pour α variant de $0 \rightarrow \pi$ pour un piston et de $\pi \rightarrow 2\pi$ pour l'autre.

D'où La Courbe de débit par tour de l'arbre :

Valeurs de q_v de $0 \rightarrow \pi/2$ (tous les 15°).

$$\alpha = 15^\circ$$

$$q_v = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$q_v = 0,81 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$q_v = 1,146 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$q_v = 1,403 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 75^\circ$$

$$q_v = 1,565 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\alpha = 90^\circ$$

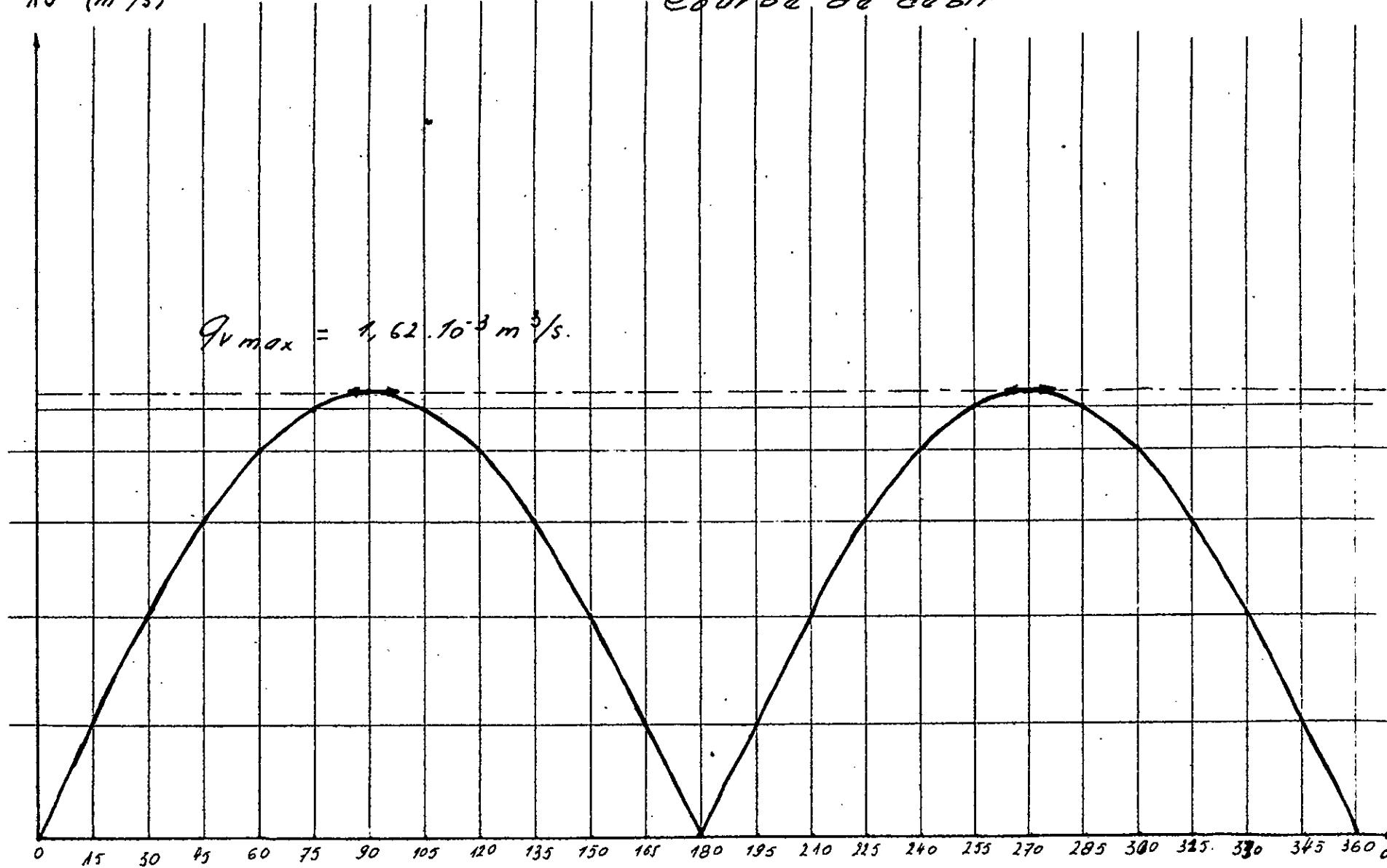
$$q_v = 1,62 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

pour $\alpha = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow q_v = 0$.

$10^{-3} (m^3/s)$

Courbe de débit

$$Q_{v \max} = 1,62 \cdot 10^{-3} m^3/s.$$



Remarque. L'écoulement dans les conduites est intermittent; pour un piston, le fluide s'écoule dans la conduite d'aspiration par exemple durant un demi-tour par tour de la manivelle.

On sait calculer la vitesse instantanée du piston:

$C_p = \frac{dx}{dt}$; en fonction de l'angle α décris par la manivelle; la vitesse C_a dans la conduite d'aspiration est liée à tout instant à la vitesse du piston par l'équation de Continuité:

$$S_p \cdot C_p = S_a \cdot C_a$$

Pour simplifier le problème nous allons supposer que le piston se déplace à la vitesse moyenne:

$$C_m = \frac{nC}{30} \text{ (m/s)}$$

d'où : $S_p \cdot C_m = S_a \cdot C_a$.

$$\Rightarrow S_a = S_p \cdot \frac{C_m}{C_a}$$

On applique le même raisonnement pour la conduite de refoulement \Rightarrow

$$S_r = S_p \cdot \frac{C_m}{C_r}$$

Les valeurs couramment adoptées sont:

- Conduite d'aspiration : $C_a = 0,8 \text{ à } 1,2 \text{ m/s}$
- Conduite de refoulement : $C_r = 1 \text{ à } 3 \text{ m/s}$.

Dans notre cas ; on prend :

$$C_a = 0,2 \text{ m/s et } C_r = 0,4 \text{ m/s.}$$

- Conduite d'aspiration.

$$S_o = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{H_C}{30} \cdot \frac{1}{C_o} = \frac{\pi d_o^2}{4}$$

$$d_o = D \sqrt{\frac{60.0,134}{30.0,2}} \Rightarrow d_o = 81 \text{ mm}$$

- Conduite de refoulement

$$d_r = D \sqrt{\frac{60.0,134}{30.0,4}} \Rightarrow d_r = 57 \text{ mm.}$$

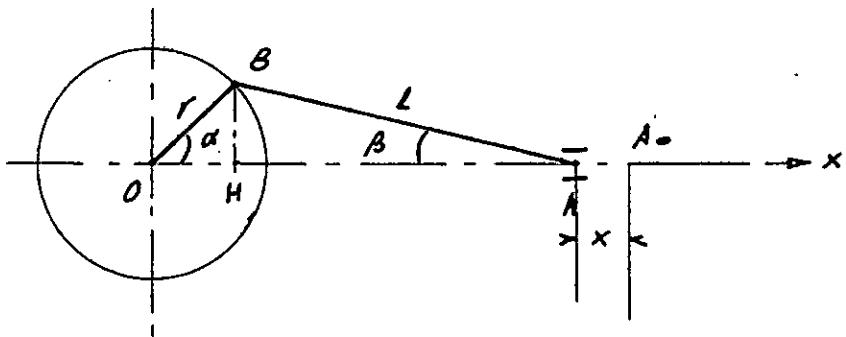
ETUDE MECANIQUE DU SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

Première partie: Etude Cinématique.

1^o/ Mouvement du pied de bielle (translation)

1.1. Etude algébrique.

1.1.1 Loi des espaces.



$$x = \overline{AoA} \quad \text{Ao: position du point mort haut. (P.M.H.)}$$

$$x = \overline{AO} + \overline{OH} + \overline{HA} = \overline{AoA}$$

$$x = -R - L + r \cos \alpha + l \cos \beta \quad \text{faisons}$$

Le mouvement étant symétrique, nous l'étudierons

pour $0 < \alpha < \pi \Leftrightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

Posons $m = \frac{r}{L}$ où r : rayon de la manivelle
 L : longueur de la bielle.

D'après la figure ci-dessus, on a:

$$\sin \alpha = \frac{BH}{r} \text{ et } \sin \beta = \frac{BH}{L}$$

d'où

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \sin \alpha = m \sin \alpha$$

On sait que : $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}$
 remplaçons $\sin \beta$ par $m \sin \alpha$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \alpha}$$

Après avoir développé, on aura :

$$\cos \beta = 1 - \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{2} - \frac{m^4}{8} \sin^4 \alpha \dots$$

$$\text{or } m = \frac{r}{L} \quad \text{où } 2r = 0, 134 \text{ m} = 134 \text{ mm} \\ \text{et } L = 0,8 \text{ m} = 800 \text{ mm}$$

$$m = \frac{134}{2800} \Rightarrow \frac{m^4}{8} = \frac{1}{8} \left(\frac{134}{2800} \right)^4 \approx \frac{10 \cdot 10^{-5}}{2} = 10^{-4},5$$

valeur négligeable et de même pour les valeurs qui viennent après (qui seront d'ailleurs plus petites que celle-ci).

$$\text{d'où } \cos \beta = 1 - \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{2}$$

d'où :

$$x = -r - L + r \cos \alpha + l \left(1 - \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$x = -r - L + r \cos \alpha + l - \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{2}$$

$$x = -r \left(1 - \cos \alpha + \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{2} \right) \quad (1)$$

1.1.2 Loi des vitesses

En dérivant l'expression (1) par rapport au temps, on aura :

$$x' = \frac{dx}{dt} = -r \left(\sin \alpha + 2 \frac{m}{2} \sin \alpha \cos \alpha \right) \frac{d\alpha}{dt}$$

La vitesse de la manivelle est constante

$$\text{d'où } \frac{d\alpha}{dt} = \omega = C \text{ t.c.}$$

d'où

$$x' = -rw \left(\sin \alpha + \frac{m}{2} \sin 2\alpha \right) \quad (2)$$

1.1.3 loi des accélérations.

la dérivée de l'expression (2) par rapport au temps nous donne :

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} = -rw \left(\cos \alpha + \frac{2m}{2} \cos 2\alpha \right) \frac{d\alpha}{dt} .$$

$$x'' = -rw^2 (\cos \alpha + m \cos 2\alpha) \quad (3)$$

l'expression (3) s'annule pour $\cos \alpha + m \cos 2\alpha = 0$
c'est à dire $\cos \alpha + 2m \cos^2 \alpha - m = 0$

$$\text{Car } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\text{On pose } \cos \alpha = t \Rightarrow 2mt^2 + t - m = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(2m \cdot (-m)) = 1 + 8m^2$$

$$t_1 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{4m} = \frac{\sqrt{1+8m^2} - 1}{4m}$$

$$t_1 = \frac{\sqrt{1+8\left(\frac{134}{2800}\right)^2} - 1}{4 \cdot \frac{134}{2800}} \approx 0,083$$

$$t_2 = \frac{-\sqrt{1+8\left(\frac{134}{2800}\right)^2} - 1}{4 \cdot \frac{134}{2800}} \approx -6,053$$

puisque $t = \cos \alpha$; or $|\cos \alpha| \leq 1$

d'où la valeur t_2 ne convient pas.

donc la seule valeur qui convient est :

$$\cos \alpha \approx 0,159 \Rightarrow \alpha = 85,26^\circ$$

ET La 2^e valeur qui annule x'' est

$$\alpha = 360 - 85,26^\circ = 274,74^\circ$$

- Pour ces deux (2) valeurs de α ($85,26^\circ$ et $274,74^\circ$) l'expression (2) de la vitesse présente des extréums.
- Recherche des extréums de l'expression (3)
 $\sin \alpha + 2m \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha (1 + 4m \cos \alpha) = 0$
 $\sin \alpha = 0$ pour $\alpha = 0, \pi$ et 2π .
 $1 + 4m \cos \alpha \neq 0$ quelque soit α
Car $|\cos \alpha| \leq 1$ et $4m < 1$:
 $\Rightarrow \boxed{1 + 4m \cos \alpha > 0}$
- Valeurs des extréums de x'' pour:
 $\alpha = 0 \Rightarrow x'' = -2,87 \text{ m/s}^2$
 $\alpha = \pi \Rightarrow x'' = +2,42 \text{ m/s}^2$
 $\alpha = 2\pi \Rightarrow x'' = -2,87 \text{ m/s}^2$

1.2 Etude graphique.

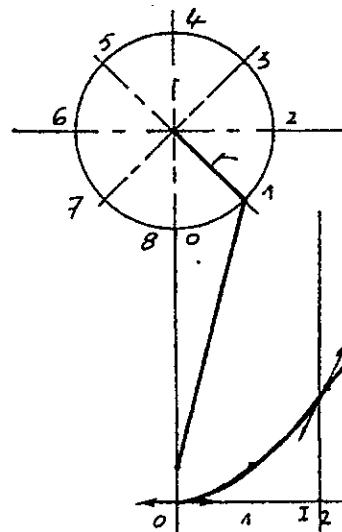
L'étude du mouvement de pied de bielle peut se faire de façon graphique. Pour le tracé du diagramme des espaces : On indique les positions successives de la manivelle et les positions correspondantes du pied de bielle.

D'où le tracé du diagramme des espaces fournissant x en fonction de α . Pour connaître x en fonction du temps t , Il faut $\alpha = f(t)$

On a : $\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \text{Constante}$.

Pour tracer le diagramme des vitesses et celui des accélérations, nous procémons par dérivation graphique.

1.2.1 Diagramme des espaces.

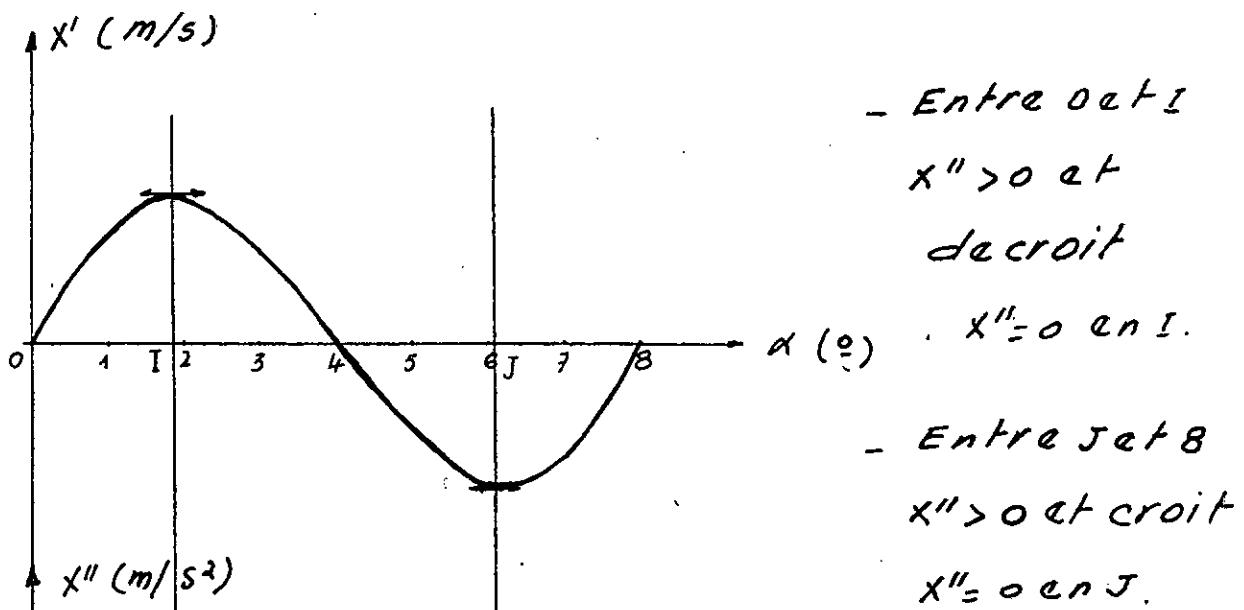


Courbe symétrique présentant 3 points où la tangente est horizontale, donc où la vitesse est nulle.

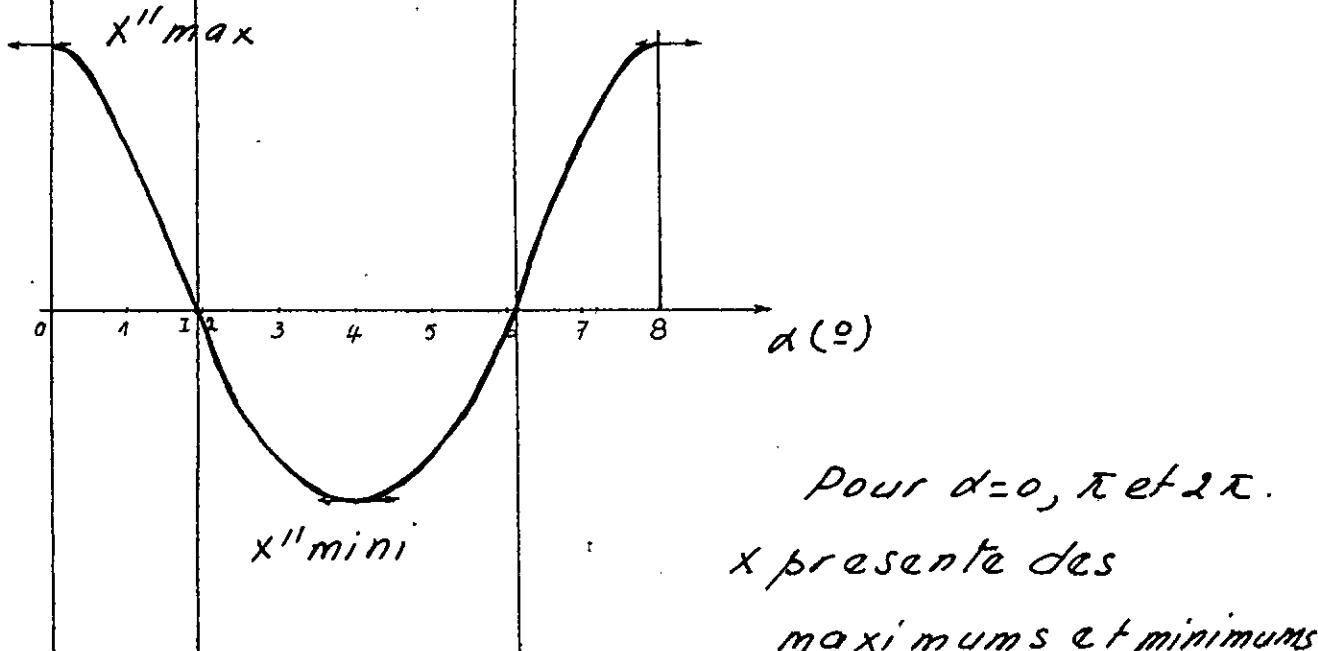
Deux points d'inflexion en I et J correspondant à la vitesse maximale (positive en I, négative en J). entre 0 et I $x' < 0$ et augmente entre I et 4 $x' > 0$ et décroît. en 4; $x' = 0$ puis symétrie.

Le point I correspond à $\alpha = 85,26^\circ$ et J correspond à $\alpha = 274,74^\circ$.

1.2.2 Diagramme des vitesses.

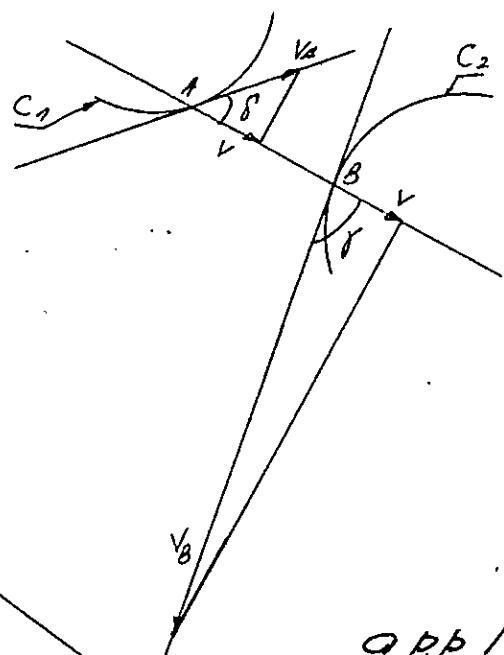


1.2.3 Diagramme des accélérations.



1.2.4. Valeur de la vitesse.

théorème : lorsqu'un segment de droite AB de longueur constante ℓ se déplace, ses deux extrémités décrivant deux courbes fixes C_1 et C_2 , les projections des vecteurs vitesses des extrémités sur AB, à chaque instant ont même valeur.

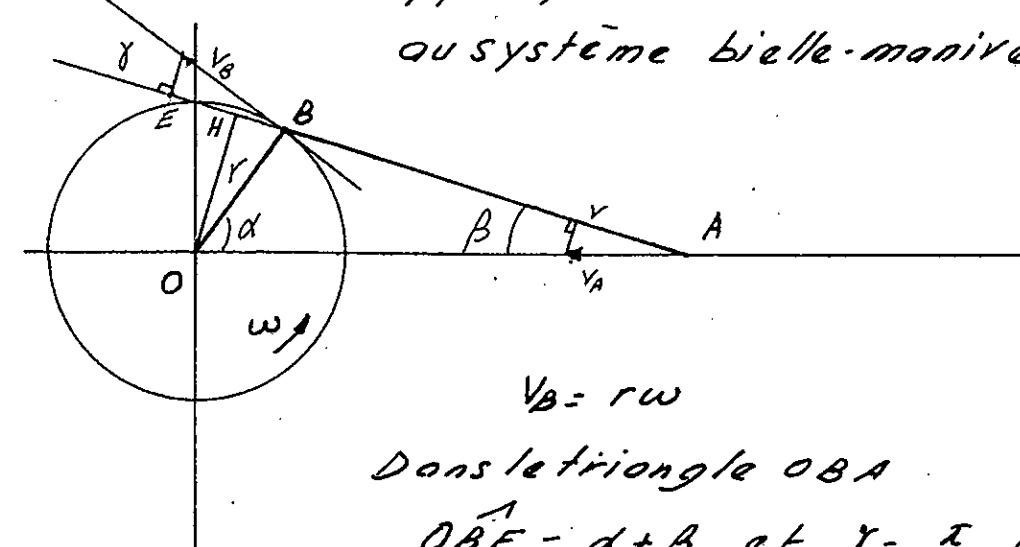


$$\cos \delta = \frac{V}{V_A}$$

$$\cos \delta = \frac{V}{V_B}$$

d'où

$$V_A \cos \delta = V_B \cos \delta$$



$$V_B = r\omega$$

Dans le triangle OBA

$$\hat{OBE} = d + \beta \text{ et } \gamma = \frac{\pi}{2} - (d + \beta)$$

$$V_B \cos \delta = V_A \cos \beta \Rightarrow r \omega \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = V_A \cos \beta.$$

$$\text{or } \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right] = \sin(\alpha + \beta)$$

d'où

$$V_A = r \omega \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

Dans le triangle OBE, on a :

$$\sin \hat{OBE} = \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{et } \sin \hat{OEB} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \cos \beta.$$

$$\text{d'où } \sin(\alpha + \beta) = \frac{OH}{r}$$

$$\sin \hat{OEB} = \frac{OH}{OE} = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \beta \right] = \cos \beta$$

$$\text{donc } r \sin(\alpha + \beta) = OE \cos \beta.$$

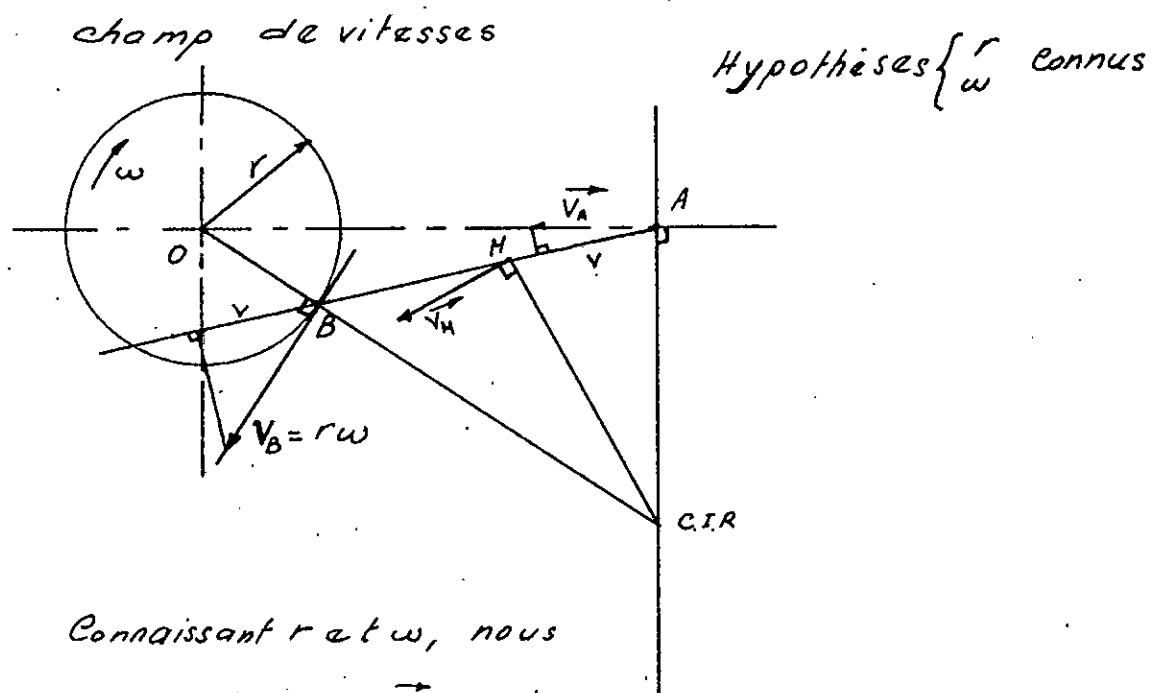
On reporte ces valeurs dans la relation précédente

$$\text{de } V_A : V_A = r \omega \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} = \omega \cdot \frac{OE \cos \beta}{\cos \beta}$$

$$V_A = \omega \cdot OE$$

Cette formule permet un tracé rigoureux du diagramme des vitesses. La vitesse est maximum lorsque la bielle est tangente au coude décrit par le centre du maneton et elle est nulle au point mort haut (P.M.H) et au point mort bas (P.M.B).

- Tracé de la vitesse d'un point quelconque de la bielle.



Connaissant r et ω , nous pouvons tracer \vec{V}_B , puisque $V_B = r\omega$ et que sa direction est perpendiculaire à celle de la manivelle, son sens étant donné par celui de ω .

- Il nous faut connaître le centre instantané de rotation (C.I.R). Connaissant les directions de \vec{V}_B et \vec{V}_A le C.I.R se trouve au point de concours des rayons issus de A et B et perpendiculaires à V_A et V_B . En utilisant la propriété d'équiprojectivité, nous connaissons alors le module de \vec{V}_H .

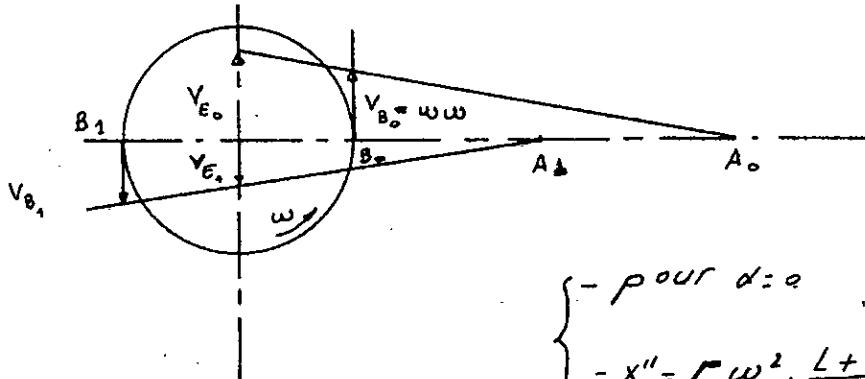
Vitesse d'un point quelconque M: la direction de \vec{V}_M est celle de la perpendiculaire au rayon joignant M au C.I.R et son module est obtenu par équiprojectivité.

1.2.5 Calcul des valeurs maxima de l'accélération.

On a déjà vu que ces valeurs sont obtenues pour:

$$\alpha = 0 \text{ et } \alpha = \pi.$$

$$x'' = \frac{dV_A}{dt} = \omega \cdot \frac{d\overline{OE}}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{d\overline{OE}}{dt} = V_E$$



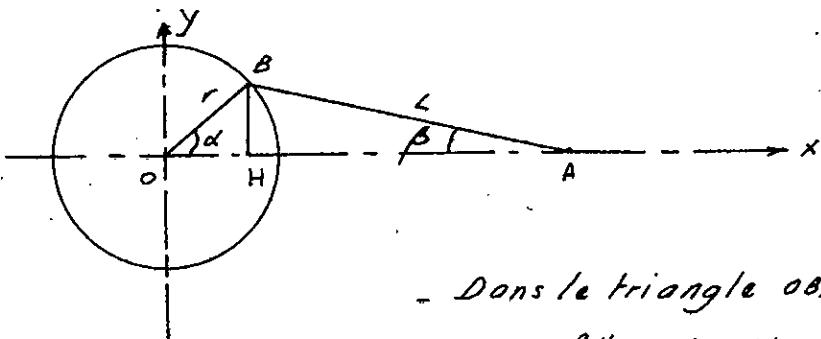
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{- pour } \alpha = 0 \quad \frac{V_E}{V_B} = \frac{r+L}{L} \\ \text{- } x'' = r\omega^2 \cdot \frac{L+r}{L} \end{array} \right.$$

$$\text{- pour } \alpha = \pi \quad \frac{V_E}{V_B} = \frac{L-r}{L}$$

Ces valeurs sont obtenues aussi en faisant
 $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ dans la relation (3) du
 paragraphe 1.1.3.

2. Etude du mouvement oscillatoire de la bielle.

2.1 loi de variation de β .



- Dans le triangle OBA , on a :

$$\sin \alpha = \frac{BH}{r} \text{ et } \sin \beta = \frac{BH}{l}$$

$$\text{d'où } \sin \beta = \frac{l}{r} \sin \alpha = m \sin \alpha \quad (\frac{r}{l} = m).$$

- Pour exprimer que le sens de rotation de OB autour de O et de AB autour de A sont inverses, l'relation précédente s'écrit :

$$\boxed{\sin \beta = -m \sin \alpha.}$$

$$\beta = \text{Arc sin}(-m \sin \alpha).$$

En développant cette expression, on aura :

$$\beta = 1 + \frac{1}{3!} (-m \sin \alpha)^3 + \frac{1}{5!} (-m \sin \alpha)^5 + \dots$$

$$\text{d'autre part: } \sin^3 \alpha = \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \sin \alpha (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$\text{or: } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\text{d'où } \sin^3 \alpha = \sin \alpha \left(1 - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \right)$$

$$\sin^3 \alpha = \sin \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \right)$$

On sait que :

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cos a$$

En faisant la somme membre à membre, on aura :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b.$$

posons : $a = \alpha$ et $b = 2\alpha$.

$$\text{d'où } \sin(a+2\alpha) + \sin(a-2\alpha) = 2 \sin a \cos 2\alpha$$

$$\sin 3\alpha + \sin(-\alpha) = \sin 3\alpha - \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos 2\alpha.$$

$$\text{donc } \cos 2\alpha = \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha}$$

remplaçons cette expression de $\cos 2\alpha$ dans

$$\text{la relation: } \sin^3 \alpha = \sin \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2} \right)$$

$$= \sin \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{\frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{2 \sin \alpha}}{2} \right)$$

$$= \sin \alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{\sin 3\alpha - \sin \alpha}{4 \sin \alpha} \right)$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{\sin 3\alpha}{4} + \frac{\sin \alpha}{4}$$

$$\text{donc } \boxed{\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha}{4} - \frac{\sin 3\alpha}{4}}$$

On procède de la même façon pour $\sin^5 \alpha$

On obtient alors :

$$\boxed{\beta = b_1 \sin \alpha + b_3 \sin 3\alpha + \dots + b_{2p+1} \frac{\sin(2p+1)\alpha}{2p+1} + \dots}$$

$$\text{où } \boxed{b_1 = -m - \frac{m^3}{8} - \frac{3m^5}{64} - \dots}$$

$$\boxed{b_3 = \frac{m^3}{24} + \frac{3m^5}{128} + \dots}$$

$$\boxed{b_5 = -\frac{3m^5}{640} - \dots}$$

$$\text{Comme } m = \frac{r}{l} = \frac{67}{800} \approx 0,084$$

valeur très petite, donc les termes de degré supérieur à m^5 sont négligeables (même à partir de m^3).

2.2 loi des vitesses β'

C'est la dérivée de l'expression de β par rapport au temps.

$$\boxed{\frac{d\beta}{dt} = \omega (b_1 \cos \alpha + 3 b_3 \cos 3\alpha + \dots)}$$

où $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$

Autre expression de β' :

$$\frac{d\beta}{dt} = -m \omega \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \quad \text{mais } m = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

d'où

$$\boxed{\beta' = \omega \frac{\tan \beta}{\tan \alpha}}$$

- Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \beta' = 0$

- Pour $\alpha = 0$ et $\pi \Rightarrow \beta'$ est maximum et vaut $|m\omega|$.

2.3 loi des accélérations β''

C'est la dérivée de l'expression de β' par rapport au temps.

$$\boxed{\frac{d^2\beta}{dt^2} = -\omega^2 (b_1 \sin \alpha + 9 b_3 \sin 3\alpha + \dots)}$$

Autre expression de β'' :

$$\boxed{\beta'' = \omega^2 \tan \beta \left[\left(\frac{1}{\omega} - \beta' \right)^2 - 1 \right]}$$

Pour $\alpha = 0$ et $\pi \Rightarrow \beta'' = 0$

β'' est maximum pour les positions angulaires extrêmes.

Deuxième partie.

ETUDE DYNAMIQUE

3. Principe de la méthode.

- a.- Nous supposons d'abord que le système bielle-manivelle est immobile dans une position définie par α et une pression p_i du fluide dans le cylindre.
Nous avons donc à résoudre un problème statique.
Le poids des organes est négligé.
- b.- Nous considérons ensuite la machine tournant à n tr/mn,
soit $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ (rd/s), vitesse angulaire supposée constante. Nous négligeons le frottement dans les différentes articulations.
- c.- L'étude peut se faire avec le calcul; elle est assez délicate. Nous adoptons la méthode graphique.

4. Conventions - Notations.

Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

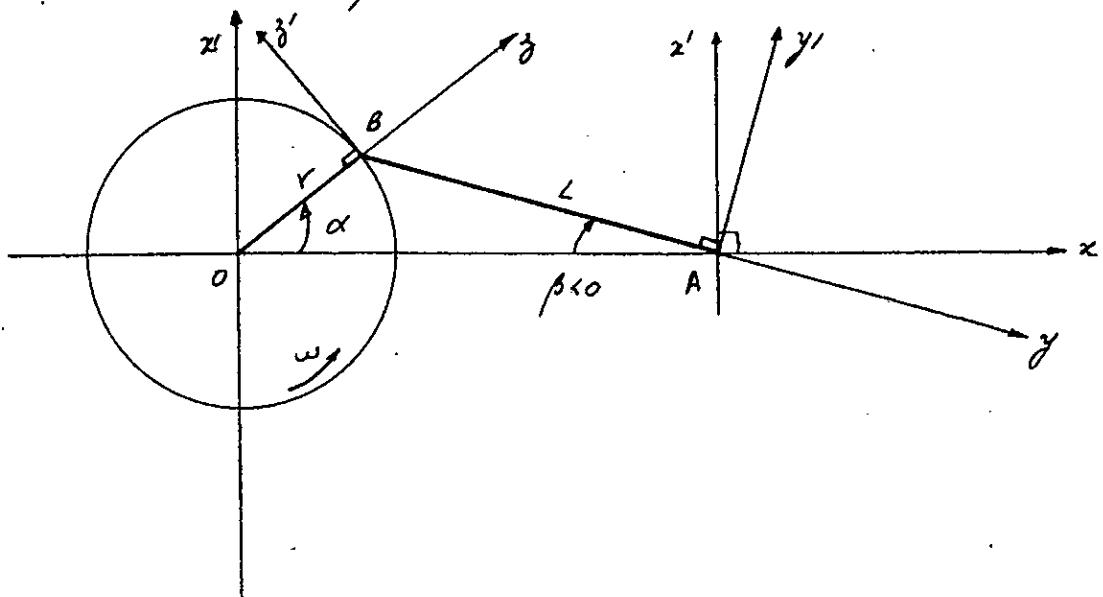
Systèmes d'axes : - ensemble de la machine: ox, ox'
- bielle : Ay, Ay'
- manivelle : BZ, BZ' .

forces: le sens positif est celui des axes définis ci-dessus.

- poussée résultante sur le piston : $P = (p_i - p_a)S$ (N)
portée par ox , force connue et négative tant que $p_i > p_a$.

Dans les calculs, on peut négliger p_a devant p_i
parce que p_i est très grand devant p_a .

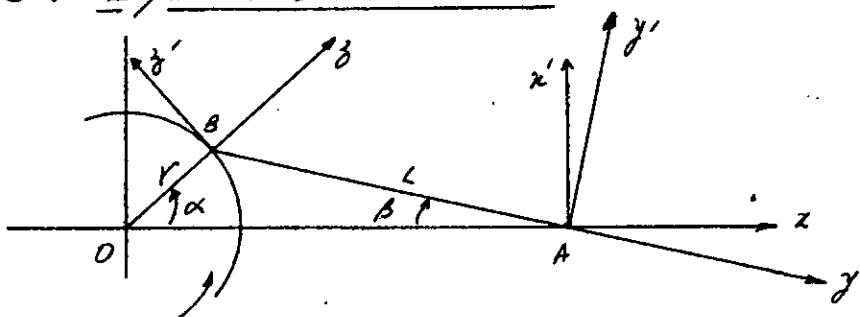
- Action de la bielle sur le piston de
composantes { y portée par Ay
 y' portée par Ay'
 - Action de la bielle sur le vilebrequin de
composantes { N portée par Bz
 T portée par Bz'
 - Action du cylindre sur le piston: R portée par Ax' .
- Nous constatons qu'on a 5 inconnues à déterminer.



5 Premier cas.

Le système bielle manivelle est immobile.

5.1 Equilibre de la bielle.



- Bz : support de ($-N$)
- Bz' : support de ($-T$)
- Ay : support de ($-y$)
- Ay' : support de ($-y'$)

forces appliquées :

- Action du piston sur la bielle de composantes :

- y portée par Ay
- y' portée par Ay'

- Action du vilebrequin sur la bielle de composantes :

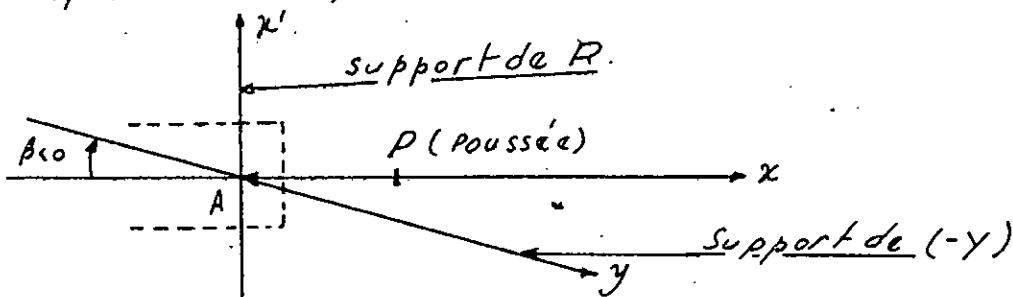
- N portée par Bz
- T portée par Bz'

L'équation des moments de ces forces par rapport à B

$$\text{donne : } -y'L = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Pour déterminer les autres forces, on considère le piston.

5.2 Equilibre du piston.

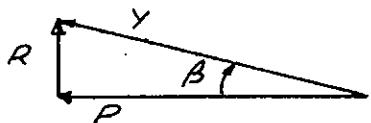


- le piston est isolé.

forces appliquées :

- Action de la bielle sur le piston :
seule composante y portée par Ay .
- Action du cylindre sur le piston :
seule composante R portée par Ax'
- Poussee résultante du fluide $P = (P_i - P_a)S \approx P_i \cdot S$
portée par Ax , force connue et est négative ($P_i > P_a$).

Connaissant P , l'angle β et les directions de y et R ,
on détermine facilement y et R .

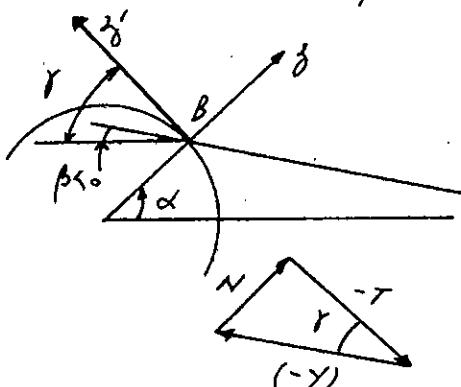


$$y = -\frac{P}{\cos \beta}$$

$$R = P \operatorname{tg} \beta$$

Suite de 5.1 (équilibre de la bielle).

Connaissant $(-y)$ et les directions de $(-N)$ et $(-T)$
on les détermine facilement.



Bz : support de $(-N)$

Bz' : support de $(-T)$

$$\sin \delta = \frac{N}{y} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right)$$

$$\sin \delta = \cos(\alpha - \beta).$$

$$\text{d'où } N = -y \cos(\alpha - \beta) = P \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

$$N = P \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

$$\text{On a: } \cos \delta = \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right] = \sin(\alpha - \beta) = \frac{-T}{-y}$$

d'où

$$T = -P \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

- Calcul de la poussée P sur le piston.

$$P = - (P_i - P_0) S \approx - P_i \cdot S.$$

$$P_i = \frac{P_r}{\eta_h} : P_i : \text{pression appliquée sur le piston.}$$

P_r : pression de refoulement.

La pression de refoulement P_r est inférieure à P_i . Ce rendement hydraulique η_h est dû à l'imperfection de la pompe, en particulier dans le fonctionnement des soupapes.

On a fixé η_h à 0,95.

$$\text{d'où } P_i = \frac{P_r}{\eta_h} = \frac{900}{0,95} \text{ bars.}$$

$$S: \text{section du piston. } S = \pi \frac{D^2}{4} = \pi \cdot \frac{(0,07)^2}{4}.$$

$$\text{d'où } P = -P_i \cdot S = -\frac{900 \cdot 10^5}{0,95} \pi \frac{(0,07)^2}{4} = -283570$$

$$P = -283570 \text{ N}$$

Considérons la relation: $r \sin \alpha = l \sin \beta$.

On remarque que β est maximum pour $\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}$
ou encore $\sin \beta = \frac{l}{r} \sin \alpha = m \sin \alpha \Rightarrow \beta = \arcsin(m \sin \alpha)$.

dérivons par rapport à $\alpha \Rightarrow \beta' = \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 \alpha}} \cdot m \cdot \cos \alpha = 0$

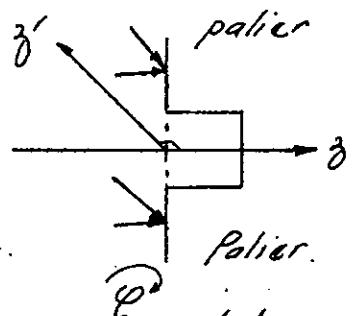
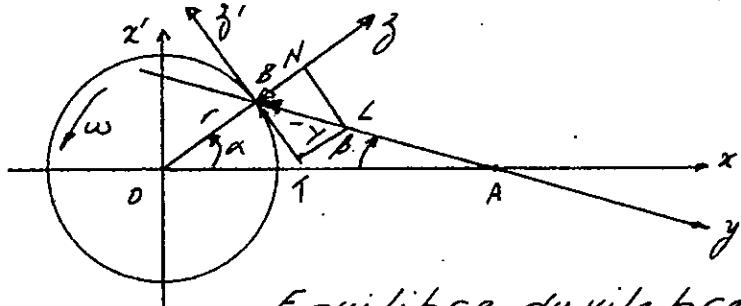
puisque $1-m^2 \sin^2 \alpha > 0$ quel que soit α

$\Rightarrow \beta' = 0$ pour $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}$.

$$\text{d'où } \beta_{\max} = 4,804^\circ \text{ soit } 4^\circ 48' 15''$$

$$\beta_{\min} = -4,804^\circ \text{ soit } -4^\circ 48' 15''$$

6. Couple au plateau d'occouplement.



Equilibre du vilebrequin.
forces appliquées

- Action de la bielle sur le vilebrequin de composantes connues : N et T .
- Action des paliers sur le vilebrequin.
- Couple C_2 , action de la machine liée sur la machine étudiée.
- Les deux composantes de l'action de chacun des paliers se déterminent immédiatement.

L'équation des moments par rapport à l'axe du vilebrequin donne : $T \cdot r = -C_2$

où C_2 représente l'action de la machine liée sur la machine étudiée, d'où l'action de la machine étudiée sur la machine liée est : $C_1 = -C_2 = T \cdot r$.

$$C_1 = T \cdot r.$$

Autres expressions de C_1 .

$$C_1 = R \cdot \overline{OA}$$

$$C_1 = P \cdot \overline{OH}$$

Car $R = Ptgb$
 $\text{et } \overline{OH} = \overline{OA}tg\beta$

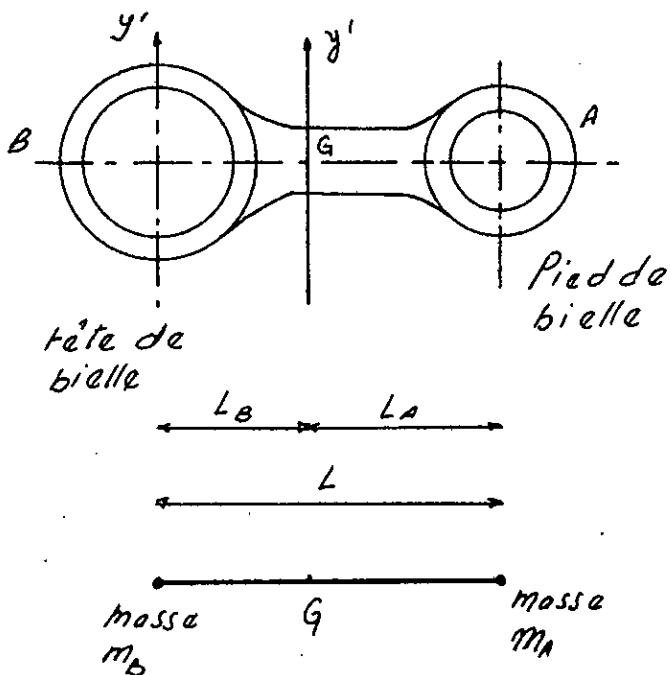
7 Deuxième cas:

le système bielle manivelle est en mouvement.

- supposons que la poussée P sur le piston est nulle ; mais des forces d'inertie vont intervenir. Étudions les effets.

7.1. Bielle réelle, bielle fictive.

Avant tout, il est préférable de remplacer la bielle, de forme compliquée, par une bielle fictive très simple, mais équivalente de point de vue dynamique.



Bielle réelle de masse m connue, et son centre de gravité G est lui aussi connu.

La bielle fictive à même longueur L que la bielle réelle; elle a même masse, mais celle-ci est repartie en deux (2) parties m_A (au pied de bielle) et m_B (à la tête de bielle) telles que

$$m_A + m_B = m.$$

Elle a même centre de gravité, donc: $m_A \cdot l_A = m_B \cdot l_B$.

A partir de ces deux équations, on aura :

$$m_A = m \cdot \frac{l_B}{L}$$

et

$$m_B = m \cdot \frac{l_A}{L}$$

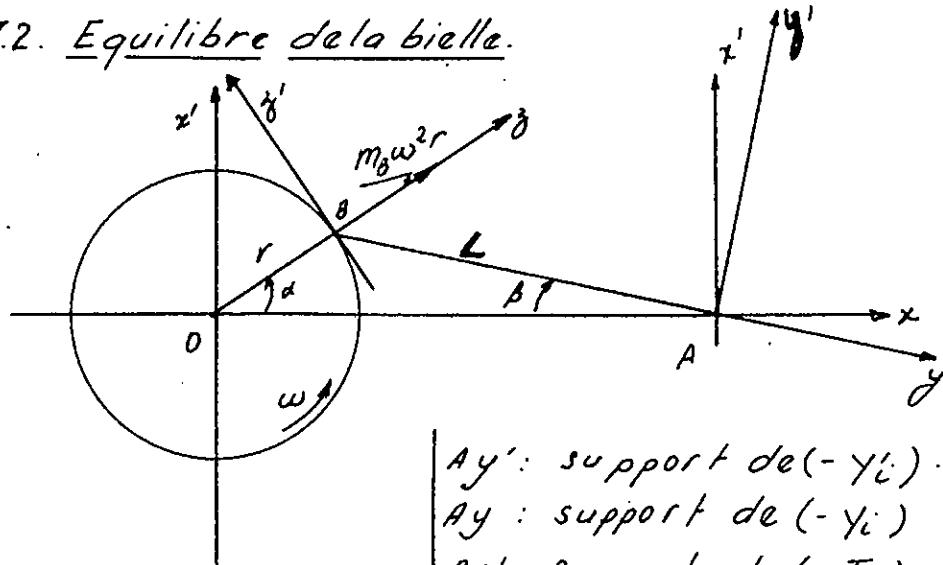
La bielle réelle et la bielle fictive doivent avoir aussi même moment d'inertie par rapport à un axe issu de G et perpendiculaire au plan Gyy' , or ce n'est pas le cas en général, mais la différence est faible et nous la négligerons et on prend aussi :

$$m_B = \frac{2}{3} m \text{ et } m_A = \frac{m}{3}$$

Mais il ne faut pas oublier que c'est une approximation

- On fera aussi une autre approximation; en supposant que la masse m_A du pied de bielle fictive fait partie du piston et non de la bielle, ainsi que celle du coulisseau, ça modifie très peu quelques résultats mais ça simplifie beaucoup les calculs.

7.2. Équilibre de la bielle.



Ay' : support de $(-y'_i)$ Ay : support de $(-y_i)$ Bz' : support de $(-T_i)$ Bz : support de $(-N_i)$.

On sait qu'il est possible de parler de l'équilibre d'un solide en mouvement; il suffit pour cela de considérer l'ensemble des forces appliquées et des forces d'inertie.

Forces appliquées

- Action du piston sur la bielle de composantes :
 - y_i : portée par Ay
 - y'_i : portée par Ay'
- Action du vilebrequin sur la bielle de composantes :
 - N_i : portée par Bz
 - T_i : portée par Bz' .

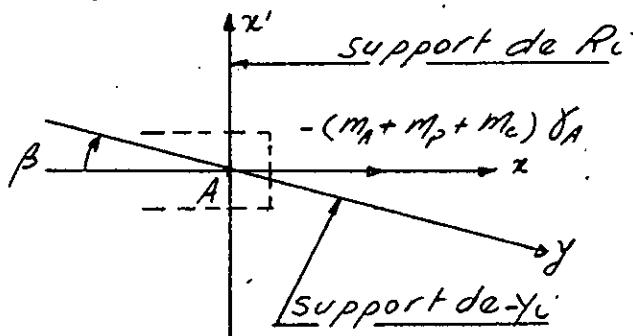
Forces d'inertie.

Nous avons supposé qu'il n'y avait pas de masse en A, donc pas de forces d'inertie. La masse m_B de la tête de bielle tourne autour de O à la vitesse angulaire constante ω ; la seule force d'inertie qui résulte de ce mouvement est la force centrifuge : $m_B \omega^2 r$.

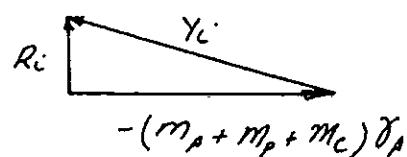
- L'équation des moments par rapport au point B nous donne :

$$- y'_i \cdot L = 0 \Rightarrow \boxed{y'_i = 0}$$

7.3. Équilibre du piston.



m_p : masse du piston
 m_c : masse du coulisseau.



Forces appliquées.

- Action du cylindre sur le piston; seule Composante : R_i portée par Ax'
- Action de la bielle sur le piston; seule Composante y_i portée par Ay .

Forces d'inertie.

Soit m_p et m_c les masses respectives du piston et du coulisseau.

La masse $(m_c + m_A + m_p)$ a un mouvement alternatif rectiligne (R.A) d'accélération $\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma_A$; la force d'inertie qui résulte de ce mouvement est portée par Ax et vaut :

$$-(m_c + m_A + m_p) \gamma_A = P_i$$

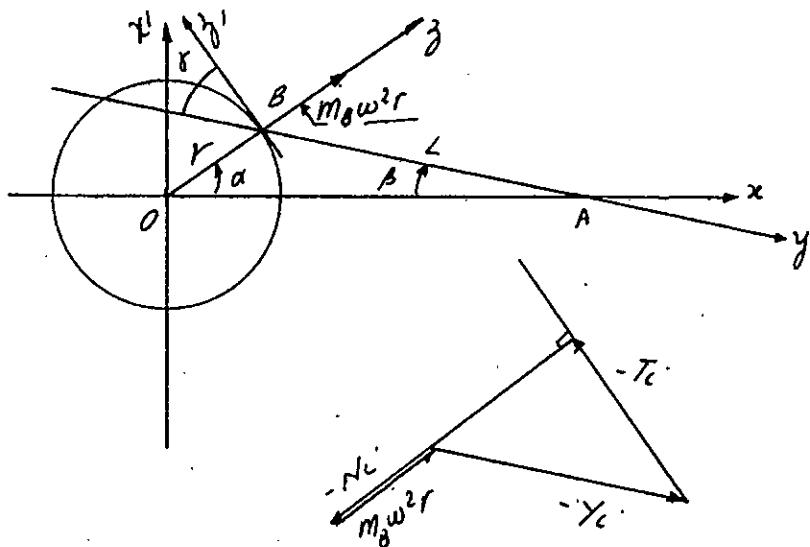
d'où y_i et R_i

$$y_i = (m_A + m_c + m_p) \frac{\gamma_A}{\cos \beta}$$

$$R_i = -(m_A + m_c + m_p) \gamma_A \cos \beta$$

Ayant déterminé y_i et R_i , on revient à la bielle.

équilibre de la bielle.



Connaissant l'action du piston sur la bielle ($-Y_i$) et la force centrifuge, on en déduit N_i et T_i .

$$- \sin \delta = \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right] = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\text{et } \cos(\alpha - \beta) = \frac{-N_i}{Y_i} = \frac{m_B \omega^2 r}{Y_i}$$



$$N_i = m_B \omega^2 r - (m_A + m_C + m_p) \frac{\delta_A}{\cos \beta} \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

$$- \cos \delta = \cos \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right] = \sin(\alpha - \beta) = \frac{T_i}{Y_i}$$

$$T_i = Y_i \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$T_i = (m_A + m_C + m_p) \delta_A \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

d'où le couple dû aux forces d'inertie.

$$C_i = r T_i \quad \text{ou bien} \quad C_i = R_i \cdot \overline{OA}$$

ou encore

$$C_i = (\text{force d'inertie de la masse } m_A + m_C + m_p) \cdot \overline{OH}$$

$$C_i = [-(m_A + m_C + m_p) \delta_A] \overline{OH}$$

8 Conclusion de l'étude dynamique.

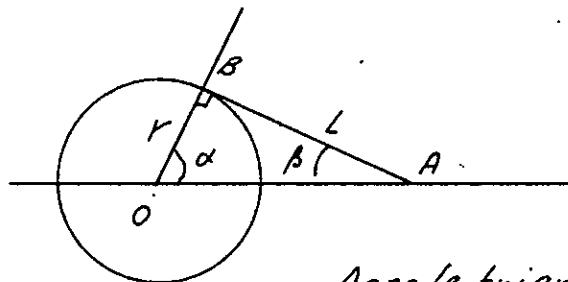
Tenant compte à la fois de la poussée P et des forces d'inertie, nous obtenons :

- Action de la bielle sur le piston : seule Composante $(Y + Y_i)$
- Action de la bielle sur le vilebrequin de Composantes : $(N + N_i)$ et $(T + T_i)$
- Action du cylindre sur le piston : seule Composante : $R + R_i$

Et le couple au plateau d'accouplement est :

$$C_1 + C_i = (T + T_i) r$$

- Cherchons la valeur de β lorsque la bielle est perpendiculaire au bras du vilebrequin.



Dans le triangle OAB , on a :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{L} = \frac{67}{800} \Rightarrow \boxed{\beta = 4,78735^\circ}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 85,21265^\circ}$$

g. CALCUL DE LA BIELLE (2)

La bielle est une tige devant assurer 2 articulations, l'une au pied en A avec le guidage du mouvement rectiligne alternatif (R.A), l'autre à la tête, en B, avec la manivelle.

La caractéristique d'une bielle est sa longueur L.

Elle transmet l'effort du vilebrequin au piston.

Elle est soumise à plusieurs sollicitations. Elles sont complexes et variables selon la position

(extension ou compression avec flexion), on envisage seulement la sollicitation de flexion, laquelle est sensiblement perpendiculaire à la manivelle. A ce moment les forces d'inertie sont normales à la bielle, varient linéairement, si la bielle est à section constante, et admettent une résultante générale au $\frac{2}{3}$ de la longueur

$$F = \frac{ML}{2} \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2}$$

- Mais en fait, cette flexion n'est pas dangereuse dans notre cas.
- La seule sollicitation principale ici est le flambement. On a adopté une bielle à section constante.

g. 1 Choix du matériau.

Il est fonction de l'effort et surtout de la plus ou moins grande répétition de celle-ci.

Dans notre cas l'effort à transmettre est très grand (283570 N), on prend un acier au nickel-chrome traité (Ni-Cr).

Un acier au Nickel-Chrome a meilleurs résistances mécaniques, résistance à l'usure et à la corrosion et résilience que les aciers non alliés de même dureté.

- Traitements thermiques simplifiés; moins de risques de déformations et de rapures.
- Grande résistance sous couche (jusqu'à 180Kgf/mm^2) pour les aciers cimentés.

Dans notre cas, on choisit l'acier: 30NC11f.
traitements: H850, R_v 600.

Charge de rupture: 900 à 1100 N/mm²

$$R_r = 1000 \text{ N/mm}^2$$

9.2 Corps de bielle.

a- Flambement. Les formules sont:

- pour la pré-détermination; Euler: $F_k = \frac{\pi^2 E I}{(dL)^2}$

- pour la vérification, Rankine:

$$R_p = \frac{F}{S} \left(1 + \frac{N}{C} \right)$$

avec

$$C = \frac{\pi^2 E^2}{(dL)^2 S} \quad \text{et} \quad N: \text{limite élastique.}$$

$$\text{Jci: } N = 750 \text{ N/mm}^2.$$

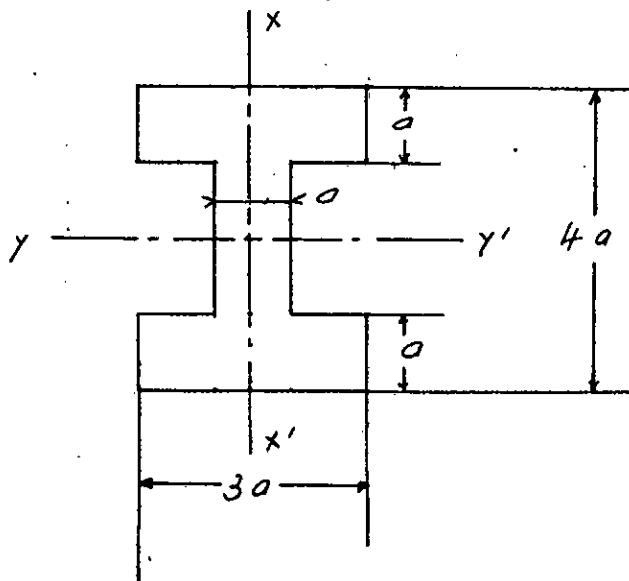
b. Hypothèses

- k : coefficient de flambement, 7 à 10 pour les bielles tendues
on prend $k = 7$.

- α : coefficient tenant compte de la fixation des extrémités.

Comme le flambement a lieu dans le plan d'oscillation de la bieille, celle-ci est articulée aux 2 bouts et α vaut 1

- Section en double T ou en I



Calculons les moments d'inerties par rapport aux axes xx' et yy' .

$$I_{xx'} = \frac{(3a)^3 \cdot 2a}{12} + \frac{a^3 \cdot 2a}{12} \\ = \frac{54a^4}{12} + \frac{2a^4}{12} = \frac{56a^4}{12}$$

$$I_{xx'} = \frac{14}{3} a^4$$

$$I_{yy'} = \frac{(4a)^3 \cdot 3a}{12} - 2 \cdot \frac{(2a)^3 \cdot a}{12} = \frac{192 - 16}{12} a^4 = \frac{176}{12} a^4$$

$$I_{yy'} = \frac{44}{3} a^4$$

- pré-détermination de la bieille.

$$\text{Euler} \quad Fk = \frac{\pi^2 E I}{(\alpha L)^2}$$

où F est la force maximale agissant sur la bieille.

$$F = (Y + y_c)_{\max}$$

On verra plus loin qu'on peut négliger les forces d'inertie devant l'effort dû à la pression de refoulement. Notre rive droite qui tourne à une vitesse très faible (60 tr/mn).

Donc on peut continuer nos calculs en prenant

$$F = Y_{\max}$$

Et y est maximum pour $d = \frac{\pi}{2}$, qui correspond à $\beta = \beta_{\max} = 40^{\circ}48'15''$

$$\text{d'où } Y_{\max} = - \frac{P}{\cos \beta_{\max}} = - \frac{(-283570)}{\cos 40^{\circ}48'15''}$$

$$Y_{\max} = 284570 \text{ N}$$

Dans la formule d'Euler, on prend le moment d'inertie minimum, c'est à dire $I_{xx'}$.

Calculons le moment d'inertie $I_{xx'}$.

$$\text{Euler} \Rightarrow I_{xx'} = \frac{F k (\alpha L)^2}{E \pi^2}$$

$$k = 7 ; \quad d = 1 ; \quad E = 22 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2 \text{ (modèle d'Young)}$$

$L = 800 \text{ mm}$: valeur prise d'après le dessin de définition.

$$I_{xx'} = \frac{284570 \cdot 7 \cdot 800^2}{22 \cdot 10^4 \cdot \pi^2} = 587143 \text{ mm}^4$$

$$\text{or } I_{xx'} = \frac{14}{3} a^4 \Rightarrow \frac{14}{3} a^4 = 587143$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot 587143}{14}} = 18,83 \text{ mm}$$

On prend :

$$a = 25 \text{ mm}$$

d'où

$$I_{xx'} = \frac{14}{3} \alpha^4 = \frac{14}{3} \cdot 25^4 = \underline{1822910 \text{ mm}^4}$$

$$I_{yy} = \frac{44}{3} \alpha^4 = \frac{44}{3} \cdot 25^4 = \underline{5729160 \text{ mm}^4}$$

$$S = (3a \cdot a) 2 + 2a \cdot a = 6a^2 + 2a^2 = 8a^2$$

$$S = 8 \cdot 25^2 = 8 \cdot 625 = \underline{5000 \text{ mm}^2}$$

Vérification par la formule de Rankine.

$$R_p = \frac{F}{S} \left(1 + \frac{N}{C} \right) \text{ avec } C = \frac{\pi^2 EI}{(dL)^2 S}$$

et N : Limite d'élasticité = 750 N/mm^2 .

$$C = \frac{\pi^2 \cdot 22 \cdot 10^4 \cdot 1822910}{800^2 \cdot 5000} = \underline{1236,9 \approx 1237 \text{ N/mm}^2}$$

d'où $R_p = \frac{F}{S} \left(1 + \frac{N}{C} \right) = \frac{284570}{5000} \left(1 + \frac{750}{1237} \right) = 91,5 \text{ N/mm}^2$

$$\boxed{R_p \approx 92 \text{ N/mm}^2}$$

En prenant un coefficient de sécurité égal à 10

$$\boxed{\frac{R_p}{10} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ N/mm}^2 > 92 \text{ N/mm}^2 = R_p}$$

c) Inertie fléchissant

En supposant que la bielle a une section uniforme, le moment fléchissant est :

$$M_f = \frac{MLw^2r}{9\sqrt{3}} \quad \text{où}$$

M : masse de la bielle

r : rayon de la manivelle

l : longueur de la bielle.

On prend $M = 50 \text{ kg}$.

Donc le moment fléchissant :

$$M_f = \frac{50 \cdot 98 (2\pi)^2 \cdot 0,067}{9\sqrt{3}} \approx 7 \text{ m.N}$$

et la contrainte de flexion sera : $R_p' = \frac{M_f}{(\frac{I_{yy'}}{\nu})}$
où $I_{yy'} = 5729160 \text{ mm}^4$

$$\nu = \frac{3,25}{2} = 37,5 \text{ mm.}$$

d'où $R_p' = \frac{7 \cdot 10^3}{\frac{5729160}{37,5}} = 0,05 \text{ N/mm}^2$

valeur négligeable.

On estime la masse du piston m_p à $20 \text{ kg} = m_p$
ainsi que la masse du coulisseau $m_c = 20 \text{ kg}$.

Tableau des différentes valeurs de :

$$-\beta = \text{Arcsin} \left(-\frac{r}{L} \sin \alpha \right) = \text{Arcsin} (-m \sin \alpha)$$

$$-Y = -\frac{P}{\cos \beta}; \quad N = P \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

$$-R = P \tan \beta; \quad T = -P \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$$

α varie de 0 à π par pas de 15° .

$\alpha(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	$Y(N)$	$R(N)$	$N(N)$	$T(N)$
0	0	283570	0	-283570	0
15	-1,242	283637	6148	-272316	79332
30	-2,400	283819	11885	-239636	152078
45	-3,395	284069	16822	-188619	212409
60	-4,159	284319	20690	-123927	255889
75	-4,640	284502	23015	-51163	279864
90	-4,804	284570	23833	23833	283570
105	-4,640	284502	23015	95624	267951
120	-4,159	284319	20620	159642	235269
135	-3,395	284069	16822	212409	188619
150	-2,400	283819	11885	251521	131492
165	-1,242	283637	6148	275380	67455
180	0	283570	0	283570	0

Pour drariant de π à 2π les valeurs sont symétriques.

Tableau des différentes valeurs de :

- $\delta = -r\omega^2(\cos \alpha + m \cos 2\alpha)$; $R_i = -(m_A + m_p + m_c)\delta_A \tan \beta$.
- $Y_i = (m_A + m_p + m_c) \frac{\delta_A}{\cos \beta}$; $T_i = (m_A + m_c + m_p)\delta_A \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$
- $N_i = m_B \omega^2 r - (m_A + m_c + m_p)\delta_A \cdot \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta}$

$$m_A = \frac{50}{3} ; m_p = 20 ; m_c = 20 \text{ (en kg).}$$

$\alpha (\circ)$	$\beta (\circ)$	$\gamma (m/s^2)$	$Y_i (N)$	$R_i (N)$	$N_i (N)$	$T_i (N)$
0	0	-2,87	-163	0	182	0
15	-1,242	-2,75	-156	-3	169	-44
30	-2,400	-2,40	-136	-6(<)	135	-73
45	-3,395	-1,87	-106	-6(>)	90	-79
60	-4,159	-1,21	-69	-5	50	-62
75	-4,640	-0,49	-28	-2	25	-27
90	-4,804	0,22	13.	1	21	12
105	-4,640	0,88	50	4	37	47
120	-4,159	1,43	81	6(<0)	65	67
135	-3,395	1,87	106	6(>0)	99	70
150	-2,400	2,18	124	5	129	57
165	-1,242	2,36	138	3	150	32
180	0	2,65	150	0	170	0

Toutes les autres valeurs pour α variant de π à 2π sont symétriques par rapport à π .

Tableau des différentes valeurs de :

$$- Y_r = y + y_i \quad ; \quad T_r = T + T_i \quad ; \quad C_r = T_r \cdot r$$

pour variant de α à π . par pas de 15° .

$\alpha(\circ)$	$Y_r(N)$	$T_r(N)$	$C_r(m.N)$
00	283407	0	0
15	283481	79288	5312
30	283683	152005	10184
45	283963	212330	14226
60	284250	255827	17140
75	284474	279837	18749
90	284583	283582	19000
105	284552	267998	17956
120	284400	235336	15768
135	284175	188689	12642
150	283943	131549	8814
165	283775	67487	4522
180	283720	0	0

Calculons :

$$d; \beta; Y; \dot{y}; T; R; N;$$

$$Y_L; T_C; R_C; N_C$$

Lorsque la bielle est perpendiculaire à la manivelle.

On a déjà calculé
 α et β .

$$\beta = 4,78735$$

$$\text{soit } \beta = 4^\circ 47' 14''$$

$$\text{et } d = 85,21265^\circ$$

$$\text{soit } \alpha = 85^\circ 12' 46''$$

$$- Y = \frac{-P}{\cos \beta} = \frac{283570}{\cos 4,78735} = 284563 N$$

$$- T = - P \cdot \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} = 283570 \cdot \frac{\sin(90^\circ)}{\cos 4,78735} = 284563 N$$

- 47
- $R = P \cdot \operatorname{tg} \beta = -283570 \cdot \operatorname{tg} 4,78735 = 23749 N$
 - $N = P \cdot \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos \beta} = -283570 \cdot \frac{\cos 90}{\cos 4,78735} = 0$.
 - $\gamma = -\omega^2 (\cos \alpha + m \cos 2\alpha)$
 $= -0,067 (2\pi)^2 (\cos 85,21265 + \frac{67}{800} \cdot \cos 2 \cdot 85,21265)$
 $= -2,6450538 (0,0834578 + 0,08375 \cdot (-0,98607))$
 $\gamma = -2,31 \text{ m/s}^2 \cdot 10^{-3} = -2,31 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$.
 - $y_c = (m_A + m_C + m_p) \frac{\gamma_A}{\cos \beta} = 56,66 \cdot \frac{-2,31 \cdot 10^{-3}}{\cos 4,78735} = 0,1320$
 - $T_c = (m_A + m_C + m_p) \gamma_A \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos \beta} = 56,66 \cdot \frac{-2,31 \cdot 10^{-3} \sin 90^\circ}{\cos 4,78735}$
 $T_c = 0,13 \approx 0$
 - $R_c = -(m_A + m_C + m_p) \gamma_A \operatorname{tg} \beta = -56,66 \cdot (-2,31 \cdot 10^{-3}) \operatorname{tg} 4,78735$

$$R_c = 0,01 \approx 0$$

$$N_c = m_B \omega^2 r - (m_A + m_C + m_p) \gamma_A \cdot \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos \beta}$$

or $\cos(\alpha-\beta) = \cos 90^\circ = 0$

$$N_c = m_B \omega^2 r = \frac{2}{3} 50 \cdot (2\pi)^2 \cdot 0,067 = 88 N$$

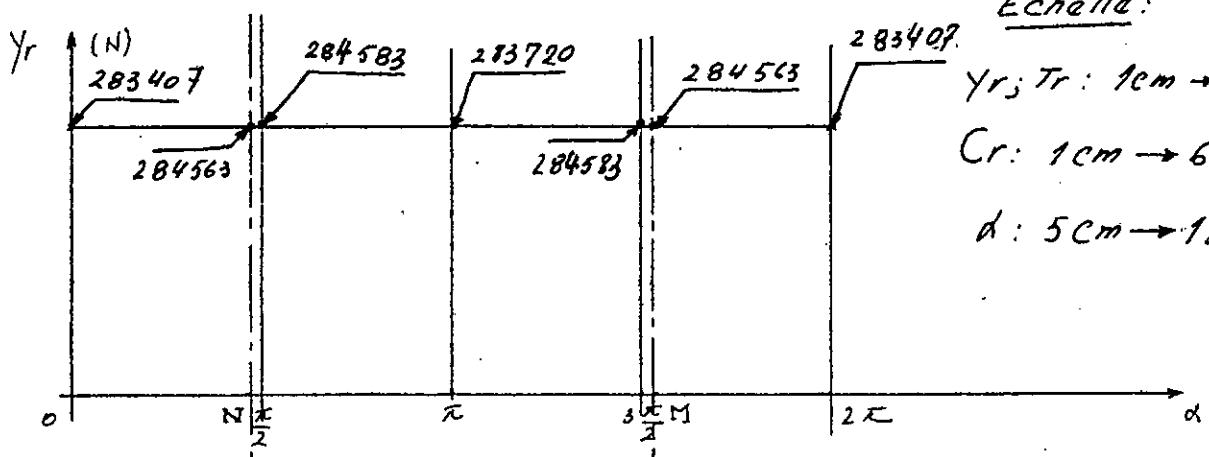
D'où $\gamma_r = \gamma + y_c = 284563 + 0,13 \approx 284563 N$

$T_r = T + T_c = 284563 + 0,13 \approx 284563 N$.

$$C_r = T_r \cdot r = 284563 \cdot 0,067 = 19066 \text{ m.N.}$$

Toutes ces valeurs calculées concernent l'un des deux pistons, ainsi que les graphes qui seront tracés par la suite.

- Graphe de Y_r en fonction de α .



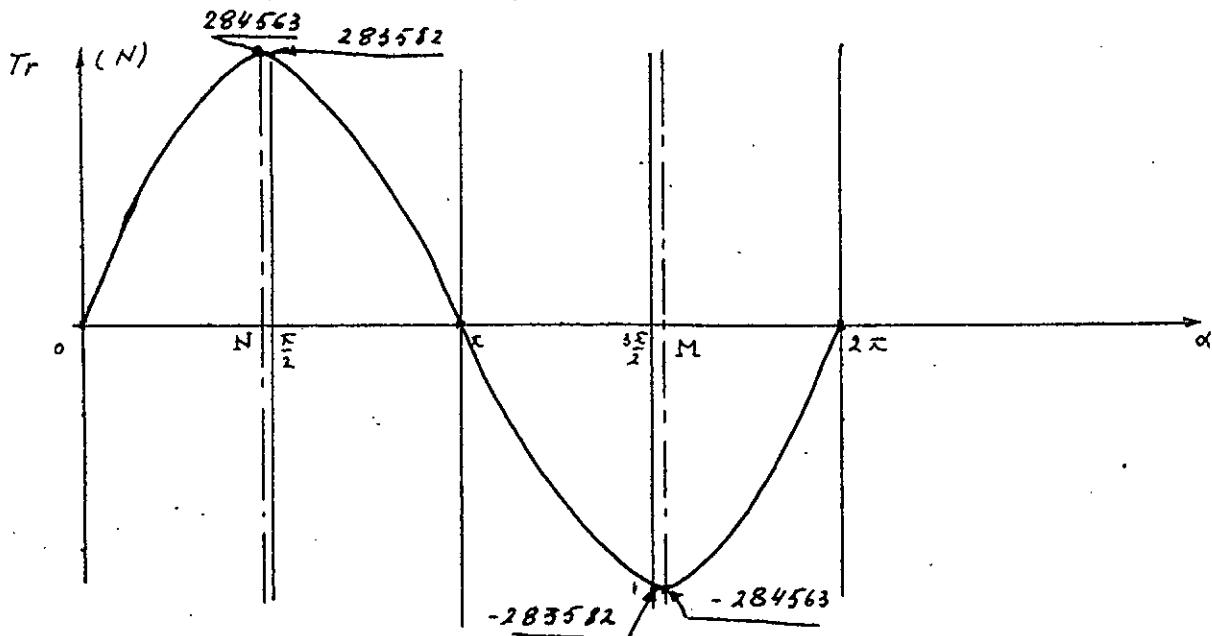
Echelle:

$Y_r, Tr : 1\text{cm} \rightarrow 8000\text{N}$

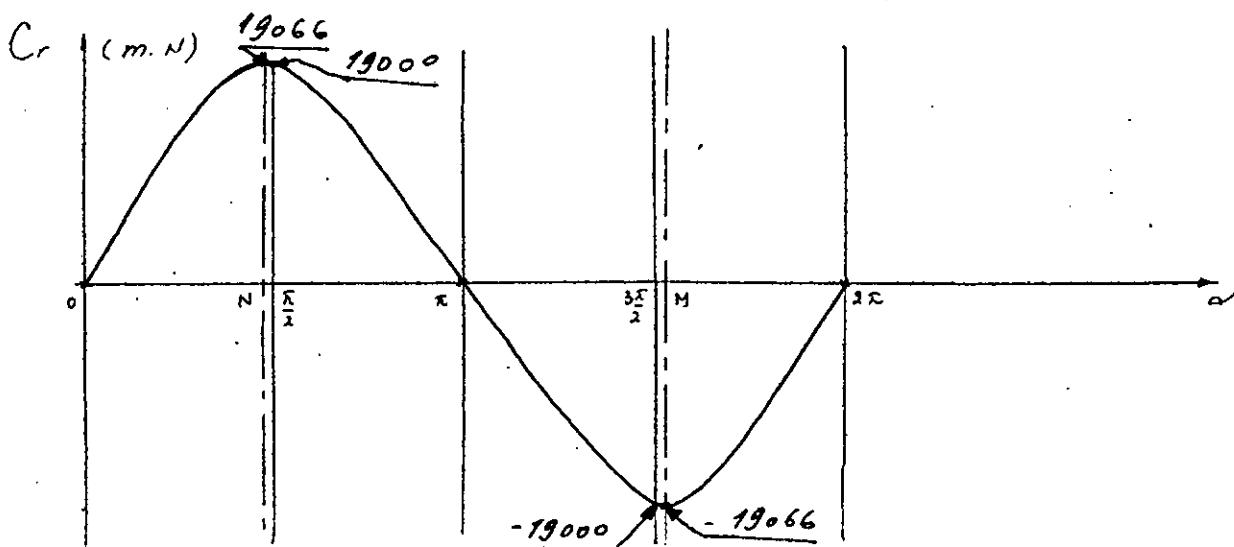
$Cr : 1\text{cm} \rightarrow 6500\text{m.N}$

$d : 5\text{cm} \rightarrow 180^\circ$

- Graphe de Tr en fonction de α .



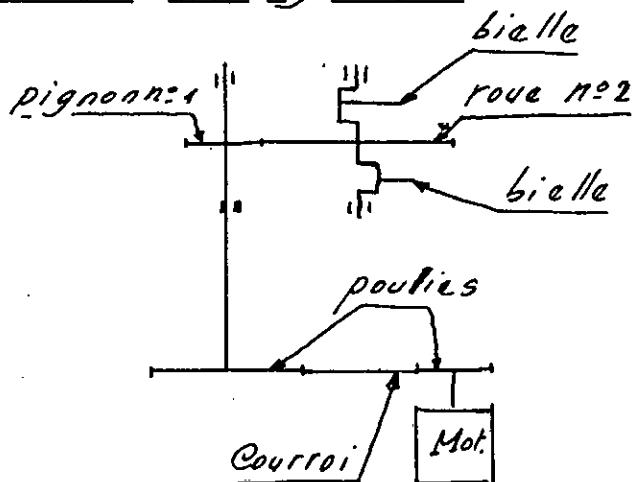
- Graphe du couple résultant Cr en fonction de α .



REDUCTEUR.

À la sortie de notre moteur d'entraînement, on utilise une première transmission par poulie et courroie et puis viendra la deuxième transmission par engrenage.

Schéma du système.



Ayant des efforts importants à transmettre, on emploie une denture à chevron (cylindrique).

Calcul de la puissance au niveau de la roue et pignon.

$$P = \frac{P_r \cdot q_v}{\eta_r \cdot \eta_h \cdot \eta_m} . \quad \text{où}$$

P_r : pression de refoulement.

q_v : débit volumique réel

η_r : rendement volumétrique.

η_h : rendement hydraulique

η_m : rendement mécanique.

On a déjà choisi les rendements hydraulique et volumétrique, il ne reste que le rendement mécanique.

Ce rendement mécanique η_m tient compte des pertes par frottement, en particulier dans le système balle-manivelle, et du rendement de l'engrenage.

On prend, en tout : $\boxed{\eta_m = 0,85}$

$$\text{d'où } P = \frac{700 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{0,97 \cdot 0,95 \cdot 0,85} = \boxed{89368 \text{ W}}$$

On se fixe la vitesse du moteur d'entraînement soit $N_{\text{mot}} = 750 \text{ tr/mn}$.

Et soit i_1 : le rapport de réduction de la poulie courroie et i_2 : le rapport de réduction de l'engrenage.

La roue n° 2 fournit à la vitesse de la manivelle, soit $N_2 = 60 \text{ tr/mn}$.

$$\text{donc } i_1 \cdot i_2 = \frac{60}{750} = \frac{6}{75} = \frac{2}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{2}{5}} \quad \text{et} \quad \boxed{i_2 = \frac{1}{5}}$$

d'où N_1 : vitesse du pignon n° 1.

$$N_1 = 5 N_2 = 5 \cdot 60 = 300 \text{ tr/mn.}$$

Calcul du couple sur le pignon:

$$C_1 = \frac{P}{\omega_1} = \frac{89368}{2 \pi \cdot 300} \cdot 60 = 2844 \approx \underline{2845 \text{ m.N}}$$

$$\text{d'où } C_2 = 2845 \cdot 5 = \underline{14225 \text{ m.N.}}$$

On remarque que le couple C_2 est beaucoup plus petit que le couple résultant maximum (couple résistant), on doit donc augmenter la puissance P pour niveau de la roue et pignon, et on prend $P = 110 \text{ KW.}$

d'où le couple moteur C_1

$$C_1 = \frac{P}{\omega} = \frac{110 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 300} \cdot 60 \Rightarrow C_1 = 3500 \text{ m.N.}$$

- Calcul du module de l'engranage.

On utilise la méthode de Lewis (méthode plus précise).

$$M = \sqrt[3]{\frac{2 C_1}{k \cdot \pi \cdot Z_1 \cdot R_{pe} \cdot Y}} \quad \text{où}$$

k : coefficient de largeur de la denture.

On prend $k = 10$. (bonne qualité).

Z_1 : nombre de dents du pignon 1.

R_{pe} : résistance pratique à l'extension.

Y : facteur de forme.

- On choisit $Z_1 > 17$ dents pour éviter le phénomène d'interférence ; soit $Z_1 = 20$ dents.

$$Y = 0,154 - \frac{1,2}{Z_1} = 0,154 - \frac{1,2}{20} = \underline{\underline{0,094}}$$

- Choix du matériau.

Ayant affaire à des efforts importants et des chocs, ainsi que des contraintes dues à la compression et torsion, on utilise un acier allié au nickel-chrome (Ni-Cr), traité dont les caractéristiques de ce dernier ont été données (calcul de la bielle).

$$R_{pe} = 250 \text{ N/mm}^2$$

- Comme on utilise une denture à chevron, le pignon et la roue comportent deux dentures accolées dont les hélices sont opposées; par conséquent, le couple sur chaque sera de $C_m = \frac{\Theta_1}{2} = \frac{3500}{2} = 1750 \text{ MN.m}$
d'où le module M :

$$M = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1750 \cdot 10^3}{10 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 250 \cdot 0,094}} = 7,34$$

On prend: $M_r = 8 \text{ mm.}$

On adopte une denture non déportée:

$\beta = 30^\circ$: angle d'inclinaison primitive
d'où le diamètre primitif du pignon 1.

$$D_{p1} = \frac{M_r \cdot z_1}{\cos \beta} = M_a \cdot z_1$$

où M_a : module apparent. $M_a = \frac{M_r}{\cos \beta}$

$$D_{p1} = \frac{8 \cdot 20}{\cos 30^\circ} = 184,75 \text{ mm.}$$

$$\text{et } D_{p2} = 184,75 \cdot 5 = 923,75 \text{ mm.}$$

$D_{p1} = 184,75 \text{ mm}$

et

$D_{p2} = 923,75 \text{ mm.}$

- Module apparent. $M_a = \frac{M_r}{\cos 30} = \underline{9,2376}$

- Dimensions du pignon.

$$D_{p_1} = 184,75 \text{ mm}$$

$$D_{pext} = 184,75 + 2 M_r = 200,75 \text{ mm}$$

$$D_{pint} = 184,75 - 2 \cdot 1,25 M_r = 164,75 \text{ mm}$$

- Dimensions de la roue 2.

$$D_{p_2} = 923,75 \text{ mm}$$

$$D_{pext} = 923,75 + 2 M_r = 939,75 \text{ mm}$$

$$D_{pint} = 923,75 - 2 \cdot 1,25 M_r = 903,75 \text{ mm}$$

- En laissant un espace de 20mm entre les deux dentures pour l'exécution des dents (toyage, finition...), la largeur du pignon ou de la roue est :

$$L_a = (2 \cdot k \cdot M_r + 20) \text{ mm} = 2 \cdot 10 \cdot 8 + 20 = 180 \text{ mm}$$

d'où $L_r = \frac{L_a}{\cos 30^\circ} = 207,846 \text{ mm}$.

Soit $A = \frac{D_{p_1} + D_{p_2}}{2} = 554,25 \text{ mm}$.

En adoptant un angle de pression réel : $\varphi_r = 17^\circ 30'$ l'angle de pression apparent φ vaut :

$$\varphi = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \varphi_r}{\cos \varphi} = 20^\circ \quad \boxed{\varphi = 20^\circ}$$

- Influence de la vitesse ⁵⁴ K : coefficient de sécurité.

$$K = 5 \cdot \frac{8 + V}{8} \quad \text{où} \quad V = R_p w_1 = \frac{184,75 \cdot 10^3}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{300}{60}$$

$$V = 2,9 \text{ m/s.}$$

$$\Rightarrow K = 5 \cdot \frac{8 + 2,9}{8} = 6,8$$

D'où l'emploi d'un acier de résistance à la rupture $R_r \geq 6,8 \cdot 150 = 1020 \text{ N/mm}^2$

Or on a pris un Acier de: $R_r = 1200 \text{ N/mm}^2$
qui est largement suffisant.

$$R_r \geq K R_{pe} = 1020 \leq 1200 \text{ N/mm}^2$$

- Influence de l'usure.

$$U = \frac{P}{kM} \cdot \frac{N_1}{RM} \quad \text{où:}$$

$N_1 = N_2$: vitesse de rotation du pignon 1.

k : coefficient de largeur de la denture.

$M = M_0$: module apparent.

$$P = \frac{T}{\cos \beta \cdot \cos \varphi_r} \quad \text{avec } \beta = 30^\circ; \varphi_r = 17^\circ 30'$$

$$T = \frac{C_1}{R_p} = \frac{3500 \cdot 2}{184,75 \cdot 10^3} = 37889 \text{ N}$$

$$\text{d'où} \quad U = \left(\frac{37889}{\cos 30^\circ \cdot \cos 17,5^\circ} \right) \cdot \frac{1}{10 \cdot \frac{8}{60 \cdot \pi} \cdot \frac{300}{\cos 30^\circ}} \cdot \frac{\cos 30^\circ}{\cos 17,5^\circ}$$

$$U = 5133 \text{ N/mm mm}^2$$

$U > 2000 \Rightarrow$ graissage abondant, et utilisation d'un acier allié!

- Calcul de la pression locale.

$$\beta = 0,6 \sqrt{\frac{P}{L} \cdot \frac{\rho^{9,8}}{\alpha}} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right] = \frac{1}{E}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{D\rho_1} + \frac{1}{D\rho_2}}{\sin \varphi} \quad \alpha = \frac{1}{22,10} \frac{1}{\mu \omega^2 / \pi}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{184,75} + \frac{1}{923,75}}{\sin 17,5} = 0,0216$$

$$\rho^{0,8} = (0,0216)^{0,8} = 0,0465.$$

$$\text{d'où} \quad \beta = 0,6 \sqrt{\frac{45874}{180} \cdot \frac{0,0465}{1} \cdot 22,10^4}$$

$\beta = 969 \text{ N/mm}^2 \quad \simeq 970 \text{ N/mm}^2$

Ce qui est équivalent à $\beta = 1210 \text{ N/mm}^2$ pour 5000 heures.

On doit donc utiliser un acier fortement alié. Le graissage se fait sous pression.

$$R_r > 1000 \text{ N/mm}^2$$

$$H_B = 360 \text{ à } 400$$

Denture rectifiée ou rasee.

Calcul des dentures.

- Mécanique précise, avec chocs modérés et faible vitesse.

- Engrangage parallèle.

$$n_1 = 300 \text{ tr/mn} ; n_2 = 60 \text{ tr/mn.}$$

$$z_1 = 20 \text{ dents} ; z_2 = 20.5 = 100 \text{ dents.}$$

$$\text{d'où } k_g = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = 5.$$

- La charge est appliquée au sommet de la dent.
- Il n'y a qu'un seul couple de dents en contact.
- La composante de flexion est seule considérée et est prise égale à l'effort tangentiel primitif.
- pignon : Acier ou nickel-chrome (Ni-Cr) traité à 1200 N/mm^2 - $H_B \approx 400$.
- Roue : Acier ou Ni-Cr traité à 800 N/mm^2 . $H_B \approx 250$.
- temps de fonctionnement total demandé : 10.000h à raison de 8h/jour.
- Commande par moteur électrique.

- Capacité à la rupture.

$$\text{pignon: } T_1 = t_{01} \cdot L \cdot M \cdot Y_1 \cdot C_{c1} \cdot C_v \cdot C_{t1} \cdot C_s \quad \} \text{ où}$$

$$\text{roue : } T_2 = t_{02} \cdot L \cdot M \cdot Y_2 \cdot C_{c2} \cdot C_v \cdot C_{t2} \cdot C_s \quad \}$$

T_1, T_2 : efforts tangentiels max admissibles, respectivement pour le pignon et la roue. (N)

t_{01}, t_{02} : fatigues limites pratiques pour le pignon et la roue (N/mm^2)

L : Largeur de denture (mm)

M = Mo: modul apparent (mm)

Y_1, Y_2 : facteurs de forme pour le pignon et la roue.

C_{c1}, C_{c2} : facteurs de conduite pour le pignon et la roue.

C_v : facteur de vitesse (commun au pignon et à la roue).

C_{t1}, C_{t2} : facteurs de durée pour le pignon et la roue.

C_s : facteur de service (commun au pignon et à la roue).

Sur l'ouvrage "Traité théorique et pratique des engrangages" de G. Henriot on trouve des abrégés pour tous ces termes.

Toutes les valeurs que je vais utiliser ici sont tirées sur cet ouvrage.

On détermine successivement:

$$t_{01} = 180 N/mm^2 \quad \} \text{ figure VII.18. Page 288}$$

$$t_{02} = 150 N/mm^2 \quad \}$$

$$Y_1 = 0,318 \quad \} \text{ figure VII.5. Page 269.}$$

$$Y_2 = 0,425 \quad \}$$

$$C_{c_1} = 1,87 \quad C_{c_2} = 2,06 \quad \text{fig. VII 15 Page 282.}$$

C_v . V: vitesse linéaire périphérique : $V = r_p w_1 = r_p w_2 \approx 2,9 \text{ m/s.}$

Comme on une denture de précision
on prend la classe II

$$C_V = \frac{12}{12 + \sqrt{V}} = 0,88$$

Comme on lit aussi l'amplitude $C_V = 0,88$.
fig. VII 16. Page 284.

$$C_{t_1} = 0,75$$

$$C_{t_2} = 0,88$$

$$C_t = \frac{1}{(N_c/10^7)^{0,1}}$$

$$\text{où } N_c = 60 \cdot n \cdot Th \cdot q.$$

n: vitesse de rotation en tr/mn de l'organe
considéré.

Th: nombre d'heures de fonctionnement total demandé.

Nc: nbr de cycles de mise en marche.

q: nombre de zones d'engrenement.

$$\text{d'où } N_c = 60 \cdot 300 \cdot 10.000 \cdot 1 = 18 \cdot 10^7$$

$$N_{2c} = 60 \cdot 60 \cdot 10.000 = 3,6 \cdot 10^7$$

fig. VII-17. Page: 286.

C_s : fonctionnement avec chocs modérés, d'où
le degré de choc II.

Le tableau de la page 287 et la page 288
nous donne: $C_s = 0,8$.

Largur $L = 180 \text{ mm.}$

$$T_1 = k_{0.1} \cdot L \cdot M_a \cdot Y_1 \cdot C_{C_1} \cdot C_v \cdot C_{t_1} \cdot C_s$$

$$T_1 = 180 \cdot 180 \cdot \frac{8}{\cos 30^\circ} \cdot 0,318 \cdot 1,87 \cdot 0,88 \cdot 0,75 \cdot 0,8$$

$$T_1 = 93974 N$$

$$T_2 = k_{0.2} \cdot L \cdot M_a \cdot Y_2 \cdot C_{C_2} \cdot C_v \cdot C_{t_2} \cdot C_s$$

$$T_2 = 150 \cdot 180 \cdot \frac{8}{\cos 30^\circ} \cdot 0,425 \cdot 2,06 \cdot 0,88 \cdot 0,88 \cdot 0,8$$

$$T_2 = 135280 N$$

Capacité à la pression superficielle.

$$\text{pignon: } T_1 = k_{0.1} \cdot L \cdot D_1 \cdot C_r \cdot C_p \cdot C_v \cdot C_{t_1} \cdot C_s \quad \} \text{ où}$$

$$\text{roue: } T_2 = k_{0.2} \cdot L \cdot D_2 \cdot C_r \cdot C_p \cdot C_v \cdot C_{t_2} \cdot C_s \quad \}$$

$k_{0.1}, k_{0.2}$: limites pratiques des facteurs k pour le pignon et la roue.

L : Largeur de denture.

$D_1 = D_p$: diamètre primitif du pignon.

C_r : facteur de rapport

C_p : facteur d'inclinaison.

C_v : facteur de vitesse

C_{t_1}, C_{t_2} : facteurs de durée pour le pignon et la roue.

C_s : facteur de service

L'ouvrage d'Henriot nous donne les valeurs de ces termes ci-dessus.

$$k_{0.1} = 8,2 \text{ N/mm}^2$$

$$k_{0.2} = 5,5 \text{ N/mm}^2 \quad \} \text{fig. VII 27. Page 307.}$$

$$L = 180 \text{ mm} ; \quad D_1 = 184,75 \text{ mm.}$$

$C_r = 0,86$ fig. VII-25 bis. Page 304.

$C_\beta = 1,35$ fig. VII-26. Page. 305.

$C_v = 0,88$. (déjà vu).

$C_{\ell_1} = 0,55$ } Page: 286. fig. VII-17.

$C_{\ell_2} = 0,78$

$C_s = 0,8$. (voir tableaux, pages 287, 288).

d'où

$$T_1 = K_01 \cdot L \cdot D_1 \cdot C_r \cdot C_\beta \cdot C_v \cdot C_{\ell_1} \cdot C_s$$

$$T_1 = 8,2 \cdot 180 \cdot 184,75 \cdot 0,86 \cdot 1,35 \cdot 0,88 \cdot 0,55 \cdot 0,8$$

$$T_1 = 122585 N$$

$$T_2 = K_02 \cdot L \cdot D_2 \cdot C_r \cdot C_\beta \cdot C_v \cdot C_{\ell_2} \cdot C_s$$

$$T_2 = 5,5 \cdot 180 \cdot 184,75 \cdot 0,86 \cdot 1,35 \cdot 0,88 \cdot 0,78 \cdot 0,8$$

$$T_2 = 100280 N$$

Capacité de l'engrenage.

La capacité de l'engrenage est de : 93974 N
d'effort tangentiel, ce qui correspond
à une puissance transmise :

$$\mathcal{P} = C \omega_1 = 93974 \cdot \frac{184,75 \cdot 10^3}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{300}{60}$$

$$\mathcal{P} = 272716 W$$

ce qui est trop fort.

C_r (m.N)

$C_{r \max} = 19066 \text{ m.N}$ (Correspond à $\alpha = \pm 85, 212.65^\circ$).

1000 m.N
15°.

$C_{\text{moy. } r} = 12500 \text{ m.N}$.

Pour les deux pistons.

Recherche du Couple moyen résistant

Après avoir planimétré le graphique du couple résistant, on trouve un couple moyen

$$C_{moyen} \approx 12200 \text{ m.N.}$$

Ce couple est largement inférieur au couple produit par la roue qui vaut

$$Cr = 3500.5 = 8500 \text{ m.N.}$$

On n'utilise pas de volant d'inertie, car le couple moyen résistant est très nettement inférieur au couple de la roue (couple moteur). On a aussi un arbre très robuste; c'est l'arbre qui porte la roue et les têtes de bielles.

CAICUL DES ARBRES

1. Arbre supportant Laroue et les deux bielles.

Cet arbre est en acier ou chrome-molybdène.

35CD4h : traitements :

H850; R_v 200

$$\Rightarrow R_r = 1600 \text{ à } 1950 \text{ N/mm}^2.$$

On prend : $R_r = 1600 \text{ N/mm}^2$ pour les calculs.

et $R_{p_e} = 300 \text{ N/mm}^2$.

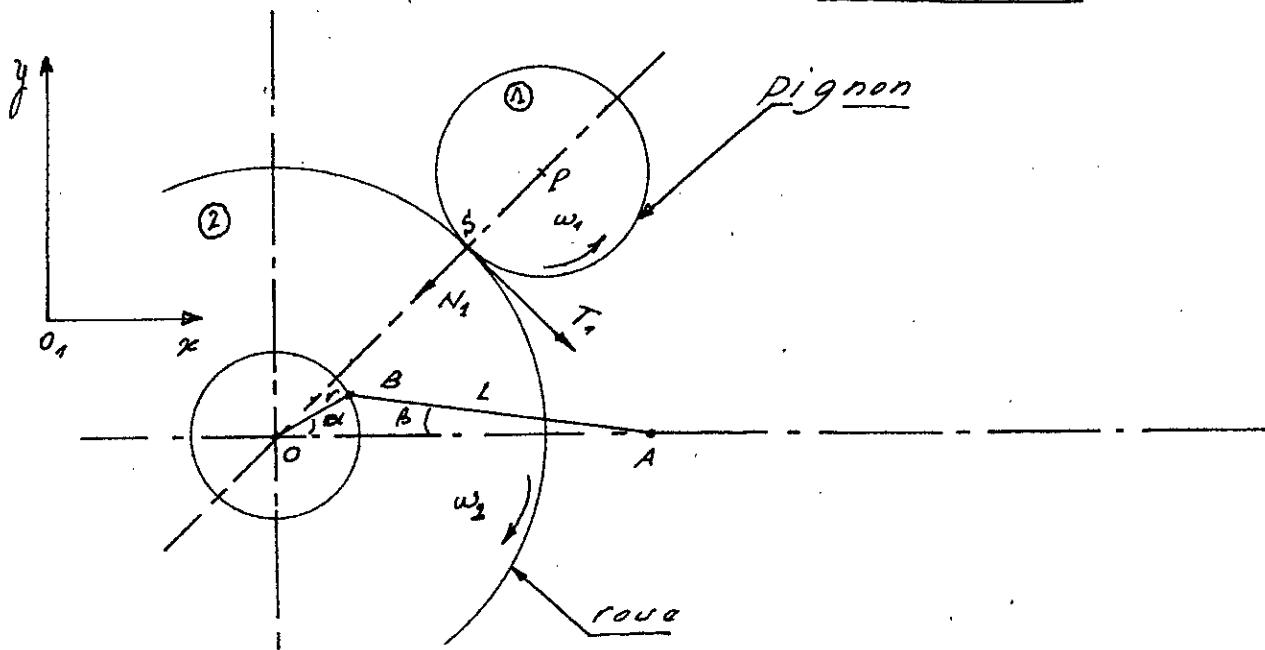
- Calcul de l'effort tangentiel $T_1 = \frac{C_1}{R_{p_e}}$

$$T_1 = \frac{3500 \cdot 10^3}{184,75} \cdot 2 = \underline{\underline{37889 \text{ N}}}$$

- L'effort normal $N_1 = \frac{T_1}{\cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \varphi_r$.

$$N_1 = \frac{37889}{\cos 30^\circ} \cdot \operatorname{tg} 17,5$$

$$\underline{\underline{N_1 = 13794 \text{ N}}}.$$



Pour calculer cet arbre; on considère deux (2) cas :

- 1^o $\underline{\alpha = 90^\circ} \Rightarrow Y_{r\max} \text{ et } \beta_{\max} = 4,804$

$$Y_{r\max} = 284583 \text{ N.}$$

$$T_1 = 37889 \text{ N (constante quelque soit \alpha)}$$

$$N_1 = 13794 \text{ N (constante quelque soit \alpha).}$$

projection de $Y_{r\max}$ suivant :

$$- O_x \rightarrow Y_{r\max/O_x} = Y_{r\max} \cos \beta_{\max}$$

$$- O_y \rightarrow Y_{r\max/O_y} = Y_{r\max} \sin \beta_{\max}$$

$$\begin{cases} Y_{r\max/O_x} = 284583 \cos 4,804 \approx \underline{283583 \text{ N}} \\ Y_{r\max/O_y} = 284583 \sin 4,804 = \underline{23834 \text{ N.}} \end{cases}$$

projection de T_1 suivant :

$$- O_x \rightarrow T_1/O_x = T_1 \cos 45^\circ = T_1 \cos AOP$$

par construction, on a pris $AOP = 45^\circ$.

$$- O_y \rightarrow T_1/O_y = -T_1 \sin 45^\circ =$$

$$\text{d'où } T_1/O_x = 37889 \cos 45^\circ = \underline{26792 \text{ N}}$$

$$T_1/O_y = -37889 \sin 45^\circ = \underline{-26792 \text{ N.}}$$

projection de N_1 suivant :

$$- O_x \rightarrow N_1/O_x = -N_1 \cos 45^\circ = -13794 \cos 45^\circ$$

$$- O_y \rightarrow N_1/O_y = -N_1 \sin 45^\circ = -13794 \sin 45^\circ.$$

$$\text{d'où } N_1/O_x = \underline{-9754 \text{ N}}$$

$$N_1/O_y = \underline{-9754 \text{ N}}$$

D'après le sens de rotation de la manivelle ou de l'arbre (voir fig précédente) la réaction de l'arbre sur la bielle est positive

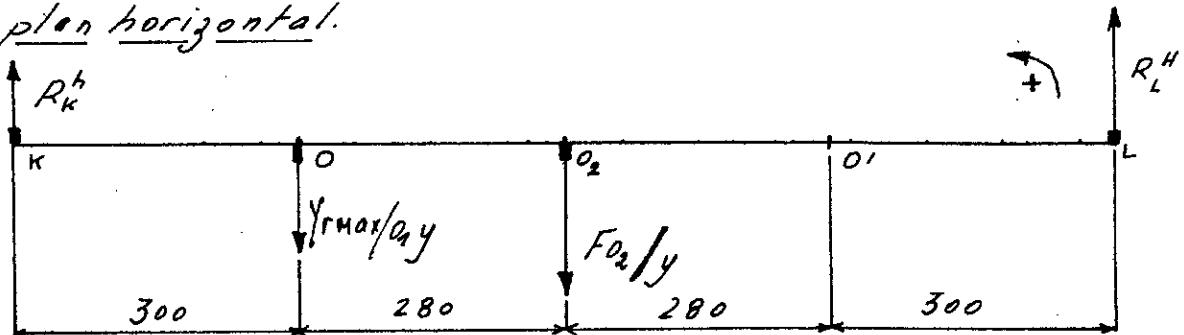
$$\text{d'où : } Y_{r\max/o_1x} = 283583 \text{ N}$$

$$\text{et } Y_{r\max/o_1y} = -23834 \text{ N.}$$

- soit F_x : la résultante des efforts sur l'axe o_1x
 d'où $F_x = 283583 + 26792 - 9754 = \underline{300621 \text{ N.}}$

- soit F_y : la résultante des efforts sur l'axe o_1y .
 d'où $F_y = -23834 - 26792 - 9754 = \underline{-60380 \text{ N.}}$

- plan horizontal.



$$F_{oz/y} = -26792 - 9754 = \underline{-36546 \text{ N.}}$$

$$Y_{r\max/o_1y} = \underline{-23834 \text{ N.}}$$

$\sum M^t_{K=0}$: somme des moments par rapport à $K=0$

$$+ Y_{r\max/o_1y} \cdot 300 + F_{oz/y} \cdot 580 - R_L^H \cdot 1160 = 0.$$

$$R_L^H = \frac{Y_{r\max/o_1y} \cdot 300 + F_{oz/y} \cdot 580}{1160} = \frac{23834 \cdot 300 + 36546 \cdot 580}{1160}$$

$$R_L^H = 24437 \text{ N}$$

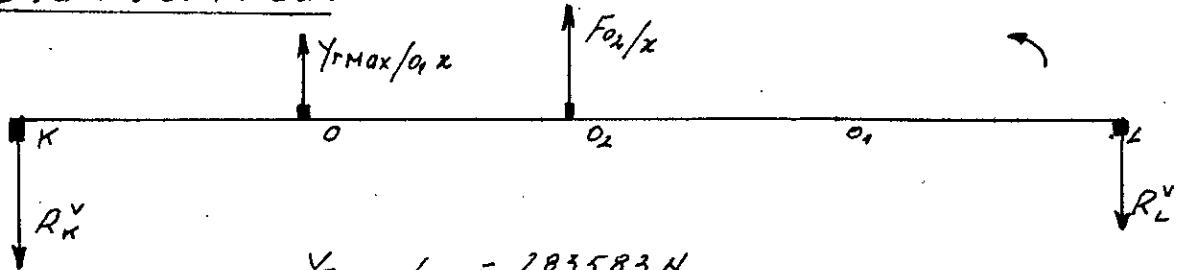
$$\text{d'où } R_K^h = 35943 \text{ N}$$

Moments fléchissants :

$$- M_{f/o_0}^{f,h} = R_K^h \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 35943 \cdot 0,3 = \underline{10783 \text{ m.N}}$$

$$- M_{f/o_2}^{f,h} = R_L^h \cdot 580 \cdot 10^{-3} = 24437 \cdot 0,58 = \underline{14173 \text{ m.N}}$$

plan vertical.



$$Y_{r\max/o_1,x} = 283583 \text{ N}$$

$$F_{O_2/x} = 17038 \text{ N}$$

$$- \sum \mu^f/\kappa = 0 \Rightarrow -Y_{r\max/o_1,x} \cdot 300 - F_{O_2/x} \cdot 580 + R_L^v \cdot 1160 = 0.$$

$$R_L^v = \frac{Y_{r\max/o_1,x} \cdot 300 + F_{O_2/x} \cdot 580}{1160}$$

$$R_L^v = \frac{283583 \cdot 300 + 17038 \cdot 580}{1160}$$

$$\boxed{R_L^v = 81859 \text{ N}}$$

$$\text{et } \boxed{R_K^v = 218762 \text{ N.}}$$

Moments fléchissants :

$$- M_{f/o_0}^{f,v} = R_K^v \cdot 300 \cdot 10^{-3} = 218762 \cdot 0,3 = \underline{65629 \text{ m.N}}$$

$$- M_{f/o_2}^{f,v} = R_L^v \cdot 580 \cdot 10^{-3} = 81859 \cdot 0,58 = \underline{47478 \text{ m.N.}}$$

Moments fléchissants résultants en O et en O₂.

$$M_{f,r_o}^f = \sqrt{M_{f/o_0}^{f,h^2} + M_{f/o_0}^{f,v^2}} = \sqrt{10783^2 + 65629^2} = \underline{66509 \text{ m.N.}}$$

$$M_{f,r_{o_2}}^f = \sqrt{M_{f/o_2}^{f,h^2} + M_{f/o_2}^{f,v^2}} = \sqrt{14173^2 + 47478^2} = \underline{49548 \text{ m.N.}}$$

Le moment fléchissant résultant est maxi en O.

Le moment de torsion est :

$$M^t = 3500 \cdot 5 = \underline{17500 \text{ m.N.}}$$

d'où le moment ideal est

$$M_i = \sqrt{M^t^2 + M_{f.r}^2} = \sqrt{17500^2 + 66509^2} = \underline{68773 \text{ m.N.}}$$

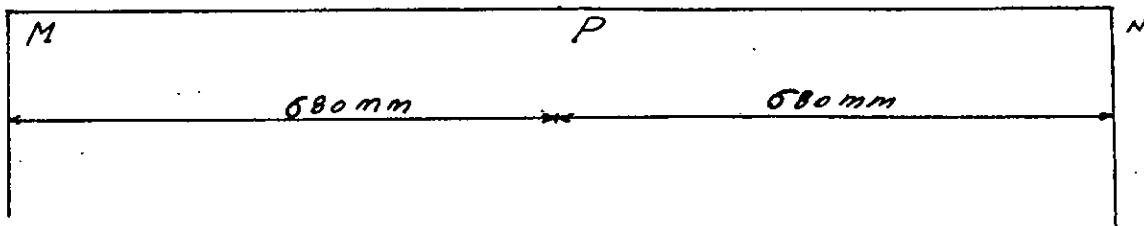
donc $d_0 \geq \sqrt[3]{\frac{10 M_i}{R_{p0}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 68773 \cdot 10^3}{300}}$

$$\boxed{d_0 \geq 132 \text{ mm.}}$$

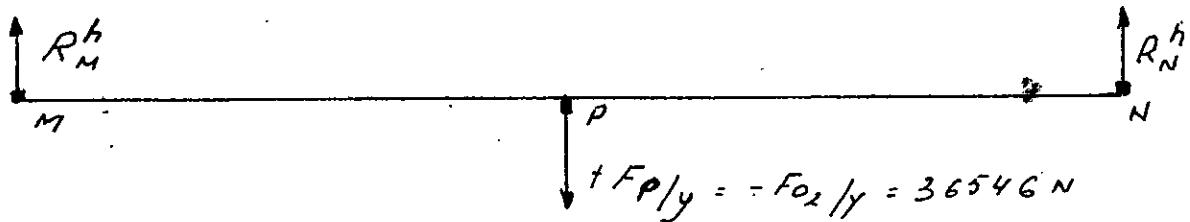
or la construction nous a imposé un diamètre au niveau de O de : 460 mm et 160 mm au niveau de K et L.

Calcul de l'arbre du pignon.

Matière : Nickel chrome . $R_{p0} = 250 \text{ N/mm}^2$



plan horizontal



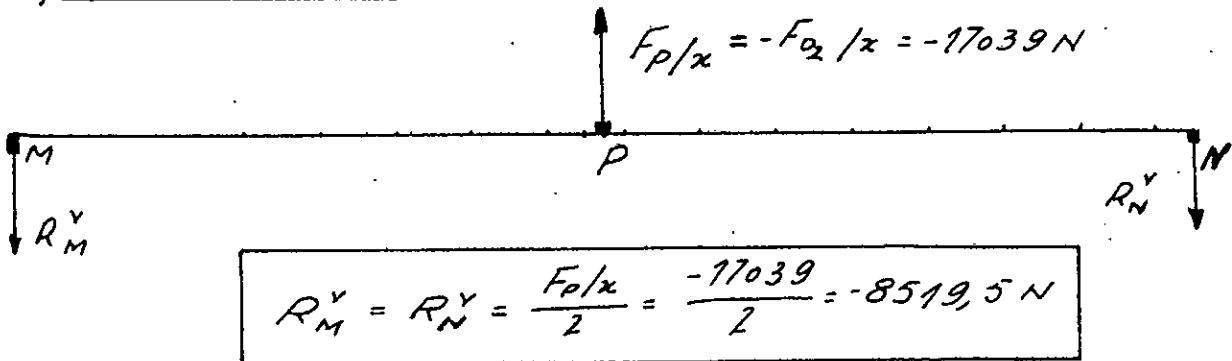
$$\boxed{R_M^h = R_N^h = \frac{F_{Py}}{2} = \frac{36546}{2} = 18273 \text{ N}}$$

$M^f.h$: Moment fléchissant horizontal en P.

$$M^f.h_p = R_M^h \cdot 680 \cdot 10^3 = R_N^h \cdot 680 \cdot 10^3$$

$$M^f.h_p = 18273 \cdot 0,68 = \underline{12426 \text{ m.N.}}$$

plan vertical.



$M^f.v_p$: Moment fléchissant vertical en P.

$$M^f.v_p = R_M^v \cdot 680 \cdot 10^3 = R_N^v \cdot 680 \cdot 10^3$$

$$M^f.v_p = -8519,5 \cdot 0,68 = \underline{-5793 \text{ m.N.}}$$

Moment fléchissant résultant en P.

$$M^f.r_p = \sqrt{M^f.h_p^2 + M^f.v_p^2} = \sqrt{12426^2 + 5693^2}$$

$$M^f.r_p = \underline{13668 \text{ m.N.}}$$

Moment de torsion: $M_t = \underline{3500 \text{ m.N.}}$

d'où le moment idéal:

$$M_i = \sqrt{M^f.r_p^2 + M_t^2} = \sqrt{13668^2 + 3500^2}$$

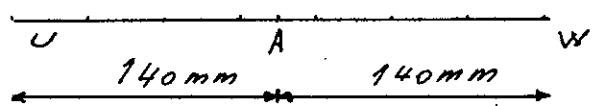
$$\underline{M_i = 14109 \text{ m.N.}}$$

d'où

$$d_p \geq \sqrt[3]{\frac{10 M_i}{R_{pq}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 14109 \cdot 10^3}{250}} = 83 \text{ mm}$$

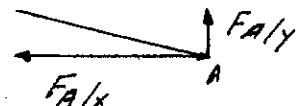
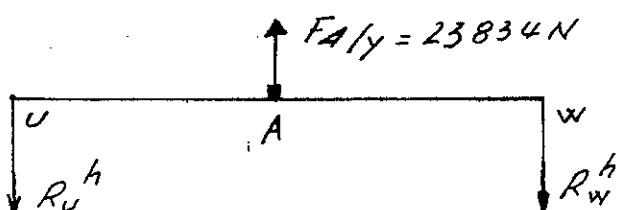
Or notre arbre, au niveau du point α un diamètre de (184,75 mm : D_p pignon) et un diamètre de 90 mm au niveau de M_{ATN}.

Calcul de l'arbre supportant le pied de bielle.



On utilise le même acier que celui qui supporte la roue et les têtes de bielles $\rightarrow 35 \text{ C} 4 \text{ h}$
 $R_{pe} = 300 \text{ N/mm}^2$.

plan horizontal.

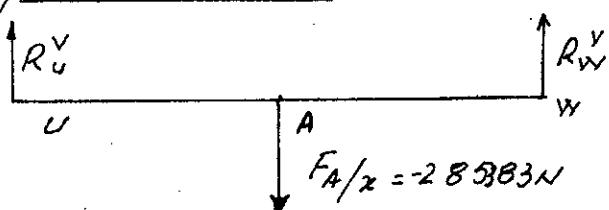


$$R_U^h = R_W^h = \frac{F_A/y}{2} = \frac{23834}{2} = 11917 \text{ N}$$

$$M f^h/A = R_U^h \cdot 140 \cdot 10^{-3} = R_W^h \cdot 140 \cdot 10^{-3}$$

$$M f^h/A = 11917 \cdot 0,14 = 1668 \text{ m.N.}$$

plan vertical.



$$R_U^v = R_W^v = \frac{F_A/z}{2} = -14179,5 \text{ N}$$

$$M f^v/A = R_U^v \cdot 140 \cdot 10^{-3} = R_W^v \cdot 140 \cdot 10^{-3}$$

$$M f^v/A = -14179,5 \cdot 0,14 = -19851 \text{ m.N.}$$

Moment fléchissant résultant au point A.

$$M_{f,r/A}^r = \sqrt{M_{f,h/A}^{r^2} + M_{f,v/A}^{r^2}} = \sqrt{1668^2 + 19851^2}$$

$$\underline{M_{f,r/A}^r = 19920 \text{ m.N.}}$$

Ici on n'a pas de moment de torsion.

$$\text{d'où } d_A \geq \sqrt[3]{\frac{10 M_c}{R_p e}} \quad \text{où } M_c = M_{f,r/A}^r$$

$$d_A \geq \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 19920.18}{300}} = 87 \text{ mm.}$$

Or en A le diamètre de cet arbre 130mm
et en U et W, il vaut 110mm.

Comme j'ai signalé avant qu'on considère d'autres cas
2. Cas où la bielle est perpendiculaire au cercle décrit
par la manivelle. \rightarrow (Tr qui est maximum.).

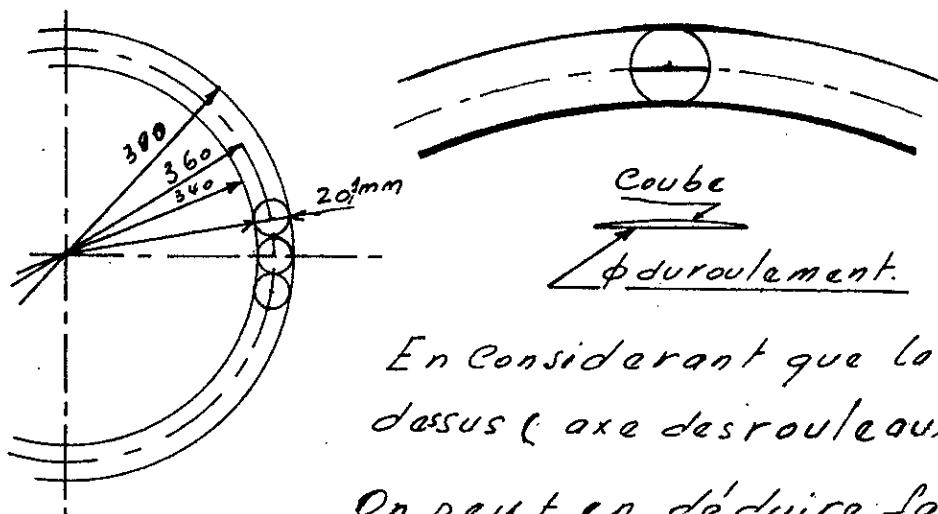
Il n'y a que le diamètre ^{de l'arbre} supportant la roue et les
têtes de bielles qui changent, mais la valeur
trouvée pour ce dernier convient parfaitement
(on aura presque la même valeur déjà calculée).

On pourrait aussi considérer le cas où $d=0$,
Ici, on aura une valeur du diamètre légèrement
inférieur à la valeur prise.

CAUCUL DES ROULEMENTS

Comme nous avons des arbres longs, des charges importantes et des chocs, on utilise des roulements à rouleaux, sauf pour les têtes de bielles, on utilise des roulements à aiguilles pour éviter à ce niveau une capacité de charge statique qui sera très importante du fait qu'on a un arbre de grand diamètre. Comme il y a aussi risque d'augmentation de la longueur de cet arbre.

Les roulements à aiguilles utilisés ont chacun un diamètre de 20,1 mm et sont au nombre de: 56.



En considérant que la coube ci-dessus (axe des rouleaux),

On peut en déduire facilement le nombre d'aiguilles à utiliser.

$$\frac{360 \cdot \pi}{20,1} = \text{n}^{\text{bre}} \text{ d'aiguilles} = N$$

$$N = 56,27$$

On prend

N = 56 roulements à aiguilles.

et la différence: $360 \cdot \pi - 20,1 \cdot 56 = 5,37$

Sert comme jeu à raison de 0,1 mm entre 2 aiguilles à peu près.

12

Roulements au niveau de l'arbre supportant la roue 2.

soit :

L : durée exprimée en millions de tours

C : Capacité de base dynamique du roulement exprimée en Kg.

P : charge équivalente sur le roulement exprimée en Kg.

$\frac{C}{P}$: rapport de charge.

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^{\beta} \Rightarrow \frac{C}{P} = L^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{où}$$

$\beta = \frac{10}{3}$ pour les roulements à rouleaux.

$$\text{d'où } C = PL^{\frac{1}{\beta}} = PL^{\frac{3}{10}} = PL^{0,3}$$

Calculons la charge équivalente P .

puisque n'a pas de charges axiales,

P résultante des deux réactions :

R_K^h et R_K^v ou R_L^h et R_L^v (En prenant P le plus grand).

$$P_1 = \sqrt{35943^2 + 218762^2} = 221695 \text{ N} \approx 22600 \text{ Kg}$$

$$P_2 = \sqrt{24437^2 + 81859^2} = 85430 \text{ N} \approx 8800 \text{ Kg}$$

Donc on prend $P = 22600 \text{ Kg}$.

On prend une durée de fonctionnement de 10.000 h pour tous les roulements utilisés

$$\text{d'où } L^{0,3} = \left(\frac{10.000 \cdot n_2 \cdot 60}{706} \right)^{0,3} \quad \text{où } n_2 : \text{vitesse de rotation de l'arbre portant les roulements}$$

$$n_1 = 60 \text{ tr/mn.} \quad f^3$$

$$\text{d'où } l^{0,3} = \left(\frac{10^4 \cdot 60 \cdot 60}{10^6} \right)^{0,3} = 36^{0,3} = 2,93$$

$$\text{donc } C = \rho \cdot l^{0,3} = 22600 \cdot 2,93 = \underline{\underline{66218 \text{ kg}}}.$$

On prend le roulement à alesage cylindrique n° 22332. dont ses caractéristiques sont :

$$d = 160 \text{ mm.}$$

$$D = 340 \text{ mm.}$$

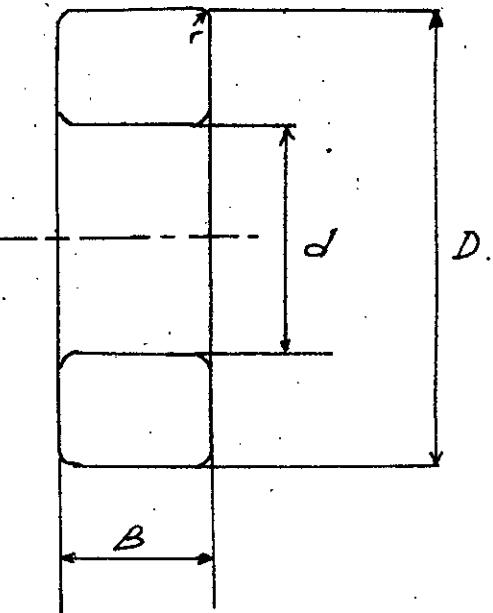
$$B = 114 \text{ mm.}$$

$$r = 5 \text{ mm.}$$

$$C_{dyn} = 86500 \text{ kg}$$

$$C_{stat} = 100000 \text{ kg}$$

$$V_{Max} = 1300 \text{ tr/mn.}$$



Roulements au niveau du pignon.

Ici P est le même que ce soit en mouvement.

$$P = \sqrt{18273^2 + 8519,5^2} = 20161 \approx \underline{\underline{2060 \text{ kg}}}$$

Le pignon tourne à $n_1 = 300 \text{ tr/mn.}$

$$\text{d'où } l^{0,3} = \left(\frac{10^4 \cdot 300 \cdot 60}{10^6} \right)^{0,3} = 180^{0,3} = 4,75$$

$$\text{donc } C = \rho l^{0,3} = 2060 \cdot 4,75 = \underline{\underline{9785 \text{ kg}}}$$

Ici aussi, on prend le roulement à alesage cylindrique n° 22217.

$$d = 90 \text{ mm.}$$

$$B = 40 \text{ mm.}$$

$$D = 160 \text{ mm.}$$

$$r = 3 \text{ mm.}$$

$$C_{dyn} = 14300 \text{ kg}$$

$$C_{stat} = 16000 \text{ kg}$$

$$V_{Max} = 2500 \text{ tr/mn.}$$

Roulements au niveau des pieds de bielles.

Ici l'arbre ne tourne pas complètement
il oscille entre β_{\max} et β_{\min} ($|\beta_{\max}| = |\beta_{\min}|$).

On prend sa vitesse égale à 60 tr/mn
qui donne déjà un roulement plus robuste.

Donc : $P = \sqrt{11917^2 + 141791,5^2} = 142291 \text{ N}$

$$P \approx 14510 \text{ kg}$$

$$L^{0,3} = \left(\frac{10^4 \cdot 60 \cdot 60}{10^6} \right)^{0,3} = 2,93$$

d'où $C = PL^{0,3} = 14510 \cdot 2,93 = 42514 \text{ kg}$.

On prend donc le roulement à aésage
cylindrique N° 22322, dont ses caractéristiques
sont :

$$d = 110 \text{ mm}$$

$$B = 80 \text{ mm}$$

$$D = 240 \text{ mm}$$

$$r = 4 \text{ mm}$$

$$C_{dyn} = 46500 \text{ kg}$$

$$C_{stat} = 50.000 \text{ kg}$$

$$V_{Max} = 1600 \text{ tr/mn.}$$

Calcul de la clavette utilisée ou pied de balle.

Elle est parallèle et est vissée sur l'arbre.

Sa longueur est de 60mm = L

sa largeur est de 24mm = A
et sa hauteur est de 14mm. = B

Section de cisaillement $S_s = L \cdot A$

$$S_s = 24 \cdot 60 = 1440 \text{ mm}^2$$

Contrainte de cisaillement : $\sigma_s = \frac{F}{S_s}$

où $F = 23834 \text{ N}$

$$\text{d'où} \quad \sigma_s = \frac{23834}{1440} = \underline{16,55 \text{ N/mm}^2}$$

En utilisant un clavette d'acier allié :

20 NC 11f (Acier de cémentation).

$$T = 850^\circ \rightarrow R = 600^\circ$$

on aura : $R_r = 1150 \text{ N/mm}^2$ et $R_e = 750 \text{ N/mm}^2$

Résistance au cisaillement :

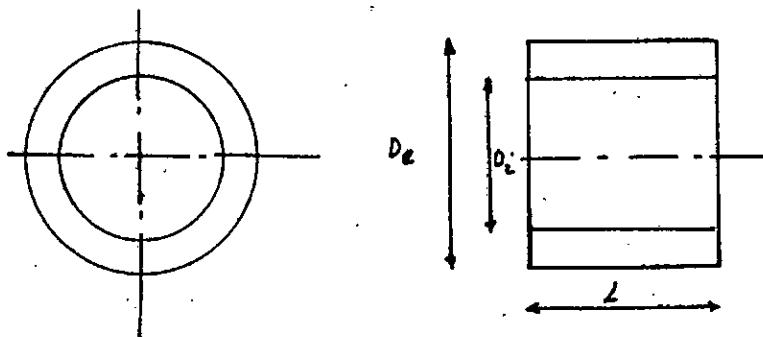
Résistance élastique : $R_s = \frac{R_e}{2} = 375 \text{ N/mm}^2$

et la résistance pratique $R_p = (R_s)_p = \frac{R_s}{k}$

$$\text{où } k = 2 \Rightarrow \underline{R_p = 187,5 \text{ N/mm}^2}$$

$$\text{or } R_p > \sigma_s = 16,55 \text{ N/mm}^2.$$

Epaisseur des bielles (à la tête et au pied).



$$D_i = 340 \text{ mm.}$$

$$L = 90 \text{ mm.}$$

$$R_{pe} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$Y_{rmax} = 284583 \text{ N.}$$

Section soumise à la traction : St

$$S_t = (D_o - D_i)L \Rightarrow \sigma_t = \frac{F}{S_t}$$

$$R_{pe} \geq \sigma_t = \frac{F}{S_t} \Rightarrow S_t \geq \frac{F}{R_{pe}}$$

$$D_o - D_i \geq \frac{F}{R_{pe} \cdot L} \Rightarrow D_o \geq \frac{F}{R_{pe} \cdot L} + D_i$$

$$D_o \geq \frac{284583}{100 \cdot 90} + 340 = 372 \text{ mm}$$

$$\text{On a pris } \underline{D_o = 380 \text{ mm.}}$$

GRAISSAGE

Toutes les parties mobiles de la pompe doivent être bien graissées afin de réduire l'usure et d'assurer le meilleur rendement.

Il faut vérifier les plaques d'huile et les filtres et faire régulièrement les vidanges.

Graissage des roues et pignon

On utilise le système par borbotage.

La roue tournant à vitesse faible, l'huile adhère facilement à celle-ci et est absorbée par le pignon.

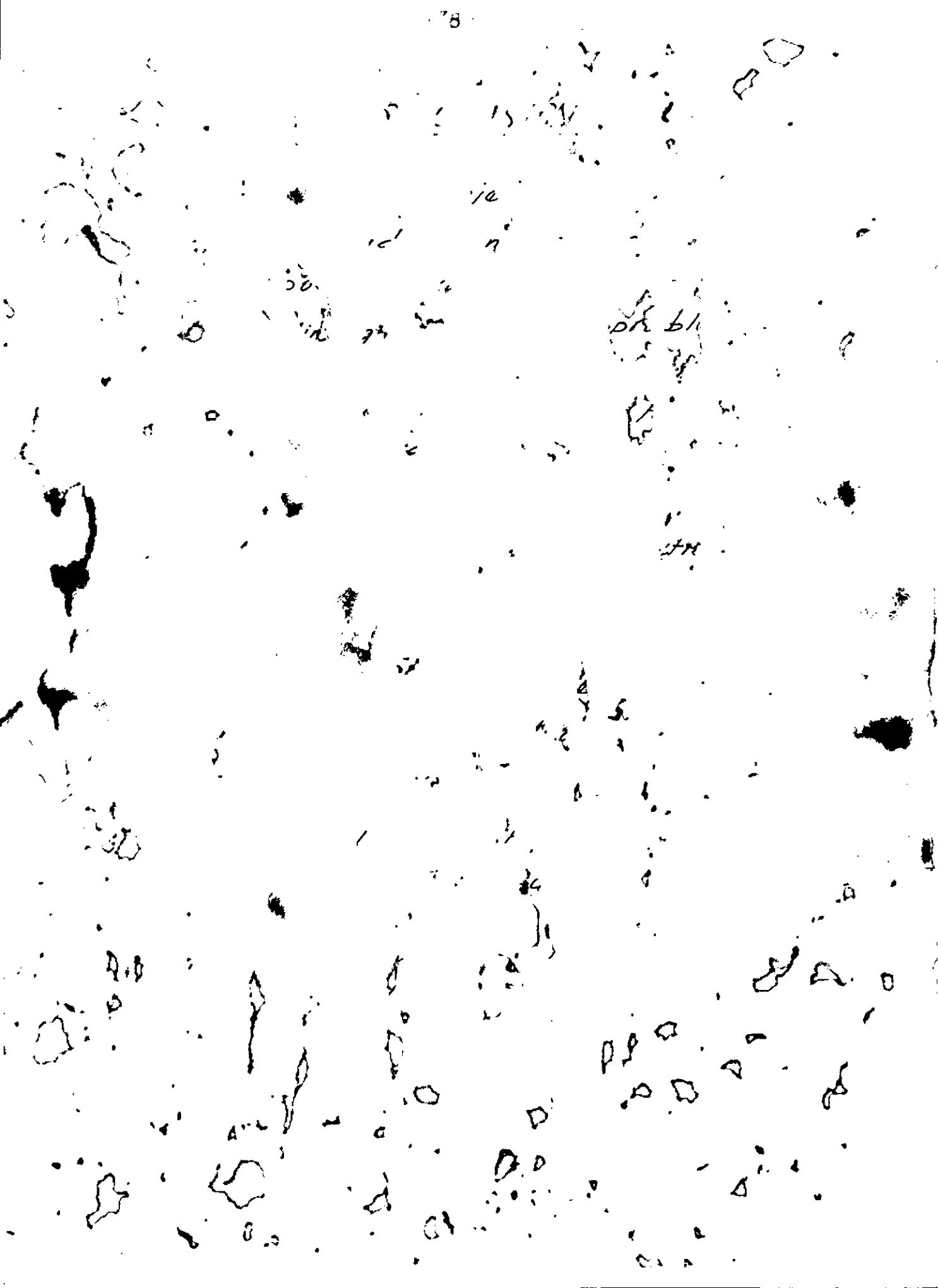
Graissage de l'arbre et glissière (têtes et pieds de bûches)

L'huile circule dans les canalisations à ces organes. La machine étant entraînée par la roue, il est nécessaire d'arrêter les impulsions de canalisation permanentes.

Sur l'arbre, il existe un trou 1/4" dans lequel sont fixés deux radiers. Ce trou est percé au moyen des forets de l'arbre pignon.

Le Vitebregui percera le trou en diagonale portant d'appuis et accroissant aux manchons pour le graissage des roulements à aiguilles.

Les axes et pistons sont également percés de trous sur toute leur longueur conduisant ainsi jusqu'aux roulements des pieds de bielles.



BIBLIOGRAPHIE

R. BASQUIN

: les machines

DELAGRAVE

R. PRUDHOMME
A.L. TOURANCHEAU
A. KERGOAT

} Eléments de Construction. T₃

DUNOD

F. BERNARD
A.L. TOURANCHEAU
L. VIVIER

} Eléments de Construction. T₆

DUNOD.

F. BERNARD
L. VIVIER

} Eléments de Construction. T₅.

DUNOD.

G. LENORMAND
J. TINEL

} Momento de dessin industriel. T₂

FOUCHER

G. HENRIOT

: traité théorique et pratique
des engrenages. T₁

DUNOD

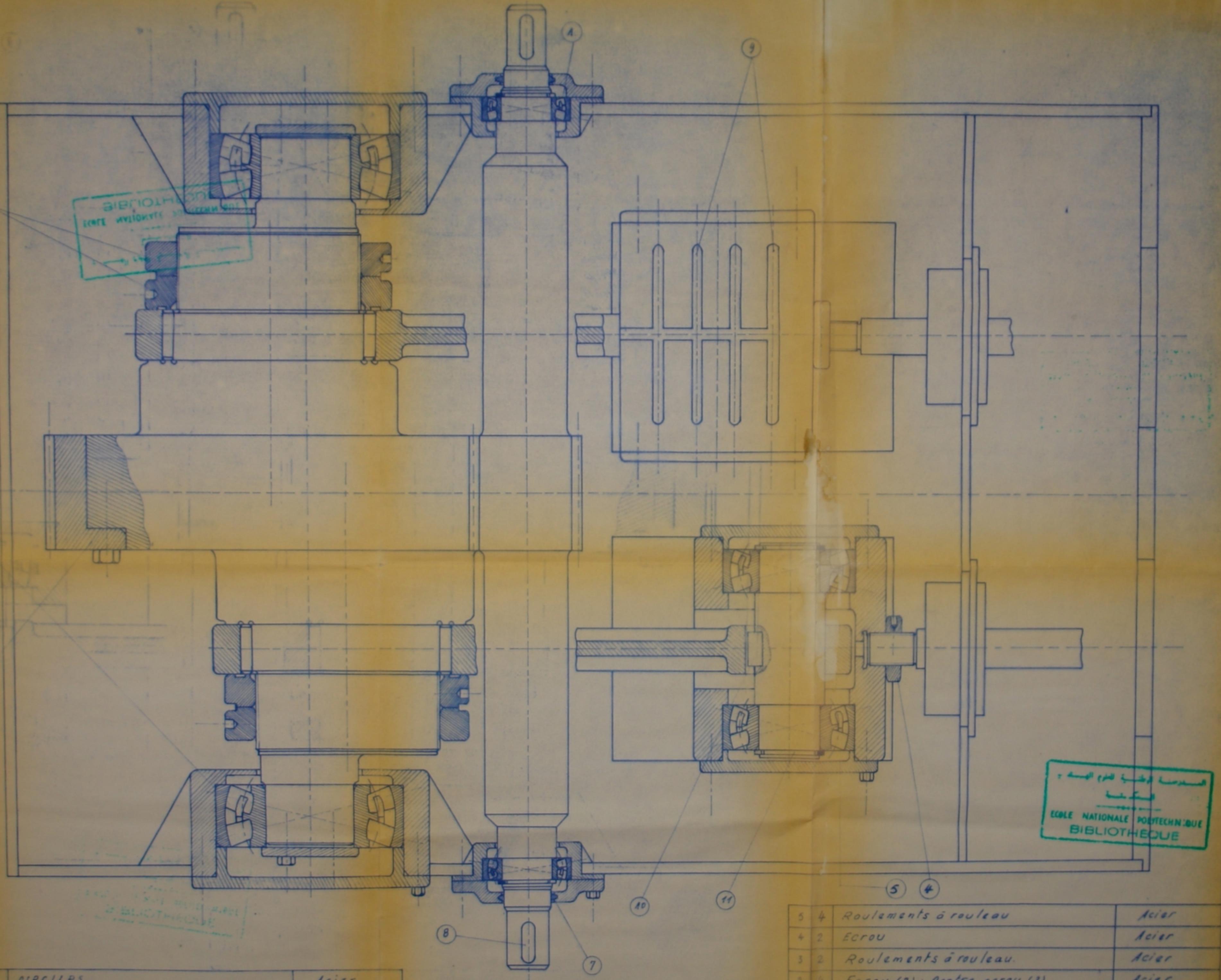
Un livre en Roumain.

S.H.F

: catalogue général.

PIEROZAK

: Cours de Construction mécanique.

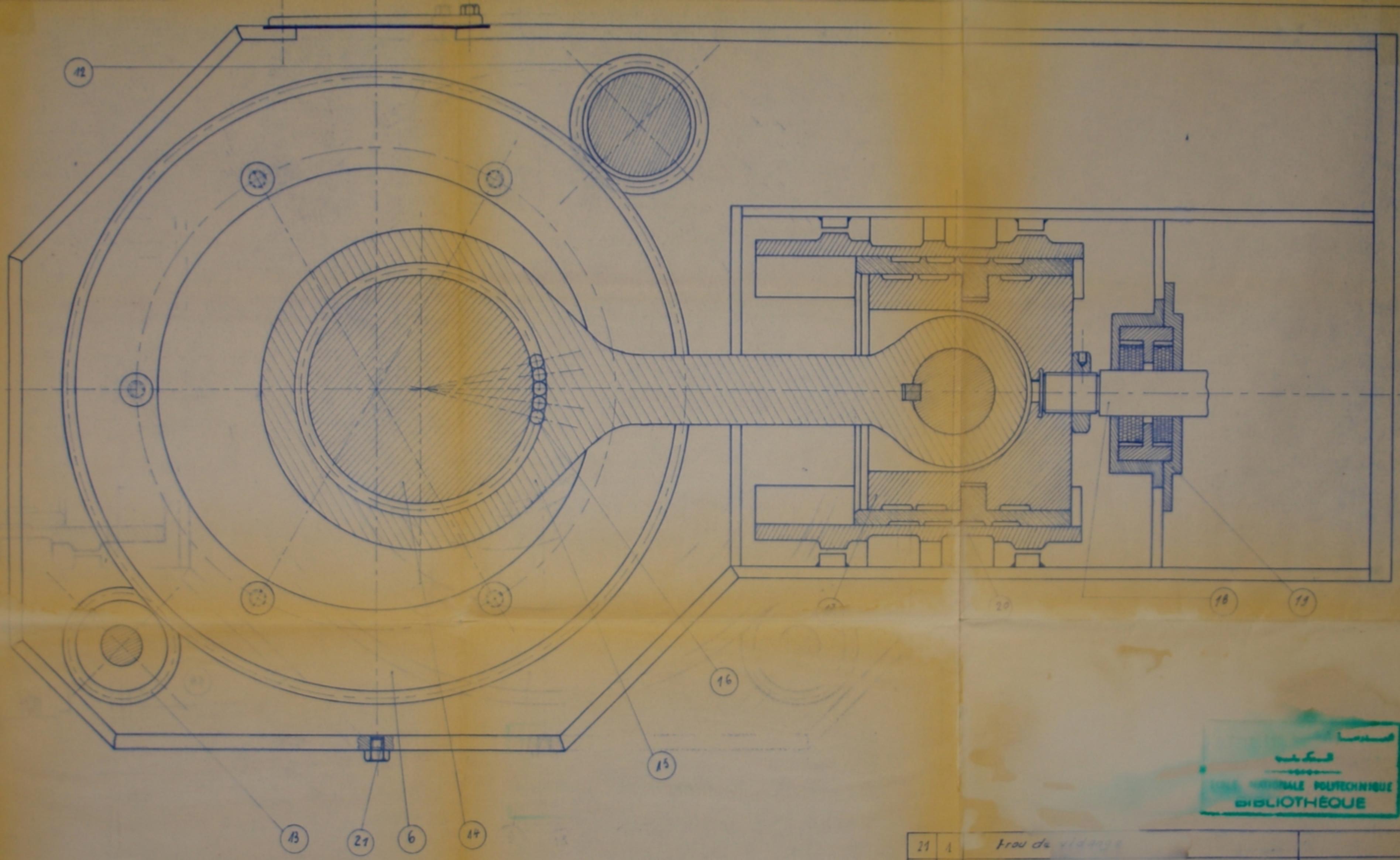


11	4	CIRCLIPS	Acier
10	2	Clavette parallèle 60.24x74.	Acier
9	8	rainures pour le graissage	
8	2	Clavette parallèle	Acier
7	2	joint torique	feutre
6	1	roue	Acier Allié
OP.N°		Designation des pièces	Matière

5	4	Roulements à rouleau	Acier
4	2	ECROU	Acier
3	2	Roulements à rouleau.	Acier
2	4	Ecrou (2); Contre ecrou (2)	Acier
1	2	Roulements à rouleau	Acier
OP.N°		Designation des pieces.	Matière
ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE			
THESE DE FIN D'ETUDE			BOUZIANE A.
COUPE D'UNE POMPE A PISTON			Dép: MECANIQUE
BROCHE (PLAN HORIZONTAL)			Ech: 1/4

PM005/77

-1-



PM005177

-2-

Op.	Designation des pièces	Matière
21	Frou de vidange	
20	Glissière	Acier
19	Ensemble: Guidage, étanchéité	
18	piston	Acier Ni-Cr
17	Coulisseau	Acier
16	Roulements à aiguilles	Acier
15	Bielle	30NC 11f
14	Vilobrequin (arbre)	Acier 35C08H
13	Roue (pompe à engrenage)	
12	Pignon	Acier Allié
OP		
ÉCOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE		
MÉTIERS DE FIN D'ÉTUDE		
SECTION LONGITUDINALE d'une POMPE à PISTON DUPLEX		
Dep: Mécanique		
Ech: 1/4		



