الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي

Ministère de l'Enseignement Supérieur

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

Département : **ELECTRONIQUE**

Projet de Fin d'Etudes

Sujet

COMMANDE LINEAIRE
A RETOUR D'ETAT
D'UN SYSTEME INSTABLE

Proposé par :
Mr AIT-CHEIKH

Etudié par :
H. OUDINA

Dirigé par :
Mr AIT-CHEIKH

Promotion : 1990

E.N.P. - 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH — ALGER

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

—«0»—

وزارة التعليم العالى

Ministère de l'Enseignement Supérieur

—»0«—

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE

—«0»—

Département : **ELECTRONIQUE**

—o0o—

Projet de Fin d'Etudes

Sujet

COMMANDE LINEAIRE
A RETOUR D'ETAT
D'UN SYSTEME INSTABLE

Proposé par :
Mr AIT-CHEIKH

Etudié par :
H. OUDINA

Dirigé par :
Mr AIT-CHEIKH

Promotion : 1990

E.N.P. - 10, Avenue Hacen Badi - EL-HARRACH — ALGER

** DEDICACES **

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents, qui m'ont soutenu durant toute ma carrière scolaire et universitaire et pour les privations consentis afin d'assurer mon avenir.

A mes frères et soeurs et à toute ma famille.

A tous mes amis, et particulièrement à S-MERABETE ; H-ADJEDAR ; K-AOUA ; N-SATAR.

* H-OUDINA *

** REMERCIMENTS **

Au terme de ce modeste travail , j'exprime une profonde reconnaissance à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin par leur aide et support, tant physique que moral à l'élaboration de cet humble travail.

Ma profonde gratitude va plus particulièrement à mon promoteur: monsieur-AIT CHEIKH pour son aide et ses précieux conseils , qu'il n'a cessé de me prodiguer , ainsi qu'à monsieur-DERRAS pour leurs conseils tout au long de mon travail.

Je remerci également l'ensemble des professeurs de L'E.N.P auquels nous devons notre formation , ainsi que tous nos amis pour leur soutien moral constant.

* H-OUDINA *

SOMMAIRE

* INTRODUCTION

* CHAPITRE 1 : GENERALITES

1) Notion de système
2) Notion de modèle mathématique
3) Notion de système linéaire
4) Notion de commande optimale
5) Notion d'état
6) Notion de variables d'état
7) Commandabilité et observabilité
a) Commandabilité
a-1) Définition
a-2) Critère de commandabilité
a-3) Stabilisabilité
b) Observabilité
b-1) Définition
b-2) Critère d'observabilité
b-3) Détectabilité
8) Algorithme de Gram-Schmidt
9) Stabilité
9-a) Définition
9-b) Critère de stabilité

* CHAPITRE 2 : COMMANDE PAR CRITERE QUADRATIQUE

I) Introduction
II) Formulation du problème
II-1) Cas continu
II-2) Cas discret
III) Interprétation physique du critère quadratique
IV) Détermination de la commande optimale
IV-1) Cas continu
IV-2) Cas discret
V) Résolution de l'équation de Riccati
V-1) Introduction
V-2) Formulation des équations Hamiltonniennes associées
a) Cas continu
b) Cas discret
V-3) Fonction signe d'une matrice
1) Définition
2) Propriétés de la fonction signe de matrice
V-4) Algorithme de Newton
V-5) Algorithme de la résolution de l'équation de Riccati
1) Théorème
2) Résumé de l'algorithme

* CHAPITRE 3 : COMMANDE OPTIMALE AVEC IMPOSITION DES VALEURS PROPRES

I) Introduction
II) Formulation du problème
III) Controle optimal
1) Cas où toutes les valeurs propres sont simples et réelles
2) Cas où toutes les valeurs propres sont simples réelles ou complexes
3) Cas des valeurs propres multiples

* CHAPITRE 4 : RECONSTRUCTION D'ETAT

I) Introduction
II) Définition d'un estimateur
1) Cas déterministe
2) Cas stochastique
III) Méthodes de synthèse des estimateurs identité
III-1) Méthode de placement des valeurs propres
III-2) Estimateur optimal
IV) Principe de séparation
V) Filtre de Kalman
V-1) Détermination d'un estimateur optimal
1) Gain du filtre de Kalman
2) Stabilité du filtre de Kalman
V-2) Détermination d'un estimateur par imposition des valeurs propres

* CONCLUSION

* ANNEXE 1 : Principe du minimum

* ANNEXE 2 : Rappels mathématiques

* ANNEXE 3 : Exemples d'applications

* ANNEXE : Programmes

* BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION

INTRODUCTION:

Pour une réalisation perfectionnée et stable de tout système industriel le critère de stabilité doit être bien étudier.

Dans ce but,nous présentons dans cette présente étude une méthode générale facilement traitable par micro-ordinateur , qui permet en premier lieu la détermination d'une commande optimale assurant la stabilité du système en boucle fermée , mathématiquement ceci signifie que les parties réelles des valeurs propres de ce dernier système se situent dans le demi plan complexe gauche.

Néanmoins,ces valeurs propres peuvent être situées près de l'axe imaginaire,d'où risque de perte de la stabilité si une variation éventuelle des matrices représentant le système se produit.En deuxième lieu et dans le cadre de la même méthode citée ci-dessus,nous allons voir comment peut-on fixer les valeurs propres du système en boucle fermée au préalable.

Nous avons structuré notre travail comme suite:

En premier lieu,dans le chapitre I nous avons fait une sorte d'introduction regroupant quelque notions fondamentales d'Automatique,nécessaires pour la compréhension de ce qui suivra dans les autres chapitres.
Par ailleurs nous avons envisagé dans le chapitre II la commande par critère quadratique à horizon infini afin de déterminer une commande optimale au sens de ce critère stabilisant notre système.
Comme nous allons le voir ceci revient à résoudre l'équation de Riccati stationnaire.Dans ce but un programme écrit en FORTRAN,basé essentiellement sur la notion de la fonction signe de matrice,a été établit.
Dans le chapitre III nous avons donné la procédure de calcul d'une commande optimale,avec imposition des valeurs propres du système en boucle fermée.
Le dernier chapitre a été consacré à la reconstruction d'état et à décrire le mode d'exploitation de la procédure élaboré au chapitre précédent,pour déterminer l'estimateur optimal nécessaire à la réalisation de la commande optimale par retour d'état.
Enfin nous avons tiré une conclusion dans le cadre de cette étude.

CHAPITRE .1.

Generalites

1- Notion de système: [5]

La notion de système n'étant pas nouvelle,le mot système est couramment utilisé dans les domaines de la vie à savoir système électrique,hydraulique,économique,etc...
On appelle système un ensemble composé de parties ordonnées.Ces parties ont chacune leurs lois propres car il existe entre les parties des liens des relations identifiables au moins pour quelques unes d'entre elles et qui s'enchainent souvent l'une à l'autre.Un système existe pour atteindre un but et son fonctionnement est controlé.
L'état d'un système est lié à un ensemble de variables,en plus tout système est affecté par les facteurs temps,milieu et contraintes.La sensibilité d'un système est le degré de changement qui affecte son comportement quand les paramètres varient un par un.

2- Notion de modèle mathématique: [1]

Il est nécessaire de représenter le comportement du système réel par un ensemble de relations mathématiques qui constitue le modèle mathématique du système.
La construction du modèle mathématique d'un système est appelée identification dont la précision peut être mesurée par la différence entre la sortie du système réel et celle du modèle.
En général l'identification peut être divisée en deux phases distinctes:
-Détermination de la structure
-Estimation des pramètres
La structure du modèle est déterminée à partir de la connaissance physique et l'estimation des paramètres par des données expérimentales.
Les modèles mathématiques peuvent consister en:
-Des équations algébriques (pour des systèmes statiques)
-Des équations intégro-différentielles (pour des systèmes dynamiques)
-Des équations aux dérivées partielles (pour des systèmes à paramètres distribués)
-Des équations aux différences (pour des systèmes à temps discret)

3- Notion de système linéaire: [7]

On appelle un système linéaire tout système dont les lois physiques régissant son comportement s'expriment par des équations (différentielles ou aux différences) linéaires.

Un système linéaire a l'avantage d'être étudié et conçu par des méthodes disponibles (analytiques,graphiques ou expérimentales) simples en leurs principe et extremement puissantes.
Un système linéaire a les propriétés suivantes:

a)La réponse d'un système linéaire à plusieurs entrées est la somme de ce que seraient ses réponses à chacune d'elles,c'est le principe de superposition (les causes ajoutent leurs effets).

b)Si les entrées d'un système linéaire sont multipliées,les sorties se trouvent multipliées par le même facteur c'est le principe d'homogénéité (proportionnalité des effets aux causes).

c)Dans le cas d'un système linéaire invariant si l'action de certaines entrées est simplement décalée dans le temps,il en va de même de la réponse correspondante,c'est le principe d'invariance temporelle.

4- Notion de commande optimale:

Dans la commande optimale nous cherchons une fonction que nous désignerons et définirons comme la fonction de commande et qui nous permettra d'atteindre l'objectif désiré.
L'ingénieur chargé de la conception de la commande a des objectifs relatifs à la stabilité,au degré de stabilité,au temps de réponse et à la précision.

5- Notion d'état: [5]

L'état à l'instant t_0 d'un système représente l'ensemble des informations qu'il faut connaître à cet instant pour pouvoir déterminer son évolution dans le temps lorsqu'on se donne des fonctions d'entrée $u(t_0,t)$.Par évolution il faut entendre "états futurs".La seule connaissance de $u(t_0,t)$ ne permet pas de connaître $y(t_0,t)$.L'information supplémentaire nécessaire à sa détermination est par définition l'état du système à l'instant t.
Vu sous cet angle,l'état apparait comme l'ensemble des informations résumant le passé du système et comme un paramètre associé à l'ensemble des couples entrées-sorties.

6- Notion de variables d'état: [5]

Les variables d'état sont des variables qui évoluent avec l'état du système et déterminent ainsi l'état du système à tout instant $t_i > t_0$ où t_0 étant l'instant initial pris comme référence.

7- Commandabilité et observabilité: [1]

Les notions de commandabilité et d'observabilité possèdent une grande importance pour l'étude des systèmes dans l'espace d'état. Il est indispensable que le système à régler ou à observer soit commandable et observable pour l'application des méthodes de réglage modernes. Il est évident que la commande et la régulation de tout procédé physique imposent que l'on soit maître du procédé et que l'on sache dans quel état il se trouve.

a-) COMANDABILITE:

a-1) Définition:

Un système est dit commandable, si par une commande convenable on peut l'amener en un temps fini d'un état à un autre.
Une partie seulement du système est dite commandable si certaines composantes seulement du vecteur d'état peuvent être ramenées en un temps fini d'un état à un autre.
D'une façon intuitive, on dit qu'une variable est commandable si elle subit une action de la commande d'entrée u(t), sinon elle est dite non commandable.
Physiquement un système non commandable est un système dont certaines états ne sont pas reliées directement ou indirectement, par l'intermédiaire d'autres états, à une entrée, ou encore un système qui n'a pas suffisament d'entrée.

a-2) Critère de commandabilité:

Le système donné par (A,B) (respectivement matrice d'évolution (nxn) et matrice d'application de la commande (nxm)) est commandable si et seulement si:

$$\text{rang}(Q_c) = n \quad \text{où} \quad Q_c = [B \ AB \ \ldots\ldots A^{n-1}B]$$

a-3) Stabilisabilité:

Si la paire (A,B) n'est pas commandable, alors elle est stabilisable si et seulement si les états non commandables sont asymptotiquement stables i-e:

$$(A,B) \text{ stabilisable} \Leftrightarrow \exists\, L : \text{Réel}(\lambda_i[A-BL]) < 0.$$

b-) OBSERVABILITE:

b-1) Définition:

Un système est dit observable si de l'observation de la sortie pendant un temps fini,on peut déduire l'état initial.
Une partie seulement du système est dite observable,si de l'observation de certaines grandeurs seulement de la sortie,on peut déduire l'état initial correspondant.
D'une façon intuitive,on dit qu'une variable est observable si de l'observation de sa sortie pendant un temps fini,on peut déduire son état initial sinon elle sera inobservable.
Pour pouvoir construire des observateurs, il est indispensable que le système soit observable.
Physiquement, un système non observable est un système sur lequel on ne fait pas toutes les mesures nécessaires pour observer son état, certains de ces états ne sont pas reliés directement ou indirectement aux sorties, ou encore l'organisation interne du système est telle qu'on ne peut séparer deux états.

b-2) Critère d'observabilité:

Le système donné par (A,C) (A:matrice d'évolution (nxn) et C:matrice de sortie (rxn)) est observable si et seulement si:

$$\text{rang } (Q_o) = n \quad \text{où} \quad Q_o = [\ C^T \ A^T C^T, \ldots\ldots, (A^T)^{n-1} C^T\ ]$$

b-3) Détectabilité:

Si la paire (A,C) n'est pas observable, alors elle est détectable si et seulement si les états non observables sont asymptotiquement stables.

c-à-d $\exists$ M : Réel $(\lambda_i[\ A + MC\ ]) < 0$

8- Algorithme de GRAM- SCHMIDT:

Supposons que l'on ait les vecteurs V1,V2,.....,Vk, ils sont linéairement indépendants s'il existe $(\ \lambda_i\ )_{i=1}^{k}$ telque:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots\ldots + \lambda_k V_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0$$

avec : $i = 1,2,\ldots,k$

Dans le cas contraire, ils sont linéairement dépendants c-à-d qu'il existe des λ_i non nuls telque:

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \ldots\ldots + \lambda_k V_k = 0$$

Déterminer le rang d'une matrice revient à trouver le nombre de vecteurs (lignes ou colonnes) linéairement indépendants.

Formule de GRAM-SCHMIDT:

$$E_k = V_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle V_k , E_i \rangle}{\langle E_i , E_i \rangle} E_i$$ où V_k sont les vecteurs à tester.

Si $E_k = 0$, V_k serait une combinaison linéaire de $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$.

9- Stabilité: [4]

La stabilité est un impératif de tout système conçu par un ingénieur,et l'une des premières qualités que l'on réclame à une régulation ou une commande.

9-a) Définition:

On dit qu'un système est stable quand il tend à revenir à son état initial après une perturbation.Il est instable quand il tend à s'en éloigner davantage.
On dit aussi qu'un système est stable si sa réponse à l'impulsion unité tend vers zéro quand le temps tend vers l'infini.L'étude du degré de stabilité d'un système peut souvent fournir des renseignements précieux sur son comportement,c'est à dire,s'il est stable,est-il très loin d'être instable.

9-b) Critère de stabilité:

-Cas continu:

Le système $\dot{X}(t) = A.X(t)$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A ont une partie réelle négative.

-Cas discret:

Le système $X(k+1) = A.X(k)$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice A ont un module strictement inférieur à l'unité.

CHAPITRE .2.

Commande
par critere quadratique

I-INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous nous proposons d'introduire tout le formalisme de la commande optimale par critère quadratique simplifié (à horizon infini),son existence,son application et ces buts.

La minimisation d'un critère quadratique constitue l'un des moyens de parvenir à la détermination d'une structure de commande par retour d'état pour les systèmes multivariables.

En effet un critère quadratique permet d'exprimer d'une manière convenable les qualités globales recherchées par la commande tant en assurant le meilleur compromis entre certaines performances (précision ou rapidité de réponse,stabilité,...) représentées par des termes de pondération faisant intervenir les sorties ou les variables d'état,et une économie d'énergie.

Un autre avantage,non négligeable de cette méthode est de conduire à des développements mathématiques nombreux et puissants.

II-FORMULATION DU PROBLEME: [2]

II-1 Cas continu:

Considérons le système linéaire invariant:

$$\dot{X}(t)=A.X(t)+B.U(t)$$

où
- $X(t)$ est un n-vecteur,
- $U(t)$ est un m-vecteur,
- A,B étant des matrices constantes de dimensions respectives nxn et nxm.

A ce système,on associe le critère quadratique suivant:

$$J= (1/2) \int_{0}^{\infty}(U^{T}(t).P.U(t)+X^{T}(t).Q.X(t))dt$$

Le problème consiste à trouver un vecteur $U=-G.X$ minimisant le critère ci-dessus,afin que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable c-à-d:

$$\begin{cases} X(t)=\tilde{A}.X(t) \\ \\ \tilde{A}=A-B.G \ ; \ \text{Réel}\ \lambda_{i}(\tilde{A})<0 \end{cases}$$

II-2 Cas discret: Considérons le système linéaire invariant

$$X(k+1)=A.X(k)+B.U(k)$$

où
- $X(k)$ est un n-vecteur
- $U(k)$ est un m-vecteur
- A,B étant des matrices constantes de dimensions respectives nxn et nxm.

A ce système, on associe le critère quadratique suivant:

$$J= (1/2) \sum_{k=0}^{k=\infty} (U^T(k).P.U(k)+X^T(k).Q.X(k))$$

Le problème est alors de trouver un vecteur $U=-G.X$ minimisant le critère ci-dessus, afin que le système en boucle fermée soit asymptotiquement stable c-à-d:

$$\begin{cases} X(k+1)=\tilde{A}.X(k) \\ \tilde{A}=A-B.G \;;|\lambda_i(\tilde{A})|<1 \end{cases}$$

III-INTERPRETATION PHYSIQUE DE CRITERE QUADRATIQUE:[5]

Dans les deux cas, les matrices Q et P sont des matrices de pondération respectivement pour le vecteur d'état X et le vecteur d'entrée U. La matrice Q doit être une matrice (n,n) et la matrice P une matrice (m,m). En plus, ces matrices doivent être symétriques et définies positives de sorte que, pour $X\neq 0$ et $U\neq 0$, on ait $X^T.Q.X \geq 0$ et $U^T.P.U >0$. En respectant les conditions mentionnées, on peut choisir librement les matrices de pondération Q et P.

Pour obtenir une commande optimale, on exige que le critère quadratique prenne une valeur minimale. Dans ce but, on peut intervenir uniquement sur le vecteur d'entrée U qui sera considéré par la suite comme vecteur de commande.

On essaie de donner une signification physique au critère quadratique. Lorsqu'on suppose le choix le plus simple pour les matrices de pondération Q et P comme matrices diagonales. On voit que l'élément X_i du vecteur d'état X intervient dans le critère quadratique avec le terme $\int q_{ii}.X_i^2$. De même, l'élément U_i du vecteur d'entrée U intervient avec le le terme $\int p_{ii}.U_i^2 dt$.

On peut interpréter ces termes comme énergie (effective ou fictive) des grandeurs d'états.En particulier,les termes $\int P_{ii} . U_i^2 dt$ représentent l'énergie de commande et donnent donc une mesure pour l'effort qui doit être exercé par l'organe de commande.La minimisation du critère quadratique J correspond donc à une minimisation de l'énergie liée au système à commander et l'organe de contrôle.
Cependant,le plus souvent,il est difficle d'attribuer une signification physique concrète au critère quadratique, en particulier lorsque les grandeurs d'état ne possèdent pas une signification physique immédiate,le critère quadratique doit alors être interprété comme un critére purement mathématique.

IV)DETERMINATION DE LA COMMANDE OPTIMALE: [2]

Comme on l'a mentionné auparavant,le problème d'optimisation dynamique consiste à déterminer un vecteur U^* admissible faisant suivre au système une trajectoire admissible X^* qui minimise le critère quadratique.Pour trouver le minimum de ce dernier on fera appel au principe du minimum.

IV-1)Cas continu:

On a le problème du régulateur suivant:

$$\mathrm{Min}(J)=\mathrm{Min}\left[(1/2)\int_0^{\infty}(X^T.Q.X + U^T.P.U)dt\right] \;;$$

où: Q est une matrice définie non négative et
P est une matrice définie positive,

avec les contraintes dynamiques linéaires:

$$\dot{X}(t)=A.X(t)+B.U(t). \qquad (IV-1-1)$$

Pour résoudre ce problème,écrivons son Hamiltonien:

$$H= (1/2)\left[X^T.Q.X + U^T.P.U\right] + \lambda^T(t)\left[A.X(t) + B.U(t)\right] \quad (IV-1-2)$$

le principe du minimum (continu),appliqué à ce dernier,conduit alors aux équations suivantes:

$$\dot{X}(t)=A.X(t)+B.U(t) \qquad (IV-1-3)$$

$$\dot{\lambda}(t)=-(Q.X(t)+A^T.\lambda(t)) \qquad (IV-1-4)$$

$$P.U(t)+B^T.\lambda(t)=0 \qquad (IV-1-5)$$

En tenu compte que P est définie positive,on tire:

$$U(t)=-P^{-1}.B^T.\lambda(t) \qquad (IV-1-6)$$

Remplaçons l'expression de U(t) dans (IV-1-3) et posons

$V=B.P^{-1}.B^T$ on obtient:

$$\dot{X}(t)=A.X(t)-V.\lambda(t) \qquad (IV-1-7).$$

Etant donné que la commande optimale recherchée est de la forme $U(t)=-G.X(t)$ avec G une matrice constante de dimension (m,n),une comparaison de cette dernière équation avec l'équation (IV-1-6), nous permet de voir aisément que le vecteur d'état adjoint $\lambda(t)$ et le vecteur d'état X(t) sont reliés par la relation $\lambda(t)=R.X(t)$ (IV-1-8);où R est une matrice constante de dimension (n,n),d'où:

$$\frac{\partial \lambda(t)}{\partial t}=\frac{\partial R.X(t)}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\lambda}(t)=R.\dot{X}(t) \quad (IV-1-9).$$

En substituant l'expression de $\lambda(t)$,donnée par (IV-1-8),dans les deux équations (IV-1-4) et (IV-1-7),on obtient:

$$\dot{X}(t)=(A-V.R)X(t) \quad (IV-1-10),$$

$$\dot{\lambda}(t)=-(Q+A^T.R)X(t) \quad (IV-1-11).$$

En remplaçant $\dot{X}(t)$ par son expression (IV-1-10) dans l'équation (IV-1-9) on aura:

$$\dot{\lambda}(t)=R(A-V.R)X(t) \quad (IV-1-12).$$

En comparant les deux équations (IV-1-11) et (IV-1-12) on obtient:

$$R(A-V.R)=-Q-A^T.R$$

d'où finalement

$$R.A + A^T.R - R.V.R + Q = 0 \qquad (IV-1-13),$$

c'est l'équation de Riccati stationnaire;où R est une matrice inconnue de dimension (n,n).On voit donc que la détermination de la commande optimale,d'un système linéaire continu,se résume à la résolution de l'équation matricielle de Riccati, cette commande optimale s'exprime par la relation:

$$U(t)=-P^{-1}.B^{T}.R.X(t).$$

L'existence et l'unicite de la solution de l'équation de Riccati peuvent être étudiées par le théorème suivant:

<u>THEOREME</u> <u>1)</u> La solution de l'équation de Riccati R existe si le couple(A,B) est commandable et elle est unique si le couple $(A,Q^{1/2})$ est observable.

<u>Remarque:</u>

Pour vérifier les deux premières conditions du théorème -1 il suffit de tester l'observabilité et la commandabilité,pour cela nous avons élaboré un programme pour ces deux tests qui se compose de deux subroutines.La première GOUVER qui donne la matrice Q_c et Q_o respectivement à partir des matrices (A,B) et (A,C),l'autre la subroutine INDV qui détermine le rang à partir de l'algorithme de Gram-Schmidt.

<u>-Propriétés de stabilité du système en boucle fermée:</u>

Si la solution de l'équation de Riccati existe et unique la stabilité du système en boucle fermée est alors toujours assurée.On peut démontrer cela tout en basant sur le théorème de stabilité de Lyapunov suivant:

<u>THEOREME</u> <u>2)</u> Soit le système en boucle fermée suivant $\dot{X}(t)=A.X(t)$ et soit la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(X)=X^{T}.R.X \qquad \text{avec } R=R^{T}>0.$$

Si $\dfrac{d\,V(X)}{d\,t} < 0$ (définie négative pour tous les états),alors le système ci-dessus est asymptotiquement stable.

Rappelons que nous avons le système à l'état fermé suivant:

$$\dot{X}(t)=(A-B.P^{-1}.B^{T}.R)X(t)$$

avec la fonction de Lyapunov suivante:

$$V(X)=X^{T}.R.X \;;$$

où $R=R^T>0$, solution de l'équation matricielle de Riccati.
En dérivant $V(X)$ nous obtenons:

$$\frac{d\,V(X)}{d\,t} = \dot{V}(X) = \dot{X}^T.R.X + X^T.R.\dot{X}.$$

En remplaçant dans cette dernière équation $\dot{X}^T$ et $\dot{X}$ respectivement par: $X^T(A-B.P^{-1}.B^TR)^T$, $(A-B.P^{-1}.B^T.R)X$, on aura:

$$\dot{V}(X) = X^T.\left[A^T.R - R.B.P^{-1}.B^T.R + R.A - R.B.P^{-1}.B^T.R\right].X.$$

D'autre part, nous savons que:

$$A^T.R - R.B.P^{-1}.B^T.R + R.A = -Q\ ,$$

en substituant cette expression dans l'équation de $\dot{V}(X)$ on aura:

$$\dot{V}(X) = -X^T.(Q+R.B.P^{-1}.B^T.R).X = -X^T.Q.X - X.R.B.P^{-1}.B^T.R.X.$$

Maintenant si Q est semi-définie positive et R définie positive nous avons:

1) $-X^T.Q.X \leq 0$

2) $-X^T.R.B.P^{-1}.B^T.R.X \leq 0.$

De ces deux conditions, nous en déduisons que $\dot{V}(X) \leq 0$, d'où d'après le théorème de Lyapunov, le système est asymptotiquement stable.

En résumé:

La commande optimale permet de stabiliser le système à l'état fermé sous les conditions suivantes:

1) $Q^T = Q \geq 0$, $P^T = P > 0$

2) (A,B) commandable , $(A,Q^{1/2})$ observable.

IV-2)Cas discret:

D'une manière similaire,on peut déterminer une commande optimale pour un système linéaire et discret.Pour cela,appliquons cette fois-ci le principe du minimum dans le cas discret,ce qui conduit à l'équation de Riccati suivante:

$$A^T.R.A - P - A^T.R.B.(B^T.R.B + P)^{-1}.B^T.R.A + Q = 0.$$

Avec les mêmes conditions pour le cas continu,on peut montrer que:

$$|\lambda_i(\tilde{A})| < 1 \text{ ;où } \tilde{A} = A - B.(B^T.R.B + P)^{-1}.B^T.R.A.$$

Ce dernier résultat exprimant que le système bouclé par la commande

$U(k)=-((B^T.R.B + P)^{-1}.B^T.R.A).X(k)$ est asymptotiquement stable.

V)RESOLUTION DE L'EQUATION DE RICCATI: [6]

V-1)Introduction:

Comme nous venons de le voir,la mise en oeuvre d'une commande par critère quadratique revient à résoudre l'équation de Riccati.On considère la résolution de cette dernière par l'application de la technique,via la fonction signe d'une matrice,introduite par Barraud.Elle est basée au départ par la construction de la matrice Hamiltonienne associée à l'équation de Riccati,pour cela il nous a semblé nécessaire d'exposer la formulation,dans ce qui suit.

V-2)Formulation des équations Hamiltonniennes associées:

a)Cas continu:

Les conditions d'optimalité (minimisation de J) coduisent à l'introduction d'un état adjoint λqui conjointement à X vérifie le système aux équations hamiltoniennes:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BP^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix}$$

On définie alors la matrice Hamiltonienne H de dimension 2nx2n:

$$H = \begin{bmatrix} A & -BP^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

b)Cas discret:

De même que pour le cas continu, les conditions d'optimalité (minimisation de J) conduisent à l'introduction d'un état adjoint λ et aux équations hamiltoniennes suivantes:

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BP^{-1}B^T \\ Q & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix}$$

Cette matrice n'est pas hamiltonienne, comme dans le cas continu, ni symplectique, bien que l'on puisse en déduire une forme symplectique.

Ces équations s'écrivent encore:

$$\begin{bmatrix} I & BP^{-1}B^T \\ 0 & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_K \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

que l'on notera

$$U \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} X_k \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

avec

$$U = \begin{bmatrix} I & BP^{-1}B^T \\ 0 & A^T \end{bmatrix} , \quad L = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{bmatrix}$$

et $S = U^{-1}L$ matrice symplectique 2nx2n, associée à l'équation de Riccati discrète.

V-3)Fonction signe d'une matrice: [8]

Le concept de la fonction signe d'une matrice est apparue en Automatique dans les années 70.En effet,la fonction signe d'une matrice est un outil puissant pour la résolution de problèmes relatifs aux systèmes dynamiques linéaires invariants,cela est dû à son calcul,basé sur un algorithme de type Newton;qui lui assure une convergence au sens quadratique.C'est dans cette optique que Barraud a développé un algorithme "accéléré de Newton" pour le calcul de la fonction signe d'une matrice et on déduit une application pour la résolution de l'équation de Riccati.C'est à partir de cette démarche que Balzer essaya d'améliorer les performances de convergence de la fonction signe d'une matrice.

1)Définition:

On sait par définition qu'une matrice carrée A(n,n) est semblable à sa forme de Jordan:

$$A = M.J.M^{-1};$$

où M est matrice des vecteurs propres de A et la matrice J a la structure:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_p \end{bmatrix} \qquad \text{avec } J_j = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

où le nombre de blocs de Jordan J_j associés à la valeur propre λ_i est égal au nombre de vecteurs propres linéairement indépendants relatifs à λ.Soit maintenant $f(\lambda)$,une fonction définie sur le spectre de A,on a:

$$f(A) = M.f(J).M^{-1}.$$

Si f(A) est la fonction signe de matrice,on aura:

$$\text{Signe}(A) = M.\text{Signe}(J).M^{-1} = S\ ;$$

avec:

$$\text{Signe}(J) = \begin{bmatrix} \text{Signe}(J_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{Signe}(J_p) \end{bmatrix}$$

et

$$\text{Signe}(J_j) = \begin{bmatrix} \text{Signe}(\lambda_i) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \text{Signe}(\lambda_i) \end{bmatrix} = \mp I$$

- Si $\text{Réel}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow \text{Signe}(\lambda_i) = I$

- Si $\text{Réel}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow \text{Signe}(\lambda_i) = -I$

2)Propriétés de la fonction signe de matrice:

On peut résumer les propriétés de la fonction signe de matrice (notée $S=\text{Signe}(A)$) comme suit:

1) Si $A=M.J.M^{-1} \Rightarrow S=M.D.M^{-1}$;où $D=\text{diag}(.......\text{Signe}(\lambda_i).......)$

2) a) Si $\forall i$,$\text{Réel}(\lambda_i) > 0 \Rightarrow S=I$

   b) Si $\forall i$,$\text{Réel}(\lambda_i) < 0 \Rightarrow S=-I$

3) Si A est une matrice orthogonale et symétrique ($A.A^T=I$),alors: $S=A$.

4) $\text{Signe}(A^{-1})=\text{Signe}(A)$

5) $\text{Signe}(\alpha.A)=\text{Signe}(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+-\{0\}$

6) $\text{Signe}(B)=V.S.V^{-1}$ si $B=V.A.V^{-1}$

7) $\text{Signe}(A^T)=S^T$

V-4) Algorithme de Newton accéléré: [8]

Tout d'abord rappelons l'algorithme standard de calcul de la fonction signe. Soit M une matrice nxn , telle que toutes ses valeurs propres soient à partie réelle non nulle, on désigne par S=Signe(M) sa fonction signe et telle que:

$$S = \text{Signe}(M) = \lim_{k \to \infty} Z_k \quad ;$$

$$\text{où} \quad Z_{k+1} = (1/2)\left(Z_k + Z_k^{-1} \right) \quad \text{et} \quad Z_0 = M.$$

Roberts a suggéré que la convergence de l'algorithme de Newton standard pouvait être améliorée en utilisant la formulation suivante:

$$Z_{k+1} = \alpha_k . Z_k + \beta_k . Z_k^{-1}$$

avec α_k et β_k des scalaires convenablement choisis.

Barraud a développé un algorithme basé sur cette formulation, défini par la procédure suivante:

$$\begin{cases} Z_0 = M \\ Z_{k+1} = (1/2)\left[\alpha_k Z_k + \dfrac{1}{\alpha_k} Z_k^{-1} \right] \\ \alpha_k = \sqrt{\dfrac{\| Z_k^{-1} \|}{\| Z_k \|}} \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \lim_{k \to \infty} \alpha_k = 1$$

Balzer propose un autre choix des paramètres α_k et β_k pour la formulation précédente, en vue d'accélérer la convergence de l'algorithme:

$$\alpha_k = \frac{1}{[\det(Z_k)]^{1/N} + 1}$$

et

$$\beta_k = 1 - \alpha_k$$

V-5) Algorithme de résolution de l'équation de Riccati:

Considérons le problème dynamique, présenté auparavant, et les hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} P = P^T > 0 \quad ; \quad Q = Q^T \geq 0 \\ (A,B) \text{ stabilisable} \\ (L,A) \text{ détectable} \quad L \text{ telque } L^T L = Q \end{cases} \qquad (V\text{-}5\text{-}1)$$

1) Théorème:

Etant donné les hypothèses ci-dessus, la solution unique symétrique non négative de l'équation de Riccati dans le cas continu, et dans le cas discret est donnée explicitement par:

$$R = F_{21} \cdot F_1^{-1} \qquad \text{avec}$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix} = \text{Signe}(H) + \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

et:

a) $$H = \begin{bmatrix} A & -BP^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$

pour le cas continu

b) $$H = \begin{bmatrix} I+A & -BP^{-1}B^T \\ -Q & I+A^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A-I & -BP^{-1}B^T \\ -Q & I-A^T \end{bmatrix}$$

pour le cas discret.

2) Résumé de l'algorithme:

1-Construire H

2-Calculer Signe(H)

3-Poser $F = \begin{bmatrix} F_1 & F_{12} \\ F_{21} & F_2 \end{bmatrix} = \text{Signe}(H) + \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$

4-Obtenir $R = F_{21} . F_1^{-1}$

Cet algorithme de Barraud est basé principalement sur la mise en oeuvre de la fonction signe. Dans ce but, nous avons retenu les équations proposées par Balzer pour le calcul de α_k .

CHAPITRE .3.

Commande optimale avec imposition des valeurs propres

I-INTRODUCTION:

Au chapitre précédent,nous avons vu comment calculer une commande optimale permettant de stabiliser un système linéaire,invariant et multivariable en minimisant un critère quadratique donné,autrement dit déterminer une commande donnant au système,en boucle fermée,des valeurs propres (pôles) à partie réelle négative.Malheureusement,cette méthode ne nous permet pas d'avoir généralement des valeurs propres (pôles) souhaitables,afin d'obtenir le degré de stabilité désiré,pour cela nous proposons dans ce chapitre une deuxième méthode permettant d'imposer préalablement un ensemble de valeurs propres (pôles) désirées,et ceci en minimisant toujours le critère quadratique par un choix adéquat des matrices de pondération Q et P.

II)FORMULATION DU PROBLEME:

Globalement,le problème réside en la recherche de deux matrices Q et P (matrices de pondération) correspondant à l'ensemble de valeurs propres désirées,notant que généralement ce problème admet plusieurs solutions.
Dans ce chapitre,nous allons présenté une procédure,ayant l'avantage de permettre un contrôle meilleur du système à commander et effectuant les tâches suivantes:

1)Etant donnée la matrice P (matrice de pondération pour le contrôle),cette procédure peut déterminer la matrice Q donnant au système,en boucle fermée,des valeurs propres bien définie.

2)Etant donnée un système ayant la commande définie au chapitre précédent,cette procédure peut porter des modifications sur la matrice Q afin que le système en boucle fermée aura les valeurs propres désirées.

III)CONTROLE OPTIMAL DES SYSTEMES PAR RETOUR D'ETAT: [3]

Considérons le contrôle optimal d'un système continu,linéaire et invariant donné par les équations d'état suivantes:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A.X(t) + B.U(t) \\ Y(t) = D.X(t) \end{cases} \qquad \text{(III-1)}$$

A ce système on associe le critère quadratique suivant:

$$J = (1/2)\int_{0}^{\infty} [X^{T}.Q.X + U^{T}.P.U]dt \qquad \text{(III-2)}$$

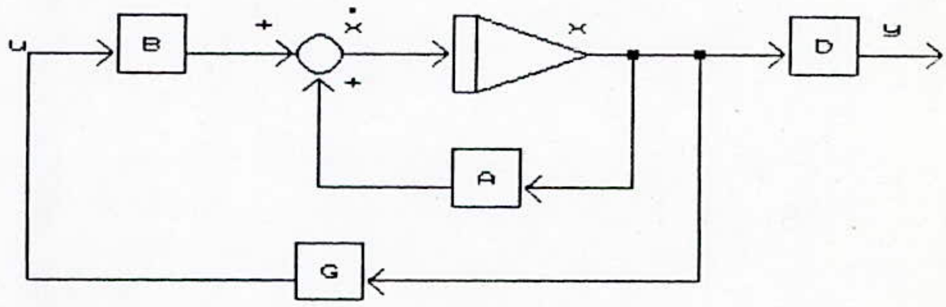


Fig.1 système optimal par retour d'état

En introduisant le vecteur d'état adjoint $\lambda(t)$ et par application du principe du minimum on peut écrire les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{\lambda}(t) = Q.X(t) - A^{T}.\lambda(t) \\ &U(t) = -P^{-1}.B^{T}.\lambda(t) = -P^{-1}.B^{T}.R.X(t) = G.X(t) \end{aligned} \right. \qquad \text{(III-3)}$$

où $\lambda(t) = R.X(t)$, la matrice G est le gain optimal du retour d'état (voir Fig.1) et R est la solution de l'équation de Riccati stationnaire:

$$\dot{R} = -R.A - A^{T}.R + R.B.P^{-1}.B^{T}.R - Q = 0 \qquad \text{(III-4)}$$

En combinant les équations (III-1),(III-2) et (III-3),on obtient le système canonique suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BP^{-1}B^{T} \\ -Q & -A^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix}$$

où F est une matrice Hamiltonienne ayant 2N valeurs propres de paires opposées.

Maintenant on est en mesure d'énoncer le théorème suivant:

THEOREME: [4]

Etant donné le système invariant, à temps final infini, défini par les équations (III-1),(III-2) et en admettant que les hypothèses (V-5-1) (voir chapitre précédent) soient vérifier, alors la matrice F a les propriétés suivantes:

1) Reel(p[F]) ≠ 0

2) $p_i[\tilde{A}] = p_i[A - BP^{-1}B^TR] = p_i[F] \quad i:\text{Réel}(p_i) < 0$

Démonstration du théorème:

Concernant l'éqution (continue) de Riccati. Etant donné le problème de commande avec les hypothèses, présentés au chapitre précédent, on sait que la matrice du système bouclé $\tilde{A}$ est asymptotiquement stable, la matrice R étant solution de l'équation de Raccati. Ceci étant, on peut alors vérifier que:

$$F = \begin{bmatrix} A & -BP^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R & I \end{bmatrix}$$

Il est clair que cette relation peut encore s'écrire

$$F = T \begin{bmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} T^{-1}$$

D'après le théorème ci-dessus, les valeurs propres du système en boucle fermée sont identiques à celles du système canonique dont la partie réelle est négative, il est donc possible d'étudier les valeurs propres du système en boucle fermée connaissant celles du système canonique F, ceci a le grand avantage de permettre que les valeurs propres dépendant des Q et P peuvent être étudiées sans résoudre l'équation de Riccati.
Le problème particulier considéré ici est de trouver la matrice Q donnant au système bouclé les valeurs propres imposées.
Nous allons en premier lieu considéré le cas où la matrice A du système a des valeurs propres réelles et distinctes, en suite le cas où A possède des valeurs propres complexes et enfin le cas où A a des valeurs propres multiples.

1)Cas où toutes les valeurs propres sont simples et réelles:

Supposons que la matrice A ait des vecteurs propres linéairement indépendants et soit M la matrice de passage (dont les colonnes sont les composantes des vecteurs propres).
Effectuons le changement de vecteur défini par:

$$X(t) = M.Z(t)$$

la première équation du système (III-1) devient:

$$M.\dot{Z} = A.M.Z + B.U$$

soit, en multipliant à gauche par M^{-1} :

$$\dot{Z} = M^{-1}.A.M.Z + M^{-1}.B.U$$

ou, en notant W la matrice semblable à A par M:

$$\dot{Z} = W.Z + M^{-1}.B.U. \qquad \text{(III-5)}$$

Exprimons le critère de performance donné par (III-2) en fonction du nouveau vecteur d'état Z:

$$J = (1/2)\int_0^\infty [X^T.Q.X + U^T.P.U]dt = (1/2)\int_0^\infty [Z^T.M^T.Q.M.Z + U^T.P.U]dt$$

$$= (1/2)\int_0^\infty [Z^T.\tilde{Q}.Z + U^T.P.U]dt, \qquad \text{(III-6)}$$

où $\tilde{Q} = M^T.Q.M$

N.B: Le signe (~) fait référence, par la suite, au système diagonalisé.
Les conditions d'optimalité (minimisation de J (III-6)) et compte tenu de l'équation d'état (III-5) conduisent à l'introduction d'un état adjoint $\tilde{\lambda}$ et aux équations hamiltoniennes suivantes:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z} \\ \dot{\tilde{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & -H \\ -\tilde{Q} & -W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} = \tilde{F} \begin{bmatrix} Z \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix}$$

où $H = M^{-1}BP^{-1}B^{T}M^{-T}$.

Dans ce cas, la commande optimale donnée par la loi linéaire s'exprime par le vecteur de commande

$$U = -P^{-1}B^{T}M^{-T}.\tilde{\lambda} .$$

Les valeurs propres du système canonique $\tilde{F}$ sont identiques aux valeurs propres du système F.
Cette propriété s'appelle propriété d'invariance des valeurs propres par rapport à la transformation linéaire.
On peut facilement montrer cela en vérifiant l'égalité matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-T} \end{bmatrix} \tilde{F} \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{T} \end{bmatrix} = F$$

Les valeurs propres du système canonique $\tilde{F}$ sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique suivante:

$$| \, sI - \tilde{F} \, | = 0.$$

Dans ce but, faisant la transformation:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -\tilde{Q}(sI-W)^{-1} & I \end{bmatrix} [\, sI-\tilde{F} \,] = \begin{bmatrix} sI-W & H \\ 0 & sI+W-\tilde{Q}(sI-W)^{-1}H \end{bmatrix}$$

on obtient:

$$| \, sI-\tilde{F} \, | = | \, sI-W \, | . | \, sI+W-\tilde{Q}(sI-W)^{-1}H \, | . \quad \text{(III-7)}$$

Maintenant, supposons que la matrice de pondération $\tilde{Q}$ a un seul élément non nul, nommé q_{jj}. Cela veut dire que seul le mode Z_j qui est considéré dans le critère de performance.
Par conséquent le second déterminant à droite de l'expression $|sI-\tilde{F}|$ devient:

$$\left| sI+W-\tilde{Q}(sI-W)^{-1}H \right| =$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} s+p1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & s+p2 & \dots & \dots & \dots \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -\frac{\tilde{q}jj}{s-pj}hj1 & \dots & s+pj-\frac{\tilde{q}jj}{s-pj}hjj & \dots & -\frac{\tilde{q}jj}{s-pj}hjn \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & 0 & s+pn \end{array} \right| \qquad \text{(III-8)}$$

En combinant les équations (III-7) et (III-8), l'équation caractéristique peut s'écrire comme suit:

$$|sI-\tilde{F}| = \prod_{i=1}^{n}(s-p_i)\left[\left(s-p_j - \frac{\tilde{q}_{jj}}{s-p_j}\right)\prod_{i=1(i\neq j)}^{n}(s-p_i)\right]$$

ce qui donne:

$$|sI-\tilde{F}| = [(s+p_j)(s-p_j) - \tilde{q}_{jj}h_{jj}] \prod_{i=1(i\neq j)}^{n}(s+p_i)(s-p_i)$$

on déduit les valeurs propres du système canonique $\tilde{F}$ qui sont:

$$s_i = \mp p_i \quad , \quad i\neq j \qquad i=1,2,\dots\dots,n$$

$$s_j = \mp\sqrt{p_j^2 + \tilde{q}_{jj}h_{jj}}$$

Si s_j la valeur propre du système optimal en boucle fermée est donnée,alors on peut trouver $\tilde{q}_{jj}$,l'élément unique de $\tilde{Q}$,par l'expression suivante:

$$\tilde{q}_{jj} = \frac{s_j^{\,2} - p_j^{\,2}}{h_{jj}}$$

Cette expression nécessite la connaissance d'un seul élément de la matrice H (définie auparavant),c'est l'élément h_{jj}.
Sachant que la matrice P est supposée définie positive,on peut démontrer que tous ses éléments diagonaux sont toujours non négatifs,aussi la matrice H est symétrique.
Si le mode Z_j est non commandable (non contrôlable),la $j^{ième}$ ligne de la matrice $M^{-1}B$ ne contient que des éléments nuls,alors dans ce cas on a $h_{jj}=0$,et on ne pourra pas changer ce mode.
Connaissant la matrice $\tilde{Q}$,on peut déterminer le gain optimal du retour d'état en résolvant l'équation de Raccati suivante:

$$\dot{\tilde{R}} = -\tilde{R}W - W\tilde{R} + \tilde{R}M^{-1}BP^{-1}B^{T}M^{-T}\tilde{R} - \tilde{Q} = 0$$

où:

$$\tilde{\lambda} = \tilde{R}.Z \quad \text{et} \quad U = -P^{-1}B^{T}M^{-T}.\tilde{\lambda} = -P^{-1}B^{T}M^{-T}\tilde{R}.Z = \tilde{G}M^{-1}.X = G.X$$

Dans le système optimal à retour d'état $\dot{X}=(A+BG)X$,nous avons changé une seule valeur propre du système en boucle ouverte par la position specifiée.Nous pouvons maintenant recommencer la même tâche avec un nouveau système A1=(A+BG) et modifier la seconde valeur propre.
On peut répéter la même opération pour d'autres valeurs .Cette méthode est basée sur le fait que les différentes matrices G_i et les différentes matrices Q_i,associées au changement de la valeur propre P_i,peuvent être additionnées séparement pour donner le résultat final.On peut montrer ceci comme suit:
considérons un système dont on va changer deux valeurs propres (k=2).Nous avons alors:

$G1=-P^{-1}B^{T}R1$ où R1 est la solution de l'équation de Riccati:

$$\dot{R1} = -R1A - A^{T}R1 + R1BP^{-1}B^{T}R1 - Q1 = 0 \quad \text{(pour la valeur } p_1\text{)}$$

et $G2=-P^{-1}B^{T}R2$ où R2 est la solution de l'équation de Riccati:

$$\dot{R2} = -R2(A+BG1) - (A+BG1)^{T}R2 + R2BP^{-1}B^{T}R2 - Q2 = 0$$

(pour la valeur p_2)

En combinant les deux équations ci-dessus de Riccati et en substituant G1 par son expression on trouve:

$$\dot{R} = -RA - A^T R + RBP^{-1}B^T R - Q = 0 \quad \text{où } R=R1+R2 \text{ et } Q=Q1+Q2$$

on trouve aussi:

$$G = G1+G2 = -P^{-1}B^T R.$$

Ce résultat peut être généralisé pour n'importe quelle valeur de k (k étant le nombre de valeurs propres changées).

Remarque:

La séquence (l'ordre de la suite des valeurs propres à changer) dans laquelle on fera le changement des valeurs propres est arbitraire.Mais il faut noter que chaque séquence donnera une matrice Q.

En résumé,cette procédure commence toujours par le calcul d'un système optimal en minimisant un critère donné par P et Q_0,ce qui donne la matrice gain G_0.Si un ensemble de valeurs propres du système optimal se situent près de l'axe imaginaire on peut les déplacer vers des positions désirées.

Résumé de l'algorithme:

1- Initialiser: $Q = Q_0$, $G = G_0$, $i = 0$

2- Calculer: $A_i = A + BG$

3- Calculer les matrices diagonale et modale W_i, M_i correspondant à A_i et calculer ensuite la matrice $H_i = M_i^{-1}BP^{-1}B^T M_i^{-T}$.

4- $i = i + 1$

5- Entrer la valeur propre désiré s_j (qui va changer p_i)

6- Calculer: $$(\tilde{q}_{jj})_i = \frac{s_j^2 - p_i^2}{(h_{jj})_{i-1}}$$

7- Avec la matrice $\tilde{Q}_i = \left\{ \left(\tilde{q}_{jj} \right)_i \right\}$ calculer $\tilde{G}_i$ (en résolvant l'équation de Riccati)

8- $G_i = \tilde{G}_i M_{i-1}^{-1}$, $G = G + G_i$

9- $Q_i = M_{i-1}^{-1} \tilde{Q}_i M_{i-1}^{-1}$, $Q = Q + Q_i$

10- Si le nombre des valeurs propres changées < k

alors change j et aller vers 2.

<u>2)Cas où toutes les valeurs propres sont simples réelles ou complexes:</u>

Pour expliquer la procédure de changement d'une valeur propre complexe,considérons le cas où deux valeurs propres sont complexes conjugues,les autres étant réelles.dans ce cas la matrice W s'écrit:

$$W = \begin{bmatrix} -\alpha+j\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha-j\beta & \dots & \dots \\ \dots & \dots & p3 & \dots \\ . & . & . & \ddots \quad . \\ 0 & . & . & p_n \end{bmatrix}$$

La matrice de passage M est aussi complexe.Vu le grand avantage de travailler avec des matrices de transformation réelles nous n'allons pas utiliser directement la matrice M.Dans ce but nous introduisons une matrice auxiliaire de transformation L telle que:

$$W' = L^{-1} W L \quad \text{où}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1/2 & -j/2 & 0 \dots 0 \\ 1/2 & j/2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ . & . & . \quad . \quad . \\ . & . & . \quad . \quad . \\ . & . & . \quad \quad .. \\ 0 & \dots & \dots \quad \quad 1 \end{bmatrix}$$

et

$$W' = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta & 0 \dots & 0 \\ -\beta & -\alpha & \dots & \dots \\ 0 & \dots & p3 & . \\ . & . & . \; . & . \\ . & . & . \;\; . & . \\ . & . & . \;\;\; . & . \\ 0 & \dots & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$W' = L^{-1}(M^{-1}AM)L = T^{-1}AT$$

où la matrice de transformation T=ML est réelle.

Considérons maintenant le changement de deux valeurs propres complexes, pour cela nous choisissons une matrice $\tilde{Q}$ de pondération de la forme :

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}11 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{q}22 & 0 & \dots & \dots \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & \dots & & 0 \end{bmatrix}$$

où $\tilde{q}11 = \tilde{q}22$.

En faisant le même travail que dans le cas précédent, nous arrivons à une équation caractéristique dont la partie concernant les deux valeurs propres complexes s'exprime par l'équation suivante:

$$s^4 - [2(\alpha^2-\beta^2) + \tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})]s^2 + \tilde{q}_{11}^{\,2}(h_{11}h_{22}-h_{12}) + \tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^2+\beta^2)^2 = 0 \quad \text{(III-2-1)}$$

La matrice H devient dans ce cas:

$$H = T^{-1}BP^{-1}B^{T}T^{-1}.$$

On peut modifier les deux valeurs propres complexes par deux nouvelles valeurs réelles ou complexes.Il faut montionner que dans ce cas nous n'avons pas une liberté totale pour séléctionner les nouvelles valeurs car si nous les choisissons toutes complexes alors on a le droit de fixer une seule partie l'autre partie doit satisfaire une équation contrainte,d'autre part si nous les choisissons toutes réelles on ne peut spécifier qu'une seule valeur l'autre valeur doit vérifier une équation contrainte.
On peut illustrer ceci comme suit:

-Supposons que les nouvelles valeurs propres sont complexes alors on peut les écrire sous la forme :

$$s1 = -\gamma + j\delta \quad \text{et} \quad s2 = -\gamma - j\delta$$

Avec ces valeurs propres l'équation (III-2-1) devient :

$$s^4 - 2(\gamma^2-\delta^2)s^2 + (\gamma^2+\delta^2)^2 = 0 \qquad \text{(III-2-2)}$$

En identifiant les coefficients de s^2 dans les deux équations (III-2-1) et (III-2-2) on obtient:

$$\tilde{q}_{11} = \frac{2(\gamma^2-\alpha^2) - 2(\delta^2-\beta^2)}{h_{11} + h_{22}} \qquad \text{(III-2-2.bis)}$$

Comme nous avons montionné auparavant,γ et δ ne peuvent être choisis arbitrairement,mais celles-ci doivent satisfaire une équation contrainte qui est obtenue en égalant les coefficients du terme s^0 dans les deux équations (III-2-1) et (III-2-2) ce qui conduit:

$$(\gamma^2+\delta^2)^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2 + \tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})(\alpha^2+\beta^2) + \tilde{q}_{11}(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)$$

(III-2-3)

Il en résulte,en choisissant par exmple la partie réelle γ alors la partie imaginaire δ doit être déterminée à partir de l'équation (III-2-3).Si on trouver un δ non réel,on déduit alors que notre choix de la partie γ ne nous permet pas d'avoir des valeurs propres complexes.

-Considérons le deuxième cas où les valeurs désirées sont réelles

i-e $s1 = -\gamma 1$, $s2 = \gamma 2$

l'équation caractéristique (III-2-1) devient alors:

$$s^4 - (\gamma 1^2+\gamma 2^2)s^2 + \gamma 1^2\gamma 2^2 = 0 \qquad \text{(III-2-4)}$$

Par identification des coefficients du terme s^2 dans les deux équations (III-2-1) et (III-2-4) on obtient :

$$\tilde{q}_{11} = \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2(\alpha^2-\beta^2)}{h_{11} + h_{22}} \qquad \text{(III-2-4.bis)}$$

De même en égalant les coefficients du terme s^0 dans les équations (III-2-1) et (III-2-4) on aura l'équation contrainte suivante:

$$\gamma_1^2\gamma_2^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2 + \tilde{q}_{11}(h_{11}+h_{22})(\alpha^2+\beta^2) + \tilde{q}_{11}^2(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)$$

Si une certaine valeur γ_1 ou γ_2 n'est pas réelle ceci indique qu'on ne peut avoir deux valeurs réelles avec le choix fixé.
Il est bien de signaler que lorsqu'on modifie deux valeurs propres complexes par deux autres réelles celles-ci peuvent être aussi changées par deux autres valeurs réelles en utilisant la procédure précédente.

<u>En résumé :</u> La procédure récursive du changement de valeurs propres complexes est donnée par l'algorithme suivant:

1- Initialiser: $Q = Q_0$, $G = G_0$, $i = 0$

2- Calculer: $A_i = A + BG$

3- Calculer: W_i , M_i , L_i , $T_i = M_iL_i$ et $H_i = T_i^{-1}BP^{-1}B^TT_i^{-T}$

4- $i = i + 1$

5- Les deux valeurs complexes conjugues p_i et p_{i+1} vont être changées respectivement par les deux valeurs s_j et s_{j+1}. Pour déterminer la valeur de $\tilde{q}_{jj}$ nous avons deux cas.Si les nouvelles valeurs propres sont complexes alors utiliser les formules (III-2-2) et (III-2-2.bis).Dans l'autre cas,utiliser les formules (III-2-4) et (III-2-4.bis).

6- Avec:

$$\tilde{Q}i = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & (\tilde{q}jj)i & & \\ & & & (\tilde{q}j+1,j+1) & \\ & & & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

où $\tilde{q}_{j+1,j+1} = \tilde{q}_{jj}$, calculer la matrice gain $\tilde{G}_i$ (utiliser l'équation de Raccati)

$$\dot{\tilde{R}} = -\tilde{R}W' - W'\tilde{R} + \tilde{R}T^{-1}BP^{-1}B^{T}T^{-T}\tilde{R} - \tilde{Q} = 0 \quad \text{où} \quad W' = L^{-1}WL \ .$$

7- $\tilde{G}_i = -P^{-1}B^{T}T_{i-1}^{-1}\tilde{R}$, $G_i = \tilde{G}_i T_{i-1}^{-1}$, $G = G + G_i$

8- $Q_i = T_{i-1}^{-T}\tilde{Q}_i T_{i-1}^{-1}$, $Q = Q + Q_i$

9-Si le nombre des valeurs propres changées < k alors change j

et aller vers 2.

3)Cas des valeurs propres multiples(systèmes non diagonalisable):

C'est le cas où la matrice A n'est pas diagonalisable.La procédure précédente (cas des valeurs propres distinctes) peut nous servir pour obtenir des valeurs propres désirées.En effet posons X = UZ où U est une matrice de transformation vérifiant l'équation :

$$J = U^{-1}AU$$

avec J la forme canonique de Jordan.
En utilisant la procédure précédente,il faut remplacer la matrice M par U et nous commençons par changer la dernière valeur de la diagonale du bloc de Jordan,et ainsi de suite jusqu'à la première.L'exemple suivant illustre bien le changement décrit ci-dessus.

Exemple:Etant donné un système d'ordre n=3 avec une seule valeur propre triple alors la matrice triangulaire,semblable à la matrice A,contient un seul bloc de Jordan et a la forme:

$$J = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Pour changer la valeur propre p on commence par modifier celle du troisième élément diagonal pour cela on choisi une matrice $\tilde{Q}=\{\tilde{q}_{33}\}$ et après la première itération, le nouveau système aura la forme de Jordan suivante:

$$J1 = \begin{bmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & s3 \end{bmatrix}$$

On remarque que ce système a deux valeurs propres, une simple s3 et l'autre double p, celle-ci peut être changée en suivant la même démarche ci-dessus, sauf que la matrice $\tilde{Q}=\{\tilde{q}_{22}\}$. Enfin on obtiendra un système caractérisé par des valeurs propres simples, sa forme de Jordan est:

$$J2 = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & s2 & 0 \\ 0 & 0 & s3 \end{bmatrix}$$

Enfin on peut utiliser la première procédure (cas des valeurs propres distinctes) pour changer les valeurs propres de ce dernier système.

CHAPITRE .4.

Reconstruction d'etat

I-INTRODUCTION:

La commande introduite auparavant (commande par retour d'état) suppose que l'état X est totalement disponible,en pratique ceci n'est pas vérifié car le veteur d'état est entièrement ou partiellement inaccessible par mesure directe mais puisque nous avons accés aux entrées u et aux sorties y,nous pourrons reconstruire l'état à partir de ces données avec ce que nous appelerons estimateur.
Dans cette présente étude nous supposerons que l'état du système est entièrement inaccessible,dans ce cas l'estimateur est dit estimateur identité ou de rang plein et nous allons considéré le système défini par les équations d'état:

$$\dot{X}(t)=A.X(t)+B.U(t)+C.V(t) \qquad (I-1)$$

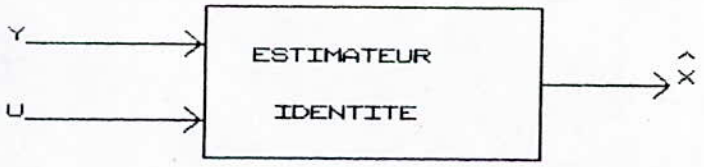
$$Y(t)=D.X(t)+W(t) \qquad (I-2)$$

où
- X est un vecteur n-dimensionnel des états;
- U,le vecteur m-dimensionnel des commandes;
- Y,le vecteur r-dimensionnel des observations des variables de sortie;
- V et W sont de bruits blancs à espérances mathématique nulles,dont les covariances sont pour n'importe quel instant $E(vv^t)=V$ et $E(ww^t)=W$.

L'équation (I-1) s'appelle équation de l'objet commandé et l'équation (I-2) s'appelle équation du canal des observations.

II-DEFINITION D'UN ESTIMATEUR:

Etant donné le système ci-dessus,on définit l'estimateur de X comme étant l'opérateur qui génère $\hat{X}$ estimé de X à partir de Y et U (voir Fig.1 ci-dessous)



(Fig.1)

Sa forme dynamique peut se mettre sous la forme:

$$\dot{\hat{X}} = F.\hat{X} + K.Y + E.U . \qquad (I-3)$$

L'estimateur défini précédement doit vérifier ce

<u>1)Cas</u> <u>déterministe:</u>(v=w=0)

$\forall\ X(t), \forall\ U(t)$ alors $\lim_{t\to\infty} \tilde{X} = 0$

où $\tilde{X}=X-\hat{X}$ (écart entre l'état et son estimé)

<u>2)Cas</u> <u>stochastique:</u>

$\forall\ X(t), \forall\ U(t)$ alors $\lim_{t\to\infty} E(\tilde{X}) = 0$

Ceci est vrai si et seulement si:

1- $F = A - KD$

2- $E = B$

3- F asymptotiquement stable

En effet, soit:

$$\dot{X} = A.X + B.U + V$$

et d'autre part:

$$\dot{\hat{X}} = A.\hat{X} + K.Y + E.U$$

En substituant dans cette dernière équation Y par D.X + W ,nous obtenons:

$$\dot{\hat{X}} = F.\hat{X} + K.D.X + K.W + E.U$$

En retranchant l'équation ($\dot{X}$ et $\dot{\hat{X}}$) et en posant $\tilde{X} = X - \hat{X}$ nous avons donc:

$$\dot{\tilde{X}} = F.\tilde{X} + (A-F-K.D)\tilde{X} + (B-E)U - K.W + V$$

En prenant la moyenne de cette équation avec le fait que:

E(V)=0 et E(W)=0 on aura:

$$\frac{d\,E(\tilde{X})}{d\,t} = F.E(\tilde{X}) + (A-F-K.D).E(\tilde{X}) + (B-E).E(U)$$

pour que $\lim_{t\to\infty} E(\tilde{X}) = 0$,et ceci $\forall$ X et $\forall$ U

il faut donc :

1) $F = A - K.D$

2) $E = B$

3) F soit asymptotiquement stable.

Si les trois conditions sont vérifiées,l'évolution de la moyenne est donnée par:

$$\frac{d\,E(\tilde{X})}{d\,t} = F.E(\tilde{X}) \quad \text{avec } \lim_{t\to\infty} E(\tilde{X}) = 0$$

Par conséquent,la forme générale de l'équation identité est donnée par:

$$\dot{\hat{X}} = A.\hat{X} + B.U + K(Y-D.\hat{X})$$

Nous remarquons que la structure de l'estimateur ne dépend pas de l'environnement que celui-ci soit déterministe ou stochastique,seules les méthodes de la détermination des éléments de la structure diffèrent.

III)METHODE DE SYNTHESE DES ESTIMATEURS IDENTITE: [1]

Nous nous intéressons à présent à la détermination du gain K de l'estimateur.
De façon générale,la détermination de K se base sur les méthodes suivantes:

III-1)Méthode de placement des valeurs propres:

Cette méthode consiste à placer les valeurs propres souhaitables de la matrice A-K.D puis le calcul de K.Dans ce cas l'estimateur est dit estimateur par allocation de valeurs propres

Exemple: Soit le système monovariable suivant:

$$A=\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D=[\ 0 \quad 0.15\ ]$$

Le probléme est de calculer un estimateur identité ayant deux valeurs propres identiques et égales -2.2.
D'après la définition,l'équation de l'estimateur identité s'écrit:

$$\dot{\hat{X}} = (A-K.D)\hat{X} + B.U + K.Y$$

Puisque la matrice K.D est dimension (2x2) (même dimension que A) et la matrice D de dimension (1x2) il faut donc que la dimension de la matrice K inconnue soit (2x1).
La détermination de l'estimateur revient donc à calculer les éléments k1,k2 de la matrice K.
On a :

$$K.D = \begin{bmatrix} k1 \\ k2 \end{bmatrix} [\ 0 \quad 0.15\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 0.15k1 \\ 0 & 0.15k2 \end{bmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$(B - K.D) = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.15.k1 \\ 2 & -1 - 0.15k2 \end{bmatrix}$$

Calculons maintenant les valeurs propres de la matrice (B-KD) en fonction de k1 et k2; ce qui donne:

$$s^2 + s(\ 1.4 + 0.15k2) + (0.4 + 0.06k2 + 0.3k1) = 0$$

On sait alors que les deux racines s1 et s2 de cette équation du deuxiéme ordre doivent vérifier les deux équations suivantes :

$$-\ (\ s1 + s2\ ) = 1.4 + 0.15k2 = 4.4 \quad \Rightarrow \quad k2 = 20$$

$$s1\ .\ s2 = 0.4 + 0.06k2 + 0.3k1 = 2.2\ .\ 2.2 \quad \Rightarrow \quad k1 = 10.8.$$

L'équation de l'estimateur est alors :

$$\dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -0.4 & -1.62 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u1] + \begin{bmatrix} 10.8 \\ 20 \end{bmatrix} [y1]$$

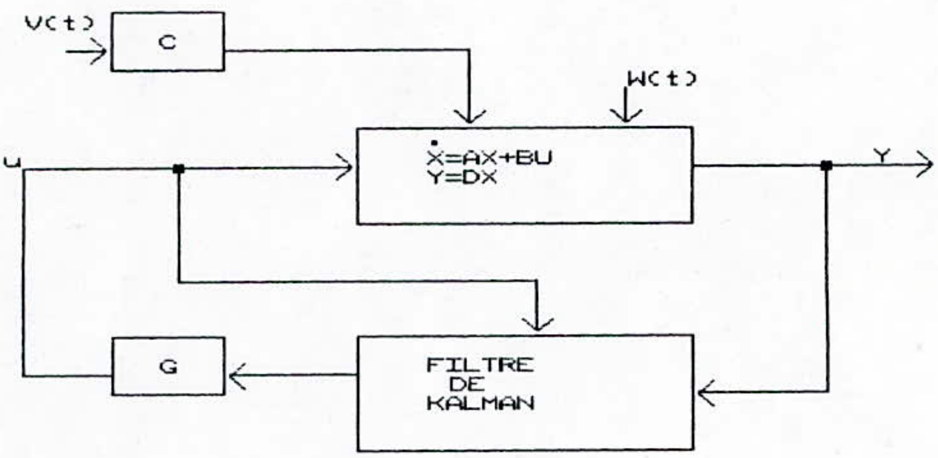
où : $\hat{X}$ tend vers X.

III-2)Estimateur optimal: [3]

Le choix de K optimal s'obtient par la minimisation d'un critère usuel en statistique.L'estimateur optimal est unique et porte le nom du filtre de Kalman, et dont la détermination sera donnée par la suite.

IV)Principe de séparation: [1]

Nous montrerons dans ce paragraphe que la substition de X par son estimé X dans l'équation de commande par retour d'état modifiera peu l'évolution dynamique du système.
Considérons le système définit par les équations (I-1) et (I-2) à l'état fermé comme représenté à la figure ci-dessous:



La commande U est donnée par :

$$U = G\hat{X} \qquad (IV-1)$$

En remplaçant dans (I-1) et (I-3) l'expression de U donnée par la formule (IV-1), nous obtenons le système suivant:

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\hat{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BG \\ KD & A + BG - KD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ KW \end{bmatrix}$$

En faisant la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X - \hat{X} \end{bmatrix}$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\tilde{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BG & - BG \\ 0 & A - KD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V \\ V - KW \end{bmatrix} \qquad (IV-2)$$

Nous avons vu que la moyenne de l'erreur d'estimation tend asymptotiquement vers zéro, nous pouvons admettre que l'évolution de la dynamique du système est peu affectée.D'autre part, l'équation caractéristique du système total (estimateur + système original) est donnée par :

$$\det (sI - (A + BG)) . \det(sI - A + KD)) = 0$$

et qui admet 2n racines,les n premières racines sont les valeurs propres du système commandé par la commande donnée de la formule(IV-1), et les n autres valeurs sont celles de l'estimateur par conséquent c'est la matrice G est déterminée pour stabiliser le système et si l'estimateur est stable, le système complet sera stable et sa dynamique sera peu affectée par la présence de l'estimateur.Ceci permet d'énoncer le théorème du principe de séparation, la commande par retour d'état et l'estimateur peuvent être déterminées séparement.

<u>V)Filtre de kalman:</u> [1]

Le filtre de Kalaman est un observateur d'ordre n donnant l'estimation du vecteur d'état.Dans un environnement stochastique, lorsque les variances des bruits sont connues, c'est le meilleur observateur linéaire (au sens de la variance de l'erreur d'estimation).

De plus, c'est celui dont la variance d'observation est la plus faible.Il faut montionner que le filtre de Kalman a la structure d'un observateur linéaire et qu'il peut,en dehors de tout contexte d'optimalité,être considéré comme un observateur d'ordre n.Ceci nous permettra d'utiliser les formules du filtre de Kalman pour la détermination d'un observateur d'ordre n , lorsque les hypothèses relatives aux bruits ne sont pas satisfaites ou lorsque les matrices de covariance sont mal connues et même en dehors de tout environnement stochastique.

IV-1)Détermination d'un estimateur optimal:

Premièrement déterminons la structure d'un estimateur optimal dans le cas d'un environnement stochastique caractérisé par les matrices de covariance W et V,les intensités des bruits blancs,supposées connues.Dans ce cas on considère un système décrit par les équations:

$$\begin{cases} \dot{X} = A.X + B.U + v \\ Y = D.X + w \end{cases} \qquad (IV-1-1)$$

Le problème de la détermination d'un estimateur identité optimal qui est un système dynamique dont l'état est $\hat{X}$,valeur estimée de X telle que:

$$\dot{\hat{X}} = A.\hat{X} + B.U + K(Y - D.\hat{X})$$

réside dans la recherche de la matrice de gain K de l'observateur minimisant l'erreur d'estimation $\tilde{X} = X - \hat{X}$.

1)Gain du filtre de Kalman:

Le gain K optimal qui minimise à tout instant la somme des variances des composantes de l'erreur d'estimation est donné par:

$$K = RD^T W^{-1}$$

où R est la matrice de variance de l'erreur d'estimation vérifiant l'équation de Riccati stationnaire:

$$\dot{R} = AR + RA^T - RD^T W^{-1} DR + CVC^T = 0 \qquad (VI-1-2)$$

2)Stabilité du filtre de Kalman:

La stabilité du filtre de kalman est toujours assurée sous réserve de l'existence et l'unicité de la solution de Riccati.Ces conditions seront satisfaites (voir chapitre résolution de l'équation de Riccati) si on a:

-La paire (A^T,D^T) stabilisable

-La paire (A^T,L) détectable où L est telle que $CVC^T = LL^T$

En résumé:

Si les matrices de covariance V et W sont connues,on peut calculer un estimateur de Kalman à l'aide d'un programme écrit pour obtenir une commande optimale par critère quadratique avec horizon infini.

Remarque:

A cause de la dualité entre les problèmes de commande et d'observation,il existe une analogie entre leurs solutions.Ceci nous permet de déterminer une structure d'un estimateur optimal en minimisant un critère quadratique donné par deux matrices de pondération W et V.L'estimateur résultant aura alors des propriétés comparables à celles de la commande en particulier il sera toujours stable et sa dynamique dépendra du choix des matrices de pondération du critère.

V-2)DETERMINATION D'UN ESTIMATEUR OPTIMAL PAR IMPOSITION DES VALEURS PROPRES:

Dans ce paragraphe,nous allons montrer comment on peut utiliser la procédure précédente,établie pour la détermination d'une commande optimale avec des valeurs propres prescrites,pour trouver la structure d'un estimateur optimal avec des valeurs propres désirées.Dans ce but,la procédure de la commande peut nous servir dans les deux tâches suivantes:

-Etant donné un estimateur optimal (filtre de Kalman) avec la matrice de covariance W du bruit blanc à la sortie déterminons la matrice de covariance V qui fait que l'estimateur optimal aura les valeurs propres prescrites.

-Etant donné un estimateur optimal avec les deux matrices de covariance W et V modifions la matrice V afin que les valeurs propres de l'estimateur soient situer dans la region désirée.

Considérons le système défini par les équations (IV-1-1).Par minimisation du critère statistque $E(\tilde{X}\tilde{X}^T)$ on obtient la matrice de gain de l'estimateur optimal:

$$K = RD^TW^{-1}$$

où R est la solution de l'équation de Riccati stationnaire (IV-1-2).

Par analogie avec la commande optimale on défini le système canonique correspondant à l'estimateur optimal (filtre de Kalman) à partir de l'équation de Riccati:

$$F_E = \begin{bmatrix} -A^T & -D^T W^{-1} D \\ -CVC^T & A \end{bmatrix}$$

L'estimateur optimal de matrice d'évolution $A' = A-KD$ a des valeurs propres identiques à celles du système canonique dont la partie réelle est négative on peut montrer cela en écrivant F_E sous la forme suivante:

$$F_E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -A'^T & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R & I \end{bmatrix}$$

ou encore:

$$F_E = T \begin{bmatrix} -A'^T & 0 \\ 0 & A' \end{bmatrix} T^{-1}$$

Il est donc possible d'étudier les valeurs propres de l'estimateur optimal avant la détermination de la matrice de gain K.
Considérons ici le problème particulier de la détermination d'un filtre optimal avec imposition d'un ensemble de valeurs propres en connaissant la matrice de covariance du bruit à la sortie **W**.
Comme pour le cas de la commande optimale ,on peut distinguer trois cas possibles suivant le type des valeurs propres du système commandé.
Dans ce qui suit nous allons considérer un seul cas pour expliquer comment peut-on utiliser la procédure de la commande optimale pour résoudre le problème ci-dessus.On peut déduire après comment appliquer cette procédure pour les autres cas.
<u>Cas où toutes les valeurs propres sont simples et réelles:</u>

Supposons que la matrice A du système commandé est diagonalisable.En faisant la transformation linéaire **X = M.Z** le système d'équations (IV-1-1) devient alors:

$$\begin{cases} \dot{Z} = W.Z + M^{-1}\, C.v + B.U \\ Y = DM.Z + w \end{cases}$$

Le système canonique associe à ces équations peut s'écrire:

$$\tilde{F}_E = \begin{bmatrix} -W & -H_E \\ -\tilde{V} & W \end{bmatrix}$$

où $\quad H_E = M^T D^T W^{-1} DM$,

et $\quad \tilde{V} = M^{-1} CVC^T M^{-T} = M^{-1} V' M^{-T}$

Les valeurs propres du système canonique $\tilde{F}_E$ sont obtenues en résolvant l'équation caractéristique suivante:

$$\det (sI-\tilde{F}_E) = 0$$

Maintenant on peut utiliser la procédure de commande optimale pour la détermination de l'estimateur optimal.Dans ce but il faut remplacer les matrices de pondération Q et P respectivement par les deux matrices de covariance du bruit V et W,ce qui revient donc dans ce cas à prendre la matrice $\tilde{V}$ de la forme:

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \tilde{v}_{jj} & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

avec $\quad \tilde{v}_{jj} = \dfrac{s_j^2 - p_j^2}{(h_{jj})_E}$

dont: s_j est la valeur propre désirée de l'estimateur optimal
p_j est la valeur propre à changer.

Nous remarquons que si le mode z_j n'est pas observable alors la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice DM sera nulle et par conséquent $(h_{jj})_E = 0$,dans ce cas l'estimateur ne peut pas avoir la valeur propre désirée.

<u>Exemple:</u> Considérons le système linéaire donné par les matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [\; 0 \quad 1 \;] \quad \text{et} \quad W = [\; 1 \;]$$

Le problème est de calculer les deux matrices V (matrice de covariance) et K (matrice de gain du filtre de Kalman) afin que l'estimateur optimal aura les valeurs propres $s_1=-8$ et $s_2=-5$.

$$M_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (H_E)_o = M_b^T D^T W^{-1} D M_b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres du système sont: $p_1 = -2$ et $p_2 = -1$
Si nous commençons à changer la valeur propre $p_2=-1$ par $s_2=-5$ alors:

$$(\tilde{V}_{22})_1 = \frac{(-5)^2 - (-1)^2}{1} = 24$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$$

aussi:

$$V'_1 = M_b \tilde{V}_1 M_b^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$$

En résolvant l'équation de Riccati on trouve la matrice de gain est K_1:

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad K_1 = M_b \tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

l'estimateur optimal devient donc:

$$A_1 = A - K_1 D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et $$(H_E)_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Changeons maintenant la deuxième valeur p1=-2 par la valeur s1=-8 on aura dans ce cas:

$$(\tilde{v}_{11})_2 = 60 \Rightarrow \tilde{V}_2 = \begin{bmatrix} 60 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V_2' = M_1 \tilde{V}_2 M_1^T = \begin{bmatrix} 510 & 180 \\ 180 & 60 \end{bmatrix}$$

En résolvant l'équation de Riccati on obtient:

$$\tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{d'où :} \quad K_2 = M_1 \tilde{K}_2 = \begin{bmatrix} 18 \\ 6 \end{bmatrix}$$

le résultat final du changement des valeurs propres p1 et p2 sera donc:

$$V' = V_1' + V_2' = \begin{bmatrix} 540 & 180 \\ 180 & 84 \end{bmatrix} \text{ et } K = K_1 + K_2 = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

CONCLUSION

CONCLUSION:

Par la présentation de ce modeste travail,ma formation d'INGENIEUR se termine avec une satisfaction d'avoir approfondie mes connaissances aussi bien dans le domaine de l'Automatique que celui de l'Informatique.

Dans cette étude,nous avons developpé principalement une méthode générale qui peut être traitée aisément par micro-ordinateur.Cette méthode permet d'une part le calcul d'une commande optimale avec valeurs propres prescrites pour des systèmes linéaires (continus) invariants dans le temps et elle peut être utilisée aussi pour déplacer les valeurs propres d'un système optimal vers la région voulue dans le demi plan complexe gauche.

D'autre part,la réalisation de la commande optimale par retour d'état nécessite l'estimation du vecteur d'état, généralement non mesurable,pour cela la procédure suivi pour le calcul de la commande optimale peut être aussi utilisée pour la détermination d'un estimateur optimal (filtre de Kalman) avec les valeurs propres prescrites.Notons enfin qu'une extension de cette méthode pour le cas des systèmes discrets est possible.

ANNEXE .1.

Principe du minimum

PRINCIPE DU MINIMUM [2]

Dans cet annexe nous présentons la méthode classique de résolution des problèmes dynamiques, le principe du minimum dans le cas continu et discret.

I-Cas continu:

I-1Problème de l'optimisation dynamique:

On considère un système dynamique non linéaire décrit par les équations d'état suivantes:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t),U(t),t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \qquad \text{(I-1), où:}$$

X(t) est un n-vecteur d'état,

$X(t_0)$ est l'état initial (supposé connu),

U(t) est un m-vecteur d'état de commande

et F est un n-vecteur de fonctions non linéaires continues et dérivables.

On veut choisir un vecteur de U(t) ($t_0 \leq t \leq t_f$),où t_f est le temps final,il peut être libre ou fixe,afin d'avoir un comportement désirable de nôtre système.

$$\text{Soit} \quad J = h(X(t_f),t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(X(t),U(t),t)\,dt \quad (*)$$

la fonction objectif du système dynamique ;où h et g sont généralement des fonctions scalaires non linéaires.

Le problème d'optimisation dynamique consiste à trouver un vecteur U^*admissible faisant suivre au système une trajectoire admissible X^* qui minimise le critère J donné par la relation (*).

Etant donné le problème dynamique décrit par les équations (I-1) et (*),nous définissons la fonction Hamiltonien H:

$$H(X(t),U(t),\lambda(t),t)=g(X(t),U(t),t)+\lambda^t.F(X(t),U(t),t)$$

où $\lambda(t)$ est un n-vecteur de multiplicateur de Lagrange.

II-Conditions nécessaires d'optimisation:

X^*, U^*et $\lambda^*(t)$ sont les solutions optimales du probléme dynamique si et seulement si:

$$\dot{X}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(X^*(t) , U^*(t) , \lambda^*(t) ,t)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \frac{\partial H}{\partial X}(X^*(t) , U^*(t) , \lambda^*(t), t)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial U}(X^*(t) , U^*(t) , \lambda^*(t) , t)$$

$$t \in [to , t_f]$$

et :

$$\frac{\partial h}{\partial x}[(X^*(t_f) , t_f) - \lambda^* (t_f)] \delta Xf +$$
$$[H(X^*(t_f) U^*(t_f) ,\lambda^*(t) , t_f) +$$
$$\frac{\partial h}{\partial t}(X^*(tf) , tf)\delta tf = 0 \qquad \text{(II-3)}$$

δXf , δtf étant respectivement des petites variations de l'état et du temps finaux.

Conditions aux limites:

Dans les problèmes particuliers nous substituerons les états et temps limites dans l'équation (II-3), ce qui donnera les conditions aux limites .

Nous donnerons ici deux types de problèmes aux limites:

a)Problèmes à temps final fixe(cas trés fréquent):

tf étant specifié, l'etat $X(tf)$ peut être fixe, libre ou variable dans une certaine région de l'espace d'état.

a-1) $X(t_f)$ spécifié entraine $\delta t_f = 0$ et $\delta X(t_f) = 0$ dans (II-3), ce qui donne:

$$X(t_f) = X_f$$

a-2) si $X(t_f)$ est libre, alors seul δt_f est nul dans (II-3), on aura donc:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(X^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) = 0$$

a-3) Si l'état final varie dans une région définie par $Q(X(t)) = 0$, Q étant un K-vecteur où chaque composante de Q représente une hypersurface dans l'espace d'état à n dimensions, alors l'équation relative aux conditions aux limites s'écrira :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(X^*(t_f),t_f) - \lambda^*(t_f) = \sum_{i=1}^{k} d_i\left[\frac{\partial q_i}{\partial x}(X^*(t_f))\right]$$

pour déterminer les 2n constantes d'intégration dans la solution des équations d'état ainsi que les d_i on utilisera les n équations $X^*(t_o) = X_o$ et les équations $Q(X(t_f)) = 0$.

<u>b)Problémes à temps final libre (δt_f non nul):</u>

b-1) l'état final $X(t_f)$ est fixe => $\delta X_f = 0$, l'équation (II-3) donne dans ce cas :

$$H(X^*(t_f) , U^*(t_f) , \lambda^*(t_f) ,t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(X^*(t_f),t_f) = 0$$

b-2) L'état final est libre, alors δt_f et δX_f sont arbitraires et indépendants d'où leurs coefficients sont nuls dans (II-3):

$$\lambda^*(t_f) = \frac{\partial h}{\partial x}(X^*(t_f),t_f) \quad ; \text{(n équations)} ; \text{et}$$

$$H(X^*(t_f),U^*(t_f),\lambda^*(t_f),t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(X^*(t_f),t_f) = 0$$

de maniére similaire, on peut développer pour d'autres types de problémes des conditions aux limites par substitution dans l'equation (II-3).

Cas discret:

La représentation de plusieurs systèmes , en particulier ceux économiques est faite par des processus discrets; pour de tels systèmes il existe une version discrète du principe du mìnimum.
Soit un système dynamique discet non linéaire décrit par les équations d'états suivantes:

$$X(K+1) = F(X_k, U_k, k) \qquad \text{(II-3-1)}$$

où: F : est une fonction continue doublement différentielle.
$X(k)$: vecteur d'état à l'instant k.
$U(k)$: vecteur de commande à l'instant k
$X(k+1)$: vecteur d'état à l'instant k+1.
nous souhaitant minimiser le critère :

$$J = [\, h(X_k \,, k)\,]_{k_0}^{k_f} + \sum_{k=k_0}^{k_f-1} g(X_k, U_k, k)$$

sous les contraintes de (II-3-1).

Conditions nécessaires d'optimalité:

Comme dans le cas continu nous définissons le hamiltonien discret :

$$H(X_k, U_k, k+1, k) = H_k = g(X_k, U_k, k) + \lambda^t_{k+1} \cdot F(X_k, U_k, k)$$

où λ_k sont les multiplicateurs de Lagrange.

La trajectoire optimale doit satisfaire les conditions suivantes:

$$\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = X(k+1)$$

$$\frac{\partial H_k}{\partial U_k} = 0 \;; \text{ où } \quad [\partial g_k/\partial U_k] + [\partial F/\partial U_k]^t \lambda_{k+1} = 0$$

$$\lambda_k = [\partial H_k/\partial X_k] \quad \text{où} \quad \lambda_k = [\, \partial F/\partial X_k]^t \lambda_{k+1} + [\partial g_k/\partial X_k]$$

$$\begin{cases} u_{kc}[\lambda_{kc} - [\partial hkc/\partial Xkc]] = 0 \\ u_{kf}[\lambda_{kf} - [\partial hkf/\partial Xkf]] = 0 \end{cases}$$

où u_k : sont des perturbations à différents instants k.

ANNEXE .2.

Rappels mathematiques

ANNEXE 2 [5]

RAPPELS MATHEMATIQUES:

Formes quadratiques et bilinéaires et leurs dérivés partielles:

Dans certaines calculs d'optimisation, les formes quadratiques et bilinéaires ainsi que leurs dérivés possèdent une importance primordiale.

1)Forme quadratique:

La forme quadratique est un scalaire definit par :

$$q = X^T.Q.X = \sum_{i,j=1}^{k} q_{ij}\ x_i\ x_j$$

Q est une matrice carrée(n,n) et symétrique.Le vecteur possède alors la dimension n.

2)Matrices définies positives ou négatives:

La matrice carrée et symétrique Q est définie positive quand il éxiste pour sa forme quadratique la condition:

$$q = X^T.Q.X > 0 \ ; \quad X \# 0$$

la matrice Q est définie non négative lorsque pour certaines valeurs de X#0 le scalaire q s'annule et mis à part ces points particuliers, le scalaire est toujour positif
On a donc la condition suivante:

$$q = X^T.Q.X \geq 0 \ ; \quad X \# 0$$

par contre, la matrice Q est définie négative lorsqu'on a :

$$q = X^T.Q.X \leq 0 \ ; \quad X \# 0$$

3)Dérivée parcielle de la forme quadratique:

La dérivée partielle de la forme quadratique est donnée par:

$$\partial q/\partial x = \partial(X^T.Q.X)/\partial x = 2QX$$

où Q est une matrice carrée et symétrique.

4)Forme bilinéaire:

La forme bilinéaire est également un scalaire dont la definition est:

$$P = X^T.P.Y$$

dans ce cas,la matrice P peut être une matrice rectangulaire (n,m).Le vecteur ligne X^T est alors de dimension n et le vecteùr Y de dimension m. Une autre forme bilinéaire est donnée par:

$$P = Y^T.P.X$$

5)Drivées partielles des formes bilinéaires:

La dérivée partielle de la forme bilinéaire est donnée par:

$$\partial P/\partial x = \partial(X^T.P.Y)/\partial x = P.Y$$

$$\text{et} \quad \partial(X^T.P.X/\partial x = P^T Y$$

6)Dérivée partielle du produit d'une matrice et d'un vecteur:

Il y'a deux relations:

$$\partial(A.X)^T/\partial x = A^T$$

$$\text{et} \quad \partial(X^T.A)/\partial x = A$$

La matrice A peut être une matrice rectangulaire, à la limite même un vecteur ligne ou un vecteur colonne.

7)Valeurs propres d'une matrice:

On appelle valeur propre d'une matrice toute racine λ de son équation caractéristique:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Si A(n,n), on aura n valeurs propres réelles ou complexes, distinctes ou multiples.

8)Vecteurs propres d'une matrice:

On appelle vecteur propre m associé à une valeur propre, tout vecteur solution de l'équation :

$$[A - \lambda I]m = 0$$

donc à une valeur simple correspond un vecteur propre unique (à un coéfficient de proportionalité près). A une valeur propre multiple d'ordre μ, peut correspondre 1 à μ vecteurs propres selon le nombre de solutions indépendantes du système d équations.

9)Forme diagonale d'une matrice:

Si toutes les racines de l'équation caractéristique sont distinctes, il est possible de mettre la matrice A sous la forme diagonale:

$$\tilde{A} = \text{diag}\,[\,\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots \lambda_n\,] \qquad \lambda_i \# \lambda_j \quad \text{si} \quad i \# j$$

La matrice de transformation M est la matrice des vecteurs propres:

$$M = [\,m_1, m_2, \ldots\ldots m_n\,] \qquad \text{avec} \qquad A\,m_I = \lambda_I m_I$$

$$\tilde{A} = M^{-1}AM \quad \Leftrightarrow \quad M\tilde{A} = AM \quad \Leftrightarrow \quad M\tilde{A}M^{-1} = A$$

donc on peut dire que si on a une matrice A telleque $\lambda_i \# \lambda_j$ si i#j, alors:

$$\Longrightarrow \exists \quad \tilde{A} = \text{diag}\,[\,\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n\,] \quad \text{telleque} \quad A = M\tilde{A}M^{-1}$$

10)Forme quasi diagonale de Jordan:

appelons matrice élémentaire, une matrice $D_k(\lambda)$ (k,k), dont la diagonale principale est formée par k même nombres complexes λ, et dont les éléments situés immédiatement à droite des éléments diagonaux sont egaux à 1 et tous les autre éléments nuls:

$$D_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \lambda \end{bmatrix}$$

Toute matrice A(n,n) est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} D_{k1}(\lambda_1) & & & \\ & D_{k2}(\lambda_2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_{kn}(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

dans laquelle les éléments situés au voisinage de la diagonale principale se distribuent dans une suite de matrices élémentaires de rang $k_1, k_2, \ldots, k_n$ avec

$k_1+k_2+\ldots\ldots+k_n = n$; tous les autres éléments sont nuls.

Les éléments diagonaux λ_1, λ_2 ....correspondant sont manifestement les valeurs propres de la matrice **A**
Si $k_i > 1$, λ_i est une valeur propre multiple d'ordre au moin égal à k_i.Cet ordre vaut exactement k_i si λ_i sont distinctes. Mais il peut arriver par exemple que $\lambda_2 = \lambda_1$, λ_1 est alors multiple d'ordre k_1+k_2 même si $k_1=1$.

Si tous les k_i sont égaux à 1, **A** est semblable à une matrice diagonale; chacune des matrices élémentaires est alors de rang 1.Donc en conclusion on peut dire que toute matrice **A** peut se mettre sous la forme de Jordan $A = MJM^{-1}$
J étant la matrice formée de blocs de Jordan, **M** étant la matrice des vecteurs propres.

11)Matrice symplectique:

Soit une matrice réelle 2n.2n.Intrduisant l'opérateur 2nx2n;

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \iff g^{-1} = -g = g^T$$

définition La matrice **M** est symplectique si et seulement si:

$$M^{-1} = g^{-1}.M.g^T$$

Propriété 1:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} D^T & -B^T \\ C^T & A^T \end{bmatrix}$$

Propriété 2:

$$M^{-1}M = I \quad \begin{cases} A^TD - C^TB = D^TA - B^TC = I \\ B^TD \text{ symétrique; si } \exists\, D^{-1}: BD^{-1} \text{ symétrique} \\ A^TC \text{ symétrique; si } \exists\, A^{-1}: CA^{-1} \text{ symétrique} \end{cases}$$

Propriété 3:

$$MM^{-1} = I \quad \begin{cases} AD^T - BC^T = DA^T - CB^T = I \\ AB^T \text{ symétrique; si } \exists\, A^{-1}: A^{-1}B \text{ symétrique} \\ CD^T \text{ symétrique; si } \exists\, D^{-1}: D^{-1}C \text{ symétrique} \end{cases}$$

Propriété 3:

Si λ est valeur propre de M alors $1/\lambda$ l'est aussi, d'où $\det M = 1$.

Propriété 4:

soit $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ le vecteur propre associé à λ, alors $(y^T, -x^T)$ est le vecteur propre gauche associé à $1/\lambda$.

12)Matrice hamiltonienne:

Soit H une matrice réelle 2n.2n

Définition : La matrice H est hamiltonienne si et seulement si:

$$-H = g^{-1}H^Tg$$

Propriété 1: forme générique

$$H = \begin{bmatrix} A & B^TB \\ C^TC & -A^T \end{bmatrix}$$

Propriété 2:

Si λ est une valeur propre de H, alors $-\lambda$ est aussi valeur propre de H.

Propriété 3:

soit $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ le vecteur propre associé à λ, alors $(y^T, -x^T)$ est le vecteur propre gauche associé à $-\lambda$.

ANNEXE .3.

Exemples d'applications

EXEMPLE-1:

Considérons le système donné par:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres en boucle ouverte sont:

$p_1 = -1$ et $p_2 = -2$

Si on commence par le chagement de la première valeur $p_1 = -1$ et choisissons $s_1 = -5$ comme valeur désirée on obtient alors:

$\tilde{q}_{11} = 20$,

la matrice Q de pondération est:

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$$

la matrice gain du retour est:

$$G = \begin{bmatrix} -3.333 & -3.333 \\ -0.666 & -0.666 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres en boucle fermée (A+BG) sont:

$p_1 = s_1 = -5$ et $p_2 = -2$

Après le changement de la deuxième valeur própre $p_2 = -2$ par $s_2 = -8$ on obtient:

$\tilde{q}_{22} = 331.428$,

$$Q = \begin{bmatrix} 22.857 & 48.571 \\ 48.571 & 305.74 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} -3.619 & -6.190 \\ -1.238 & -6.381 \end{bmatrix}$$

et on trouve les valeurs propres du système en boucle fermée:

$$s_1 = -5 \quad , \quad s_2 = -8 \quad .$$

Exemple-2:Considérons le même système et les mêmes valeurs propres désirées $s_1 = -5$ et $s_2 = -8$ mais commençons cette fois-ci à changer la valeur $p_2 = -2$ par $s_2 = -8$ en premier lieu après on changera l'autre valeur.Dans ce cas on obtient le résultat final:

$$Q = \begin{bmatrix} 62.222 & 15.555 \\ 15.555 & 108.88 \end{bmatrix} \quad , \quad G = \begin{bmatrix} -6.370 & -2.592 \\ -0.518 & -3.629 \end{bmatrix}$$

Exemple-3: Soit le système suivant:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad => \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres en boucle ouverte sont:

$p_1 = 6.35889$ (positive)

$p_2 = -2.35889$

$p_3 = -1.00000$

$p_1 > 0$ le système est instable mais comme la valeur p_1 est commandable on peut la changer pour le système stable.

Si on change p_1 par $s_1 = -8$ on obtient:

$$\tilde{q}_{11} = 69.280 \quad ,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 21.262 & 15.646 & 20.662 \\ 15.646 & 11.514 & 15.205 \\ 20.662 & 15.205 & 20.078 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{bmatrix} -12.956 & -9.534 & -12.590 \\ -1.907 & -1.403 & -1.853 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres en boucle fermée (A+BG) sont:

$s_1 = -8.00000$

$p_2 = -2.35889$

$p_3 = -1.00000$

Changeons en suite la deuxième valeur p_2 par $s_2 = -5$ on obtient:

$$\tilde{q}_{22} = 11.141 \quad ,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 35.039 & 35.388 & 53.257 \\ 35.388 & 39.803 & 61.911 \\ 53.257 & 61.911 & 97.194 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -14.828 & -12.217 & -17.019 \\ -2.443 & -2.172 & -3.122 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres en boucle fermée (A+BG) sont:

$s_1 = -8.000$

$s_2 = -5.00000$

$p_3 = -1.00000$

Changeons la dernière valeur p_3 par $s_3 = -9$ on obtient:

$\tilde{q}_{33} = 100.888$,

$$Q = \begin{bmatrix} 35.107 & 40.606 & 54.054 \\ 40.606 & 439.462 & 122.943 \\ 54.054 & 122.943 & 106.514 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{bmatrix} -14.835 & -12.738 & -17.099 \\ -2.548 & -10.65 & -4.343 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de (A+BG) sont:

$s_1 = -8.00000$

$s_2 = -5.00000$

$s_3 = -9.00000$.

Exemple-4: Soit le système suivant:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de A en boucle fermée sont:

$p_1 = -1$

$p_2 = -2$

$p_3 = -3$

Le changement de p_1 par $s_1 = -6$ donne:

$\tilde{q}_{11} = 17.500$,

$$Q = \begin{bmatrix} 17.500 & -17.500 & 17.500 \\ -17.500 & 17.500 & -17.500 \\ 17.500 & -17.500 & 17.500 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{bmatrix} -2.500 & 2.500 & -2.500 \\ 2.500 & -2.500 & 2.500 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de (A+BG) sont:

$s_1 = -6$

$p_2 = -2$

$p_3 = -3$

le changement de p_2 par $s_2 = -8$ donne:

$\tilde{q}_{22} = 56.470$,

$$Q = \begin{bmatrix} 61.618 & 8.970 & 61.618 \\ 8.970 & 33.382 & 8.970 \\ 61.618 & 8.970 & 61.618 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{bmatrix} -6.912 & -1.470 & -6.912 \\ -0.147 & -4.088 & -0.147 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de (A+BG) sont:

$s_1 = -6$

$s_2 = -8$

$p_3 = -3$

Remarque:Dans cet exemple la valeur p_3 n'est pas commandable on peut pas la changer.

<u>Exemple-5:</u> Considérons le système donné par:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \Rightarrow G_0 = \begin{bmatrix} -0.800 & -2.590 & -0.045 \\ -0.520 & -3.910 & -1.220 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de $(A+BG_0)$ sont:

$p_1 = -2.91$

$p_2 = -4.9 - j4.82$

$p_3 = -4,9 + j4.82$

le changement de p_1 par $s_1 = -8$ donne:

$\tilde{q}_{11} = 56$,

$$Q = \begin{bmatrix} 55.000 & -12.200 & 12.200 \\ -12.200 & 2.700 & -2.700 \\ 12.200 & -2.700 & -2.700 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{bmatrix} -5.840 & -1.490 & -1.150 \\ -0.300 & -3.850 & -1.170 \end{bmatrix}$$

Exemple-6: Soit le système suivant:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad => \quad G_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres en boucle ouverte sont:

$p_1 = -1 - j$

$p_2 = -1 + j$

les valeurs désirées sont $s_1 = -5$ et $s_2 = -8$

le changement de p_1 par s_1 donne:

$\tilde{q}_{11} \quad \tilde{q}_{22} = 29.734$,

$$Q = \begin{bmatrix} 29.734 & 0.000 \\ 0.000 & 29.734 \end{bmatrix} , \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} -4.614 & -4.109 \\ 0.082 & -1.599 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de (A+BG) sont:

$s_1 = -5.096$

$p_2 = -3.116$

Changeons p_2 par $s_2 = -8$,on obtient:

$\tilde{q}_{22} = 183.949$,

$$Q = \begin{bmatrix} 51.608 & 59.543 \\ 59.543 & 191.808 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{bmatrix} -6.582 & -5.767 \\ -1.153 & -4.514 \end{bmatrix}$$

les valeurs propres de (A+BG) sont:

$$s_1 = -5.096$$

$$s_2 = -8.000 \quad .$$

ANNEXE :

PROGRAMMES

```
C*************************************************************
C
C       PROGRAMME TESTANT LA COMMANDABILITE ET L'OBSERVABILITE
C       D'UN SYSTEME DONNE PAR LES TROIS MATRICES A,B ET C
C       A(N,N):MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME
C       B(N,L):MATRICE D'APPLICATION DE LA COMMANDE
C       C(M,N):MATRICE de SORTIE
C
C*************************************************************

      REAL*8 A(10,10),B(10,10),C(10,10),CT(10,10),AT(10,10)
      REAL*8 GOUV(10,100),W(10),BB(10,10),BC(10,10),W1(10)
      REAL*8 BB1(10,10),BC1(10,10),G1(10,100)
      Nmx=10
      WRITE(*,*)'ENTRER N,L,M respectivement'
      READ(*,*)N,L,M
      WRITE(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE A'
      DO 50 I=1,N
   50 READ(*,*)(A(I,J),J=1,N)
      WRITE(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE B'
      DO 60 I=1,N
   60 READ(*,*)(B(I,J),J=1,L)
      WRITE(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE C'
      DO 70 I=1,M
   70 READ(*,*)(C(I,J),J=1,N)

C*************************************************************
C
C       TEST D'OBSERVABILITE
C
C*************************************************************

      DO 1 I=1,M
      DO 1 J=1,N
    1 AT(I,J)=A(J,I)
      DO 2 I=1,M
      DO 2 J=1,N
    2 CT(J,I)=C(I,J)
      CALL GOUVER(AT,CT,N,M,MN,GOUV,BB,BC)
      K=0
      DO 5 J=1,MN
      DO 4 I=1,N
    4 W(I)=GOUV(I,J)
    5 CALL INDV(N,W,K)
      IF (K.GE.N) GOTO 6
      IF (K.LT.N) GOTO 7
    6 WRITE(*,*)'LE SYSTEME EST OBSERVABLE'
    7 WRITE(*,*)'LE SYSTEME N''EST PAS OBSERVABLE'
```

```
C**********************************************************
C
C       TEST DE COMMANDABILITE
C
C**********************************************************

      CALL GOUVER(A,B,N,L,NL,G1,BB1,BC1)
      K=0
      DO 10 J=1,NL
      DO 11 I=1,NL
   11 W(I)=G1(I,J)
   10 CALL INDV(N,W,K)
      IF (K.GE.N) GOTO 12
      IF (K.LT.N) GOTO 13
   12 WRITE(*,*)'LE SYSTEME EST COMMANDABLE'
   13 WRITE(*,*)'LE SYSTEME N''EST PAS COMMANDABLE'
      STOP
      END

C**********************************************************
C
C       SOUS PROGRAMME FORMANT LA MATRICE DE COMMANDABILITE
C       ET D'OBSERVABILITE D'UN SYSTEME
C
C**********************************************************

      SUBROUTINE GOUVER(A,B,N,M,MN,Nmx,GOUV,BB,BC)
      REAL*8 A(10,10),B(10,10),BB(10,10),GOUV(10,100)
      REAL*8 BC(10,10)
      DO 40 I=1,N
      DO 40 J=1,M
      BB(I,J)=B(I,J)
   40 GOUV(I,J)=BB(I,J)
      J1=M
   42 CALL PRODMAT(A,BB,N,N,M,Nmx,BC)
      DO 39 I=1,M
      J1=J1+1
      DO 39 J=1,N
      GOUV(I,J1)=BC(I,J)
      BB(I,J)=BC(I,J)
   39 CONTINUE
      IF (J1.LT.MN) GOTO 42
      RETURN
      END
```

```
C*****************************************************************
C
C      SOUS PROGRAMME TESTANT LE NOMBRE DE VECTEURS
C      LINEAIREMENT INDEPENDANTS D'UNE SUITE
C
C*****************************************************************

      SUBROUTINE INDV(Q,V,K)

      REAL*8 V(1),E(20,20),E1(20),M(20),ANORM,SNORM,S
      K=K+1
      DO 10 I=1,IQ
   10 E(I,K)=V(I)
      IF (K-1) 50,50,17
   50 ANORM=0
      DO 55 I=1,IQ
   55 ANORM=ANORM+E(I,K)*E(I,K)
      M(K)=ANORM
      GOTO 166
   17 ICM=K-
      DO 61 I=1,IQ
   61 E1(I)=0
      DO 40 I=1,ICM
      S=0.D0
      DO 35 J=1,IQ
   35 S=S+V(J)*E(J,I)
      DO 40 IK=1,IQ
   40 E1(IK)=E1(IK)+(S*E(IK,I))/M(I)
      DO 62 I=1,IQ
   62 E(I,K)=E(I,K)-E1(I)
      ANORM=0.D0
      DO 18 I=1,IQ
   18 ANORM=ANORM+E(I,K)*E(I,K)
      M(K)=ANORM
      SNORM=0.D0
      DO 45 I=1,IQ
   45 SNORM=SNORM+DABS(E(I,K))
      IF (SNORM.LT.0.00001D0) GOTO 16
      GOTO 166
   16 K=K-1
  166 RETURN
      END
```

```
C******************************************************************
C
C       SOUS PROGRAMME CALCULANT LE PRODUIT DE DEUX MATRICES
C
C******************************************************************

      SUBROUTINE PRODMAT(X,Y,N,N1,M,Nmx,Z)
      REAL*8 X(Nmx,N),Y(Nmx,M),Z(Nmx,M)
      DO 2 I=1,N
      DO 2 J=1,M
      Z(I,J)=0.D0
      DO 2 K=1,N1
    2 Z(I,J)=Z(I,J)+X(I,K)*Y(K,J)
      RETURN
      END
```

```
C*****************************************************************
C
C      PROGRAMME PRINCIPALE CALCULANT UNE COMMANDE OPTIMALE
C      POUR DES SYSTEMES LINEAIRES ,CONTINUS ET INVARIANTS
C      DE TELLE SORTE QUE LE SYSTEME EN BOUCLE FERMEE AURA
C      DES VALEURS PROPRES DESIREES.CE PROGRAMME UTILISE LA
C      REPRESENTATION D'ETAT DU SYSTEME.
C      A(n,n):MATRICE D'EVOLUTION DU SYSTEME
C      B(m,n):MATRICE D'APPLICATION DES COMMANDES
C      D(r,n):MATRICE DES SORTIES
C      P(m,m):MATRICE DE PONDERATION DES COMMANDES
C      Q(n,n):MATRICE DE PONDERATION DU VECTEUR D'ETAT
C      G(m,n):MATRICE GAIN DU RETOUR D'ETAT
C
C*****************************************************************

      Real*8 A(5,5),B(5,5),P(5,5),Q(5,5),Q2i(5,5)
      Real*8 A1(5,5),V1(5,5),Ai(5,5),Q1(5,5),Qkk
      Real*8 Q3(5,5),s1,s2,Sh(2,2),Hi(5,5)
      Complex*16 Di(5,5),PMi(5,5),VWi(5),VS(5),F2(5,5)
      Complex*16 CA(5,5),CB(5,5),B1(5,5),CP(5,5),G(5,5)
      Complex*16 tPMi(5,5),CR(5,5),PM1i(5,5),G0(5,5)
      Complex*16 CP2(5,5),CV(5,5),Qi1(5,5),Gi(5,5)
      Complex*16 CBT(5,5),Ei(5,5),F1(5,5),CAi(5,5),D1i(5,5)
      Complex*16 CHi(5,5),Qi(5,5),CQ(5,5),CV1(5,5)
      Complex*16 G1i(5,5),CL(5,5),CL1(5,5),CL2(5,5)
      Write(*,*)'ENTRER ORDRE DE A'
      Read(*,*)N
      Write(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE A'
      Call lectmat(A,N)
      Write(*,*)'ENTRER ORDRE DE B'
      Read(*,*)M
      Write(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE B'
      Read(*,*)((B(i,j),j=1,M),i=1,N)
      Write(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE P'
      Call lectmat(P,M)
      Write(*,*)'ENTRER LES ELEMENTS DE Q'
      Call lectmat(Q,N)
      Call cpl(P,CP,M)
      Call cinvs(CP,CP2,M)
      Do 7 I=1,N
      Do 7 J=1,M
      CB(I,J)=cmplx(B(I,J),0.D0)
 7    B1(I,J)=CB(I,J)
      Call cmply1(CB,CP2,CV,N,M,M)
      Do 51 i=1,M
      Do 51 j=1,N
 51   CBT(i,j)=CB(j,i)
      Call cmply1(CV,CBT,CV1,N,M,N)
```

```
      Call cpl(A,CA,N)
      Call riccat(CA,B1,P,Q,N,M,CR)
      Write(*,*)((CR(i,j),j=1,N),i=1,N)
      Call cmply1(CBT,CR,F1,M,N,N)
      Call cmply1(CP2,F1,G0,M,M,N)
      Do 3 i=1,M
      Do 3 j=1,N
3     G(i,j)=-G0(i,j)
      Call cmply1(B1,G,Ei,N,M,N)
      Call csommat(Ei,CA,CAi,N)
      Do 8 I=1,N
      Do 8 J=1,N
8     Ai(I,J)=Dreal(CAi(I,J))
      Call valp(Ai,N,Di,PMi,VWi)
      Write(*,*)'LES VLPRS EN BOUCLE OUVERTE SONT :'
      Do 91 I=1,N
91    Write(*,*)Dreal(VWi(I)),Dimag(VWi(I))
19    k=1
20    Write(*,*)VWi(k)
      If(Dimag(VWi(k)).NE.0.D0) go to 16
      Write(*,*)'VOULEZ-VOUS CHANGER CETTE VLPR?'
      Write(*,*)'SI OUI ENTRER 1 SINON ENTRER UN CHIFFRE DIFFERENT DI
      Read(*,*)test
      If(test-1) 21,22,21
22    Write(*,*)'ENTRER LA VALEUR DESIREE'
      Read(*,*)VS(k)
      K1M=2
      Go to 80
21    k=k+1
      If(k.gt.N) Go to 26
      Go to 20
16    Write(*,*)'CETTE VLPR EST COMPLEXE'
      Write(*,*)'CE PROGRAMME CHANGE LES VLPRS COMPLEXES PAR DEUX'
      Write(*,*)'IL PEUT LES CHANGER SOIT PAR DEUX AUTRES REELLES'
      Write(*,*)'SOIT PAR DEUX VLPRS COMPLEXES'
      Write(*,*)'VOULES-VOUS CHANGER CETTE VLPR?'
      Write(*,*)'SI OUI ENTRER 1 SINON ENTRER UN CHIFFRE DIFFERENT I
      Read(*,*)test1
      If(test1-1) 23,24,23
23    k=k+1
      Go to 21
24    Write(*,*)'ENTRER UN 1 POUR LE CAS REEL'
      Write(*,*)'ENTRER UN NOMBRE DIFFERENT DE 1 POUR LE CAS COMPLE
      Read(*,*)test2
      If(test2-1) 25,27,25
25    Write(*,*)'SI VOUS VOULEZ FIXER LA PARTIE REELLE DE LA NVLP'
```

```
      Write(*,*)'ENTRER UN NOMBRE DIFFERENT DE ZERO'
      Write(*,*)'ENTRER UN ZERO SI VOUS FIXEZ LA PRTIE IMAGINAIRE'
      Read(*,*)IT
      KLM=1
      Go to 96
27    KLM=0
96    Write(*,*)'SUIVANT VOTRE CHOIS ENTRER LA VALEUR DESIREE'
      Read(*,*)s1
      Do 15 I=1,N
      Do 15 J=1,N
15    CL(I,J)=(0.D0,0.D0)
      CL(k,k)=(0.5D0,0.D0)
      CL(k+1,k)=(0.5D0,0.D0)
      CL(k,k+1)=(0.D0,-0.5D0)
      CL(k+1,k+1)=(0.D0,0.5D0)
      Call cinvs(CL,CL2,N)
      Call cmply(CL2,Di,D1i,N)
      Call cmply(D1i,CL,Di,N)
      Call cmply(PMi,CL,CL1,N)
      Call csubn(CL1,PMi,N)
80    Call cinvs(PMi,PM1i,N)
      Call cmply(PM1i,CV1,CV,N)
      Call ctrsmat(PM1i,tPMi,N)
      Call cmply(CV,tPMi,CHi,N)
      If(KLM-1) 29,29,28
28    Qkk=(DREAL(VS(k))**2-DREAL(VWi(k))**2)/DREAL(CHi(k,k))
      Write(*,*)Qkk
      Do 70 i=1,N
      Do 70 j=1,N
      Qi(i,j)=(0.D0,0.D0)
      If(i.eq.k.AND.j.eq.k) Qi(i,j)=cmplx(Qkk,0.D0)
70    Continue
      Go to 41
29    Call reel(CHi,Hi,N)
      Sh(1,1)=Hi(k,k)
      Sh(1,2)=Hi(k,k+1)
      Sh(2,1)=Hi(k+1,k)
      Sh(2,2)=Hi(k+1,k+1)
      If(KLM.EQ.1) go to 37
      Call chvlpr(Sh,s1,Dreal(VWi(k)),Dimag(VWi(k)),s2,Qkk,IMP)
      Go to 36
37    Call chvlpc(Sh,IT,s1,Dreal(VWi(k)),Dimag(VWi(k)),s2,Qkk,IMP)
36    If(IMP.EQ.1) go to 26
      Write(*,*)Qkk
      Do 71 i=1,N
      Do 71 j=1,N
71    Qi(i,j)=(0.D0,0.D0)
```

```
      Qi(k,k)=cmplx(Qkk,0.D0)
      Qi(k+1,k+1)=cmplx(Qkk,0.D0)
      k=k+1
41    Call reel(Qi,Q3,N)
      Call cmply1(PM1i,B1,CB,N,N,M)
      Call riccat(Di,CB,P,Q3,N,M,CR)
      Call cmply1(tPMi,CR,F1,N,N,N)
      Call cmply1(CBT,F1,F2,M,N,N)
      Call cmply1(CP2,F2,Gi,M,M,N)
      Call cmply1(Gi,PM1i,G1i,M,N,N)
      Do 65 i=1,M
      Do 65 j=1,N
65    G(i,j)=G(i,j)-G1i(i,j)
      Call cmply1(Qi,PM1i,Qi1,N,N,N)
      Call cmply1(tPMi,Qi1,Qi,N,N,N)
      Do 53 I=1,N
      Do 53 J=1,N
53    Q2i(I,J)=Dreal(Qi(I,J))
      Call sommat(Q,Q2i,Q1,N)
      Call afmat(Q1,Q,N)
      Write(*,*)'LA MATRICE DE PONDERATION Q EST :'
      Call impmat(Q,N)
      Write(*,*)'LA MATRICE DE COMMANDE G EST :'
      Do 33 i=1,M
      Write(*,*)(Dreal(G(i,j)),j=1,N)
33    Continue
      Write(*,*)'*****fin*****'
      Call cmply1(B1,G,Ei,N,M,N)
      Call reel(Ei,V1,N)
      Call sommat(V1,A,A1,N)
      Call impmat(A1,N)
      Call valp(A1,N,Di,PMi,VWi)
      Write(*,*)'******'
      Write(*,*)'LES VLPRS EN BOUCLE FERMEE SONT :'
      DO 9 i=1,N
      Write(*,*)Dreal(VWi(i)),Dimag(VWi(I))
9     Continue
26    Write(*,*)'VOULEZ-VOUS CONTINUER ?'
      Write(*,*)'SI OUI ENTRER 1 SINON UN CHIFFRE ≠ DE 1'
      Read(*,*)CHOIS
      If(CHOIS-1) 17,19,17
17    Stop
      End
```

```
C
C------------------------------------------------------------
C
      Subroutine chvlpc(hs,IT,s1,y3,y4,s2,Qjj,IMP)
      Real*8 hs(2,2),x(2),Qjj,y3,y4,s1,s2
      Real*8 a,b,c,a1,b1,c1,d1
C*******************************************************************
C
C     CETTE PROCEDURE CHANGE DEUX VLPS COMPLEXES
C     CONJUGUEES EN DEUX AUTRES  NVLPS COMPLEXES
C
C     SI IT=0 img(nvlp) est fixe
C       SINON rel(nvlp) est fixe
C
C      S1=img(nvlp) S2=rel(nvlp) SI IT=0
C      S1=rel(nvlp) S2=img(nvlp) SI IT=1
C      y3=rel(vlp)  y4=img(vlp)
C
C       Qjj:l'element de Q
C     SI IMP=1 le changement est impossible
C
C*******************************************************************

      d1=hs(1,1)+hs(2,2)
      If(d1.eq.0.d0) go to 4
      a1=4.d0*(hs(1,1)*hs(2,2)-hs(1,2)**2)/d1
      a=a1-1.d0
      If(IT.EQ.0) go to 1
      b1=y3**2-s1**2-y4**2
      b=2.d0*(a1*b1+b1-2.d0*y3**2)
      c1=(y4**2+y3**2)*(3.d0*y4**2-y3**2+2.d0*s1**2)
      c=a1*b1**2-s1**4+c1
      Go to 2
 1    b1=y4**2-y3**2-s1**2
      b=2.d0*(a1*b1+b1+2.d0*y3**2)
      c1=(y3**2+y4**2)*(3.d0*y4**2-y3**2-2.d0*s1**2)
      c=a1*b1**2-s1**4+c1
 2    If(a.eq.0.D0) go to 3
      Call seq2(a,b,c,x,ib)
      If(ib-1) 4,6,7
 6    If(x(1).lt.0.d0) go to 4
      s2=dsqrt(x(1))
      Go to 9
 7    If(x(1).lt.0.d0) go to 8
      s2=dsqrt(x(1))
      Go to 9
 8    If(x(2).lt.0.d0) go to 4
```

```
      s2=dsqrt(x(2))
9     Qjj=2.d0*(s1**2-y3**2-s2**2+y4**2)/(hs(1,1)+hs(2,2))
      Go to 5
3     If(b.eq.0.D0.OR.c.eq.0.D0) go to 4
      Qjj=-c/(2.d0*b)
      Go to 5
4     Write(*,*)'LE CHANGEMENT EST IMPOSSIBLE'
      IMP=1
5     Return
      End

C     ------------------------------------------------------------
      Subroutine chvlpr(hs,s1,y3,y4,s2,Qjj,IMP)
      Real*8 hs(2,2),x(2),s1,s2,y3,y4,Qjj
      Real*8 a,b,c,c1,d1
      d1=hs(1,1)+hs(2,2)
      a=(hs(1,1)*hs(2,2)-hs(1,2)**2)/d1**2
      c1=s1**2-2.d0*(y3**2-y4**2)
      b=y3**2+y4**2-s1**2+2.d0*a*(hs(1,1)+hs(2,2))*c1
      c=(y3**2+y4**2)*(3.d0*y4**2-y3**2+s1**2)+a*c1**2
      If(a.eq.0.D0) go to 3
      Call seq2(a,b,c,x,ib)
      If(ib-1) 4,6,7
6     If(x(1).lt.0.d0) go to 4
      s2=dsqrt(x(1))
      Go to 10
7     If(x(1).lt.0.d0) go to 11
      s2=dsqrt(x(1))
      Go to 10
11    If(x(2).lt.0.d0) go to 4
      s2=dsqrt(x(2))
10    Qjj=(c1+s2**2)/(hs(1,1)+hs(2,2))
      Go to 5
3     If(b.eq.0.D0.OR.c.eq.0.D0) go to 4
      Qjj=-c/(2.D0*b)
      Go to 5
4     Write(*,*)'LE CHANGEMENT EST IMPOSSIBLE'
      IMP=1
5     Return
      End
C     ------------------------------------------------------------
```

```
C*************************************************************
C
C       SOUS PROGRAMME RESOLUTION D'EQUATION DU DEUXIEME
C                           DEGRE
C
C*************************************************************

        Subroutine seq2(a,b,c,x,iek)
        Real*8 x(2),a,b,c,d
        d=b**2-4.d0*a*c
        If(d) 1,2,3
  1     iek=0
        Go to 4
  2     iek=1
        Do 5 i=1,2
        x(i)=-b/(2.d0*a)
  5     Continue
        Go to 4
  3     iek=2
        x(1)=(-b-dsqrt(d))/(2.d0*a)
        x(2)=(-b+dsqrt(d))/(2.d0*a)
  4     Return
        End

C*************************************************************
C
C       PARTIE REELLE D'UNE MATRICE COMPLEXE
C
C*************************************************************

        Subroutine reel(CY,Y,M)
        Complex*16 CY(5,5)
        Real*8 Y(5,5)
        Do 72 i=1,M
        Do 72 j=1,M
  72    Y(i,j)=Dreal(CY(i,j))
        Return
        End
```

```
C*****************************************************************
C
C      TRANSFORMATION D'UNE MATRICE REELLE EN UNE MATRICE
C                          COMPLEXE
C
C*****************************************************************

      Subroutine cpl(A1,CA1,N)
      Complex*16 CA1(5,5)
      Real*8 A1(5,5)
      Do 4 I=1,N
      Do 4 J=1,N
      CA1(I,J)=cmplx(A1(I,J),0.D0)
    4 Continue
      Return
      End

C*****************************************************************
C
C      TRANSPOSEE D'UNE MATRICE COMPLEXE
C
C*****************************************************************

      Subroutine ctrsmat(A,AT,N)
      Complex*16 A(5,5),AT(5,5)
      Do 2 I=1,N
      Do 2 J=1,N
      AT(I,J)=A(J,I)
    2 Continue
      Return
      End
```

```
C*********************************************************************
C
C                     RESOLUTION EQUATION DU RICCATI
C                       ATxP+PxA-PxBx(R-1)xBT+Q=0
C                 A(n,n),B(n,m):matrices du systeme
C                 R(m,m),Q(n,n):matrices de pondération
C                 N,M:des entiers
C                 P(n,n): solution de l'equation
C
C*********************************************************************

      Subroutine  riccat(A4,B4,P,Q,N,M,R)
      Complex*16 S(10,10),F(10,10),H(10,10),F121(5,5)
      Complex*16 F12(5,5),ID(10,10),F1(5,5),V(5,5)
      Complex*16 A4(5,5),B4(5,5),CPM(5,5),V1(5,5)
      Complex*16 CP(5,5),R(5,5),BT(5,5),CQ(5,5)
      Real*8 P(5,5),Q(5,5)
C*********************************************************************
C
C     CALCUL DE LA MATRICE V=(B)X(R-1)X(BT)
C
C*********************************************************************

      DO 5 I=1,M
      DO 5 J=1,N
      BT(I,J)=B4(J,I)
 5    CONTINUE
      CALL cpl(P,CP,M)
      CALL cpl(Q,CQ,N)
      CALL cinvs(CP,CPM,M)
      CALL cmply1(B4,CPM,V1,N,M,M)
      CALL cmply1(V1,BT,V,N,M,N)
C*********************************************************************
C
C     REMPLISSAGE DE LA MATRICE H
C
C*********************************************************************

      DO 20 I=1,N
      DO 30 J=1,N
      H(I,J)=A4(I,J)
30    CONTINUE
20    CONTINUE
      DO 40 I=1,N
      DO 50 J=1,N
      J1=J+N
      H(I,J1)=-V(I,J)
```

```
 50   CONTINUE
 40   CONTINUE
      DO 60 I=1,N
      DO 70 J=1,N
      J1=J+N
      I1=I+N
      H(I1,J1)=-A4(J,I)
 70   CONTINUE
 60   CONTINUE
      DO 80 I=1,N
      DO 90 J=1,N
      I1=I+N
      H(I1,J)=-CQ(I,J)
 90   CONTINUE
 80   CONTINUE
      NC=N*2
      CALL signmt(H,NC,S)

C**************************************************************
C
C     CONSTRUCTION DE LA MATRICE ID
C
C**************************************************************

      DO 85 I=1,N
      DO 95 J=1,N
      I1=I+N
      J1=J+N
      ID(I,J)=(0.D0,0.D0)
      ID(I1,J1)=(0.D0,0.D0)
      IF(I.EQ.J) ID(I,J)=(-1.D0,0.D0)
      IF(I1.EQ.J1) ID(I1,J1)=(1.D0,0.D0)
 95   CONTINUE
 85   CONTINUE

C**************************************************************
C
C     CALCUL DE LA MATRICE F
C
C**************************************************************

      DO 14 I=1,NC
      DO 14 J=1,NC
      F(I,J)=S(I,J)+ID(I,J)
 14   CONTINUE
```

```
      DO 13 I=1,N
      DO 13 J=1,N
      I1=I+N
      F12(I,J)=F(I1,J)
      F1(I,J)=F(I,J)
 13   CONTINUE

C*******************************************************************
C
C     CALCUL DE LA MATRICE R
C
C*******************************************************************

      CALL cinvs(F1,F121,N)
      CALL cmply(F12,F121,R,N)
      RETURN
      END

C*******************************************************************
C
C     FIN PROGRAMME (EQUATION DE RICCATII)
C
C*******************************************************************

      Subroutine csommat(A,B,C,N)
      Complex*16 A(5,5),B(5,5),C(5,5)
      Do 5 I=1,N
      Do 5 J=1,N
  5   C(I,J)=A(I,J)+B(I,J)
      Return
      End

C*******************************************************************
C
C     PRODUIT DE DEUX MATRICES COMPLEXES
C
C*******************************************************************

      Subroutine cmply1(A,B,C,N,L,M)
      Complex*16 A(5,5),B(5,5),C(5,5),S
      Do 10 I=1,N
      Do 10 J=1,M
      S=(0.D0,0.D0)
      Do 20 K=1,L
 20   S=S+A(I,K)*B(K,J)
 10   C(I,J)=S
      Return
      End
```

```
C*****************************************************************
C
C      SIGNE D'UNE MATRICE
C
C*****************************************************************

      Subroutine  signmt(A,M,Sign)
      Complex*16 A(10,10),Sign(10,10),Ae(10,10),Ae1(10,10)
      Complex*16 Ad(10,10),Ad1(10,10),Ae2(10,10),C1,C2,D
      Rèal*8 alpha,beta,Y,X,eta1
      eta1=0.000000000000001D0
      Do 5 I=1,M
      Do 4 J=1,M
      Ae1(I,J)=A(I,J)
 4    Continue
 5    Continue
      x1=float(M)
      x2=1./x1
      X=dble(x2)
      DO 6 K=1,30
      CALL cdetmat(Ae1,M,D)
      Write(*,*)D
      Y1=cabs(D)
      Y2=dble(Y1)
      alpha=1.d0/(Y2**X+1.d0)
      Write(*,*)alpha
      beta=1.d0-alpha
      CALL cinv(Ae1,Ae2,M)
      C1=cmplx(alpha)
      Do 70 I=1,M
      Do 70 J=1,M
 70   Ad(I,J)=Ae1(I,J)*C1
      C2=cmplx(beta)
      Do 80 I=1,M
      Do 80 J=1,M
 80   Ad1(I,J)=Ae2(I,J)*C2
      Do 51 I=1,M
      Do 51 J=1,M
      Ae1(I,J)=Ad(I,J)+Ad1(I,J)
 51   Continue
      Y=1.d0-alpha
      IF(Y.LT.eta1) GO TO 15
 6    CONTINUE
 15   CALL csub(Ae1,Sign,M)
      RETURN
      END
```

```
C************************************************************************
C
C       LECTURE D'UNE MATRICE
C
C************************************************************************

        Subroutine lectmat(x,l)
        Real*8 x(5,5)
        Do 80 i=1,l
        Read(*,*)(x(i,j),j=1,l)
   80   Continue
        Write(*,*)'*****fin******'
        Return
        End
C************************************************************************
C
C       AFFICHAGE D'UNE MATRICE
C
C************************************************************************

        Subroutine impmat(y1,m)
        Real*8 y1(5,5)
        Do 60 i=1,m
        Write(*,*)(y1(i,j),j=1,m)
   60   Continue
        Write(*,*)'*****fin******'
        Return
        End

C************************************************************************
C
C       SOUS PROGRAMME INVERSION D'UNE MATRICE COMPLEXE
C
C************************************************************************

        Subroutine cinvs(H,Hinvs,N)
        Complex*16 H(5,5),Hinvs(5,5),A(5,5),B(5,5)
        Complex*16 Sum
        Call csubn(H,A,N)
        Nm1=N-1
        Do 40 I=1,Nm1
        Sum=(0.d0,0.d0)
        Do 41 K=1,N
   41   Sum=Sum+A(K,K)
        Sum=Sum/I
        Do 42 J=1,N
```

```
  42   A(J,J)=A(J,J)-Sum
       If(I.EQ.Nm1) Call csubn(A,Hinvs,N)
       Call cmply(H,A,B,N)
  40   Call csubn(B,A,N)
       Do 43 I=1,N
       Do 43 J=1,N
  43   Hinvs(I,J)=Hinvs(I,J)/A(1,1)
       Return
       End
C
C-----------------------------------------------------------------
C
       Subroutine csubn(A,B,N)
       Complex*16 A(5,5),B(5,5)
       Do 40 I=1,N
       Do 40 J=1,N
  40   B(I,J)=A(I,J)
       Return
       End
C
C-----------------------------------------------------------------
C
       Subroutine cmply(A,B,C,N)
       Complex*16 A(5,5),B(5,5),C(5,5)
       Do 40 I=1,N
       Do 40 J=1,N
       C(I,J)=(0.D0,0.D0)
       Do 40 K=1,N
  40   C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
       Return
       End

C
C-----------------------------------------------------------------
C
    Subroutine cinv(H,Hinvs,N)
    Complex*16 H(10,10),Hinvs(10,10),A(10,10),B(10,10)
    Complex*16 Sum
    Call csub(H,A,N)
    Nm1=N-1
    Do 40 I=1,Nm1
       Sum=(0.d0,0.d0)
        Do 41 K=1,N
41          Sum=Sum+A(K,K)
            Sum=Sum/I
        Do 42 J=1,N
42          A(J,J)=A(J,J)-Sum
```

```
      If(I.EQ.Nm1) Call csub(A,Hinvs,N)
      Call cmpl(H,A,B,N)
 40   Call csub(B,A,N)
      Do 43 I=1,N
        Do 43 J=1,N
 43         Hinvs(I,J)=Hinvs(I,J)/A(1,1)
      Return
      End
c     ----------------------------------------

      Subroutine csub(A,B,N)
      Complex*16 A(10,10),B(10,10)
      Do 40 I=1,N
        Do 40 J=1,N
 40       B(I,J)=A(I,J)
      Return
      End

c     ----------------------------------------------------------------------

      Subroutine cmpl(A,B,C,N)
      Complex*16 A(10,10),B(10,10),C(10,10)
      Do 40 I=1,N
        Do 40 J=1,N
           C(I,J)=(0.D0,0.D0)
          Do 40 K=1,N
 40        C(I,J)=C(I,J)+A(I,K)*B(K,J)
      Return
      End
c     ------------------------------------
      Subroutine trsmat(s,st,n)
      Real*8 s(5,5),st(5,5)
      Do 10 i=1,n
      Do 20 j=1,n
      st(i,j)=s(j,i)
 20   Continue
 10   Continue
      Return
      End
```

```
C*****************************************************************
C
C       DETERMINANT D'UNE MATRICE COMPLEXE
C
C*****************************************************************

        SUBROUTINE cdetmat(AS,N,DET)
        COMPLEX*16 AS(10,10),A(10,10),X,B,D,DET
        INTEGER*4 P
        CALL csub(AS,A,N)
        B=(1.d0,0.d0)
        P=1
 18     I=P
        L=P
        K=P
 4      J=P
        IF(A(K,L).EQ.(0.d0,0.d0)) GO TO 1
        X=A(K,L)
        B=B*A(K,L)
 2      A(I,J)=A(I,J)/X
        IF(J.EQ.N) GO TO1
        J=J+1
        GO TO 2
 1      IF(I.EQ.N) GO TO 3
        I=I+1
        K=K+1
        GO TO 4
 3      I=P
        J=P
        IF(A(I,J).EQ.(1.d0,0.d0)) GO TO 5
 7      A(N+1,J)=A(I,J)
        IF(J.EQ.N) GO TO 6
        J=J+1
        GO TO 7
 6      I=P+1
        J=P
 13     IF(A(I,J).EQ.(0.d0,0.d0)) GO TO 8
 10     A(P,J)=A(I,J)
        A(I,J)=A(N+1,J)
        IF(J.EQ.N) GO TO 9
        J=J+1
        GO TO 10
 9      B=-B
        IF(I-N) 5,11,5
 8      IF(I.EQ.N) GO TO 12
        I=I+1
```

```
      GO TO 13
12    D=(0.d0,0.d0)
      GO TO 14
5     I=I+1
      J=P
      IF(A(I,J).NE.(1.d0,0.d0)) GO TO 15
16    A(I,J)=A(I,J)-A(P,J)
      IF(J.EQ.N) GO TO 15
      J=J+1
      GO TO 16
15    IF(I-N) 5,11,5
11    IF(P.EQ.N-1) GO TO 17
      P=P+1
      GO TO 18
17    D=B*A(N,N)
14    DET=D
      RETURN
      END


C*****************************************************************
C
C       PROGRAMME VALEURS ET VECTEURS PROPRES
C
C*****************************************************************

      Subroutine valp(A,N,D,PM,CW)
      Real*8 A(5,5),Scale(5),Z(5,5),WR(5),WI(5)
      REAL*8 RD(5,5),ID(5,5),IM(5,5),RM(5,5)
      Real*8 A1(5,5)
      Complex*16 PM(5,5),D(5,5),CW(5)
      Integer INT(5),IGH,LOW,IERR,N,NM,I,J
      NM=5
      Call afmat(A,A1,N)
      Call BALANC(NM,N,A,LOW,IGH,Scale)
      Call ELMHES(NM,N,LOW,IGH,A,INT)
      Call ELTRAN(NM,N,LOW,IGH,A,INT,Z)
      Call HQR2(NM,N,LOW,IGH,A,WR,WI,Z,IERR)
      IF (IERR.NE.0) GO TO 99
      Call BALBAK(NM,N,LOW,IGH,Scale,N,Z)
      Call afmat(A1,A,N)
      DO 3 I=1,N
      DO 3 J=1,N
      RD(I,J)=0.D0
      ID(I,J)=0.D0
      IF(I.NE.J) GO TO 3
      RD(I,J)=WR(I)
```

```
      ID(I,J)=WI(I)
 3    CONTINUE
      I=0
40    I=I+1
      IF(WI(I).NE.0.D0) GO TO 50
      DO 30 J=1,N
      RM(J,I)=Z(J,I)
      IM(J,I)=0.D0
30    CONTINUE
      GO TO 45
50    IF(WI(I).LT.0.D0) GO TO 45
      DO 55 J=1,N
      RM(J,I)=Z(J,I)
      IM(J,I)=Z(J,I+1)
      RM(J,I+1)=Z(J,I)
      IM(J,I+1)=-Z(J,I+1)
55    CONTINUE
      I=I+1
45    IF(I.LT.N) GO TO 40
      Do 35 I=1,N
      CW(I)=cmplx(WR(I),WI(I))
      Do 35 J=1,N
      D(I,J)=cmplx(RD(I,J),ID(I,J))
      PM(I,J)=cmplx(RM(I,J),IM(I,J))
35    Continue
      GO TO 100
99    Write(*,*)'Error in computing Eigenvalue number'
      Write(*,*)IERR
100   Return
      Stop
      End
```

BIBLIOGRAPHIE

** BIBLIOGRAPHIE **

[1] - C.FOULARD , S.GENTIL , J.P.SANDRAZ : " Commande et et régulation par calculateur numérique ".
Ed. EYROLLES Paris 1979

[2] - D.KIRK : " Optimal control theory ".
Prentice-Hall Electrical engineering series 1970

[3] - O.A.SOLHEIM : " Design of optimal control with prescribed eigenvalues ".
INT.J. CONTROL, 1972, VOL. 15, NO. 1, 143-160

[4] - T.KAILATH : " Linear systems "
Prentice-Hall ,Inc,Englewood.Cliffs,N.J 1980

[5] - H.BUHLER : " Réglages echantillonnes ".
volume 2 : Traitement dans l'espace d'état
Presses polytechniques romandes 1983

[6] - Z.BOUREDJI : " Conception d'un système intégré de commande :POLLUX ".Thèse Doctorat Grenoble 1987

[7] - M.O. TAGHI , K.SID : " Controle optimal d'un système linéaire avec contraintes linéaires ".
Thèse De Fin D'études ALGER 1989

[8] - Y.LAOUAR ,A.HAMZAOUI : " Etude de la fonction signe de matrice Applications à la résolution des équations de Riccati et de Lyapunov "
Thèse De Fin D'études ALGER 1983

[9] - M.DREYFUS : " Fortran IV " Ed. DUNOD
Paris 1970