

Ministère de l'Enseignement Supérieur

8/84

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département Génie Civil



PRÉSENTÉE PAR : MÉNAD - HASSEN CHENAF

Ingénieur d'Etat E.N.P

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE **MAGISTER** DU GENIE CIVIL

**ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU
COMPORTEMENT DES ASSEMBLAGES BOULONNES,
DANS LE DOMAINE ELASTIQUE.**

Soutenu Le 27 Septembre 1984

Devant Le Jury Composé de :

Président : **A . GAHMOUSSE** - Maître de Conférences

Rapporteur : **P . BONNEVILLE** - Professeur

Examineurs : **M . S. BARAKA** - Maître - Assistant

A . CHAKER - Maître de Conférences

P . STRAKHOV - Maître de Conférences

Invité : **P . BOTIZAN** - Expert du B . I . T .

ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE
Département Génie Civil

THESE

PRÉSENTÉE PAR : MÉNAD-HASSEN CHENAF

Ingénieur d'Etat E.N.P

POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTER DU GENIE CIVIL

ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DU
COMPORTEMENT DES ASSEMBLAGES BOULONNES,
DANS LE DOMAINE ELASTIQUE.

Soutenu Le 27 Septembre 1984

Devant Le Jury Composé de :

Président : A. GAHMOUSSE - Maître de Conférences
Rapporteur : P. BONNEVILLE - Professeur
Examineurs : M. S. BARAKA - Maître - Assistant
A. CHAKER - Maître de Conférences
P. STRAKHOV - Maître de Conférences
Invité : P. BOTIZAN - Expert du B.I.T.

R E M E R C I E M E N T S

Arrivé au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à toutes les personnes y ayant contribué, de près ou de loin.

Je citerai plus particulièrement Monsieur GAHMOSSE, Maître de Conférences à l' E.N.P., qui a bien voulu présider le jury d'examen.

Ma plus profonde gratitude va vers le Professeur BONNEVILLE, rapporteur du jury, ainsi que le Docteur BOTIZAN. Leur aide efficace et leurs conseils éclairés ont permis à ce travail de voir le jour.

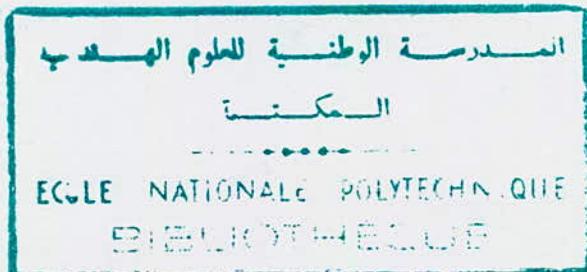
Je remercie vivement Monsieur BARAKA, Maître-Assistant et membre du jury, pour avoir minutieusement lu le manuscrit. Ses critiques constructives ont permis certaines améliorations dans la présentation de ce travail.

Le Docteur GRAINIC n'a ménagé aucun effort pour que sa grande expérience profite à la rédaction de ce travail. Je l'en remercie profondément.

Madame ATT-KACI a patiemment assuré la rédaction dactylographiée du manuscrit. Qu'elle soit vivement remerciée.

Je ne terminerai pas sans citer Monsieur GRAINE, Monsieur KOUDACHE, Monsieur DJADI, et Monsieur MAZRI, pour leur précieux concours moral et leur aide matérielle efficace.

Ménad-Hassen CHENAF



RESUME

Une hypothèse couramment utilisée pour l'analyse des structures consiste à idéaliser le comportement des liaisons entre les barres. La présente recherche examine la validité de cette hypothèse pour les noeuds rigides (joints boulonnés) des structures métalliques, ainsi que les conséquences découlant des déplacements relatifs locaux, sur le comportement et le calcul des structures. Un concept théorique a été développé: "Le degré de jonction", qui exprime quantitativement le comportement réel des noeuds. Basée sur ce concept, une étude expérimentale a été effectuée sur des noeuds et a prouvé l'existence de la déformabilité des liaisons. Les paramètres influençant cette déformabilité ont été étudiés. S'appuyant sur l'étude expérimentale et le concept du degré de jonction, un procédé pour le calcul des efforts a été développé, qui tient compte du caractère imparfait des noeuds.

SUMMARY

It is usually accepted, for the structural analysis, to idealize the connections between members as perfect joints. This research examines the validity of that hypothesis for rigid connections (bolted joints) of steel structures, as well as the consequences of the relative displacements at the joints for the behaviour and analysis of structures. A theoretical concept has been developed: "The junction degree", which quantitatively express the real behaviour of connections. Based on that concept, an experimental study has been carried out for steel connections, which proved the existence of deformability of joints. The parameters which influence this deformability have been studied. That experimental study and the concept of junction degree have allowed to develop a procedure for the analysis of the structures, taking into account the deformability of joints.

ملخص

ان الفرضيات المستعملة عاديًا في تحليل الهياكل من اجل ضبط عملية الاتصال بين القضبان ان البحث الحالي يختبر مدى صحة هذه الفرضية لبقع الاتصال الثابتة للهياكل المعدنية، وكذلك العواقب التي تنجر من جراء الانحرافات النسبية والمحلية على مسيرة الهياكل عند حسابها .

ان بنية نظرية وفقت: "درجة الاتصال" والتي تترجم كها المسيرة الحقيقية لبقع الاتصال طبقا لهاده البنية النظرية قد استعملت دراسة تطبيقية على بقع الاتصال واثبتت وجود انحرافات بين بقع الاتصالات وكذلك العوامل التي لها علاقة بانحرافات. استنادا الى الدراسة التطبيقية والبنية النظرية لدرجة الاتصال قد توصل الى طريقة لحساب القوى المطبقة والتي تأخذ بعين الاعتبار خصوصيات الاتصال الانحرافية المذكورة.

TABLE DES MATIERES

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

Chapitre I : INTRODUCTION

I.1. Position du problème

I.1.a Schématisation classique des noeuds
de structures

1

I.1.b Déplacement relatif local pour une
liaison encastree sollicitée en
flexion

5

I.2. Buts de la recherche - Limitations

8

I.3. Définitions et principales notions

I.3.a Degré d'encastrement d'une barre
à un noeud

10

I.3.b Modes d'évaluation du degré de jonc-
tion

I.3.b.α Liaison parfaitement encas-
trée

14

I.3.b.β Existence d'une rotation
relative locale

16

Chapitre II : ETUDE EXPERIMENTALE DE LA DEFORMABILITE DES

NOEUDS DES OSSATURES METALLIQUES

II.1. Généralités	19
II.2. Principales recherches effectuées sur les liaisons	20
II.3. Programme expérimental	
II.3.a Intérêt de la notion de degré de jonction	22
II.3.b - Modèle équivalent pour l'étude expérimentale	23
II.3.c Matériel utilisé et pièces d'essais	25
II.3.d Variantes d'expérimentation	31
II.4. Résultats expérimentaux - Influence des différents paramètres sur la déformabilité des noeuds	
II.4.a Résultats expérimentaux	33
II.4.b Influence de la portée	
II.4.b.α Graphes expérimentaux	33
II.4.b.β Ajustement sur les graphes expérimentaux	41

II.4.c	Influence de l'aile du poteau	42
II.4.d	Influence de l'épaisseur de la platine	43
II.4.e	Influence du diamètre des boulons	44
II.4.f	Influence du nombre de boulons	44
II.5. Interprétations		
II.5.a	Concept de la rigidité d'un noeud	45
II.5.b	Interprétation du degré de jonction	52

Chapitre III : LE CALCUL DES OSSATURES COMPTE TENU DE
LA DEFORMABILITE DES LIAISONS

III.1.	Généralités	53
III.2.	Principales recherches sur le calcul des ossatures à noeuds imparfaits	54
III.3.	Procédé pour le calcul manuel - extension de la méthode Hardy-Cross	
III.3.a	Méthodes itératives	55

III.3.b	Etapes à parcourir dans le procédé Cross	56
III.3.c	Modélisation de la liaison impar- faite	57
III.3.d	Application du modèle à une poutre imparfaitement liée à ses deux extré- mités (i) et (j)	61
III.3.e	Rigidité de la barre à la rotation	65
III.3.f	Transmission des moments d'extré- mité	67
III.3.g	Commentaires sur la méthode	68
III.3.h	Aspect sécurité et aspect économie	69
III.3.i	Exemple de calcul d'une structure à liaisons imparfaites - Comparai- son avec l'hypothèse idéalisée	70

<u>Chapitre IV : CONCLUSIONS</u>	75
<u>ANNEXE (A) : Note de calcul des modèles expérimentaux</u>	79
<u>ANNEXE (B) : Résultats expérimentaux - Valeurs des degrés de jonction - Justification de la relation entre \bar{K} et η</u>	92
<u>ANNEXE (C) : Tableaux pratiques de calcul</u>	120
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	126

INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS UTILISEES

- E : module d'élasticité longitudinal du matériau
- G : module d'élasticité transversal du matériau
- I, I_x : moment d'inertie, en flexion, d'une poutre droite
- K_0 : rigidité flexionnelle d'une console
- \bar{K} : raideur du ressort virtuel à l'appui
- M : moment fléchissant extérieur
- M_{ij}, M_{ji} : moments d'encastrement parfait aux extrémités d'une barre (i - j)
- $\bar{M}_{ij}, \bar{M}_{ji}$: moments d'encastrement élastique aux extrémités d'une barre (i - j)
- P : charge concentrée
- R_{ij}, R_{ji} : rigidités théoriques, à la flexion, d'une barre (i - j)
- $\bar{R}_{ij}, \bar{R}_{ji}$: rigidités corrigées, à la flexion, d'une barre (i - j)
- T : effort tranchant
- a_k : coefficients directeurs des droites de tendance
- b : largeur d'un profilé ou d'une platine
- b_k : ordonnées, à l'origine, des droites de tendance
- h : hauteur d'un profilé ou d'une platine

i, j	:extrémités d'une barre
l, l_{ij}	:portée d'une poutre (i - j)
r_k	:coefficients de corrélation
t_{ij}	:coefficient de transmission théorique
$\overline{t_{ij}}$:coefficient de transmission corrigé
Δ_0	:flèche théorique, dans l'hypothèse des liaisons idéalisées
Δ	:flèche réelle, dans l'hypothèse des liaisons imparfaites
$\overline{\Delta}$:flèche additionnelle, due à l'imperfection des liaisons
ν_{ij}	:degré de jonction d'une barre (i - j), au noeud (i)
φ	:angle entre deux barres
χ	:rigidité d'une poutre à la rotation d'extrémité
γ	:coefficient de sécurité
θ_i	:angle de rotation du noeud (i)
$\overline{\theta}_i$:angle de rotation relative entre le noeud (i) et le bout de la barre
θ_{ij}	:angle de rotation du bout de la barre (i - j)

Chapitre I : INTRODUCTION

I. 1 POSITION DU PROBLEME

I.1.a Schématisation classique des noeuds de structures

Dans la pratique actuelle, l'étude des ossatures formées de barres : portiques, cadres étagés, structures à treillis planes ou spatiales, etc... est faite en considérant la schématisation classique des noeuds de structures, selon laquelle les barres sont liées entre elles ou aux appuis par des noeuds à comportement idéalisé.

Cette idéalisation concerne essentiellement l'aspect géométrique des déplacements relatifs des barres aux noeuds.

Pour les structures planes, trois types de liaisons idéalisées sont pris en considération (Fig. I-1):

1/ Liaison simple (S) : Du point de vue géométrique, le déplacement de translation est complètement bloqué suivant une seule direction et complètement libre selon la normale à cette direction, alors que la rotation est complètement libre de se produire. Statiquement, ce type de liaison ne peut transmettre qu'une réaction : une force dont la direction est celle de la translation bloquée. Il n'y a pas de moment réactif.

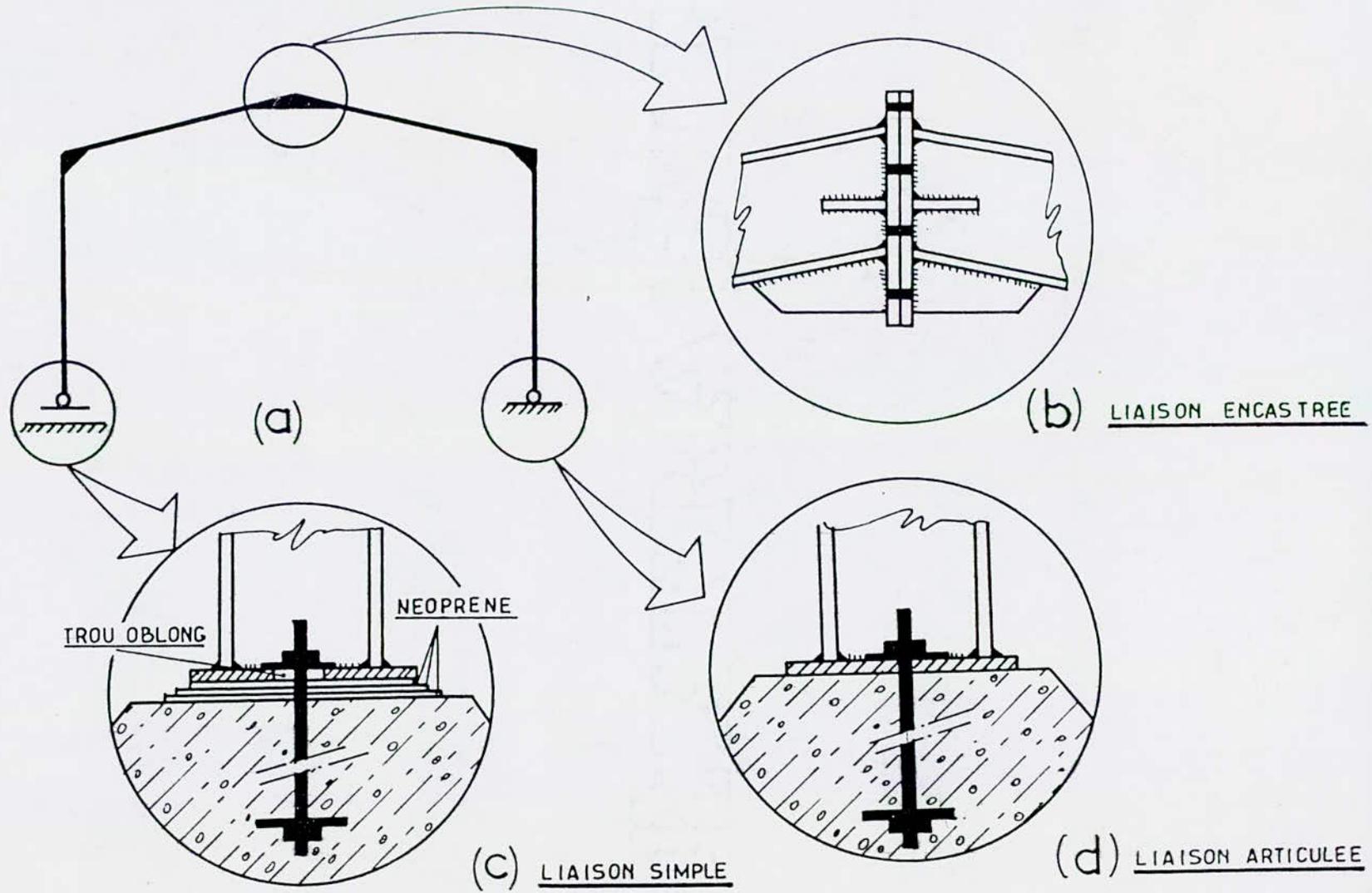


Fig.I-1

2/ Liaison articulée (A) : Du point de vue géométrique, toute translation est bloquée, quelle que soit la direction considérée, la rotation étant complètement libre de se produire. Statiquement, la réaction est une force dont la direction peut être quelconque. Le moment réactif est nul, comme dans le cas précédent.

3/ Liaison encastrée (E) : Géométriquement, toute translation et toute rotation sont bloquées, ce qui se traduit, du point de vue statique, par l'existence d'une force réactive de direction quelconque, et d'un moment réactif.

Lors de la réalisation de l'ouvrage, il y a lieu d'adopter des dispositions constructives se rapprochant au mieux des hypothèses du calcul.

Pour les ouvrages couramment rencontrés, les liaisons les plus fréquemment utilisées sont les liaisons encastrées (E). Examinons la liaison donnée en figure I.2 (b). Elle est constituée dans la jonction rigide de deux traverses faisant entre elles un angle noté φ (Fig. I.2).

Pour calculer les efforts internes dans la structure sous l'effet d'un système de charges extérieures, la conservation de l'angle φ à la jonction est admise pour une rotation du noeud ne faisant pas entrer les pièces dans le domaine plastique.

Lorsque le noeud (E) tourne, les deux barres qui y concourent se déforment, mais il est admis que les tangentes aux lignes moyennes des barres, au niveau du noeud, ne subissent pas de rotation relative, selon le modèle idéalisé.

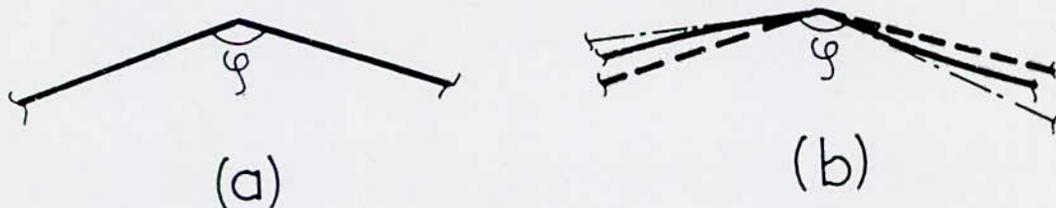


Fig. I-2

Si nous considérons à présent la liaison simple (S) ou la liaison articulée (A), il y a cette fois une liberté complète de rotation relative entre la tangente à la ligne moyenne du poteau au noeud, et l'horizontale (Fig. I-1-c et I-1-d), dans le modèle de calcul.

Ces considérations sur l'aspect géométrique des déplacements permis ou non au niveau des noeuds de structures ont une incidence directe sur l'étude du comportement de la structure, plus précisément sur la distribution des efforts internes en charge.

Ainsi qu'il a déjà été dit, une liaison articulée (A) ne peut transmettre de moment fléchissant, contrairement à une liaison encastrée (E).

Il s'ensuit que la nature des noeuds conditionne l'état de sollicitation d'une structure de façon directe et qu'un changement quelconque de la géométrie du déplacement relatif au niveau d'une liaison occasionne une redistribution des efforts internes au sein de la structure [1] , [4] , [8] , [16] , [27] .

I.1.b Déplacement relatif local pour une liaison encastrée sollicitée en flexion

Considérons la liaison représentée à la figure I-3. Elle consiste en l'assemblage orthogonal d'une poutre et d'un poteau constitués par des profilés métalliques.

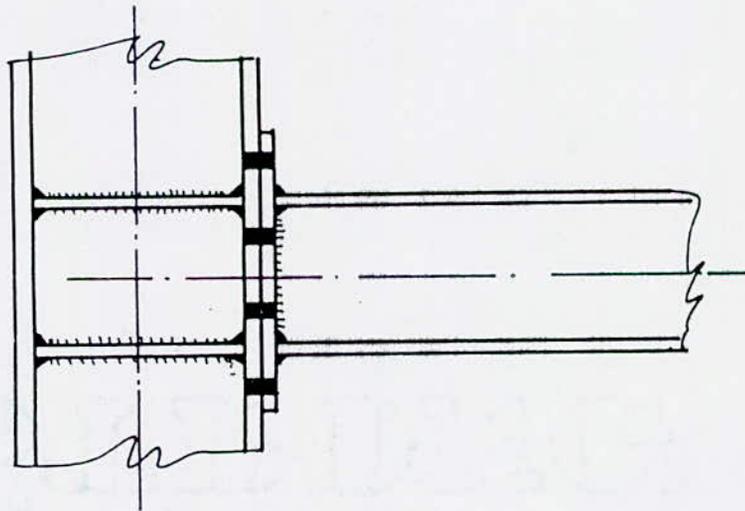


Fig. I-3

La jonction se fait par boulonnage précontraint d'une platine à la semelle du poteau, cette platine étant soudée frontalement à la poutre.

Pour le calcul, une telle liaison est considérée comme encastree (E).

Il y a cependant lieu de remarquer que cette liaison est assurée par une quantité d'éléments déformables : boulons, platine frontale, semelle et âme du poteau, raidisseurs horizontaux.

Cette déformabilité des différents organes composant la liaison peut alors avoir une incidence sur le comportement de cette dernière lorsque la structure est chargée, [11] , [22] .

Cela se traduira par une variation de l'angle initial des tangentes des barres au nœud, dans le cas d'un moment fléchissant M (Fig. I-4) [21] , [22] .

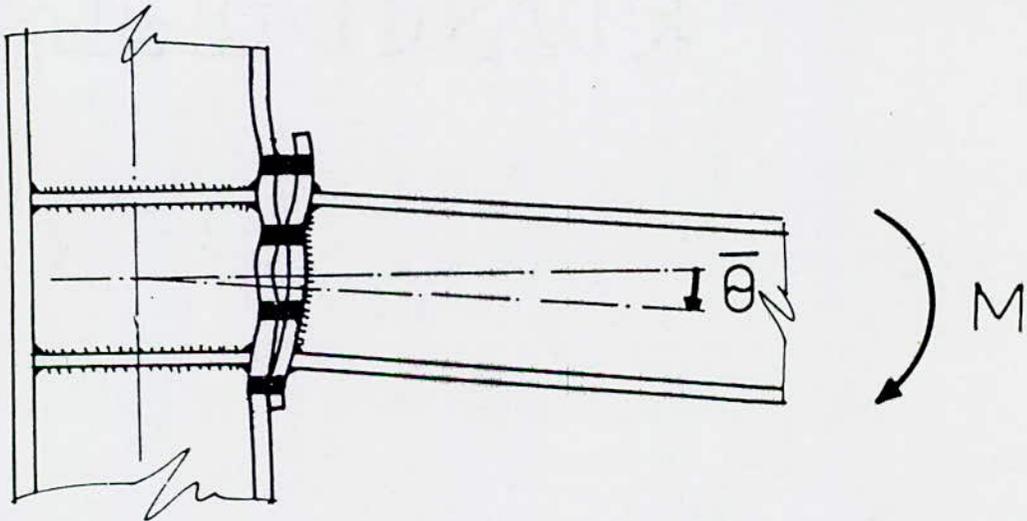


Fig. I-4

Il y aura alors un déplacement relatif local au droit de la liaison encastree : une rotation que l'on notera $\bar{\theta}$.

La même situation peut être envisagée pour un noeud de structure en béton armé (Fig. I-5).

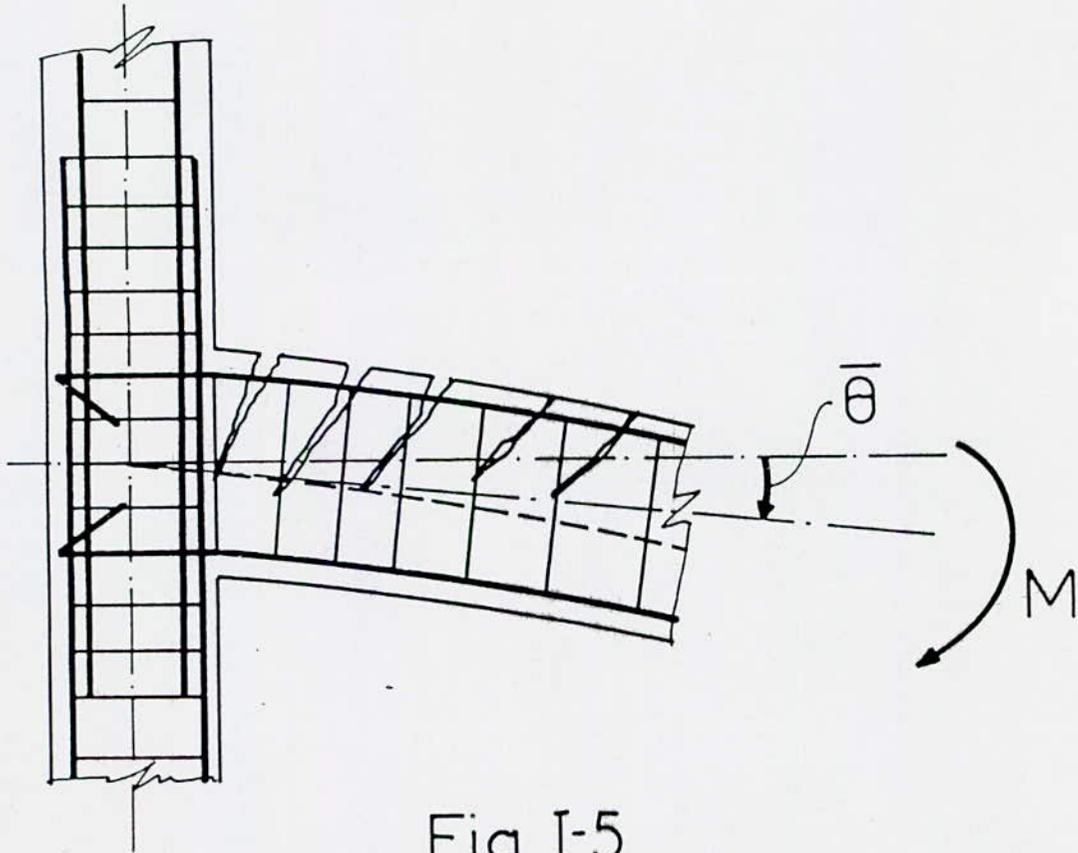


Fig. I-5

La présence de fissures dans la zone tendue, les glissements locaux des armatures, etc... occasionnent une rotation locale de la tangente à la ligne moyenne de la poutre, au niveau de la liaison.

On retrouve le même type de déplacement relatif local que dans l'exemple de la figure I-5 : La rotation $\bar{\theta}$

Les deux exemples précédents montrent que le comportement d'une liaison encastrée (E) peut s'écarter du comportement idéalisé.

Les déplacements relatifs locaux engendrés au droit des liaisons vont entraîner une redistribution des efforts dans la structure. Cette redistribution se manifeste par une augmentation de l'effort dans certaines sections et une diminution dans d'autres sections. [2] , [5] , [6] , [17] , [20] .

La connaissance du comportement mécanique des noeuds, c'est à dire les valeurs numériques des déplacements relatifs locaux, en fonction des sollicitations, permet de déterminer les diagrammes des efforts dans la structure, d'une manière plus réaliste , [6] , [19] , [27] , [32] .

I . 2 BUTS DE LA RECHERCHE - LIMITATIONS

Les considérations précédentes appellent les observations suivantes :

(a) La nature des liaisons influence de manière très marquée la distribution des efforts dans une structure

(b) Les liaisons réelles ont un comportement qui peut s'écarter du comportement idéalisé.

De plus, la plupart des recherches portant sur les lois physiques du comportement des structures se sont intéressées aux barres plutôt qu'aux liaisons.

Or, s'il existe, pour une barre, une loi physique de comportement, il faut préciser une loi similaire pour les noeuds.

Il serait alors possible de parler de "rigidité" d'un noeud , notion qui s'ajoute à celle de la rigidité d'une barre.

Le déplacement relatif local au noeud dépend, non seulement des caractéristiques mécaniques des matériaux, mais aussi de la configuration géométrique des différents organes composant la liaison [20] .

Dans l'exemple de la figure I-5, il y a également d'autres influences, dues à certaines propriétés du béton armé, telles que les déformations différées, la fissuration en d'autres sections qu'au niveau du noeud.

Cela fait que pour le béton armé, la redistribution des efforts peut être occasionnée par d'autres phénomènes qui s'ajoutent aux déplacements relatifs locaux au niveau des liaisons.

Par contre, pour l'exemple de la figure I-3, les déformations "parasites" se concentrent seulement au niveau du noeud.

Le déplacement relatif local à la liaison apparaît comme la principale raison de la redistribution des efforts, dans le domaine élastique. [32] .

L'étude développée ici s'attache, dans un premier temps, à analyser les déplacements relatifs locaux pour un type de noeud de construction métallique.

Pour ce type de noeud, l'influence des différents paramètres sur le comportement a été examinée à l'aide d'un programme d'essais de laboratoire, présenté au chapitre deux.

Les résultats de l'expérimentation permettent d'obtenir numériquement la "rigidité du noeud", notion complémentaire de celle de la rigidité d'une barre .

En résumé, le principal but de cette recherche expérimentale est de vérifier si les déplacements relatifs locaux peuvent être négligés pour le type d'assemblage testé, sans affecter de manière appréciable la précision du calcul des efforts effectué sur la base des hypothèses idéalisées pour le comportement des liaisons.

Dans un deuxième temps, il a été établi un moyen de calcul pour injecter la déformabilité des noeuds, obtenue par les essais, dans un processus itératif d'analyse de structures, en vue de déterminer les diagrammes des efforts après redistribution. Le procédé proposé est adapté au calcul manuel et prend en compte l'influence du comportement "réel" des noeuds sur la distribution des efforts dans les structures.

I.3. DEFINITIONS ET PRINCIPALES NOTIONS

I.3.a Degré d'encastrement d'une barre à un noeud

Considérons une structure réticulée plane et intéressons-nous à la barre (i - j) (Fig. I-6).

D'après la définition classique, le degré d'encastrement d'une barre à un noeud est le rapport entre le moment fléchissant réel à ce noeud, et le moment d'encastrement parfait, en considérant que la structure entière est soumise à un système de charges données [7] , [26] , [27] , [32] .

Dans ces conditions, ce rapport est fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques de la structure toute entière.

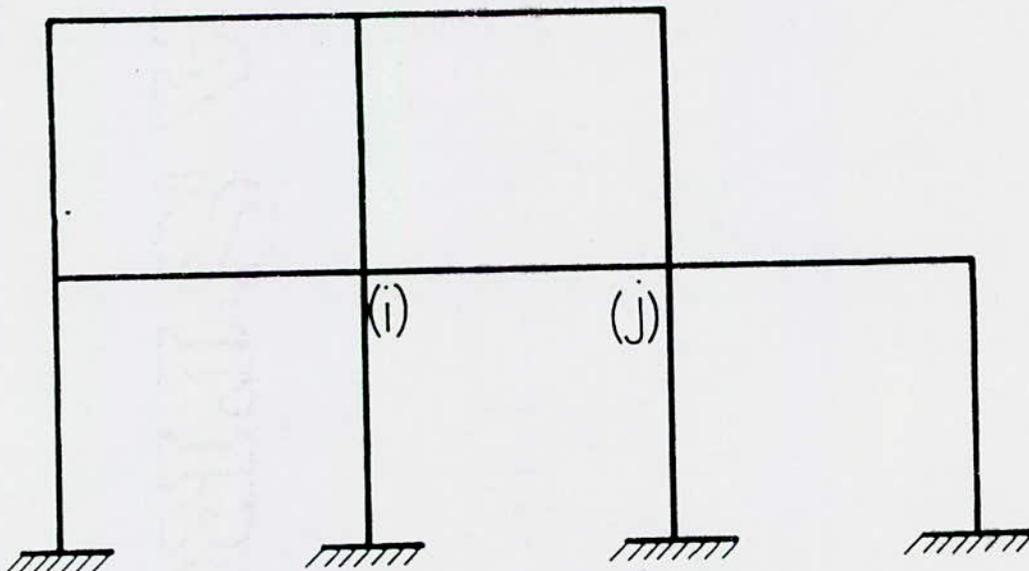


Fig. I-6

Il est cependant possible de définir une autre notion, en quelque sorte semblable à la notion classique du degré d'encastrement, qui peut mettre en évidence la déformabilité du nœud, mais qui ne dépend plus de la structure toute entière.

Considérons, pour cela, la barre (i-j) appartenant à la structure de la figure I-6 et supposons que les liaisons en (i) et (j) sont telles qu'un déplacement relatif local $\bar{\theta}$ (§I-1-b) pourrait y être occasionné (Fig. I-7).

Bloquons le noeud (j) et faisons tourner le noeud (i) d'un angle arbitraire θ_i (Fig. I-8).

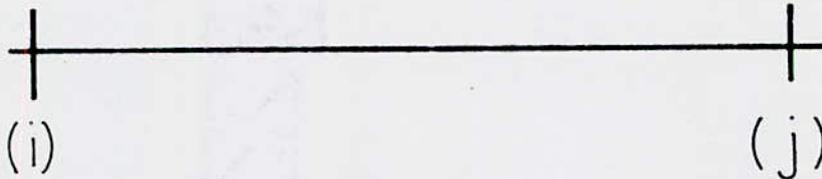


Fig. I-7

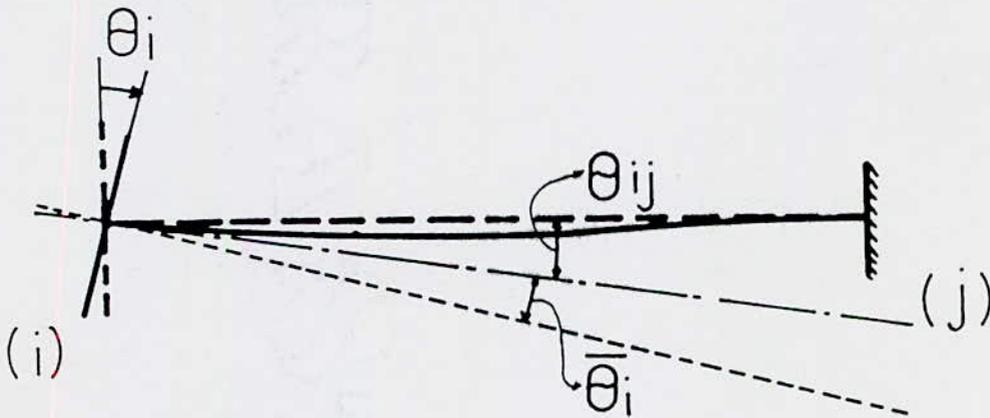


Fig. I-8

Pour la rotation θ_i du noeud (i), il y a une rotation θ_{ij} de la tangente à la ligne moyenne de la barre, au noeud (i), entre l'état initial et l'état final.

En notant $\bar{\theta}_i$ la rotation de la tangente, en (i), à la barre, entre la position réelle et la position idéalisée, en supposant une liaison encastree en (i), il vient :

$$\theta_i = \bar{\theta}_i + \theta_{ij} \quad (\text{I} - 1)$$

Le même raisonnement pour le noeud (j) fait aboutir à :

$$\theta_j = \bar{\theta}_j + \theta_{ji} \quad (\text{I} - 2)$$

Il est proposé alors, sur la base des observations ci-dessus, la définition suivante :

"On appelle degré de jonction, en flexion, au noeud (i), d'une barre (i-j), le rapport entre la rotation θ_{ij} de l'extrémité (i) de la barre, provoquée par une rotation arbitraire θ_i du noeud (i), et cette rotation arbitraire".

Il sera montré par la suite l'intérêt de cette définition, ainsi que toutes les conséquences qui en découlent.

Dans ces conditions, le degré de jonction, en flexion*, de la barre (i-j), au noeud (i), vaudra :

$$\eta_{ij} = \frac{\theta_{ij}}{\theta_i} \quad (\text{I} - 3)$$

et, au noeud (j) :

$$\eta_{ji} = \frac{\theta_{ji}}{\theta_j} \quad (\text{I} - 4)$$

* : Par la suite, il ne sera pas précisé qu'il s'agit du degré de jonction en flexion, étant clair que cette étude ne s'intéresse qu'aux pièces fléchies. Il sera juste fait état de "degré de jonction".

Nous noterons que le degré de jonction est une grandeur adimensionnelle variant entre zéro et l'unité.

Pour une liaison **parfaitement articulée** en (i) :

$$\forall \theta_i, \theta_{ij} \equiv 0 \implies r_{ij} = \theta_{ij} / \theta_i \equiv 0$$

Pour une liaison **parfaitement encastree** en (i) :

$$\forall \theta_i, \bar{\theta}_i \equiv 0 \implies r_{ij} = \theta_{ij} / \theta_i = \frac{\theta_{ij}}{\theta_{ij} + \bar{\theta}_i} \equiv 1$$

I.3.b Modes d'évaluation du degré de jonction

I.3.b.α Liaison parfaitement encastree

Considérons une poutre à liaison parfaitement encastree en (i) et libre en (j), de portée l, de module d'élasticité longitudinale E, et de moment d'inertie constant I, par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de flexion. Cette poutre est chargée par une force concentrée P à l'extrémité (j) (Fig. I-9).

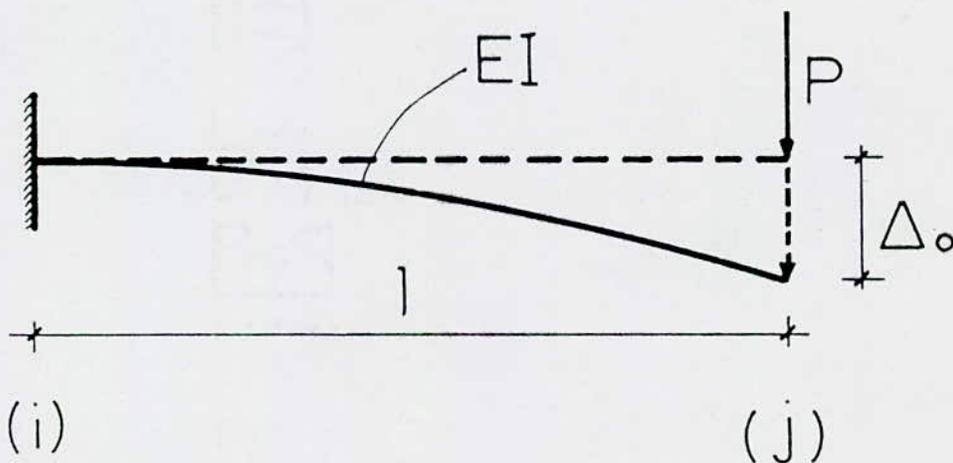


Fig. I-9

La flèche à l'extrémité (j) vaudra : $\Delta_0 = \frac{P.l^3}{3EI}$ (I - 5)

Notons θ_{ij} l'angle dont il faudrait faire tourner le noeud (i) pour avoir une réaction P en (j), ce noeud étant supposé articulé (Fig. I-10).

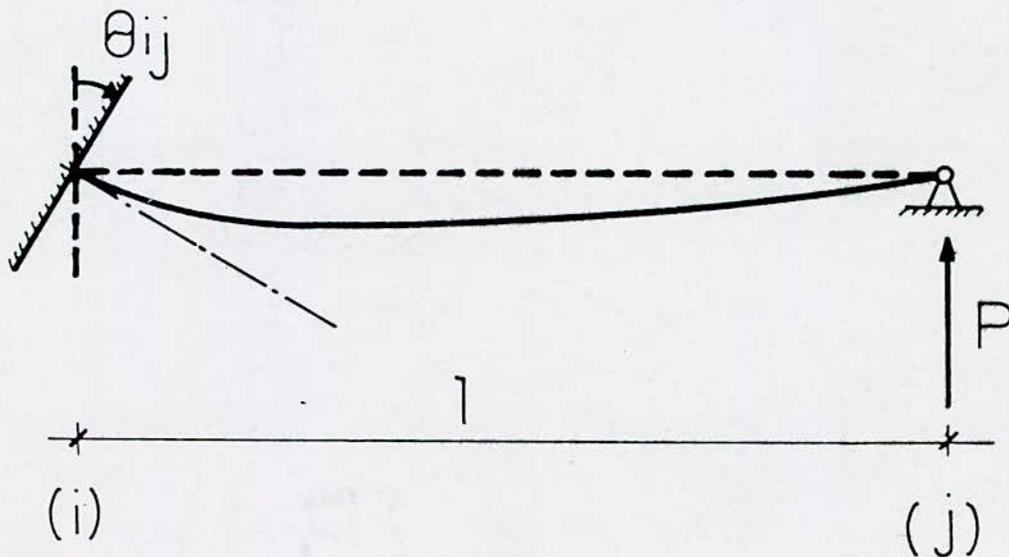


Fig. I-10

Il vient alors, pour des petites déformations et des petits déplacements :

$$\theta_{ij} = \frac{\Delta_0}{l} = \frac{Pl^2}{3EI} \quad (I - 6)$$

I.3.b. β Existence d'une rotation relative locale

Nous reprenons la poutre - console précédente, avec liaison imparfaitement encastree en (i) (Fig. I-11).

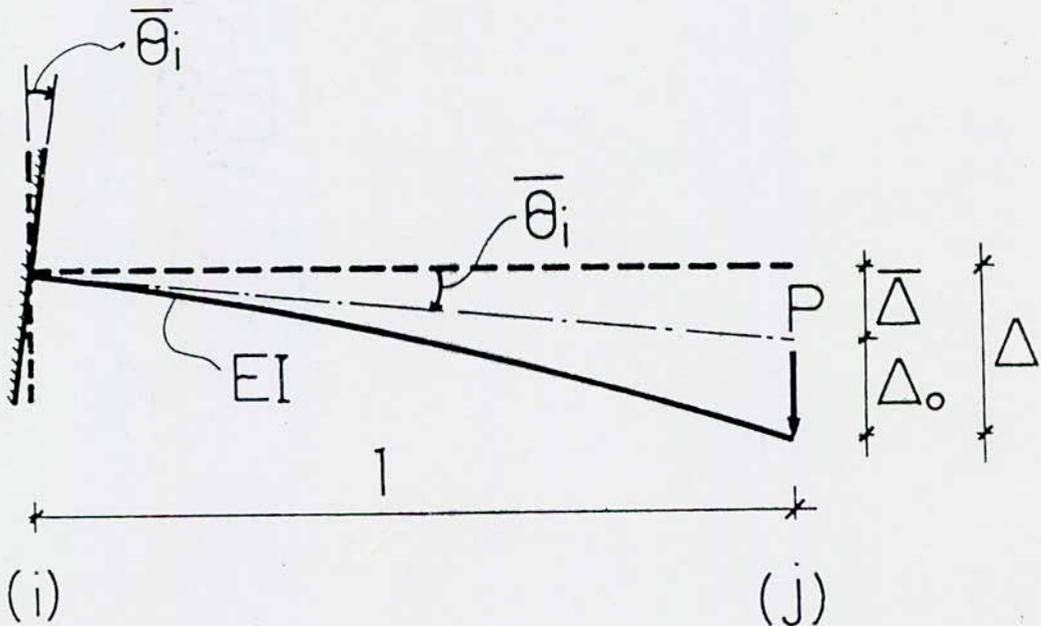


Fig. I-11

Pour les petites déformations, la relation (I-5) subsiste :

$$\Delta_o = \frac{Pl^3}{3EI}$$

Cette valeur représente la flèche à l'extrémité (j) de la poutre, par rapport à la tangente en (i) à sa ligne moyenne, à l'état déformé.

$$\text{La flèche totale vaudra : } \Delta = \bar{\Delta} + \Delta_o \quad (\text{I} - 7)$$

$$\text{avec : } \bar{\Delta} = \bar{\theta}_i \times l, \quad (\text{I} - 8)$$

dans l'hypothèse des petites déformations et petits déplacements.

Notons alors θ_i l'angle dont il faudrait faire tourner le noeud (i) pour avoir une réaction P en (j), ce noeud étant supposé articulé (Fig. I-12).

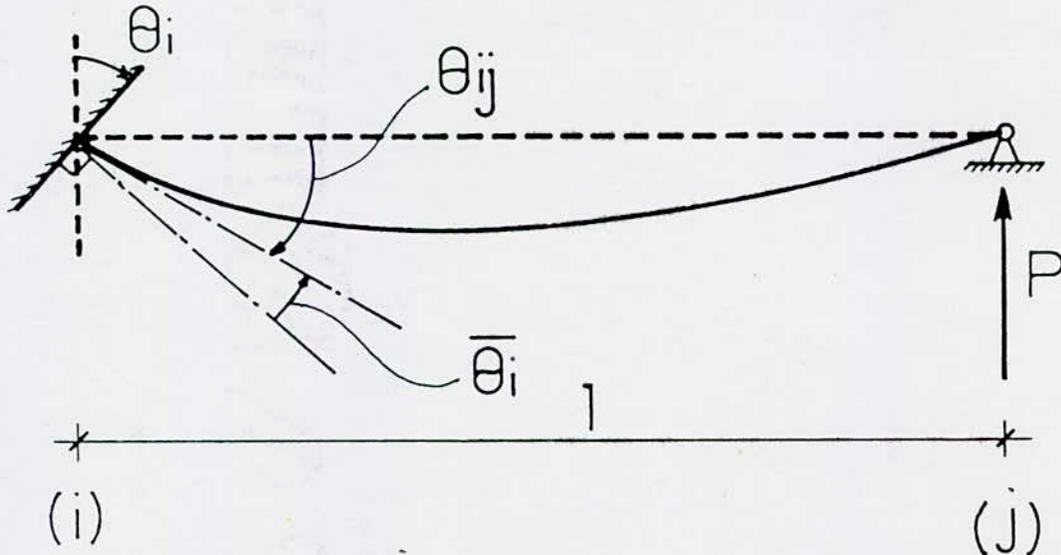


Fig. I-12

Avec les notations de la figure I-12, il est possible d'écrire :

$$\theta_i = \theta_{ij} + \bar{\theta}_i = \frac{\Delta_o}{l} + \bar{\theta}_i$$

D'après I-8, il vient : $\theta_i = \frac{\Delta_o}{l} + \frac{\bar{\Delta}}{l}$ (I - 9)

Or, d'après I-7 : $\frac{\Delta}{l} = \frac{\Delta_o}{l} + \frac{\bar{\Delta}}{l}$ (I - 10)

En identifiant I-9 et I-10 : $\frac{\Delta}{l} = \theta_i$ (I - 11)

Or, d'après I-3 : $r_{ij} = \theta_{ij} / \theta_i$

Avec I-11, il vient : $r_{ij} = \frac{\Delta_o}{l} / \frac{\Delta}{l}$

D'où : $r_{ij} = \frac{\Delta_o}{\Delta}$ (I - 12)

Remarque :

La relation (I-12) peut être obtenue sur le modèle présenté à la figure (I-12) en effectuant une translation verticale égale à Δ , du nœud (i) (Fig. I-13).

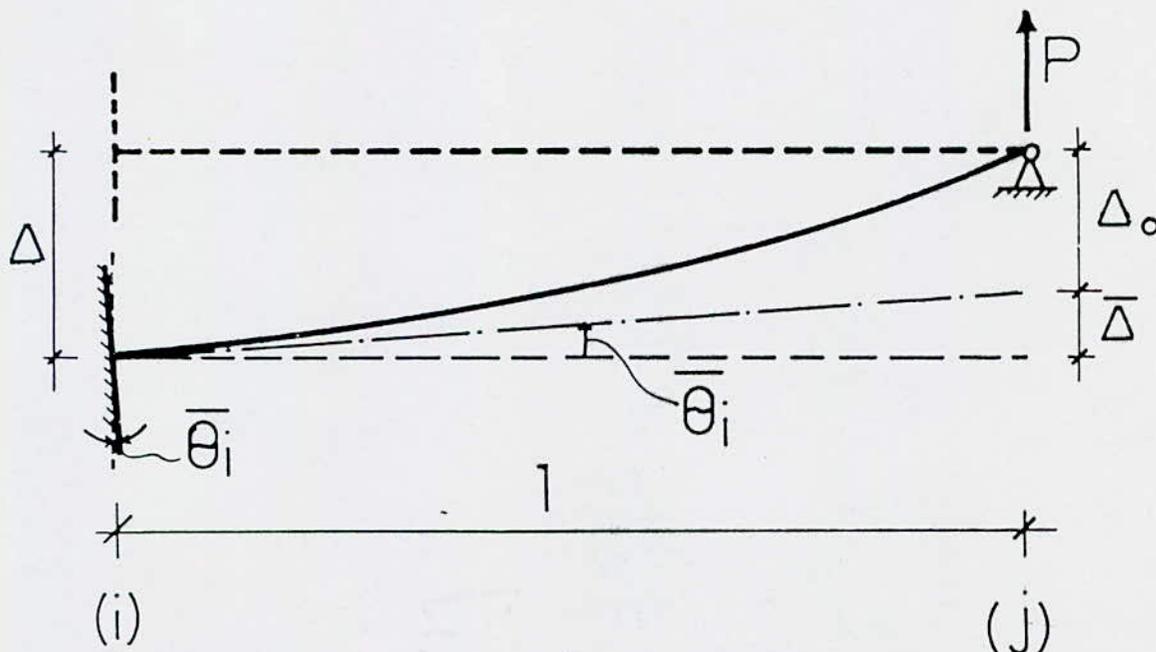


Fig. I-13

Les équations des petites déformations et petits déplacements, traitées de la même manière qu'au paragraphe I.3.b. β , font aboutir à la relation (I-12) :

$$\eta_{ij} = \frac{\Delta_o}{\Delta}$$

Chapitre II : ETUDE EXPERIMENTALE DE LA DEFORMABILITE
DES NOEUDS DES OSSATURES METALLIQUES.

II. 1 GENERALITES

Les noeuds des structures couramment utilisés sont des éléments soumis à un état complexe de contraintes dont les effets sont des déformations locales difficiles à déterminer et à contrôler.

Pour les ossatures métalliques, les assemblages constituant le noeud théorique sont réalisés à l'aide de plusieurs éléments déformables (platines, boulons, tasseaux éventuels, raidisseurs, etc...) travaillant en série ^{et/ou} en parallèle.

Les distances entre ces différents éléments sont très petites, par rapport aux dimensions des pièces, de telle sorte que les hypothèses de la Résistance des Matériaux ne peuvent plus s'appliquer.

Tout cela fait qu'un calcul théorique, même mené dans le domaine élastique, serait trop complexe. De plus, les résultats que l'on obtiendrait ainsi présenteront une précision discutable.

En effet, les méthodes de calcul disponibles sont presque toutes dérivées de la théorie de l'Elasticité, théorie établie pour des éléments idéalisés, mais plus ou moins ajustable pour des éléments de construction réels [20] .

Les précédentes recherches sur la déformabilité des noeuds se sont, pour ces raisons, plutôt penchées sur l'approche expérimentale.

Dans cette optique d'une recherche expérimentale des caractéristiques de déformabilité des noeuds, la présente étude s'intéresse à un type de liaisons couramment utilisé dans la pratique.

Les essais effectués portent sur des modèles, en grandeur nature, de liaisons boulonnées avec serrage contrôlé, des ossatures métalliques.

Le concept de "degré de jonction", défini au chapitre précédent, (§ I.3.a), a permis de concevoir un dispositif expérimental simple.

En effet, la mesure d'une flèche permet, à l'aide des considérations développées en I.3.b. β , de trouver le degré de jonction et, par suite, la caractéristique de déformabilité du noeud, de la manière dont il est fait état en II.5.b.

II. 2 PRINCIPALES RECHERCHES EFFECTUEES SUR LES LIAISONS

Jusqu'à l'heure actuelle, la plupart des recherches dans ce domaine se sont plutôt intéressées aux problèmes de résistance ultime dans les liaisons imparfaites.

En ce qui concerne l'étude de la déformabilité des liaisons, les recherches ont, pour la plupart, porté sur le comportement des structures, compte tenu de la possibilité de déplacements relatifs locaux aux noeuds.

Il faut noter que peu de travaux ont été entrepris sur l'évaluation des paramètres de déformabilité ou sur l'établissement d'une loi de comportement des noeuds.

Dans cet axe, on peut toutefois citer quelques recherches, parmi elles, celle de E. YARINCI et R.B. SLUTTER [38] qui ont, en 1963, étudié l'influence de l'écartement des rivets dans des assemblages cisailés.

En 1965, I. NAKA, B. KATO, A. TANAKA, K. MORIKA [31], proposent un modèle d'expérimentation permettant d'étudier le comportement d'une liaison encastree frontale, par boulons H.R., en fonction de l'écartement des boulons.

En 1967, D. SFINTESCO et P. DAUPHIN [35] mirent en évidence l'influence de plusieurs paramètres, tels que l'épaisseur de la platine frontale, l'écartement des boulons, la disposition des raidisseurs, sur la résistance ultime d'un assemblage par boulons H.R. fléchi.

En 1972, D. KHALILI [21] [22], propose un modèle expérimental pour étudier l'influence de la platine frontale sur le comportement d'une liaison encastree par boulons H.R., soumise à un moment fléchissant et à un effort tranchant.

Cet aperçu sur les recherches précédentes concernant les liaisons permet de situer l'intérêt majeur sur l'étude de quelques influences particulières sur le comportement.

Il faut cependant souligner que certains paramètres ont un domaine de variation assez étendu. Cela justifie en quelque sorte la nécessité d'envisager des recherches plus volumineuses, pour disposer d'un plus grand nombre de données.

En particulier, pour le type de liaison testé dans cette étude, la littérature existante ne fournit pas de renseignements exhaustifs concernant l'influence des différents paramètres sur la déformabilité des nœuds.

II. 3 PROGRAMME EXPERIMENTAL

II.3.a Intérêt de la notion de degré de jonction

Il a été vu, au chapitre précédent, § I.3.a., que le degré de jonction η_{ij} au nœud (i), d'une barre (i - j), pouvait s'exprimer comme un rapport de flèches.

L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que les flèches représentent des grandeurs aisément mesurables, avec un matériel de laboratoire élémentaire.

En effet, un comparateur suffit, pour peu que le dispositif d'essais soit suffisamment précis et fiable (tassements d'appuis nuls, déversement corrigé, etc...).

Ainsi, pour mesurer le degré de jonction d'une barre à un nœud, il suffira d'effectuer un essai de flexion de cette barre en mesurant la flèche obtenue Δ .

Ensuite, soit par le calcul, soit expérimentalement, on détermine la flèche Δ_0 dans le cas d'une liaison parfaite (il sera vu par la suite de quelle manière on peut procéder).

Finalement, le rapport $\frac{\Delta_0}{\Delta}$ nous donnera la valeur du degré de jonction cherchée.

II.3.b Modèle équivalent pour l'étude expérimentale

Puisque cette étude s'intéresse aux déplacements relatifs entre deux pièces assemblées entre elles (une poutre et un poteau), on pourrait tenter d'évaluer les déplacements absolus de chacune des pièces, puis effectuer la différence.

Expérimentalement, cette démarche peut s'envisager pour les déplacements de rotation, à condition de disposer d'un clinomètre, appareil pouvant mesurer des angles très petits.

Une manière plus simple de procéder consisterait à annuler de façon certaine le déplacement d'une des pièces.

Cela peut se faire à l'aide du dispositif représenté à la figure II-1 consistant en un assemblage symétrique de deux poutres de portée "l" chacune et d'un poteau.

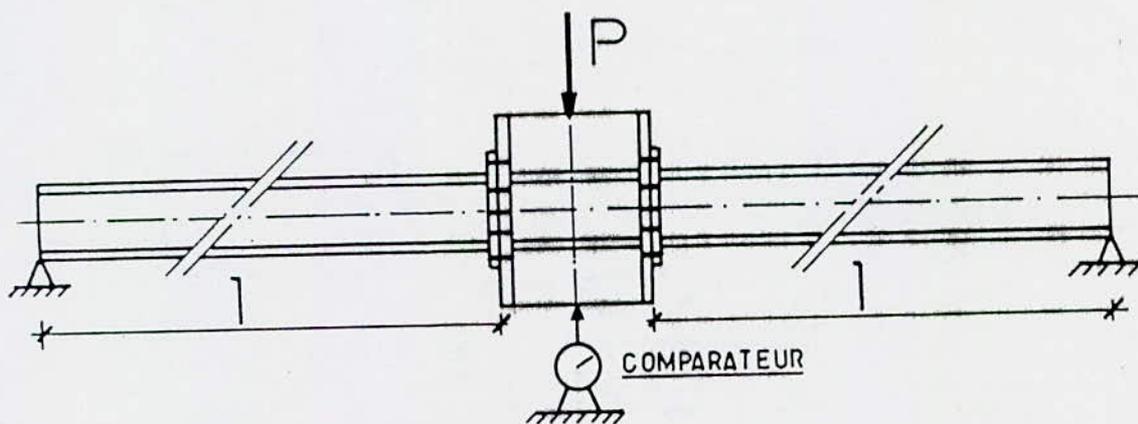


Fig. II- 1

Une charge P , exercée sur l'axe du poteau, donne une flèche d'ensemble Δ , qui n'est rien d'autre que la somme de la flèche élastique Δ_0 , due à la souplesse de la poutre, et d'une flèche additionnelle $\overline{\Delta}$, due à l'imperfection de l'assemblage étudié.

Il y a lieu de noter que ce dispositif reproduit bien les conditions d'application de la relation exprimant le degré de jonction comme le rapport $\frac{\Delta_0}{\Delta}$, établie au paragraphe I.3.b.

La flèche élastique Δ_0 se détermine par un calcul simple.

Il faut toutefois remarquer que sa détermination expérimentale est possible, en effectuant des essais sur une poutre de portée $2l$, simplement appuyée à ses extrémités, la continuité de la matière étant considérée ici comme une liaison encastrée parfaite (Fig. II-2).

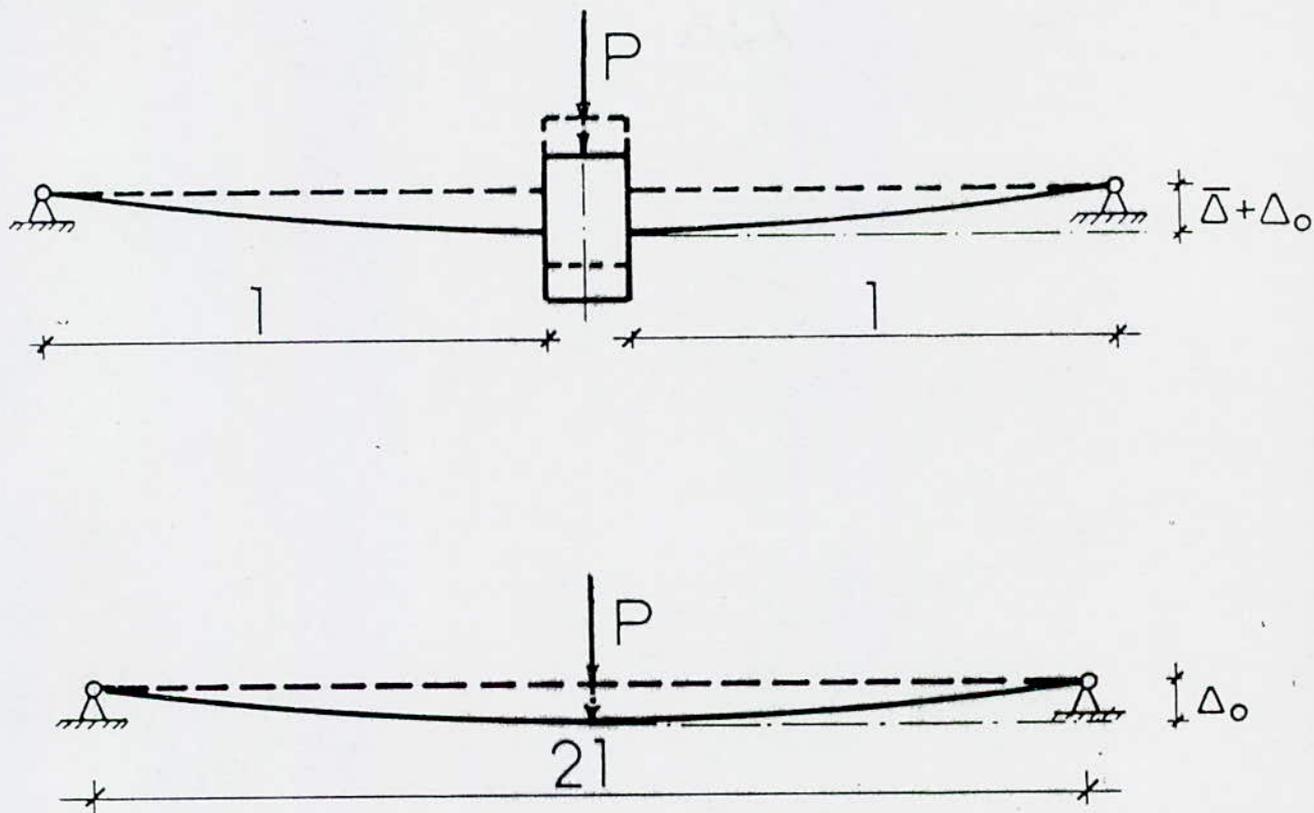


Fig. II-2

II.3.c Matériel utilisé et pièces d'essais

Les essais entrepris consistent en des essais de flexion sur des poutres simplement appuyées.

Pour la charge P, il a été utilisé une des presses du laboratoire du Génie Civil de l'Ecole Polytechnique (Fig. II-3).

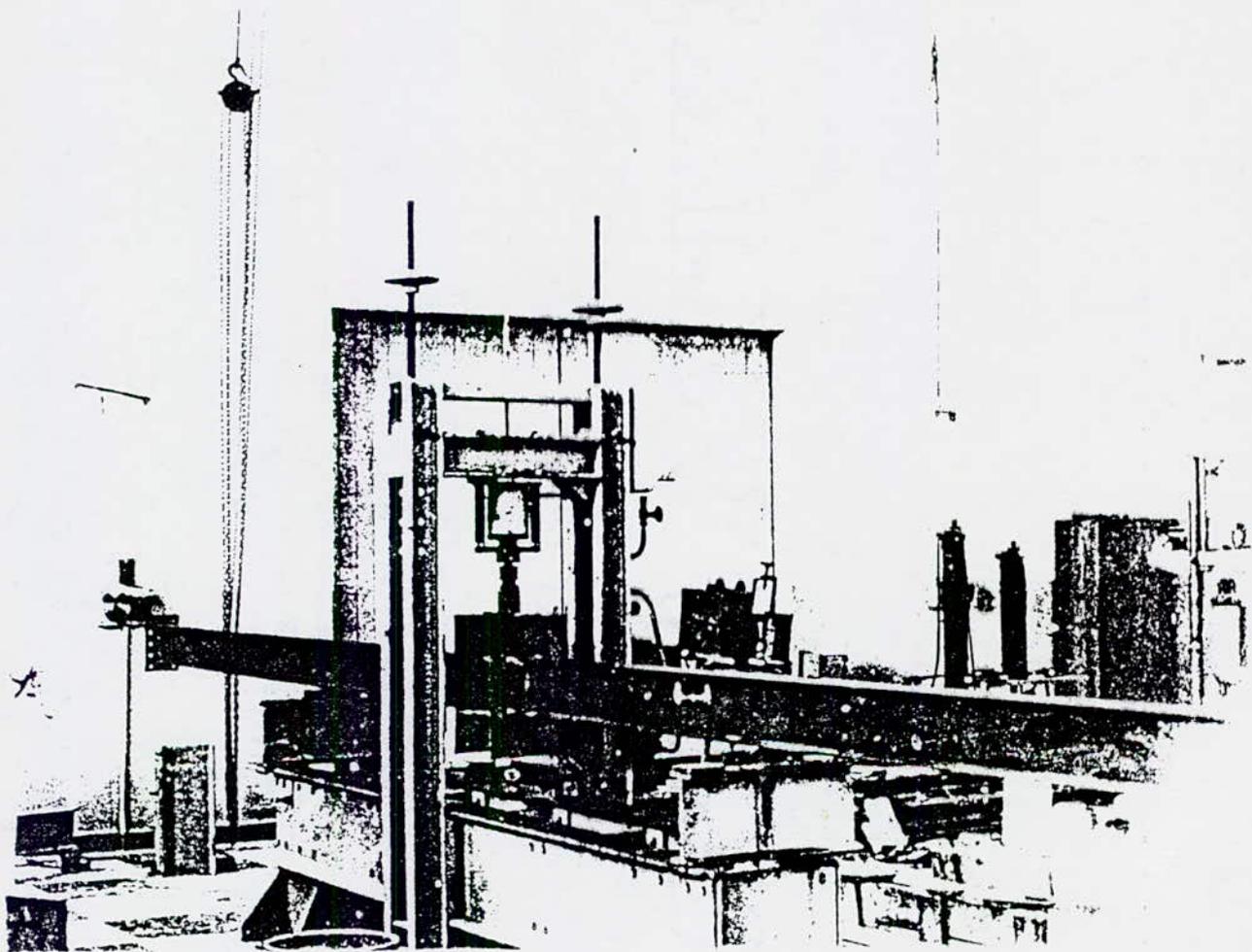


Fig. II 3

La charge maximale que peut développer le piston est de 20 tonnes. Ce piston est actionné par une pompe à main et un manomètre indique la force développée.

Quatre charges d'essais ont été retenues : 200 daN, 500 daN, 800 daN et 1 000 daN. Il a été testé des pièces dont les portées varient de 0,50 m à 4,00 m avec un pas de 0,25 m, ce qui a donné quinze portées d'essais.

En ce qui concerne les poutres, il a été adopté un gabarit moyen, très utilisé en pratique. Il s'agit du profilé métallique IPE 200 dont le profil est donné en figure II-4, ci-contre, et dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont énumérées ci-après.

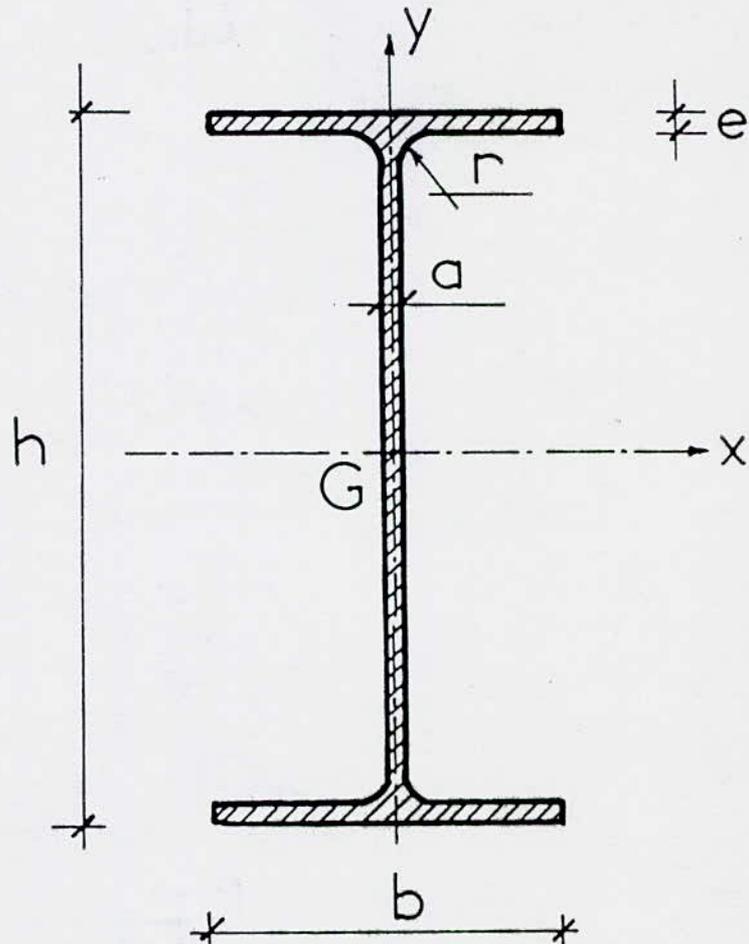


Fig. II-4

Caractéristiques géométriques et mécaniques du profilé IPE 200

- Nuance de l'acier	: FeE 24		
- Hauteur du profilé	: h	=	200 mm
- Largeur de l'aile	: b	=	100 mm
- Epaisseur de l'âme	: a	=	5,6 mm
- Epaisseur de l'aile	: e	=	8,5 mm
- Rayon de raccordement aile - âme	: r	=	12 mm
- Section du profilé	: A	=	28,5 cm ²
- Moment d'inertie par rapport à l'axe Gx	: I _x	=	1 943 cm ⁴
- Module d'inertie par rapport à l'axe Gx	: W _x	=	194 cm ³
- Rayon de giration par rapport à l'axe Gx	: i _x	=	8,3 cm
- Moment statique de la demi-section par rapport à l'axe Gx	: S _x	=	110 cm ³
- Moment d'inertie par rapport à l'axe Gy	: I _y	=	142 cm ⁴
- Module d'inertie par rapport à l'axe Gy	: W _y	=	28,5 cm ³
- Rayon de giration par rapport à l'axe Gy	: i _y	=	2,2 cm
- Moment d'inertie de torsion	: J	=	6,5 cm ⁴

Le montage standard utilisé pour les essais est schématisé à la figure II-1 et est photographié en figure II- 5.

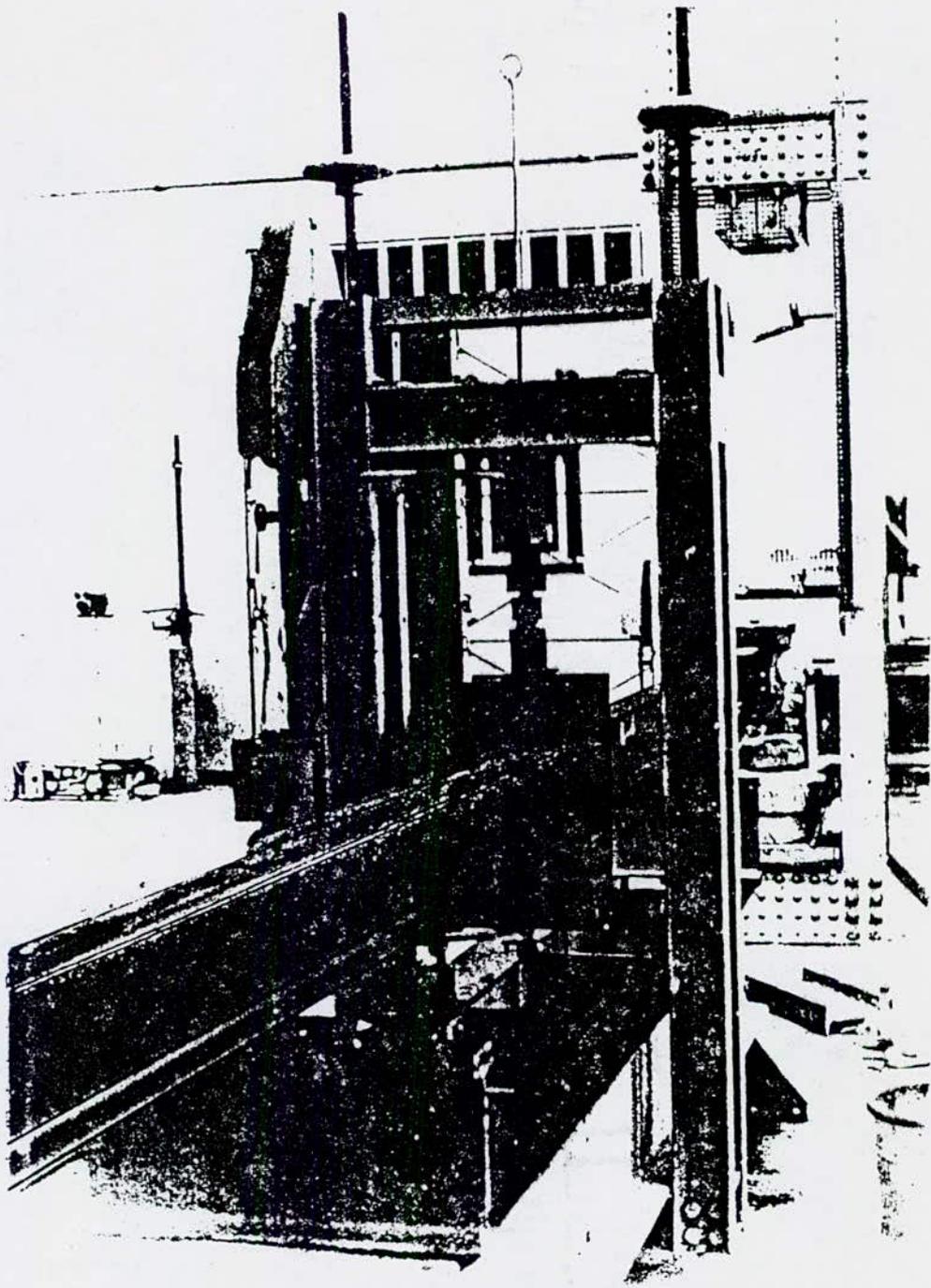


Fig. II 5

Pour les poteaux, il a été retenu deux types de profilés : HEA 300 et HEA 400, qui sont parmi les plus rigides de la gamme.

Ce choix a été fait en vue d'enrayer les déformations parasites éventuelles des semelles. Ces dernières ont de plus été raidies par des plats de 10 mm d'épaisseur, ce qui renforce encore le support de la liaison.

Le choix des épaisseurs des platines frontales a été guidé par l'épaisseur de la semelle de la poutre IPE 200.

Cette épaisseur étant de 8,5 mm, celles des platines frontales ont été prises avec minimum de 8 mm.

Il a finalement été retenu quatre épaisseurs de platines :

$$t = 8 \text{ mm}$$

$$t = 10 \text{ mm}$$

$$t = 12 \text{ mm}$$

$$t = 14 \text{ mm}$$

Les boulons assurant la jonction platine - poteau sont des boulons du type H.R. 10 - 9.

Deux diamètres différents ont été testés : \varnothing 16 et \varnothing 18.

La soudure assurant la jonction poutre - platine a été prise avec une épaisseur de 7 mm et exécutée à l'arc électrique.

L'annexe (A) donne les calculs justificatifs des modèles ainsi que leur plan d'exécution en atelier.

Les flèches ont été mesurées à l'aide d'un comparateur à précision de $\frac{1}{1000}$ ème de millimètre. Il a été placé au droit de l'axe du poteau (section de rotation nulle) et fixé sur le longeron de la presse hydraulique.

II.3.d Variantes d'expérimentation

En agençant différemment les éléments entrant dans la composition du noeud, il a été possible de tester 24 variantes d'assemblages dont la nomenclature est donnée dans le tableau II-1 ci-après.

Tableau II - 1

Variante	Poteau	Epaisseur platine (mm)	Boulonnage
A 1	HEA 300	8	6 \varnothing 16
B 1	"	10	"
C 1	"	12	"
D 1	"	14	"
A 2	"	8	6 \varnothing 18
B 2	"	10	"
C 2	"	12	"
D 2	"	14	"
A 3	"	8	10 \varnothing 16
B 3	"	10	"
C 3	"	12	"
D 3	"	14	"
A 4	"	8	10 \varnothing 18
B 4	"	10	"
C 4	"	12	"
D 4	"	14	"
A 5	HEA 400	8	6 \varnothing 16
B 5	"	10	"
C 5	"	12	"
D 5	"	14	"
A 6	"	8	10 \varnothing 16
B 6	"	10	"
C 6	"	12	"
D 6	"	14	"

II. 4 RESULTATS EXPERIMENTAUX - INFLUENCES DES DIFFERENTS PARAMETRES

SUR LA DEFORMABILITE DES NOEUDS.

II.4.a Résultats expérimentaux

Les résultats des mesures effectuées sont intégralement présentés dans les tableaux T - 2 à T - 25 de l'annexe B.

Le tableau T - 1 de cette annexe donne les flèches élastiques Δ_0 résultant du calcul $\frac{Pl^3}{48EI}$, la charge P prenant successivement les quatre valeurs retenues (§ II-3-c) et la portée "l" variant de la valeur 1 m à la valeur de 8 m avec un pas de progression de 0,5 m.

Les tableaux T - 2 à T - 25 donnent les flèches mesurées Δ , obtenues avec les mêmes combinaisons de "P" et de "l" que pour Δ_0 .

La dernière colonne de chacun de ces tableaux donne le degré de jonction calculé selon la relation (I-12), chapitre I, § I-3-b.

Les charges d'essais sont données avec une marge d'erreur de 10 daN.

Il est rappelé que les flèches sont mesurées à l'aide d'un comparateur au $\frac{1}{1000}$ ème de millimètre.

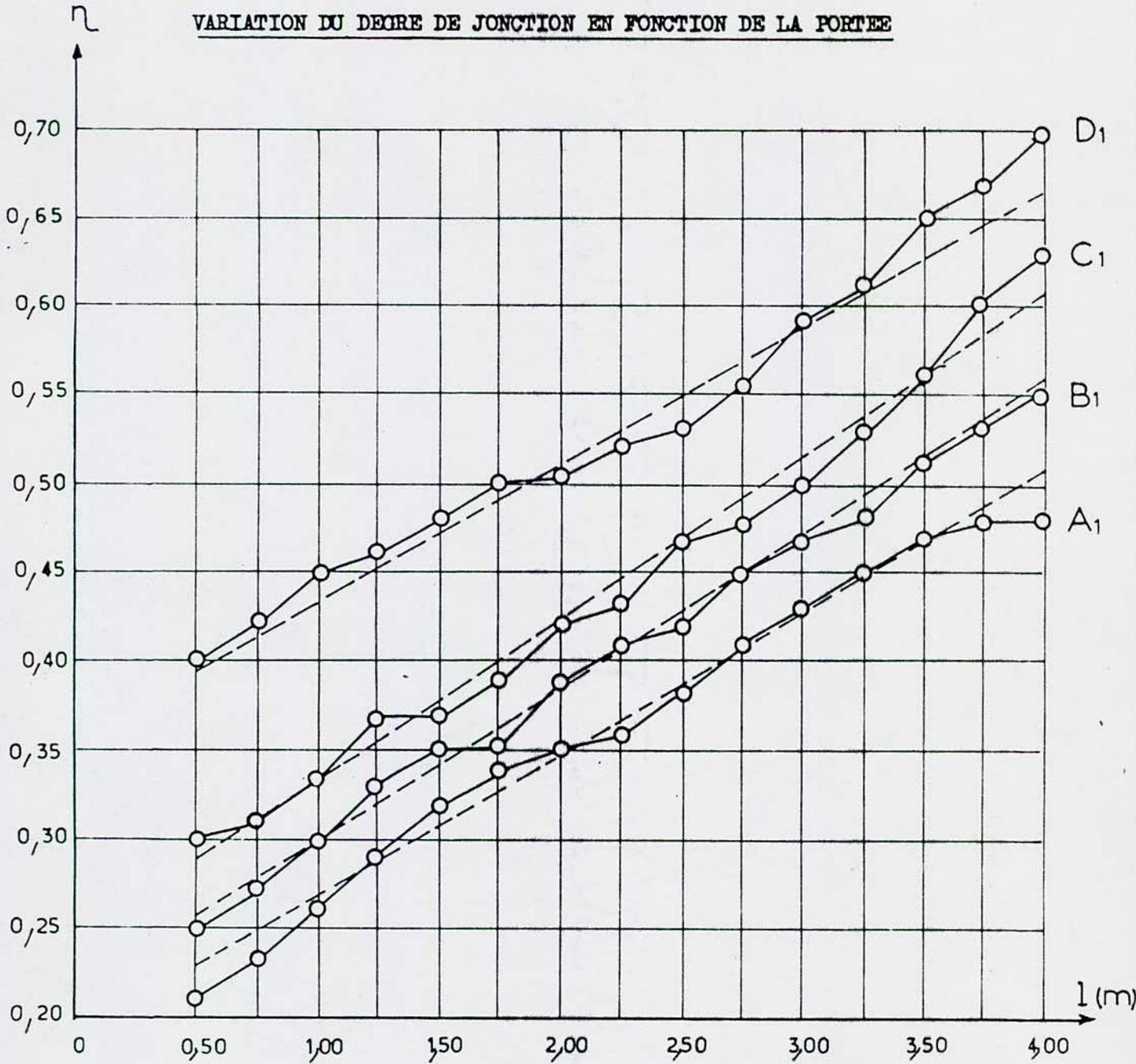
II.4.b Influence de la portée

II.4.b.α Graphes expérimentaux

Les résultats des mesures données en annexe B suggèrent que le degré de jonction η , pour une variante donnée, croît d'une manière régulière avec la portée "l".

Pour mieux visualiser le phénomène, il a été jugé utile de reporter les résultats sur des graphiques. (Figs. II-6, II-7, II-8, II-9, II-10, II-11).

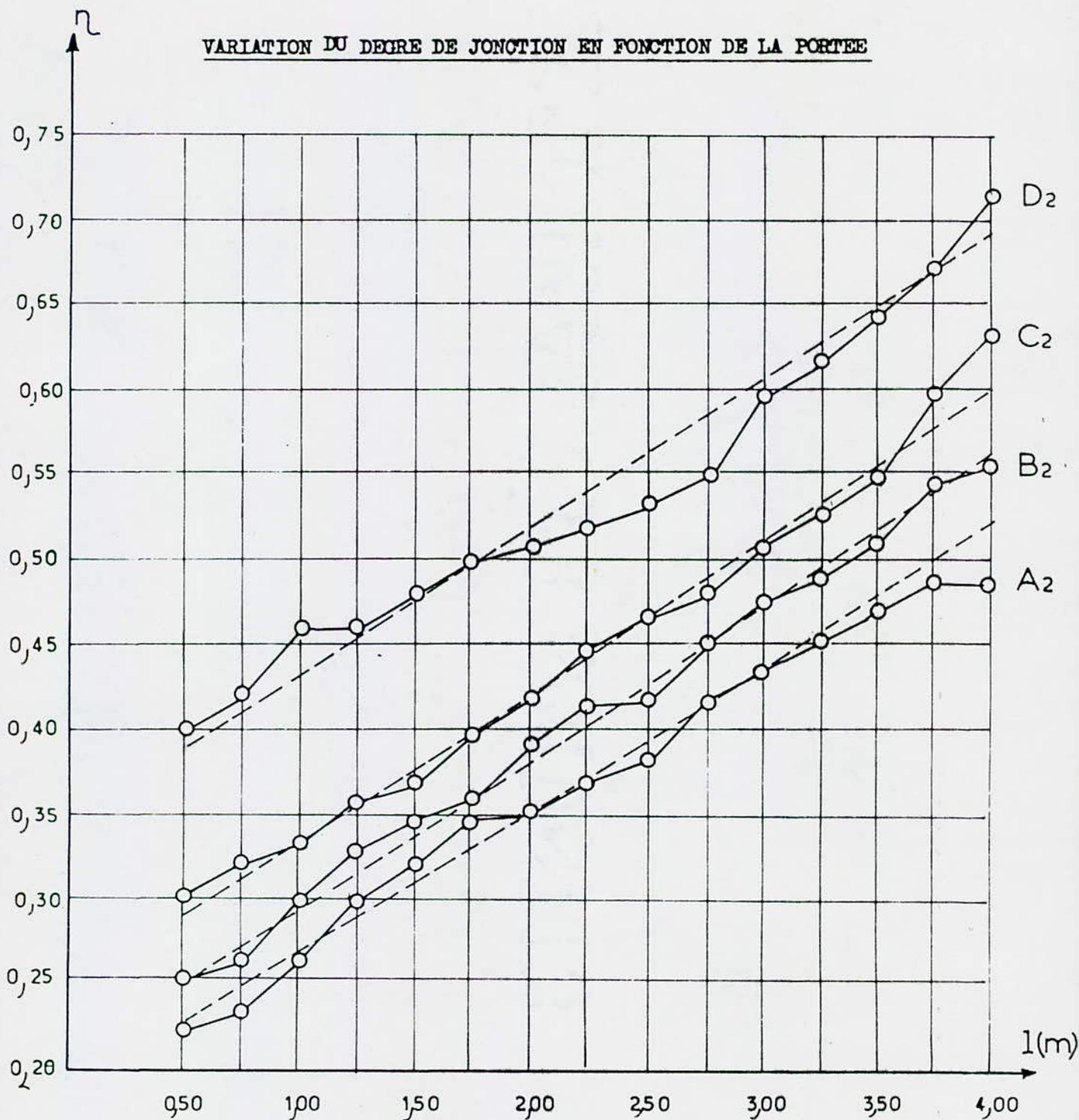
VARIATION DU DEGRE DE JONCTION EN FONCTION DE LA PORTEE



————— GRAPHE EXPERIMENTAL
 - - - - - DROITE DE TENDANCE

Fig. II-6

VARIATION DU DEGRE DE JONCTION EN FONCTION DE LA PORTEE



————— GRAPHE EXPERIMENTAL
 - - - - - DROITE DE TENDANCE

Fig. II-7

VARIATION DU DEGRE DE JONCTION EN FONCTION DE LA PORTEE

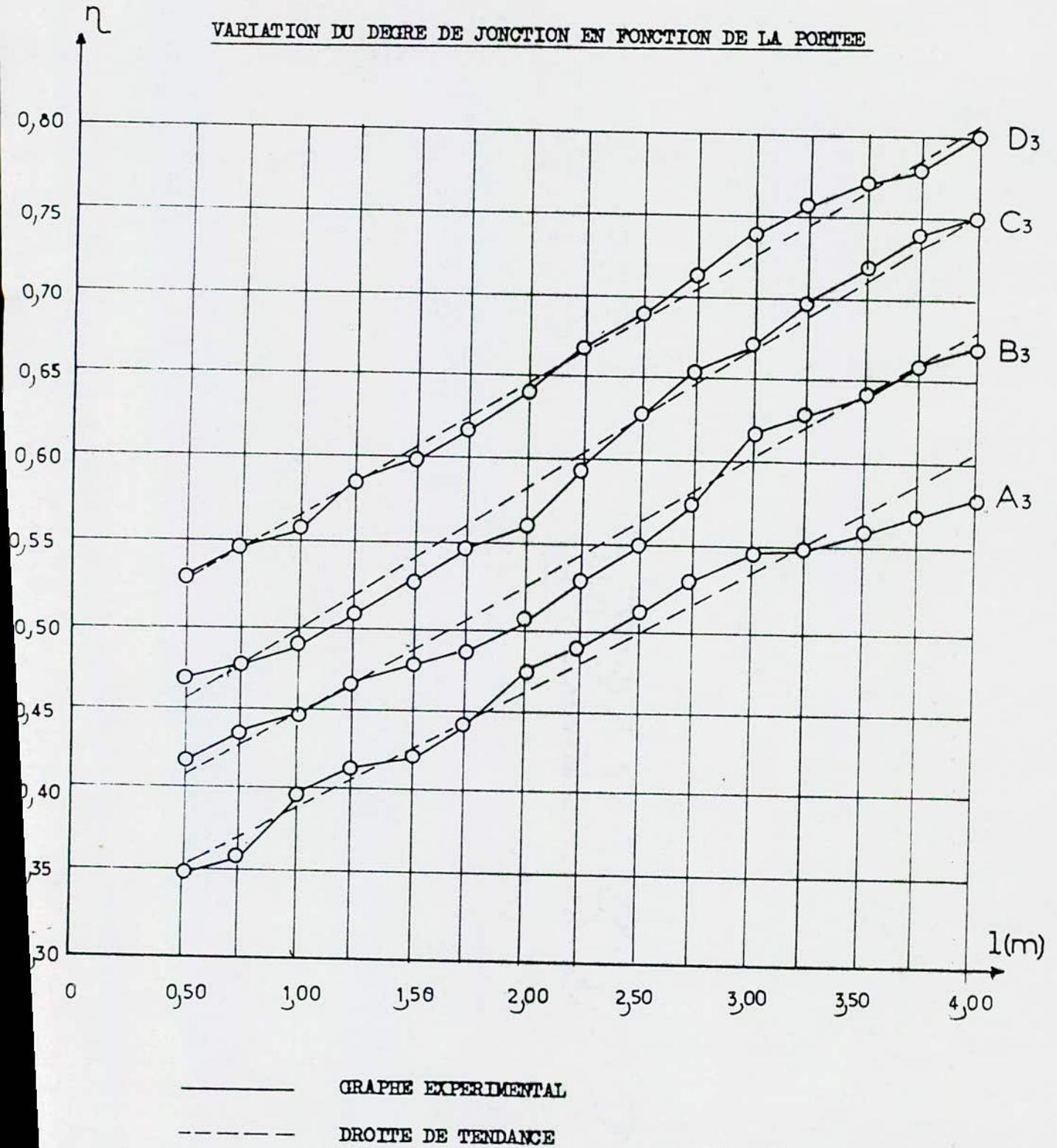
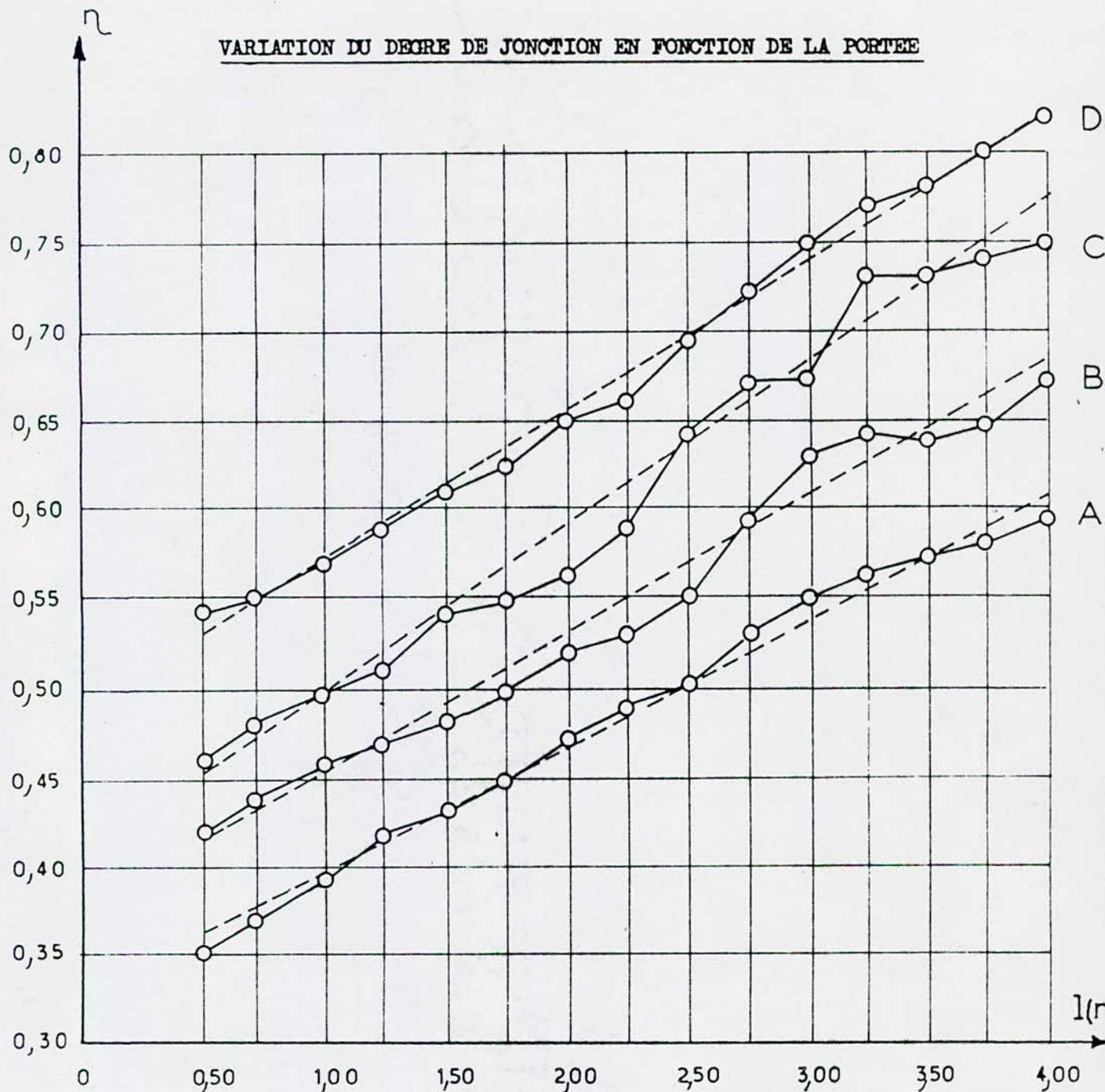


Fig. II-8

VARIATION DU DEGRE DE JONCTION EN FONCTION DE LA PORTÉE



———— GRAPHE EXPERIMENTAL
 - - - - DROITE DE TENDANCE

Fig. II-9

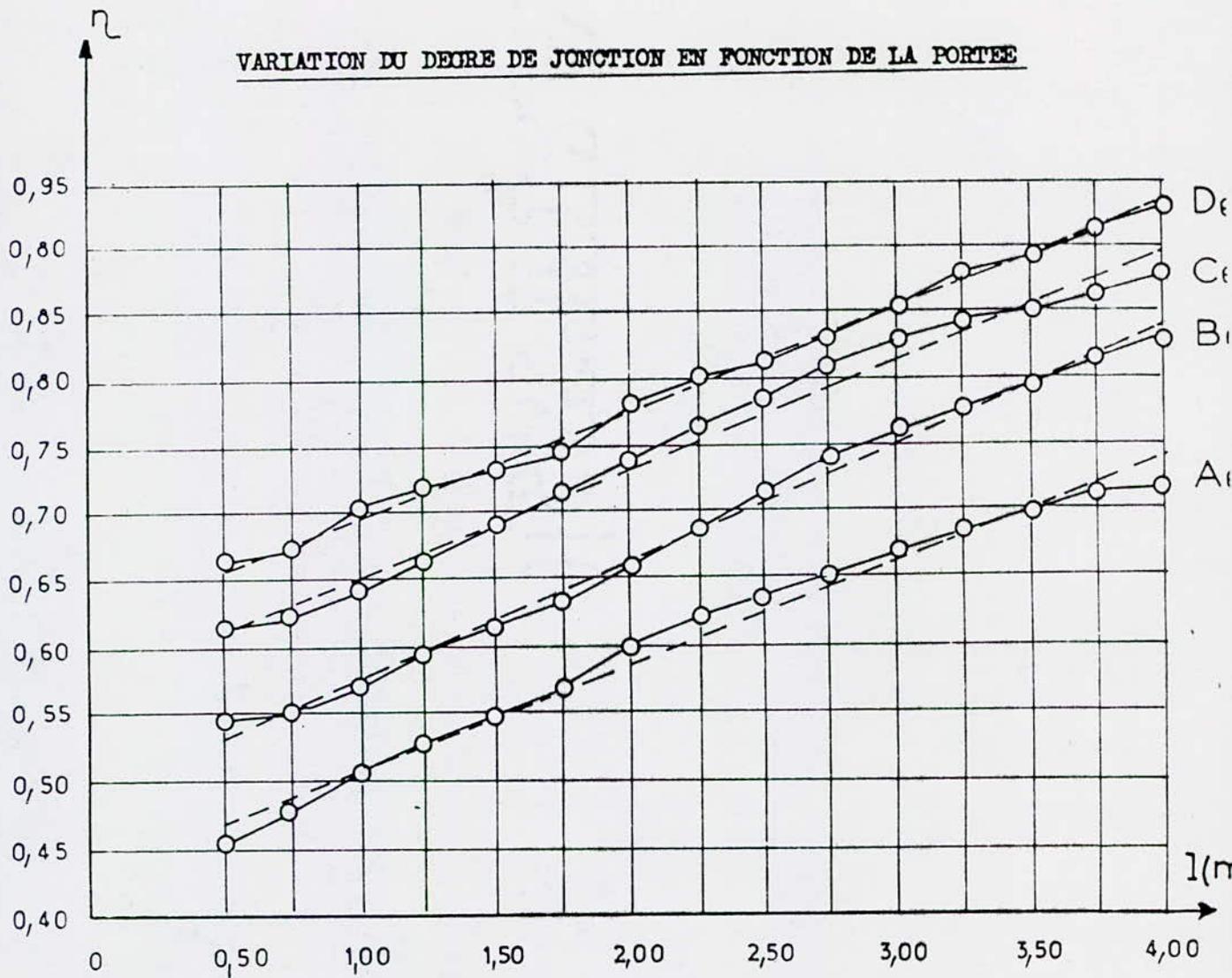
VARIATION DU DEGRE DE JONCTION EN FONCTION DE LA PORTEE



———— GRAPHE EXPERIMENTAL
 - - - - DROITE DE TENDANCE

Fig.II-10

VARIATION DU DEGRE DE JONCTION EN FONCTION DE LA PORTEE



———— GRAPHE EXPERIMENTAL
 - - - - DROITE DE TENDANCE

Fig. II-11

II.4.b.β Ajustement sur les graphes expérimentaux

Les graphes précédents montrent une variation pratiquement linéaire du degré de jonction, en fonction de la portée.

Une manière de vérifier ce phénomène serait d'effectuer un traitement statistique de regression linéaire sur les couples de valeurs (η, l) .

La regression utilisée sera basée sur la méthode des moindres carrés.

Selon ce moyen, le degré de jonction aura la forme mathématique suivante, pour une variante (k) donnée :

$$\boxed{\eta_k = a_k l + b_k} \quad (\text{II-1}) \text{ pour } 0,50 \text{ m} \leq l \leq 4,00 \text{ m}$$

De plus, pour vérifier si la droite de tendance représente un ajustement correct du graphe expérimental, le coefficient de corrélation "r" est calculé pour chaque variante.

Ce coefficient, compris entre -1 et +1 renseigne sur l'exactitude de l'ajustement.

Le tableau II-2 donne l'expression $\eta_k = a_k l + b_k$ ainsi que le coefficient de corrélation r_k pour chaque variante.

Les valeurs des coefficients de corrélation font apparaître que les graphes expérimentaux s'apparentent pratiquement à des droites.

Tableau II-2

Variante	$r_k = a_k l + b_k$ (l en mètres)	r_k
A 1	0,0797 l + 0,1846	0,9922
B 1	0,0842 l + 0,2144	0,9974
C 1	0,0923 l + 0,2384	0,9930
D 1	0,0808 l + 0,3534	0,9865
A 2	0,0804 l + 0,1884	0,9918
B 2	0,0884 l + 0,2097	0,9959
C 2	0,0924 l + 0,2407	0,9931
D 2	0,0838 l + 0,3513	0,9821
A 3	0,0682 l + 0,3280	0,9861
B 3	0,0758 l + 0,3723	0,9923
C 3	0,0878 l + 0,4066	0,9944
D 3	0,0810 l + 0,4858	0,9964
A 4	0,0708 l + 0,3242	0,9942
B 4	0,0750 l + 0,3773	0,9894
C 4	0,0904 l + 0,4045	0,9892
D 4	0,0842 l + 0,4857	0,9966
A 5	0,0756 l + 0,3200	0,9957
B 5	0,0864 l + 0,3442	0,9990
C 5	0,0908 l + 0,3789	0,9977
D 5	0,0988 l + 0,4487	0,9937
A 6	0,0796 l + 0,4223	0,9921
B 6	0,0872 l + 0,4886	0,9967
C 6	0,0822 l + 0,5669	0,9935
D 6	0,0784 l + 0,6169	0,9977

Un autre résultat remarquable consiste en les valeurs comparés des coefficients directeurs C_k des droites de tendances.

Le traitement statistique fournit les résultats suivants :

la moyenne arithmétique des coefficients C_k vaut 0,08309167

L'écart-type, rapporté à cette moyenne vaut 0,08776399 (il est rappelé que l'écart-type représente la racine carrée de la dispersion moyenne des mesures autour de la moyenne arithmétique).

Une valeur aussi faible pour l'écart-type signifie que du point de vue statistique, les coefficients directeurs des droites de tendances sont pratiquement égaux, c'est à dire que ces droites sont pratiquement parallèles.

Ce phénomène apparaît, d'ailleurs, sur les graphes des figures II-6 à II-11.

II.4.c Influence de l'aile du poteau

Tous les autres paramètres égaux par ailleurs, la déformabilité accusée est plus importante pour le poteau du type HEA 300 que pour celui du type HEA 400.

Prenons, par exemple, les variantes A 3 et A 6. Pour ces deux variantes l'épaisseur de la platine est de 8 mm et le boulonnage est de 10 \emptyset 16.

Pour une portée de 3 mètres, les mesures donnent :

$$\eta = 0,55 \text{ pour HEA 300}$$

$$\eta = 0,65 \text{ pour HEA 400}$$

Cela représente une différence de 18 % pour η .

Les résultats prouvent la participation non-négligeable de l'aile du poteau (même raidie) dans la déformabilité de l'assemblage.

Vu qu'il n'a été testé que deux types de poteaux, il n'est pas possible de tirer des conclusions plus précises quant à l'influence de l'aile du poteau sur la déformabilité de la liaison.

Cependant, les essais ont confirmé le fait que la déformabilité de la liaison est plus faible pour des épaisseurs d'ailes plus grandes et inversement.

II.4.d Influence de l'épaisseur de la platine

Cette influence est pratiquement identique à celle de l'épaisseur de l'aile du poteau.

Le degré de jonction est plus faible, pour les faibles épaisseurs des platines frontales.

Cette influence est cependant à étudier de manière plus délicate que celle de l'aile du poteau.

En effet, il est presque toujours possible de prévoir, au niveau des liaisons, un renforcement de l'aile du poteau, qui puisse diminuer ou annuler l'effet sur la déformabilité (doublage de l'aile, augmentation du nombre de raidisseurs, etc...).

Par contre, le choix des platines d'extrémités trop épaisses est à proscrire, en raison des problèmes de soudage.

Les platines épaisses s'opposent en effet à la pénétration des cordons et donnent lieu à des soudures dites "de collage" qui se fissurent et cassent rapidement.

II.4.e Influence du diamètre des boulons

Les résultats donnés en annexe (B) montrent que le diamètre des boulons n'a pratiquement pas d'influence sur la déformabilité de la liaison.

Cela s'explique par les dimensions relatives des boulons et de l'assemblage.

Pour le calcul, d'ailleurs, (annexe A), les boulons sont modélisés par des points et les forces sont concentrées en ces points.

La seule influence sera sur la résistance ultime de l'assemblage [10]

II.4.f Influence du nombre de boulons

Il apparaît, d'après les résultats des mesures, que le nombre de boulons joue un rôle prépondérant dans la déformabilité de la liaison.

En réalité, le gain de déformabilité réside surtout dans l'espacement des boulons. La liaison est d'autant plus déformable que les boulons sont éloignés.

Pour la réalisation d'assemblages frontaux, il y a donc intérêt à rapprocher le plus possible les boulons, autant que le permettent les règles en vigueur.

II. 5 INTERPRETATIONS

II.5.a Concept de la rigidité d'un noeud

La rigidité à la rotation d'extrémité d'une poutre est définie par le rapport $\frac{EI}{l}$, à un coefficient multiplicatif près.

Cette rigidité est inversement proportionnelle à la portée.

Notons $\frac{EI}{l} = \chi$. Il vient alors : $l = \frac{EI}{\chi}$ (II-2)

En portant l'expression II-2 dans la relation empirique II-1 on obtient :

$$\eta_k = a_k \frac{EI}{\chi} + b_k \quad (II-3)$$

Le degré de jonction est inversement proportionnel à la rigidité, à une constante près.

Autrement dit, plus la poutre est souple, plus le degré de jonction se rapproche de l'unité, s'apparentant de plus en plus au degré de jonction d'une liaison parfaitement encastree.

Selon cette optique, le degré de jonction s'identifie à une grandeur qui serait fonction de deux rigidités distinctes : celle de la poutre et celle du noeud d'attache. Le noeud d'attache désigne ici le solide virtuel liant le bout de la barre à son appui.

L'interprétation du phénomène pourrait s'envisager à l'aide d'un modèle permettant de séparer la poutre et le noeud.

Cette séparation est obtenue en déduisant, du degré de jonction, une grandeur qui ne serait fonction que des caractéristiques du noeud.

Pour cela, imaginons la poutre liée à l'appui par un ressort de rotation de raideur \bar{K} . (Fig. II-12)

Posons $K_0 = \frac{3EI}{l}$, la rigidité flexionnelle de la poutre.

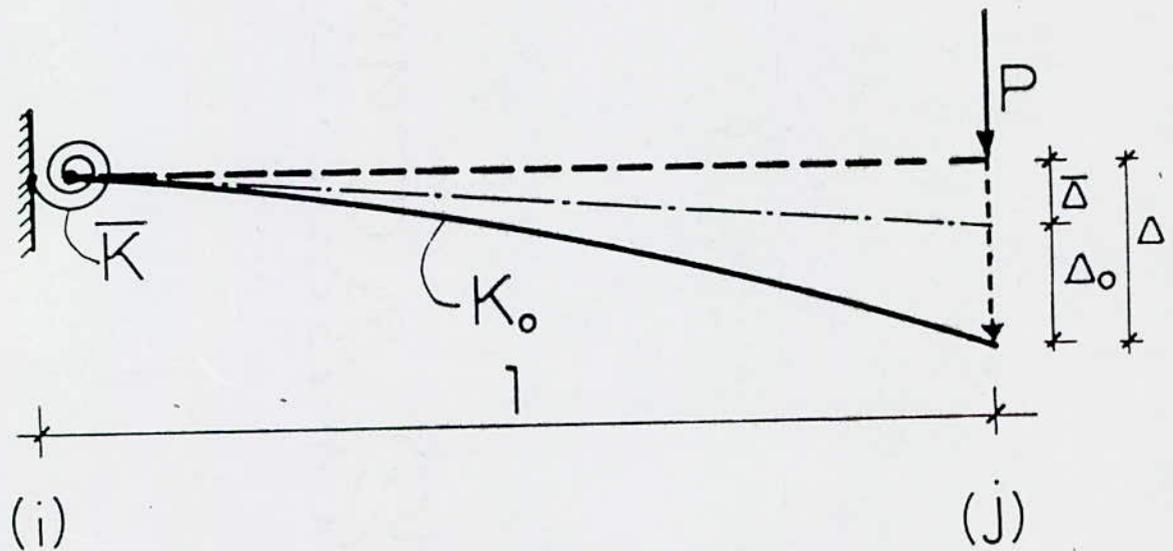


Fig. II-12

En appelant η_{ij} le degré de jonction de la poutre au noeud (i), on obtient :

$$\bar{K} = K_0 \frac{\eta_{ij}}{1 - \eta_{ij}} \quad (\text{II} - 4)$$

L'annexe (B) donne les justifications de cette relation.

Remarque : l'équation (II-4) n'est en fait rien d'autre que la formulation classique du degré d'encastrement (§ I-3-a).

Pour une liaison parfaitement articulée : $\eta_{ij} = 0$ et $\bar{K} = 0$

Pour une liaison parfaitement encastree : $\eta_{ij} = 1$ et $\bar{K} = \infty$

Il a été pris, au hasard, trois des variantes testées et les valeurs de \bar{K} ont été calculées à partir de la relation (II-4).

Les résultats sont donnés dans les tableaux : II-3, II-4, II-5.

TABLEAU II-3

Variante A1

l (cm)	K_0 (daN.cm)	η_{ij}	\bar{K} (daN.cm)
175	$6,99 \cdot 10^{+7}$	0,34	$3,60 \cdot 10^{+7}$
200	$6,12 \cdot 10^{+7}$	0,35	$3,29 \cdot 10^{+7}$
225	$5,44 \cdot 10^{+7}$	0,36	$3,06 \cdot 10^{+7}$
250	$4,90 \cdot 10^{+7}$	0,38	$3,00 \cdot 10^{+7}$
275	$4,45 \cdot 10^{+7}$	0,41	$3,09 \cdot 10^{+7}$
300	$4,08 \cdot 10^{+7}$	0,43	$3,08 \cdot 10^{+7}$
325	$3,77 \cdot 10^{+7}$	0,45	$3,08 \cdot 10^{+7}$
350	$3,50 \cdot 10^{+7}$	0,47	$3,10 \cdot 10^{+7}$
375	$3,26 \cdot 10^{+7}$	0,48	$3,01 \cdot 10^{+7}$
400	$3,06 \cdot 10^{+7}$	0,48	$2,82 \cdot 10^{+7}$

TABLEAU II-4

Variante B3

l (cm)	K_0 (daN.cm)	η_{ij}	\bar{K} (daN.cm)
175	$6,99 \cdot 10^{+7}$	0,49	$6,72 \cdot 10^{+7}$
200	$6,12 \cdot 10^{+7}$	0,51	$6,37 \cdot 10^{+7}$
225	$5,44 \cdot 10^{+7}$	0,53	$6,13 \cdot 10^{+7}$
250	$4,90 \cdot 10^{+7}$	0,55	$5,99 \cdot 10^{+7}$
275	$4,45 \cdot 10^{+7}$	0,58	$6,15 \cdot 10^{+7}$
300	$4,08 \cdot 10^{+7}$	0,62	$6,66 \cdot 10^{+7}$
325	$3,77 \cdot 10^{+7}$	0,63	$6,42 \cdot 10^{+7}$
350	$3,50 \cdot 10^{+7}$	0,64	$6,22 \cdot 10^{+7}$
375	$3,26 \cdot 10^{+7}$	0,66	$6,33 \cdot 10^{+7}$
400	$3,06 \cdot 10^{+7}$	0,67	$6,21 \cdot 10^{+7}$

TABLEAU II-5

Variante C6

l (cm)	K_0 (daN.cm)	η_{ij}	\bar{K} (daN.cm)
175	$6,99 \cdot 10^{+7}$	0,71	$1,71 \cdot 10^{+8}$
200	$6,12 \cdot 10^{+7}$	0,74	$1,74 \cdot 10^{+8}$
225	$5,44 \cdot 10^{+7}$	0,76	$1,72 \cdot 10^{+8}$
250	$4,90 \cdot 10^{+7}$	0,78	$1,74 \cdot 10^{+8}$
275	$4,45 \cdot 10^{+7}$	0,81	$1,90 \cdot 10^{+8}$
300	$4,08 \cdot 10^{+7}$	0,83	$1,99 \cdot 10^{+8}$
325	$3,77 \cdot 10^{+7}$	0,84	$1,98 \cdot 10^{+8}$
350	$3,50 \cdot 10^{+7}$	0,85	$1,90 \cdot 10^{+8}$
375	$3,26 \cdot 10^{+7}$	0,86	$2,00 \cdot 10^{+8}$
400	$3,06 \cdot 10^{+7}$	0,88	$2,24 \cdot 10^{+8}$

Les tableaux précédents sont dressés pour des portées de poutres allant de 1,75 mètres à 4,00 mètres.

En fait, les essais ont également été effectués pour des portées plus faibles.

Mais, en ce qui concerne la rigidité \overline{K} , les calculs ont montré des valeurs assez erratiques pour les portées inférieures à deux mètres, la stabilisation n'ayant lieu qu'à partir de cette valeur.

Ce phénomène admet comme explication le fait que, selon le principe de Saint-Venant, les effets locaux ne peuvent être négligés que pour des poutres suffisamment longues (la portée doit généralement être plus grande que cinq fois la hauteur).

En effet, le calcul de Δ_0 a été effectué sur la base de la relation classique $\frac{Pl^3}{48EI}$, qui suppose le principe applicable.

La poutre utilisée est un profilé IPE 200, ayant une hauteur de 200 mm ce qui signifie que le calcul devient acceptable à partir d'une portée de un mètre.

Les erreurs d'expérimentation sur les valeurs de Δ reculent encore la limite.

Pour cela, il n'a été tenu compte que des portées de poutres supérieures ou égales à 1,75 mètres.

II.5.b Interprétation du degré de jonction

La relation (II-4) permet une interprétation intéressante du degré de jonction.

En effet en partant de (II-4) on obtient : $\frac{1}{K_0 \eta_{ij}} = \frac{1}{K} + \frac{1}{K_0}$ (II - 5)

En émettant l'hypothèse que η_{ij} s'apparente au correctif de la rigidité de la poutre, pour tenir compte de la déformabilité du noeud, la relation (II-5) indique que l'ensemble poutre-noeud se comporte comme deux éléments élastiques montés en série (Fig. II-13).

Le ressort élastiquement équivalent au montage de la figure ci-contre est un ressort de raideur K telle que :

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

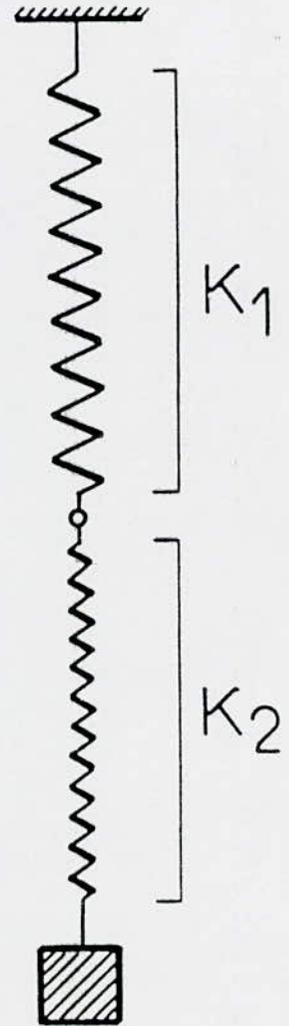


Fig. II-13

Chapitre III : LE CALCUL DES OSSATURES COMPTE TENU DE LA DEFORMABILITE
DES LIAISONS.

III. 1 GENERALITES

L'étude expérimentale présentée au chapitre précédent a permis la mise en évidence du caractère systématique des déplacements relatifs locaux dans des liaisons considérées usuellement comme des liaisons encastrees.

Ces déplacements relatifs vont occasionner une redistribution des efforts dans la structure [2], [5], [6], [17], [20]. (§ I.1.b)

Pour cette raison, il apparaît nécessaire d'envisager un moyen de calcul qui tienne compte du caractère imparfait des noeuds.

Le présent chapitre propose une méthode visant à illustrer l'intérêt de la définition proposée pour le degré de jonction d'une barre à un noeud.

Il est montré que cette notion présente une adaptation satisfaisante pour le calcul du type manuel.

Dans un premier temps, il est fait état d'une corrélation entre le degré de jonction et l'existence d'une travée supplémentaire fictive de poutre.

Cette corrélation permet d'obtenir un modèle corrigé auquel les techniques classiques de calcul s'appliquent.

La suite de l'étude établit des équations pour la détermination de paramètres "corrigés" conduisant au calcul de la structure, compte tenu de la déformabilité des noeuds.

III. 2 Principales recherches sur le calcul des ossatures à noeuds imparfaits.

La plupart des recherches précédemment effectuées dans ce domaine se sont penchées sur l'extension des méthodes numériques aux structures à liaisons imparfaites.

La plupart de ces méthodes utilisent plus ou moins directement, le concept de la rigidité du noeud (§ II.5.a).

Parmi les principales recherches s'étant occupées de ce problème, il sera cité celles de C. BATHO et H.C. ROWAN [4], B.G. JOHNSTON et E.H. MOUNT [19] P. BOTIZAN et N. JUNCAN [20], J.E. LOTHERS [25], C.R. MATEESCU [26], G.R. MONFORION et I.S. WU [27].

BATHO et ROWAN introduisent un ressort de rotation unique à l'intersection de quatre barres, ce qui leur permet de corriger le moment à l'extrémité de chacune des barres.

La même hypothèse fut reprise par LOTHERS pour l'extension à l'effet de l'effort tranchant à l'aide d'un ressort de translation (effet de "friction élastique").

BOTIZAN et JUNCAN dressent la matrice de rigidité d'un élément poutre à liaisons imparfaites aux extrémités, en se servant de la notion de rigidité d'un noeud. Ils proposent de plus une extension de la méthode TAKABEYA.

En résumé, il est permis d'affirmer que l'intérêt majeur s'est porté sur l'emploi des méthodes destinées au calcul automatique. Peu de recherches ont été entreprises sur les méthodes manuelles.

III.3. Procédé pour le calcul manuel. Extension de la méthode

HARDY-CROSS

III.3.C Méthodes itératives

Dans la pratique des ingénieurs, l'emploi des méthodes itératives de calcul des structures est plus généralisé que les méthodes numériques, à moins de disposer de moyens informatiques adéquats.

Les méthodes itératives utilisées dans le calcul des structures (Hardy-Cross, Kani, etc ...) ont comme support analytique les méthodes de résolution, par approximations successives, des équations algébriques, soit les équations de la méthode générale des déplacements.

Il faut néanmoins souligner que ces méthodes s'inspirent quelque peu du comportement de la structure.

A ce titre, la technique de blocage - déblocage des noeuds, dans le procédé Cross, peut être vue comme une discrétisation du mouvement du noeud.

L'étude présentée ici s'attache à introduire, pour le déblocage, une relaxation supplémentaire due à l'imperfection du noeud.

III.3.b Etapes à parcourir dans le procédé Cross

Une des méthodes itératives les plus utilisées est celle de Hardy-Cross

Elle a été choisie comme support de cette étude.

Il est brièvement rappelé les différentes étapes à parcourir dans le procédé classique de Cross :

(a) calcul des rigidités des barres aux rotations :

$$R_{ij} = \frac{4EI_{ij}}{l_{ij}} \quad \text{Pour la poutre "i-j" encastrée en "i" et "j" .}$$

$$R_{ij} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}} \quad \text{Pour la poutre "i-j" encastrée en "i" et articulée en "j" .}$$

(b) calcul des coefficients de répartition :

$$r_{ij} = \frac{R_{ij}}{\sum_{(k)} R_{ik}} \quad \text{La somme du dénominateur se réfère à toutes les barres qui concourent en "i"$$

(c) calcul des coefficients de transmission :

$$t_{ij} = \frac{M_{ji}}{M_{ij}}$$

M_{ij} et M_{ji} sont les moments qui apparaissent respectivement au noeud "i" et au noeud "j" lorsque le noeud "i" subit une rotation unitaire.

Nota : pour les barres à inertie constante, encastrées aux deux

$$\text{extrémités "i" et "j" : } t_{ij} = t_{ji} = \frac{1}{2}$$

Pour les barres encastrées à une extrémité et articulées

$$\text{ou simplement appuyées à l'autre : } t_{ij} = t_{ji} = 0$$

(d) calcul des moments d'encastrement parfait M_{ij} et M_{ji} pour la barre chargée par les forces ou couples extérieurs.

(e) les quatre opérations précédemment effectuées donnent les éléments nécessaires pour calculer les efforts dans la structure.

Il suffit d'effectuer le procédé de blocage-déblocage successifs des noeuds, de répartir et de transmettre les moments fléchissants aux noeuds à chaque déblocage.

(f) les moments finals sont obtenus par superposition des diagrammes de Cross et de la poutre isostatique de référence.

III.3.c Modélisation de la liaison imparfaite

Considérons la poutre représentée à la figure III-1. Les deux liaisons (i) et (j) sont supposées être des encastremements parfaits.

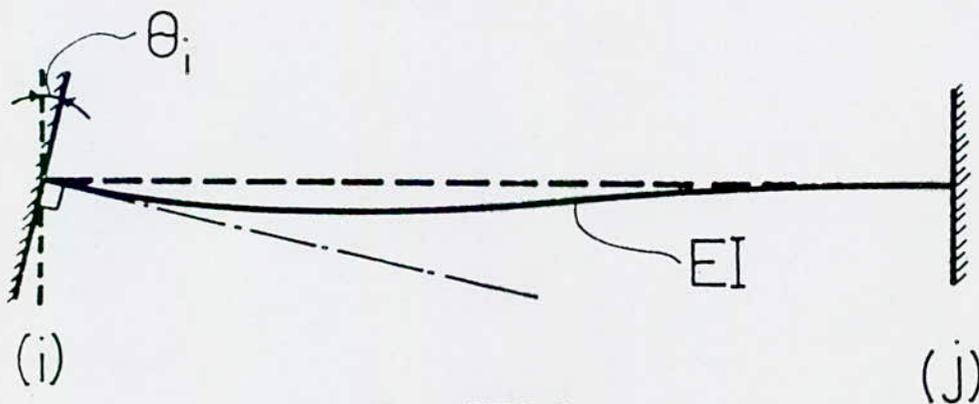


Fig. III-1

Le moment à l'extrémité (i), M_{ij} , conséquent à une rotation θ_i du noeud (i) vaudra :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{L} \theta_i$$

Si on considère la même poutre, avec liaison imparfaitement encadrée en (i) (Fig. III-2), la même rotation θ_i du noeud (i) entrainera une rotation θ_{ij} de la tangente à la ligne moyenne de la barre, à l'extrémité (j) (§ I.3.a)

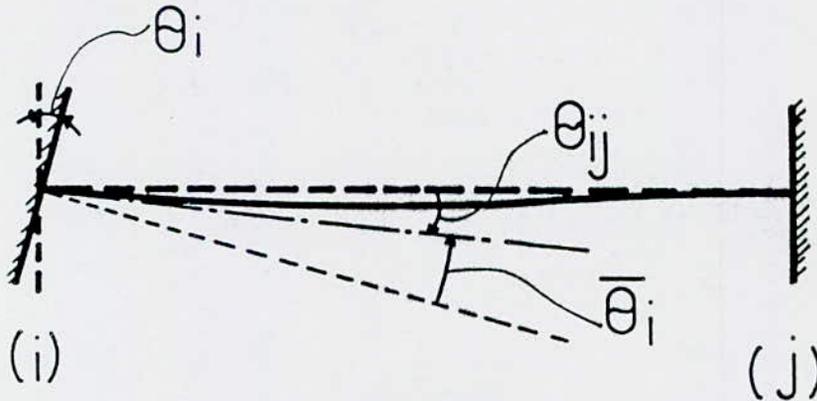


Fig. III-2

Le moment à l'extrémité (i), \overline{M}_{ij} , vaudra dans ce cas : $\overline{M}_{ij} = \frac{4EI}{l} \theta_{ij}$

or, d'après la relation (I-3), (§ I.3.a), on a : $\frac{\theta_{ij}}{\theta_i} = \eta_{ij}$

d'où : $\overline{M}_{ij} = \frac{4EI}{l} \theta_i \cdot \eta_{ij}$

comme $\frac{4EI}{l} \theta_i = M_{ij}$, il vient finalement :

$$\boxed{\overline{M}_{ij} = \eta_{ij} M_{ij}} \quad (\text{III} - 1)$$

Cette relation entre le moment d'encastrement réel \overline{M}_{ij} et le moment d'encastrement parfait M_{ij} peut se retrouver en imaginant le modèle suivant : le noeud imparfait (i) est représenté par une travée supplémentaire, de rigidité bien déterminée.

Considérons la figure III-3, représentant une poutre simplement appuyée en (i) et (k), et parfaitement encastree en (j).

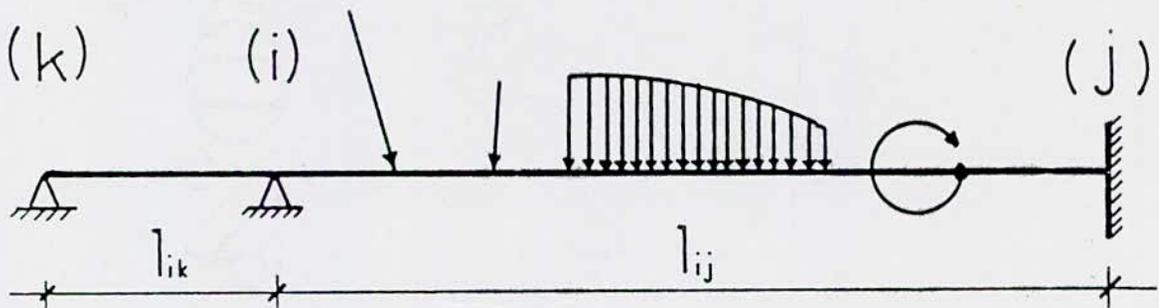


Fig. III-3

Evaluons le moment \overline{M}_{ij} par la méthode Cross, en prenant comme coefficient de répartition :

$$r_{ij} = 1 - r_{ik}$$

$$r_{ik} = r_{ij}$$

Remarque : puisque la somme des coefficients de répartition à un noeud doit être toujours égale à l'unité, il est toujours possible de choisir la travée (k - i) de façon à avoir :

$$r_{ij} = 1 - r_{ik} \quad \text{et} \quad r_{ik} = r_{ij} .$$

En effet, si on appelle R_{ik} et R_{ij} les rigidités flexionnelles des travées (i - k) et (i - j), et l_{ik} et l_{ij} leurs portées respectives, il est possible d'écrire :

$$R_{ik} = \frac{3EI_{ik}}{l_{ik}} \quad \text{et} \quad R_{ij} = \frac{3EI_{ij}}{l_{ij}}$$

Si on suppose : $I_{ik} = I_{ij} = I$

il vient :

$$R_{ik} = \frac{3EI}{l_{ik}} \quad \text{et} \quad R_{ij} = \frac{3EI}{l_{ij}}$$

d'où :

$$r_{ik} = \frac{R_{ik}}{R_{ik} + R_{ij}} = \frac{l_{ij}}{l_{ij} + l_{ik}}$$

et :

$$r_{ij} = \frac{R_{ij}}{R_{ij} + R_{ik}} = \frac{l_{ik}}{l_{ik} + l_{ij}}$$

on en déduit finalement :

$$l_{ik} = l_{ij} \left(\frac{1}{r_{ij}} - 1 \right)$$

Ceci montre qu'il est toujours possible de trouver une travée (i - k) de manière à obtenir le modèle d'appui à liaison imparfaite.

Si on revient au calcul de $\overline{M_{ij}}$ par la méthode Cross, l'application du procédé sur la structure donne le moment sur l'appui (i) (Fig. III-4)

On obtient, entre $\overline{M_{ij}}$ et M_{ij} , la relation (III - 1)

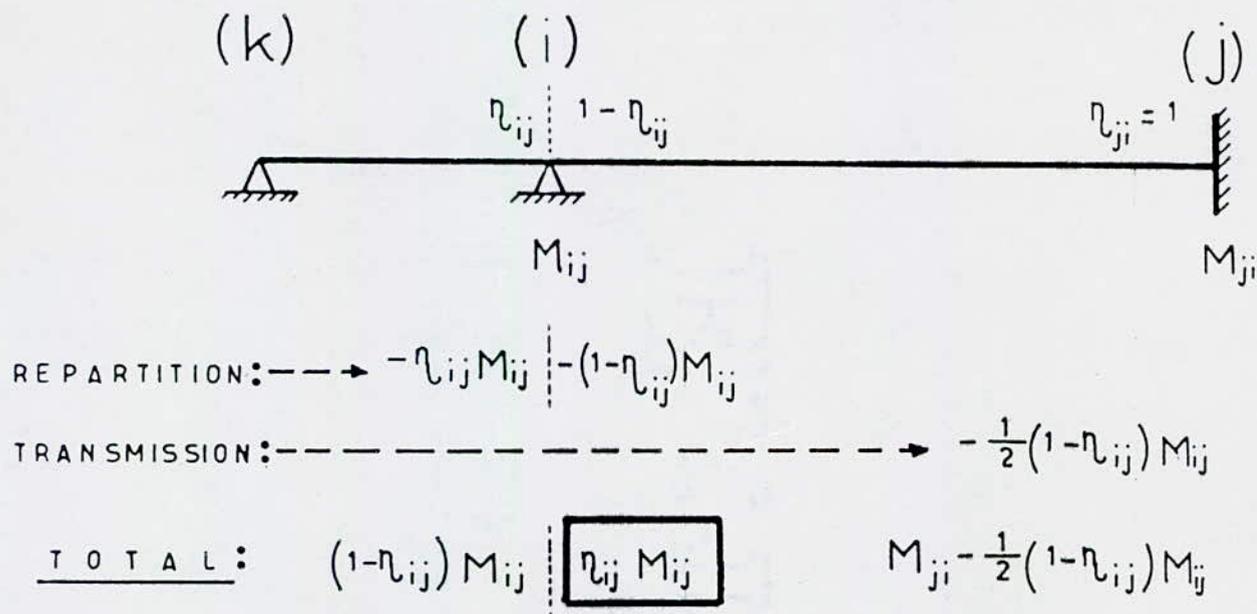


Fig. III-4

Le modèle proposé est donc convenable.

III.3.d Application du modèle à une poutre imparfaitement liée à ses deux extrémités (i) et (j)

Cette fois, évaluons les moments fléchissants qui apparaissent lorsque la barre est à liaisons imparfaites en (i) et (j) (Fig. III.5)

Le modèle est, dans ce cas, représenté à la figure III-6

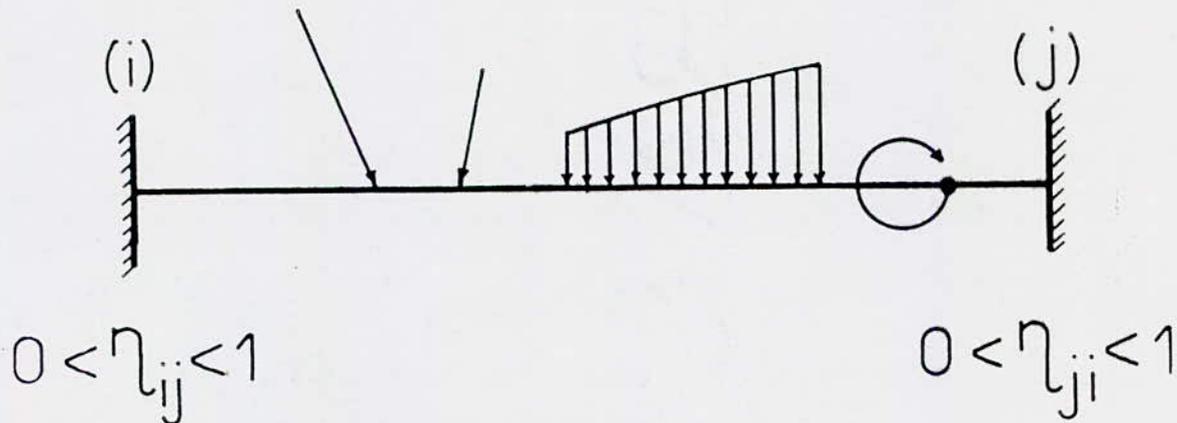


Fig. III-5

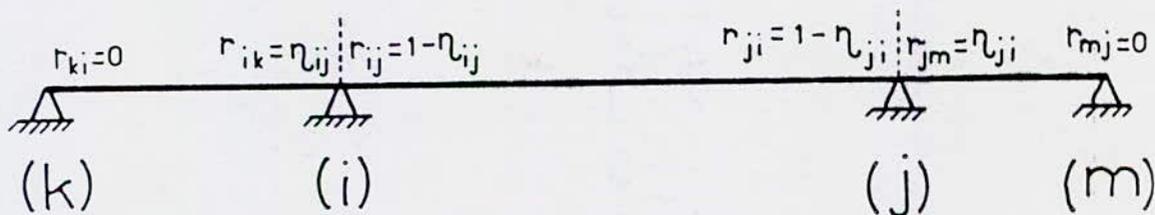


Fig. III-6

Pour les commodités du calcul, les notations adoptées seront simplifiées de la manière suivante :

coefficients de transmission :

$$t_{ij} = t_{ji} = \frac{1}{2} = t$$

$$\text{Coefficients de répartition : } \begin{cases} r_{ij} = a \\ r_{ji} = c \\ r_{ik} = b \\ r_{jm} = d \end{cases}$$

Moments d'encastrement parfait : M_{ij} et M_{ji} .

Il sera effectué neuf itérations. Cela sera suffisant pour dégager les valeurs des moments réels.

\triangle (k)	M_{ij} \triangle (i)	M_{ji} \triangle (j)	\triangle (m)
	-b M _{ij} a M _{ij}	-c M _{ji} -d M _{ji}	
	+c M _{ji}	-t a M _{ij}	
	+b c M _{ji} +a c M _{ji}	+a c M _{ij} +a d M _{ij}	
	+ ² a c M _{ij}	+ ² a c M _{ji}	
	- + ² a b c M _{ij} + ² a ² c ² M _{ij}	- + ² a c ² M _{ji} - + ² a c d M _{ji}	
	+ ³ a c ² M _{ji}	- + ³ a ² c M _{ij}	
	+ ³ a b c ² M _{ji} + ³ a c ² M _{ji}	+ ³ a c ² M _{ij} + ³ a ² c d M _{ji}	
	+ ⁴ a ² c ² M _{ij}	+ ⁴ a ² c ² M _{ji}	
	- + ⁴ a ² b c ² M _{ij} - + ⁴ a ³ c ² M _{ij}	- + ⁴ a ² c ³ M _{ji} - + ⁴ a ² c ² d M _{ji}	
	- + ⁵ a ² c ³ M _{ji}	- + ⁵ a ³ c ² M _{ij}	
	+ ⁵ a ² b c ³ M _{ji} + ⁵ a ³ c ³ M _{ji}	+ ⁵ a ³ c ³ M _{ij} + ⁵ a ³ c ² d M _{ji}	
	+ ⁶ a ³ c ³ M _{ij}	+ ⁶ a ³ c ³ M _{ji}	
	- + ⁶ a ³ b c ³ M _{ij} - + ⁶ a ⁴ c ³ M _{ij}	- + ⁶ a ³ c ⁴ M _{ji} - + ⁶ a ³ c ³ d M _{ji}	
	- + ⁷ a ³ c ⁴ M _{ji}	- + ⁷ a ⁴ c ³ M _{ij}	
	+ ⁷ a ³ b c ⁴ M _{ji} + ⁷ a ⁴ c ⁴ M _{ji}	+ ⁷ a ⁴ c ⁴ M _{ij} + ⁷ a ⁴ c ³ d M _{ji}	
	+ ⁸ a ⁴ c ⁴ M _{ij}	+ ⁸ a ⁴ c ⁴ M _{ji}	
	- + ⁸ a ⁴ b c ⁴ M _{ij} - + ⁸ a ⁵ c ⁴ M _{ij}	- + ⁸ a ⁴ c ⁵ M _{ji} - + ⁸ a ⁴ c ⁵ d M _{ji}	
	-----	-----	

Il est possible, avec les valeurs précédentes, de calculer les moments qui apparaissent aux encastrements imparfaits (i) et (j), en effectuant respectivement la somme à droite du noeud (i) et à gauche du noeud (j).

Ces moments seront alors les moments d'encastrement élastique.

Ils seront notés \overline{M}_{ij} et \overline{M}_{ji} .

Le calcul donne, après factorisation :

$$\begin{aligned} \overline{M}_{ij} &= (1-a) \left[\overline{M}_{ij} - ct \overline{M}_{ji} \right] \left[1 + t^2 ac + t^4 a^2 c^2 + t^6 a^3 c^3 + t^8 a^4 c^4 + \dots + t^{2n} a^n c^n \right] \\ &= (1-a) \left[\overline{M}_{ij} - ct \overline{M}_{ji} \right] \cdot S \end{aligned}$$

Il apparaît alors que $S = 1 + t^2 ac + t^4 a^2 c^2 + \dots + t^{2n} a^n c^n$ représente la somme des "n" premiers termes d'une progression géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = t^2 ac$

d'où :

$$S = 1 \cdot \frac{1 - (t^2 ac)^n}{1 - t^2 ac}$$

Lorsque le nombre d'itérations de calcul devient très grand, la puissance "n" le devient aussi, et il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (t^2 ac)^n = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} t^2 = 1/4 < 1 \\ a = 1 - \nu_{ij} < 1 \\ c = 1 - \nu_{ji} < 1 \end{cases}$$

Le produit $t^2 ac$ est donc inférieur à l'unité et la somme de la progression devient :

$$S = \frac{1}{1 - t^2 ac}$$

En remplaçant δ , C et C par leurs valeurs dans l'expression de \overline{M}_{ij} ,

on obtient finalement :

$$\overline{M}_{ij} = \frac{2 r_{ij}}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} \cdot r_{ji}} \cdot [2 M_{ij} - (1 - r_{ji}) M_{ji}]$$

Un calcul analogue pour \overline{M}_{ji} donne :

$$\overline{M}_{ji} = \frac{2 r_{ji}}{3 + r_{ji} + r_{ij} - r_{ji} \cdot r_{ij}} \cdot [2 M_{ji} - (1 - r_{ij}) M_{ij}]$$

Ce sont les moments d'encastrement élastique pour la barre (i - j) en fonction des moments d'encastrement parfait et des degrés de jonction.

Nota : les conditions extrêmes sont vérifiées.

En effet :

Si $r_{ij} = r_{ji} = 0 \Rightarrow \overline{M}_{ij} = \overline{M}_{ji} = 0$: poutre simplement appuyée

Si $r_{ij} = r_{ji} = 1 \Rightarrow \overline{M}_{ij} = M_{ij}$ et $\overline{M}_{ji} = M_{ji}$: poutre parfaitement encastree.

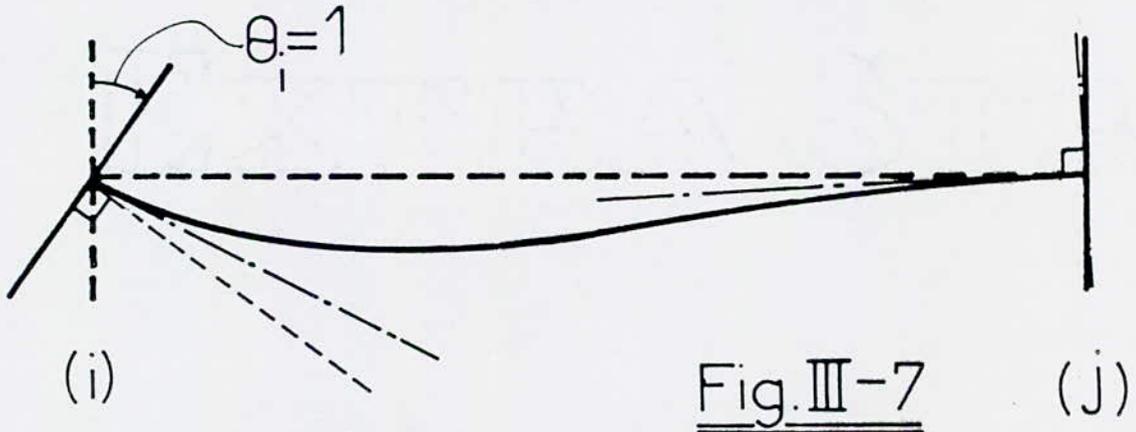
III.3.e Rigidité de la barre à la rotation

Considérons, à présent, que les moments d'encastrement parfait M_{ij} et M_{ji} ne sont plus dus à un chargement extérieur en travée (i - j), mais à une rotation unitaire du noeud (i) : $\theta_i = 1$ (Fig. III-7)

Dans ce cas, M_{ij} représentera la rigidité flexionnelle de la barre supposée parfaitement encadrée en (i) et (j). Mais \overline{M}_{ij} sera la rigidité flexionnelle réelle de la barre, à liaisons imparfaites en (i) et (j).

D'où :

$$M_{ij} = \frac{4EI}{l_{ij}} \cdot \theta_i = \frac{4EI}{l_{ij}} \quad \text{et} \quad M_{ji} = \frac{2EI}{l_{ji}} \theta_i = \frac{2EI}{l_{ji}}$$



En injectant ces valeurs de M_{ij} et M_{ji} dans l'expression donnant \overline{M}_{ij} , il vient : $\overline{M}_{ij} = \overline{R}_{ij}$ (rigidité flexionnelle réelle de la barre (i - j)).

D'où :

$$\overline{R}_{ij} = \frac{2 r_{ij}}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} r_{ji}} \left[2 \cdot \frac{4EI}{l_{ij}} - (1 - r_{ji}) \frac{2EI}{l_{ji}} \right]$$

Ce qui donne, tous calculs faits : (avec $l_{ij} = l_{ji} = l$)

$$\overline{R}_{ij} = \frac{4EI}{l} \cdot \left[\frac{r_{ij}(3 + r_{ji})}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} r_{ji}} \right]$$

Un raisonnement analogue pour le noeud (j) (rotation unitaire θ_j) fait aboutir à :

$$\overline{R}_{ji} = \frac{4EI}{l} \cdot \left[\frac{r_{ji}(3 + r_{ij})}{3 + r_{ji} + r_{ij} - r_{ji} r_{ij}} \right]$$

III.3.f Transmission des moments d'extrémité

En revenant à la rotation unitaire du noeud (i), le moment transmis réellement au noeud (j) sera $\overline{M_{ji}}$, soit, pour $M_{ij} = \frac{4EI}{l}$ et $M_{ji} = \frac{2EI}{l}$:

$$\overline{M_{ji}} = \frac{4EI}{l} \cdot \left[\frac{2 \cdot r_{ji} \cdot r_{ij}}{3 + r_{ji} + r_{ij} - r_{ji} \cdot r_{ij}} \right]$$

Il est rappelé, en outre, que :

$$\overline{M_{ij}} = \frac{4EI}{l} \cdot \left[\frac{r_{ij} (3 + r_{ji})}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} \cdot r_{ji}} \right]$$

Par définition, le coefficient de transmission $\overline{r_{ij}}$ vaut :

$$\overline{r_{ij}} = \frac{\overline{M_{ji}}}{\overline{M_{ij}}}$$

ce qui donne, en remplaçant $\overline{M_{ij}}$ et $\overline{M_{ji}}$ par leurs expressions en fonction de E, I, l, r_{ij} , r_{ji} :

$$\overline{r_{ij}} = \frac{2 r_{ji}}{3 + r_{ji}}$$

Nota : il est possible de vérifier que si $r_{ij} = r_{ji} = 1$, il vient :

$$\overline{r_{ij}} = \frac{1}{2}$$

III.3. g Commentaires sur la méthode

La méthode qui vient d'être développée est une généralisation du procédé Cross.

Son utilisation présente l'avantage de tenir compte du comportement réel de la structure sans bouleverser l'organigramme du processus classique.

En effet, les étapes à parcourir pour la méthode préconisée sont les mêmes que celles de la méthode Cross :

- (a) calcul des rigidités corrigées
- (b) calcul des coefficients de répartition corrigés
- (c) calcul des coefficients de transmission corrigés
- (d) calcul des moments d'encastrement corrigés

Le reste du calcul se fait alors de manière classique.

Mais tout cela ne peut se faire que si on peut connaître, à l'avance, les degrés de jonction de la barre aux noeuds.

La connaissance préalable des degrés de jonction fait alors apparaître l'utilité d'un catalogue des valeurs de η pour les différents types de noeuds rencontrés dans la pratique.

Un tel catalogue requerrait un volume important de recherches, de préférence expérimentales (telles qu'effectuées dans la présente étude), et permettrait de systématiser la méthode.

III.3.h Aspect sécurité et aspect économie

Les encastremets élastiques conduisent à une majoration du moment en travée et une minoration du moment sur appui, par rapport aux encastremets parfaits, dans la plupart des cas (§ III.3.j).

Il y a donc, dans le cas du dimensionnement en travée, une réduction du coefficient de sécurité relatif à la poutre.

En effet, le coefficient de sécurité s'écrit : $\gamma = \frac{R}{S}$

où R représente la résistance ou la capacité portante de l'ouvrage et S la charge appliquée, en supposant un mécanisme de ruine fonctionnelle ou de rupture.

Donc, dans le cas de la travée de la poutre imparfaitement assemblée, il y a augmentation de S, d'où diminution de γ .

Par contre, pour l'assemblage, c'est l'inverse qui se produit : diminution de S, donc augmentation du coefficient de sécurité.

En récapitulatif, on peut dire que calculer une structure sans tenir compte des déplacements relatifs locaux, dûs aux imperfections des liaisons, revient à surdimensionner l'assemblage et à sous-dimensionner la poutre.

Du point de vue économique, le surdimensionnement de l'assemblage ne constitue pas une dépense supplémentaire excessive.

Mais, du point de vue sécurité, il est inadmissible d'admettre une diminution de cette dernière pour les pièces constituant la structure.

Pour cette dernière raison, il semblerait utile, pour une meilleure tenue des constructions, de tenir compte des déplacements relatifs locaux au niveau des liaisons.

Une manière d'en tenir compte serait de mettre au point une technique permettant de situer un assemblage quelconque à mi-chemin entre l'articulation parfaite et l'encastrement parfait.

Une de ces techniques consiste en la mesure du degré de jonction.

III .3.i Exemple de calcul d'une structure à liaisons imparfaites ; comparaison avec l'hypothèse idéalisée

En vue d'illustrer concrètement les développements précédents, un calcul comparatif a été effectué sur la structure métallique représentée à la figure III - 8.

Dans un premier temps, le calcul a été mené en considérant que toutes les liaisons sont du type rigide.

Dans un deuxième temps, des degrés de jonction légèrement inférieurs à l'unité ont été affectés aux liaisons poutres-poteaux.

Les valeurs retenues ont été les suivantes :

$$\eta_{BF} = \eta_{FB} = \eta_{FE} = \eta_{EF} = 0,85$$

$$\eta_{CD} = \eta_{DC} = 0,95$$

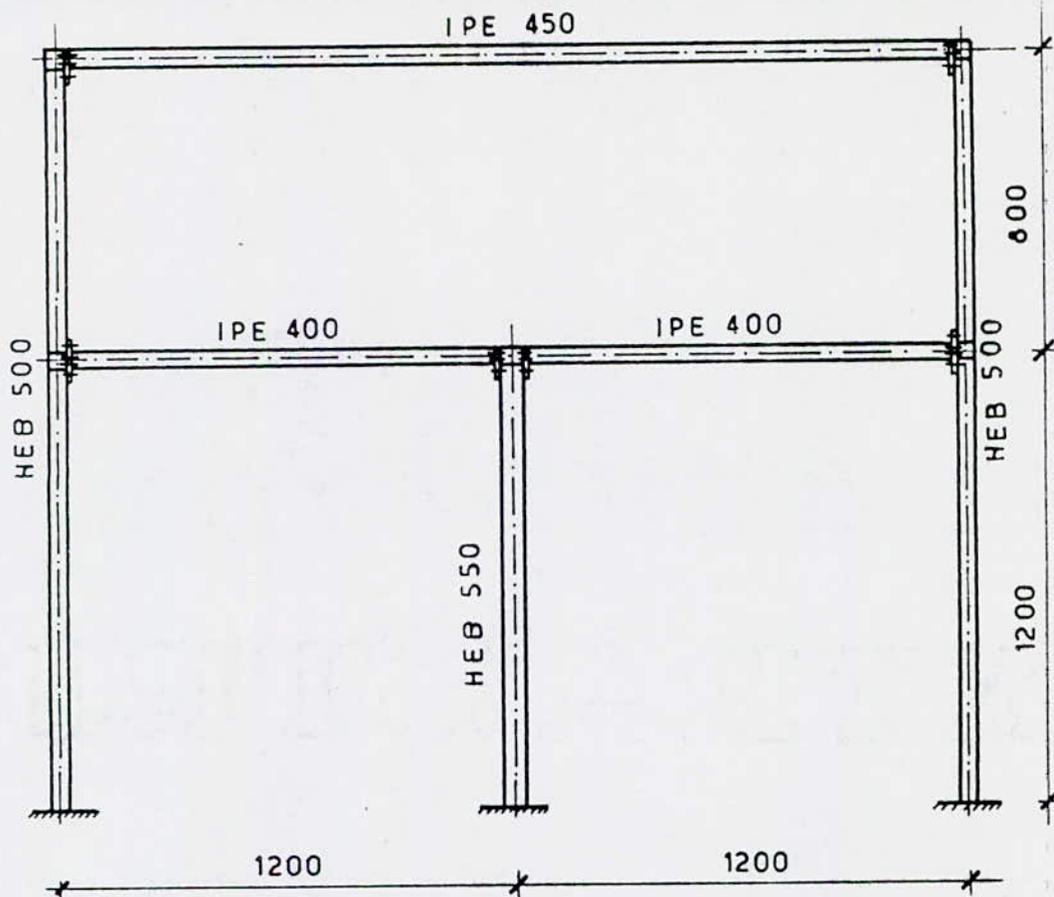
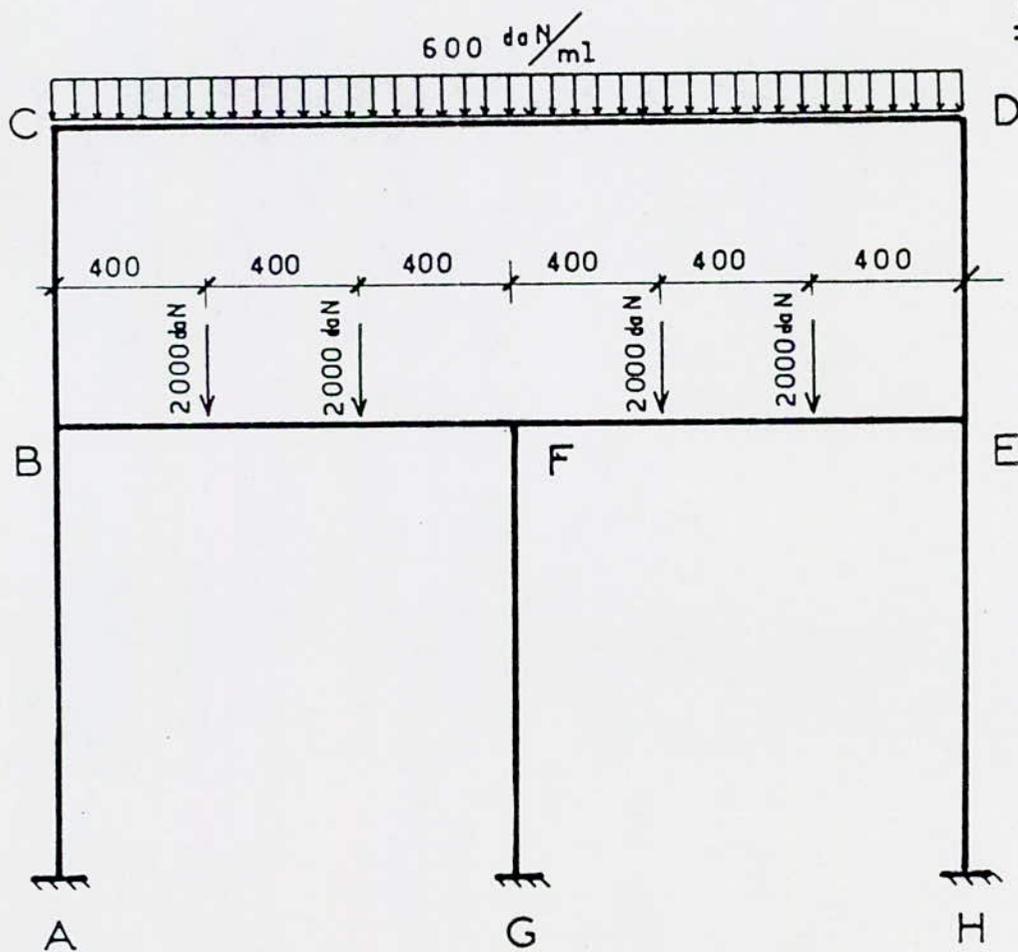


Fig. III-8

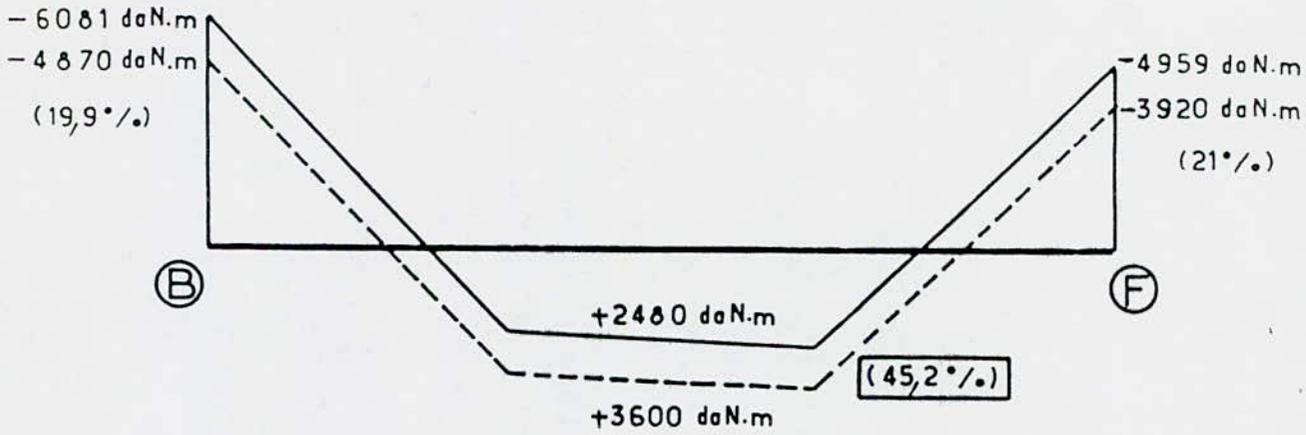


Les figures III - 9 et III - 10 présentent les diagrammes des moments fléchissants obtenus dans les poutres selon les deux hypothèses.

Le tableau III-1 donne les valeurs des moments fléchissants en bouts de poutres et en travées de ces dernières, selon les deux hypothèses, ainsi que les pourcentages de variation relative.

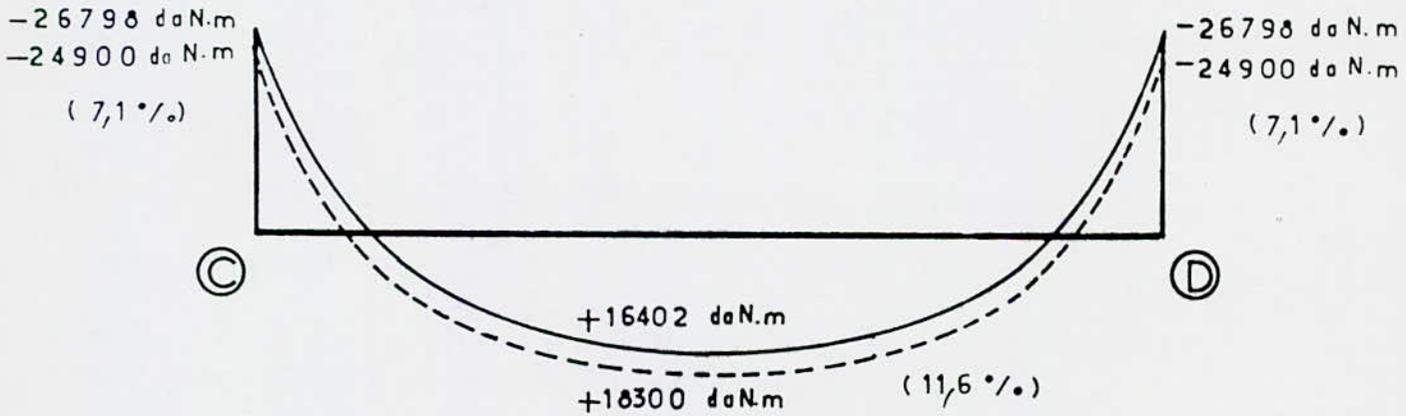
Comparaison des valeurs des moments

		Liaisons idéalisées (M ₁) (daNm)	Liaisons imparfaites (M ₂) (daNm)	$\frac{ M_1 - M_2 }{ M_1 } \times 100$ (%)
Bouts de barres	AB	+ 1 730	+ 1 790	3,5
	BA	+ 3 460	+ 3 580	3,5
	BF	+ 6 081	+ 4 870	19,9
	BC	- 9 541	- 8 450	11,4
	CB	- 26 798	- 24 900	7,1
	CD	+ 26 798	+ 24 900	7,1
	DC	- 26 798	- 24 900	7,1
	DE	+ 26 798	+ 24 900	7,1
	ED	+ 9 541	+ 8 450	11,4
	EF	- 6 081	- 4 870	19,9
	EH	- 3 460	- 3 580	3,5
	FB	- 4 959	- 3 920	21
	FG	0	0	0
	FE	+ 4 959	+ 3 920	21
	GF	0	0	0
HE	- 1 730	1 730	3,5	
Travées	BF	+ 2 480	+ 3 600	45,2
	FE	+ 2 480	+ 3 600	45,2
	CD	+ 16 402	+ 18 300	11,6



—— HYPOTHESE IDEALISEE.
 - - - HYPOTHESE DES LIAISONS IMPARFAITES.

Fig. III-9



—— HYPOTHESE IDEALISEE.
 - - - HYPOTHESE DES LIAISONS IMPARFAITES.

Fig. III-10

Les résultats montrent que, même pour des degrés de jonction très proches de l'unité, (0,85 et 0,95), les écarts entre les moments fléchissants accusent des valeurs importantes (jusqu'à 45 % pour l'exemple présenté).

Ceci démontre l'opportunité de tenir compte des déplacements relatifs locaux aux noeuds pour l'évaluation des sollicitations dans les structures.

Chapitre IV : CONCLUSIONS

La puissance croissante des moyens de calcul et les innovations, tant théoriques qu'expérimentales, ont permis aujourd'hui à l'Ingénieur de passer des Règles de l'Art, à des méthodes de calcul qui offrent la possibilité de pousser l'analyse dans des détails considérés jusqu'alors comme négligeables.

A ce titre, l'étude effectuée ici s'inscrit dans le cadre d'une meilleure connaissance du comportement des structures, et d'une meilleure appréciation de la sécurité dans la conception des ouvrages.

Cette étude se penche sur le comportement des noeuds de structures métalliques et l'influence de leur déformabilité sur l'état de sollicitations dans les structures.

La déformabilité des noeuds a été étudiée par plusieurs chercheurs sans vraiment aboutir à une théorie générale explicitant la loi physique sollicitation-déformation qui exprime le comportement.

La difficulté réside dans le fait que les détails constructifs (épaisseurs de platines, écartement des boulons, disposition des raidisseurs, etc...) sont très variables, d'une part, et, d'autre part, le rapprochement des éléments constituant la liaison exclue l'application des méthodes simplifiées.

Dans cette optique, la nécessité d'une recherche sur la déformabilité des noeuds pour les solutions constructives couramment rencontrées dans la pratique, et non-encore étudiées, est d'une grande actualité.

En tenant compte des difficultés pré-citées, l'étude effectuée ici a été essentiellement expérimentale.

Néanmoins, cette étude expérimentale a été étroitement liée avec des concepts théoriques qui ont permis, dans la deuxième partie, de développer un processus de calcul.

La notion de "degré de jonction" a permis de concevoir un dispositif simple avec lequel il a été obtenu des résultats expérimentaux dont la fiabilité a été confirmée par un traitement statistique.

Ces résultats ont permis d'étudier l'influence des différents paramètres sur la déformabilité du type de noeud considéré.

Les graphes expérimentaux présentés dans le chapitre deux ont suggéré l'établissement d'une loi empirique entre le degré de jonction en flexion, et la portée de la poutre.

Les résultats démontrent que les noeuds des structures métalliques sont déformables. Ces déformations sont suffisamment importantes pour justifier la nécessité de les introduire dans le calcul des sollicitations.

La deuxième partie de la recherche propose un procédé d'analyse.

L'étude de la littérature existante a permis de remarquer que la plupart des recherches effectuées ont été consacrées au calcul automatique. En principe, il s'agit de différentes méthodes d'exprimer la matrice de rigidité d'une barre à liaisons imparfaites.

Le procédé développé ici est du type manuel. C'est une extension de la méthode Hardy-Cross, pour les structures à noeuds déformables.

Le support de ce procédé est la notion de "degré de jonction" en flexion, facteur adimensionnel qui corrige les paramètres de calcul.

Les principales contributions de cette recherche peuvent s'énumérer de la manière suivante :

- (a) formulation d'une hypothèse concernant le comportement des noeuds de structures ;
- (b) proposition d'une définition : "le degré de jonction", permettant d'apprécier la déformabilité d'une liaison ;
- (c) mise au point d'un modèle expérimental permettant de mesurer, d'une manière simple, le degré de jonction ;
- (d) réalisation d'un programme d'essais, visant à observer l'influence des différents éléments sur la déformabilité d'un type de liaison, utilisé en construction métallique ;
- (e) élaboration d'une technique de calcul permettant la prise en compte du caractère imparfait des liaisons dans la détermination des efforts .

Cette recherche aura permis de prouver que l'idéalisation des liaisons encastrees peut s'éloigner, de beaucoup, de la réalité, et que l'appréciation de la sécurité s'en trouve affectée.

La notion de degré de jonction a été développée, dans cette étude, pour les sollicitations de flexion.

Il y a lieu de souligner que cette définition peut être étendue aux autres types de sollicitations (effort normal, effort tranchant, moment de torsion), les déplacements relatifs locaux pouvant être considérés selon tous les degrés de liberté de la barre. Du point de vue théorique, l'étude effectuée ici peut donc être généralisée.

Du point de vue expérimental, les essais qui ont été effectués ici ont porté sur un seul type d'assemblage, en faisant varier les paramètres dans un domaine limité.

Ce champ peut être élargi dans une très large mesure en effectuant des essais sur d'autres types d'assemblages, en faisant varier plus de paramètres, et dans un domaine plus vaste.

À terme, ces travaux, volumineux certes, pourraient servir à établir des catalogues de valeurs, par types de liaisons couramment utilisées dans la pratique, en fonction des différents paramètres influençant la déformabilité.

A N N E X E (A)

NOTE DE CALCUL DES MODELES EXPERIMENTAUX

A.1 Justification de la poutre IPE 200

En considérant la figure II-1 (§ II.3.b), on peut remarquer que le moment fléchissant maximal dans la poutre aura lieu à la section située au droit de l'assemblage et vaudra, avec les notations de la figure :

$$M = \frac{P}{2} l$$

La plus grande valeur de l étant $l_{\max} = 4$ mètres, on en déduit le plus grand moment fléchissant susceptible de solliciter la poutre. :

$$M_{\max} = \frac{P}{2} l_{\max}$$

En appelant W_x le module d'inertie de la poutre, (§ II.3.c), on obtient la contrainte normale maximale dans la poutre en écrivant :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}$$

d'où :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{2} l_{\max} \frac{1}{W_x}$$

La condition de résistance élastique s'écrira :

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{en}$$

où σ_{en} représente la limite d'élasticité du métal utilisé.

Cette condition donne :

$$P \leq \frac{2 W_x \overline{\sigma}_{en}}{l_{max}}$$

$W_x = 194 \text{ cm}^3$ (poutre IPE 200)

avec $l_{max} = 4 \text{ m}$

$\overline{\sigma}_{en} = 2\,400 \text{ daN/cm}^2$ (acier Fe E 24)

On obtient :

$$P \leq 2\,328 \text{ daN}$$

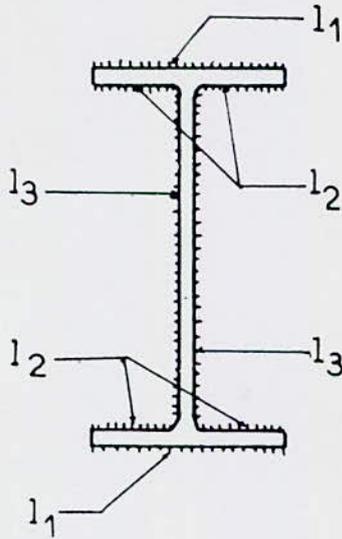
C'est la condition de résistance élastique de la poutre.

A.2. Justification de la soudure

C'est une soudure frontale de poutre en I doublement symétrique, sollicitée par un moment fléchissant par rapport à son axe de plus grande inertie et à un effort tranchant dans le plan de l'âme. Les hypothèses de calcul sont les suivantes :

- les cordons d'âme sont calculés pour équilibrer l'effort tranchant ;
- les cordons de semelles sont calculés pour équilibrer le moment fléchissant.

Les notations utilisées pour le calcul sont les suivantes :



h = hauteur du profilé

e = épaisseur des semelles

l_1 = longueur utile des cordons de semelles extérieurs

l_2 = longueur utile des cordons de semelles intérieurs

l_3 = longueur utile des cordons d'âme

a = épaisseur utile des cordons.

Fig. A-1

Cordons de semelles

La contrainte maximale sur les cordons extérieurs vaudra :

$$\tilde{\sigma}_{\max} = \frac{M_{\max} h}{I_c \cdot 2}$$

où I_c représente le moment d'inertie des cordons des semelles.

Dans ces conditions, on aura :

$$I_c = l_1 a \frac{h^2}{2} + l_2 a (h - 2e)^2$$

d'où :

$$\tilde{\sigma}_{\max} = \frac{M_{\max} \cdot h}{l_1 a h^2 + 2 l_2 a (h - 2e)^2}$$

L'application numérique au modèle donne : $P \leq 72842 \text{ dN}$

$$P \leq \frac{4 \sigma_{en} l_{30k} \sqrt{1,8}}{2 l_{30k}}$$

d'où :

$$\sigma_{en} \leq \frac{\sqrt{1,8} \cdot T_{max}}{2 l_{30k}}$$

par :

La condition de résistance élastique des cordons d'âme se formule

$$T_{max} = \frac{P}{2}$$

avec les notations de la figure II-1 (§ II.3.b) :

donc et est rasante. Elle est due uniquement à l'effort tranchant qui s'écrit

Dans ce cas, la contrainte est uniformément distribuée sur les cordons d'âme

Cordons d'âme

$$P \leq 2287 \text{ dN}$$

L'application numérique au modèle donne :

$$P \leq \frac{l_{max} \cdot h}{2 \sigma_{en} [l_{0k} h^2 + 2 l_{20k} (h - 2e)^2]}$$

Cette condition devient, en remarquant que $M_{max} = \frac{P}{2} l_{max}$:

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{en}$$

La condition de résistance élastique des cordons de semelles s'écrit

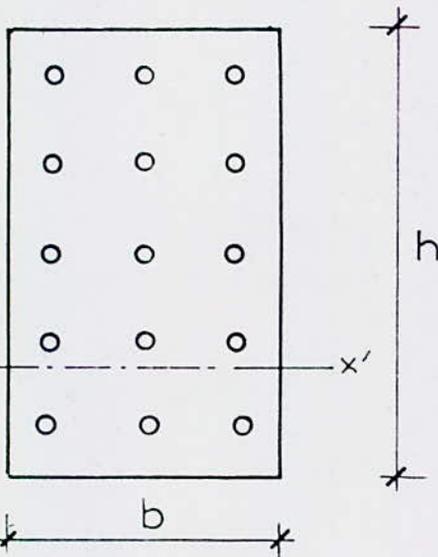
Les cordons qui imposent la condition de résistance élastique seront donc les cordons de semelles, et on aura, pour la soudure :

$$P \leq 2287 \text{ daN}$$

A.3 Justification du boulonnage

Il a été adopté, pour le calcul des boulons, le modèle de répartition linéaire des forces élastiques.

Soit la platine, représentée ci-dessous en figure A-2, de hauteur h et de largeur b .



soit n = nombre de files verticales de
boulons (sur la fig. $n = 3$)

soit m = nombre de files horizontales de
boulons (sur la fig. $m = 4$).

Fig. A-2

Pour un moment fléchissant, par rapport à un axe parallèle à l'axe $x' - x'$, la file tendue à l'effort maximal sera la file supérieure si le moment est négatif, ou la file inférieure si le moment est positif.

Comme on a affaire à des platines d'appui, le moment sera essentiellement négatif et les boulons les plus sollicités seront les boulons supérieurs.

Le modèle de calcul choisi répartit linéairement, par file de boulons, les forces élastiques créées dans chaque boulon. La condition d'équilibre stipule que le moment de toutes les forces élastiques par rapport à l'axe neutre est égal au moment sollicitant. (fig. A-3).

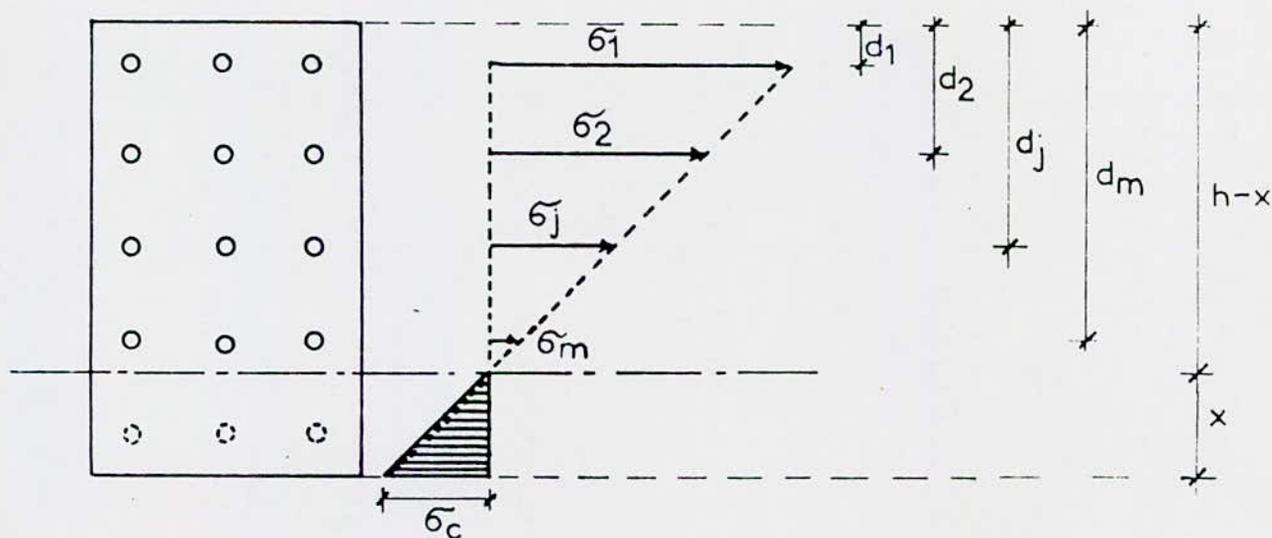


Fig. A-3

Il est à noter que ce modèle de calcul est utilisé dans les méthodes élastiques de dimensionnement des sections de béton armé (notion de section homogène réduite).

Soit "x" la distance de la fibre inférieure à l'axe neutre et soit d_1, d_2, \dots, d_m les distances des files horizontales 1, 2, ..., m à la fibre supérieure de la platine (fig. A-3).

En appelant $\widetilde{\sigma}_c$ la contrainte de compression maximale, au bas de la platine, on peut écrire, par l'homothétie des triangles semblables :

$$\frac{\widetilde{\sigma}_c}{x} = \frac{\widetilde{\sigma}_1}{h-x-d_1} \quad (A - 1)$$

d'où

$$\widetilde{\sigma}_c = \frac{\widetilde{\sigma}_1 \cdot x}{h-x-d_1} \quad (A - 2)$$

L'équilibre de translation de la section s'écrit, d'autre part :

$$F_c = \sum_{j=1}^m F_j \quad (A - 3)$$

où F_c = résultante des contraintes de compression sur la partie comprimée de la platine :

F_j = résultante des efforts de traction dans la file horizontale j de boulons.

De plus, si on appelle $\widetilde{\sigma}_j$ la contrainte élémentaire sur la file horizontale j de boulons, on a, par homothétie des triangles semblables :

$$\widetilde{\sigma}_j = \widetilde{\sigma}_1 \cdot \frac{h-x-d_j}{h-x-d_1}$$

or : $F_j = n \cdot A \cdot \widetilde{\sigma}_j$

avec : A = section d'un boulon.

$$\begin{aligned}
 \text{d'où : } \sum_{j=1}^m F_j &= n.A. \sum_{j=1}^m \sigma_j = n.A. (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_m) \\
 &= n.A. \sigma_1 \cdot \left[1 + \frac{h-x-d_2}{h-x-d_1} + \frac{h-x-d_3}{h-x-d_1} + \dots + \frac{h-x-d_m}{h-x-d_1} \right] \\
 &= \frac{n.A. \sigma_1}{h-x-d_1} \cdot \left[(h-x-d_1) + (h-x-d_2) + (h-x-d_3) + \dots + (h-x-d_m) \right]
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\sum_{j=1}^m F_j = \frac{n.A. \sigma_1}{h-x-d_1} \cdot \left[m(h-x) - \sum_{j=1}^m d_j \right] \quad (\text{A - 4})$$

De même, la résultante des forces de compression vaudra :

$$F_c = \sigma_c \cdot b \cdot \frac{x}{2} \quad (\text{A - 5})$$

En portant A-2 dans A-5, il vient :

$$F_c = b \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sigma_1 x}{h-x-d_1} \Rightarrow F_c = \frac{\sigma_1}{2(n-x-d_1)} b \cdot x^2 \quad (\text{A - 6})$$

En portant A-4 et A-6 dans A-3, on obtient :

$$\frac{\sigma_1}{2(h-x-d_1)} b \cdot x^2 = \frac{n.A. \sigma_1}{h-x-d_1} \cdot \left[m(h-x) - \sum_{j=1}^m d_j \right]$$

En simplifiant, la relation devient :

$$b \frac{x^2}{2} = n.A. \left[m(h-x) - \sum_{j=1}^m d_j \right]$$

En agencant par rapport aux puissances décroissantes de x , on obtient :

$$b \frac{x^2}{2} + m.n.A. x + n.A. \sum_{j=1}^m d_j - m.n.A.h = 0 \quad (A - 7)$$

La racine positive de l'équation A-7 donne la position de l'axe neutre.:

$$x = \frac{-m.n.A + \sqrt{(m.n.A)^2 - 4 \cdot \frac{b}{2} \cdot n.A. \left(-mh + \sum_{j=1}^m d_j \right)}}{b} \quad (A - 8)$$

Calcul de la contrainte dans le boulon supérieur

Il s'agit de la contrainte maximale σ_1 développée dans le boulonnage.

Soit M le moment extérieur sollicitant l'assemblage.

L'équilibre de rotation de la section s'écrit alors, avec les notations de figure A-3 :

$$M = F_1(h-x-d_1) + F_2(h-x-d_2) + \dots + F_m(h-x-d_m) + \sigma_c \cdot b \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{2x}{3}$$

d'où :

$$M = n.A. \left[\sigma_1(h-x-d_1) + \sigma_2(h-x-d_2) + \dots + \sigma_m(h-x-d_m) \right] + \sigma_c \frac{b \cdot x^2}{3}$$

or :

$$\sigma_j = \sigma_1 \frac{h-x-d_j}{h-x-d_1}$$

d'où :

$$M = n.A. \left[\sigma_1 \frac{(h-x-d_1)^2}{h-x-d_1} + \sigma_1 \frac{(h-x-d_2)^2}{h-x-d_1} + \dots + \sigma_1 \frac{(h-x-d_m)^2}{h-x-d_1} \right] + \sigma_c \frac{b \cdot x^2}{3}$$

En simplifiant, il vient :

$$M = \frac{n.A.\sigma_1}{h-x-d_1} \cdot \sum_{j=1}^m (h-x-d_j)^2 + \sigma_c \frac{b \cdot x^2}{3} \quad (A - 9)$$

or, d'après la relation A-2, on a :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_1 \cdot x}{h-x-d_1}$$

On en déduit :

$$M = \frac{n.A.\overline{\sigma}_1}{h-x-d_1} \sum_{j=1}^m (h-x-d_j)^2 + \frac{\overline{\sigma}_1}{h-x-d_1} \cdot \frac{b \cdot x^3}{3}$$

d'où :

$$M = \overline{\sigma}_1 \cdot \left[\frac{n.A. \sum_{j=1}^m (h-x-d_j)^2 + \frac{b \cdot x^3}{3}}{h-x-d_1} \right] \quad (A - 10)$$

On tire la contrainte cherchée :

$$\overline{\sigma}_1 = M \cdot \left[\frac{h-x-d_1}{n.A. \sum_{j=1}^m (h-x-d_j)^2 + \frac{b \cdot x^3}{3}} \right]$$

La condition de résistance élastique s'écrit :

$$1,25 \overline{\sigma}_1 \leq \overline{\sigma}_{en}$$

Avec $M_{\max} = \frac{P}{2} \cdot l_{\max}$, cette condition devient :

$$P \leq \frac{2 \cdot \left[n.A. \sum_{j=1}^m (h-x-d_j)^2 + \frac{b \cdot x^3}{3} \right] \cdot \overline{\sigma}_{en}}{1,25 \cdot (h-x-d_1) \cdot l_{\max}}$$

L'application numérique au modèle à 6 boulons $\varnothing 16$ (fig. A-4) donne :

$$P \leq 983 \text{ daN}$$

Pour le modèle à 10 boulons $\varnothing 16$, (fig. A-5), on obtient :

$$P \leq 1402 \text{ daN}$$

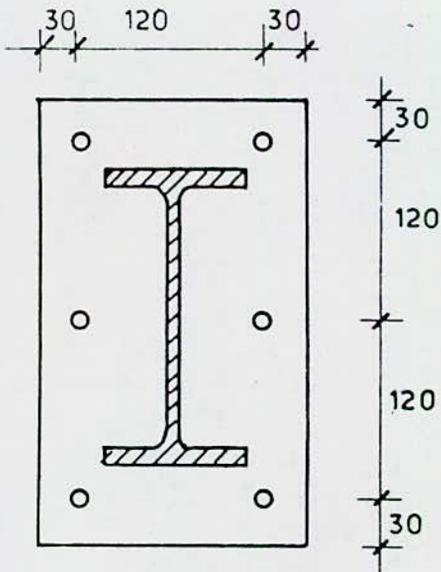


Fig. A-4

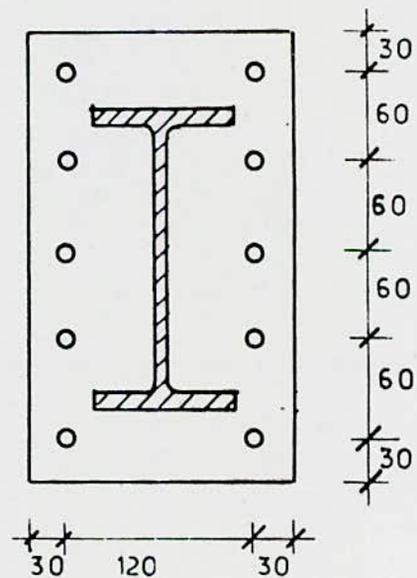


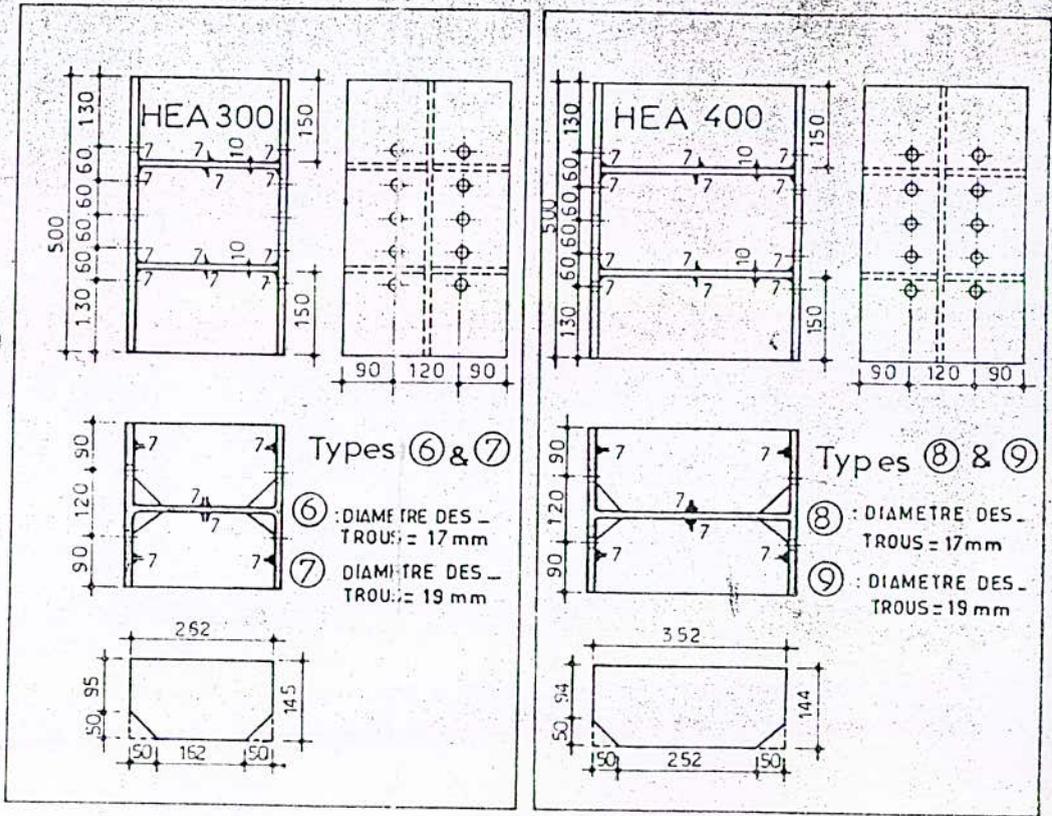
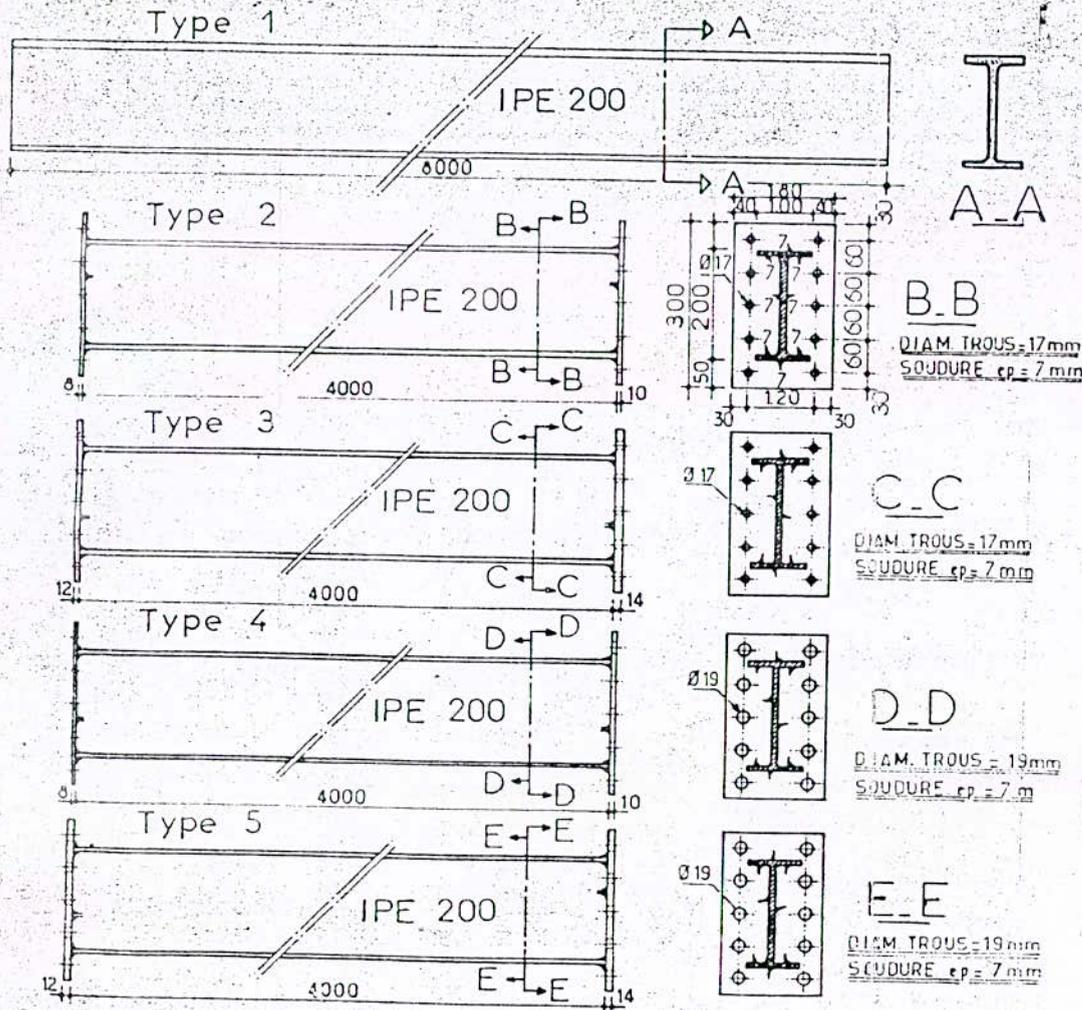
Fig. A-5

PROFILES

PROFLE	LONGUEUR (m)	NOMBRE	LONGUEUR TOTALE (m)	OBSERVATIONS
IPE 200	4,000	08	32,000	TYPES ②, ③, ④, ⑤
IPE 200	8,000	01	8,000	TYPE ①
HEA 300	0,500	02	1,000	TYPE ⑥ (trous Ø 17) ⑦ (trous Ø 19)
HEA 400	0,500	02	1,000	TYPE ⑧ (trous Ø 17) ⑨ (trous Ø 19)

RAIDISSEURS

DIMENSIONS (mm)	NOMBRE	OBSERVATIONS
262 x 145 x 10	08	TYPES ⑥ & ⑦
352 x 144 x 10	08	TYPES ⑧ & ⑨



PLATINES

DIMENSIONS (mm)	NOMBRE	OBSERVATIONS	DIMENSIONS (mm)	NOMBRE	OBSERVATIONS
300 x 160 x 6	04	TYPE ② : trous Ø 17 ④ : trous Ø 19	300 x 160 x 10	04	TYPE ② : trous Ø 17 ④ : trous Ø 19
300 x 160 x 12	04	TYPE ③ : trous Ø 17 ⑤ : trous Ø 19	300 x 160 x 14	04	TYPE ③ : trous Ø 17 ⑤ : trous Ø 19

Janvier 1983

Echelle: 1/10^e

Dessiné, par M.H. CHENAF.

E.N.P. Département Génie Civil

THESE DE MAGISTER

PLAN D'EXECUTION DES MODELES EXPERIMENTAUX

A N N E X E (B)

RESULTATS EXPERIMENTAUX

VALEURS DES DEGRES DE JONCTION

JUSTIFICATIONS DE LA RELATION ENTRE

\bar{K} ET η

Relation de calcul: $\Delta_0 = \frac{Ql^3}{48EI}$

Tableau T-1

Δ_0 : cm

Q (daN) \ l (m)	200	500	800	1000
1	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$4,08 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-3}$
1,5	$3,44 \cdot 10^{-3}$	$8,60 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$
2	$8,15 \cdot 10^{-3}$	$2,04 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-2}$	$4,08 \cdot 10^{-2}$
2,5	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$3,99 \cdot 10^{-2}$	$6,38 \cdot 10^{-2}$	$7,98 \cdot 10^{-2}$
3	$2,76 \cdot 10^{-2}$	$6,89 \cdot 10^{-2}$	$1,10 \cdot 10^{-1}$	$1,38 \cdot 10^{-1}$
3,5	$4,38 \cdot 10^{-2}$	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$1,75 \cdot 10^{-1}$	$2,19 \cdot 10^{-1}$
4	$6,54 \cdot 10^{-2}$	$1,63 \cdot 10^{-1}$	$2,61 \cdot 10^{-1}$	$3,27 \cdot 10^{-1}$
4,5	$9,31 \cdot 10^{-2}$	$2,33 \cdot 10^{-1}$	$3,72 \cdot 10^{-1}$	$4,65 \cdot 10^{-1}$
5	$1,28 \cdot 10^{-1}$	$3,19 \cdot 10^{-1}$	$5,11 \cdot 10^{-1}$	$6,38 \cdot 10^{-1}$
5,5	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$4,25 \cdot 10^{-1}$	$6,80 \cdot 10^{-1}$	$8,49 \cdot 10^{-1}$
6	$2,21 \cdot 10^{-1}$	$5,51 \cdot 10^{-1}$	$8,82 \cdot 10^{-1}$	1,10
6,5	$2,80 \cdot 10^{-1}$	$7,01 \cdot 10^{-1}$	1,12	1,40
7	$3,50 \cdot 10^{-1}$	$8,76 \cdot 10^{-1}$	1,40	1,75
7,5	$4,31 \cdot 10^{-1}$	1,08	1,72	2,15
8	$5,23 \cdot 10^{-1}$	1,31	2,09	2,61

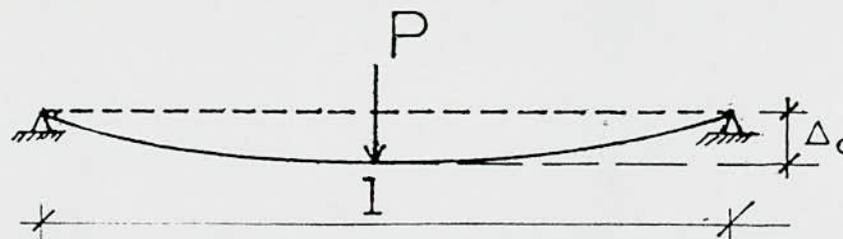


Tableau T-2

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$4,90 \cdot 10^{-3}$	$1,20 \cdot 10^{-2}$	$2,10 \cdot 10^{-2}$	$2,50 \cdot 10^{-2}$	0,21
0,75	$1,40 \cdot 10^{-2}$	$3,70 \cdot 10^{-2}$	$6,00 \cdot 10^{-2}$	$7,40 \cdot 10^{-2}$	0,23
1,00	$3,00 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$	$1,60 \cdot 10^{-1}$	0,26
1,25	$5,50 \cdot 10^{-2}$	$1,40 \cdot 10^{-1}$	$2,20 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	0,29
1,50	$8,60 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$4,50 \cdot 10^{-1}$	0,32
1,75	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	0,34
2,00	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$4,8 \cdot 10^{-1}$	$7,5 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-1}$	0,35
2,25	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,40	0,36
2,50	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$8,5 \cdot 10^{-1}$	1,40	1,60	0,38
2,75	$4,2 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,70	2,10	0,41
3,00	$5,2 \cdot 10^{-1}$	1,40	2,00	2,50	0,43
3,25	$6,3 \cdot 10^{-1}$	1,60	2,50	3,00	0,45
3,50	$7,5 \cdot 10^{-1}$	2,00	3,00	4,00	0,47
3,75	$9,00 \cdot 10^{-1}$	2,30	3,60	5,00	0,48
4,00	1,00.	2,80	4,40	5,30	0,48

Tableau T-3

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	0,25
0,75	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	0,27
1,00	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	0,30
1,25	$5 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	0,33
1,5	$7,7 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$3,8 \cdot 10^{-1}$	0,35
1,75	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	0,35
2,00	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$8,3 \cdot 10^{-1}$	0,39
2,25	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$	1,20	0,41
2,5	$3 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,20	1,60	0,42
2,75	$3,8 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-1}$	1,50	2,00	0,45
3,00	$4,5 \cdot 10^{-1}$	1,20	2,00	2,30	0,47
3,25	$6 \cdot 10^{-1}$	1,50	2,30	3,00	0,48
3,5	$7 \cdot 10^{-1}$	1,70	2,80	3,50	0,51
3,75	$8,2 \cdot 10^{-1}$	2,00	3,30	4,20	0,53
4,00	$9,5 \cdot 10^{-1}$	2,40	3,80	4,60	0,55

Variante C 1

Tableau T-4

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	0,30
0,75	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	0,31
1,00	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$1,25 \cdot 10^{-1}$	0,33
1,25	$4,3 \cdot 10^{-2}$	10^{-1}	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	0,37
1,5	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$3,75 \cdot 10^{-1}$	0,37
1,75	$1,10 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-1}$	0,39
2,00	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-1}$	$7,7 \cdot 10^{-1}$	0,42
2,25	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$5,4 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$	1,20	0,43
2,5	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-1}$	1,2	1,50	0,47
2,75	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$8,9 \cdot 10^{-1}$	1,45	1,90	0,48
3,00	$4,4 \cdot 10^{-1}$	1,20	1,80	2,20	0,50
3,25	$5,3 \cdot 10^{-1}$	1,30	2,10	2,65	0,53
3,5	$6,3 \cdot 10^{-1}$	1,56	2,50	3,10	0,56
3,75	$7,2 \cdot 10^{-1}$	1,80	2,90	3,50	0,60
4,00	$8,3 \cdot 10^{-1}$	2,10	3,30	4,10	0,63

Variante D 1

Tableau T-5

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,55 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	0,40
0,75	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	0,42
1,00	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-2}$	0,45
1,25	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	0,46
1,5	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	0,48
1,75	$8,8 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	0,50
2,00	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	0,50
2,25	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$	$8,9 \cdot 10^{-1}$	0,52
2,5	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-1}$	$9,6 \cdot 10^{-1}$	1,20	0,53
2,75	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$7,7 \cdot 10^{-1}$	1,24	1,54	0,55
3,00	$3,75 \cdot 10^{-1}$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	1,49	1,86	0,59
3,25	$4,6 \cdot 10^{-1}$	1,15	1,84	2,30	0,61
3,5	$5,4 \cdot 10^{-1}$	1,35	2,15	2,70	0,65
3,75	$6,40 \cdot 10^{-1}$	1,60	2,57	3,20	0,67
4,00	$7,5 \cdot 10^{-1}$	1,90	3,00	3,73	0,70

97

Variante A 2

Tableau T-6

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$4,6 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	0,22
0,75	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	0,23
1,00	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	0,26
1,25	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	0,30
1,5	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$4,3 \cdot 10^{-1}$	0,32
1,75	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	0,35
2,00	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$7,5 \cdot 10^{-1}$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	0,35
2,25	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,25	0,37
2,5	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$8,4 \cdot 10^{-1}$	1,34	1,68	0,38
2,75	$4 \cdot 10^{-1}$	1,01	1,62	2,02	0,42
3,00	$5 \cdot 10^{-1}$	1,25	2,00	2,50	0,44
3,25	$6,2 \cdot 10^{-1}$	1,56	2,49	3,11	0,45
3,5	$7,4 \cdot 10^{-1}$	1,86	3,00	3,72	0,47
3,75	$8,8 \cdot 10^{-1}$	2,20	3,51	4,40	0,49
4,00	$1,1 \cdot 10^{-1}$	2,67	4,27	5,33	0,49

88

Variante B 2

Tableau T-7

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$4,1 \cdot 10^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	0,25
0,75	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	0,26
1,00	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	0,30
1,25	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	0,33
1,5	$7,9 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	0,35
1,75	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$	0,36
2,00	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	0,40
2,25	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	$8,8 \cdot 10^{-1}$	1,10	0,42
2,5	$3,0 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,22	1,52	0,42
2,75	$3,8 \cdot 10^{-1}$	$9,4 \cdot 10^{-1}$	1,51	1,89	0,45
3,00	$4,6 \cdot 10^{-1}$	1,14	1,84	2,30	0,48
3,25	$5,7 \cdot 10^{-1}$	1,43	2,28	2,85	0,49
3,5	$6,9 \cdot 10^{-1}$	1,71	2,74	3,43	0,51
3,75	$7,8 \cdot 10^{-1}$	1,96	3,12	3,90	0,55
4,00	$9,3 \cdot 10^{-1}$	2,34	3,73	4,66	0,56

66

Variante C 2

Tableau T-8

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$8,5 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	0,30
0,75	$1,1 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	0,32
1,00	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	0,33
1,25	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	0,36
1,5	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-1}$	0,37
1,75	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	0,40
2,00	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-1}$	$7,8 \cdot 10^{-1}$	0,42
2,25	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$8,3 \cdot 10^{-1}$	1,03	0,45
2,5	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$6,8 \cdot 10^{-1}$	1,09	1,36	0,47
2,75	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$8,9 \cdot 10^{-1}$	1,41	1,77	0,48
3,00	$4,3 \cdot 10^{-1}$	1,08	1,73	2,15	0,51
3,25	$5,3 \cdot 10^{-1}$	1,32	2,11	2,64	0,53
3,5	$6,4 \cdot 10^{-1}$	1,59	2,54	3,18	0,55
3,75	$7,2 \cdot 10^{-1}$	1,80	2,86	3,58	0,60
3,00	$8,2 \cdot 10^{-1}$	2,04	3,26	4,07	0,64

Tableau T-9

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	0,40
0,75	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	0,42
1,00	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-2}$	0,46
1,25	$3,5 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	0,46
1,5	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	0,48
1,75	$8,8 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	0,50
2,00	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	$6,4 \cdot 10^{-1}$	0,51
2,25	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$	$8,9 \cdot 10^{-1}$	0,52
2,5	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-1}$	$9,6 \cdot 10^{-1}$	1,20	0,53
2,75	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$7,7 \cdot 10^{-1}$	1,23	1,54	0,55
3,00	$3,7 \cdot 10^{-1}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$	1,47	1,83	0,60
3,25	$4,5 \cdot 10^{-1}$	1,13	1,80	2,26	0,62
3,5	$5,4 \cdot 10^{-1}$	1,35	2,15	2,69	0,65
3,75	$6,3 \cdot 10^{-1}$	1,59	2,53	3,16	0,68
4,00	$7,3 \cdot 10^{-1}$	1,82	2,90	3,62	0,72

Tableau T-10

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	0,35
0,75	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	0,36
1,00	$2 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	0,40
1,25	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	0,42
1,5	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	0,42
1,75	$9,7 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-1}$	0,45
2,00	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$5,4 \cdot 10^{-1}$	$6,8 \cdot 10^{-1}$	0,48
2,25	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$7,6 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-1}$	0,49
2,5	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,25	0,51
2,75	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,28	1,60	0,53
3,00	$4 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,60	2,00	0,55
3,25	$5,1 \cdot 10^{-1}$	1,27	2,03	2,54	0,55
3,5	$6,2 \cdot 10^{-1}$	1,56	2,50	3,12	0,56
3,75	$7,6 \cdot 10^{-1}$	1,89	3,01	3,77	0,57
4,00	$9 \cdot 10^{-1}$	2,26	3,60	0,58	0,58

Tableau T-11

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	0,42
0,75	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	0,44
1,00	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$9,1 \cdot 10^{-2}$	0,45
1,25	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	0,47
1,5	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	0,48
1,75	$8,9 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	0,49
2,00	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	$6,4 \cdot 10^{-1}$	0,51
2,25	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$8,8 \cdot 10^{-1}$	0,53
2,5	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	1,16	0,55
2,75	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-1}$	1,17	1,46	0,58
3,00	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$8,9 \cdot 10^{-1}$	1,42	1,77	0,62
3,25	$4,4 \cdot 10^{-1}$	1,1	1,77	2,22	0,63
3,5	$5,5 \cdot 10^{-1}$	1,36	2,18	2,73	0,64
3,75	$6,5 \cdot 10^{-1}$	1,63	2,60	3,25	0,66
4,00	$7,8 \cdot 10^{-1}$	1,95	3,12	3,89	0,67

Variante C 3

Tableau T-12

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$	$8,7 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,47
0,75	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	0,48
1,00	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	0,49
1,25	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	0,51
1,5	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	0,53
1,75	$8,0 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	0,55
2,00	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	0,56
2,25	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-1}$	$7,8 \cdot 10^{-1}$	0,60
2,5	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-1}$	1,01	0,63
2,75	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$6,4 \cdot 10^{-1}$	1,03	1,28	0,66
3,00	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	1,31	1,64	0,67
3,25	$4,0 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,60	2,00	0,70
3,5	$4,9 \cdot 10^{-1}$	1,21	1,94	2,43	0,72
3,75	$5,8 \cdot 10^{-1}$	1,46	2,32	2,90	0,74
4,00	$6,9 \cdot 10^{-1}$	1,74	2,78	3,48	0,75

Tableau T-13

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	0,53
0,75	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	0,55
1,00	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	0,56
1,25	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	0,59
1,5	$4,6 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	0,60
1,75	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	0,62
2,00	$1 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	0,64
2,25	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	$6,9 \cdot 10^{-1}$	0,67
2,5	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$7,4 \cdot 10^{-1}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$	0,69
2,75	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$5,9 \cdot 10^{-1}$	$9,4 \cdot 10^{-1}$	1,18	0,72
3,00	$3 \cdot 10^{-1}$	$7,4 \cdot 10^{-1}$	1,19	1,48	0,74
3,25	$3,7 \cdot 10^{-1}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$	1,47	1,89	0,76
3,5	$4,5 \cdot 10^{-1}$	1,13	1,82	2,27	0,77
3,75	$5,5 \cdot 10^{-1}$	1,38	2,20	2,75	0,78
4,00	$6,5 \cdot 10^{-1}$	1,63	2,61	3,26	0,80

Tableau T-14

(Δ en cm)

l (m) \ Q (daN)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	0,35
0,75	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$4,6 \cdot 10^{-2}$	0,37
1,00	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	0,39
1,25	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	0,42
1,5	$6,4 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	0,43
1,75	$9,7 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-1}$	0,45
2,00	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	$6,9 \cdot 10^{-1}$	0,47
2,25	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$7,7 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-1}$	0,49
2,5	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$6,4 \cdot 10^{-1}$	1,02	1,27	0,50
2,75	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,28	1,60	0,53
3,00	$4 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,60	2,00	0,55
3,25	$5 \cdot 10^{-1}$	1,25	2,00	2,50	0,56
3,5	$6,1 \cdot 10^{-1}$	1,53	2,45	3,10	0,57
3,75	$7,4 \cdot 10^{-1}$	1,86	2,96	3,70	0,58
4,00	$8,9 \cdot 10^{-1}$	2,22	3,54	4,42	0,59

Tableau T-15

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$6,1 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	0,42
0,75	$7,8 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	0,44
1,00	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-2}$	0,46
1,25	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	0,47
1,5	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	0,48
1,75	$8,8 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	0,50
2,00	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	0,52
2,25	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$	$8,8 \cdot 10^{-1}$	0,53
2,5	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	1,16	0,55
2,75	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$	1,15	1,44	0,59
3,00	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$8,7 \cdot 10^{-1}$	1,40	1,74	0,63
3,25	$4,4 \cdot 10^{-1}$	1,09	1,75	2,19	0,64
3,5	$5,5 \cdot 10^{-1}$	1,39	2,19	2,73	0,64
3,75	$6,6 \cdot 10^{-1}$	1,66	2,65	3,30	0,65
4,00	$7,8 \cdot 10^{-1}$	1,95	3,12	3,90	0,67

Tableau T-16

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-3}$	$8,9 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,46
0,75	$7,2 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	0,48
1,00	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$	0,50
1,25	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	0,51
1,5	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	0,54
1,75	$8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	0,55
2,00	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	0,56
2,25	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	$7,9 \cdot 10^{-1}$	0,59
2,5	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,00	0,64
2,75	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	1,01	1,26	0,67
3,00	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	1,31	1,64	0,67
3,25	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$9,9 \cdot 10^{-1}$	1,60	2,00	0,71
3,5	$4,8 \cdot 10^{-1}$	1,20	1,92	2,40	0,73
3,75	$5,8 \cdot 10^{-1}$	1,46	2,32	2,90	0,74
4,00	$7 \cdot 10^{-1}$	1,74	2,78	3,48	0,75

Tableau T-17

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-3}$	0,54
0,75	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	0,55
1,00	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	0,57
1,25	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	0,59
1,5	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	0,61
1,75	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	0,62
2,00	$1 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	0,65
2,25	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$5,6 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-1}$	0,66
2,5	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-1}$	0,70
2,75	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$5,9 \cdot 10^{-1}$	$9,4 \cdot 10^{-1}$	1,20	0,72
3,00	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-1}$	1,17	1,46	0,75
3,25	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-1}$	1,45	1,81	0,77
3,5	$4,5 \cdot 10^{-1}$	1,12	1,79	2,24	0,78
3,75	$5,4 \cdot 10^{-1}$	1,35	2,15	2,68	0,80
4,00	$6,4 \cdot 10^{-1}$	1,59	2,54	3,18	0,82

Tableau T-18

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	0,35
0,75	$9,3 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$4,6 \cdot 10^{-2}$	0,37
1,00	$2 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$8,1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	0,40
1,25	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	0,42
1,5	$6,6 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	0,42
1,75	$9,7 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-1}$	0,45
2,00	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$5,4 \cdot 10^{-1}$	$6,8 \cdot 10^{-1}$	0,48
2,25	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$7,4 \cdot 10^{-1}$	$9,3 \cdot 10^{-1}$	0,50
2,5	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$	$9,8 \cdot 10^{-1}$	1,22	0,52
2,75	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,28	1,60	0,53
3,00	$4 \cdot 10^{-1}$	1,00	1,60	2,00	0,55
3,25	$4,9 \cdot 10^{-1}$	1,23	1,96	2,45	0,57
3,5	$5,9 \cdot 10^{-1}$	1,48	2,37	2,97	0,59
3,75	$7,2 \cdot 10^{-1}$	1,80	2,86	3,58	0,60
4,00	$8,6 \cdot 10^{-1}$	2,15	3,42	4,28	0,61

Tableau T-19

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	0,39
0,75	$8,4 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	0,41
1,00	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$	0,43
1,25	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	0,45
1,5	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	0,47
1,75	$8,9 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,8 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	0,49
2,00	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	0,52
2,25	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$4,3 \cdot 10^{-1}$	$6,9 \cdot 10^{-1}$	$8,6 \cdot 10^{-1}$	0,54
2,5	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$5,6 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-1}$	1,14	0,56
2,75	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-1}$	1,17	1,46	0,58
3,00	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$	1,40	1,80	0,61
3,25	$4,4 \cdot 10^{-1}$	1,11	1,78	2,22	0,63
3,5	$5,4 \cdot 10^{-1}$	1,34	2,15	2,69	0,65
3,75	$6,4 \cdot 10^{-1}$	1,61	2,56	3,20	0,67
4,00	$7,7 \cdot 10^{-1}$	1,92	3,07	3,83	0,68

Tableau T-20

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$	$9,5 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	0,43
0,75	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	0,45
1,00	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	0,47
1,25	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	0,50
1,5	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	0,52
1,75	$8,3 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$	0,53
2,00	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-1}$	$5,9 \cdot 10^{-1}$	0,55
2,25	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	0,57
2,5	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$5,3 \cdot 10^{-1}$	$8,5 \cdot 10^{-1}$	1,06	0,60
2,75	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$6,7 \cdot 10^{-1}$	1,07	1,34	0,63
3,00	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$8,5 \cdot 10^{-1}$	1,35	1,69	0,65
3,25	$4,1 \cdot 10^{-1}$	1,03	1,65	2,05	0,68
3,5	$5 \cdot 10^{-1}$	1,25	2,00	2,50	0,70
3,75	$5,9 \cdot 10^{-1}$	1,48	2,35	2,94	0,73
4,00	$7,1 \cdot 10^{-1}$	1,77	2,82	3,52	0,74

Tableau I-21

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,1 \cdot 10^{-3}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0,49
0,75	$6,6 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	0,52
1,00	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	0,54
1,25	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	0,57
1,5	$4,6 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	0,60
1,75	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	0,62
2,00	$1 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	0,65
2,25	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	$6,8 \cdot 10^{-1}$	0,68
2,5	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$	0,71
2,75	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$5,6 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-1}$	1,13	0,75
3,00	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$7,3 \cdot 10^{-1}$	1,16	1,44	0,76
3,25	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-1}$	1,43	1,79	0,78
3,5	$4,4 \cdot 10^{-1}$	1,10	1,75	2,19	0,80
3,75	$5,3 \cdot 10^{-1}$	1,33	2,12	2,65	0,81
4,00	$6,4 \cdot 10^{-1}$	1,60	2,54	3,18	0,82

Variante A 6

Tableau T-22

(Δ en cm)

Q (daN) \ l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$5,7 \cdot 10^{-3}$	$9,1 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,45
0,75	$7,3 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	0,47
1,00	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$8,2 \cdot 10^{-2}$	0,50
1,25	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$7,7 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	0,52
1,5	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	0,54
1,75	$7,8 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	0,56
2,00	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-1}$	0,60
2,25	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$3,8 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-1}$	$7,5 \cdot 10^{-1}$	0,62
2,5	$2 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	$8,1 \cdot 10^{-1}$	1,01	0,63
2,75	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	1,04	1,30	0,65
3,00	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	1,31	1,64	0,67
3,25	$4,1 \cdot 10^{-1}$	1,03	1,64	2,00	0,68
3,5	$5 \cdot 10^{-1}$	1,25	2,00	2,50	0,70
3,75	$6,1 \cdot 10^{-1}$	1,52	2,42	3,02	0,71
4,00	$7,3 \cdot 10^{-1}$	1,82	2,90	3,62	0,72

Tableau T-23

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,7 \cdot 10^{-3}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{-2}$	0,54
0,75	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	0,55
1,00	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	0,57
1,25	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$6,7 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	0,60
1,5	$4,5 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	0,61
1,75	$7 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	0,63
2,00	$1 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	0,66
2,25	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	$5,4 \cdot 10^{-1}$	$6,7 \cdot 10^{-1}$	0,69
2,5	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	$7,1 \cdot 10^{-1}$	$8,9 \cdot 10^{-1}$	0,72
2,75	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$5,7 \cdot 10^{-1}$	$9,2 \cdot 10^{-1}$	1,15	0,74
3,00	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-1}$	1,16	1,45	0,76
3,25	$3,6 \cdot 10^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-1}$	1,45	1,81	0,77
3,5	$4,4 \cdot 10^{-1}$	1,11	1,77	2,21	0,79
3,75	$5,3 \cdot 10^{-1}$	1,33	2,12	2,65	0,81
4,00	$6,3 \cdot 10^{-1}$	1,58	2,52	3,14	0,83

115

Tableau I-24

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$8,4 \cdot 10^{-3}$	0,61
0,75	$5,5 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	0,62
1,00	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$	0,64
1,25	$2,4 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$9,7 \cdot 10^{-2}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	0,66
1,5	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	0,69
1,75	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	0,71
2,00	$8,8 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$3,5 \cdot 10^{-1}$	$4,4 \cdot 10^{-1}$	0,71
2,25	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	$4,9 \cdot 10^{-1}$	$6,1 \cdot 10^{-1}$	0,76
2,5	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$4,1 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	0,78
2,75	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-1}$	$8,4 \cdot 10^{-1}$	1,05	0,81
3,00	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$6,6 \cdot 10^{-1}$	1,06	1,32	0,83
3,25	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$8,3 \cdot 10^{-1}$	1,33	1,67	0,84
3,5	$4,1 \cdot 10^{-1}$	1,03	1,64	2,06	0,85
3,75	$5 \cdot 10^{-1}$	1,26	2,00	2,50	0,86
4,00	$5,9 \cdot 10^{-1}$	1,49	2,38	2,96	0,88

Tableau I-25

(Δ en cm)

Q (daN) l (m)	2 0 0	5 0 0	8 0 0	1 0 0 0	η
0,5	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	$6,2 \cdot 10^{-3}$	$7,7 \cdot 10^{-3}$	0,66
0,75	$5,1 \cdot 10^{-3}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	0,67
1,00	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	0,70
1,25	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	$8,9 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	0,72
1,5	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	0,73
1,75	$5,9 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	0,74
2,00	$8,4 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	$4,2 \cdot 10^{-1}$	0,78
2,25	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{-1}$	$5,8 \cdot 10^{-1}$	0,80
2,5	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-1}$	$7,9 \cdot 10^{-1}$	0,81
2,75	$2 \cdot 10^{-1}$	$5,1 \cdot 10^{-1}$	$8,2 \cdot 10^{-1}$	1,02	0,83
3,00	$2,6 \cdot 10^{-1}$	$6,5 \cdot 10^{-1}$	1,04	1,29	0,85
3,25	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	1,27	1,59	0,88
3,5	$3,9 \cdot 10^{-1}$	$9,8 \cdot 10^{-1}$	1,57	1,96	0,89
3,75	$4,7 \cdot 10^{-1}$	1,18	1,89	2,36	0,91
4,00	$5,7 \cdot 10^{-1}$	1,42	2,27	2,84	0,92

Justification de la relation entre le degré de jonction et la rigidité
du ressort virtuel à l'appui

Considérons la figure II-12 (§ II.5.a).

Appelons \bar{K} la rigidité du ressort d'attache (virtuel), $\bar{\Theta}$ la rotation de la fibre moyenne de la poutre, et M le moment fléchissant ramené à la section d'attache.

On peut écrire, par définition de la raideur d'un ressort de rotation :

$$M = \bar{K} \cdot \bar{\Theta} \quad (B - 1)$$

$$\text{or : } M = P l \text{ et } \bar{\Theta} = \frac{\bar{\Delta}}{l}$$

d'où, en portant ces valeurs dans (B-1) :

$$P l = \bar{K} \frac{\bar{\Delta}}{l}$$

$$\text{soit : } \bar{K} = \frac{P l^2}{\bar{\Delta}} \quad (B - 2)$$

En revenant à la définition du degré de jonction, on peut écrire :

$$\eta = \frac{\Delta_o}{\Delta} = \frac{\Delta_o}{\bar{\Delta} + \Delta_o}$$

d'où :

$$\bar{\Delta} = \Delta_o \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)$$

$$\text{comme } \Delta_o = \frac{P l^3}{3 E I}$$

, il vient :

$$\bar{\Delta} = \frac{P l^3}{3 E I} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) \quad (B - 3)$$

En remplaçant $\bar{\Delta}$ par sa valeur dans (B-2), on obtient :

$$\bar{K} = \frac{3EI}{l} \cdot \frac{\eta}{1-\eta} \quad (\text{B} - 4)$$

or, $\frac{3EI}{l}$ n'est rien d'autre que la rigidité flexionnelle de la poutre supposée parfaitement encastrée en (i).

Si on pose $\frac{3EI}{l} = K_0$, l'expression (B-4) devient :

$$\bar{K} = K_0 \frac{\eta}{1-\eta}$$

A N N E X E (C)

TABLEAUX PRATIQUES DE CALCUL

C.1 Rappels

Au chapitre III, il a été établi des relations générales permettant de calculer les moments d'encastrement élastique, les rigidités des barres, compte tenu de leurs attaches non-rigides, et les coefficients de transmission, en fonction des degrés de jonction.

Ces relations sont rappelées ci-dessous :

- moment d'encastrement élastique :

$$\overline{M}_{ij} = \frac{2 r_{ij}}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} \cdot r_{ji}} \cdot \left[2 M_{ij} - (1 - r_{ji}) M_{ji} \right]$$

où M_{ij} et M_{ji} sont les moments d'encastrement parfait ;

- rigidité de la barre liée élastiquement à ses noeuds :

$$\overline{R}_{ij} = \frac{4EI}{1} \cdot \left[\frac{r_{ij} (3 + r_{ji})}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} \cdot r_{ji}} \right]$$

- coefficient de transmission :

$$\overline{t}_{ij} = \frac{2 r_{ji}}{3 + r_{ji}}$$

C.2 Etablissement des tableaux

En posant :

$$(a) \quad \frac{2 r_{ij}}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} r_{ji}} = \alpha_{ij}$$

$$(b) \quad \frac{r_{ij} (3 + r_{ji})}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} r_{ji}} = \beta_{ij}$$

les relations donnant \overline{M}_{ij} , \overline{R}_{ij} et \overline{t}_{ij} s'écrivent :

$$\overline{M}_{ij} = \alpha_{ij} \cdot [2 M_{ij} - (1 - r_{ji}) M_{ji}]$$

$$\overline{R}_{ij} = \frac{4EI}{l} \cdot \beta_{ij}$$

$$\overline{t}_{ij} = \frac{2 r_{ji}}{3 + r_{ji}}$$

Il est proposé alors trois tableaux permettant de simplifier les calculs :

- le premier tableau donnera α_{ij} pour différents couples de valeurs (r_{ij}, r_{ji}) .
- le deuxième tableau donnera β_{ij} pour différents couples de valeurs (r_{ij}, r_{ji}) .
- le troisième tableau donnera \overline{t}_{ij} en fonction de r_{ji} .

Tableau

$$\alpha_{ij} = \frac{2 r_{ij}}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij} r_{ji}}$$

$r_{ji} \backslash r_{ij}$	0,10	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,10	0,063	0,122	0,150	0,178	0,205	0,231	0,257	0,282	0,306	0,330	0,353	0,375	0,397	0,419	0,440	0,460	0,480	0,500
0,20	0,061	0,119	0,147	0,174	0,201	0,227	0,253	0,278	0,302	0,326	0,349	0,372	0,395	0,417	0,438	0,459	0,480	0,500
0,25	0,060	0,118	0,145	0,173	0,199	0,225	0,251	0,276	0,300	0,324	0,348	0,371	0,393	0,416	0,437	0,459	0,479	0,500
0,30	0,059	0,116	0,144	0,171	0,197	0,223	0,249	0,274	0,299	0,323	0,346	0,369	0,392	0,415	0,436	0,458	0,479	0,500
0,35	0,059	0,115	0,142	0,169	0,196	0,222	0,247	0,272	0,297	0,321	0,345	0,368	0,391	0,413	0,436	0,457	0,479	0,500
0,40	0,058	0,114	0,141	0,168	0,194	0,220	0,245	0,270	0,295	0,319	0,343	0,366	0,390	0,412	0,435	0,457	0,479	0,500
0,45	0,057	0,112	0,139	0,166	0,192	0,218	0,243	0,268	0,293	0,317	0,341	0,365	0,388	0,411	0,434	0,456	0,478	0,500
0,50	0,056	0,111	0,138	0,164	0,190	0,216	0,242	0,267	0,291	0,316	0,340	0,364	0,387	0,410	0,433	0,456	0,478	0,500
0,55	0,056	0,110	0,137	0,163	0,189	0,189	0,214	0,240	0,265	0,290	0,314	0,338	0,362	0,386	0,409	0,432	0,478	0,500
0,60	0,055	0,109	0,135	0,161	0,187	0,213	0,238	0,263	0,288	0,313	0,337	0,361	0,385	0,408	0,431	0,455	0,477	0,500
0,65	0,054	0,108	0,134	0,160	0,186	0,211	0,236	0,261	0,286	0,311	0,335	0,359	0,383	0,407	0,431	0,454	0,477	0,500
0,70	0,054	0,106	0,132	0,158	0,184	0,209	0,235	0,260	0,285	0,309	0,334	0,358	0,382	0,406	0,430	0,453	0,477	0,500
0,75	0,053	0,105	0,131	0,157	0,182	0,208	0,233	0,258	0,283	0,308	0,332	0,357	0,381	0,405	0,429	0,453	0,476	0,500
0,80	0,052	0,104	0,130	0,155	0,181	0,206	0,231	0,256	0,281	0,306	0,331	0,355	0,380	0,404	0,428	0,452	0,476	0,500
0,85	0,052	0,103	0,129	0,154	0,179	0,205	0,230	0,255	0,280	0,305	0,329	0,354	0,379	0,403	0,427	0,452	0,476	0,500
0,90	0,051	0,102	0,127	0,153	0,178	0,203	0,228	0,253	0,278	0,303	0,328	0,353	0,377	0,402	0,427	0,451	0,476	0,500
0,95	0,051	0,101	0,126	0,151	0,176	0,202	0,227	0,252	0,277	0,302	0,326	0,351	0,376	0,401	0,426	0,451	0,475	0,500
1,00	0,050	0,100	0,125	0,150	0,175	0,200	0,225	0,250	0,275	0,300	0,325	0,350	0,375	0,400	0,425	0,450	0,475	0,500

Tableau

$$\beta_{ij} = \frac{r_{ij}(3 + r_{ji})}{3 + r_{ij} + r_{ji} - r_{ij}r_{ji}}$$

$r_{ij} \backslash r_{ji}$	0,10	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,10	0,097	0,189	0,223	0,276	0,318	0,358	0,398	0,437	0,474	0,511	0,547	0,582	0,616	0,649	0,682	0,714	0,745	0,775
0,20	0,098	0,190	0,235	0,279	0,322	0,364	0,404	0,444	0,484	0,522	0,559	0,596	0,632	0,667	0,701	0,735	0,768	0,800
0,25	0,098	0,191	0,236	0,281	0,324	0,366	0,408	0,448	0,488	0,527	0,565	0,603	0,639	0,675	0,711	0,745	0,779	0,813
0,30	0,098	0,192	0,237	0,282	0,326	0,369	0,411	0,452	0,493	0,532	0,571	0,609	0,647	0,684	0,720	0,756	0,791	0,825
0,35	0,098	0,193	0,238	0,283	0,328	0,371	0,414	0,456	0,497	0,537	0,577	0,616	0,655	0,693	0,730	0,766	0,802	0,838
0,40	0,098	0,193	0,239	0,285	0,330	0,374	0,417	0,459	0,501	0,543	0,583	0,623	0,662	0,701	0,739	0,777	0,814	0,850
0,45	0,098	0,194	0,240	0,286	0,332	0,376	0,420	0,463	0,506	0,548	0,589	0,630	0,670	0,710	0,749	0,787	0,825	0,863
0,50	0,099	0,194	0,241	0,288	0,333	0,378	0,423	0,467	0,510	0,553	0,595	0,636	0,677	0,718	0,758	0,797	0,836	0,875
0,55	0,099	0,195	0,242	0,289	0,335	0,381	0,426	0,470	0,514	0,558	0,601	0,643	0,685	0,725	0,767	0,808	0,848	0,888
0,60	0,099	0,196	0,243	0,290	0,337	0,383	0,429	0,474	0,518	0,563	0,606	0,649	0,692	0,735	0,777	0,818	0,859	0,900
0,65	0,099	0,196	0,244	0,292	0,339	0,385	0,431	0,477	0,522	0,567	0,612	0,656	0,700	0,743	0,786	0,828	0,871	0,913
0,70	0,099	0,197	0,245	0,293	0,340	0,387	0,434	0,481	0,527	0,572	0,617	0,662	0,707	0,751	0,795	0,839	0,882	0,925
0,75	0,099	0,197	0,246	0,294	0,342	0,390	0,437	0,484	0,531	0,577	0,623	0,669	0,714	0,759	0,804	0,849	0,893	0,938
0,80	0,099	0,198	0,247	0,295	0,344	0,392	0,440	0,487	0,535	0,582	0,628	0,675	0,722	0,768	0,814	0,859	0,905	0,950
0,85	0,100	0,198	0,248	0,297	0,345	0,394	0,442	0,490	0,538	0,586	0,634	0,681	0,729	0,776	0,823	0,870	0,916	0,963
0,90	0,100	0,199	0,248	0,298	0,347	0,396	0,445	0,494	0,542	0,591	0,639	0,688	0,736	0,784	0,832	0,880	0,927	0,975
0,95	0,100	0,199	0,249	0,299	0,348	0,398	0,447	0,497	0,546	0,595	0,645	0,694	0,743	0,792	0,841	0,890	0,939	0,988
1,00	0,100	0,200	0,250	0,300	0,350	0,400	0,450	0,500	0,550	0,600	0,650	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	1,000

Tableau $\bar{r}_{ij} = \frac{2r_{ji}}{3 + r_{ji}}$

r_{ji}	\bar{r}_{ij}
0,10	0,065
0,20	0,125
0,25	0,154
0,30	0,182
0,35	0,209
0,40	0,235
0,45	0,261
0,50	0,286
0,55	0,310
0,60	0,333
0,65	0,356
0,70	0,378
0,75	0,400
0,80	0,424
0,85	0,442
0,90	0,462
0,95	0,481
1,00	0,500

B I B L I O G R A P H I E

- 1°) C. AVRAM. Problema incastrării parțial pe teren elastic. Buletinul Comunicărilor științifice și tehnice al Institutului politehnic. Timisoara, 1956.
- 2°) G.F. BAKER, E.L. WILLIAMS. The effect of wind loads on Frames With Semi-Rigid Connections. Final Report. Steel Structures Research Committee, HMSO, London, England. 1936.
- 3°) C. BATHO. The Analysis and Design of Beams Under Given End Restraints. Final Report. Steel Structures Research Committee HMSO, London, England. 1936.
- 4°) C. BATHO, H.C. ROWAN. The Analysis of the Moments in the Members of a Frame Having Rigid or Semi-Rigid Connections, Under Vertical loads. Second Report, Steel Structures Research Committee, HMSO, England, 1934.
- 5°) P. BOTIZAN. Asupra încăstrării parțiale a barelor construcțiilor metalice. B.S. I.P.C. 14, 1971.
- 6°) P. BOTIZAN. Cadre din bare drepte cu secțiune constantă încăstrate parțial. Rigidități și momente de încăstrare parțială. Institutul politehnic Cluj. Sesiunea științifică a cadrelor didactice, 2-3 aprilie 1971.

- 7°) P. BOTIZAN. Coeficienti de incastrare partiala pentru stilpii cu o variatie brusca de sectiune ai halelor industriale. Constructii metalice. Timisoara, octobree 1973.
- 8°) P. BOTIZAN. Matricea de rigiditate a barei drepte de sectiune constanta cu legaturi elastice. Conferinta de constructii metalice. Timisoara, 1973.
- 9°) P. BOTIZAN. Rigiditati si momente de incastrate partiale pentru bare cu sectiune variabila. BSIPC 1972.
- 10°) R. DELESQUES. Le calcul des assemblages boulonnés par platine d'extrémité. C.M. 4/1972.
- 11°) R. DELESQUES. Résistance des platines d'appui des poteaux. C.M. 3/1971.
- 12°) R.T. DOUTY. W.M₀. GUIRE. High strenght bolted Moment connections. Journal of the Structural Division, ASCE, avril 1965
- 13°) D.J. FIELDIING, J.S. HUANG. Shear in Beam-to-Column connections. Welding Journal. Vol. 50, N°7, Research Supplement, 1971
- 14°) D. GEORGESCU. Contributii la studiul comportarii spatiale a structurii halelor industriale. Teza de doctorat, I.C.B. 1969.
- 15°) J.M. GERE, W.WEAVER. Analysis of framed structures. Princeton, d. van Nostrand Co. 1965.

- 16°) R.A. HECHIMAN, B.G. JOHNSTON. Riveted and Semi-Rigid Beam to column Building Connections. Progress Report Nंबर 1, American Institute of Steel Construction, New York, N.Y. 1947.
- 17°) HUANG TUAW YIN. The Derivation of a Blastic Restraint Equation for Split Beam Semi-Rigid Blam-Column Connection. Lthesis, College of Engineering, Oklahoma State University, 1958.
- 18°) R.P. JOHNSON, M. HOPE-GILL. Semi-Rigid Joints in Composite Frames. INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDEE AND STRUCTURAL ENGINEERING. PRELIMINARY REPORT, OF KINTH CONGRESS, 8-13 MAY 1972.
- 19°) B.G. JOHNSON, E.H. MOUNT. Analysis of Building Frames Nith Semi-Rigid Connections. Transaction, ASCE, Vol. L₀7, 1942.
- 20°) N. JUNCAN, P. BOTIZAN. Etude théorique et expérimentale sur l'encastrement des barres des cadres métalliques aux noeuds. TALL BUILDINGS CONFRENCE, Bratislava, 1973.
- 21°) D. KHALILI. Etude de la plaque d'extrémité dans les assemblages par boulons à haute résistance. Thèse de doctorat. Université de Paris VI, 14 avril 1972.
- 22°) D. KHALILI. Recherches sur l'assemblage par boulonnage d'une plaque d'extrémité. C.M. 4/1972.

- 23°) I. KONISHI, S. YAMAKAWA. Behavior of high strength bolted and plate connections. Proc. Of the symposium on high-strength steel and its joints, 1965, Japan Society for the Promotion of Science, Tokyo, 1966.
- 24°) C.W. LEWITT, E. CHESSON, W.H. MUNSE. Restraint Characteristics of Flexiole Riveted and Bolted Beam-to-Column Connections. Structural Research Series N_r. 296, Rept. Of. Civil. Eng. University of Illinois, Urbana, Illinois, march, 1966.
- 25°) J.E. LOTHERS. Elastic Restraint Equation for Semi-Rigid Connections. Transactions, ASCE, Vol. 116, 1951.
- 26°) C.R. MATEESCU. La résolution des systèmes hypertactiques par deux méthodes récentes - critique et extension des méthodes Filipesco et Cross. Thèse de doctorat. Bucuresti, 1938.
- 27°) G.R. MONFORION, I.S.WU. Matrix Analysis of Semi-Rigidly connected Frames. JSE, ASCE, 89, SI 6, décembre 1963.
- 28°) W.H. MUNSE, N.G. BELL, E. CHESSON. Behavior of Beam-to-Column Connection. Transactions, ASCE, 126, Part. II, 1961.
- 29°) W.H. MUNSE, N.G. BELL, E. CHESSON. Behavior of Riveted and Bolted Beam-to-Column Connections. Proceedings, ASCE, 85, march 1959.

- 30°) T. NAKA, B. KATO, M. WATABE. Research on the Behavior of Steel Beam-to-Column Connections. Laboratory for Steel Structures, Dept, of Architecture, University of TOKYO, Japan, 1966.
- 31°) I. NAKA, B. KATO, A.TANAKA, K. MORIKA. Experimental study of high-strength bolted moment connections. Proc. Of the symposium on thigh-strength steel and its joints, 26 nov. 1965 Japan Societe for the Promotion of Science, TOKYO, sept 1966.
- 32°) J.K. PERRY. Semi-Rigid Connections Compared with Simply Supported Membres in Building Frames. Thesis, College of Engineering, Oklahoma State University, 1952.
- 33°) W.R. QUIRK. The Contribution of column Franges to the Rotation of Partially Restrained Riveted Connections in Building Frames. Thesis, College of Engineering, Oklahoma State University 1952.
- 34°) J.C. RATHBUN. Elastic Properties of Riveted Connection Transactions, ASCE, Vol. 101, 1936.
- 35°) D. SFINTESCO, P. DAUPHIN. Assemblages poutre-poteau par boulons H.R.C.M. 4/1967.

- 36°) A.N. SHERBOURNE. Bolted Beam-to-Column Connections. The Structural Engineer, juin 1961.
- 37°) B. SOURCHNIKOFF. Wind Stresses in Semi-Rigid Connections of Steel Framework. Transactions, ASCE, Vol. 115, 1950.
- 38°) E. YARIMCI, R.B. SLUTTLER. Results of Tests on Riveted Connections. Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, Report Nr. 200634031, avril 1963.